

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Jesús Gallardo Romero, José Luis González Marí, Universidad de Málaga

Resumen

En este trabajo se expone una visión actualizada del Análisis Didáctico como instrumento metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. La potencialidad práctica del método se ilustra con la descripción de su aplicación en un estudio desarrollado recientemente sobre la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004). En base a esta experiencia se destacan además las principales limitaciones e interrogantes metodológicos generados por el Análisis Didáctico junto con algunas posibilidades de mejora futura.

Abstract

In this work a vision of Didactical Analysis is exposed as specific methodological instrument for research in Mathematics Education. The practical potentiality of the method is illustrated with the description of its application in a study developed recently on the understanding in mathematics (Gallardo, 2004). With this reference the main methodological limitations and questions generated by the Didactical Analysis are emphasized as well as some possibilities of future improvement.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática suele contemplarse como un proceso complejo que transcurre por diversas fases específicas en las que se realizan prácticas de distinta naturaleza y se emplean instrumentos metodológicos con propósitos diferentes. En lo que respecta a sus inicios, la investigación exige por lo general el desarrollo de un estudio de carácter teórico para la determinación del problema a investigar, lo que supone realizar, entre otras tareas, un trabajo previo de revisión de antecedentes y de exploración del estado actual de la cuestión. Pero dicho trabajo previo va más allá, como veremos, de la mera revisión y análisis usual de antecedentes, práctica común a cualquier investigación científica. Su necesidad no sólo está justificada por tratarse de una de las prácticas centrales en las que resulta preciso la planificación detallada y la aplicación minuciosa de procedimientos eficaces de recopilación de información así como de una labor de revisión y análisis de esa información igualmente explícita y metódica, sino que se dan aquí circunstancias específicas del área que aconsejan una atención especial. Nos referimos, por un lado, a la naturaleza compleja de los fenómenos, incluidas la multi-/inter-disciplinariedad del campo y la situación incipiente de numerosos conocimientos, y, por otro, a las características de la información y las fuentes disponibles, cuya dispersión y amplitud son notables y aconsejan un tratamiento meta-analítico que no se puede limitar a la mera revisión tradicional (González, 1998a). Es evidente que los requerimientos característicos del trabajo científico disciplinado no siempre llegan a manifestarse con la suficiente evidencia en las investigaciones en Educación Matemática, lo que supone una limitación metodológica cada vez más reconocida en el área (Boaler, Ball y Even, 2003). En nuestra opinión, este hecho justifica la conveniencia de incrementar los esfuerzos destinados a especificar y evidenciar aún más el método implícito en los instrumentos actuales empleados para el tratamiento de la información, con objeto de lograr un mayor alcance y profundidad en

los análisis y garantizar un nivel más elevado de sistematización y concreción en los procedimientos.

Como contribución en este sentido, se presenta en este trabajo un método específico, al que denominamos *Análisis Didáctico*, que proporciona referencias precisas, específicas y operativas para afrontar con eficacia la fase de selección y tratamiento de los antecedentes en la investigación en Educación Matemática. Se trata de un procedimiento metodológico consolidado cuyas bases fundamentales fueron definidas en la tesis doctoral de González (1995) y que viene empleándose desde entonces con regularidad en las investigaciones desarrolladas en el área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga.

La exposición se inicia con una síntesis actualizada de las componentes y aspectos fundamentales caracterizadores del Análisis Didáctico como metodología de investigación específica en Educación Matemática. A continuación, se pone de manifiesto su carácter operativo y potencialidad práctica a través de la descripción genérica de su empleo en una investigación específica en torno a la comprensión del conocimiento matemático en la que se incluye algunos resultados concretos obtenidos en la fase de revisión de antecedentes. La exposición concluye con la enumeración de algunas de las cuestiones abiertas y propuestas de mejora asociadas que delimitan en la actualidad las fronteras de la aplicación del Análisis Didáctico en el contexto que aquí se presenta.

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este apartado se describe de forma resumida la configuración que el Análisis Didáctico presenta en la actualidad. El contenido expuesto sirve de actualización de la explicación del método desarrollada por González (1998b) en el Primer Simposio de la SEIEM con motivo del seminario dedicado a la estructuración de las tareas presentes en un campo conceptual, permitiéndonos de este modo contrastar su evolución durante la última década.

Referentes teóricos

En el contexto de la investigación en Educación Matemática identificamos el Análisis Didáctico con el procedimiento metodológico no-empírico que analiza, relaciona e integra, a través de un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, información procedente de diversas áreas de investigación interrelacionadas por su objeto de estudio (González, 1998a, 1998c). El Análisis Didáctico es aplicable tanto a campos conceptuales y conocimientos matemáticos concretos, como los números naturales relativos (González, 1998c), la secuencia numérica (Fernández, 2001) o la integral de línea (Padilla, 2003), como a aquellos otros fenómenos y nociones de naturaleza compleja cuyo estudio resulta de interés para el campo de la Educación Matemática, como es el caso de la inducción matemática (Ortiz, 1997), la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004) o la atención a la diversidad sordo oyente (Larrubia, 2006). Cuando se emplea con un conocimiento matemático, son cuatro las áreas básicas referenciales a considerar como fuentes de información científica: Historia y Epistemología de la Matemática, Aprendizaje y Cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares en relación con el conocimiento matemático en estudio. En caso de realizarse sobre un fenómeno o noción compleja, se identifican dos bloques básicos de información: la proporcionada por los antecedentes relacionados, procedentes de áreas de conocimiento afines a la Educación Matemática que comparten o tienen una incidencia especial sobre el objeto de estudio; y

la información propia del área configurada por los antecedentes específicos. En ambos casos, la aplicación del Análisis Didáctico proporciona una síntesis estructurada que permite detectar dificultades, potencialidades y relaciones en trabajos previos así como organizar y delimitar con precisión el desarrollo posterior de la investigación propia (González, 1999).

El proceso consta de dos fases fundamentales:

- una *revisión primaria* de la información en cada una de las áreas de investigación consideradas, que incluye la obtención de datos, resultados y conclusiones relevantes organizados por cuestiones y contenidos relacionados con el área problemática y tratados de forma neutra. El dominio de las fuentes de información más relevantes es contemplado en esta fase como un requisito inicial del método.

- un *análisis de las relaciones* existentes en la información ya recopilada. En esta fase de revisión secundaria se extraen nuevos resultados y conclusiones generales y se identifican cuestiones, conjeturas y prioridades para la investigación, conformando de este modo la información elaborada característica del Análisis Didáctico.

