

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I:

Análisis Didáctico

Coordinador:
José Luis González Marí
Universidad de Málaga

Ponentes invitados:

Pedro Gómez, Universidad de Granada
Análisis Didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria

Juan D. Godino, Universidad de Granada
Análisis y valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de estudio de las
matemáticas

Jesús Gallardo, Universidad de Málaga
El Análisis Didáctico como metodología de investigación en educación matemática

Presentación del Seminario y cuestiones para el debate

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO MATEMÁTICO COMO CONJUNTO DE MEDIOS PARA COMPRENDER Y ORGANIZAR LOS FENÓMENOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

José Luis González Marí, Universidad de Málaga

En la investigación en Educación Matemática se vienen utilizando términos, conceptos y procedimientos cuya utilidad es cada día mayor, pero cuyos significados y propósitos presentan diferencias apreciables bajo la misma terminología. Tal es el caso del Análisis Didáctico, que ha sido empleado por algunos autores (Freudhental, H., 1983; Puig, L., Cerdán, F., 1988, pág. 74) para indicar “...*el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos...*” (Puig, L., 1997, pág. 61), en el ámbito de la investigación como procedimiento no empírico que atiende a la complejidad de los fenómenos así como a la naturaleza interdisciplinar, multidisciplinar o disciplinar específica del campo de conocimientos (González, 1995; 1998; Gallardo y González, 2006), o como herramienta para el análisis curricular o de los libros de texto o para el diseño y desarrollo de los procesos de formación de profesores (Rico, 1997; Díaz, 2006; Gómez, 2002; 2006).

En este Seminario se pretende revisar, organizar y sintetizar la información disponible, indicar los logros, las lagunas y las dificultades, y servir de soporte para la discusión fundada sobre el Análisis Didáctico (AD). Para ello se desarrollan tres enfoques: el AD como instrumento para el análisis curricular, AD como metodología de investigación y AD como herramienta para la formación de profesores.

En lo que sigue nos proponemos: realizar una síntesis de los tres enfoques, situarlos en un esquema de conjunto abierto al debate y seleccionar algunas cuestiones e interrogantes que pueden servir de punto de partida para un debate sobre el tema.

TRES ENFOQUES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En el Seminario se desarrollan los siguientes enfoques del Análisis Didáctico:

- Enfoques curriculares: **a)** Díaz, J. y otros, conciben el Análisis Didáctico como el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante herramientas teóricas y metodológicas específicas, en particular mediante la herramienta denominada “idoneidad didáctica”, que los autores conciben como la articulación coherente y eficaz de las dimensiones epistémica, cognitiva, semiótica, mediacional, emocional y ecológica de los procesos de estudio; **b)** Gómez, P. concibe el Análisis Didáctico como un nivel del currículo de matemáticas. El autor presenta un conjunto de nociones teóricas articuladas como una metodología para el estudio sistemático del diseño, implementación y evaluación de programaciones curriculares de aula o unidades didácticas en el contexto de la formación de profesores de matemáticas basado en cuatro tipos de análisis: de

contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación.

- Enfoque de investigación: Gallardo y González conciben el Análisis Didáctico como metodología no empírica de investigación en Educación Matemática.

Utilidad de los enfoques

El AD como herramienta de análisis curricular permite valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o facilitar la delimitación, organización y control de las competencias de planificación curricular del profesor.

El AD como metodología de investigación tiene utilidad para sintetizar y organizar información, detectar regularidades y lagunas y perfilar el problema de investigación.

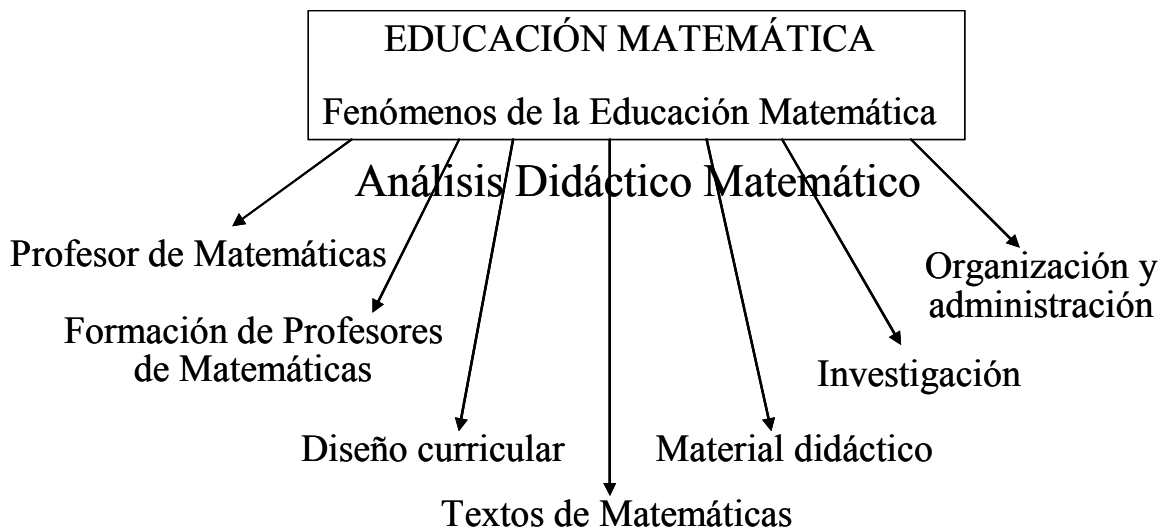
Conjunto de medios.- En los tres casos el AD se configura como procedimiento, medio o instrumento para examinar y comprender los fenómenos de la Educación Matemática.

El análisis de diferentes facetas.- En cada enfoque se atiende a una faceta de los fenómenos: investigación, currículo (diseño y desarrollo) y currículo (f. de profesores).

Carácter directo e indirecto de los estudios.- En los tres enfoques se abordan dos tipos de estudios: **directos** (estudios de los fenómenos en sí), **indirectos**, (se analiza la información sobre los fenómenos).

OTROS ENFOQUES. UN ESQUEMA DE CONJUNTO

Las tres aproximaciones son, desde nuestro punto de vista, algunos de los numerosos enfoques que se pueden adoptar y que se reflejan en los esquemas siguientes.

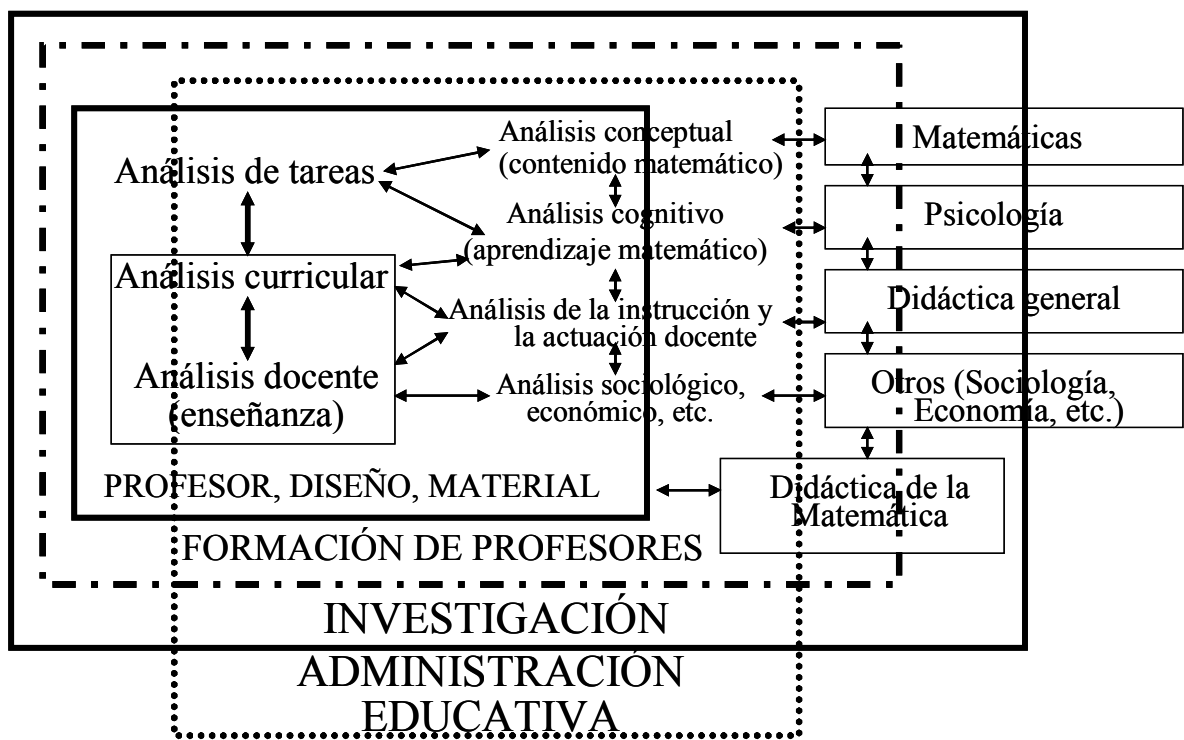


Mismo **Fin General**: comprender, organizar y actuar sobre los fenómenos de la Educación Matemática

Distintos **Fines específicos**

Distintos **Procedimientos**

Distintos **Niveles de análisis**



CONCLUSIONES Y CUESTIONES PARA EL DEBATE

La lectura de las aportaciones escritas ha generado el siguiente conjunto de observaciones que constituyen un buen punto de partida para plantear cuestiones para el debate.

Principales observaciones a la ponencia: Díaz Godino, J. y cols. (2006). **Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas.**

- El término “idoneidad” presenta al menos dos problemas: a) se emplea con un significado distinto al habitual; b) las condiciones supuestamente necesarias que debe cumplir lo idóneo constituyen unas referencias para valorar que no están determinadas, los criterios no están fijados ni cubren el problema.
- Se establecen distintos criterios de idoneidad que están desigualmente tratados y delimitados: la idoneidad emocional es diferente a las demás; la idoneidad ecológica no se plantea al mismo nivel que las demás.
- Vuelve a ser un problema la toma de referencias. La idoneidad didáctica se refiere a la adecuación de un proceso de instrucción a un proyecto de enseñanza, pero no se establece con precisión y con propósitos de comparación cuáles son los elementos fundamentales de un proyecto de este tipo.
- No queda claro cómo se articulan las idoneidades parciales entre sí y qué relaciones existen entre ellas;
- Salvo los análisis epistémico y cognitivo, los demás son muy generales;
- El marco teórico es complejo y pretende ser potente, pero la aplicación práctica es

escasa y débil y la supuesta potencia no se aprecia en el análisis de los datos;

- El trabajo no se refiere en esencia al Análisis Didáctico, sino más bien a una de las herramientas que podrían considerarse para abordar el Análisis Didáctico; la cuestión surge entonces en torno a la unicidad de las herramientas. ¿Hay otras aparte de la idoneidad didáctica?;
- Es necesario determinar el método para evaluar las distintas idoneidades así como el agente o agentes ejecutores. ¿Cuál son los procedimientos prácticos para ello?;
- Es conveniente precisar las fronteras y los límites de los análisis de idoneidad en cuanto a extensión y profundidad;
- Parece que la interpretación y valoración de la idoneidad didáctica que se deduce de los datos empíricos no es del todo completa. Se centra la atención en los aspectos negativos y no tanto en los logros alcanzados.

Principales observaciones a la ponencia: Gómez, P. (2006). **Análisis Didáctico y Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria**

- Las tres dimensiones del significado de un concepto matemático (estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (situaciones-problemas)) constituye una propuesta similar a la de Vergnaud, y bastante más limitada que el modelo de los “significados institucionales y personales” de Godino y cols.
- El “análisis didáctico” no tiene por qué tener una naturaleza curricular. La metodología que se describe es un “análisis didáctico”, pero no “el” análisis didáctico. Se trata de analizar hechos y fenómenos didácticos (relativos a la enseñanza y aprendizaje) con herramientas teóricas específicas. Como tales herramientas pueden ser diversas, los tipos de análisis didácticos pueden ser diferentes.
- Para la formación inicial de profesores de matemáticas sería preferible buscar “problemas didácticos” asequibles que permitan contextualizar las herramientas analíticas cuya apropiación se pretende. Por ejemplo, el análisis didáctico de una lección de un libro de texto o de sesiones de clase videogradas o de unidades didácticas realizadas por profesores expertos. Se evitaría partir siempre de cero.

Principales observaciones a la ponencia: Gallardo, J.; González, J. L. (2006). **El Análisis Didáctico como metodología de investigación e Educación Matemática**

- El Análisis Didáctico que se describe no abarca todos los aspectos de “una metodología” de investigación educativa, sino sólo una de las etapas del proceso de investigación: la revisión de los antecedentes o estado de la cuestión.
- Se hace un uso “atípico” de la expresión “análisis didáctico”, ya que no se aplica directamente a hechos y fenómenos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sino a la literatura donde tales hechos y fenómenos se describen.
- No se ve que el AD que se describe sea específico de la Didáctica de la Matemática.
- El análisis exhaustivo de las publicaciones no proporciona una “imagen” consistente de la “problemática” educativa correspondiente. El AD no aporta criterios para identificar posibles incompatibilidades, concordancias, complementariedades.

- Los problemas de investigación suelen plantearse de manera más “productiva” y coherente dentro de un marco teórico previo y racionalmente asumido. Una vez seleccionado un paradigma de investigación (cognitivista; antropológico,) y un modelo teórico (teoría de situaciones, momentos didácticos, niveles de van Hiele, enfoque ontosemiótico, etc.) se tiene una orientación sobre el planteamiento coherente de los problemas y criterios de selección de los antecedentes.

REFERENCIAS

- Fernández, A. (1995). *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía*. Madrid: Síntesis.
- Freudhental, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht. Holland: D. Reidel Publishing Company.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006, Septiembre 2006). *El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, R. (2006, Septiembre 2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2006, Septiembre 2006). *Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- González, J. L. (1995).- El campo conceptual de los números naturales relativos. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.
- Puig, L., Cerdán, F. (1988). *Resolución de problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Pedro Gómez, Universidad de Granada

Resumen

En este documento, describo algunos aspectos del significado con el que usamos la expresión “análisis didáctico” en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. En particular, introduzco el análisis didáctico como un nivel del currículo y establezco su papel en la identificación, organización y selección de los múltiples significados de un concepto matemático para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Estas consideraciones dan lugar a algunas reflexiones sobre el papel del análisis didáctico en el diseño de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en la identificación de las capacidades que califican la competencia de planificación del futuro profesor de matemáticas y en la caracterización de su conocimiento teórico, técnico y práctico.

Abstract

In this paper, I describe some aspects of the meaning with which we use the expression “didactical analysis” in a preservice secondary mathematics teacher training methods course. In particular, I introduce didactical analysis as a level of curriculum and I establish its role in identifying, organizing and selecting the multiple meanings of a mathematical concept for the purpose of designing, implementing and assessing didactical units. I show the role that this notion can play in the design of teacher training programs, in identifying the capacities that qualify the preservice teacher’s planning competence, and in characterizing his theoretical, technical and practical knowledge.

Aunque la expresión “análisis didáctico” ha sido una noción importante en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada desde hace tiempo, en los últimos cinco años hemos precisado su significado y le hemos asignado un papel central en su diseño y desarrollo¹. ¿Con qué significado utilizamos esta expresión²? ¿Qué papel puede jugar en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? En este documento abordo estas cuestiones.

Organizo este trabajo en dos partes. En la primera, describo el análisis didáctico como un nivel del currículo de matemáticas de secundaria; profundizo en la noción de significado en las matemáticas escolares; destaco la multiplicidad de significados de un concepto matemático; y describo, de manera general, el ciclo de análisis didáctico como un procedimiento para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. En la

¹ En lo que sigue, me tomo la libertad de redactar en primera persona del singular aunque, en muchas ocasiones, describo el producto del trabajo de una línea de investigación y desarrollo en la que, bajo la tutela de Luis Rico, han trabajado y trabajan varios investigadores. Entre aquellos con quienes he trabajado, debo mencionar a Isidoro Segovia, Evelio Bedoya, José Ortiz, José Luis Lupiáñez y Antonio Marín.

² La expresión “análisis didáctico” se utiliza con múltiples significados. Por ejemplo, de nuestro grupo de investigación, Gallardo y González (2006, en este volumen) la utilizan para referirse a una metodología de investigación en educación matemática.

segunda, muestro, en el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada³, el papel que el análisis didáctico puede jugar en el diseño de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y en la especificación de las capacidades que caracterizan la competencia de planificación del profesor. Finalmente, exploro una caracterización del conocimiento teórico, técnico y práctico del profesor de matemáticas en términos del proceso en virtud del cual él transforma las nociones del análisis didáctico en instrumentos útiles para realizar su labor docente.

1. PLANIFICACIÓN DE CLASE Y CURRÍCULO

Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deben conocer y utilizar principios, procedimientos, herramientas y técnicas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase. Por lo tanto, hay que diferenciar entre los problemas de diseño curricular global (para la totalidad de una asignatura, por ejemplo) y los problemas de diseño curricular local (para una unidad didáctica o una hora de clase sobre una estructura matemática específica o uno o más aspectos de ella). El *análisis didáctico*, introducido por Rico (1992, § III.2.1; , 1997, p. 55) y que hemos venido desarrollando recientemente (Gómez, 2002) es una conceptualización del nivel *local* de la planificación; se constituye en un nuevo nivel del currículo (p. 256); aborda la problemática de la brecha entre el diseño curricular global y local (Rico, 1997; Segovia y Rico, 2001); y se enmarca en una visión funcional del currículo de matemáticas (Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia, 1997, p. 284).

La planificación es una de las actividades más importantes en el trabajo del profesor (Ball y Bass, 2003, p. 3; Van Der Valk y Broekman, 1999) y es una de sus competencias (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001, p. 380). Esta competencia reviste especial importancia en los planes de formación inicial de profesores y se incluye en los diferentes estándares profesionales de los profesores (e.g., Department of Education, 2001; Department of Education and Training, 2004). La situación es similar en el marco del trabajo y la formación del profesor de matemáticas: la planificación se reconoce como una de las competencias indispensables (ver, por ejemplo, Niss, 2003; Recio, 2004; Rico, 2004). El profesor debe abordar diferentes tipos de planificación. Cuando la planificación es local, el foco de atención del profesor es un tema matemático específico. En este nivel, la planificación del profesor debe tener en cuenta la complejidad del contenido matemático desde diversos puntos de vista: “cuando las matemáticas se enseñan desde una perspectiva pluralista, entonces se pueden ver desde múltiples perspectivas —perspectivas que motivan a los profesores a considerar no solamente los diferentes significados de las matemáticas, sino también su diversidad en su enseñanza” (Cooney, 2004, p. 511). De hecho, la negociación y construcción de esta multiplicidad de significados debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula. Ésta es la posición que, desde comienzos de la década de los noventa, Rico y sus colaboradores han propuesto como aproximación a la planificación de unidades didácticas en España (e.g., Rico, 1992; Rico, 1998; Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig *et al.*, 1997). Esta propuesta se centra en la idea de que la planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y

³ Me refiero principalmente a características de esta asignatura en el periodo 2000-2006.

estructuración de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación.

