

SOBRE LA NATURALEZA CONCEPTUAL Y METODOLÓGICA DEL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO PEDAGÓGICO EN MATEMÁTICAS. UNA APROXIMACIÓN PARA SU ESTUDIO

Jesús E. Pinto Sosa, Universidad Autónoma de Yucatán, México

María Teresa González Astudillo, Universidad de Salamanca, España

Resumen

A partir de una revisión de las investigaciones en educación matemática sobre el conocimiento profesional del profesor, en este trabajo se intentan integrar y presentar las características conceptuales del Conocimiento del Contenido Pedagógico (CCP) específico de las matemáticas. Desde una aproximación empírica, inductivo - deductiva, se han analizado las características y componentes del CCP, se han revisado cuestiones metodológicas sobre cómo estudiarlo y a partir de ahí, se desarrolló un procedimiento para la definición de qué elementos conceptuales era posible estudiar. Para realizar este estudio se utilizó el análisis de contenido con el que se determinaron un sistema de dimensiones e indicadores con los cuales se organizaron y estructuraron la variedad de características y conceptos a examinar de los componentes del CCP.

Palabras clave: conocimiento del contenido pedagógico, enseñanza de las matemáticas, profesor de matemáticas, conocimiento profesional, conocimiento del profesor

Abstract

From the research in mathematical education upon teacher's knowledge, the present paper attempts to integrate and present the conceptual characteristics of Pedagogical Content Knowledge (PCK), specific to mathematics. From an empirical approach, inductive or deductive reasoning, it was analyzed the characteristics and components of PCK, methodological matters were revised and a model developed, a way to define the conceptual elements and make them possible to study. For the purpose of this study, a content analysis was required, from which a dimensions system and indicators were determined for organizing and structuring the variety of characteristics and concepts of the components of PCK.

Key Words: pedagogical content knowledge, mathematics teaching, mathematics teacher, professional knowledge, teacher's knowledge

INTRODUCCIÓN

La revisión y análisis de la perspectiva teórica que sustenta los componentes del Conocimiento del Contenido Pedagógico (CCP), ofrece un panorama amplio sobre los elementos que subyacen en la teoría propuesta por Shulman y colaboradores (Shulman, 1986 y 1987; Shulman y Sykes, 1986), y que es retomado por otros investigadores (ej. Chinnappan y Lawson, 2005; Chen, 2004; An, Kulm y Wu, 2004; Sánchez y Llinares, 2003 y 2002; Llinares, 2000; Baxter y Lederman, 1999). Permite una visión específica sobre el conocimiento de la didáctica del contenido específico, que incorpora según Shulman (1986), Grossman (1989) y Llinares y Sánchez (1990), por lo menos, tres componentes básicos: el conocimiento del contenido de la disciplina a enseñar, el conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico) y el conocimiento del estudiante. Si bien, el CCP es una categoría de *la base del conocimiento para la enseñanza*, da una idea del extenso caudal de conocimientos sobre la enseñanza de un tópico específico que todo profesor debe tener y con ello manifiesta y reafirma a la profesión de la enseñanza a partir del contenido como ocupación más respetada.

El CCP no pretende suprimir, obviar o desvalorizar otros componentes del conocimiento en la tarea de enseñar, sino únicamente defiende, propone y justifica un conjunto de conocimientos (amalgamados entre sí) sobre el contenido específico y para cubrir un vacío (o complemento) necesario sobre el conocimiento del profesor de una asignatura específica. El trabajo de Shulman y colaboradores, así como de los demás

autores citados, muestran evidencia de la existencia y necesidad de este cuerpo de conocimientos que giran en relación al contenido. Sin embargo, también muestra la complejidad en su comprensión, adquisición e investigación del mismo.

El CCP parte de una nueva visión de la enseñanza, que no se limita a la instrucción directa y al conocimiento de la didáctica general, sino que se inclina a favor de que el profesor comprenda aquello que se ha de aprender y cómo se debe enseñar a partir del contenido enseñable y de la sabiduría de la práctica, a partir de la comprensión de cómo el alumno aprende, comprende, resuelve problemas y desarrolla su pensamiento crítico de dicho contenido (Shulman, 1987). Sin embargo, el mismo Shulman añade: “no hay que olvidar que no es el aprendizaje del contenido un fin en sí mismo, sino más bien un vehículo al servicio de otros fines” (p. 7), refiriéndose como otros fines, al desarrollo del pensamiento crítico, creativo y autorregulado; la extensión y profundización del conocimiento (ej. la argumentación y abstracción) y la utilización de dicho conocimiento (ej. solución de problemas, toma de decisiones, investigación e invención).

Diferentes autores que han estudiado el CCP en matemáticas (ej. An, Kulm, Wu, 2004; Sorto, 2004; Even, 2003 y 1993; Llinares, 1996; Castro y Castro, 1996; Even y Tirosh, 1995; Llinares, Sánchez y García, 1994; entre otros), incluso desde otras perspectivas teóricas acerca del profesor, han identificado y sustentado la relación que guardan todos los componentes y elementos del CCP. A partir de los resultados de estas investigaciones y de las implicaciones o relaciones obtenidas en los diferentes análisis de éstas, hechas por los mismos investigadores, se conceptúa al CCP como un *modelo* teórico que reproduce, esquematiza, figura y presenta una perspectiva paradigmática que puede ser desarrollada y como un recurso de conocimiento, interpretación o explicación de la formación de profesores y desarrollo de investigación sobre el profesor. Como modelo, el CCP está compuesto por elementos esenciales, que se interrelacionan y se transforman en representaciones ideales que pueden facilitar su comprensión, desarrollo e investigación, dentro de un continuo de modelos que van de integrativos a transformativos acerca del conocimiento del profesor (Gess-Newsome, 1999).

