

# COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES EN MAESTROS EN FORMACIÓN

Juan Jesús Ortiz, Nordin Mohamed, Carmen Batanero, Luis Serrano, Jesús Diego Rodríguez

Universidad de Granada

## **Resumen**

*En este trabajo presentamos un estudio sobre la capacidad de comparación de probabilidades y estrategias empleadas por maestros en formación. Contemplamos los distintos niveles de dificultad de comparación de fracciones identificados por Noelting, aunque en algunos ítems se incorporan elementos de tipo subjetivo. Los resultados son algo mejores que los de las investigaciones realizadas con alumnos de 10 a 14 años, aunque no en todos los ítems y muestran una gran dificultad de los participantes al resolver estas tareas. Finalizamos con algunas implicaciones para la formación de profesores en el campo de la probabilidad.*

## **Abstract**

*In this paper we present a research on future primary school teachers' capacity and strategies in comparing probabilities. We take into account the different levels of difficulty in comparing fractions identified by Noelting as well as subjective elements that are included in some items. Results were better than those in research carried out with 10-14 year-olds children, but not in all the items and suggest great difficulty of participants in solving these tasks. We conclude with some implications for training teachers in probability.*

## **INTRODUCCION**

En los últimos años se ha producido una reforma de la enseñanza obligatoria, que concede un mayor peso al estudio de la Probabilidad. Los currículos de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E, 1990) así como los decretos que la desarrollan (M.E.C., 1991, 2001), los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000) y otros documentos curriculares enfatizan la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de cambiar la metodología de enseñanza para hacerla más activa y exploratoria. Un punto fundamental es la formación de los profesores que han de llevar a cabo la enseñanza (Stohl, 2005).

El hecho de que muchos maestros en formación provengan del Bachillerato de Humanidades, nos motivó a plantearnos la pregunta de si efectivamente estos futuros maestros tienen suficientes conocimientos de probabilidad para enseñar el tema. Para obtener una primera aproximación a la respuesta, en este trabajo presentamos un estudio de evaluación inicial de la capacidad de los futuros profesores de educación primaria para resolver problemas elementales de comparación de probabilidades. Para ello analizamos las respuestas de 102 estudiantes de magisterio al cuestionario construido por Cañizares (1997) para evaluar esta misma capacidad en los alumnos de 10 a 14 años.

Pretendemos después analizar las semejanzas o diferencias con los resultados de los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997). A continuación describimos la investigación previa, el cuestionario y los resultados obtenidos.

### ***Comparación de probabilidades en los niños y adolescentes***

La investigación sobre la capacidad de los niños y adolescentes en la comparación de probabilidades, comienza con Piaget e Inhelder (1951), quienes describen diferentes niveles, en función de las estrategias y respuestas correctas, utilizando como dispositivo experimental bolas en urnas, fichas y otros materiales. Otros autores como Yost y cols.

(1962), Goldberg (1966), Davies (1965), Hoeman y Ross (1971), Falk y cols. (1980), Green (1983), Truran (1994), O'Connell, (1999). continúan este trabajo. Fischbein y cols. (1970), compararon el razonamiento de niños con y sin instrucción, confirmando la mejora del razonamiento después de la misma y la conveniencia de enseñar probabilidad a partir de los 10 años. En estos trabajos se tiene también en cuenta que un problema de comparación de probabilidades entraña la comparación de dos fracciones, por lo que un requisito es el nivel de desarrollo de razonamiento proporcional. Por ello las tareas empleadas se organizan en función de los estadios descritos en este tema Noelting (1980 a y b). Un resumen de estos y otros trabajos se incluye en Cañizares (1997).

### ***Investigaciones relacionadas con la formación en probabilidad de futuros profesores***

El gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores en la pasada década apenas se refleja para el caso de la probabilidad, como se pone de manifiesto en el reciente ICMI Study 15, donde sólo se presentó un trabajo (entre unos 150) sobre el tema. También se observa al analizar los contenidos de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, o en el survey de Stohl (2005). A pesar de ello progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en este colectivo (ver por ejemplo, las investigaciones de Azcárate (1995) o Cardeñoso (2001) y trabajos posteriores de los mismos autores. También se inician algunas experiencias (por ejemplo, López, 2006 y trabajos anteriores de la misma autora) que analizan la forma en que los profesores diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, sobre todo en la escuela primaria, que muestran la gran dificultad de estos profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos. En otros casos (por ejemplo, Batanero, Godino y Cañizares, 2005) se describe el efecto de experiencias de enseñanza basadas en simulación sobre la superación de algunos sesgos en el razonamiento.

En este trabajo queremos contribuir a esta problemática, con objeto de mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el campo de la probabilidad.

## **MÉTODO**

La muestra de la cual se tomaron los datos estuvo formada por 102 maestros en formación de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, de los tres cursos y de todas las especialidades salvo Audición y Lenguaje, con una media aritmética de edad de 21 años. Estos estudiantes, en general, tienen escasa formación matemática, y en particular probabilística.