El procedimiento proporciona tres tipos de resultados genéricos:

- (a) *Resultados Primarios* (RP) o conclusiones del análisis primario en términos de proposiciones contrastadas o asumidas por grupos de autores relevantes. Estos datos pueden ser comunes a una serie de autores o líneas de estudio y también singulares, en la medida en que sean importantes y merezca la pena destacarlos. Se incluyen además las informaciones que sintetizan los resultados de una serie de trabajos o posiciones y las lagunas o carencias detectadas, consideradas como información explícita por defecto.

- (b) *Resultados Secundarios* (RS). Son conclusiones obtenidas de la reflexión realizada sobre los resultados primarios. No se trata de información directa presente en los trabajos revisados sino que se hace explícita a través de los análisis de las relaciones entre los resultados puntuales y primarios. Los resultados secundarios pueden ser, entre otros: opiniones, valoraciones y posiciones personales fundadas en datos objetivos (puntuales o primarios); conjeturas plausibles en virtud de la información que las sustenta; interpretaciones avaladas y/o sólidas en base a argumentaciones coherentes y fundadas; lagunas o carencias implícitamente detectadas o requisitos y necesidades obligadas por las situaciones, contextos o la mera realidad, a tenor de las circunstancias que rodeen los estudios revisados.

- (c) *Consecuencias* para la investigación (C). De los propios resultados secundarios se pueden elaborar conclusiones que no estén exactamente entre ellos, sino que procedan del análisis de los mismos. Estas consecuencias pueden ser, entre otras: conjeturas para la investigación; recomendaciones para la realización de estudios teóricos o empíricos previos; componentes de modelos teóricos a utilizar y contrastar en el estudio u orientaciones generales. Este tipo de conclusiones habrá que entenderlas, en general, como supuestos iniciales e ideas emergentes, reconocidos pero también necesitados de un mayor desarrollo y vertebración posterior para la consolidación de posibles propuestas teóricas más consistentes.

La naturaleza matemática del objeto considerado, las particularidades de las fuentes de información contempladas o los rasgos distintivos de los resultados obtenidos en la aplicación del Análisis Didáctico son algunos de los aspectos que justifican su especificidad como método para la revisión de antecedentes en el campo de la Educación Matemática. De hecho, tal especificidad justifica la posibilidad de

reconsiderar el término para hablar en realidad de un *Análisis Didáctico-Matemático* para el tratamiento de la información en la investigación en Educación Matemática.

Concreciones metodológicas

Para la aplicación efectiva del Análisis Didáctico conviene tener presente, además de los criterios que configuran el meta-análisis cualitativo, ciertas especificaciones respecto al método así como determinadas pautas metodológicas operativas en cada una de las fases del proceso. A continuación, subrayamos como referencia algunas de las puntualizaciones significativas que concretan el procedimiento cuyas principales componentes aparecen relacionadas en el esquema de la figura 1:

- El dominio de las fuentes y tipos de información más relevantes demanda una actualización permanente, no exenta de problemas, en lo referente a las vías de acceso y al formato de difusión del conocimiento actual. Los trabajos que vienen realizándose con regularidad en Educación Matemática con el propósito general de describir y caracterizar los principales recursos bibliográficos existentes así como sus modos de acceso (Gutiérrez y Maz, 2001; Ruiz, Castro y Godino, 2001; Gallardo, 2006) constituyen para el Análisis Didáctico un referente concreto de utilidad para garantizar, entre otros aspectos, el control sobre las principales fuentes documentales, la sistematización del proceso de búsqueda de información y la validez externa de los resultados obtenidos.
- La consideración de información no específica proveniente de otras áreas de conocimiento consolidadas y de mayor tradición está justificada en el Análisis Didáctico, en parte, por la necesidad de controlar la complejidad asociada al fenómeno estudiado y de eliminar posibles inconsistencias derivadas de una falta de precisión en la terminología empleada, siendo éste un propósito compartido con otros métodos como el Análisis Conceptual (Rico, 2001). Pero además de ello, esta información resulta útil para situar y relacionar entre sí los antecedentes específicos, que se suelen apoyar, a veces de forma implícita, en ideas y supuestos genéricos procedentes de dichos campos. Asimismo, se trata de antecedentes que proporcionan solidez y coherencia a la revisión global y favorecen el carácter integrador pretendido por el Análisis Didáctico¹.
- La primera fase del Análisis Didáctico exige la configuración y el empleo de procedimientos sistemáticos de revisión de la información recopilada previamente, no sólo para aportar consistencia a la estructura resultante de conocimientos primarios sino también para posibilitar un desarrollo productivo en la segunda fase de análisis de relaciones. Uno de los esquemas básicos de revisión de documentos admitidos por el Análisis Didáctico, que tiene en cuenta recomendaciones como la sugerida por Hitt (1999) en relación con los tipos de documentación existente y las posibles formas de analizar la información que contienen y que ha dado muestras de ser efectivo, es el constituido por las dos partes diferenciadas siguientes:
 - *Resumen neutro del contenido* del documento. En él se destacan, entre otros aspectos y según sea el caso, las principales ideas relativas a los supuestos teóricos adoptados, la metodología de investigación empleada, los resultados y conclusiones obtenidos o las propuestas didácticas y recomendaciones curriculares sugeridas. Es decir, se destaca lo más relevante de cada tipo de documento según su contenido.
 - *Análisis crítico de la información revisada* en cada referencia, centrado principalmente en las características de los resultados obtenidos, en las potencialidades y limitaciones manifestadas, en las analogías y divergencias surgidas con los planteamientos particulares del estudio y en las cuestiones relevantes para los propósitos de la investigación.

