

# RELACIÓN ENTRE PERÍMETRO Y ÁREA: EL CASO DE PATRICIA Y LAS INTERACCIONES

Graciela García-Amadeo, ISFD 25-Carmen de Patagones, Argentina

José Carrillo, Universidad de Huelva

## **Resumen**

*Presentamos un estudio de caso de una niña de 5° de Educación Primaria en el que se aborda la relación entre área y perímetro partiendo de una unidad didáctica basada en la resolución de problemas, cuyo objetivo es construir el concepto de área. El análisis de cuestionarios, observación de aula, protocolos e interacciones nos permiten reflejar aspectos cognitivos y sociológicos inherentes al proceso de construcción mencionado.*

## **Abstract**

*We present a case study with a grade 5 pupil, in which we approach the relationship between area and perimeter starting from a teaching unit based on problem solving, whose goal is the building of the concept of area. The analysis of questionnaires, classroom observation, protocols and interactions allow us to show cognitive and social aspects immersed in the above mentioned process of construction.*

En la construcción del concepto de área, la literatura de investigación y nuestra experiencia en la observación de clases de primaria y en la formación de maestros ponen de relieve la confusión entre área y perímetro (debido al uso indebido de las fórmulas, carentes, en general, de significado), y la errónea implicación entre igualdad de áreas e igualdad de perímetros. Kouba (1988), de los Reyes (1999) y Moyer (2001) distinguen dos tipos de dificultades en relación con esta confusión: confusión de nombres y conceptual (no entienden el carácter bidimensional del área). En Buenos Aires, los informes de evaluación de calidad realizados a alumnos de 7° en 2002 señalan un enfoque inadecuado, pues se invierte mucho tiempo en tareas de conversión de unidades en perjuicio de actividades de manipulación y exploración centradas en el significado. Para abordar esta problemática, se proponen los objetivos: a) Distinguir el concepto de área y perímetro de una superficie. b) Analizar la variabilidad del perímetro en figuras equivalentes, sin recurrir a unidades de medida convencionales y se sugiere la resolución de problemas como estrategia metodológica.

Para analizar la relación entre ambos conceptos diseñamos una unidad didáctica basada en resolución de problemas para 5° EPB<sup>1</sup> y analizamos el caso de una alumna, Patricia, en interacción con la maestra y sus compañeras.

## **FUNDAMENTOS TEÓRICOS**

Seguidamente presentamos nuestro posicionamiento respecto a concepción del aprendizaje, construcción de conceptos, interacciones y resolución de problemas.

La construcción del conocimiento para Vigotsky está relacionada con las manifestaciones de intercambio comunicativo y las actividades que se llevan a cabo de manera cooperativa entre los integrantes del grupo. Desde el constructivismo social asumimos la posición de

---

<sup>1</sup> Enseñanza Primaria Básica en Buenos Aires, Argentina

Wheatley (1992, citado por Fernández, 2000), cuando expresa que “*aprender matemática es construir relaciones matemáticas, negociar significados matemáticos con los otros y reflexionar sobre su propia práctica matemática*” (p. 50). Supone experiencias previas que conducen a nuevas, y a su vez se actualizan e integran en nuevos aprendizajes; esta reestructuración es posible en un contexto de actividades que se resuelven en grupo e instalan vínculos que otorgan sentido y significatividad a los aprendizajes.

En cuanto a la construcción de conceptos, comprender ese proceso en el niño es posible, parcialmente, a través de las manifestaciones escritas y orales, distinguiendo el concepto de su representación. La teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1996) nos permite analizar los vínculos y rupturas entre los conocimientos alrededor del concepto.

Por otra parte, en el aula se forman pequeños grupos naturales que trabajan de forma productiva resolviendo problemas, enfatizando distintas opiniones. Las interacciones producidas permiten efectuar un análisis sociológico basado en Cobb (1995), quien analiza las oportunidades de aprendizaje distinguiendo tipos de interacción en función del nivel de compromiso establecido por los niños (univocal y multivocal), la colaboración (directa o indirecta) manifiesta y la relación de poder y autoridad establecida en el grupo (matemática o social).

