ESTRATEGIAS CONSTRUIDAS PARA LA DIVISION DE FRACCIONES

Christopher M. Kribs-Zaleta
Universidad de Texas, Arlington (USA)

Resumen
Este trabajo recoge un estudio sobre las estrategias de cálculo desarrolladas por estudiantes de sexto año de educación primaria y por maestros, el cual reveló el uso de métodos de dos etapas para problemas de división de fracciones cuotitiva y partitiva. Estos métodos añaden un paso más a las estrategias de un solo paso desarrolladas para la división de números enteros; el paso adicional convierte unidades por medio de multiplicación (la unitización). Tambien se observa el uso de las unidades de co-medida, y algunos errores comunes.

Abstract
A study of computational strategies developed by sixth-grade students and prospective and practicing teachers revealed two-step approaches for measurement and partitive division of fractions problems which extend one-step strategies developed for division of whole numbers by adding a step which converts units by multiplying (unitizing). The study also observed the use of co-measure units, and some common errors.

INTRODUCCIÓN

La división de fracciones posiblemente sea la operación menos comprendida de las operaciones aritméticas estudiadas en la escuela. La enseñanza suele comenzar y terminar con el algoritmo de invertir y multiplicar que es tradicional en varios paises, aunque la mayoría de los adultos tienen gran dificultad para explicar porqué funciona. Las investigaciones han demostrado que los niños pueden desarrollar sus propias estrategias de cálculo para operaciones con números enteros (e.g., Carpenter et al., 1998) y con números racionales (e.g., Warrington, 1997). Sin embargo, las complejidades inherentes a trabajar con números racionales a menudo desafían a estudiantes y profesores, con el resultado de que generalmente se les presenta a los estudiantes el algoritmo tradicional para la división de fracciones antes de que tengan una oportunidad de construirle significado por cuenta propia. Esta práctica interfiere con la construcción del significado por los estudiantes (e.g., Mack, 1990). El objetivo de este estudio es describir las estrategias de cálculo desarrolladas por los estudiantes para problemas de división de fracciones, de tal manera que los maestros puedan anticiparlas y relacionarlas con las estrategias para división de números naturales, y también compararlas con las estrategias desarrolladas por maestros y futuros maestros usando modelos concretos, para examinar las similitudes que existen entre ellos.

Los estudios de las estrategias inventadas por los niños para la división distinguen típicamente dos tipos de problemas: la división *cuotitiva*[1], en la cual se sabe el tamaño del grupo pero se desconoce el número de grupos; y la división *partitiva*[2] o el reparto justo, en la cual se sabe el número de grupos pero se desconoce el tamaño de cada grupo. Los estudios de las estrategias inventadas para la división de números enteros demuestran que los estudiantes tienden a solucionar los problemas de división cuotitiva haciendo grupos del tamaño conocido, pero que solucionan problemas de división partitiva distribuyendo objetos a cada grupo, uno o algunos a la vez (e.g., Ambrose et al., 2003). Esta distinción entre los dos tipos de problema es igualmente importante en la división con las fracciones. Las interpretaciones cuotitivas son mucho más comunes que las de tipo partitivo en cuanto a la división de las fracciones, principalmente porque

[1] También se suele llamar division-medida o division-agrupamiento.
[2] División-reparto.