El modelo del CCP no se caracteriza por ser de reproducción única ni mucho menos simple, sino más bien, se caracteriza por ser un modelo:

- a. *cíclico*, en cuanto a que está compuesto por un conjunto de componentes descritos como fases por las que se desarrolla la enseñanza de un tópico específico, que se vuelven a repetir, conjugar, reactivar y relacionar por cada tópico diferente a conocer y enseñar;
- b. *sinérgico*, en cuanto que existe una interdependencia entre los tres componentes y una intrarrelación entre las categorías o elementos entre cada componente, con lo cual no es posible estudiar un componente, sin contemplar los otros, o bien, el desarrollo de uno implica la activación o influencia conjunta de los otros;
- c. *integral*, en cuanto a que está compuesto por un todo, en donde cada uno de los componentes son esenciales para la composición del dominio, y sin alguno (su reconocimiento, estudio o acción) de los componentes no puede subsistir;
- d. *flexible*, en cuanto a la constitución de diferentes formas o maneras de enseñar un mismo tópico a partir de la conjugación de todos los componentes, basado también en la formación, experiencia, iniciativa y creatividad del profesor; y en cuanto a la posibilidad y disposición de adquirir, extender o profundizar el propio conocimiento, en diferentes

momentos cronológicos dentro de los programas de formación de profesores, según las características de éstos (ej. experiencia e historial académico), acentuando su adquisición en algún(os) componentes e incorporando de forma gradual los restantes, así como incorporando elementos novedosos y actuales al dominio a partir de la didáctica de la disciplina y de la práctica del profesor y reconociendo la complejidad de la interacción con los elementos del contexto;

- e. *incluyente*, en cuanto a que está circunscrito dentro de un conjunto compuesto por otros componentes, propios de *la base del conocimiento para la enseñanza*, y reconoce e incorpora otros elementos esenciales para su perfeccionamiento (ej. conocimiento pedagógico general, el contexto y la investigación didáctica sobre el pensamiento del profesor); y finalmente, un modelo
- f. *investigable*, en cuanto que requiere y necesita de la investigación científica a la luz de las didácticas de la disciplina, con el objeto de validar su desarrollo, proveer de mayor significado sus componentes, su puesta en común (como parte de programas de formación de profesores), generar un repertorio de conocimientos, representaciones, ejemplos y recomendaciones dirigidas a perfeccionarse como modelo teórico del conocimiento del profesor, crear subsiguientes líneas y proyectos de investigación que sustenten su desarrollo, evolución y enriquecimiento en cada uno de sus componentes por cada contenido disciplinario y obtener información que impacte tanto en el desarrollo profesional del profesor como en la mejora en la adquisición del conocimiento disciplinario y habilidades de pensamiento por parte del alumno.

Las características del modelo, su desarrollo y mayor reconocimiento en las diferentes áreas o disciplinas científicas generaron un incremento de la investigación desde la perspectiva didáctica del profesor, teniendo como primer propósito comprender su naturaleza conceptual y posteriormente conocer cómo medir o evaluar el CCP del profesor. Sin embargo, esto último ha representado un desafío para los investigadores, dado que la cognición del profesor, como lo es el CCP, no puede ser observado directamente, ya que por definición, el CCP es particularmente un constructo interno (Baxter y Lederman, 1999). Estos autores afirman que la cognición del profesor se lleva a cabo inconscientemente, es decir, los maestros no siempre poseen el lenguaje para expresar sus pensamientos y creencias; lo que manifiesta que es un constructo altamente complejo, no fácil de medir o evaluar (Baxter y Lederman, 1999). Es un constructo constituido por lo que los profesores conocen, lo que los profesores hacen y las razones por las que los profesores actúan.

El desafío, por lo tanto, es que los investigadores diseñen estudios que examinen todos los componentes del CCP. Esto maximiza la importancia de conocer, seleccionar y/o construir formas (o instrumentos) que intenten comprender su naturaleza conceptual y metodológica. Explorar lo que se ha hecho, a partir de la investigación en educación matemática sobre el CCP, plantear estudios dentro de un marco conceptual sólido circunscrito a lo hecho por otros investigadores, es una de las primeras tareas de todo investigador que quiere estudiar sobre el CCP. En este sentido está enfocada la contribución de este escrito: conocer cómo se ha estudiado el constructo, qué diseños de investigación se han utilizado, qué instrumentos examinan de mejor forma el CCP y qué criterios utilizaron los autores sobre qué investigar del constructo. Este documento

intenta sintetizar los principales aspectos metodológicos llevados a cabo en el estudio del CCP en el contexto de las matemáticas.

Todo lo descrito anteriormente, permitió tomar algunas decisiones sobre cómo investigar este constructo. Sin embargo, quedaba pendiente ¿qué investigar del CCP? Para ello, con los referentes teóricos y metodológicos revisados, se diseñó un procedimiento, de carácter empírico, inductivo – deductivo, cuyas características principales eran: que fuese ordenado, sistemático y con rigor científico para finalmente establecer las diferentes dimensiones e indicadores a estudiar del CCP.

CUESTIONES METODOLÓGICAS

Después de estudiar la naturaleza conceptual del CCP, se realizó un análisis de los diferentes trabajos publicados en educación matemática, que han utilizado el CCP como teoría para explorar el conocimiento del profesor, con el objeto de caracterizar diferentes cuestiones metodológicas como los principales tópicos estudiados, sujetos participantes, diseños de investigación e instrumentos de recogida de datos. Para ello, se consultaron y revisaron trabajos que hayan explorado el CCP desde su aparición hasta las investigaciones recientes. Se revisaron cerca de 20 investigaciones para este propósito, dentro de las cuales estuvieron: Carpenter, Fennema, Peterson y Carey (1988), Wallece (1990), Marks (1990a y 1990b), Even (1990), Hutchison (1992), Even (1993), Llinares, Sánchez y García (1994), Even y Tirosh (1995), Baturo y Nason (1996), Swenson (1998), Fan (1998), Howald (1998), Baxter y Lederman (1999), Smith (2000), Wanko (2000), Llinares (2000), Durand (2003); Badillo (2003), Sánchez y Llinares (2003 y 2002), An, Kulm y Wu (2004), Chen (2004), Chinnappan y Lawson (2005) y Llinares y Krainer (en prensa).