Respecto a la resolución de problemas, la consideramos como estrategia de aprendizaje e instrumento metodológico. Como estrategia de aprendizaje, pues nos referimos a ella como “un medio para el aprendizaje de conocimientos nuevos” consustanciados con la visión de Carrillo (1998), quien sostiene que es “*una tarea compleja, que ofrece la posibilidad para organizar la diversidad de niveles en el aula y es el marco ideal para la construcción de aprendizaje significativo*” (p. 13). Como instrumento metodológico nos permite obtener información sobre cómo aprenden los niños un concepto, pues, cuando los niños resuelven problemas, interactúan con los conocimientos cotidianos y escolares a través de reglas, destrezas y conceptos previos con el objetivo de problematizar y construir de manera comprensiva dicho concepto.

## METODOLOGÍA

Esta comunicación es parte de una investigación acerca de la construcción del concepto de área cuando se implementa una metodología de resolución de problemas. Pretendemos comprender e interpretar en profundidad las representaciones que se manifiestan en una niña, integrante de un grupo de 3. Así, el trabajo posee fines *ideográficos* (Latorre et al, 1997), y toma datos del aula en situaciones naturales que permiten una comprensión directa de la situación. Para ello se realiza un estudio *longitudinal*, con los siguientes momentos:

- 2 cuestionarios para: a) evaluar sus conocimientos matemáticos previos, b) detectar las ideas previas para brindar información acerca del concepto.
- Resolución grupal de problemas para averiguar las representaciones intermedias producidas de forma continua.
- 2 cuestionarios que permitieron detectar el modo y la significatividad con que la niña construyó el concepto: a) al finalizar la secuencia de aprendizaje, y b) seis meses después.

En cada momento se implementan diferentes instrumentos, que generan, nutren y/o modifican el desarrollo del siguiente, o sea, este trabajo es *flexible* a los cambios producidos con posterioridad, siguiendo las pautas del modelo *cualitativo*, enfoque *interpretativo* de un estudio de caso.

En vista a ello, focalizamos el trabajo en un 5º año, con niños de 10 años, seleccionamos un grupo natural y focalizamos en una niña, Patricia, por su disposición, interés y riqueza del material (relevancia para la investigación, LeCompte y Preissle, 1993).

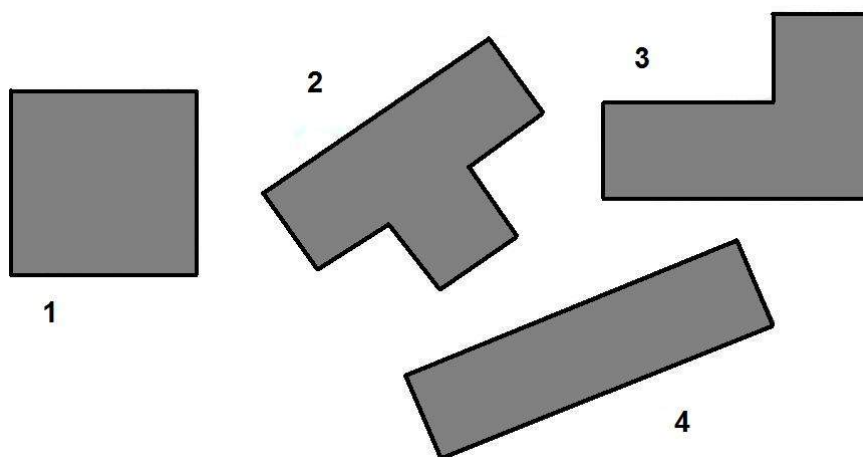
Diseñamos la unidad de aprendizaje con la maestra. Coincidimos en crear un ambiente de resolución de problemas para generar el avance en la construcción del concepto, y consideramos los aspectos *fenomenológicos* de Freudenthal (1983), quien afirma que en este nivel de enseñanza debe primar el estudio de procedimientos que permitan medir y comparar el área de superficies antes de pretender construir dicho concepto. Con respecto a los recursos, Kordaki y Potari (2002) sugiere el uso de software y Cass et al (2002) sugieren material concreto manipulativo pues promueven el desarrollo de habilidades a largo plazo; nosotros nos decidimos por ésta última opción en función de la accesibilidad del material y el desenvolvimiento de los niños. Finalmente, concebimos el área como una magnitud autónoma propia de las formas geométricas, no vinculada a la forma, que permite, mediante el uso de unidades, asociarles un número, diferenciando así la superficie del área y de su medida. Estos aspectos nos permiten abordar el concepto desde un tratamiento cualitativo y cuantitativo, con procedimientos geométricos y numéricos.