es difícil imaginar un contexto natural en el cual el número de grupos no sea un número entero. Ott, Snook y Gibson (1991) hallan que la literatura y los libros de textos generalmente no consideran la división partitiva de fracciones. Sharp y Adams (2002) describen las conceptualizaciones de los estudiantes para problemas con división de fracciones sin contextos en términos de interpretaciones cuotitivas, y todos los problemas con contextos dados en sus figuras son cuotitivos. Además, Warrington (1997) demuestra que los niños pueden desarrollar sus propias estrategias de cálculo para dividir fracciones. Una observación interesante que se puede hacer de los ejemplos que describe Warrington es que las explicaciones de sus estudiantes para los problemas (sin contexto) que implican la división de un número entero por una fracción propia tienden a ser dadas en términos de una interpretación cuotitiva, mientras que sus explicaciones para un problema que implica la división de una fracción propia por un número entero son dadas en términos partitivos. Es por lo tanto importante considerar ambos tipos de problemas de división al examinar las estrategias para la división de fracciones. En este trabajo se discuten las estrategias de cálculo para problemas con división de fracciones cuotitiva y partitiva desarrolladas por un grupo de estudiantes de sexto curso (sexto año de educación primaria), por un grupo de estudiantes universitarios de magisterio, y por maestros de educación primaria y secundaria que trabajaron (por separado) en los mismos problemas. El estudio también examinó los paralelismos entre las estrategias construidas para la división de fracciones y estrategias construidas para la división de números enteros.

MÉTODOS

El estudio se realizó con 21 estudiantes de sexto curso, 24 futuros maestros inscritos en un curso universitario de matemáticas, y 29 maestros de educación primaria y secundaria. Los estudiantes, que eran de varios grupos étnicos, procedían de una escuela primaria en la ciudad de Arlington, Texas (USA) en la que un 83% de los estudiantes provienen de bajos recursos económicos y la mayoría habla inglés como segunda idioma. Nueve de los estudiantes participaron en octubre y los otros 12 en abril del mismo año escolar. Los maestros que participaron como sujetos enseñaban en otras escuelas. En todos los casos se pidió a los sujetos solucionar unos problemas que implicaban la división de fracciones. Se les proporcionaron materiales para modelar (incluyendo naranjas y hojas blancas de papel, según los contextos de los problemas), y se les recomendó trabajar en grupos pequeños (escogidos al azar) para solucionar los problemas y describir sus soluciones individualmente usando modelos concretos, cuadros, palabras y números. Cada sesión duró aproximadamente una hora. Algunos estudiantes volvieron para terminar su trabajo a una segunda sesión.

La recolección de datos incluyó los trabajos escritos de los sujetos, fotos de los modelos construidos, la observación de sujetos mientras trabajaban y discutían sus soluciones y, en algunos casos, entrevistas inmediatamente después de la sesión para aclarar métodos de solución cuando los artefactos disponibles no los dejaban claros. El análisis se centró en los primeros cuatro problemas (véase el Apéndice) y consistió en la descripción y clasificación de los modos de acercarse a cada problema. Los problemas se escogieron por las características siguientes: las preguntas 1 y 4 son problemas cuotitivos en los que el número de grupos (el cociente) es un número no entero superior a 1 y el divisor es una fracción propia con numerador superior a 1. Las preguntas 2 y 3 son problemas tipo partitivo, pero en el primer caso el número de grupos (el divisor) es inferior a 1, mientras que en el segundo caso es superior a 1.

RESULTADOS

Estrategias

En general, los participantes utilizaron estrategias de un solo paso o de dos etapas específicas al tipo de problema. Los números utilizados en un problema (en detalle, si el número de grupos era inferior a 1, o el tamaño conocido del grupo era una fracción familiar) influyeron en determinar cuál de las dos clases de estrategia se utilizó.

Una minoría de los adultos (el 43% de los futuros maestros y el 13% de los profesores) y ninguno de los estudiantes aplicó una estrategia de división de enteros cuotitiva para la pregunta 1 (q.v.), haciendo tantos 3/4-naranjas como fue posible. Todos los estudiantes y el resto de los adultos utilizaron más bien un proceso de dos etapas:

(1) cortar el dividendo en cuartos-de-naranjas.

(2) hacer grupos de tres cuartos-de-naranjas.

Esto se puede expresar de una manera más general como primero multiplicar por el denominador del dividendo, lo cual convierte unidades (aquí, de naranjas a cuarto-naranjas), y en segundo lugar realizar una división de números enteros cuotitiva (aquí, 10/3). Todas las soluciones a la pregunta 4 utilizaron esta estrategia de dos etapas.