Los “organizadores del currículo” propuestos por Rico (1997, p. 44) son herramientas conceptuales y metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre estos múltiples significados. Un organizador del currículo (por ejemplo, los sistemas de representación) es una noción, con un significado teórico proveniente de la didáctica de la matemática, para la que hemos desarrollado un significado técnico. Este significado técnico recoge los usos que un profesor puede hacer de ella cuando diseña, implementa y evalúa unidades didácticas. En lo que sigue, utilizaré el término “noción” para referirme tanto al organizador del currículo (es decir, a su significado técnico), como a sus significados teórico y práctico. Para efectos de abordar la descripción del análisis didáctico y su relación con los organizadores del currículo, considero a continuación la interpretación que hacemos de la noción de significado de un concepto en las matemáticas escolares.

2. PLANIFICACIÓN DE CLASE Y SIGNIFICADO

La extensión y profundidad de los significados que construyen los escolares en el aula (y, por consiguiente, la calidad de su aprendizaje) se realiza atendiendo los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos, a la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, en definitiva, considerando la riqueza de conexiones —de significados— que se establecen para una determinada noción o conjunto de nociones matemáticas. Parte relevante del aprendizaje matemático de los escolares se lleva a cabo en el aula, cuando ellos negocian y construyen significados con motivo de las actividades propuestas por el profesor (Biehler, 2005, pp. 61-62; Bromme y Steinbring, 1994, p. 218). ¿Cuáles son los significados de un concepto matemático que pueden ser objeto de la interacción en el aula? ¿Cuáles son los significados que se considera relevante desarrollar? En este apartado, abordo estas preguntas y asumo una posición con respecto a ellas. Mi propósito es mostrar la utilidad de abordar la noción de significado en las matemáticas escolares desde una perspectiva amplia en virtud de la cual un concepto matemático puede ser estudiado desde una variedad de significados.

Frege (1998a; , 1998b; , 1998c) introdujo la idea de un triángulo semántico para abordar el significado de un término (ver Figura 1).

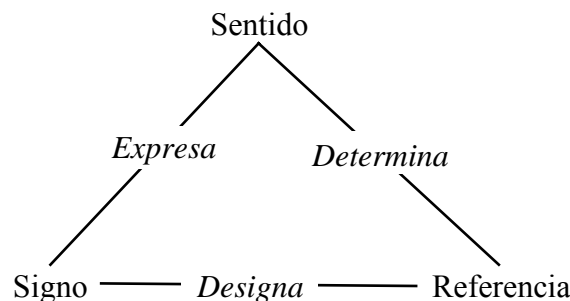


Figura 1. Triángulo semántico (término)⁴

Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa, un término conceptual se refiere a un concepto. En la noción de Frege para significado de un

⁴ Frege no dio ningún nombre para la relación entre sentido y referencia. La denominé “determina” siguiendo a Oldager (2004, p. 21).

término conceptual, el triángulo semántico viene dado por el *signo* o *término* con el que se expresa, por su *referencia* o concepto propiamente tal, y por su *sentido* o modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto (Ver Figura 2).

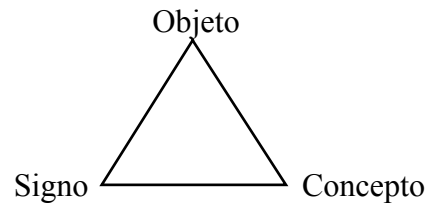


Figura 2. Triángulo semántico (concepto)

El triángulo semántico propuesto por Frege identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está centrado en el ámbito de la matemática escolar, adaptamos las ideas de Frege para considerar un sistema de relaciones más amplio⁵.

Mi propuesta interpreta las ideas de Frege al enfatizar el hecho de que los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos, y, por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar. Adicionalmente, y siendo coherente con nuestra posición con respecto al currículo de matemáticas, adopto un punto de vista funcional, en virtud del cual el sentido en el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustentan el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto. Mi propuesta aborda el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que denomino estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Ver Figura 3)⁶:

- ♦ En la *estructura conceptual* incluyo las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- ♦ En los *sistemas de representación* incluyo las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- ♦ En la *fenomenología* incluyo aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

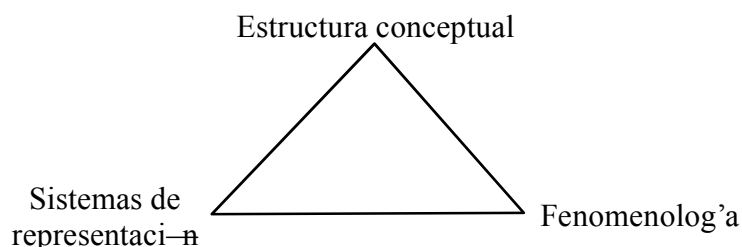


Figura 3. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar

⁵ Debo a Luis Rico la aclaración de que, para efectos del análisis de contenido —que describiré más adelante—, no es necesaria una aproximación social a la noción de significado. Basta con una extensión de las ideas originales de Frege.

⁶ Diveros autores se han aproximado a la problemática de los significados de un concepto en las matemáticas escolares. Biehler (2005, pp. 62-66) resume algunas de estos trabajos. Mi propuesta, en sus tres dimensiones, comparte muchos aspectos con la de Steinbring (1999).

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar ponen en evidencia y organizan una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de clase: *la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares*⁷.

Esta multiplicidad de significados implica que, para efectos de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, sería deseable que el profesor:

1. conociera las tres dimensiones que caracterizan el significado de un concepto en la matemática escolar

y fuera capaz de:

2. recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados y organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
3. seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción; y
4. utilizar la información que surge de los diversos significados del concepto para el diseño de unidades didácticas.

El contexto impone unos condicionantes a los últimos tres pasos. Por ejemplo, el contenido propuesto por la programación a comienzo de curso delimita los significados que se consideran relevantes a nivel institucional. Por otro lado, el profesor debe atender al desarrollo de la asignatura en el momento de la planificación. Para ello, él debe tener en cuenta su percepción sobre las capacidades que los escolares ya han desarrollado y su previsión sobre cómo los escolares pueden, al abordar las tareas objeto de la instrucción, desarrollar las capacidades involucradas en los objetivos de aprendizaje. A continuación, describo el análisis didáctico como un procedimiento que aborda y organiza esta complejidad.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO: UN PROCEDIMIENTO PARA ORGANIZAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis (Gómez, 2002):

1. el *análisis de contenido*, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
2. el *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
3. el *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y
4. el *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

⁷ En este trabajo me centro en el análisis de un concepto y de las estructuras matemáticas relacionadas con él. Los temas de la educación secundaria no son solamente conceptos. Incluyen, por ejemplo, operaciones entre conceptos, propiedades de conceptos, resultados, procedimientos o sistemas de representación. Todos estos temas se enmarcan dentro de una estructura matemática y, por lo tanto, pueden ser abordados con las herramientas del análisis didáctico.

Denomino *análisis didáctico* a un procedimiento cíclico que incluye estos cuatro análisis, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. La descripción de un ciclo del análisis didáctico sigue la secuencia propuesta en la Figura 4.

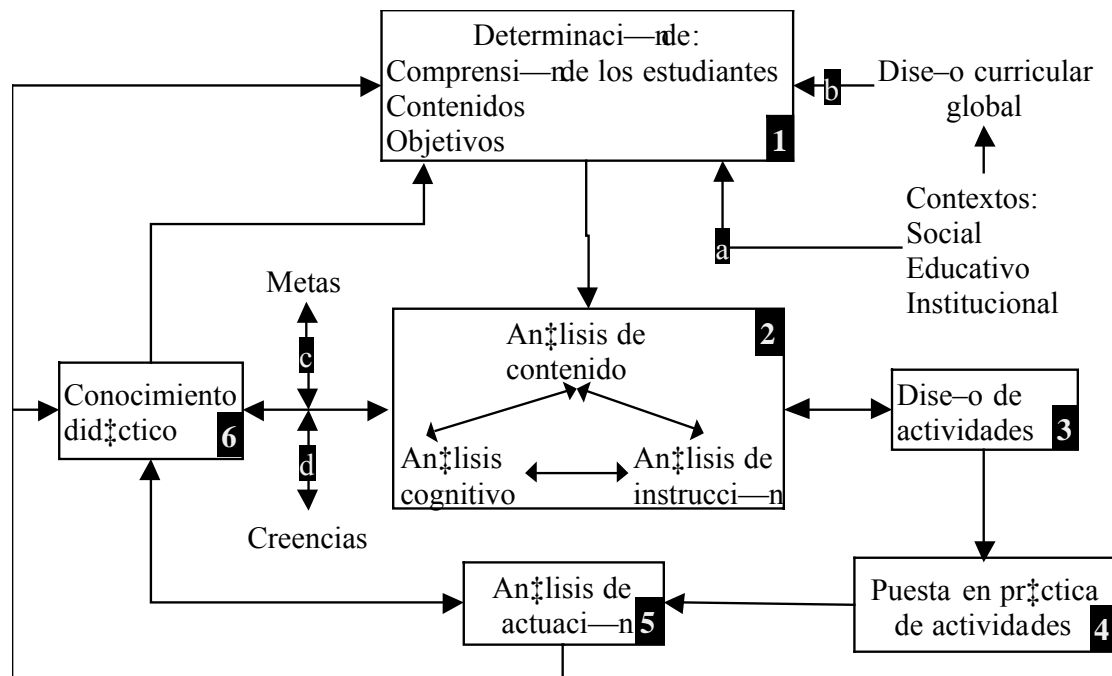


Figura 4. Ciclo de análisis didáctico y sus condicionantes

El ciclo del análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 4). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas. Por consiguiente, la selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El

conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

Cada uno de los análisis se articula alrededor de unas *nociones*. Los organizadores del currículo son la expresión del significado técnico de esas nociones. Por ejemplo, el análisis de contenido incluye las nociones de sistema de representación, estructura conceptual y fenomenología, que corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares. Por su parte, para cada noción, adoptamos un significado teórico, un significado técnico y un significado práctico. Por ejemplo, en el caso de los sistemas de representación podemos seleccionar, como *significado teórico*, la propuesta de Kaput (1992), en virtud de la cual, un sistema de representación es “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523). El *significado técnico* de la noción abarca los usos que idealmente el profesor hace de ella cuando analiza un concepto matemático. Su *significado práctico* abarca las técnicas (razonamientos y procedimientos, Artigue, 2002) que el profesor desarrolla y pone en juego cuando utiliza la información que surge del análisis del concepto para efectos de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica (por ejemplo, las técnicas para utilizar la información que surge del análisis de contenido a efectos de identificar las capacidades y errores de los escolares).

A continuación, apoyándome en un ejemplo, presento *algunos* aspectos del significado técnico de las nociones estructura conceptual y sistemas de representación, con el propósito de dar cuenta de la complejidad del análisis de contenido, en particular, y del análisis didáctico, en general⁸.

Utilizo la expresión “estructura conceptual” para referirme a tres aspectos de todo concepto matemático del currículo escolar:

1. *Estructuras matemáticas involucradas*. Todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas: (a) la estructura matemática que el concepto configura y (b) las estructuras matemáticas de las que él forma parte. Por ejemplo, el concepto función cuadrática configura una estructura matemática en la que se establecen relaciones estructurales entre conceptos como ecuación cuadrática, parámetro, foco y vértice (ver Figura 5). Adicionalmente, el concepto función cuadrática forma parte, por ejemplo, de la estructura matemática correspondiente al concepto función.
2. *Relaciones conceptuales*. Resalto las relaciones que se establecen entre el concepto y (a) los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura (e.g., la relación entre la función cuadrática y la ecuación cuadrática), (b) los objetos que son casos particulares de dicho concepto (en términos de Frege, los objetos que saturan el predicado; e.g., $f(x) = 3x^2 - 4$ como caso particular de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$), y (c) los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte (e.g., la relación entre la función cuadrática y las funciones continuas).
3. *Relaciones de representaciones*. La exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Al tener en cuenta los sistemas de representación, se pueden destacar varias relaciones (ver Figura 5): (a) la relación

⁸ La descripción detallada de los cuatro análisis del análisis didáctico y de su papel en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es un trabajo en curso en nuestro grupo de investigación (ver, por ejemplo, Lupiáñez y Rico, 2006; Marín, 2005).

entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes —e.g., como consecuencia de completar cuadrados), (b) la relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación —e.g., la relación entre parámetros de una forma simbólica y elementos de la representación gráfica) y (c) la relación entre dos signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes —e.g., como consecuencia de aplicar una traslación a la gráfica).

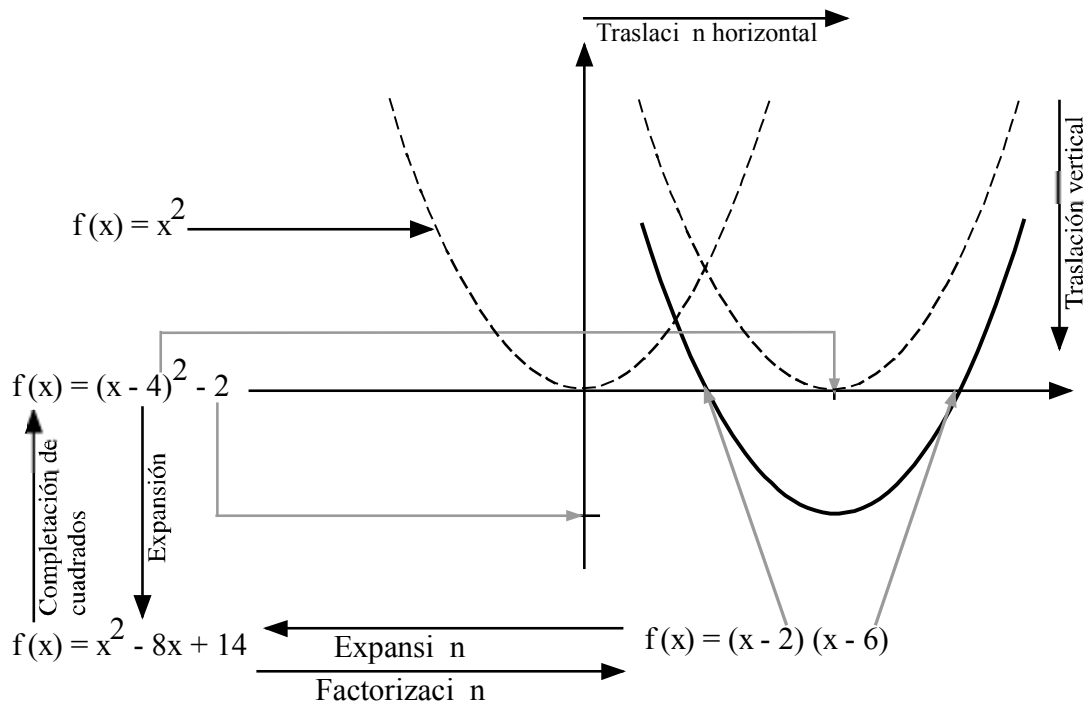


Figura 5. Conceptos y procedimientos

Por lo tanto, cuando exploramos los significados de un concepto en las matemáticas escolares, debemos tener en cuenta tres tipos de “elementos” y dos grupos de relaciones entre esos elementos.

Podemos clasificar los elementos en:

- ◆ los *objetos*, como casos particulares de un concepto y que conforman la extensión del concepto,
- ◆ los *conceptos*, como predicados que son saturados por los objetos y, a su vez, conforman estructuras matemáticas, y
- ◆ las *estructuras matemáticas*, que están conformadas por conceptos.

Por otro lado, las relaciones descritas en los puntos 2 y 3 anteriores se pueden agrupar en dos categorías que denomino *relaciones verticales* y *relaciones horizontales*. Las relaciones verticales se refieren a las relaciones entre los tres tipos de elementos: Objeto \leftrightarrow Concepto \leftrightarrow Estructura matemática. Por otra parte, las relaciones horizontales se refieren a las relaciones entre los signos en sus diferentes sistemas de representación (relaciones entre representaciones).

Abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual y sus representaciones, implica identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y las relaciones (horizontales y verticales) correspondientes a ese concepto. Éste es un trabajo *matemático* en el contexto del contenido matemático escolar. Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006, en este volumen) lo hacen a través de lo que ellos denominan configuraciones epistémicas asociadas a un concepto. Por su parte, Biehler (2004, pp. 69-71) se aproxima a este tipo de procedimiento cuando, en un esquema y en una tabla, presenta lo que él denomina “el paisaje semántico” del concepto.

4. ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Si el análisis didáctico es una noción curricular, ¿qué papel juega en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? A continuación, muestro las contribuciones de esta noción en tres aspectos de esta actividad: (a) el diseño de una asignatura de formación inicial, (b) la identificación de las capacidades que califican la competencia de planificación del profesor de matemáticas y (c) la caracterización de su conocimiento teórico, técnico y práctico.

Análisis Didáctico y Diseño de una Asignatura de Formación de Profesores de Matemáticas

En la Figura 6, resumo el papel que el análisis didáctico ha jugado en el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. Este diseño se soporta en dos pilares: una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores⁹ y una conceptualización de las actividades del profesor. Mostraré en la siguiente sección que es posible identificar y caracterizar la competencia de planificación del profesor a partir del análisis didáctico, como conceptualización de las actividades del profesor a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas.