En el análisis de los datos damos cuenta de las construcciones cognitivas y sociológicas. Para las primeras consideramos segmentos de contenido que nos brindan información sobre la niña, a través de sus protocolos y la conversación (grabada en vídeo) con la maestra y sus compañeras. Así podemos obtener una visión focalizada de sus respuestas y las intervenciones producidas. Para las construcciones sociológicas consideramos las interacciones del grupo (Cobb, 1995), señalando la forma en que las concepciones de la niña y sus interpretaciones evolucionan cuando interactúa con sus compañeros. Para ello se efectúa una revisión de las grabaciones, focalizando en las relaciones y roles de cada uno dentro del grupo. Estas nuevas miradas, en el marco del estudio amplio (construcción del concepto de área), del que lo que presentamos es sólo una parte, pueden llevarnos a:

- a) Realizar una resignificación de la categoría y obtener relaciones entre otras que permitan establecer la reorganización conceptual que hace la niña sobre el concepto de área.
- b) Explicitar las expectativas de la niña hacia las otras compañeras del grupo.
- c) La oportunidad de aprendizaje surgida.

## **EL ESTUDIO**

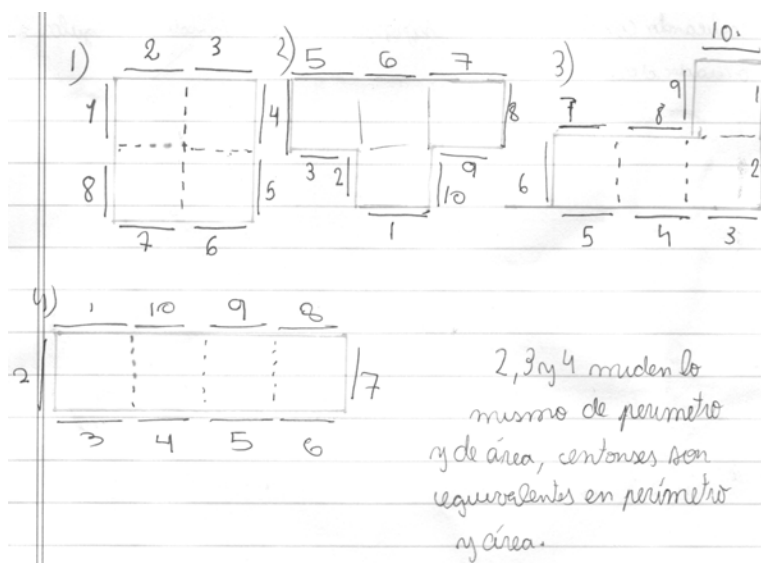
Referimos el análisis a la actividad 6, para ello los alumnos disponen de bobina de hilo no deformable, goma de pegar y la consigna: *Intenta bordear las figuras con un hilo, ¿utilizas la misma cantidad de hilo para cada una de ellas?*



*Proyecto Albanta, libro de recursos de 6ª*

Pretendemos que diferencien el área de la forma, sin permitir acudir a una unidad de medida convencional y así comprueben que figuras equivalentes pueden o no tener igual perímetro.