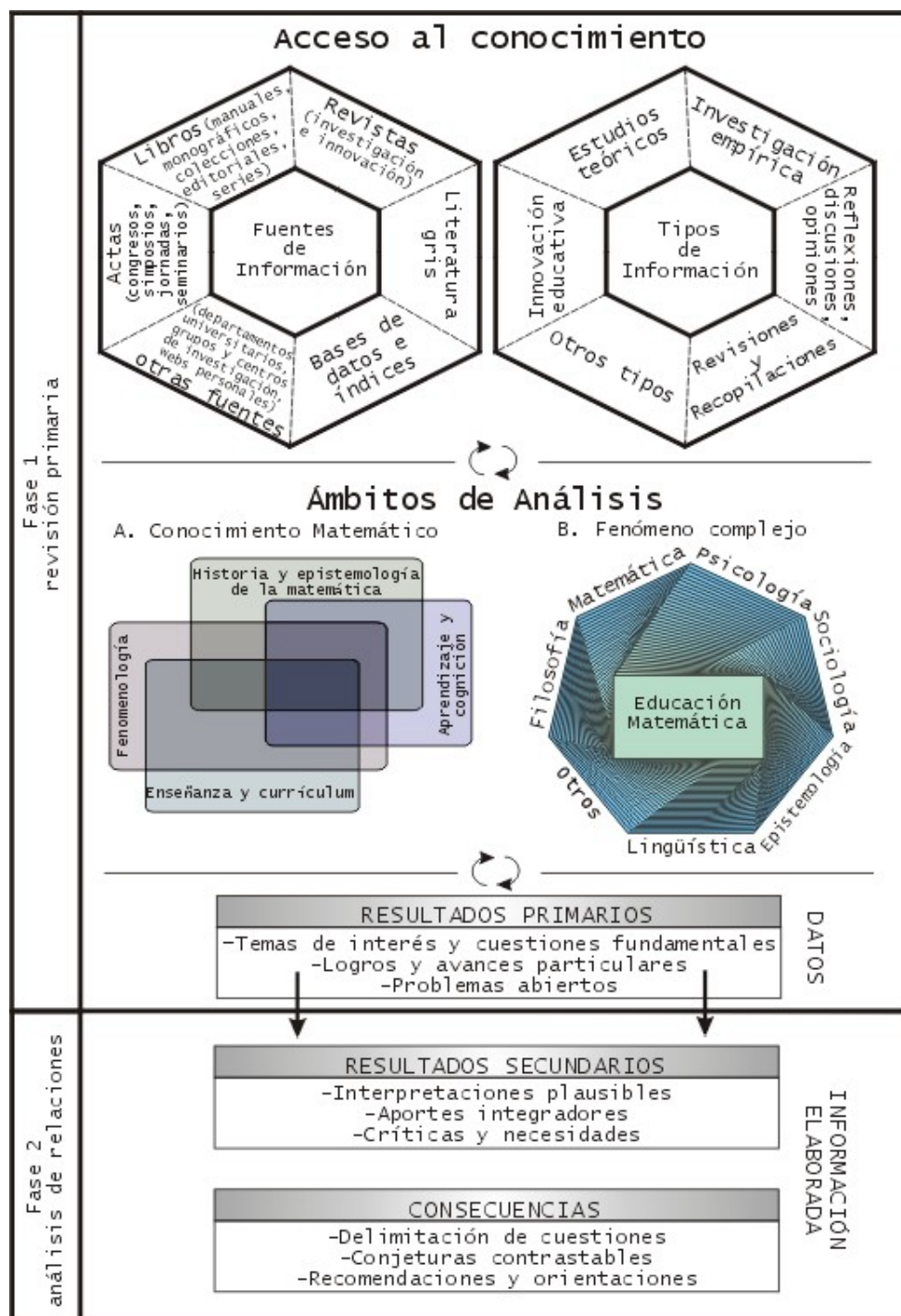


Figura 1. Componentes fundamentales del Análisis Didáctico

- Algunos de los resultados obtenidos tras la revisión suelen venir enunciados en forma de proposiciones complejas o combinadas que son de difícil categorización cuando se adoptan los tipos proporcionados por el Análisis Didáctico. Esta dificultad, no obstante, puede salvarse en parte optando por situar cada uno de dichos resultados en la categoría a la que corresponde la proposición que creemos de mayor peso dentro del enunciado o, en su defecto, a la que corresponden la mayoría de las proposiciones que contiene.
- La estructura organizativa de la información obtenida en cada una de las fases influye notablemente en la integración del conocimiento revisado y en la coherencia final del estudio de antecedentes. En este sentido, el Análisis Didáctico contempla para su primera fase la organización de los resultados primarios por los temas tratados y en función de su especificidad, fecha de publicación o repercusión sobre el problema de investigación, entre otros aspectos. Asimismo, la estructura correspondiente a la segunda fase refleja la conexión entre resultados primarios, secundarios y consecuencias así como la concreción hacia el problema de investigación del análisis desarrollado. Todo ello hace que tales estructuras puedan considerarse en sí mismas como resultados secundarios del Análisis Didáctico.
- El Análisis Didáctico manifiesta un carácter doblemente cíclico producto de su naturaleza dialéctica. De una parte, su aplicación incluye una fase inicial, caracterizada por su extensión y profundidad, en la que se obtiene gran parte de la información empleada en la investigación. Esta base de referencias suele completarse posteriormente con sucesivas búsquedas puntuales llevadas a cabo con regularidad a lo largo de la investigación. De otra parte, el Análisis Didáctico contempla la posibilidad de que los resultados secundarios y consecuencias obtenidos de su aplicación en un estudio específico pasen a ser considerados resultados primarios en posteriores investigaciones relacionadas, reconociéndose también una relatividad en los resultados derivada de la aplicación recursiva del método.

APORTES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE COMPRENSIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Una vez expuestos los referentes teóricos y metodológicos caracterizadores del Análisis Didáctico como instrumento para el tratamiento de la información, en el presente apartado se muestra su operatividad a través de la descripción de su empleo en una investigación reciente realizada en la Universidad de Málaga en torno a la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, 2004). Con objeto de concretar en lo posible los pormenores de dicha aplicación presentamos inicialmente como referencia un resumen de este estudio.

La investigación

Se trata de un trabajo centrado en el estudio de la comprensión del conocimiento matemático a través de su diagnóstico y evaluación. Encuentra su justificación en las cuestiones abiertas generadas por la comprensión, como fenómeno cognitivo y como objeto de estudio y en los problemas didácticos y cognitivos existentes en el campo del Cálculo Aritmético Elemental. El marco general en el que se sitúa el problema de investigación se articula en torno al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático (González y Ortiz, 2000; González, 2001) y a las bases conceptuales adoptadas por el grupo de investigación *Pensamiento Numérico* (Castro, Rico y Romero, 1997). El propósito central del estudio consiste en *sentar las bases*

teóricas y metodológicas de una aproximación integradora y operativa al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático fundada en el diagnóstico y la evaluación de los comportamientos observables en los sujetos. La potencialidad práctica de dicha propuesta se pone de manifiesto con su aplicación al caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales.