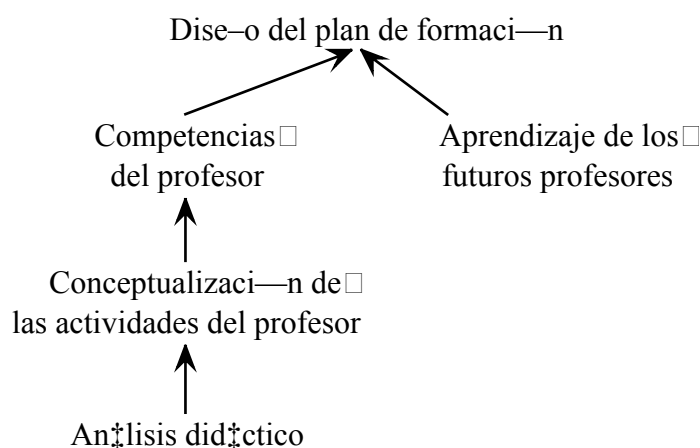


Figura 6. Conceptualización y diseño de un plan de formación

⁹ En este documento no profundizo en este aspecto de la fundamentación del diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Para más detalle a este respecto ver, por ejemplo, Gómez y Rico (2005).

De las diferentes “tareas profesionales” del profesor (Llinares, 2005) y sus correspondientes competencias (Rico, 2004), nosotros hemos centrado nuestra atención en la planificación. Es decir, nos preocupamos por las competencias y capacidades necesarias para el diseño de unidades didácticas. El esquema metodológico para desarrollar estas competencias y capacidades se basa en un proceso de simulación (Van Der Valk y Broekman, 1999), en virtud del cual los grupos de futuros profesores deben producir, al final de la asignatura, el diseño de una unidad didáctica sobre un tema concreto. Para ello, los futuros profesores, con la guía y el apoyo de los formadores, ejecutan los diversos procedimientos implicados en cada uno de los análisis del análisis didáctico. Éste es, por lo tanto, un segundo papel del análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: es una de las bases que guían la secuencia de actividades que realizamos dentro de la asignatura.

Análisis Didáctico y Capacidades del Profesor de Matemáticas

En esta sección sugiero cómo la noción de análisis didáctico puede apoyar la identificación de las *capacidades* que contribuyen al desarrollo de la competencia de planificación del profesor de matemáticas. Enumeraré y organizaré estas capacidades de acuerdo con los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. A continuación, presento únicamente un primer nivel de las capacidades correspondientes a cada análisis. Cada una de estas capacidades se puede desarrollar en descripciones más detalladas que corresponden a los procedimientos que configuran cada uno de los análisis del análisis didáctico.

Análisis de Contenido

Para las tres dimensiones del significado de un concepto, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
- ◆ organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
- ◆ seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales; y
- ◆ seleccionar los significados relevantes para la instrucción al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo).

Análisis Cognitivo

A partir de la información que surge del análisis de contenido, el profesor debe ser capaz de establecer:

- ◆ las competencias que se quieren desarrollar,
- ◆ los focos de interés que se han de tratar,
- ◆ las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción,
- ◆ las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados a tratar),
- ◆ las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción),

- ◆ las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar esas tareas, y
- ◆ las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Análisis de Instrucción

Para efectos de analizar y seleccionar las tareas que conforman la instrucción, el profesor ha de ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:

- ◆ identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden,
- ◆ identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir,
- ◆ establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea, y
- ◆ evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

Análisis de Actuación

Una vez que se ha realizado la instrucción y que el profesor ha observado y registrado lo que sucedió en su interacción con los estudiantes, él ha de ser capaz de:

- ◆ comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula,
- ◆ establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula,
- ◆ caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades, y
- ◆ producir información relevante para una nueva planificación.

Si se tienen en cuenta los procedimientos que configuran el análisis didáctico, entonces es posible desarrollar en detalle las capacidades que he enumerado en la sección anterior. Por ejemplo, las dos primeras capacidades del análisis de contenido se refieren a la identificación y organización de los significados de un concepto matemático. Si consideramos las dimensiones de sistemas de representación y estructura conceptual de estos significados, entonces, para realizar estos procedimientos, el profesor debe ser capaz, para el concepto correspondiente, de:

1. identificar sus elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas),
2. determinar las diferentes representaciones de esos elementos y
3. establecer las relaciones entre los elementos y entre sus representaciones.

Si profundizamos en el detalle de la capacidad 3, observamos que, de acuerdo con lo que presenté anteriormente, esta capacidad implica que el profesor debe ser capaz de establecer las relaciones:

- ◆ entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura,
- ◆ entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto,
- ◆ entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte,

- ♦ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes),
- ♦ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación) y
- ♦ entre pares de signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes).

En el ejemplo que acabo de presentar se aprecia la complejidad de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas (ver Figura 7). He identificado unas capacidades que contribuyen a esta competencia y las he descrito detalladamente de acuerdo con los análisis que conforman el análisis didáctico. En el caso del análisis de contenido, dos de estas capacidades se refieren a la identificación y organización de los significados del concepto en términos de los sistemas de representación y la estructura conceptual. Estas capacidades implican, entre otras cosas, establecer diversos tipos de relaciones entre los elementos con los que el profesor organiza los significados del concepto en cuestión.

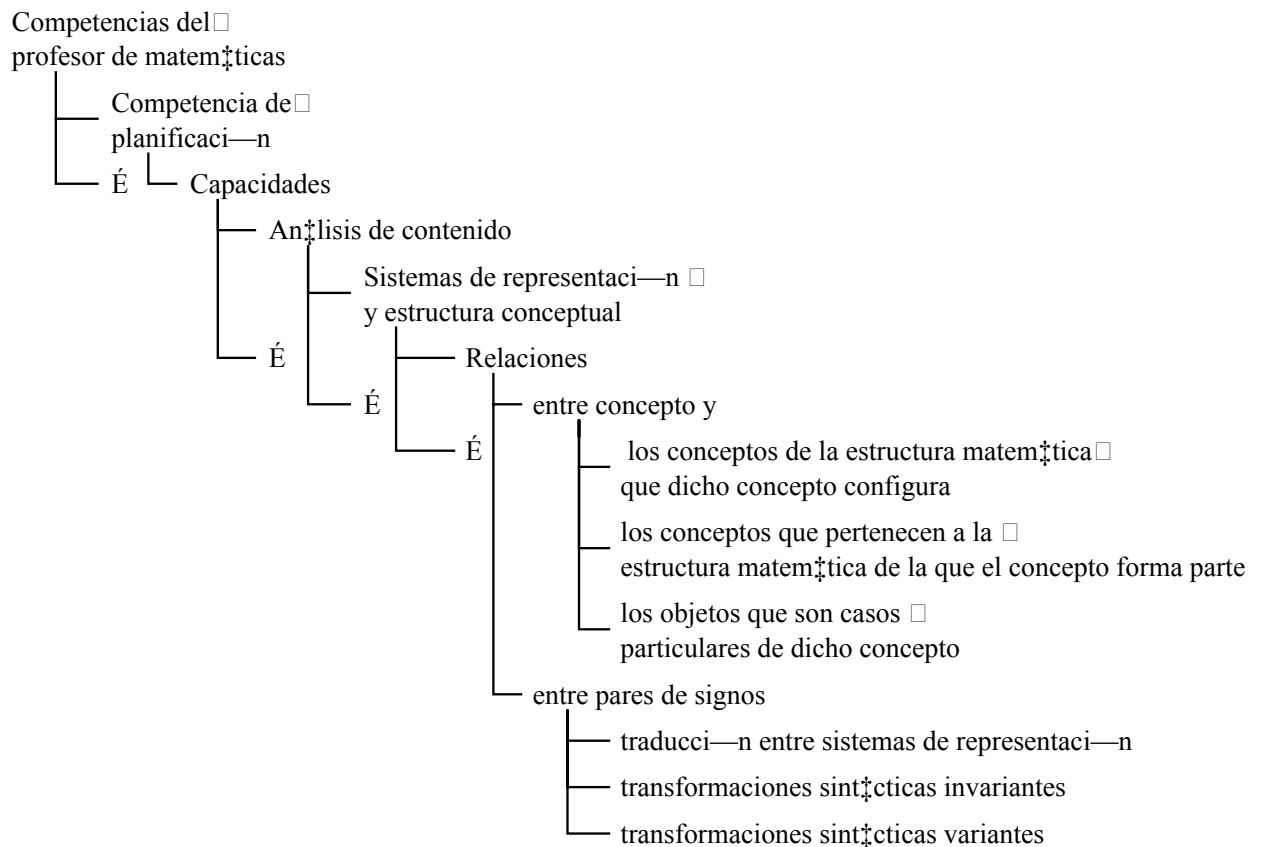


Figura 7. Competencia de planificación y complejidad de las capacidades asociadas

Análisis Didáctico y Conocimiento del Profesor

En el contexto de la asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria a nuestro cargo, nosotros esperamos que, para cada una de las nociones del análisis didáctico y para un concepto matemático concreto, el futuro profesor:

1. conozca el significado de la noción;

2. recabe y organice información sobre los significados del concepto en términos de la noción;
3. use la información obtenida para realizar los otros análisis del análisis didáctico; y
4. use la información de todos los análisis para el diseño de la unidad didáctica.

Estas actividades del profesor corresponden a los significados teórico (1), técnico (2) y práctico (3 y 4) de las nociones que conforman el análisis didáctico que introduje anteriormente y configuran, a su vez, tres tipos de conocimientos del futuro profesor. En este contexto, el *conocimiento teórico* es declarativo e implica la capacidad para describir, en abstracto, la noción. Por ejemplo, para declarar la definición de sistema de representación, enumerar sus características o su relación con otras nociones (como la estructura conceptual o la fenomenología). Denomino como *técnico* al conocimiento y a las capacidades para analizar un concepto matemático en términos de una noción dada. Por ejemplo, la identificación de las diferentes representaciones de un concepto forma parte del conocimiento técnico. Finalmente, en este contexto, el *conocimiento práctico* involucra las capacidades necesarias para usar, de manera orquestada, una información técnica con un propósito práctico (e.g., la planificación de unidad didáctica).

La relación entre las actividades que se espera que realice el futuro profesor, los significados de las nociones del análisis didáctico y los tipos de conocimientos que están implicados pone de manifiesto la complejidad del conocimiento didáctico y de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. El conocimiento didáctico, como el conocimiento que se pone en juego y se desarrolla al realizar el análisis didáctico, es un *conocimiento para la acción*, tal y como lo caractericé al describirlo en términos de competencias en la sección anterior. El desarrollo de este conocimiento requiere que los futuros profesores puedan transformar las nociones que conforman el análisis didáctico en instrumentos¹⁰. El desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores se fundamenta en un juego entre teoría y práctica, que se puede caracterizar con una adaptación de la teoría de la génesis instrumental (Rabardel, 2003; Rabardel y Bourmaud, 2003; Vérillon, 2000): es a través del uso de la noción (el instrumento), como mediador entre los futuros profesores y el concepto sobre el que se trabaja, que ellos construyen y desarrollan significados tanto acerca de la noción, como del concepto. La idea de génesis instrumental surge al constatar que un artefacto¹¹ se convierte en un instrumento en la medida que tienen lugar tres procesos:

1. La *instrumentalización*¹², como proceso en el que el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 673).
2. La *instrumentación*, como el proceso en el que se generan esquemas de acción (p. 673). Éstas son habilidades de aplicación de la herramienta para realizar tareas significativas (Kaptelinin, 2003, p. 834) que se transforman en técnicas (Artigue, 2002, p. 250). Una técnica es una amalgama de razonamiento y procedimientos rutinarios que permiten resolver una tarea (p. 248).
3. La *integración orquestada*, en virtud de la cual la herramienta se integra a otros artefactos (Kaptelinin, 2003, p. 834).

¹⁰ Este aspecto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria ha sido ya resaltado por Llinares (2005).

¹¹ Lo que propongo es una adaptación de la teoría de la génesis instrumental dado que, en este caso, el instrumento no se refiere a un artefacto material concreto, sino a una “herramienta analítica” (Kaptelinin, 2003, p. 834).

¹² Soy consciente de que este término no existe en castellano, pero lo introduzco como traducción del término “instrumentalization” en inglés, y, así, diferenciar este primer proceso del segundo.

De hecho, estos tres procesos corresponden, al menos parcialmente, a las tres categorías en las que también he clasificado las actividades del futuro profesor, los significados de las nociones del análisis didáctico y los tipos de conocimientos que esperamos que él desarrolle a lo largo de su formación (ver Tabla 1).

Actividad	Significado	Conocimiento	Proceso
Conocer la noción	Teórico	Teórico	Instrumentalización
Recabar información	Técnico	Técnico	Instrumentación
Usar información	Práctico	Práctico	Integración orquestada

Tabla 1. Actividades, significados, conocimientos y procesos

5. DISCUSIÓN

En este trabajo he descrito el significado con el que, en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, utilizo la expresión “análisis didáctico”. Le doy especificidad a este significado al caracterizarlo como un procedimiento para organizar la enseñanza de un concepto matemático y concretar:

- ◆ el contexto en que se usa (una asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria),
- ◆ el propósito de su implementación (la fundamentación del diseño de la asignatura),
- ◆ el sujeto que lo utiliza (el futuro profesor) y
- ◆ las nociones que lo conforman (los organizadores del currículo).

He mostrado el papel que esta noción puede jugar en el diseño de planes de formación, en la identificación de las capacidades que califican la competencia de planificación del profesor de matemáticas y en la caracterización de su conocimiento teórico, técnico y práctico.

La caracterización de los procedimientos que conforman el análisis didáctico y de los significados teóricos, técnicos y prácticos de las nociones implicadas en sus procedimientos me permite identificar y organizar las capacidades necesarias para la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. De esta manera doy concreción al conocimiento didáctico que esperamos que los futuros profesores desarrollen dentro de la asignatura. La implementación del Espacio Europeo de Educación Superior implica la determinación de un conjunto de competencias (genéricas y específicas) para el perfil profesional del profesor de matemáticas de secundaria. Diversas instituciones españolas han colaborado para producir una lista de competencias específicas (Recio, 2004), conocida como las competencias ITERMAT. Pero, no es suficiente con enumerar estas competencias. Es necesario precisar su significado, caracterizarlas en términos de capacidades, relacionarlas con las actividades que se espera que el profesor realice en su labor docente y diseñar los currículos que pueden promover su desarrollo en los planes de formación inicial. He mostrado que el análisis didáctico puede ser una noción valiosa en esta reflexión.

La adaptación de la teoría de la génesis instrumental a una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria resalta un aspecto central

del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores que, en muchas ocasiones, se mantiene en segundo plano: los futuros profesores deben desarrollar técnicas (razonamientos y procedimientos) para resolver las tareas que configuran su actividad docente. La formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria no puede centrarse exclusivamente en el desarrollo de un conocimiento teórico o en la reflexión sobre un conocimiento práctico. Tampoco puede ver sencillamente estos dos conocimientos como complementarios. La integración entre teoría y práctica en la formación de profesores debe, en primera instancia, reconocer la importancia de promover el conocimiento técnico de los futuros profesores. Este conocimiento técnico es el vínculo entre teoría y práctica: su construcción implica el desarrollo de las capacidades del futuro profesor para transformar las nociones teóricas en instrumentos útiles para la práctica. Pero, el esfuerzo de formación no se debe restringir exclusivamente al conocimiento (técnico) de cómo se deberían idealmente analizar las múltiples facetas del significado de un concepto. También debe incluir, en segunda instancia, los razonamientos y procedimientos (las técnicas) en virtud de los cuales los futuros profesores pueden, a partir del significado técnico de las nociones teóricas, recabar, organizar y seleccionar la información relevante sobre un concepto concreto y *usar esa información con propósitos didácticos*. En la asignatura a nuestro cargo hemos profundizado en algunos aspectos de este conocimiento práctico. Lo hacemos, por ejemplo, cuando describimos en detalle la multiplicidad y complejidad de las relaciones involucradas en la descripción de los significados de un concepto (relacionando así los significados técnicos de la estructura conceptual y los sistemas de representación); o cuando establecemos esquemas para definir los objetivos de aprendizaje a partir del análisis de las capacidades que se pretenden lograr y de las competencias a las que estas capacidades contribuyen (relacionando un aspecto del análisis didáctico —el análisis cognitivo— con un aspecto del diseño curricular a nivel global). Sin embargo, otras permanecen, por el momento, opacas y las sugerimos tan sólo a través de ejemplos. Es el caso, por ejemplo, de los procedimientos en virtud de los cuales se pueden identificar y organizar las capacidades y errores de los escolares a partir de la información que surge del análisis de contenido; de los esquemas para evaluar y seleccionar tareas con base en la información que surge de los análisis de contenido y cognitivo; o de los procedimientos mediante los cuales se pueden analizar las propuestas de los libros de texto a partir de la información del análisis didáctico.

Estos son tan sólo unos primeros intentos en nuestro propósito de comprender cómo aprende un futuro profesor en un plan de formación y de desarrollar estrategias para promover ese aprendizaje. Nos queda mucho espacio aún por recorrer.

6. AGRADECIMIENTOS

Agradezco a María José González, María Consuelo Cañadas, José Luis Lupiáñez, Juan D. Godino y Jesús Gallardo quienes leyeron y comentaron un borrador de este documento.

7. REFERENCIAS

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.
- Biehler, R. (2004). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 217-248.
- Cooney, T. J. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg: National Center for Mathematics Education.
- Department of Education. (2001). *Teacher Competencies and Professional Standards Discussion Paper*. East Perth: Autor.
- Department of Education and Training. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Autor.
- Frege, G. (1998a). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998b). Sobre concepto y objeto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 123-139). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998c). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006, Septiembre 2006). *El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, R. (2006, Septiembre 2006). *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas*. Trabajo presentado en X Simposio de la SEIEM, Huesca.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. y Rico, L. (2005). *Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICM Study, Águas de Lindóia.
- Kaptelinin, V. (2003). Learning with artefacts: integrating technologies into activities. *Interacting with Computers*, 15(6), 831-836.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (2001). *ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy Press.

- Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática, Porto.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares, *X Simposio de la SEIEM*. Huesca.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Oldager, N. (2004). *Conceptual knowledge representation and reasoning*. Tesis doctoral no publicada, Technical University of Denmark, Copenhagen.
- Rabardel, P. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers*, 15(5), 641-645.
- Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15(5), 665-691.
- Recio, T. (2004). Seminario: itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.
- Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (1998). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de secundaria en didáctica de la matemática. En Braira (Ed.), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas* (pp. 183-194). León: Universidad de León.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M. y Segovia, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Steinbring, H. (1999). *How do Mathematical Symbols acquire their Meaning? - The Methodology of the Epistemology-based Interaction Research*. Trabajo presentado en Annual Meeting of the GDM, Bern.
- Van Der Valk, T. A. E. y Broekman, H. H. G. B. (1999). The lesson preparation method: a way of investigating pre-service teachers' pedagogical content knowledge. *European Journal of Teacher Education*, 22(1), 11-22.
- Vérillon, P. (2000). Revisiting Piaget and Vigotsky: in search of a learning model for technology education. *The Journal of Technology Studies*, 26(1), 3-10.

