Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014

José Luis González
José Antonio Fernández-Plaza
Elena Castro-Rodríguez
María Teresa Sánchez-Compaña
Catalina Fernández
José Luis Lupiáñez
Luis Puig
(Eds.)

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS, DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES. FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

SEIEM

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

González, J. L., Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Sánchez-Compaña, M. T., Fernández, C., Lupiáñez, J. L., y Puig, L. (Eds.) (2014). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014.* Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Editores:

José Luis González

José Antonio Fernández-Plaza

Elena Castro-Rodríguez

María Teresa Sánchez-Compaña

Catalina Fernández

José Luis Lupiáñez

Luis Puig

Edita:

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga

Málaga, 2014

ISBN: 978-84-617-1329-5

ÍNDICE

UNA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN COLABORATIVA PARA EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN LOS PRIMEROS AÑOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

An experience of collaborative research-action for the development of number sense in the first years of mathematics learning

Rafael Bracho-López, Natividad Adamuz-Povedano, Noelia Jiménez-Fanjul, Mª del Carmen Gallego-Espejo

Universidad de Córdoba

Resumen

Se presenta una experiencia de investigación-acción colaborativa en fase de desarrollo que parte de la preocupación del profesorado de un colegio de Educación Primaria por mejorar su metodología en lo relativo al desarrollo del pensamiento numérico. El centro, que está ubicado en un barrio con alto riesgo de exclusión social, inició su transformación en Comunidad de Aprendizaje hace tres años. A grandes rasgos, la apuesta metodológica se basa en el aprendizaje significativo del Sistema de Numeración Decimal de la mano de unos materiales manipulativos concretos y la utilización de los denominados algoritmos Abiertos Basados en Números (ABN) para el cálculo. El proyecto, en el que participan los maestros y maestras del centro, profesorado de Didáctica de las Matemáticas, asesores de formación y alumnado universitario, pone en acción iniciativas de formación del profesorado, innovación en el aula e investigación educativa.

Palabras clave: *Sentido numérico, formación del profesorado, Educación Primaria, operaciones aritméticas, algoritmos ABN.*

Abstract

In this paper is presented an experience of collaborative action research in development that were born from concerns school teachers of Primary Education to improve their methodology related to the development of numerical thinking. This school, which is located in a neighborhood with high risk of social exclusion, it begins its transformation into Learning Community three years ago. This methodological approach is based on meaningful learning decimal Number system using some specific manipulative materials and using an algorithm for calculation called Open Based on Numbers (ABN). In this project take part teachers from the school and from the Mathematic Education Department in the University of Cordoba, training consultants and students of Primary Education teacher training. With the project are put in action initiatives for teacher training, innovation in the school and educational research.

Keywords: *Number sense, pre-service teacher education, Primary Education, arithmetic operations, algorithm ABN.*

Bracho-López, R., Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N., y Gallego-Espejo, M. C. (2014). Una experiencia de investigación-acción colaborativa para el desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 1-9). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Una de las principales preocupaciones de las sociedades desarrolladas es la eficiencia de sus sistemas educativos. No en vano, un modelo educativo que dote a las personas de los conocimientos, habilidades y valores necesarios para tomar un papel activo en el seno de la sociedad globalizada e intercultural, característica del siglo XXI, se convierte en una garantía para la igualdad de oportunidades y para el desarrollo democrático, científico y económico.

Las administraciones educativas y los centros educativos, desde sus respectivas responsabilidades, son sin duda agentes claves en la mejora de los modelos educativos. Así son frecuentes en la actualidad las investigaciones prioritarias en el ámbito educativo y los programas de mejora que se vienen implementando, en los que prima la importancia de conseguir modelos educativos que favorezcan el éxito escolar y ayuden a la cohesión social. Un ejemplo que ilustra esta tendencia en Andalucía es la cobertura ofrecida por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía a las Comunidades de Aprendizaje, con la implantación de la Red Andaluza de Comunidades de Aprendizaje (Junta de Andalucía, 2012).

Desde la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba, un grupo de profesores y profesoras vinculadas a los departamentos de Educación y de Matemáticas, convencidos del importante papel que desempeña la Universidad en este proceso como vehículo del saber científico y como responsable de la formación inicial del profesorado, creó la denominada Aula de Mejora Educativa, con los siguientes objetivos:

- Crear un espacio de encuentro y estudio para el desarrollo y difusión de proyectos de Comunidades de Aprendizaje.
- Establecer relaciones con los Centros del Profesorado y los centros educativos para la puesta en marcha de proyectos de Comunidades de Aprendizaje.
- Responder a las demandas de los centros educativos para el asesoramiento y formación en la implementación de programas de mejora escolar.