En la primera parte de la investigación se extrae la base de resultados y consecuencias necesaria para justificar y sustentar la Aproximación pretendida, que puede entenderse como un estudio teórico fundamental en el que se configura un marco que permite organizar, integrar y ampliar con interpretaciones plausibles los modelos y planteamientos sobre comprensión identificados en Educación Matemática así como un procedimiento metodológico con el que afrontar el problema del diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático desde lo observable. El método reconoce la especificidad del conocimiento matemático en estudio; exige la realización previa de un análisis fenómeno-epistemológico de este conocimiento, a fin de organizar el conjunto situacional que le da sentido; se realiza en términos de capacidad de enfrentar con éxito situaciones pertenecientes a las distintas categorías surgidas del cruce de las estructuras epistemológica y fenomenológica resultantes de los análisis previos y requiere la identificación de aquellos elementos fenómeno-epistemológicos influyentes a nivel cognitivo, que son los responsables, entre otros aspectos, de la caracterización de los sujetos en términos de comprensión.

A partir de aquí, la investigación se dirige a la aplicación del marco metodológico establecido al caso concreto del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. La primera etapa de aplicación consiste en el *estudio fenómeno-epistemológico* del algoritmo, de donde se constituyen las estructuras que permiten establecer una ordenación situacional teórica depurada con tres categorías epistemológicas (Técnica, Analítica y Formal) y dos fenomenológicas (situaciones Exclusivas y No-Exclusivas) y una batería inicial de posibles situaciones idóneas para ser empleadas en tareas de diagnóstico y evaluación de la comprensión.

Esta fase es completada con dos estudios empíricos exploratorios, uno cuantitativo y otro cualitativo, dirigidos a contrastar la extensión a nivel cognitivo de la organización situacional establecida. De ellos se obtienen las referencias precisas, en cuanto a instrumentos, respuestas y comportamientos tipo e interpretaciones en términos de comprensión, para el desarrollo de un nuevo estudio empírico cualitativo, en el que utilizando la entrevista semiestructurada sobre cuestionario escrito, se llega a: caracterizar, de forma detallada, los estados y perfiles de comprensión del algoritmo asociados a la muestra participante de 24 alumnos; aportar nueva información sobre las particularidades de la comprensión del algoritmo a partir de los matices y relaciones identificados y extraer conclusiones genéricas referentes a la comprensión del conocimiento matemático en general.

Con la investigación se pone de manifiesto, entre otros aspectos, cómo los análisis epistemológicos y fenomenológicos asociados a un conocimiento matemático específico proporcionan criterios objetivos para la organización de su conjunto situacional y para la selección de tareas y situaciones con las que valorar la comprensión en los sujetos. Así sucede en el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, donde se llegan a identificar distintas facetas de comprensión, de origen epistemológico (*técnica, analítica y formal*) y fenomenológico (*fundamental y extendida*), que permiten la descripción de diferentes estados y perfiles de comprensión entre los sujetos. Finalmente, el estudio realizado constituye un ejemplo de cómo abordar los problemas relativos a los distintos aspectos vinculados con la comprensión de conocimientos matemáticos específicos, incluso los de naturaleza interna, mediante

la elaboración y aplicación de aproximaciones, como la presentada, de carácter teórico-metodológico centradas en el estudio de lo observable.

La investigación se desarrolla según el esquema de la figura 2, en el que se muestran los estudios realizados en cada etapa del trabajo, las relaciones entre ellos, los principales resultados obtenidos en cada caso y las cuestiones pendientes para las siguientes fases.

Aplicación del Análisis Didáctico

En la investigación contemplada hemos adoptado el Análisis Didáctico como referente metodológico para la selección y el tratamiento de los antecedentes (figura 2).

Fase 1: revisión primaria

En lo referente a la estructura, organización y exposición de la información, se ha seguido un proceso de concreción acorde con la delimitación del área problemática en el que la información tratada llega a organizarse en dos bloques temáticos. El primero de ellos se centra en:

(a) la comprensión en general (*antecedentes relacionados*). Se lleva a cabo una revisión y análisis de referencias no exhaustivo de la información en torno al fenómeno de la comprensión en los campos de la Filosofía, Sociología, Epistemología y Psicología. La información revisada proviene, en su mayoría, de obras de primer nivel, complementada con algunas referencias de segundo nivel. En este caso, las aportaciones presentadas no son exhaustivas ni definitivas sino que constituyen una primera aproximación parcial al conocimiento existente. No obstante, los análisis realizados en este ámbito, aunque limitados, manifiestan un alcance suficiente para los propósitos de la investigación.

(b) la comprensión del conocimiento matemático, su diagnóstico y evaluación (*antecedentes específicos*). Se expone una revisión lo suficientemente representativa como para configurar un panorama preciso del estado actual en el que se encuentra la investigación en este ámbito. La exposición se inicia con unos preliminares sobre la importancia de la comprensión en Educación Matemática, la evolución de los trabajos realizados en los últimos años y una clasificación genérica de los tipos de estudios existentes. A continuación se realiza una exposición detallada de las aproximaciones más relevantes y se incluyen algunas aportaciones centradas en las relaciones de la comprensión del conocimiento matemático con otras nociones vinculadas de similar complejidad. Las cuestiones referentes a la valoración de la comprensión aparecen de forma recurrente en la mayoría de los estudios revisados de forma que en este bloque también se dedica una especial atención al análisis de los procesos de diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, cuyo desarrollo efectivo constituye el núcleo y, a la vez, el principal reto de la investigación realizada.

Como segundo bloque temático, al dirigirse la atención hacia un conocimiento matemático específico como es el algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales, la revisión contempla también algunos problemas de interés propios del campo del cálculo aritmético elemental, estableciéndose una segunda delimitación para el área de estudio. A diferencia de lo realizado en el primer bloque, esta revisión se extiende lo preciso para garantizar un primer acercamiento a la naturaleza de los algoritmos y procedimientos algorítmicos, una descripción de la problemática vigente en Educación Matemática acerca de la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas elementales así como del cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones y un examen de las diferentes posiciones y líneas de actuación propuestas para la enseñanza de la aritmética elemental. Igualmente, se tratan diversos temas relacionados con el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos y el cálculo aritmético. En concreto, se reúne, se organiza y sintetiza parte de

la información existente sobre razonamiento y pensamiento algorítmico, sobre aportaciones recientes al cálculo aritmético desde la perspectiva del estudio de errores, sobre aritmética cognitiva, tareas y situaciones matemáticas y sobre los factores y condicionantes que intervienen en el aprendizaje del cálculo aritmético elemental, entre otros aspectos.