ANÁLISIS Y VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE PROCESOS DE ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS¹³

Juan D. Godino, Universidad de Granada
Delisa Bencomo, Universidad de Guayana (Venezuela)
Vicenç Font, Universidad de Barcelona
Miguel R. Wilhelmi, Universidad Pública de Navarra

Resumen

Presentamos un sistema de nociones teóricas para describir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y valorar la idoneidad didáctica de tales procesos desde una perspectiva global. Dicha idoneidad se concibe como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. El “enfoque ontosemiótico” de la cognición e instrucción matemática aporta una categorización de los elementos intervinientes en cada una de dichas dimensiones, estructurándolos en configuraciones de procesos, objetos y relaciones. Esta categorización y estructuración permiten explicar algunos fenómenos didácticos en términos de la complejidad ontosemiótica implicada. Las nociones teóricas introducidas se aplican al análisis del proceso de estudio realizado en una experiencia de enseñanza de la noción de función con estudiantes universitarios.

Palabras clave:

instrucción matemática; metodología de análisis; enfoque ontosemiótico; significados; conflictos semióticos; enseñanza de funciones

Abstract

We propose a system of theoretical notions to describe teaching and learning mathematics processes and to assess the didactical suitability of these processes from a global perspective. The didactical suitability is conceived as the coherent and efficient articulation of the different dimensions involved in teaching and learning mathematics: epistemic, cognitive, interactive, mediational, emotional and ecological dimensions. The “onto-semiotic approach” to mathematical cognition and instruction provides a categorization of elements composing each dimension, structuring these elements into epistemic cognitive and didactical configurations. This categorization and structuring allow explaining some didactical phenomena in terms of the onto-semiotic complexity involved. The set of theoretical notions are applied to analyze a teaching experience on the function notion with university students.

¹³ Ponencia invitada en el X Simposio de la SEIEM, Huesca (España), 7-9 Septiembre 2006. Una versión ampliada de este trabajo está disponible en, <http://www.ugr.es/local/jgodino>

1. INTRODUCCIÓN

Con frecuencia la investigación didáctica se ha centrado, y continúa centrada en gran medida, en estudios descriptivos sobre aspectos cognitivos del aprendizaje, pensamiento del profesor, etc., y en ciertos casos proporcionando explicaciones de las dificultades y factores condicionantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, consideramos necesario abordar de manera sistemática la cuestión tecnológica del diseño, desarrollo y evaluación de propuestas de intervención en el aula. La Didáctica de la Matemática debería aportar conocimientos para el análisis de:

- La adaptación y pertinencia de los contenidos matemáticos a un determinado proyecto educativo.
- Los medios tecnológicos y temporales adecuados para la puesta en marcha de un proceso de estudio matemático.
- El tipo de interacción entre profesor y alumnos que permita identificar y resolver las dificultades y conflictos en los procesos de estudio matemático.
- La adaptación entre los objetivos formativos y las capacidades y competencias previas de los alumnos, así como a sus intereses, afectividad y motivaciones.
- La pertinencia de los significados pretendidos (e implementados), de los medios usados y de los patrones de interacción al proyecto educativo de la escuela y el contexto social en que se desarrolla el proceso de estudio.

El objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está en la base de cualquier esfuerzo de investigación e innovación; pero la complejidad de tales procesos nos lleva a ser extremadamente precavidos en la proposición de normas y reglas para la intervención en los sistemas didácticos. Si preguntamos actualmente a cualquier investigador en educación matemática sobre, qué matemáticas enseñar y cómo en un contexto específico, posiblemente, nos dirá “no lo sabemos”, o algo parecido. ¿Significa esto que todos los esfuerzos de investigación realizados hasta la fecha han sido baldíos?

Ciertamente no disponemos de recetas de cómo enseñar, pero esto no significa que no tengamos ciertos conocimientos que nos permiten tomar algunas decisiones locales preferentes. Aceptamos la siguiente hipótesis metodológica: Fijadas unas circunstancias (sujetos, recursos, restricciones, ...), un “experto” en didáctica de las matemáticas puede razonar (apoyándose en resultados teóricos contrastados empíricamente) que ciertas tareas y modos de interacción en el aula son preferibles a otras diferentes.

Nos parece necesario indagar sobre los criterios que ayuden a determinar en qué medida un *proceso de estudio* o instrucción matemática¹⁴ reúne ciertas características que permitan calificarlo como “idóneo” para los fines pretendidos y adaptado a las circunstancias e instrumentos disponibles. En este sentido, Sfard (2002) hace un análisis de las características educativas de los estándares curriculares (NCTM, 1989)¹⁵ teniendo en cuenta diez “necesidades” de los estudiantes en relación con el aprendizaje de las matemáticas. Para Sfard, la necesidad central es la de dotar de significado a las manipulaciones simbólicas:

¹⁴ Designamos como « instrucción matemática » - o proceso de estudio matemático - a los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, organizados en el seno de sistemas didácticos.

¹⁵ Análisis similares pueden ser realizados sobre los estándares curriculares propuestos más recientemente (NCTM, 2000)

“La necesidad de significado, culturalmente matizada, pero universal, y la necesidad de comprendernos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea, es ampliamente reconocida como la fuerza básica tras todas nuestras actividades intelectuales” (Sfard, 1998, p. 5).

El resto de necesidades que describe Sfard hacen referencia a aspectos *epistémicos* (naturaleza relacional de las matemáticas; las matemáticas como actividad humana; las matemáticas como proceso, antes que como producto), *cognitivos* (adaptación consistente de los nuevos conocimientos a los previamente establecidos; interacción social y comunicación como motores del aprendizaje; complejidad del aprendizaje) o *emocionales* (el aprendizaje como proceso de participación e integración en una comunidad, para la aceptación en la misma).

Estas diez “necesidades” del aprendiz de matemáticas deben ser tenidas en cuenta en el diseño e implementación de los procesos de estudio. Además de estas necesidades nosotros consideramos que es necesario tener en cuenta necesidades *docentes*, en particular las que denominamos *mediacionales* (disponibilidad de recursos materiales y temporales) y *ecológicas* (relativas a la institución de referencia, al contexto social, a las directrices en política educativa, a las limitaciones económicas, etc.).

En diversos trabajos, Godino y colaboradores¹⁶ (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006) han elaborado un sistema de nociones teóricas sobre la naturaleza, origen y significado de los objetos matemáticos desde una perspectiva educativa, tratando de articular de manera coherente las dimensiones *epistémica* (significados institucionales o socioculturales) y *cognitiva* (significados personales, psicológicos o individuales). Estas nociones constituyen un primer paso para abordar los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que se centran en modelizar los propios conocimientos matemáticos a enseñar y los aprendizajes logrados por los estudiantes. Sin embargo, las cuestiones de diseño, implementación y evaluación de intervenciones didácticas efectivas requiere la adopción (o el desarrollo) de teorías instruccionales, esto es, herramientas que ayuden a describir las interacciones en el aula, explicar por qué ocurren ciertos *hechos* y *fenómenos* (Wilhelmi et al., 2005) y, a ser posible, orientar posibles acciones de mejora.

Godino, Contreras y Font (2006) han desarrollado algunas nociones teóricas para el análisis de la instrucción matemática, modelizándola, de manera metafórica, como procesos estocásticos compuestos de seis subprocesos y sus correspondientes trayectorias muestrales:

1. *Trayectoria epistémica*, que es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado¹⁷ institucional implementado. Estos componentes (problemas, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.
2. *Trayectoria docente*: distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
3. *Trayectorias discentes*: distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes.

¹⁶ Estos trabajos están disponibles en Internet, <http://www.ugr.es/local/jgodino>. En Godino, Batanero y Font (2006) se presenta una síntesis actualizada del « enfoque ontosemiótico » para la Didáctica de las Matemáticas.

¹⁷ *Significado pragmático*: sistema de prácticas operativas y discursivas.

4. *Trayectoria mediacional*: distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.), y del tiempo asignado al estudio.
5. *Trayectorias cognitivas*: cronogénesis y evolución de los significados personales de los estudiantes.
6. *Trayectorias emocionales*: distribución temporal de los estados emocionales (motivaciones, actitudes, valores, afectos, ...) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Godino, Contreras y Font introducen la noción de idoneidad (pertinencia, adecuación, ...) de un proceso de estudio matemático como herramienta para establecer un puente entre una didáctica descriptiva y una didáctica normativa o técnica¹⁸. En este trabajo vamos a desarrollar la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático, teniendo en cuenta las distintas dimensiones implicadas, así como el modelo epistemológico y cognitivo propuesto por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS). Con el fin de ejemplificar el uso del sistema de nociones teóricas del EOS en el *análisis didáctico*¹⁹ vamos a aplicarlas a una experiencia de enseñanza de la noción de función a estudiantes de un primer curso de matemáticas en una escuela de ingeniería (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

2. LA NOCIÓN DE IDONEIDAD DIDÁCTICA, SUS DIMENSIONES Y COMPONENTES

En Godino, Contreras y Font (2006) se introducen cinco criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático, usando en su formulación nociones teóricas del EOS. A continuación describimos estos criterios con algunas precisiones respecto de la versión inicialmente formulada:

1. *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
2. *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
3. *Idoneidad interaccional*, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos²⁰ potenciales

¹⁸ La noción de idoneidad busca valorar las diferentes trayectorias en procesos de estudio efectivos por contraste con procesos de estudio potenciales. En este sentido, supone una reformulación en términos ontosemióticos de los instrumentos de contraste del análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* propuestos en la metodología de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989).

¹⁹ Consideramos como « análisis didáctico » el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular – o de aspectos parciales del mismo – con unas herramientas teóricas y metodológicas específicas. Gallardo y González (2006) describen dicho análisis como una metodología de investigación educativa (búsqueda de fuentes y tipos de información de las distintas áreas de conocimiento implicadas, meta-análisis de las investigaciones previas, delimitación de cuestiones abiertas y formulación de conjeturas). Por su parte, Gómez (2002) llama “análisis didáctico” a una metodología de diseño, implementación y evaluación de programaciones curriculares de aula en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

²⁰ Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el

(que se puedan detectar *a priori*), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

4. *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
5. *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
6. *Idoneidad ecológica*, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro²¹, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

En la figura 1 sintetizamos los componentes de la noción *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático. La idoneidad didáctica supone la articulación coherente y armónica de las siguientes idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. Representamos mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

Situamos en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos. En el EOS, cuando se habla de conocimiento se incluye *comprensión y competencia*. La dimensión epistémica se refiere a los conocimientos institucionales (o sea, compartidos en el seno de instituciones o comunidades de prácticas) mientras que la dimensión cognitiva se refiere a los conocimientos personales (o del sujeto individual). El aprendizaje tiene lugar mediante la *participación* del sujeto en las comunidades de prácticas, el *acoplamiento* progresivo de los significados personales a los institucionales y la apropiación de los significados institucionales por los estudiantes.

significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

²¹ Parece deseable suponer que el « proyecto educativo » asume unos principios educativos en concordancia, por ejemplo, con los descritos por el NCTM (2000) (equidad, uso de tecnología, etc.), pero la noción de idoneidad es independiente de los fines y principios asumidos.

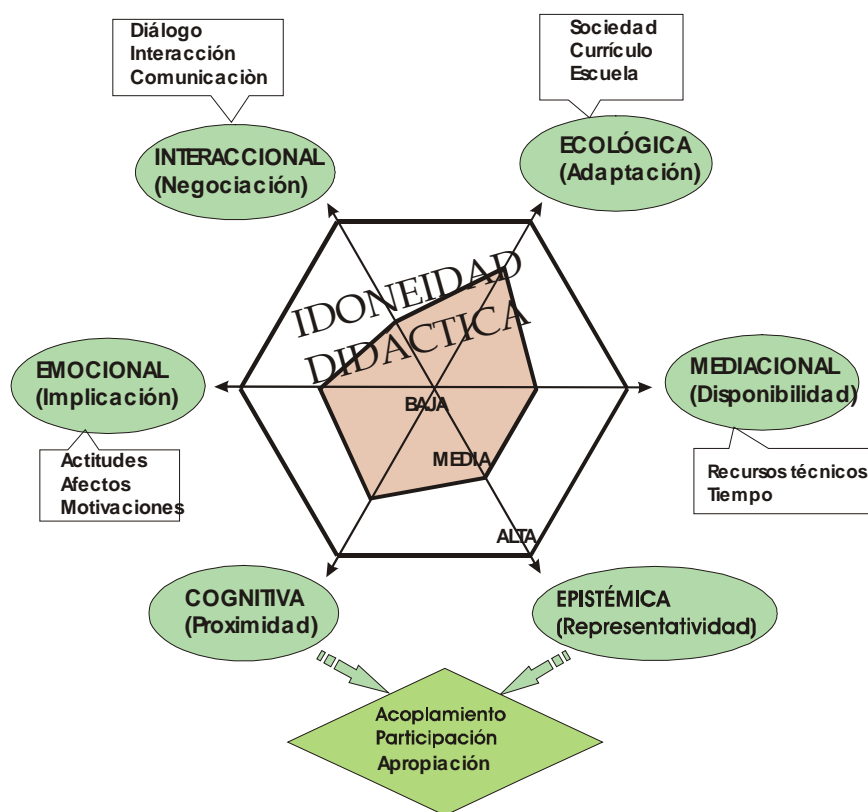


Figura 1: Componentes de la idoneidad didáctica

Tal y como hemos definido con anterioridad, tanto la *idoneidad epistémica* (representatividad de los significados implementados y pretendidos) como la *idoneidad cognitiva* (adaptación de los significados implementados/ pretendidos con respecto a los significados personales iniciales y finales de los estudiantes) están definidas sobre la noción de significado. En el EOS, el significado se concibe en términos de “sistemas de prácticas operativas y discursivas (institucionales y personales)”. Tales sistemas de prácticas se hacen operativos mediante las correspondientes configuraciones (epistémicas o cognitivas).

Todas estas nociones se han revelado útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza (Contreras et al., 2005; Godino et al., 2005; Godino et al., 2006). Los distintos elementos pueden interactuar entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo, la epistémica, puede requerir unas capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

“El aprendizaje individual es una criatura compleja con muchas necesidades las cuales tienen que satisfacerse para que el aprendizaje tenga éxito. El principio de una “dieta equilibrada” es por tanto aplicable tanto para nuestras mentes como para nuestros cuerpos” (Sfard, 2002, p. 30).

Las herramientas descritas se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad

didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También pueden ser útiles para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales.

3. DESCRIPCIÓN DE UN PROCESO DE ESTUDIO OBSERVADO

En esta sección describimos una experiencia de enseñanza de la noción de función con estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería, que utilizaremos para ejemplificar algunos aspectos de la noción de idoneidad didáctica y sus componentes. Somos conscientes del reto metodológico que plantea la evaluación de las distintas dimensiones del constructo teórico “idoneidad didáctica”, de la cantidad y tipo de datos que se han de recoger y de la complejidad del análisis de los datos. Ahora bien, puesto que en el ejemplo que vamos a utilizar como contexto de reflexión sólo disponemos de información de las actividades realizadas y de las interacciones profesor – estudiantes observadas mediante grabaciones audio-visuales, ejemplificaremos con más detalle sólo algunas de las idoneidades.

3.1. Descripción del proceso de estudio observado

El objetivo de la enseñanza observada consiste en que los estudiantes recuerden, interpreten, consoliden y formalicen las definiciones de correspondencia, función, rango, dominio y tipos de funciones, aplicándolas en una situación que pone en juego conocimientos de física: el lanzamiento vertical hacia arriba de una pelota con una velocidad inicial. Los alumnos han estudiado previamente las definiciones de dichas nociones y el profesor propone una tarea matemática que es un “problema contextualizado evocado de aplicación” (Ramos y Font, en prensa). El profesor presupone que los estudiantes son capaces de aplicar estas definiciones junto a otros conocimientos previos necesarios (graficación de la parábola, velocidad, etc.). Las consignas dadas a los alumnos se incluyen en la tabla 1.

Tabla 1: Cuestiones propuestas a los estudiantes

<p>Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad V_0 por lo que su altura t segundos después, es $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ metros, donde g es la aceleración de la gravedad. Si se lanza la pelota con una velocidad de 32 m/s y $g = 10 \text{ m/s}^2$ (aprox.):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Determinen la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de $y(t)$. 2. ¿Es $y(t)$ una relación o una función? Si es una función, ¿cuál es su dominio, codominio y rango? 3. ¿Es $y(t)$ una función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva? 4. Si $w(t) = 10 - 2t$ es la velocidad de desintegración de la pelota, ¿a qué altura llegará, ahora, al cabo de tres (3) segundos? Calcule la función compuesta $(y \circ w)(3)$. 5. Al cabo de cuanto tiempo regresará la pelota al lanzarla con una velocidad de 32 m/s? 6. ¿Qué velocidad hay que dar a la pelota para que alcance una altura máxima de 100 m. 7. ¿Qué altura alcanzará la pelota y qué velocidad hay que imprimirle para que regrese a los seis segundos?

El profesor organizó el proceso de estudio dividiendo la clase en equipos de cuatro alumnos, asignando a cada uno de ellos una parte de la tarea. Un alumno de cada grupo explicó al resto de la clase la solución encontrada en el seno del grupo. El profesor completaba o corregía la explicación del alumno. La *trayectoria didáctica implementada*, es decir, la secuencia de modos de gestión de los significados implementados a propósito de un objeto matemático específico, incluye, por tanto, configuraciones de tipo *cooperativo, dialógico y magistral* (Godino, Contreras y Font, 2006). Para trabajar las cuestiones propuestas se dedicaron cuatro clases de 45 minutos.

El análisis del proceso instruccional descrito es consustancial a la teoría didáctica, como en general lo es todo hecho o fenómeno didáctico. Los criterios de idoneidad se apoyan en la noción de significado y en los tipos de significado identificados (institucionales y personales).

Para poder valorar la idoneidad epistémica de un proceso de instrucción realmente implementado (*significado implementado*) o bien de un proceso de instrucción planificado en un libro de texto (*significado pretendido*) es necesario establecer primero el significado de referencia que sirva de comparación.