En este marco y concretamente en relación con el último de estos objetivos, como consecuencia de la preocupación del profesorado por ofrecer a sus pequeños estudiantes una formación matemática eficaz e integradora, surge en el curso 2013-2014 un proyecto de intervención didáctica en el área de Matemática en un colegio público de Córdoba ubicado en un barrio de nivel socio-económico bajo, donde vive una población con un alto riesgo de exclusión social procedente de distintas culturas. A grandes rasgos, la finalidad de dicho proyecto es potenciar el desarrollo del sentido numérico de manera eficaz e integradora a través de una metodología basada en dos pilares fundamentales:

- El aprendizaje significativo del sistema de numeración decimal (en adelante SND) y el conocimiento y aplicación de las propiedades de los números y de las operaciones.
- El abordaje de las operaciones aritméticas básicas a través de los denominados Algoritmos Abiertos Basados en Números (en adelante algoritmos ABN).

En el presente trabajo se describe de forma sucinta el proyecto, centrándonos en el diseño de la primera fase de evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje en el proceso de innovación educativa

Figura 1. Guía y algunos de los recursos didácticos que se emplearán en el proceso

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Como apuntan Escudero y Martínez (2011) la cuestión fundamental a tratar sobre la inclusión sería ver qué políticas, sistemas escolares, centros, currículo, enseñanza, docentes y otros profesionales se precisan, con qué convicciones, capacidades y compromisos, para que no haya nadie que quede excluido. Sería necesario revisar el currículo y el funcionamiento de los centros, pero para llegar a cambios mayores se necesita partir de cambios a nivel más bajo, en el aula, y este es el contexto de nuestra investigación. Podemos preguntarnos qué implicaciones tiene esta diversidad en la enseñanza de las matemáticas, puesto que nuestro objetivo es el aprendizaje de las matemáticas como herramienta fundamental para seguir avanzando en otros aprendizajes necesarios para formar ciudadanía activa en nuestra sociedad.

Desde este punto de vista es necesario un cambio en el tratamiento de las matemáticas en la educación primaria. En los primeros años de aprendizaje, en los que nos centramos en este trabajo, este cambio debe sustentarse en dos ejes, por un lado en el uso de materiales manipulativos, ya que en ese momento la experiencia física desempeña un papel crucial en el desarrollo global y especialmente en el desarrollo lógico-matemático, y por otro lado, en la forma de abordar las reglas de cálculo, puesto que los algoritmos tradicionales son insensibles a objetivos particulares o trayectorias personalizadas.

Tradicionalmente, la asignatura de matemáticas se ha concebido en la escuela como una asignatura asequible solo para el alumnado aventajado, en algunos casos hasta se ha utilizado como medida de inteligencia de los estudiantes (Orrantia, 2006); sin embargo, las matemáticas son imprescindibles para la vida y necesarias para el desarrollo intelectual e integral del alumnado. Hay personas que no han asistido a la escuela nunca pero han sido capaces de desarrollar herramientas de cálculo necesarias para su completo desarrollo en la vida, aunque en la mayoría de estos casos no hayan sido aprendizajes intencionados, es decir, han adquirido unos conocimientos matemáticos necesarios para desempeñar su actividad profesional aunque realmente no son conscientes de que “saben matemáticas”. Por tanto, si bien la persona nace con una dotación matemática, el desarrollo de la competencia matemática dependerá en buena parte de esos aprendizajes informales de “la calle”, pero sin duda resulta fundamental que ese conocimiento matemático se vea complementado con la aplicación de enfoques metodológicos en las escuelas (Martínez, 2010).

La competencia matemática no es algo inherente a la persona sino que se va adquiriendo en función de las capacidades desarrolladas desde la infancia, por eso es tan importante que se realicen estimulaciones matemáticas desde edades tempranas (Castro, 2006), utilizando herramientas y materiales acordes a la edad cognitiva del alumnado, para su correcto desarrollo, pero sobre todo para despertar la curiosidad e interés que todos los niños y niñas tienen por descubrir todo lo que les rodea. Estas primeras experiencias de acercamiento de los niños y niñas al mundo de las matemáticas pueden resultar determinantes puesto que suelen ir asociadas con aspectos emocionales que generan actitudes tanto positivas como negativas hacia las matemáticas, en el contexto escolar pero también a nivel social y personal (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul, y García-Pérez, 2011).