Las principales conclusiones obtenidas de la revisión de estos trabajos se resumen a continuación:

Sobre los tópicos y componentes estudiados

Se encontró que el mayor número de investigaciones ha sido sobre el conocimiento del contenido a enseñar (cerca del 88%), mientras que menos de la mitad han estudiado el conocimiento de la didáctica específica del contenido o del conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante. Analizando aquellas investigaciones que mencionan o asumen única y exclusivamente un componente del CCP, se obtuvo nuevamente un mayor número centradas sobre el conocimiento del contenido a enseñar. Sobre el tópico de las matemáticas, los temas que han sido más investigados fueron las fracciones y las funciones.

Sobre el CCP de los profesores de matemáticas

Aun cuando los estudios sobre el CCP se circunscriben al contexto y naturaleza de cada investigación, de sus propósitos, metodologías de investigación, sujetos participantes y tópico específico, se identificaron algunos elementos comunes a la educación matemática, producto de los resultados reportados por los autores: (a) todavía prevalecen serios problemas en la adquisición, dominio y uso del conocimiento del contenido a enseñar por parte del profesor; (b) los profesores tienen dificultades para establecer la relación entre el conocimiento del contenido a enseñar con las representaciones instruccionales y el conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante; (c) se evidencia, a partir del pobre conocimiento del contenido a enseñar, limitado o nulo conocimiento de la didáctica específica y del conocimiento del estudiante; (d) se evidencia la necesidad de planear, desarrollar, implementar y evaluar

programas de formación de profesores con enfoques diferentes a los actuales, a la luz de la didáctica de las matemáticas; (e) se recomienda como principales fuentes de formación del CCP, la investigación de la didáctica de las matemáticas, las creencias y concepciones de los profesores, la reflexión sobre y de la acción, la experiencia profesional y personal del docente, la interacción entre colegas, lecturas, entre otros; y (f) se confirman algunas relaciones significativas, como son las concepciones de la matemática y su enseñanza y aprendizaje y el CCP, así como entre los niveles altos de CCP y la actitud positiva del profesor, y el conocimiento del contenido a enseñar vinculado con la experiencia docente del profesor como elementos diferenciadores del profesor con poca experiencia. Si bien, en algunos casos existen resultados que se contraponen o difieren entre sí, estos hallazgos dan cuenta de que el estudio del CCP resulta todavía complejo como modelo teórico para la formación de profesores y como objeto de estudio.

De los diseños y sujetos de investigación

Según el análisis, la tendencia de estudiar la perspectiva del CCP es bajo un enfoque cualitativo, a través de estudios de casos o bien, de una combinación encuesta (cuestionario) y estudios de casos. Existen muy contados estudios en el campo de la educación matemática que fundamentan su trabajo bajo una perspectiva cuantitativa y exclusivamente encuesta.

Respecto a los sujetos que participan en las diferentes investigaciones se aprecia una amplia diversidad en los criterios de selección, los cuales dependen de la naturaleza misma de la investigación, del escenario y del contexto en la cual se realiza. No obstante, destaca en este sentido, un número importante de investigaciones que han incorporado a profesores con formación inicial matemática y en ejercicio de la docencia (ya sea a nivel primaria, secundaria o universitario) o estudiantes para profesor. Criterios como la disposición, colaboración, experiencia, preparación en el contenido o en algún postgrado, entre otros, son otros criterios que destacan como adicionales.

De los instrumentos y procedimientos de recolección de datos

Tres aspectos son posibles destacar del análisis de los instrumentos. *Primero*, la tendencia de utilizar el cuestionario sobre situaciones-problema (o casos) como recurso para valorar, ya sea, las concepciones de la matemática o de algún concepto, o bien, los conocimientos de los componentes del CCP. Las situaciones-problema, definidas como tareas o situaciones (casos), vinculados con el contenido matemático y algún hecho o realidad en el aula que el profesor debe resolver, resaltan la necesidad de investigar la didáctica del profesor (sobre su conocimiento) a través del contenido matemático mismo.

Un *segundo* aspecto a destacar sobre la exploración de los instrumentos, es el uso ineludible de la entrevista como recurso para profundizar sobre el pensamiento y conocimiento del profesor resulta indispensable. Ha sido utilizada en diferentes momentos de las investigaciones, siendo su uso más común, primero como recurso para explorar información de la biografía del profesor, de sus concepciones genéricas, de su historial académico y profesional o de sus concepciones o decisiones sobre la planificación de la enseñanza; y segundo como técnica para ahondar sobre las respuestas del profesor sobre las situaciones-problema, para confrontarlo con la realidad de la práctica, es decir, indagar sobre sus argumentos o justificaciones, dificultades y

análisis metacognitivo de los diferentes aspectos del CCP vinculado con el contenido matemático.

El *tercer* aspecto a destacar tiene relación con la diversidad de otras fuentes de recolección de información, utilizadas principalmente como herramientas complementarias, de validación y confiabilidad de la investigación, es decir, como instrumentos para la triangulación del estudio. Tal es el caso de materiales de uso exclusivo del profesor para su labor docente, como son notas de clase, libretas de sus alumnos, exámenes, diapositivas, planes de clase, tareas (ejercicios o problemas), entre otros.