3.2. Significado de referencia del objeto función

El concepto de función es un buen ejemplo para mostrar la diversidad de sistemas de prácticas y contextos de uso, progresivamente más amplios, en los cuales podemos mostrar la pluralidad de significados parciales (Biehler, 2005) (entendidos en el EOS como subsistema de prácticas). La reconstrucción de los “significados de la función” es un primer paso necesario para poder comprender los procesos de enseñanza efectivamente implementados y elaborar criterios para su mejora. Diversos autores se han interesado por dicha reconstrucción desde un punto de vista histórico y epistemológico (Youschkevitch, 1976; Sierpinska, 1992). En concreto, Ruiz (1998) hace un estudio sistemático y caracteriza siete “concepciones epistemológicas” del objeto función, las cuales describe usando la tripleta conceptual de Vergnaud (1990) (situaciones, invariantes y representaciones). Nosotros preferimos interpretar tales “concepciones” en términos de subsistemas de prácticas institucionales ligadas a contextos de uso particulares, y de objetos emergentes (tipos de problemas, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos); cada una de estas *configuraciones epistémicas y sus prácticas asociadas* modeliza aspectos parciales del *holo-significado* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004) del objeto función, el cual desempeñará el papel de significado “global” del objeto función y que constituye el referente en una investigación específica.

En la figura 2 sintetizamos algunos elementos intervinientes en la configuración global²² de la noción de función que vamos a utilizar como significado institucional de referencia para analizar el proceso de estudio observado. En la práctica escolar actual (significados pretendidos e implementados) las configuraciones parciales que aquí llamamos tabular, gráfica y analítica suelen presentarse simultáneamente y centradas en su aplicación a la solución de problemas de modelización de problemas extramatemáticos. Se obtiene de este modo una configuración epistémica que podemos considerar como “informal/empírica” que contrasta con la configuración conjuntista, la

²² En una institución de enseñanza concreta el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

cual, dada su generalidad y carácter intramatemático podemos describir como “formal” (Ramos y Font, en prensa; Font y Godino, en prensa).

En la siguiente sección desarrollamos y ejemplificamos la noción de idoneidad didáctica aplicándola al proceso de estudio descrito. Las cuestiones que nos planteamos son:

- ¿En qué medida es idóneo el proceso de instrucción observado?
- ¿Qué cambios se podrían introducir en el proceso para incrementar la idoneidad?
- ¿Qué información es necesario recoger para poder evaluar los distintos aspectos de la idoneidad didáctica?

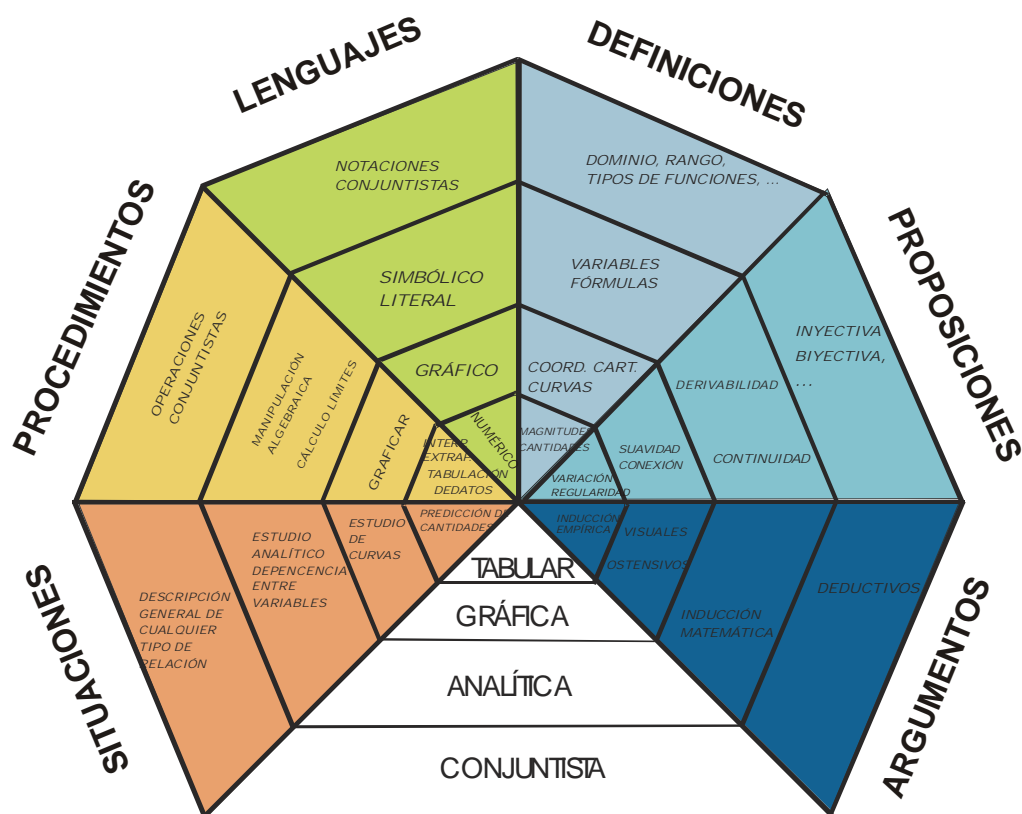


Figura 2: Configuraciones epistémicas asociadas al concepto de función.

4. PAUTA DE EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

En esta sección presentamos algunos criterios o indicadores de las distintas idoneidades parciales y los aplicamos al proceso de enseñanza descrito en la sección 3, centrándonos principalmente en las dimensiones epistémica, cognitiva e interaccional.

4.1. Idoneidad epistémica

El análisis de la idoneidad epistémica precisa de la definición previa de un significado de referencia para el proceso de estudio matemático (efectivo o potencial). que se desea analizar. De las categorías de objetos primarios introducidas en el EOS, fijaremos nuestra atención en las *situaciones-problemas*, las cuales deben, por un lado, ser representativas de las incluidas en el significado de referencia y, por otro lado, permitir contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones

relacionadas. Más aún, desde el punto de vista de los procesos, una idoneidad alta estará asociada a la presencia de momentos de “generación del problema” (problematización), de modo que los propios alumnos tengan ocasión de formular o reformular los problemas y plantear cuestiones relacionadas, en definitiva, de asumir los problemas como propios.

Los *lenguajes* utilizados deben ser una muestra representativa de los identificados en el significado de referencia; también se tienen en cuenta las transformaciones, traducciones y conversiones entre los mismos. Se descartan notaciones innecesarias o inconsistentes. Los estudiantes tienen ocasión de expresar y comunicar sus conjeturas, procedimientos operatorios, argumentaciones, en general, sus conocimientos.

Las definiciones, proposiciones y procedimientos son representativos de los identificados en el significado de referencia y adaptados al nivel, capacidades y recursos disponibles en el marco institucional correspondiente. El proceso incluye momentos en los que se generan y negocian las reglas mejor adaptadas a las circunstancias, existiendo momentos en que operan como herramientas implícitas. Tales reglas conceptuales, proposicionales y procedimentales son explicadas y justificadas mediante argumentos representativos y adaptados.

El juicio positivo sobre la idoneidad epistémica del proceso de estudio debe tener en cuenta las conexiones e interacciones entre los elementos mencionados²³. Los elementos conceptuales, proposicionales y procedimentales deben haber sido contextualizados mediante las situaciones, explicados y justificados con argumentos pertinentes y todos estos elementos soportados mediante recursos expresivos eficaces.

Idoneidad epistémica de la enseñanza observada

La observación del proceso de estudio descrito en la Sección 3.1 nos permite caracterizar el sistema de prácticas operativas y discursivas efectivamente implementadas, relativas al objeto matemático “función”. La comparación de estas prácticas con el significado de referencia de dicho objeto nos permite identificar diversos desajustes y formular hipótesis sobre la idoneidad del proceso de estudio, en cuanto a su faceta epistémica.

El primer aspecto que hay que destacar es el que el profesor presenta una situación problema que pretende ser representativa de las dos configuraciones epistémicas en las que se puede subdividir el significado de referencia (la empírica y la formal o conjuntista). De hecho, se puede considerar que la tarea es una mezcla de dos problemas diferentes (las cuestiones 1,5, 6 y 7 por una parte y las cuestiones 2, 3 y 4 por otra).

En el EOS (Ramos y Font, en prensa) se consideran dos usos del término contexto. Uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro consiste en considerar el entorno. En el primer caso se trata de ver que la situación problema cae dentro del campo de aplicación de un objeto matemático. En el segundo caso, se trata de un “uso” que vamos a llamar, metafóricamente, “ecológico” (se trataría de responder a preguntas del tipo: ¿En qué “lugar” se halla? ¿Qué tiene a su alrededor? ¿Dónde “vive”? ¿Con qué otros objetos matemáticos se relaciona?, ¿En qué institución se utiliza?, etc. Si consideramos el primer uso vemos que el problema que nos ocupa pretende ser una caso particular del objeto función. El contexto (entendido en términos ecológicos) de las cuestiones 2, 3 y 4 es una

²³ La necesidad de *estructura* que plantea Sfard (2002) para los conocimientos matemáticos : « While seeing structure is helpful in any domain of knowledge, in mathematics it may be the very essence of learning » (p. 8)

configuración epistémica de tipo formalista mientras que las cuestiones 1, 5, 6 y 7 tendrían por contexto una configuración empirista.

Lo que en principio podría ser positivo: “la mayor representatividad posible del significado implementado” puede resultar contraproducente si no se consigue armonizar, de manera coherente, las dos configuraciones epistémicas (la empírica y la formal). Esta falta de armonización puede ser la causa de conflictos semióticos (de tipo epistémico). A continuación comentamos dos de dichos conflictos.

Conflicto 1

El primer conflicto semiótico de tipo epistémico que encontramos es la ruptura brusca entre la primera cuestión propuesta en la tarea y las dos que le siguen. La cuestión 1 plantea un problema de modelización de un problema físico (previsión del espacio conocido el tiempo) mediante una función dada mediante una fórmula algebraica. Las cuestiones que siguen piden determinar si la correspondencia definida por la fórmula es o no una función, su dominio, codominio, rango y tipo de función (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva).

Estas cuestiones se refieren a una problemática de naturaleza formal que es ajena al problema de modelización. La “razón de ser” del sistema de objetos puestos en juego por el modelo “conjuntista” es la descripción, generalización y estructuración de conocimientos matemáticos, ajenos a la práctica de modelización funcional.

Conflicto 2

El segundo conflicto lo podemos observar en la siguiente explicación del profesor:

P: Entonces, fíjense esta función d , me relaciona un conjunto de números reales positivos; se tiene que usar incluyendo el cero, y dónde va a parar ese conjunto; ¿en qué conjunto numérico va a parar? Enteros otra vez, los enteros y el veintisiete y medio ¿positivos o negativos? ¿Y el cero, lo van a dejar afuera? Ahí tienen entonces esta función, la función altura relaciona al conjunto de los números reales más el cero con el conjunto de los números reales con el cero.

El problema físico que se modeliza con la fórmula algebraica pone en juego dos intervalos de números reales que pueden tomarse como “conjuntos iniciales, o dominios de definición de la función”, $[0; 3,2]$ (tiempo hasta que la pelota alcanza la altura máxima), o $[0; 6,4]$ (tiempo hasta que vuelve al suelo); el conjunto imagen es el intervalo $[0; 51,2]$ en ambos casos. La naturaleza de la variable independiente, tiempo, hace que los valores que puede tomar sean números reales positivos, pero la fórmula algebraica que establece el criterio de correspondencia es válida para todo número real. El conjunto final (codominio) de la función $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ queda completamente indefinido, y por tanto, carece de sentido preguntar si “la” función (¿cuál?) es o no sobreyectiva.

4.2. Idoneidad cognitiva

El juicio positivo sobre la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio se basará en: a) la existencia de una evaluación inicial de los significados personales de los estudiantes, a fin de comprobar que los significados pretendidos suponen un reto manejable; b) la existencia de adaptaciones curriculares que tengan en cuenta las diferencias individuales; y, finalmente, c) que los aprendizajes logrados estén lo más próximos posible a los significados institucionales pretendidos/ implementados.

Idoneidad cognitiva de la enseñanza observada

Para evaluar la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción en términos de proximidad de la zona de desarrollo potencial del alumno es necesario hacer un seguimiento detallado de los alumnos (test, entrevistas, evaluaciones orales y escritas, etc.) para conocer sus significados previos y determinar si las explicaciones dadas por el profesor fueron efectivas.

Con relación a los significados personales previos de los alumnos (representación gráfica de la parábola, velocidad, etc.), necesarios para resolver la tarea propuesta, sólo sabemos que el profesor los considera de manera implícita como “logrados”.

Para determinar si las explicaciones dadas por el profesor fueron efectivas disponemos únicamente de las grabaciones de las sesiones. De esta forma, únicamente es posible obtener algunos indicadores para valorar la idoneidad cognitiva del proceso basados en secuencias concretas.

A título de ejemplo, en el siguiente segmento instruccional se observa claramente que las explicaciones dadas por el profesor no fueron efectivas: el significado personal del objeto codominio del alumno A₂ se aleja del pretendido por el profesor.

P: .. ¿Cuál es el codominio?

[A₂ señaló el eje equis de la gráfica]

P: ¡Co-co-codominio!

A₂: Si el rango vendría siendo el conjunto “y”, de llegada, el co-dominio tendría que ser el reflejo de ambos conjuntos, o sea, ...

P: ¿Qué, el codominio y rango son los mismos?

A₂: No, no, tendría que ser el recorrido que hace la pelota, desde que parte hasta que llega.

4.3. Idoneidad interaccional

Diremos que un proceso de estudio tiene una idoneidad interaccional²⁴ alta en la medida en que las configuraciones didácticas posibilitan que el profesor y los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales (a priori)*, *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales (a posteriori)* y resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados*.

Los formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes muestran su relación con los objetos matemáticos y, por lo tanto, el profesor tiene indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada (según las restricciones matemático-didácticas asociadas a la situación).

²⁴ En Godino, Contreras y Font (en prensa) designamos esta dimensión como « idoneidad semiótica ». Preferimos ahora designarla como mediacional ya que el componente semiótico está presente también en la definición de las idoneidades epistémica y cognitiva. En Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) se agrupa esta dimensión con la mediacional y se designan conjuntamente como « idoneidad instruccional ».

Idoneidad interaccional de la enseñanza observada

Si nos fijamos en el modo de interacción entre el profesor y los estudiantes observamos algunos hechos importantes relacionados con la idoneidad interaccional.

Un problema pedagógico general

El profesor asigna cada uno de los siete apartados de la tarea a un grupo de alumnos diferente, de modo que cada grupo, formado por 5 estudiantes, se responsabiliza de resolver una de tales cuestiones y de presentarla al resto de la clase. Esta manera de organizar el trabajo en el aula implica que los estudiantes que no han trabajado alguna de las cuestiones tendrán dificultades para seguir las explicaciones del resto de los compañeros. El resultado es que las presentaciones de los estudiantes se convierten en explicaciones magistrales para la mayor parte de los estudiantes. Una trayectoria didáctica pretendida inicialmente por el profesor con un cierto grado dialógico y adidáctico resulta finalmente en varias configuraciones magistrales, pero en este caso, conducidas por “profesores inexpertos” (los representantes de los distintos equipos).

Configuración didáctica pretendida e implementada

A partir de un *estudio personal* previo el profesor plantea un diálogo contextualizado cuyo fin es el desarrollo de la noción de función (*configuración didáctica dialógica*). El papel que el profesor atribuye a los alumnos en la construcción y comunicación del conocimiento es central: supone que los estudiantes serán capaces de identificar los objetos pretendidos en la situación modelizada y descontextualizarlos para la construcción del significado de función pretendido. Con otras palabras, el profesor intenta gestionar un aprendizaje de tipo constructivista: los estudiantes, por intermedio de la situación y en interacción con el profesor, deberán ser capaces de hacer evolucionar el significado personal atribuido a la noción de función (producto del proceso de estudio personal) y obtener una adaptación fiel al significado institucional pretendido.

Sin embargo, la *configuración didáctica efectiva* no puede considerarse como dialógica. La mayor parte de los estudiantes no ha realizado el estudio personal anterior a la sesión de aprendizaje. El profesor es consciente de ello, empero no modifica el diseño del proceso instruccional pretendido. Poco a poco, el carácter dialógico de la configuración didáctica implementada se diluye en una “mayéutica ficticia” en la que el profesor toma a su cargo la formulación y la validación. De esta forma, detrás del diálogo efectivo, la sesión de aprendizaje esconde una configuración didáctica magistral, irreflexivamente asumida por el profesor.

Evidentemente, esta distorsión entre las configuraciones didácticas pretendida y efectiva es origen de conflictos. En concreto, un problema didáctico prototípico se da cuando el profesor no es consciente, en el curso del proceso efectivo de enseñanza, de dichas discrepancias y tiene la ilusión de que el proceso se desarrolla en los términos que él había establecido *a priori*.

4.4. Idoneidad mediacional

En Godino, Contreras y Font (2006) se define la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Si el profesor y los alumnos

tuvieran a su disposición medios informáticos pertinentes al estudio del tema en cuestión (Cabri, p.e., para la geometría plana), el proceso de estudio que se apoye en estos recursos tendría mayor idoneidad mediacional que otro tradicional basado exclusivamente en la pizarra, lápiz y papel. Asimismo, un ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje con un alto grado de idoneidad mediacional con relación a los medios temporales sería una clase magistral, donde el profesor reproduce de manera íntegra y sin interacción con los estudiantes el significado pretendido.

Los recursos materiales pueden ser manipulativos, utilidades informáticas de graficación y cálculo, libros de texto, ... Estos medios interaccionan con los distintos elementos de las configuraciones epistémicas y cognitivas (tipos de problemas abordables, representaciones, definiciones, proposiciones y argumentaciones). La idoneidad del proceso de estudio se verá afectada positivamente si el profesor y los estudiantes tienen a su alcance los medios materiales mejor adaptados a los significados pretendidos.

En cuanto al tiempo didáctico interesa tener en cuenta no sólo el tiempo presencial colectivo (donde básicamente tiene lugar la enseñanza), sino también el tiempo no presencial, de trabajo individual. La planificación y el desarrollo del proceso de estudio se valorará positivamente si la cantidad y gestión del tiempo dedicado al estudio es adecuado a los objetivos de aprendizaje.