Patricia señala sobre el contorno de cada figura un segmento de longitud igual al lado de cada uno de los cuadrados en que la divide. A cada uno asigna un número de forma consecutiva y en sentido horario, y escribe “2,3 y 4 miden lo mismo de perímetro y de área, entonces son equivalentes en perímetro y área”.



Del ascendiente que tiene Patricia en el grupo da cuenta el siguiente fragmento, en el que todos los niños de la mesa la miran y ella bordea el cuadrado, explicando un posible procedimiento:

Patricia: supongamos que el hilo sean las líneas. Sumas esto más esto y te da cuánto mide esto. (Patricia va marcando los lados de la figura). Midamos con regla  $3 \times 4 = 12$ . Miden 12.

A continuación sus compañeros comienzan a resolver el problema, utilizando el hilo. Esta actitud nos llevó a pensar que ella manifiesta un tipo de autoridad predominantemente matemática; Murray (1992), citado por Cobb (1995) afirma que esta actitud produce un desequilibrio en el grupo, pues sus compañeros se sienten obligados a adaptarse a la actividad del otro para ser efectivos en el mismo. Sin embargo, no es éste el caso, pues mientras Patricia compara los hilos entre sí, cada niña se involucra en el problema monitoreando lo que va realizando:

Cecilia: Tenemos que averiguar si para todos usamos la misma cantidad. Cortamos el hilo y probemos con los otros.

Flor: Yo hago una para cada figura

Cecilia: Pero para qué si...

Mirta: El cuadrado es más simple....no tienen tantas entraditas. Pues bordear con el hilo te lleva más hilo. Cuando hago este cuadrado, no sabía... ¿hay que hacer un hilo para cada uno?

y en vista de ello Patricia reconoce: Lo que pasa que había medido mal, rectificando su resultado y arribando al correcto, aunque anteriormente ya había reconocido que figuras equivalentes pueden tener distinto perímetro:

Patricia: Yo no creo realmente que esto con el hilo te dé. En realidad no vale la pena....no da lo mismo porque tienen la misma área pero tienen distinto perímetro

Con respecto a la variabilidad del perímetro, Patricia, al escuchar a Cecilia, rápidamente subdivide la figura cuadrangular en cuatro cuadrados iguales y considera las características del cuadrado que hacen que sea esta figura la de menor perímetro:

Cecilia: Porque a la vista en este dibujo hay cuadrados adentro.

Patricia: Hay lados en esta figura que no se cuentan y en las otras sí.

Es decir, Cecilia expresa su idea y al instante Patricia comprende y completa lo expresado por Cecilia, ésta pone en duda lo expresado por Patricia y en función de sus argumentos llegan ambas a la solución. Cuando Patricia valida la resolución, manifiesta a través del término *nosotras* la participación en la resolución del problema.

En esta unidad se observan, pues, interacciones de tipo multivocal y colaboración indirecta entre Cecilia y Patricia, al intervenir de manera conjunta y monitoreando cada una lo realizado por la otra.

En grupo comparan el perímetro y el área de las distintas figuras, utilizando una unidad conveniente:

Patricia: cuando mido el perímetro guiándome por los lados del cuadrado, son equivalentes, pues miden 10.

En la pizarra dibuja (de la misma forma que su protocolo) un cuadrado, lo subdivide en cuatro cuadraditos congruentes, traza segmentos paralelos y congruentes al lado del cuadradito, enumera cada uno de ellos:

Patricia: A mí no me dio así. Yo con cada hilo medí cada uno y me dio que la 2, 3 y 4 me dieron lo mismo y la 1 distinto. Nosotras descubrimos que el área era igual

mediendo con cuadrados.