GENERACIÓN DE UN SISTEMA DE CATEGORÍAS, DIMENSIONES E INDICADORES DEL CCP

¿Cómo estudiar el CCP? ¿qué componentes estudiar? ¿cómo elegir centrarnos hacia uno, dos o todos los componentes? ¿qué elementos hay que examinar de cada componente? ¿qué elementos y criterios se han utilizado para la construcción de los instrumentos sobre CCP? La generación de las dimensiones e indicadores del CCP sirvió para responder a estas preguntas, establecer las características, ideas y conceptos específicos que se han estudiado y con ello ofrecer una alternativa para decidir y definir qué estudiar.

A diferencia de otros planteamientos (ej. Thompson, 1984 y 1992; Llinares y Sánchez, 1990; Even, 1993; García, 1997; An, Kulm y Wu, 2004) que asumen de antemano un interés hacia ciertos marcos teóricos y las categorías de estudio se establecen a partir de sus posiciones teóricas, conceptuales y metodológicas, este trabajo siguió una aproximación empírica e inductivo-deductivo, que analizó las características y componentes, los segmentó o desagregó en partes específicas e identificó los aspectos más puntuales de investigación de cada uno pudiendo existir cierta similitud con Gil (2000) y Vallecillos (1996). A partir de la información existente, se procedió a determinar un sistema de dimensiones e indicadores con los cuales se organizó y estructuró la variedad de características de los componentes del CCP. Se utilizó aquí la *teoría del análisis de contenido*, el cual es un procedimiento para la categorización de datos verbales o de conducta con fines de clasificación, resumen y tabulación (Fox, 1981). Para dicho análisis, se partió de las definiciones sobre categorías, dimensiones e indicadores por Villarruel (2003, pp.10-11); las cuales se adaptan para explicar cada una en el contexto del CCP, atendiendo a la terminología del diseño de la investigación cualitativa según Flick (2004):

Categorías: Aquellos conceptos generales que permiten identificar las características o propiedades fundamentales del CCP.

Dimensiones: Formas en que se desagrega una categoría, dicho de otra manera, son los elementos que puede integrar a cada categoría de los componentes del CCP.

Indicadores: Características distintivas del fenómeno objeto de estudio (CCP), las cuales son susceptibles de segmentarse y codificarse en un plano global y específico del CCP, a partir de las cuales se obtienen los datos y fenómenos en forma de ideas y conceptos definidos como necesarios para el estudio del CCP.

El proceso de definición de las dimensiones e indicadores del CCP se desarrolló en seis fases: (I) generación de preguntas clave, (II) determinación de los constructos o conceptos por pregunta clave, (III) construcción de mapas conceptuales, (IV) primera versión de dimensiones e indicadores, (V) análisis a priori de las dimensiones e indicadores, y (VI) dimensiones e indicadores del CCP. A partir de la Fase I se decidió

cuál fue la unidad de contenido que se analizó; las Fases II, III, IV, permitieron elaborar el conjunto de dimensiones e indicadores; y las Fases V y VI ejercieron una función de fundamentación y validación. Los Apéndices A y B presentan brevemente la descripción y el procedimiento desarrollado en cada fase, y un ejemplo del mapa conceptual utilizado en la Fase III, respectivamente.

Las dimensiones e indicadores del CCP (ver Apéndice C) permiten mostrar los diferentes constructos de cada componente que han sido objeto de interés y de investigación en el campo de la educación matemática. Asimismo, desglosa los aspectos específicos (indicadores) de cada dimensión, con lo cual es posible tener un panorama amplio sobre el tipo, elementos y constructos que se están estudiando y que es posible desarrollar y originar a partir de la perspectiva teórica del CCP. Permite ser también un instrumento tanto para el investigador como para el profesor en la clasificación y caracterización de las investigaciones en educación matemática referidas al conocimiento del profesor, en la identificación de elementos útiles para desarrollar algún programa de formación y sistemas de acreditación de profesores, así como del estudio del énfasis que cada autor le da a una investigación o programa de desarrollo.

En resumen, para el componente A se obtuvieron seis dimensiones con un total de 18 indicadores y 25 subindicadores. Para el componente B fueron seis dimensiones, con 24 indicadores y 19 subindicadores. Y para el componente C, un total de cuatro dimensiones, con 23 indicadores y 13 subindicadores. Si bien, quizás no se logra completar con detalle todas las dimensiones e indicadores del CCP, sí da una idea amplia y clara sobre la diversidad, ramificación, relaciones y objetos de estudio que se han realizado y pueden desarrollarse en el campo de la educación matemática. Por ejemplo, es posible encontrar a investigadores que su foco de atención sea el estudio de los dilemas del profesor a la luz de sus propias creencias; o aquellos que investigan sobre las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; o aquellos que trabajan sobre las concepciones de un tópico específico.

Por otro lado, las dimensiones e indicadores del CCP muestran la diversidad y amplitud de conocimiento que el profesor de matemáticas puede aprender y que es deseable que así sea. Asimismo, la lista genera, no sólo una aproximación a diferentes agendas de investigación, sino que también permite conocer el énfasis y las tendencias de investigación de los diferentes estudios que se han hecho en torno al CCP y así, identificar componentes, constructos o conceptos (de un tópico específico de las matemáticas) poco o nada estudiados. Vacíos que son necesarios llenar para la comprensión del significado de las características y componentes del CCP en matemáticas y del tópico específico y con ello, proporcionar información útil y valiosa tanto a la generación de más investigación, como para los programas de formación de profesores.

CONCLUSIONES

Con base en la naturaleza conceptual y metodológica del CCP, los marcos de referencia y resultados de investigación, su comprensión y caracterización como modelo teórico para la formación de profesores y como objeto de estudio sigue siendo uno de los principales desafíos a los que se enfrentan los investigadores en educación matemática y los responsables de las instituciones formadoras de profesores. Caracterizado como un modelo cíclico, sinérgico, integral, flexible, incluyente e investigable, el CCP no se puede examinar a partir del estudio de uno de sus componentes sin considerar la inclusión de los otros. Evaluar un solo componente, separado de los otros conlleva a un

riesgo sustancial de distorsionar su significado, caracterización e interpretación (Baxter y Lederman, 1999).