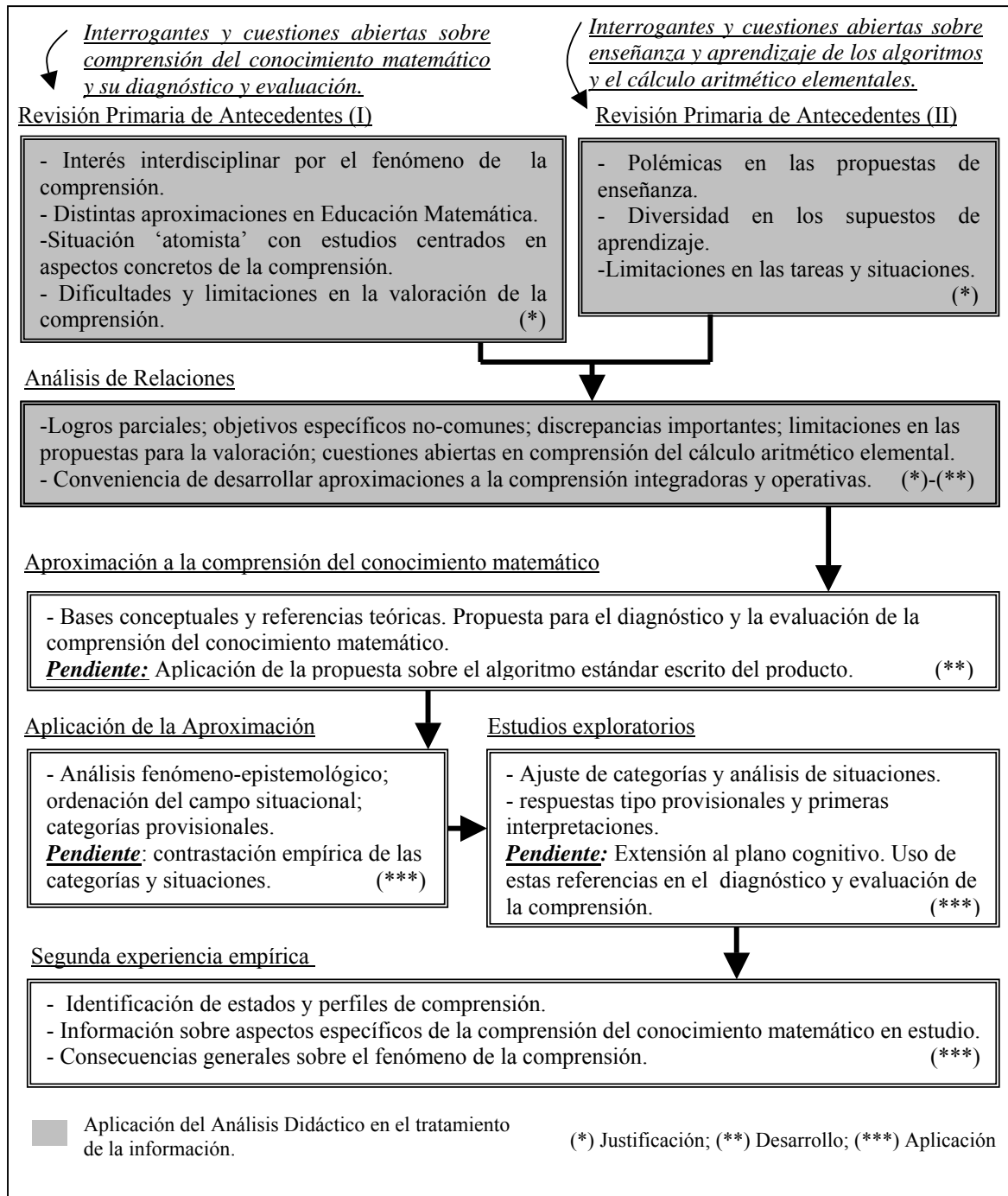


Figura 2. Esquema-resumen del proceso seguido en la investigación

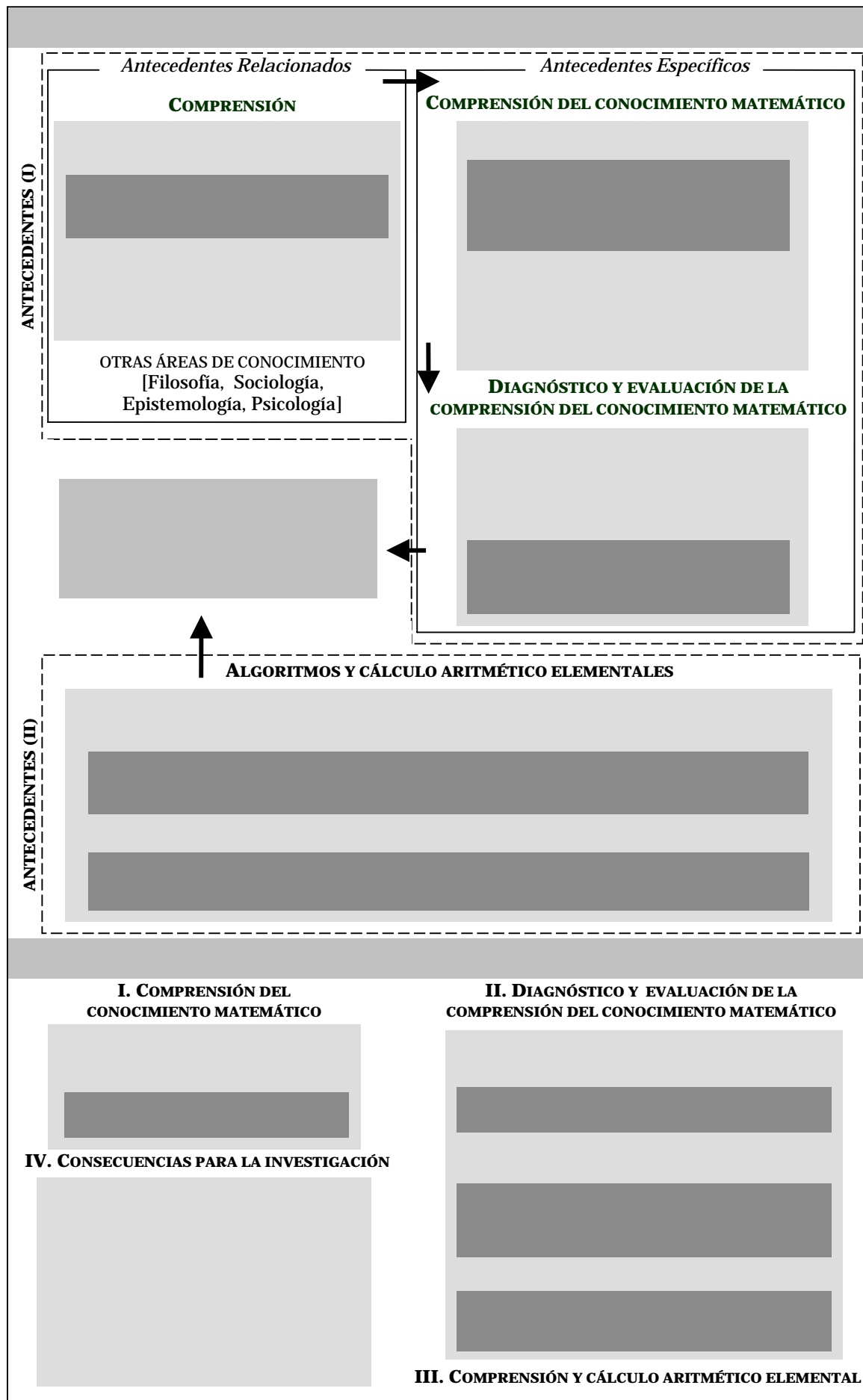


Figura 3. Estructura general de antecedentes

Los contenidos analizados se distribuyen según la estructura esquemática de la figura 3 (primera fase), que refleja, el proceso de concreción seguido en el estudio. Tras esta fase se alcanza una síntesis estructurada y comentada de la información puntual recopilada en torno a los aspectos más relevantes del área problemática.

Fase 2: análisis de relaciones

A continuación se procede con la revisión crítica de la información recopilada y el estudio de las relaciones más destacadas entre los distintos campos revisados con objeto de extraer conclusiones operativas y prioridades para la investigación. De este modo, se hacen explícitos los principales resultados obtenidos del cruce de planteamientos entre autores y de la propia reflexión crítica realizada sobre sus principales supuestos.

En consecuencia, la revisión primaria de información se emplea en esta segunda fase en función de su utilidad para la reflexión en torno a los temas centrales de la investigación, como son los relacionados con la complejidad del fenómeno de la comprensión, las características de los enfoques, aproximaciones y modelos sobre comprensión en Educación Matemática, el diagnóstico y evaluación de la comprensión, la influencia determinante del conocimiento matemático o la comprensión y su valoración en el ámbito específico de los algoritmos y el cálculo aritmético elementales, entre otros (figura 3, segunda fase). El resto de la información recogida, sobre la que no se realiza una discusión abierta, resulta secundaria para los objetivos de la investigación, si bien sirve para contextualizar y completar el ámbito de estudio en el que nos situamos.

Por otra parte, en la investigación se consideró necesario realizar esfuerzos por establecer una base de conocimientos referencial y contrastada en torno a la comprensión del conocimiento matemático con objeto de evitar cualquier posición escéptica en lo que concierne a la posibilidad de alcanzar algún entendimiento sobre dicho fenómeno. En esta cuestión en particular, el Análisis Didáctico dio muestras de resultar especialmente eficaz como método para identificar aquellos nuevos conocimientos incorporables a esa base consensuada de conocimientos además de para presentar y caracterizar nuevas cuestiones problemáticas susceptibles de estudio.

A modo de ejemplo, presentamos algunos de los resultados de distinto tipo obtenidos tras la aplicación del Análisis Didáctico en el contexto de la comprensión del conocimiento matemático. Sus diferencias pueden apreciarse con facilidad por los términos en los que se enuncian, quedando igualmente patente la articulación existente entre ellos:

- Resultado primario referente a los enfoques elaborados en Educación Matemática:

[RP] En Educación Matemática se identifican múltiples aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático, como la posición representacionalista (Hiebert y Carpenter, 1992; Davis, 1992; Castro et al., 1997; Romero, 2000), la aproximación histórico-empírica de Sierpinska (1990, 1994), la teoría del crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren (Pirie y Kieren, 1989, 1994; Kieren, Pirie y Gordon, 1999), los modelos de comprensión, de categorías y cognitivos (Nakahara, 1994; English y Halford, 1995; Ainley y Lowe, 1999) o los trabajos desarrollados con fines valorativos (Duffin y Simpson, 1997; Godino, 2000, 2002) o curriculares (Hiebert et al., 1997; Fennema y Romberg, 1999).

- Resultado secundario derivado del análisis de relaciones entre las distintas aproximaciones identificadas:

[RS] En la investigación sobre comprensión del conocimiento matemático se suelen adoptar perspectivas diferentes, abordar cuestiones parciales y plantear objetivos no comunes a corto plazo. Los trabajos más recientes podrían situarse en alguno de los siguientes enfoques genéricos:

(a) Enfoque directo (“principios” de la comprensión), donde se contempla la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva amplia y profunda, centrándose el interés en el estudio de aspectos como su naturaleza, funcionamiento, evolución o valoración.

(b) Enfoque indirecto (“consecuencias” de la comprensión), en el que se sitúan aquellos trabajos preocupados por el desarrollo de la comprensión matemática y por la gestión externa de los efectos que produce.

En términos generales, podría afirmarse que el panorama actual sobre la comprensión en Didáctica de la Matemática muestra un carácter atomista, con un bajo nivel de cohesión entre los estudios del primer enfoque, un leve predominio de la aproximación representacionista sobre el resto de orientaciones y una limitada articulación entre los estudios posicionados en los enfoques directo e indirecto.

- Consecuencias con repercusiones directas para la investigación propia:

[C₁] Los procesos de comprensión se pueden estudiar desde puntos de vista diferentes, aunque las diferencias que surgen entre las distintas aproximaciones no implican necesariamente que algunas de ellas deban ser falsas. Los desacuerdos puntuales los entendemos más bien como necesarios para ir progresando en la línea de lograr un mayor entendimiento, el mayor posible, sobre el fenómeno de la comprensión.