El cuestionario estuvo compuesto de 7 ítems en los que se pide decidir cuál, entre dos cajas con fichas blancas y negras da mayor probabilidad de un cierto color. Se pide argumentar la respuesta. Los ítem 2, 3, 6 y 7, tomados de Green (1983) son similares al 1, presentado a continuación, variando la composición de las urnas y el orden de los distractores.

**Ítem 1.-** En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Se proporcionaba a los niños y a los maestros en formación un dibujo mostrando la composición de las urnas)

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿Cuál elegirías para hacerla extracción? Señala la respuesta correcta:

- A. La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra\_\_\_\_
- B. La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra \_\_\_\_
- C. Las dos cajas dan la misma posibilidad.....\_\_\_\_
- D. No lo se.....\_\_\_\_
- ¿Por qué? .....

Los ítems 4 y 5, tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984), introducen algunos factores subjetivos que en la investigación de Cañizares (1997) tuvieron una influencia, tanto en los resultados como en las estrategias empleadas.

**Ítem 4.-** Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

**Ítem 5.-** Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión ?

*Tabla 1. Clasificación de los ítems según los niveles descritos por Noelting*

Item	Composición (favorables, desfavorables) cada caja	Tipo (Noelting)	Estrategia posible	Otros
1	(3,1); (2,1)	Ia	Comparar casos favorables	
2	(5,2); (5,3)	Ib;	Comparar casos desfavorables	
3	(2,2); (4,4)	IIa;	Correspondencia	
4	(40,20); (30,15)	IIb;	Correspondencia	Factores subjetivos
5	(10,20); (30,60)	IIb;	Correspondencia	Factores subjetivos
6	(12,4); (20,10)	IIIa;	Correspondencia	
7	(7,5); (5,3)	IIIb;	Reducir común denominador	

Puesto que, en los ítems puede aplicarse el principio de indiferencia, nos encontramos ante un ejemplo en que la asignación de probabilidades debe hacerse aplicando la regla de Laplace. Para resolver el problema es necesario, por tanto, comparar dos fracciones dadas. Además de ello, se debe movilizar la concepción sobre el experimento aleatorio, diferenciar los posibles sucesos en este experimento (espacio muestral), asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número total de bolas como conjunto de posibilidades. En la Tabla 1 se clasifican los ítems de acuerdo al nivel requerido de razonamiento proporcional en la categoría de Noelting (1980 a y b).

## RESULTADOS Y DISCUSION

En la Tabla 2 presentamos los porcentajes de respuestas correctas a los ítems propuestos en cada grupo de edad de los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997) que muestra una mejora general con la edad, en los tres primeros, habiendo mayor dificultad en los que involucran mayor nivel de razonamiento proporcional o elementos subjetivos.

En nuestro caso, se observa una mejora respecto a la media global de resultados de los niños en todos excepto el primero. Por otro lado resultó el más difícil el ítem 7, en que la falta de proporcionalidad entre las cuatro cifras presentadas obliga al sujeto a un cálculo de proporciones (75 % errores en los futuros maestros). Le sigue el ítem 4, donde se produce la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting, posiblemente debido a los distractores de tipo subjetivo (70 % de errores en maestros). Otro ítem difícil es el 5 con 57% de errores, también con elementos subjetivos. Los tres primeros ítems muestran un resultado algo mejor en los maestros y alrededor del 30% de errores y el 4 un 40% de errores.

*Tabla 2 : Porcentaje de respuestas correctas en los ítems*

Item	Alumnos				Maestros	
	10-11 (n=36)	11-12 (n=37)	12-13 (n=38)	13-14 (n=32)	Total (n=143)	Total (102)
1	75.0	70.3	86.8	87.5	79.7	79.4
2	52.8	67.6	65.8	56.2	60.8	68.6
3	47.2	54.1	81.6	73.6	63.6	72.5
4	6.0	27.0	23.6	23.8	20.0	29.4
5	13.9	32.4	39.5	43.7	32.5	43.1
6	30.6	27.0	34.2	21.9	28.7	59.8
7	19.4	5.41	5.3	6.2	9.1	25.5

Estos resultados son preocupantes, dado la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos.

### **Estrategias de los futuros profesores en la comparación de probabilidades**

Un segundo punto de estudio fue el análisis de las estrategias empleadas, pues los alumnos pueden haber elegido una respuesta correcta siguiendo un razonamiento incorrecto. A continuación analizamos estas estrategias, usando la misma clasificación que Cañizares (1997) empleó con los alumnos de 10 a 14 años, que son las siguientes:

A1) *Comparación del número de casos posibles*: Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas. Esta estrategia, aunque puede generar una respuesta correcta al ítem 1, carece de base lógica

A2) *Comparación del número de casos favorables*: Es la estrategia más simple, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos. Esta estrategia la hemos considerado pertinente en el ítem 1, y aplicada a cualquier otro genera respuestas incorrectas.