En área son 4 cuadrados y en perímetro es 8 lados de cuadrado. Con el resto de las figuras, por ejemplo: El perímetro es 10 lados del cuadrado y en área 4 cuadrados. La figura 3 tiene perímetro 10 lados de cuadrados y área 4 cuadrados. Y la figura 4 tiene de perímetro 12 lados de cuadrado y de área 4 cuadraditos.

Patricia concluye que varias figuras equivalentes pueden ser isoperimétricas y otras no:

Ah! Pero no importa, éstas tienen además de equivalente el área, el perímetro y la otra no.

En general las intervenciones de la maestra hacen reflexionar a los niños y los insta a dar argumentos. De esta forma observamos intervenciones vertidas por los niños que indican complementariedad en sus conclusiones, por ejemplo las formuladas por Ana, corroborando lo manifestado por Patricia:

Ana: El perímetro sería el contorno y lo que pasa es lo que dije ayer, que depende de cómo acomodes los cuadrados te va a dar más o menos perímetro. No porque tengan el mismo área tienen que tener igual perímetro. Depende de cómo acomodes los cuadrados.

La evolución de las ideas manifiestas de manera interactiva por los niños durante el desarrollo del problema lleva a la maestra a proponer el siguiente:

**Problema 6bis:** *¿Se puede formar una figura de igual área pero de 16 lados de cuadrado de perímetro?*

Patricia no percibe que apareando, por ejemplo, por el vértice, como sugirió Flor, se puede obtener una figura equivalente de perímetro mayor:

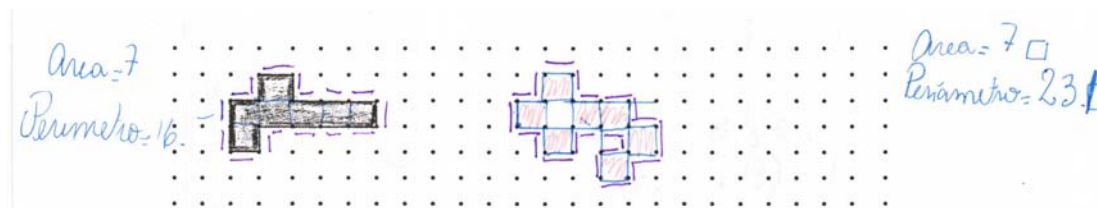
Patricia: No.

Flor: Serían cuadrados sueltos, unidos por el vértice solamente, porque para que sean figuras tendrían que estar unidos.

Ana: Si vos unís por la arista a un cuadrado y otro cuadrado dejan de tener dos lados y ya es uno.

Retomando esta última observación, nos referimos a una actividad propuesta en el cuestionario para evaluar la unidad de aprendizaje.

*Dibuja una figura equivalente a la dada pero de distinto perímetro, justifica tu dibujo.*