Los participantes también solucionaron los problemas de división tipo partitivo en las preguntas 2 y 3 sobre todo con métodos de dos etapas. Aquí el proceso era (para la pregunta 2):

(1) dividir las naranjas en tres porciones iguales.

(2) obtener cinco tales porciones.

El primer paso corresponde a una división partitiva por un número entero (el numerador del divisor), y es seguido por una multiplicación (por el denominador del divisor) que convierte las unidades de quintos de porción en porciones enteras. Los únicos participantes que utilizaron otro modo para acercarse a la pregunta 2 eran un grupo de alumnos que malinterpretaron la pregunta como división cuotitiva e intentaron determinar cuántas porciones de 3/5 de naranjas estaban en 2 naranjas y media. Este grupo cortó la media naranja en cuartos en vez de quintos, y terminó así con un error en el resto de la división.

Por otro lado, el modo más común de acercarse a la pregunta 3 fue una variación de un método de un solo paso para la división de enteros. Aquí el divisor es 2 1/3, y todos salvo uno de los grupos de adultos que solucionaron este problema subdividieron primero las hojas de papel en partes más pequeñas–mitades, tercios, o sextos–antes de repartirlas en conjuntos. Las repartieron en 2 grupos y se pararon quedándose con algunas partes de una hoja a su disposición para determinar la cantidad a repartir en el 1/3 de grupo. Esta subdivisión preliminar en unidades más pequeñas como sextos, llamados *unidades de co-medida*, puede explicar cómo las estrategias de división partitiva de enteros se pueden adaptar a los problemas de división de fracciones, contrariamente a las expectativas de algunos investigadores (e.g., Sharp, 1998). Los únicos participantes que solucionaron la pregunta 3 con un método de dos etapas de división de fracciones (la división partitiva por 7, y después la multiplicación por 3) fueron un grupo de profesores; esto requirió reconceptualizar el divisor como fracción impropia (7/3) en vez de un número mixto.

Errores

También surgieron patrones en los errores cometidos al resolver los problemas. En problemas de división cuotitiva, el error más común consistió en dividir la parte fraccionaria del dividendo en tantos trozos como el denominador del divisor: por ejemplo, cuarteando la media naranja en octavos al solucionar la pregunta 1 (el 50% de los alumnos hicieron esto). La otra dificultad común fue poner unidades incorrectas (viejas) a un resto: la mitad de los alumnos también respondieron inicialmente la respuesta a la pregunta 1 como "3 1/4" (sin unidades). Sólo al preguntarles las unidades se dieron cuenta de que tenían 3 porciones y 1/4 de naranja. Un grupo de alumnos también aplicó la división partitiva por 3 al 1/4 de naranja de sobra, para asociar una pieza con cada porción.

Los restos nunca impidieron solucionar los problemas partitivos. El único error común en solucionar las preguntas 2 y 3 consistió en aplicar el primer paso de la estrategia para división cuotitiva, por ejemplo, el dividirse en 1/5 de naranjas en la pregunta 2. La mitad de los alumnos consideraron la posibilidad de hacer esto, y un grupo realmente lo hizo, al igual que un grupo de futuros maestros.