En la enseñanza observada, el profesor podría haber utilizado diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio: por ejemplo, medios de presentación de la información (retroproyector, etc.) o dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadores). Este hecho, junto a la gran cantidad de tiempo invertido en esta actividad (4 sesiones de 45 minutos), es un indicador de una baja idoneidad mediacional. Una mejor planificación y diseño de la actividad habría economizado el tiempo invertido.

4.5. Idoneidad emocional

Diremos que un proceso de estudio tiene idoneidad emocional alta en la medida en que las configuraciones didácticas motiven a la acción y participación a los alumnos; esto supone la creación de un ambiente de trabajo que tiene en cuenta los intereses, afectos y emociones de los alumnos hacia las matemáticas.

La selección de las situaciones – problemas de iniciación o contextualización que pertenezcan al campo de intereses de los alumnos será un factor a tener en cuenta en esta dimensión. La creación de un “clima” de respeto mutuo y de trabajo cooperativo será un factor positivo para el aprendizaje.

En el ejemplo de enseñanza observada, sin duda la elección de la situación de modelización de espacio recorrido por la pelota lanzada verticalmente hacia arriba aporta significación y relevancia al estudio del tema de las funciones, de donde podemos inferir que los estudiantes podrían adoptar una actitud positiva hacia la tarea y el estudio. Sin embargo, la interferencia de la configuración conjuntista con la empirista introduce una problemática esencialmente dispar respecto del uso genuino de la función como herramienta de previsión. Los estudiantes pueden preguntarse legítimamente, ¿esto para qué sirve?; y ante la ausencia de una respuesta convincente se pueden sentir desmotivados. Por otra parte, se debe valorar positivamente en esta

dimensión la fase de trabajo en equipo y la presentación de las soluciones por los propios estudiantes.

4.6. Idoneidad ecológica

En la sección 2 hemos definido la idoneidad ecológica como el grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social-profesional, etc., en que se implementa. También se tendrán en cuenta las conexiones que se establezcan con otros contenidos (significados) intradisciplinarios (otros temas de matemáticas) e interdisciplinarios (otras materias del programa de estudios).

Puesto que la institución investigada tiene por objetivo la formación inicial de ingenieros, debe asegurar su competencia para su futuro ejercicio profesional. Por este motivo, se considera que un primer criterio (de tipo ecológico) útil para la selección de objetivos y contenidos, que tiene en cuenta tanto los intereses de estudiantes como de la sociedad en su conjunto, es la contextualización sociocultural de la práctica profesional. Un segundo criterio es que los objetos matemáticos estudiados por estos profesionales sean, a ser posible, los nucleares en la disciplina.

En el ejemplo considerado (la enseñanza de las funciones) se cumplen estos dos criterios. La noción de función desempeña un papel esencial dentro de la matemática y en sus aplicaciones prácticas, por ser una herramienta de previsión de los valores de una variable conocidos los valores de otra, u otras variables. Queda, por tanto, plenamente justificada su inclusión en los programas de formación de ingenieros. Sin embargo, una visión más profunda del objeto función revela diversos tipos de prácticas discursivas y operativas, algunas de las cuales, como es el caso de la configuración que hemos descrito como conjuntista, podría no ser imprescindible, dada su generalidad y formalidad. El tiempo requerido para el aprendizaje de las sutilezas que distinguen las correspondencias de las aplicaciones, las definiciones de dominio, rango, codominio, tipos de funciones, etc, no debería ocultar la verdadera utilidad de las funciones como herramientas de modelización y previsión en situaciones tanto externas como internas a las matemáticas.

5. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos descrito la noción de *idoneidad didáctica*, aplicable a las configuraciones y trayectorias de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Se trata de un constructo multidimensional, compuesto de seis facetas o dimensiones (epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica) mediante las cuales se pretende abordar de manera integral la complejidad de factores que intervienen en el diseño, desarrollo y evaluación de cualquier proceso de estudio matemático. El Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) proporciona un sistema de supuestos y categorías para hacer operativas las diversas idoneidades parciales, particularmente las correspondientes a las dimensiones epistémica y cognitiva.

La idoneidad didáctica es una herramienta para el *análisis* y la *síntesis* didáctica que puede ser útil para la formación de profesores. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha

práctica se puede explicar, en parte, por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores.

“La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva” (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202).

Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente, las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas, o experiencias de enseñanza observadas. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

El análisis epistemológico de los objetos matemáticos, realizado con un enfoque y herramientas conceptuales apropiadas, debe ser un objetivo esencial en la formación del profesor de matemáticas. Hemos visto cómo un objeto matemático tan elemental y “aparentemente conocido”, como la función, ha planteado grandes complicaciones tanto al profesor como a los estudiantes. Algunas de las complicaciones observadas se derivan, probablemente, de una falta de reflexión del profesor sobre la ruptura brusca que se produce entre las configuraciones informal/ empírica y conjuntistas de las funciones.

Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión amplia, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica). Asimismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes (idoneidad cognitiva), identificar y resolver los conflictos semióticos que aparecen en todo proceso de estudio, empleando los recursos materiales y temporales necesarios (idoneidad interaccional y mediacional). Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, uno de cuyos indicadores empíricos puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/ implementados (idoneidad cognitiva).

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto MCYT – FEDER: SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

REFERENCIAS

- Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3): 281–308.
- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task –the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles and O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education*. Springer.
- Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2): 151-186.
- Font, V. y Godino, J. D. (en prensa). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: Su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa* (aceptado)
- Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, 338: 309-346.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. *Ponencia invitada. X Simposio de la SEIEM*, Huesca.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325–355.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237–284.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico para la Didáctica de las Matemáticas. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60: 3-36.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en prensa).
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Relime* (aceptado).
- Godino, J. D., Wilhelmi M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4.2: 1–26.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7 (3): 252-292.
- Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 66: 201-222.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston. VA: NCTM.

- Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica* (en prensa)
- Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Sfard, A. (2002). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics. En J. Kilpatrick, Martin, G., & Schifter, D. (Eds.), *A Research Companion for NCTM Standards*. Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes # 25 (pp. 3–58). Washington, DC: Mathematical Association of America
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (2/3): 133-170.
- Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, 2ª edición. Barcelona, ESP: Crítica-Grijalbo, 1989.
- Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16: 39–85.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (en prensa). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado) (Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino>).
- Wilhelmi M. R., Godino J. D., Font V. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. *Colloque International «Didactiques: quelles références épistémologiques?»*. Bordeaux, France: AFIRSE et IUFM d'Aquitaine.

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Gallardo Romero, José Luis González Marí, Universidad de Málaga

Resumen

En este trabajo se expone una visión actualizada del Análisis Didáctico como instrumento metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. La potencialidad práctica del método se ilustra con la descripción de su aplicación en un estudio desarrollado recientemente sobre la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004). En base a esta experiencia se destacan además las principales limitaciones e interrogantes metodológicos generados por el Análisis Didáctico junto con algunas posibilidades de mejora futura.

Abstract

In this work a vision of Didactical Analysis is exposed as specific methodological instrument for research in Mathematics Education. The practical potentiality of the method is illustrated with the description of its application in a study developed recently on the understanding in mathematics (Gallardo, 2004). With this reference the main methodological limitations and questions generated by the Didactical Analysis are emphasized as well as some possibilities of future improvement.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática suele contemplarse como un proceso complejo que transcurre por diversas fases específicas en las que se realizan prácticas de distinta naturaleza y se emplean instrumentos metodológicos con propósitos diferentes. En lo que respecta a sus inicios, la investigación exige por lo general el desarrollo de un estudio de carácter teórico para la determinación del problema a investigar, lo que supone realizar, entre otras tareas, un trabajo previo de revisión de antecedentes y de exploración del estado actual de la cuestión. Pero dicho trabajo previo va más allá, como veremos, de la mera revisión y análisis usual de antecedentes, práctica común a cualquier investigación científica. Su necesidad no sólo está justificada por tratarse de una de las prácticas centrales en las que resulta preciso la planificación detallada y la aplicación minuciosa de procedimientos eficaces de recopilación de información así como de una labor de revisión y análisis de esa información igualmente explícita y metódica, sino que se dan aquí circunstancias específicas del área que aconsejan una atención especial. Nos referimos, por un lado, a la naturaleza compleja de los fenómenos, incluidas la multi-/inter-disciplinariedad del campo y la situación incipiente de numerosos conocimientos, y, por otro, a las características de la información y las fuentes disponibles, cuya dispersión y amplitud son notables y aconsejan un tratamiento meta-analítico que no se puede limitar a la mera revisión tradicional (González, 1998a). Es evidente que los requerimientos característicos del trabajo científico disciplinado no siempre llegan a manifestarse con la suficiente evidencia en las investigaciones en Educación Matemática, lo que supone una limitación metodológica cada vez más reconocida en el área (Boaler, Ball y Even, 2003). En nuestra opinión, este hecho justifica la conveniencia de incrementar los esfuerzos destinados a especificar y evidenciar aún más el método implícito en los instrumentos actuales empleados para el tratamiento de la información, con objeto de lograr un mayor alcance y profundidad en

los análisis y garantizar un nivel más elevado de sistematización y concreción en los procedimientos.

Como contribución en este sentido, se presenta en este trabajo un método específico, al que denominamos *Análisis Didáctico*, que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección y tratamiento de los antecedentes en la investigación en Educación Matemática. Se trata de un procedimiento metodológico consolidado cuyas bases fundamentales fueron definidas en la tesis doctoral de González (1995) y que viene empleándose desde entonces con regularidad en las investigaciones desarrolladas en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga.

La exposición se inicia con una síntesis actualizada de las componentes y aspectos fundamentales caracterizadores del Análisis Didáctico como metodología de investigación específica en Educación Matemática. A continuación, se pone de manifiesto su carácter operativo y potencialidad práctica a través de la descripción genérica de su empleo en una investigación específica en torno a la comprensión del conocimiento matemático en la que se incluye algunos resultados concretos obtenidos en la fase de revisión de antecedentes. La exposición concluye con la enumeración de algunas de las cuestiones abiertas y propuestas de mejora asociadas que delimitan en la actualidad las fronteras de la aplicación del Análisis Didáctico en el contexto que aquí se presenta.

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este apartado se describe de forma resumida la configuración que el Análisis Didáctico presenta en la actualidad. El contenido expuesto sirve de actualización de la explicación del método desarrollada por González (1998b) en el Primer Simposio de la SEIEM con motivo del seminario dedicado a la estructuración de las tareas presentes en un campo conceptual, permitiéndonos de este modo contrastar su evolución durante la última década.

Referentes teóricos

En el contexto de la investigación en Educación Matemática identificamos el Análisis Didáctico con el procedimiento metodológico no-empírico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio (González, 1998a, 1998c). El Análisis Didáctico es aplicable tanto a campos conceptuales y conocimientos matemáticos concretos, como los números naturales relativos (González, 1998c), la secuencia numérica (Fernández, 2001) o la integral de línea (Padilla, 2003), como a aquellos otros fenómenos y nociones de naturaleza compleja cuyo estudio resulta de interés para el campo de la Educación Matemática, como es el caso de la inducción matemática (Ortiz, 1997), la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004) o la atención a la diversidad sordo oyente (Larrubia, 2006). Cuando se emplea con un conocimiento matemático, son cuatro las áreas básicas referenciales a considerar como fuentes de información científica: Historia y Epistemología de la Matemática, Aprendizaje y Cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares en relación con el conocimiento matemático en estudio. En caso de realizarse sobre un fenómeno o noción compleja, se identifican dos bloques básicos de información: la proporcionada por los antecedentes relacionados, procedentes de áreas de conocimiento afines a la Educación Matemática que comparten o tienen una incidencia especial sobre el objeto de estudio; y

la información propia del área configurada por los antecedentes específicos. En ambos casos, la aplicación del Análisis Didáctico proporciona una síntesis estructurada que permite detectar dificultades, potencialidades y relaciones en trabajos previos así como organizar y delimitar con precisión el desarrollo posterior de la investigación propia (González, 1999).

El proceso consta de dos fases fundamentales:

- una *revisión primaria* de la información en cada una de las áreas de investigación consideradas, que incluye la obtención de datos, resultados y conclusiones relevantes organizados por cuestiones y contenidos relacionados con el área problemática y tratados de forma neutra. El dominio de las fuentes de información más relevantes es contemplado en esta fase como un requisito inicial del método.

- un *análisis de las relaciones* existentes en la información ya recopilada. En esta fase de revisión secundaria se extraen nuevos resultados y conclusiones generales y se identifican cuestiones, conjeturas y prioridades para la investigación, conformando de este modo la información elaborada característica del Análisis Didáctico.

El procedimiento proporciona tres tipos de resultados genéricos:

- (a) *Resultados Primarios* (RP) o conclusiones del análisis primario en términos de proposiciones contrastadas o asumidas por grupos de autores relevantes. Estos datos pueden ser comunes a una serie de autores o líneas de estudio y también singulares, en la medida en que sean importantes y merezca la pena destacarlos. Se incluyen además las informaciones que sintetizan los resultados de una serie de trabajos o posiciones y las lagunas o carencias detectadas, consideradas como información explícita por defecto.

- (b) *Resultados Secundarios* (RS). Son conclusiones obtenidas de la reflexión realizada sobre los resultados primarios. No se trata de información directa presente en los trabajos revisados sino que se hace explícita a través de los análisis de las relaciones entre los resultados puntuales y primarios. Los resultados secundarios pueden ser, entre otros: opiniones, valoraciones y posiciones personales fundadas en datos objetivos (puntuales o primarios); conjeturas plausibles en virtud de la información que las sustenta; interpretaciones avaladas y/o sólidas en base a argumentaciones coherentes y fundadas; lagunas o carencias implícitamente detectadas o requisitos y necesidades obligadas por las situaciones, contextos o la mera realidad, a tenor de las circunstancias que rodeen los estudios revisados.

- (c) *Consecuencias* para la investigación (C). De los propios resultados secundarios se pueden elaborar conclusiones que no estén exactamente entre ellos, sino que procedan del análisis de los mismos. Estas consecuencias pueden ser, entre otras: conjeturas para la investigación; recomendaciones para la realización de estudios teóricos o empíricos previos; componentes de modelos teóricos a utilizar y contrastar en el estudio u orientaciones generales. Este tipo de conclusiones habrá que entenderlas, en general, como supuestos iniciales e ideas emergentes, reconocidos pero también necesitados de un mayor desarrollo y vertebración posterior para la consolidación de posibles propuestas teóricas más consistentes.

La naturaleza matemática del objeto considerado, las particularidades de las fuentes de información contempladas o los rasgos distintivos de los resultados obtenidos en la aplicación del Análisis Didáctico son algunos de los aspectos que justifican su especificidad como método para la revisión de antecedentes en el campo de la Educación Matemática. De hecho, tal especificidad justifica la posibilidad de

reconsiderar el término para hablar en realidad de un *Análisis Didáctico-Matemático* para el tratamiento de la información en la investigación en Educación Matemática.

Concreciones metodológicas

Para la aplicación efectiva del Análisis Didáctico conviene tener presente, además de los criterios que configuran el meta-análisis cualitativo, ciertas especificaciones respecto al método así como determinadas pautas metodológicas operativas en cada una de las fases del proceso. A continuación, subrayamos como referencia algunas de las puntualizaciones significativas que concretan el procedimiento cuyas principales componentes aparecen relacionadas en el esquema de la figura 1:

- El dominio de las fuentes y tipos de información más relevantes demanda una actualización permanente, no exenta de problemas, en lo referente a las vías de acceso y al formato de difusión del conocimiento actual. Los trabajos que vienen realizándose con regularidad en Educación Matemática con el propósito general de describir y caracterizar los principales recursos bibliográficos existentes así como sus modos de acceso (Gutiérrez y Maz, 2001; Ruiz, Castro y Godino, 2001; Gallardo, 2006) constituyen para el Análisis Didáctico un referente concreto de utilidad para garantizar, entre otros aspectos, el control sobre las principales fuentes documentales, la sistematización del proceso de búsqueda de información y la validez externa de los resultados obtenidos.
- La consideración de información no específica proveniente de otras áreas de conocimiento consolidadas y de mayor tradición está justificada en el Análisis Didáctico, en parte, por la necesidad de controlar la complejidad asociada al fenómeno estudiado y de eliminar posibles inconsistencias derivadas de una falta de precisión en la terminología empleada, siendo éste un propósito compartido con otros métodos como el Análisis Conceptual (Rico, 2001). Pero además de ello, esta información resulta útil para situar y relacionar entre sí los antecedentes específicos, que se suelen apoyar, a veces de forma implícita, en ideas y supuestos genéricos procedentes de dichos campos. Asimismo, se trata de antecedentes que proporcionan solidez y coherencia a la revisión global y favorecen el carácter integrador pretendido por el Análisis Didáctico¹.
- La primera fase del Análisis Didáctico exige la configuración y el empleo de procedimientos sistemáticos de revisión de la información recopilada previamente, no sólo para aportar consistencia a la estructura resultante de conocimientos primarios sino también para posibilitar un desarrollo productivo en la segunda fase de análisis de relaciones. Uno de los esquemas básicos de revisión de documentos admitidos por el Análisis Didáctico, que tiene en cuenta recomendaciones como la sugerida por Hitt (1999) en relación con los tipos de documentación existente y las posibles formas de analizar la información que contienen y que ha dado muestras de ser efectivo, es el constituido por las dos partes diferenciadas siguientes:
 - *Resumen neutro del contenido* del documento. En él se destacan, entre otros aspectos y según sea el caso, las principales ideas relativas a los supuestos teóricos adoptados, la metodología de investigación empleada, los resultados y conclusiones obtenidos o las propuestas didácticas y recomendaciones curriculares sugeridas. Es decir, se destaca lo más relevante de cada tipo de documento según su contenido.
 - *Análisis crítico de la información revisada* en cada referencia, centrado principalmente en las características de los resultados obtenidos, en las potencialidades y limitaciones manifestadas, en las analogías y divergencias surgidas con los planteamientos particulares del estudio y en las cuestiones relevantes para los propósitos de la investigación.