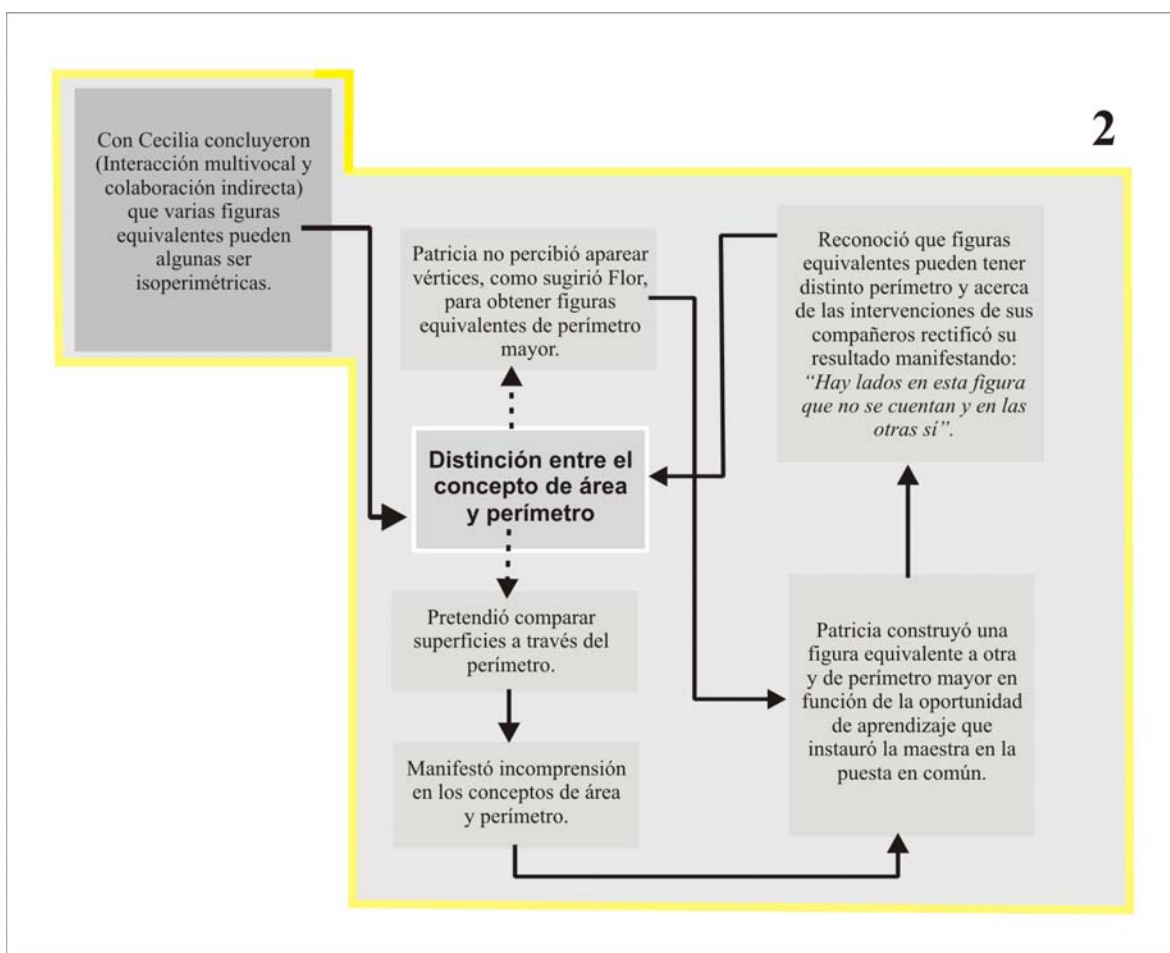
Patricia comprende la noción de equivalencia de figuras aunque no tengan necesariamente el mismo perímetro. Ella construye la figura solicitada – equivalente y de perímetro mayor – apareando solamente dos cuadrados por un lado y los demás por un vértice.

Construye la figura solicitada a través de la oportunidad de aprendizaje que instaura la maestra en la puesta en común y en la que ella no responde correctamente debido a

encontrarse ausente durante la sesión en la que se desarrolla esta noción. Sin embargo, podemos inferir que ahora comprende la noción.

Cuando expresa “Área=7”, aunque no indica la unidad, se desprende que considera el cuadradito como unidad, pues en la otra figura lo expresa correctamente. Del mismo modo expresa el perímetro, pues señala la unidad coincidente con el lado de la figura al indicar “perímetro=23”. Por tanto, Patricia puede hallar el área y el perímetro utilizando unidades no convencionales (el cuadrado y su lado, respectivamente). Sin embargo, la única justificación que presenta es el gráfico, sin explicar las condiciones que le llevan al mismo.

En función de este análisis y al objeto de extraer los constructos que nos permiten establecer vínculos con la categoría enunciada y otras que pueden surgir durante el desarrollo de la unidad, construimos un mapa cognitivo para visualizar las relaciones enunciadas, en el que cada constructo se vincula con otros a través de una flecha continua, si Patricia lo ha construido, o punteada, si no lo ha logrado. La conexión de estos fragmentos muestra la evolución en la construcción de las relaciones entre perímetro y área.