Ahora bien, al mismo tiempo:

[C₂] Somos partidarios de realizar esfuerzos en busca de teorías unificadoras que reúnan, vertebren y articulen los distintos planteamientos existentes en torno a la comprensión del conocimiento matemático. De hecho, admitimos tal posibilidad, de modo que apostamos por aproximaciones integradoras a la comprensión en matemáticas.

El Análisis Didáctico como método para el estudio del conocimiento matemático

El procedimiento metodológico derivado de la Aproximación a la comprensión desarrollada en el estudio tomado como ejemplo aborda el problema de la determinación y selección de situaciones adecuadas para ser empleadas en labores de diagnóstico y evaluación de la comprensión de conocimientos matemáticos particulares. Para llevar a cabo esta labor se ha contado de nuevo con el apoyo del Análisis Didáctico, orientado en esta ocasión al estudio de la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático:

- De una parte, interesa analizar aquellos conocimientos que lo conforman o sustentan dado que su comprensión depende en gran medida de ellos. Además, conviene relacionar el conocimiento matemático en estudio con aquellos otros más próximos, en

cuanto a su epistemología se refiere. En definitiva, como paso previo es necesario estudiar la naturaleza del conocimiento matemático seleccionado.

- De otra, también resulta esencial considerar la relación del conocimiento matemático con los fenómenos y situaciones que lo hacen significativo. Para ello, es preciso analizar previamente cuáles son estas situaciones y fundamentar todos los estudios de esta clase en el análisis fenomenológico² del conocimiento matemático (Puig, 1997).

La aportación del Análisis Didáctico en la configuración del método de valoración propuesto se concreta del siguiente modo:

Primera fase

Se procede con el *análisis de la información disponible* en torno al conocimiento matemático, para lo que se realiza una revisión de una muestra representativa de libros de texto de matemáticas, una consulta específica de antecedentes de investigación centrada exclusivamente en aquellos aspectos fenómeno-epistemológicos relacionados con el conocimiento matemático en estudio y una revisión de obras de matemáticas y de formación didáctica donde esté presente dicho conocimiento.

De este primer acercamiento, se extrae como resultados primarios (a) una batería inicial de situaciones y (b) unos primeros elementos caracterizadores de la epistemología y fenomenología del conocimiento.

Segunda fase

A partir de la reflexión realizada sobre el material recopilado en la fase anterior se lleva a cabo un primer intento de ordenación del conjunto situacional asociado al conocimiento, con una propuesta inicial de clasificación que es puesta a prueba a través de una consulta a expertos en Educación Matemática. De la consulta interesa considerar, sobre todo, las sugerencias de modificación y las posibilidades de ampliación tanto del campo de situaciones como de las propias categorías.

A partir de aquí, el método prosigue con la caracterización de las estructuras epistemológica y fenomenológica asociadas al conocimiento matemático a partir de los resultados obtenidos en las etapas previas desarrolladas con la mediación del Análisis Didáctico. En Gallardo y González (2006) puede encontrarse una caracterización detallada de cada una de las categorías situacionales establecidas así como algunos resultados sobre la comprensión del algoritmo expuestos a través de ejemplos de situaciones resueltas por los alumnos.

FRONTERAS DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En el transcurso de la aplicación del Análisis Didáctico surgen diversas limitaciones y dificultades que generan cuestiones específicas y dejan abiertas posibles vías de continuación y mejora del método para futuros estudios. Resumimos a continuación las que nos parecen más significativas.

1. El control sobre las fuentes y tipos de información más relevantes plantea problemas de distinta índole. Como ejemplo, el acceso efectivo a la documentación a texto completo o el carácter versátil de los formatos empleados en la difusión del conocimiento son algunas de las dificultades destacables que influyen directamente sobre los resultados proporcionados por el método. Estas cuestiones, a las que no son ajenos otros procedimientos de revisión de antecedentes, fomentan la discusión en torno a cuáles son las posibilidades, y dónde habrían de establecerse los límites exigibles para

la investigación, de adquisición efectiva de información y de representatividad del material bibliográfico recopilado.

2. En este orden de reflexión, la información primaria proporcionada por el Análisis Didáctico, al igual que por cualquier otro método de revisión documental, debe considerarse necesariamente incompleta y provisional puesto que siempre cabe la posibilidad de una exploración de mayor alcance que integre los trabajos más recientes y contemple nueva información proveniente de otros campos diferentes a los considerados. Esta circunstancia genera cuestiones abiertas sobre la suficiencia de la revisión realizada y la justificación de su extensión en base a los propósitos de la investigación. No obstante, a pesar de tal limitación, entendemos que la revisión primaria sugerida por el Análisis Didáctico, dado que favorece la saturación³ en la información obtenida durante el proceso de recopilación, garantiza que las aportaciones sean representativas del conocimiento existente o al menos manifiesten un alcance considerable apto para los objetivos de la investigación a realizar.

3. El Análisis Didáctico aspira a alcanzar una articulación sólida entre resultados primarios, resultados secundarios y consecuencias, lo que ha de entenderse, en lo que a especificación se refiere, como uno de los avances más significativos respecto a otros métodos de análisis de antecedentes. Pero al mismo tiempo ha de reconocerse que la red de relaciones entre tipos de resultados puede llegar a ser compleja y difícil de establecer si el campo de estudio es extenso y la profundidad pretendida en el análisis es elevada. Ante tal dificultad consideramos que son los propios propósitos de la investigación los que proporcionan en este caso las referencias precisas para delimitar las fronteras de la reflexión característica de la segunda fase del Análisis Didáctico.

4. Respecto al uso del método como procedimiento para la identificación y ordenación de situaciones vinculadas a conocimientos matemáticos concretos, debemos aceptar, por una parte, el hecho de que es imposible mostrar la totalidad de situaciones en las que tiene sentido el empleo de un conocimiento matemático debido a su complejidad. Por otra parte, aunque admitamos como Puig (1998) que no es deseable en la investigación elaborar caracterizaciones exhaustivas y minuciosas para los conjuntos situacionales, sí recomendamos, con vistas a identificar en la práctica los límites de la aplicabilidad de los análisis fenómeno-epistemológicos, futuras reflexiones dirigidas a establecer unas pautas procedimentales precisas con las que poder desarrollar análisis certeros de forma sistemática con independencia de la complejidad del conocimiento matemático considerado.