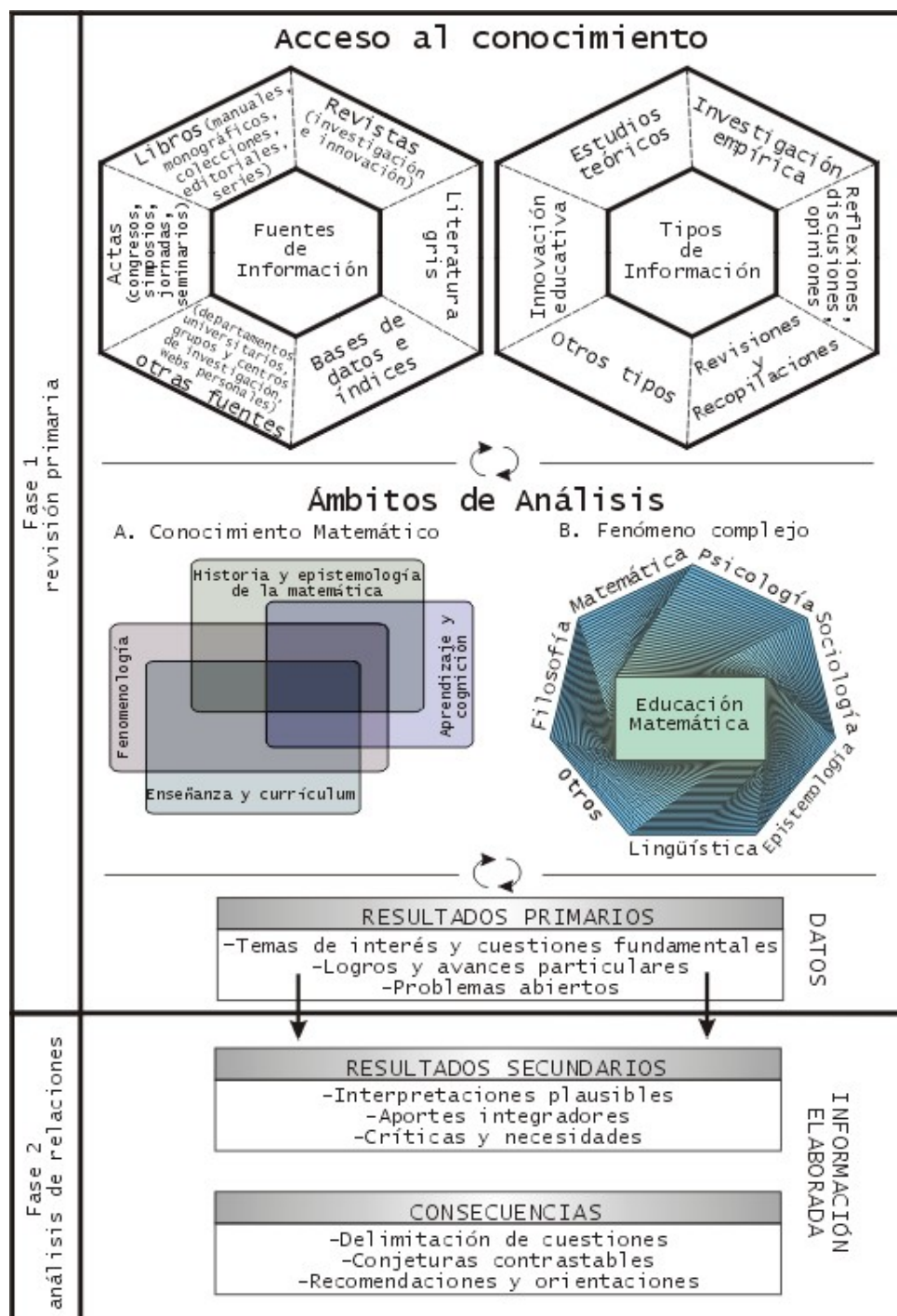


Figura 1. Componentes fundamentales del Análisis Didáctico

- Algunos de los resultados obtenidos tras la revisión suelen venir enunciados en forma de proposiciones complejas o combinadas que son de difícil categorización cuando se adoptan los tipos proporcionados por el Análisis Didáctico. Esta dificultad, no obstante, puede salvarse en parte optando por situar cada uno de dichos resultados en la categoría a la que corresponde la proposición que creemos de mayor peso dentro del enunciado o, en su defecto, a la que corresponden la mayoría de las proposiciones que contiene.
- La estructura organizativa de la información obtenida en cada una de las fases influye notablemente en la integración del conocimiento revisado y en la coherencia final del estudio de antecedentes. En este sentido, el Análisis Didáctico contempla para su primera fase la organización de los resultados primarios por los temas tratados y en función de su especificidad, fecha de publicación o repercusión sobre el problema de investigación, entre otros aspectos. Asimismo, la estructura correspondiente a la segunda fase refleja la conexión entre resultados primarios, secundarios y consecuencias así como la concreción hacia el problema de investigación del análisis desarrollado. Todo ello hace que tales estructuras puedan considerarse en sí mismas como resultados secundarios del Análisis Didáctico.
- El Análisis Didáctico manifiesta un carácter doblemente cíclico producto de su naturaleza dialéctica. De una parte, su aplicación incluye una fase inicial, caracterizada por su extensión y profundidad, en la que se obtiene gran parte de la información empleada en la investigación. Esta base de referencias suele completarse posteriormente con sucesivas búsquedas puntuales llevadas a cabo con regularidad a lo largo de la investigación. De otra parte, el Análisis Didáctico contempla la posibilidad de que los resultados secundarios y consecuencias obtenidos de su aplicación en un estudio específico pasen a ser considerados resultados primarios en posteriores investigaciones relacionadas, reconociéndose también una relatividad en los resultados derivada de la aplicación recursiva del método.

APORTES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Una vez expuestos los referentes teóricos y metodológicos caracterizadores del Análisis Didáctico como instrumento para el tratamiento de la información, en el presente apartado se muestra su operatividad a través de la descripción de su empleo en una investigación reciente realizada en la Universidad de Málaga en torno a la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004). Con objeto de concretar en lo posible los pormenores de dicha aplicación presentamos inicialmente como referencia un resumen de este estudio.

La investigación

Se trata de un trabajo centrado en el estudio de la comprensión del conocimiento matemático a través de su diagnóstico y evaluación. Encuentra su justificación en las cuestiones abiertas generadas por la comprensión, como fenómeno cognitivo y como objeto de estudio y en los problemas didácticos y cognitivos existentes en el campo del Cálculo Aritmético Elemental. El marco general en el que se sitúa el problema de investigación se articula en torno al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático (González y Ortiz, 2000; González, 2001) y a las bases conceptuales adoptadas por el grupo de investigación *Pensamiento Numérico* (Castro, Rico y Romero, 1997). El propósito central del estudio consiste en *sentar las bases*

teóricas y metodológicas de una aproximación integradora y operativa al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático fundada en el diagnóstico y la evaluación de los comportamientos observables en los sujetos. La potencialidad práctica de dicha propuesta se pone de manifiesto con su aplicación al caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

En la primera parte de la investigación se extrae la base de resultados y consecuencias necesaria para justificar y sustentar la Aproximación pretendida, que puede entenderse como un estudio teórico fundamental en el que se configura un marco que permite organizar, integrar y ampliar con interpretaciones plausibles los modelos y planteamientos sobre comprensión identificados en Educación Matemática así como un procedimiento metodológico con el que afrontar el problema del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático desde lo observable. El método reconoce la especificidad del conocimiento matemático en estudio; exige la realización previa de un análisis fenómeno-epistemológico de este conocimiento, a fin de organizar el conjunto situacional que le da sentido; se realiza en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica resultantes de los análisis previos y requiere la identificación de aquellos elementos fenómeno-epistemológicos influyentes a nivel cognitivo, que son los responsables, entre otros aspectos, de la caracterización de los sujetos en términos de comprensión.

A partir de aquí, la investigación se dirige a la aplicación del marco metodológico establecido al caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. La primera etapa de aplicación consiste en el *estudio fenómeno-epistemológico* del algoritmo, de donde se constituyen las estructuras que permiten establecer una ordenación situacional teórica depurada con tres categorías epistemológicas (Técnica, Analítica y Formal) y dos fenomenológicas (situaciones Exclusivas y No-Exclusivas) y una batería inicial de posibles situaciones idóneas para ser empleadas en tareas de diagnóstico y evaluación de la comprensión.

Esta fase es completada con dos estudios empíricos exploratorios, uno cuantitativo y otro cualitativo, dirigidos a contrastar la extensión a nivel cognitivo de la organización situacional establecida. De ellos se obtienen las referencias precisas, en cuanto a instrumentos, respuestas y comportamientos tipo e interpretaciones en términos de comprensión, para el desarrollo de un nuevo estudio empírico cualitativo, en el que utilizando la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito, se llega a: caracterizar, de forma detallada, los estados y perfiles de comprensión del algoritmo asociados a la muestra participante de 24 alumnos; aportar nueva información sobre las particularidades de la comprensión del algoritmo a partir de los matices y relaciones identificados y extraer conclusiones genéricas referentes a la comprensión del conocimiento matemático en general.

Con la investigación se pone de manifiesto, entre otros aspectos, cómo los análisis epistemológicos y fenomenológicos asociados a un conocimiento matemático específico proporcionan criterios objetivos para la organización de su conjunto situacional y para la selección de tareas y situaciones con las que valorar la comprensión en los sujetos. Así sucede en el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, donde se llegan a identificar distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico (*técnica, analítica y formal*) y fenomenológico (*fundamental y extendida*), que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión entre los sujetos. Finalmente, el estudio realizado constituye un ejemplo de cómo abordar los problemas relativos a los distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso los de naturaleza interna, mediante

la elaboración y aplicación de aproximaciones, como la presentada, de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.

La investigación se desarrolla según el esquema de la figura 2, en el que se muestran los estudios realizados en cada etapa del trabajo, las relaciones entre ellos, los principales resultados obtenidos en cada caso y las cuestiones pendientes para las siguientes fases.

Aplicación del Análisis Didáctico

En la investigación contemplada hemos adoptado el Análisis Didáctico como referente metodológico para la selección y el tratamiento de los antecedentes (figura 2).

Fase 1: revisión primaria

En lo referente a la estructura, organización y exposición de la información, se ha seguido un proceso de concreción acorde con la delimitación del área problemática en el que la información tratada llega a organizarse en dos bloques temáticos. El primero de ellos se centra en:

(a) la comprensión en general (*antecedentes relacionados*). Se lleva a cabo una revisión y análisis de referencias no exhaustivo de la información en torno al fenómeno de la comprensión en los campos de la Filosofía, Sociología, Epistemología y Psicología. La información revisada proviene, en su mayoría, de obras de primer nivel, complementada con algunas referencias de segundo nivel. En este caso, las aportaciones presentadas no son exhaustivas ni definitivas sino que constituyen una primera aproximación parcial al conocimiento existente. No obstante, los análisis realizados en este ámbito, aunque limitados, manifiestan un alcance suficiente para los propósitos de la investigación.

(b) la comprensión del conocimiento matemático, su diagnóstico y evaluación (*antecedentes específicos*). Se expone una revisión lo suficientemente representativa como para configurar un panorama preciso del estado actual en el que se encuentra la investigación en este ámbito. La exposición se inicia con unos preliminares sobre la importancia de la comprensión en Educación Matemática, la evolución de los trabajos realizados en los últimos años y una clasificación genérica de los tipos de estudios existentes. A continuación se realiza una exposición detallada de las aproximaciones más relevantes y se incluyen algunas aportaciones centradas en las relaciones de la comprensión del conocimiento matemático con otras nociones vinculadas de similar complejidad. Las cuestiones referentes a la valoración de la comprensión aparecen de forma recurrente en la mayoría de los estudios revisados de forma que en este bloque también se dedica una especial atención al análisis de los procesos de diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, cuyo desarrollo efectivo constituye el núcleo y, a la vez, el principal reto de la investigación realizada.

Como segundo bloque temático, al dirigirse la atención hacia un conocimiento matemático específico como es el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, la revisión contempla también algunos problemas de interés propios del campo del cálculo aritmético elemental, estableciéndose una segunda delimitación para el área de estudio. A diferencia de lo realizado en el primer bloque, esta revisión se extiende lo preciso para garantizar un primer acercamiento a la naturaleza de los algoritmos y procedimientos algorítmicos, una descripción de la problemática vigente en Educación Matemática acerca de la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas elementales así como del cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones y un examen de las diferentes posiciones y líneas de actuación propuestas para la enseñanza de la aritmética elemental. Igualmente, se tratan diversos temas relacionados con el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos y el cálculo aritmético. En concreto, se reúne, se organiza y sintetiza parte de

la información existente sobre razonamiento y pensamiento algorítmico, sobre aportaciones recientes al cálculo aritmético desde la perspectiva del estudio de errores, sobre aritmética cognitiva, tareas y situaciones matemáticas y sobre los factores y condicionantes que intervienen en el aprendizaje del cálculo aritmético elemental, entre otros aspectos.

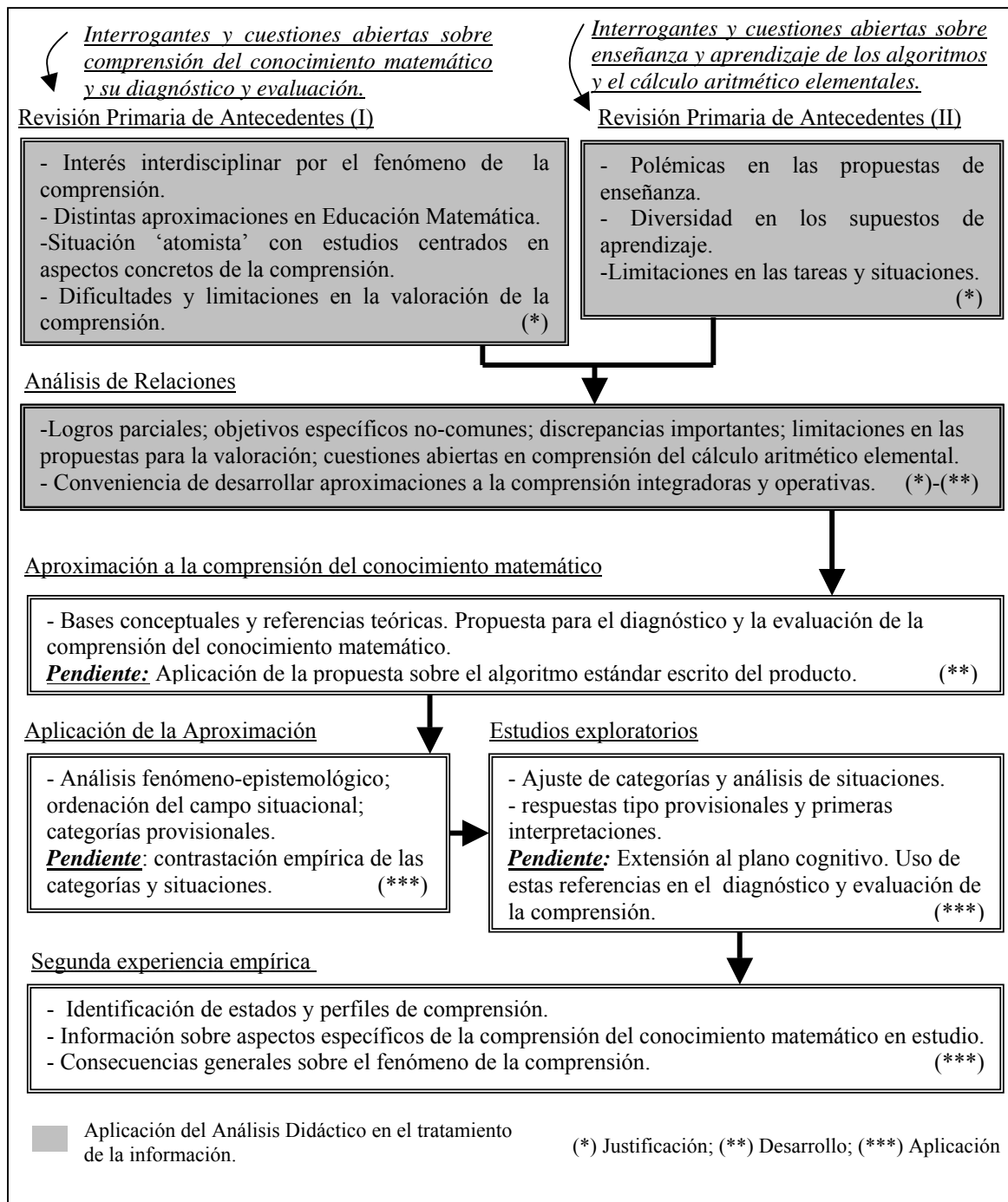


Figura 2. Esquema-resumen del proceso seguido en la investigación

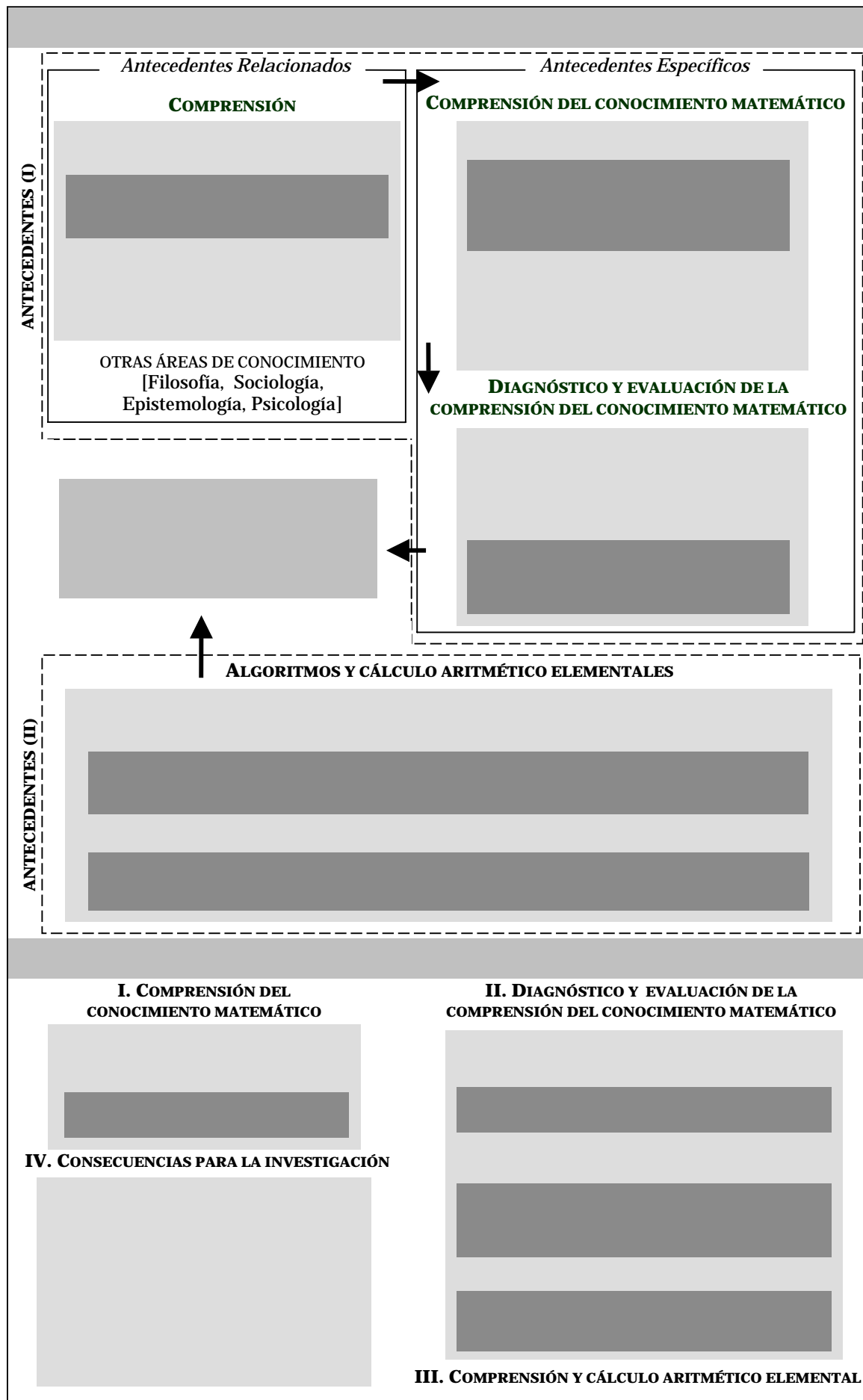


Figura 3. Estructura general de antecedentes

Los contenidos analizados se distribuyen según la estructura esquemática de la figura 3 (primera fase), que refleja, el proceso de concreción seguido en el estudio. Tras esta fase se alcanza una síntesis estructurada y comentada de la información puntual recopilada en torno a los aspectos más relevantes del área problemática.