A3) *Comparación del número de casos desfavorables*: Cuando, una vez intentada la anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables. El único ítem en el que la justificación mediante esta estrategia daría lugar a una respuesta correcta es el 2,

A4) *Estrategias aditivas*: Los alumnos que utilizan esta estrategia tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero gestionan los datos por medio de alguna operación aditiva para poder establecer la comparación. En general, estas estrategias no se consideran pertinentes.

A5) *Estrategia de correspondencia*: Consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra. Piaget e Inhelder (1951) afirman que, a falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina las dobles relaciones por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones no aparecen como inmediatas. Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente los ítems 3, 4, 5 y 6.

A6) *Estrategias multiplicativas*: Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951) en el período de las operaciones formales, es sin duda, la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Esta estrategia resuelve con éxito todos los ítems.

A7) *Otros tipos*: por ejemplo, hacer referencia a la suerte, fijarse en la posición de las bolas en el dibujo o utilizar cualquier otro procedimiento.

En la tabla 3, donde se han sombreado las estrategias correctas para cada ítem, observamos que para algunos ítems (7, 6, 2) hay menor porcentaje de estrategias correctas que de respuestas correctas, lo que implica que la dificultad de los problemas es todavía mayor que la que aparece en la tabla anterior, puesto que algunos alumnos obtuvieron en estos ítems respuestas correctas con un razonamiento inadecuado. Por el contrario, en el ítem 5 algunos estudiantes que usan estrategias adecuadas, no llegan a la solución, influidos por los elementos subjetivos del ítem. En el resto, los porcentajes de estrategias y respuestas correctas se corresponden.

*Tabla 3: Porcentaje de estrategias según ítem*

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Casos posibles	4	(2)	(2)	(2)	(2)	(0)	(2)
Casos favorables	(56.8)	(28.4)	(9.8)	(28.4)	11.8)	20.6)	(10.8)
Casos desfavorables	(2.9)	(31.4)	(0)	(0)	(2)	(8.8)	(4.9)

Aditivas	(5.9)	(13.7)	(6.9)	(1)	(1)	(24.5)	(36.3)
Correspondencia	(2)	(2.9)	(50)	(15.7)	(43.1)	(15.7)	(18.6)
Multiplicativa	(17.6)	(12.7)	(20.6)	(13.7)	(14.7)	(15.7)	(13.7)
No responde o incompleta	(9.8)	(7.8)	(9.8)	(30)	(12.8)	(13.7)	(11.8)

Respecto a la investigación de Cañizares (1997) los futuros maestros hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que usa estrategias aditivas.

## CONCLUSIONES

Nuestros resultados apuntan la necesidad de reforzar la formación probabilística elemental, de los futuros profesores de educación primaria que difícilmente podrán enseñar un tema en que muestran dificultades tan notables. Además de la falta de razonamiento proporcional en algunos problemas, se ha observado la influencia de factores del problema que inducen la asignación de probabilidades subjetivas, especialmente en los dos ítems tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit. Como consecuencia, el formador de profesores debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento proporcional, al abordar la enseñanza de la probabilidad en las Facultades de Educación.

Creemos que un medio de enfrentar a los alumnos con estas concepciones y ayudarles a superarlas es ponerle en contacto con situaciones experimentales sobre probabilidad, como las recomendadas en los diseños curriculares de educación primaria. Pensamos que se debe prestar más atención al tema en los programas de formación de profesores de educación primaria (Vacc, 1995). Ello permitirá también preparar a los profesores en la componente didáctica, mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos.

**Agradecimiento:** Financiado por el Proyecto SEJ2004-00789, MEC-FEDER y Grupo PAI FQM126 (Junta de Andalucía).

## REFERENCIAS

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.
- Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204.
- Fischbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1970). Comparison of fractions and the chance concepts in children. *Child Development*, 41, 365-376.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.
- Goldberg, E. (1966). Probability judgment by preschool children. *Child Development*, 37, 157-167.
- Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.
- Hoemann, H. W. y Ross, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition* (pp. 93 - 121). Berlín: Springer Verlag.
- Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado*, nº 238. Madrid: B.O.E.
- López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute. CD ROM, en prensa.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 152. Madrid: B.O.E.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2001). Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 14. Madrid: B.O.E.
- N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA; N.C.T.M. On line: <http://standards.nctm.org/>
- Noelting, G. (1980 a). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (2), 217-253.
- Noelting, G. (1980 b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics*, 11(3), 331-363.
- O'Connell, A. A. (1999). Understanding the nature of errors in probability problem-solving. *Educational Research and Evaluation*, 5(1), 1-21.

- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dodrecht: Kluwer
- Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII PME Conference* (v4, pp. 337-344). Universidad de Lisboa.
- Vacc, N. N. (1995). Supervisor and teacher educator perceived relevance of recommendations in the NCTM curriculum standards. *School Science and Mathematics*, 95(6), 310-319.
- Yost, P., Siegel, A. y Andrews, J. N. (1962). Non verbal probability judgement by young children. *Child Development*, 33, 769-780.