Riviere (1990), sostiene que "muchos-demasiados estudiantes encuentran grandes dificultades para alcanzar los objetivos educativos establecidos en los currícula, y estas dificultades se extreman en un grupo más reducido de alumnos, para los que las matemáticas se convierten en una verdadera pesadilla". En general, el profesorado siente gran preocupación por las dificultades que se le plantean a sus alumnos y alumnas en el aprendizaje matemático, pero por ejemplo, en lo relativo al uso de las operaciones aritméticas básicas, la realidad es que la mayoría de estos niños y niñas no tienen ningún problema cuando van a comprar sus caramelos preferidos, saben perfectamente para cuántos caramelos tienen con el dinero que llevan, al igual que en los juegos del patio del colegio pueden llevar la cuenta de las canicas que ganan o pierden. Esto debería sugerirnos que el problema está en la forma en la que enseñamos a nuestro alumnado a hacer esas cuentas en la escuela.

Los niños y niñas pasan una cantidad ingente de horas en la escuela (y en muchos casos en la casa también) practicando unos procedimientos mecánicos de los que no entienden el porqué y el para qué. Ginsburg y Baroody (2007) nos argumentan de un modo muy convincente porqué tiene más sentido dedicar nuestro tiempo en la escuela a enseñar a los niños y niñas a entender las matemáticas más que a aprender procedimientos mecánicos:

- El aprendizaje significativo facilita las tareas de memorización de conceptos, definiciones, procedimientos, fórmulas, etc., ya que se reduce una gran cantidad de práctica para dominarlos.
- Es más fácil recordar las habilidades matemáticas que se han comprendido que las que se han aprendido de memoria.
- Si se olvida parte de la habilidad o contenido, es más fácil reconstruir el conocimiento que se adquirió de manera significativa.
- Es más probable que los alumnos y alumnas apliquen correctamente las habilidades adquiridas de forma significativa.
- El enfoque significativo del aprendizaje facilita la adquisición de nuevos conceptos o habilidades y la resolución de nuevos problemas que se puedan plantear.
- Los niños y niñas se sienten menos inhibidos y más comprometidos con su aprendizaje cuando este tiene sentido para ellos.

Los algoritmos que hoy en día se enseñan en la escuela son producto histórico de una tecnología específica: el lápiz y el papel o la tiza y la pizarra. Cuando se calculaba sobre arena o ceniza, los cálculos eran distintos. Ya en los años ochenta, cuando empezaron a irrumpir las calculadoras en la escuela, se planteaba el debate sobre la pertinencia de la enseñanza de los algoritmos de cálculo tradicionales. Según Maier (1987), el uso de las cuatro reglas de cálculo en la escuela es solo una cuestión de supervivencia escolar, es decir, se aprenden para tener éxito en la escuela.

En la enseñanza tradicional los niños y niñas se enfrentan a los algoritmos a muy temprana edad. En España, con seis años aprenden sus primeras sumas usando el algoritmo y con ocho años afrontan las primeras multiplicaciones. Muchas de las razones en contra del empleo de las cuentas se pueden relacionar con este hecho. Los algoritmos son procedimientos para optimizar tiempo y esfuerzos. Los niños y niñas no conocen los conceptos subyacentes por lo que pierden el sentido de lo que están haciendo (Martínez, 2000). Esta "no comprensión" conlleva en multitud de casos efectos negativos, como la adquisición de una concepción errónea del funcionamiento de las matemáticas o el menosprecio de las capacidades matemáticas propias (Gómez, 1998).

Según Martínez (2010) en la escuela no se enseña a calcular, sino que se enseñan cuentas, es decir, no se desarrollan destrezas innatas de cálculo, sino que se aprenden instrucciones de memoria para hacer cálculos. Además, no se trabaja con números sino con cifras, porque la dinámica de los algoritmos obliga a desgajar todas las cifras que contiene el número y a todas se le aplica el mismo tratamiento, sin que importe si son unidades, decenas o centenas. Esto conlleva un gran problema a la hora de aplicar estos aprendizajes: los niños y niñas son capaces de hacer complicadas multiplicaciones pero no son capaces de resolver problemas de sumas. Esto es totalmente lógico si se reconoce que el aprendizaje de los algoritmos no implica que los niños y niñas entiendan o interioricen los conceptos de suma, resta, multiplicación o división.