5. El Análisis Didáctico viene siendo empleado en el seno de la SEIEM en contextos distintos y con sentidos y propósitos diferentes. Como ejemplo, cabe destacar su uso en el ámbito de la formación de profesores como instrumento conceptual y metodológico para la planificación curricular y la organización a nivel local de la enseñanza de las matemáticas escolares (Gómez, 2002, 2006) y también bajo el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática en el terreno del análisis de tareas matemáticas particulares y de las actividades generadas en torno a ellas durante su resolución (Godino et al., 2003). En el empleo del Análisis Didáctico en estas perspectivas, al igual que en la variante descrita en este trabajo para el estudio del conocimiento matemático, puede reconocerse con facilidad un interés común por profundizar en la complejidad del conocimiento matemático y por establecer dimensiones, categorías o componentes con las que controlar dicha complejidad de forma efectiva y operativa. Al mismo tiempo, son evidentes también las diferencias entre las distintas configuraciones reseñadas, mostrándose en aspectos tan concretos como las dimensiones o componentes constitutivos del método en cada caso, los fines perseguidos en su aplicación o el agente propuesto para su ejecución efectiva. En nuestra opinión, esta situación reclama el

desarrollo de nuevas reflexiones y actuaciones integradoras orientadas fundamentalmente a delimitar con mayor precisión las divergencias actuales y vincular en lo posible las distintas perspectivas existentes.

COMENTARIOS FINALES

La metodología de investigación en Educación Matemática es considerada uno de los temas prioritarios de discusión actual más determinantes para el desarrollo del área en las próximas décadas (English, 2002). Como contribución a esta línea de reflexión, en el presente trabajo se han expuesto los aspectos generales que configuran al Análisis Didáctico como procedimiento metodológico para la investigación en Educación Matemática, ilustrándose su operatividad mediante su aplicación en un estudio concreto desarrollado en el ámbito de la comprensión del conocimiento matemático.

A nuestro entender, la potencialidad del método radica esencialmente en su capacidad para garantizar un nivel elevado de especificación y concreción para la fase de revisión de antecedentes, manifestando al mismo tiempo una alta disponibilidad para ser empleado en una amplia variedad de investigaciones. De igual forma, por su configuración entendemos que el Análisis Didáctico proporciona concreciones precisas que pueden resultar de interés en ámbitos tan relevantes como los relacionados con la calidad de la investigación (Simon, 2004) o la formación de investigadores en Educación Matemática.

NOTAS

1. En general, la aproximación a estas otras áreas con instrumentos metodológicos como el Análisis Didáctico nos permite apreciar de una mejor forma la contribución que el conocimiento generado en ellas realiza sobre los problemas de investigación específicos tratados en Educación Matemática. Tanto es así que parte de los resultados proporcionados por el Análisis Didáctico podrían contemplarse como indicadores de la influencia que otros campos de investigación ejerce sobre las cuestiones particulares estudiadas en Educación Matemática.
2. Empleado aquí con un propósito diferente al de Freudenthal (1983) o Assude (1996); el objetivo principal no es la organización de la enseñanza de las matemáticas, sino el diagnóstico y la evaluación de la comprensión de un conocimiento matemático.
3. Nos referimos al fenómeno que acontece cuando la fase de revisión primaria está avanzada y la incorporación de nuevas referencias y contenidos no resulta significativa para el conjunto de conocimientos previamente recopilados y estructurados, bien porque aportan información marginal o porque ya aparecen reflejados en él. Esta saturación puede contemplarse como un indicador de primer orden para constatar la amplitud y profundidad de la revisión realizada.

REFERENCIAS

- Assude, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique: une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16, 1, 47-70.
- Boaler, J., Ball, D. L. y Even, R. (2003). Preparing Mathematics Education Researchers for Disciplined Inquiry: Learning from, in, and for Practice. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 491-521). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 3, 361-371.
- English, L. D. (2002). Priority Themes and Issues in International Research in Mathematics Education. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematicss Education* (pp. 3-15). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia ordinaria en niños de tres a seis años*. Tesis Doctoral. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.
- Gallardo, J. (2006). Aportes a la investigación en Educación Matemática en contextos latinoamericanos desfavorables: el acceso a la información a texto completo. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (manuscrito aceptado para su publicación).
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26, 2, 10-15.
- Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Pareja, J. L. y Recio, A. M. (2003). *Análisis Didáctico de Recursos Interactivos para la Enseñanza de la Estadística en la Escuela*. IASE Satellite Conference on Statistics Education and the Internet. Berlin, Germany, 11-12 August.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7, 3, 251-293.
- Gómez, P. (2006). *Análisis Didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Ponencia invitada en el X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Huesca, España, 7-9 septiembre.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.
- González, J. L. (1998a). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-256). Osnabrück, Germany: ERME.

- González, J. L. (1998b). Clasificación de problemas aditivos por sus estructuras numérica y semántica global. En L. Rico y M. Sierra (Eds.) *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 77-105). Granada: SEIEM-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- González, J. L. (1998c). *Números naturales relativos*. Granada: Comares.
- González, J. L. (1999). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En T. Ortega (Ed.) *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 14-30). Valladolid: Universidad de Valladolid.
- González, J. L. (2001). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático*. Memoria Final del Proyecto de Investigación PB97-1066, subvencionado por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología durante el trienio 1998-2001 (paper).
- González, J. L. y Ortiz, A. (2000). La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: estructura y fundamentos. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 131-146). Huelva: Universidad de Huelva.
- Gutiérrez, A y Maz, A. (2001). Cimentando un proyecto de investigación: la revisión de literatura. En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 149-164). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Hitt, F. (1999). Tesis de Doctorado en Matemática Educativa en México. En K. Hart y F. Hitt (Eds.) *Dirección de Tesis de Doctorado en Educación Matemática. Una perspectiva internacional* (pp. 45- 60). México: Cinvestav-IPN.
- Larrubia, J. J. (2006). *Modelo didáctico inclusivo para atender a la diversidad sordos oyentes en el aula ordinaria de Matemáticas. El caso de la resolución de ecuaciones de segundo grado en la Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis Doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.
- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación Primaria*. Tesis Doctoral inédita. Granada: Universidad de Granada.
- Padilla, Y. C. (2003). *Integrales de línea con Derive. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación*. Tesis Doctoral. Málaga: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Málaga.
- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.
- Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.). *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 106-118). Granada: SEIEM-Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Granada: Universidad de Granada.

- Ruiz, F., Castro, E. y Godino, J. D. (2001). Recursos en Internet para la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 201-212). Huelva: Universidad de Huelva.
- Simon, M. A. (2004). Raising Issues of Quality in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 3, 157-163.