El estudio sobre la comprensión y significado del CCP, tanto en su aspecto conceptual como en el metodológico representa, por lo tanto un interés fundamental de la educación matemática, con el objeto de comprender cómo los profesores “conocen” el contenido matemático que enseñan, el rol del tipo de representaciones y las interrelaciones entre el conocimiento del profesor de matemáticas y la comprensión de las concepciones de sus estudiantes, es decir, ¿cuál es la naturaleza del conocimiento matemático para la enseñanza? (Llinares y Krainer, en prensa). Su complejidad, no sólo se refleja en sus componentes y en la concepción que diferentes autores le han otorgado y/o añadido desde su origen a la fecha, sino también en los aspectos metodológicos utilizados para su estudio.

Sin ánimos de ser exhaustivos, los diferentes estudios hechos en educación matemática, permiten identificar algunas tendencias claras sobre los diferentes aspectos metodológicos definidos en el estudio del CCP. Estas tendencias presentan una clara evolución y cambio en la forma de estudiar el CCP, el cual se caracteriza por estudios fundamentalmente cualitativos, en la modalidad de estudios de casos y utilizando como instrumentos de recogida de datos los cuestionarios de situaciones-problema (o casos), con el uso habitual de entrevistas (semiestructuradas y clínicas) y la recogida de materiales (ej. documentos escritos, como notas, diarios, reflexiones, historias, cuadernos, tareas,) elaborados por el profesor. Es decir, existe una marcada tendencia a estudiar el CCP a partir de múltiples métodos de evaluación, lo cual permite acercarnos a los significados que subyacen en la cognición del profesor, es decir, a su pensamiento y conocimiento profesional (Baxter y Lederman, 1999). A estos elementos identificados en la literatura, habría que añadir uno no menos importante, que investigaciones recientes demuestran que guarda una estrecha relación con el conocimiento profesional, las creencias y la práctica dentro del salón de clases y por consiguiente tiene claras implicaciones significativas para la exploración del CCP: *la observación en clases* (ver Chinnappan y Lawson, 2005; Chen, 2004; An, Kulm y Wu, 2004; Sánchez y Llinares, 2003 y 2002; Llinares, 2000; Baxter y Lederman, 1999). Observaciones de la práctica video-grabadas, que permitan ser usadas para discutir y analizar con el profesor, en repetidas ocasiones, los significados que tiene del conocimiento matemático para la enseñanza (Llinares y Krainer, en prensa). Estas cuestiones metodológicas, sin lugar a duda, sirven como marco inicial de referencia para los subsiguientes estudios a realizar sobre el CCP.

Finalmente, la conjugación sobre las características conceptuales y metodológicas, permitió la construcción de un conjunto de dimensiones e indicadores del CCP. Estas presentan una alternativa para identificar y analizar los diferentes componentes y características del CCP que han sido estudiados en educación matemática, y con ello, estimar las relaciones conceptuales generadas por las investigaciones. Esto sin lugar a duda, conlleva la identificación de áreas poco estudiadas, la delimitación teórica y conceptual de lo que se desea estudiar, y los diferentes elementos (dimensiones e indicadores) posibles para comprender los diferentes significados que están implícitos en el CCP del profesor de matemáticas.

REFERENCIAS

- An, S., Kulm, G. y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 145-172.
- Badillo Jiménez, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona

- Batanero, B. C. (2002). Los retos de la cultura estadística. En *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Conferencia inaugural, Buenos Aires, Argentina.
- Batanero, C., Garfield, J., Ottaviani, M. y Truran, J. (2000). Research into statistical education: some priority questions. *Statistical Education Research Newsletter*, 1(2): 2-6.
- Baturo, A. y Nason, R. (1996). Students teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 235-268.
- Baxter, J. y Lederman, N. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En Gess-Newsome, J. y Lederman, N. G. (Ed). *Examining Pedagogical Content Knowledge: the construct and its implications for science education* (pp.147-161). Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands.
- Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P. y Carey, D. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 385-401.
- Castro, M. E. y Castro M. E. (1996). Conocimiento del contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Jiménez, s. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Granada: Colección Mathema, 119-141.
- Chen, W. (2004). Learning the skill theme approach: salient and problematic aspects of pedagogical content knowledge. *Education*, 125 (2), 194-212.
- Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 197-221.
- Cooney, T. J. (1994). Research and teacher education: in search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 608-636.
- Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1-3), 163-187.
- Costamagna, A. M. (2001). Mapas conceptuales como expresión de procesos de interrelación para evaluar la evolución del conocimiento de alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias* 19(2), 309-318.
- Durand, F. E. (2003). Secondary mathematics preservice teacher's conceptions of rational numbers (Doctoral dissertation in PhD, Oklahoma State University). *Dissertation Abstracts International*, A 64/09, p.3227, Mar 2004.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 521-544
- Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 94-116.
- Even, R. (2003). What can teachers learn research in mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 38-42.
- Even, R. y Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students a sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29(1), 1-20.
- Fan, L. (1998). The development of teachers' pedagogical knowledge: an investigation of mathematics teachers in three high-performing high schools (Doctoral dissertation in PhD, The University of Chicago). *Dissertation Abstracts International*, A 59/07, p.2322, Jan 1999.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Traducido por Tomás del Amo. Madrid: Ediciones Morata, S L y Fundación Paideia Galiza.
- Fox, J. D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra, S. A.
- García, B. M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Universidad de Sevilla, Grupo de Investigación en Educación Matemática (GIEM). Sevilla: KRONOS, SA.
- Garfield, J, delMas, B. y Chance, B. (2003). The Web-based ARTIST: Assessment Resource for Improving Statistical Thinking. *Paper presented in the Symposium: Assessment os Statistical Reasoning to Enhance Educational Quality of AERA Annual Meeting*, Chicago.
- Gess-Newsome, J. Pedagogical content knowledge: an introduction and orientation. En Gess-Newsome, J. y Lederman, N. G. (Ed). *Examining Pedagogical Content Knowledge: the construct and its implications for science education* (pp.3-17). Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands.
- Grossman, P. (1989). A study in contrast: sources of pedagogical content knowledge for secondary english. *Journal of Teacher Education*, September-October, 24-31.