También vale la pena observar los efectos de la enseñanza sobre las estrategias de los estudiantes. En octubre los alumnos intentaron solamente soluciones concretas. El grupo que trabajó en los problemas en abril, sin embargo, empezó por métodos puramente simbólicos, e incorrectos (por ejemplo, multiplicar), hasta que se les pidió explicar o justificar sus soluciones. En ese momento el grupo abandonó su trabajo simbólico a favor de modelos concretos.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Además de la distinción entre las estrategias desarrolladas para problemas de división cuotitiva y partitiva, hay una diferencia notable entre las estrategias de división de enteros, que implican solamente un paso y se pueden aplicar a algunos problemas de división de fracciones, y las estrategias de dos etapas específicas para la división de fracciones. En general, las estrategias de dos etapas desarrolladas para problemas con división de fracciones añaden simplemente un paso adicional a las estrategias de un solo paso. Dicho paso adicional realiza la conversión de la unidad inherente en el cálculo con las fracciones y se puede describir matemáticamente como multiplicar por el denominador. Este proceso, llamado *unitización*, se considera crítico para el desarrollo conceptual en matemáticas. Es importante observar que este paso adicional es el primer paso en problemas cuotitivos pero es el segundo paso en problemas partitivos; además, el paso de división es distinto en cada caso, según el tipo del problema. Los problemas cuotitivos tales como la pregunta 1 permiten métodos de un solo paso y también de dos pasos porque el divisor (3/4) resulta familiar y fácilmente reconocible en modelos físicos. Los problemas partitivos como la pregunta 2 no permiten métodos de un solo paso porque el número de grupos es inferior a 1.

El desarrollo de estas estrategias por principiantes tiene varias implicaciones para la enseñanza. Los maestros deben prestar especial atención al orden de los problemas que utilizan (véase también Sharp y Adams (2002), p. 338). Los estudiantes se acercarán a sus primeros problemas de división de fracciones equipados con estrategias de división de enteros, así que esos primeros problemas deben admitir estrategias de un solo paso también como las de dos etapas. Más concretamente, los problemas cuotitivos deben tener divisores familiares y reconocibles, y los problemas partitivos deben tener divisores superiores a 1, con las piezas fraccionarias lo más sencillas posible. Más adelante, los problemas más avanzados requerirán métodos de dos etapas.

Es también importante equilibrar las experiencias de los alumnos con problemas cuotitivos y con problemas partitivos. Aunque el último tipo es a menudo más difícil de solucionar, así como de escribir bien, estos problemas amplían las estrategias inventadas por los alumnos para la división partitiva de enteros, y llevan a soluciones en que los restos no complican tanto el cálculo como lo hacen en los problemas cuotitivos. Finalmente, solamente después de muchas experiencias usando estas dos estrategias de dos etapas pueden los estudiantes reconocer que los dos pasos en cada estrategia son iguales, y pueden ser realizados en un solo paso, vía el algoritmo tradicional.

Se debe observar que este estudio se ha centrado en el tipo de problema, pero también pueden influir en las respuestas estudiantiles otros factores como los modelos, representaciones y usos de las fracciones en los problemas (Felip Scapini y Castro Martínez, 2002), los cuales también merecen incluirse en futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Ambrose, R., Baek, J.-M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: constructive adaptive expertise* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 3-20.

Felip Scapini, J.D. y Castro Martínez, E. (2002). Una propuesta de analisis de problemas sobre fracciones. En J.M. Cardeñoso Domingo, E. Castro Martínez, A.J. Moreno Verdejo y M. Peñas Troyano (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática 'Thales'/Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. pp. 153-158.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32.

Ott, J. M., Snook, D. L., & Gibson, D. L. (1991). Understanding partitive division of fractions. *Arithmetic Teacher*, 39(2), 7-11.

Sharp, J. (1998). A constructed algorithm for the division of fractions. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 1998 NCTM Yearbook (pp. 198-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sharp, J., & Adams, B. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *Journal of Educational Research*, 95(6), 333-347.

Warrington, M. A. (1997). How children think about division with fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2(6), 390-394.

APÉNDICE: PROBLEMAS

1. You have 2 ½ oranges. If each student serving consists of 3/4 oranges, how many student servings (or parts thereof) do you have?

2. You have 1 ½ oranges. If this is enough to make 3/5 of an adult serving, how many oranges constitute 1 adult serving?

3. Sarah is making posters by hand to advertise the school play, but the posters she has designed are not the same size as a standard sheet of paper. She has 3 ½ sheets of paper left, which is enough to make 2 1/3 posters. How many sheets of paper does each poster use?

4. If Alberto is also making posters, but his posters only use 2/3 of a sheet of paper, how many of Alberto's posters will those 3 1/2 sheets of paper make?