Creemos, por tanto, que está muy justificada la necesidad de un cambio metodológico en pro del desarrollo del sentido numérico de los niños y niñas. De hecho, cada vez más el profesorado y los centros buscan alternativas a estos algoritmos tradicionales, y se orientan hacia metodologías que comparten características comunes (Bracho-López, 2013):

- Se basan en un conocimiento profundo del sistema de numeración decimal.
- En todo momento se trabaja con números y no con cifras.
- Se utilizan constantemente las propiedades de las operaciones.
- Los cálculos se realizan de forma variada por lo que permiten adaptarse a la diversidad del alumnado.
- Los cálculos toman su sentido a partir de situaciones problemáticas.

De entre todas las opciones que hemos encontrado nos hemos decantado por los algoritmos abiertos basados en números (ABN), creados por Jaime Martínez Montero (Martínez, 2008). El nombre de los algoritmos describe las principales características de los mismos:

- A de Abiertos, porque no hay una forma única de realizarlos, cada alumno o alumna puede trabajar de forma distinta, en función de su desarrollo, dominio de cálculo, estrategias de cálculo, o simple capricho. Esta característica se contrapone a los algoritmos tradicionales que son cerrados, en el sentido que hay solo una forma de hacerlos.
- BN de Basados en Números, en contraposición a los algoritmos tradicionales que están basados en cifras, el algoritmo ABN siempre trabaja con números, que podrán ser más grandes o más pequeños, pero siempre combinan números completos. Esta característica hace que sea más fácil el enlace con los procesos intuitivos naturales del aprendiz, desarrollando un enfoque dinámico del sentido numérico.

Los algoritmos ABN son transparentes ya que no ocultan cálculos ni procesos intermedios: en cada momento, se tiene conciencia y conocimiento de lo que se está haciendo. Esto no sucede con los algoritmos tradicionales de la multiplicación y la división ya que en ellos, no se tiene ninguna información hasta que no se completa el proceso.

Este método procede de las actuaciones llevadas a cabo en Holanda con el fin de renovar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y del cálculo en particular, persiguiendo el desarrollo del razonamiento matemático a través de instrumentos manipulativos y estimulantes para el alumnado con el propósito de aumentar la motivación y la atención.

OBJETIVO E HIPÓTESIS DE TRABAJO

El objetivo de la investigación es analizar el desarrollo del sentido numérico tras la utilización de la metodología basada en los denominados algoritmos ABN en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria procedentes de entornos desfavorecidos, prestando especial atención a los resultados obtenidos para los diferentes ritmos de aprendizaje.

A partir de este objetivo, la hipótesis de trabajo es que la utilización de la metodología basada en el uso de algoritmos ABN en los primeros años de aprendizaje matemático mejora significativamente el desarrollo del sentido numérico en general, adaptándose de manera flexible y satisfactoria a la diversidad del alumnado.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

Organización del grupo de trabajo

Previamente a la puesta en marcha de esta experiencia, el profesorado que suscribe este trabajo, junto a otros compañeros y compañeras del Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Córdoba, maestros y maestras de Educación Primaria y asesores de formación del Centro de profesorado Luisa Revuelta de Córdoba, hemos venido trabajando conjuntamente en la implementación de metodologías dirigidas a potenciar el DSN en la Educación Primaria y en la evaluación de dichos procesos.

Por otro lado, el colegio en el que se está llevando a cabo la experiencia lleva inmerso en un proyecto de Comunidades de Aprendizaje desde el curso 2010-2011, un proceso cuya evaluación en un sentido educativo general viene siendo muy satisfactoria. Sin embargo, últimamente una de las preocupaciones de la comunidad educativa es abordar intervenciones didácticas en las áreas específicas y, en particular en las materias instrumentales, que garanticen la formación integral del alumnado. Para este fin, nos reunimos por primera vez en septiembre de 2013, con la idea de iniciar un proceso de planificación, formación, innovación y evaluación, que afecta a distintos colectivos. Concretamente, participarán en la experiencia 145 alumnos de Educación Primaria, 15 maestros y maestras, tres profesores de Didáctica de las Matemáticas, una doctoranda y dos asesores de formación.

A continuación se expone la planificación temporal hasta la implementación generalizada en el Primer Ciclo (la experiencia continuará hasta la implementación generalizada en todos los niveles) (Tabla 1).