- Gil, C. F. (2000). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas*. Servicios de publicación: Universidad de Almería.
- Graeber, A. O. (1999). Forms of knowing mathematics: what preservice teachers should learn. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 189-208.
- Howald, C. L. (1998). Secondary teachers' knowledge of functions: subject matter knowledge, pedagogical content knowledge, and classroom practice (Doctoral dissertation in PhD, The University of Iowa). *Dissertation Abstracts International*, A 59/05, p.1500, Nov 1998
- Hutchison, L. S. (1992). How does prior subject matter knowledge affect the learning of pedagogical content knowledge in a mathematics methods course at the preservice (Doctoral dissertation in PhD, University of Washington). *Dissertation Abstracts International*, A 54/01, p.117, Jul 1993
- Llinares, C. S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En Ponte, y et al. (ed.). *Desenvolvimiento profesional de los profesores de matemáticas en formación*. Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación, pp. 47- 82.
- Llinares, S. y Krainer, K. (en prensa). Mathematics (student) teacher and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Sense Publishers B. V. (Rotterdam, The Netherlands).
- Llinares, C. S. y Sánchez, G. M. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En S. Llinares y M. Sánchez (eds.). *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Sevilla: ALFAR, 67-116.
- Llinares, C. S., Sánchez, V. y García, B. M. (1994). Conocimiento del contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación de las fracciones. *Revista de Educación*, Num. 304, May-Ago, 199-225.
- Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice*, 6 (1), 41-62.
- Marks, R. (1989). What exactly is pedagogical content knowledge? Examples from mathematics. *Paper presented at AERA Annual Conference, San Francisco, March*.
- Marks, R. (1990a). Pedagogical content knowledge in elementary mathematics (Doctoral dissertation in PhD, Stanford University). *Dissertation Abstracts International*, A 51/01, p.101, Jul 1990
- Marks, R. (1990b). Pedagogical Content Knowledge. From a Mathematical Case to a Modified Conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11.
- McDiarmid, G. W., Ball, D. L. y Anderson, Ch. W. (1989). Why Staying One Chapter Ahead Doesn't Really Work: Subject-Specific Pedagogy. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher*, Oxford, Pergamon, Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Edición en Castellano: Sociedad Andalusí de Educación Matemática "Thales". Trad. José Ma. Álvarez Fallón y Jesús Casado Rodrigo. NCTM.
- Sánchez, V. y Llinares, S. (2002). Imágenes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de secundaria y tareas matemáticas escolares. *Revista de Educación*, 329, 443-461.
- Sánchez, V. y Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 5-25.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15 (2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57 (1), 1-22.
- Shulman, L. S. y Sykes, G. (1986, March). *A national board for teaching?: In search of bold standard* (Paper commissioned for the Task Force on Teaching as a Profession, Carnegie Forum on Education and the Economy).
- Smith, K. H. (2000). Early childhood teachers' pedagogical content knowledge in mathematics (Doctoral dissertation in PhD, Georgia State University). *Dissertation Abstracts International*, A 61/10, p.3886, Apr 2001.
- Sorto, M. A. (2004). *Prospective middle school teachers' knowledge about data analysis and its application to teaching*. Doctoral dissertation in PhD, Michigan State University of Texas.
- Swenson, K. A. (1998). Middle school mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of probability: its relations to probability instruction (Doctoral dissertation in PhD, Oregon State University). *Dissertation Abstracts International*, A 59/02, p.440, Aug 1998
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 105-127.

- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En Grouws, D. (ed.). *Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*. Mac Millan, New York, 127-146.
- Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Granada: Comares.
- Villarruel, F. M. (Ago. 10, 2003). Evaluación educativa. Elementos para su diseño operativo dentro del aula. *Revista Iberoamericana de Educación*. De los Lectores. Tema: Evaluación. En <http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores/473Villarruel.pdf>, recuperado el 21 de abril de 2005.
- Wallece, M. L. (1990). How do teachers know geometry? A multi-case study of secondary school geomtry teachers' subject-matter and pedagogical content knowledge (subject matter knowledge) (Doctoral dissertation in PhD, University of Minnesota). *Dissertation Abstracts International*, A 51/12, p.4052, Jun 1991
- Wanko, J. J. (2000). Going public: The development of teacher educator's pedagogical content knowledge (Doctoral dissertation in PhD, Michigan State University). *Dissertation Abstracts International*, A 62/01, p.109, Jul 2001.