## CONCLUSIONES

Al objeto de efectuar una mirada global en el proceso que se opera en la niña respecto a la categoría enunciada y refiriéndonos a las oportunidades de aprendizaje que surgen con sus compañeras, coordinadas por la maestra, nos referimos muy especialmente a las intervenciones efectuadas con Cecilia y las conclusiones de Ana, a través de intervenciones de tipo multivocal y colaboración indirecta, puesto que Cecilia y Ana la desafían en sus opiniones, intercambian sus procedimientos y sus ideas atendiendo y adaptándose a lo realizado por cada una, acompañadas por la maestra y todas instalan un clima en donde se instauran zonas de posibilidades de desarrollo.

Con respecto a las estrategias implementadas respecto a la resolución de los problemas, se observa que Patricia fundamenta oralmente sus procedimientos y los puede validar, pero en el protocolo se advierte ausencia en la justificación, lo que impide detectar las estrategias implementadas y se convierte en un obstáculo para conocer el estado de sus conocimientos.

Con respecto a los problemas diseñados, los aspectos observados en Patricia y sus compañeras satisfacen los objetivos previstos, pero consideramos conveniente la inclusión de la actividad propuesta por la maestra, que implica la construcción de figuras equivalentes a las dadas pero con perímetro mayor y determinado, siempre y cuando el desarrollo del grupo lo permita.

Con respecto a la relación entre área y perímetro de una superficie:

- Reconoce que el área de una superficie se conserva a través de transformaciones directas o indirectas.
- Distingue la independencia entre el área y el perímetro de superficies equivalentes o isoperimétricas, superando la confusión conceptual y operacional observada al comienzo de la actividad.
- Realiza cubrimientos en función de una figura como unidad de medida.

Todos los aspectos vertidos acerca de la relación área-perímetro en Patricia nos llevan a considerar su proceso como una buena aproximación al concepto. En dicho proceso los aspectos cognitivos y sociales se imbrican y complementan.

Finalmente, consideramos conveniente la inclusión de estos problemas en las propuestas de enseñanza con el objeto de evitar la confusión entre dichos conceptos.

## REFERENCIAS

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: Metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Cass, M.; Cates, D.; Jackson, C.W.; Smith, M. (2002). *Facilitating Adolescents with Disabilities Understanding of Area and Perimeter Concepts via Manipulative Instruction*. Extraíble en <http://www.eric.ed.gov> (28 Junio 2006).



Cobb, P. (1995) Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. En P. Cobb; H. Bauersfeld (eds) *Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, N.J: LEA.

De los Reyes, M.I. (1999) *Diferenciando el Área y el Perímetro. Enseñanza Experimental Aplicada a un Grupo de 3er Grado de Primaria*. Tesis de Maestría en Ciencias. México. CINVESTAV. IPN.

Diseño Curricular. Educación General Básica. Pcia. Buenos Aires (2004). Evaluación de la Calidad. Buenos Aires: Ministerio Educación.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Kordaki, M; Potari, D. (2002) The effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100.

Kouba, V.; Brown, C. (1988) Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Measurement, geometry, data interpretation, attitudes, and other topics. *Arithmetic Teacher*, 35, 10-16.

Latorre, A., Del Rincón, D., Arnal, J. (1997). *Bases Metodológicas de la Investigación Educativa*. Barcelona: Hurtado.

LeCompte, M. & Preissle, J. (1993). *Ethnography and qualitative design in educational research*. London: Academic Press.

Moyer, P. (2001) Using Representations to Explore Perimeter and Area. *Teaching Children Mathematics*, sept., 52-62.

Proyecto Albanta (1994) *Libro de Recursos Matemática 5 y 6*. Madrid: Alhambra.

Vegnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. En L.P. Steffe et al (eds) *Theories of Mathematical Learning*. Mahwah: LEA. 219- 238.