Fase 2: análisis de relaciones

A continuación se procede con la revisión crítica de la información recopilada y el estudio de las relaciones más destacadas entre los distintos campos revisados con objeto de extraer conclusiones operativas y prioridades para la investigación. De este modo, se hacen explícitos los principales resultados obtenidos del cruce de planteamientos entre autores y de la propia reflexión crítica realizada sobre sus principales supuestos.

En consecuencia, la revisión primaria de información se emplea en esta segunda fase en función de su utilidad para la reflexión en torno a los temas centrales de la investigación, como son los relacionados con la complejidad del fenómeno de la comprensión, las características de los enfoques, aproximaciones y modelos sobre comprensión en Educación Matemática, el diagnóstico y evaluación de la comprensión, la influencia determinante del conocimiento matemático o la comprensión y su valoración en el ámbito específico de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales, entre otros (figura 3, segunda fase). El resto de la información recogida, sobre la que no se realiza una discusión abierta, resulta secundaria para los objetivos de la investigación, si bien sirve para contextualizar y completar el ámbito de estudio en el que nos situamos.

Por otra parte, en la investigación se consideró necesario realizar esfuerzos por establecer una base de conocimientos referencial y contrastada en torno a la comprensión del conocimiento matemático con objeto de evitar cualquier posición escéptica en lo que concierne a la posibilidad de alcanzar algún entendimiento sobre dicho fenómeno. En esta cuestión en particular, el Análisis Didáctico dio muestras de resultar especialmente eficaz como método para identificar aquellos nuevos conocimientos incorporables a esa base consensuada de conocimientos además de para presentar y caracterizar nuevas cuestiones problemáticas susceptibles de estudio.

A modo de ejemplo, presentamos algunos de los resultados de distinto tipo obtenidos tras la aplicación del Análisis Didáctico en el contexto de la comprensión del conocimiento matemático. Sus diferencias pueden apreciarse con facilidad por los términos en los que se enuncian, quedando igualmente patente la articulación existente entre ellos:

- Resultado primario referente a los enfoques elaborados en Educación Matemática:

<p>[RP] En Educación Matemática se identifican múltiples aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático, como la posición representacionalista (Hiebert y Carpenter, 1992; Davis, 1992; Castro et al., 1997; Romero, 2000), la aproximación histórico-empírica de Sierpinska (1990, 1994), la teoría del crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren (Pirie y Kieren, 1989, 1994; Kieren, Pirie y Gordon, 1999), los modelos de comprensión, de categorías y cognitivos (Nakahara, 1994; English y Halford, 1995; Ainley y Lowe, 1999) o los trabajos desarrollados con fines valorativos (Duffin y Simpson, 1997; Godino, 2000, 2002) o curriculares (Hiebert et al., 1997; Fennema y Romberg, 1999).</p>

- Resultado secundario derivado del análisis de relaciones entre las distintas aproximaciones identificadas:

[RS] En la investigación sobre comprensión del conocimiento matemático se suelen adoptar perspectivas diferentes, abordar cuestiones parciales y plantear objetivos no comunes a corto plazo. Los trabajos más recientes podrían situarse en alguno de los siguientes enfoques genéricos:

(a) Enfoque directo (“principios” de la comprensión), donde se contempla la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrándose el interés en el estudio de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración.

(b) Enfoque indirecto (“consecuencias” de la comprensión), en el que se sitúan aquellos trabajos preocupados por el desarrollo de la comprensión matemática y por la gestión externa de los efectos que produce.

En términos generales, podría afirmarse que el panorama actual sobre la comprensión en Didáctica de la Matemática muestra un carácter atomista, con un bajo nivel de cohesión entre los estudios del primer enfoque, un leve predominio de la aproximación representacionista sobre el resto de orientaciones y una limitada articulación entre los estudios posicionados en los enfoques directo e indirecto.

- Consecuencias con repercusiones directas para la investigación propia:

[C₁] Los procesos de comprensión se pueden estudiar desde puntos de vista diferentes, aunque las diferencias que surgen entre las distintas aproximaciones no implican necesariamente que algunas de ellas deban ser falsas. Los desacuerdos puntuales los entendemos más bien como necesarios para ir progresando en la línea de lograr un mayor entendimiento, el mayor posible, sobre el fenómeno de la comprensión.

Ahora bien, al mismo tiempo:

[C₂] Somos partidarios de realizar esfuerzos en busca de teorías unificadoras que reúnan, vertebren y articulen los distintos planteamientos existentes en torno a la comprensión del conocimiento matemático. De hecho, admitimos tal posibilidad, de modo que apostamos por aproximaciones integradoras a la comprensión en matemáticas.

El Análisis Didáctico como método para el estudio del conocimiento matemático

El procedimiento metodológico derivado de la Aproximación a la comprensión desarrollada en el estudio tomado como ejemplo aborda el problema de la determinación y selección de situaciones adecuadas para ser empleadas en labores de diagnóstico y evaluación de la comprensión de conocimientos matemáticos particulares. Para llevar a cabo esta labor se ha contado de nuevo con el apoyo del Análisis Didáctico, orientado en esta ocasión al estudio de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático:

- De una parte, interesa analizar aquellos conocimientos que lo conforman o sustentan dado que su comprensión depende en gran medida de ellos. Además, conviene relacionar el conocimiento matemático en estudio con aquellos otros más próximos, en

cuanto a su epistemología se refiere. En definitiva, como paso previo es necesario estudiar la naturaleza del conocimiento matemático seleccionado.

- De otra, también resulta esencial considerar la relación del conocimiento matemático con los fenómenos y situaciones que lo hacen significativo. Para ello, es preciso analizar previamente cuáles son estas situaciones y fundamentar todos los estudios de esta clase en el análisis fenomenológico² del conocimiento matemático (Puig, 1997).

La aportación del Análisis Didáctico en la configuración del método de valoración propuesto se concreta del siguiente modo:

Primera fase

Se procede con el *análisis de la información disponible* en torno al conocimiento matemático, para lo que se realiza una revisión de una muestra representativa de libros de texto de matemáticas, una consulta específica de antecedentes de investigación centrada exclusivamente en aquellos aspectos fenómeno-epistemológicos relacionados con el conocimiento matemático en estudio y una revisión de obras de matemáticas y de formación didáctica donde esté presente dicho conocimiento.

De este primer acercamiento, se extrae como resultados primarios (a) una batería inicial de situaciones y (b) unos primeros elementos caracterizadores de la epistemología y fenomenología del conocimiento.

Segunda fase

A partir de la reflexión realizada sobre el material recopilado en la fase anterior se lleva a cabo un primer intento de ordenación del conjunto situacional asociado al conocimiento, con una propuesta inicial de clasificación que es puesta a prueba a través de una consulta a expertos en Educación Matemática. De la consulta interesa considerar, sobre todo, las sugerencias de modificación y las posibilidades de ampliación tanto del campo de situaciones como de las propias categorías.

A partir de aquí, el método prosigue con la caracterización de las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al conocimiento matemático a partir de los resultados obtenidos en las etapas previas desarrolladas con la mediación del Análisis Didáctico. En Gallardo y González (2006) puede encontrarse una caracterización detallada de cada una de las categorías situacionales establecidas así como algunos resultados sobre la comprensión del algoritmo expuestos a través de ejemplos de situaciones resueltas por los alumnos.

FRONTERAS DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En el transcurso de la aplicación del Análisis Didáctico surgen diversas limitaciones y dificultades que generan cuestiones específicas y dejan abiertas posibles vías de continuación y mejora del método para futuros estudios. Resumimos a continuación las que nos parecen más significativas.

1. El control sobre las fuentes y tipos de información más relevantes plantea problemas de distinta índole. Como ejemplo, el acceso efectivo a la documentación a texto completo o el carácter versátil de los formatos empleados en la difusión del conocimiento son algunas de las dificultades destacables que influyen directamente sobre los resultados proporcionados por el método. Estas cuestiones, a las que no son ajenos otros procedimientos de revisión de antecedentes, fomentan la discusión en torno a cuáles son las posibilidades, y dónde habrían de establecerse los límites exigibles para

la investigación, de adquisición efectiva de información y de representatividad del material bibliográfico recopilado.

2. En este orden de reflexión, la información primaria proporcionada por el Análisis Didáctico, al igual que por cualquier otro método de revisión documental, debe considerarse necesariamente incompleta y provisional puesto que siempre cabe la posibilidad de una exploración de mayor alcance que integre los trabajos más recientes y contemple nueva información proveniente de otros campos diferentes a los considerados. Esta circunstancia genera cuestiones abiertas sobre la suficiencia de la revisión realizada y la justificación de su extensión en base a los propósitos de la investigación. No obstante, a pesar de tal limitación, entendemos que la revisión primaria sugerida por el Análisis Didáctico, dado que favorece la saturación³ en la información obtenida durante el proceso de recopilación, garantiza que las aportaciones sean representativas del conocimiento existente o al menos manifiesten un alcance considerable apto para los objetivos de la investigación a realizar.

3. El Análisis Didáctico aspira a alcanzar una articulación sólida entre resultados primarios, resultados secundarios y consecuencias, lo que ha de entenderse, en lo que a especificación se refiere, como uno de los avances más significativos respecto a otros métodos de análisis de antecedentes. Pero al mismo tiempo ha de reconocerse que la red de relaciones entre tipos de resultados puede llegar a ser compleja y difícil de establecer si el campo de estudio es extenso y la profundidad pretendida en el análisis es elevada. Ante tal dificultad consideramos que son los propios propósitos de la investigación los que proporcionan en este caso las referencias precisas para delimitar las fronteras de la reflexión característica de la segunda fase del Análisis Didáctico.

4. Respecto al uso del método como procedimiento para la identificación y ordenación de situaciones vinculadas a conocimientos matemáticos concretos, debemos aceptar, por una parte, el hecho de que es imposible mostrar la totalidad de situaciones en las que tiene sentido el empleo de un conocimiento matemático debido a su complejidad. Por otra parte, aunque admitamos como Puig (1998) que no es deseable en la investigación elaborar caracterizaciones exhaustivas y minuciosas para los conjuntos situacionales, sí recomendamos, con vistas a identificar en la práctica los límites de la aplicabilidad de los análisis fenómeno-epistemológicos, futuras reflexiones dirigidas a establecer unas pautas procedimentales precisas con las que poder desarrollar análisis certeros de forma sistemática con independencia de la complejidad del conocimiento matemático considerado.

5. El Análisis Didáctico viene siendo empleado en el seno de la SEIEM en contextos distintos y con sentidos y propósitos diferentes. Como ejemplo, cabe destacar su uso en el ámbito de la formación de profesores como instrumento conceptual y metodológico para la planificación curricular y la organización a nivel local de la enseñanza de las matemáticas escolares (Gómez, 2002, 2006) y también bajo el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática en el terreno del análisis de tareas matemáticas particulares y de las actividades generadas en torno a ellas durante su resolución (Godino et al., 2003). En el empleo del Análisis Didáctico en estas perspectivas, al igual que en la variante descrita en este trabajo para el estudio del conocimiento matemático, puede reconocerse con facilidad un interés común por profundizar en la complejidad del conocimiento matemático y por establecer dimensiones, categorías o componentes con las que controlar dicha complejidad de forma efectiva y operativa. Al mismo tiempo, son evidentes también las diferencias entre las distintas configuraciones reseñadas, mostrándose en aspectos tan concretos como las dimensiones o componentes constitutivos del método en cada caso, los fines perseguidos en su aplicación o el agente propuesto para su ejecución efectiva. En nuestra opinión, esta situación reclama el

desarrollo de nuevas reflexiones y actuaciones integradoras orientadas fundamentalmente a delimitar con mayor precisión las divergencias actuales y vincular en lo posible las distintas perspectivas existentes.

COMENTARIOS FINALES

La metodología de investigación en Educación Matemática es considerada uno de los temas prioritarios de discusión actual más determinantes para el desarrollo del área en las próximas décadas (English, 2002). Como contribución a esta línea de reflexión, en el presente trabajo se han expuesto los aspectos generales que configuran al Análisis Didáctico como procedimiento metodológico para la investigación en Educación Matemática, ilustrándose su operatividad mediante su aplicación en un estudio concreto desarrollado en el ámbito de la comprensión del conocimiento matemático.

A nuestro entender, la potencialidad del método radica esencialmente en su capacidad para garantizar un nivel elevado de especificación y concreción para la fase de revisión de antecedentes, manifestando al mismo tiempo una alta disponibilidad para ser empleado en una amplia variedad de investigaciones. De igual forma, por su configuración entendemos que el Análisis Didáctico proporciona concreciones precisas que pueden resultar de interés en ámbitos tan relevantes como los relacionados con la calidad de la investigación (Simon, 2004) o la formación de investigadores en Educación Matemática.

NOTAS

1. En general, la aproximación a estas otras áreas con instrumentos metodológicos como el Análisis Didáctico nos permite apreciar de una mejor forma la contribución que el conocimiento generado en ellas realiza sobre los problemas de investigación específicos tratados en Educación Matemática. Tanto es así que parte de los resultados proporcionados por el Análisis Didáctico podrían contemplarse como indicadores de la influencia que otros campos de investigación ejerce sobre las cuestiones particulares estudiadas en Educación Matemática.
2. Empleado aquí con un propósito diferente al de Freudenthal (1983) o Assude (1996); el objetivo principal no es la organización de la enseñanza de las matemáticas, sino el diagnóstico y la evaluación de la comprensión de un conocimiento matemático.
3. Nos referimos al fenómeno que acontece cuando la fase de revisión primaria está avanzada y la incorporación de nuevas referencias y contenidos no resulta significativa para el conjunto de conocimientos previamente recopilados y estructurados, bien porque aportan información marginal o porque ya aparecen reflejados en él. Esta saturación puede contemplarse como un indicador de primer orden para constatar la amplitud y profundidad de la revisión realizada.

REFERENCIAS

- Assude, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique: une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16, 1, 47-70.
- Boaler, J., Ball, D. L. y Even, R. (2003). Preparing Mathematics Education Researchers for Disciplined Inquiry: Learning from, in, and for Practice. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 491-521). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 3, 361-371.
- English, L. D. (2002). Priority Themes and Issues in International Research in Mathematics Education. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematicss Education* (pp. 3-15). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia ordinaria en niños de tres a seis años*. Tesis Doctoral. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.
- Gallardo, J. (2006). Aportes a la investigación en Educación Matemática en contextos latinoamericanos desfavorables: el acceso a la información a texto completo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (manuscrito aceptado para su publicación).
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26, 2, 10-15.
- Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Pareja, J. L. y Recio, A. M. (2003). *Análisis Didáctico de Recursos Interactivos para la Enseñanza de la Estadística en la Escuela*. IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet. Berlin, Germany, 11-12 August.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7, 3, 251-293.
- Gómez, P. (2006). *Análisis Didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Ponencia invitada en el X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Huesca, España, 7-9 septiembre.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.
- González, J. L. (1998a). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.

- González, J. L. (1998b). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En L. Rico y M. Sierra (Eds.) *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 77-105). Granada: SEIEM-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- González, J. L. (1998c). *Números naturales relativos*. Granada: Comares.
- González, J. L. (1999). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En T. Ortega (Ed.) *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 14-30). Valladolid: Universidad de Valladolid.
- González, J. L. (2001). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático*. Memoria Final del Proyecto de Investigación PB97-1066, subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001 (paper).
- González, J. L. y Ortiz, A. (2000). La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: estructura y fundamentos. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 131-146). Huelva: Universidad de Huelva.
- Gutiérrez, A y Maz, A. (2001). Cimentando un proyecto de investigación: la revisión de literatura. En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 149-164). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Hitt, F. (1999). Tesis de Doctorado en Matemática Educativa en México. En K. Hart y F. Hitt (Eds.) *Dirección de Tesis de Doctorado en Educación Matemática. Una perspectiva internacional* (pp. 45- 60). México: Cinvestav-IPN.
- Larrubia, J. J. (2006). *Modelo didáctico inclusivo para atender a la diversidad sordos oyentes en el aula ordinaria de Matemáticas. El caso de la resolución de ecuaciones de segundo grado en la Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis Doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.
- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación Primaria*. Tesis Doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.
- Padilla, Y. C. (2003). *Integrales de línea con Derive. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación*. Tesis Doctoral. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.
- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.
- Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.). *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 106-118). Granada: SEIEM-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Granada: Universidad de Granada.

- Ruiz, F., Castro, E. y Godino, J. D. (2001). Recursos en Internet para la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 201-212). Huelva: Universidad de Huelva.
- Simon, M. A. (2004). Raising Issues of Quality in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 3, 157-163.