Apéndice A

Fases para la definición de las dimensiones e indicadores del CCP

Fases	Descripción	Procedimiento
<i>Fase I. Generación de preguntas clave</i>	<p>Generación de un conjunto de preguntas que tenían relación con la comprensión, significado y caracterización de los diferentes elementos del CCP y sus componentes. Ejemplo de preguntas sobre el componente del conocimiento del estudiante:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ¿conoce las concepciones, preconcepciones que tiene el estudiante del tópico específico? 2. ¿conoce cómo aprende el estudiante ese tópico? (el proceso cognitivo de acuerdo a su edad y antecedentes) 3. ¿conoce lo que el estudiante comprende y lo que no? 	<p>Las fuentes principales para la redacción de las preguntas, fueron: (a) la revisión bibliográfica sobre el CCP (componentes, características, posiciones teóricas sobre su significado, tipologías, críticas, alcances y limitaciones, fuentes de conocimiento, líneas actuales de investigación, implicaciones para la formación de profesores, instrumentos y resultados de investigación) y (b) la exploración de preguntas expresadas por diferentes autores.</p> <p>Se plantearon tantas preguntas como fuera necesario hasta que éstas sugirieran su correspondencia con las diferentes categorías de los componentes del CCP y que el estilo de redacción estuviera dirigido a que estas preguntas permitieran obtener respuestas a partir de la perspectiva teórica del conocimiento del profesor.</p>
<i>Fase II. Determinación de los constructos o conceptos a estudiar por pregunta clave</i>	<p>Elaboración de un primer documento donde se identificaron, recogieron, integraron y escribieron, con distintas formulaciones, los diferentes constructos o conceptos que subyacen en la respuesta (a las preguntas de la Fase I) y que representasen posibles aspectos a estudiar del CCP del profesor</p>	<p>Las fuentes de obtención de éstos fueron: (a) las palabras o frases sustanciales a que cada pregunta hacía referencia y (b) la correspondencia de las palabras o frases con la denominación usual que ésta tiene en el campo de la educación matemática.</p>
<i>Fase III. Construcción de mapas conceptuales</i>	<p>Se elaboraron tres mapas conceptuales (ver ejemplo en Apéndice B), uno por cada componente del CCP, que fueron un medio para representar la relación entre los conceptos y su ramificación, así como de las estructuras proposicionales procedentes del marco teórico sobre el CCP. Sirvieron de igual modo, para identificar, reafirmar y/o modificar los constructos o conceptos planteados en la Fase II y suprimir aquellos que estuvieran contenidos en otros. Los mapas conceptuales constituyeron una herramienta eficaz para la optimización y definición de las dimensiones e indicadores de los componentes del CCP, para enriquecerlas (con la incorporación de otros constructos o conceptos) o bien redescubrir su ubicación y relación con otros.</p>	<p>En la construcción de cada mapa conceptual, no sólo se consideraron los constructos o conceptos originados de las preguntas sino que se sirvió de la revisión y análisis del marco teórico del CCP y de la investigación didáctica del conocimiento del profesor, que se expuso con anterioridad. La construcción de éstos fue con base en los criterios establecidos por Costamagna (2001).</p>

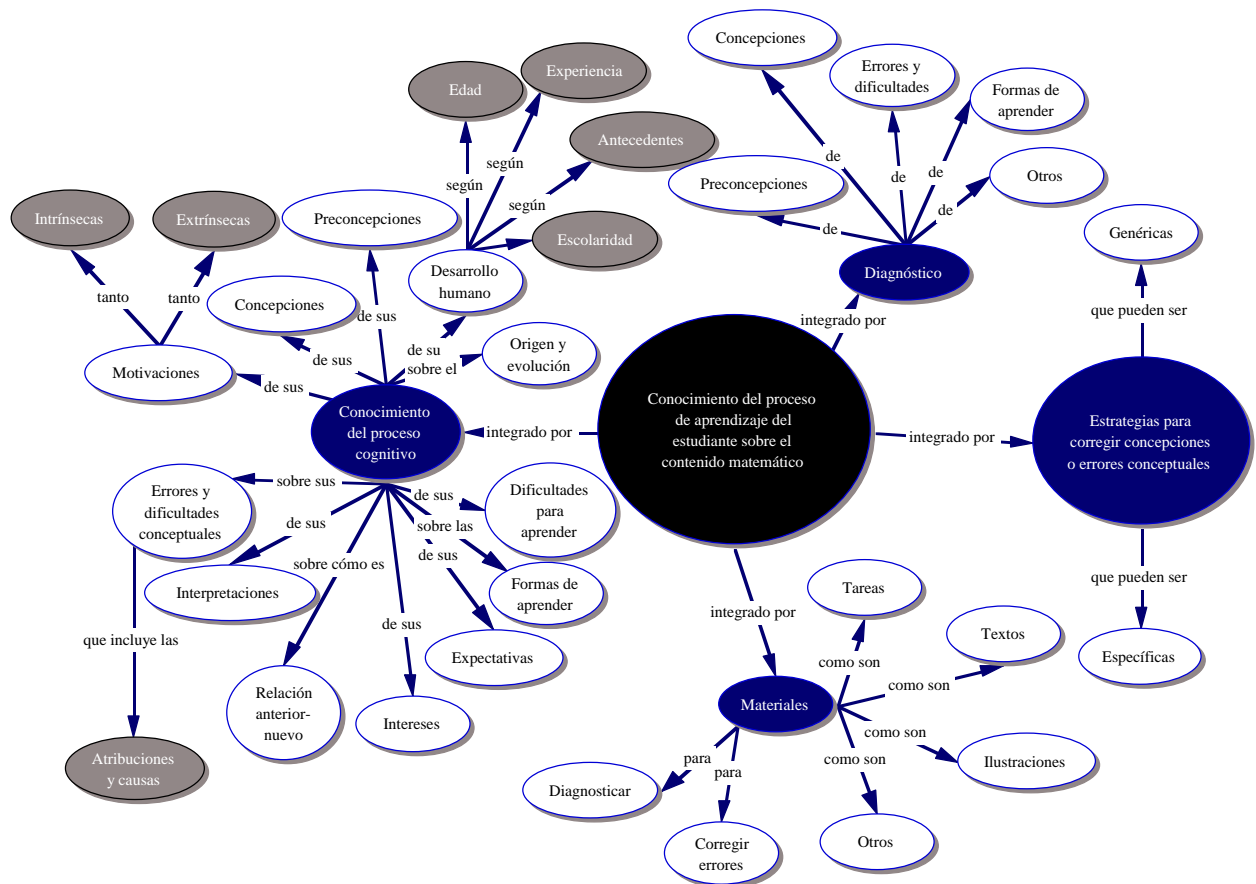
Apéndice A

Continuación ...

Fases	Descripción	Procedimiento
<i>Fase IV. Primera versión de las dimensiones e indicadores</i>	Las oraciones nucleares (de y entre constructos), sus relaciones y cruces en los mapas conceptuales, permitieron obtener una primera versión de las dimensiones e indicadores.	Los criterios fueron los siguientes: a. incluir como dimensiones las oraciones o frases que se generaron directamente de la relación con el núcleo (el componente central del mapa conceptual) y que representan las formas en que se disgrega el componente a partir de sus características; e b. incluir como indicadores, las oraciones o frases que se generaron a partir de cada una de las dimensiones y que caracterizan, explican, segmentan y codifican ésta en diferentes formas, ideas, expresiones o conceptos, definidos como atributos importantes de la dimensión y que son claros elementos de objeto de estudio de la investigación didáctica del conocimiento del profesor de matemáticas.
<i>Fase V. Análisis a priori de las dimensiones e indicadores</i>	En esta fase se contrastan las dimensiones e indicadores obtenidos del análisis de los mapas conceptuales, con el marco teórico del CCP en investigación en didáctica de la matemática. Aún cuando las dimensiones e indicadores parten o tienen su origen en el marco teórico del CCP, el propósito fue constatar que los conceptos fueran relevantes (ej. si han sido estudiado por expertos en el campo en educación matemática), con lo cual se fundamentaron los constructos o conceptos obtenidos.	Los autores que se revisaron para esta fase fueron Carpenter, Fenemma, Peterson y Carey (1988), Thompson (1984 y 1992), McDiarmid, Ball y Anderson (1989), Marks (1989 y 1990b), Even (1990), Graeber (1990), Llinares y Sánchez (1990 y 1994), NCTM (1991), Llinares (1993), Cooney (1994 y 1999), Even y Tirosh (1995), Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran (2000), Gil (2000), Batanero (2002), Garfield, delMas y Chance (2003) y An, Kulm y Wu (2004).
<i>Fase VI. Dimensiones e indicadores del CCP</i>	Con base en el análisis a priori de los autores e investigadores en educación matemática, se refinaron las dimensiones e indicadores del CCP.	Se comparó esta nueva versión con la primera (de la Fase IV). Se identificaron elementos comunes y añadieron nuevos.

Apéndice B

Ejemplo del mapa conceptual de los constructos y conceptos del conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático
(Fase III, componente C)



Apéndice C

Dimensiones e Indicadores de los componentes del CCP

A <i>Conocimiento del contenido a enseñar</i>	B <i>Conocimiento de la didáctica específica</i>	C <i>Conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante del tópico específico</i>
I. Concepciones 1. Las matemática 2. El contenido matemático 3. El tópico específico II. Fuentes de obtención de su conocimiento 1. Inicialmente 2. Permanentemente III. Disposición IV. Conocimiento del currículo 1. Contenido escolar 2. Planes de clase 3. Matemáticas como disciplina escolar V. Creencias 1. Dilemas 2. Cambios VI. Conocimiento esenciales 1. Conceptos a. imagen b. familias de conceptos c. formas de aproximarse d. diferentes usos e. atributos críticos f. teorías y modelos g. relaciones h. repertorio de ejemplo (propios y no propios) 2. Procesos a. Procedimientos b. Algoritmos c. Lenguaje formal 3. Evolución histórica a. Historia b. Naturaleza de las explicaciones c. Heurística 4. Formas de representación a. Propias b. No propias 5. Principios a. Teoremas b. Postulados c. Axiomas 6. Vinculación a. Otros conceptos b. Contexto c. Disciplinas d. Vida diaria 7. Cultura matemática 8. Ética y valores a. Valores morales b. Valores estéticos	I. Concepciones de E – A 1. Matemáticas 2. Contenidos Matemáticos 3. Tópico específico II. Fuentes de obtención de su conocimiento 1. Inicialmente 2. Permanentemente III. Currículo 1. Programas de curso a. Planeación y organización b. Contenidos c. Estrategias genéricas d. Estrategias específicas e. Recursos para la enseñanza f. Evaluación de los aprendizajes g. Bibliografía 2. Materiales a. Textos b. Audiovisuales c. Calculadora d. Programas por computadora e. Uso de internet f. Tareas g. Presentaciones h. Otros IV. Vinculación 1. Contenido matemáticos 2. Tópicos específicos 3. Contenidos con otras disciplinas V. Estrategias de enseñanza específicas 1. Analogías 2. Demostraciones 3. Uso de proyectos 4. Simulaciones 5. Tareas a. Ejercicios b. Problemas c. Casos d. Situaciones 6. Preguntas 7. Ilustraciones 8. Explicaciones 9. Demostraciones 10. Evaluación 11. Otros VI. Dificultades 1. Para enseñar 2. Para evaluar 2. Formas de solución	I. Conocimiento del proceso cognitivo 1. Origen y evolución en el estudiante 2. Desarrollo humano a. Edad b. Experiencia c. Antecedentes d. Escolaridad 3. Preconcepciones 4. Concepciones 5. Errores y dificultades a. Atribuciones y causas 6. Relacionar lo anterior-nuevo 7. Intereses 8. Motivaciones a. Intrínsecas b. Extrínsecas 9. Expectativas 10. Formas de aprender 11. Dificultades de aprendizaje II. Diagnóstico 1. Preconcepciones 2. Concepciones 3. Antecedentes 4. Estrategias de aprendizaje 5. Otros III. Estrategias 1. Genéricas 2. Específicas a. Construir sobre ideas matemáticas b. Corregir errores conceptuales c. Retroalimentación d. Contrastar ideas con otras e. Solicitar usar evidencia f. Otros IV. Materiales 1. Tareas 2. Textos 3. Ilustraciones 4. Observaciones 5. Otros