Metodología de la investigación

Nuestra investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas.

Se realizarán análisis de tipo cuantitativo y cualitativo, si bien éstos últimos se aplican a modo de aproximación metodológica orientada a extraer conclusiones con un enfoque formativo y experimental acerca de las percepciones de los agentes implicados y del desarrollo de la personalidad o de las realidades que se observen. Como consecuencia de ello, en el proceso de recolección de datos se combinarán técnicas de tipo cuantitativo apoyadas por las de tipo cualitativo, conformándose una metodología en la que se integran las dos aproximaciones. El análisis cuantitativo se basará en un diseño cuasi-experimental donde realizaremos un estudio descriptivo e inferencial con dos grupos no equivalentes.

La muestra está formada por dos grupos de estudiantes de Educación Primaria de dos colegios de características parecidas y pertenecientes a entornos socioeconómicos similares. Esta muestra ha sido configurada de manera no probabilística y no aleatoria.

El alumnado de uno de los grupos seguirá durante el Primer Ciclo de Educación Primaria la metodología objeto de estudio, mientras que el alumnado del otro colegio no seguirá esta metodología y abordará el tratamiento de las operaciones aritméticas básicas de forma tradicional, por lo que el primer grupo se considerará experimental y el otro grupo de control.

Tabla 1. Planificación general de la experiencia hasta la implementación generalizada de la metodología en el Primer Ciclo de Educación Primaria

	Actividades	Temporalización
Puesta en marcha del proyecto	Constitución definitiva del equipo de trabajo Inmersión en las líneas directrices del proyecto. Consenso y posicionamiento en cuanto a los referentes teóricos y las opciones metodológicas válidas. Elaboración de los prototipos de guías y de recursos didácticos. Planificación del trabajo de formación y de implementación previa.	De septiembre a diciembre de 2013
Formación e implementación iniciales	Sesiones formativas en el uso didáctico de los recursos que van a ser objeto de la investigación. Implementación parcial de la metodología en los grupos de 1º, 2º y 3º. Asesoramiento y acompañamiento del profesorado. Puesta en común - Valoración del primer curso de experiencia	De enero a julio de 2014
Implementación generalizada en el primer ciclo de E. Primaria	Introducción generalizada de la metodología en 1º y 2º de E. Primaria. Formación, asesoramiento y acompañamiento del profesorado Trabajo de investigación: Observaciones de aula y recogida de datos. Realización del postest. Realización de entrevistas semiestructuradas a grupos de alumnos/as y a los tutores/as. Análisis de datos. Puesta en común de resultados, valoraciones. Trabajo de investigación: Elaboración de la memoria de la investigación	De septiembre de 2014 a julio de 2016

La evaluación del aprendizaje se basará en la aplicación del test de competencia matemática básica, desarrollado por Ginsburg y Baroody y adaptado al medio español por Núñez y Lozano (2007). Se trata de un test estandarizado específico de matemáticas y validado a nivel internacional, el cual se aplica de manera individualizada y cuyo objetivo es evaluar el desarrollo del pensamiento matemático temprano y detectar las dificultades de aprendizaje del alumnado, facilitando el diagnóstico y el tratamiento de las mismas. Dicha herramienta se aplicará a ambos grupos en septiembre de 2014 (pretest) y en junio de 2016 (postest).

Se analizará el sentido numérico como variable independiente, y para cuantificar esta variable nos ayudaremos de una serie de variables específicas, como son el índice de competencia matemática (en adelante ICM), la puntuación directa (PD), el percentil, la edad y el curso equivalentes, variable ítem i ($i \in [1,72]$), además de los conocimientos matemáticos formales e informales de cada discente. Como variable independiente tenemos la variable grupo que clasifica al alumnado del estudio en grupo de control y grupo experimental.

El análisis cualitativo se basa en datos que emanan de instrumentos como cuestionarios, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión.

Se llevará a cabo una revisión documental orientada a la observación del reflejo de la experiencia en las programaciones de la materia, en las unidades didácticas y en la programación de aula. Así mismo, se utilizará un cuaderno de notas de campo para recoger las conductas en su contexto, así como las interacciones entre los individuos, con idea de comprender el comportamiento de estos en el proceso. En dicho cuaderno se incluirán también pruebas fotográficas y vídeos para el registro más completo de la información.

RESULTADOS ESPERADOS

Tras el proceso de aplicación en el aula de la metodología objeto de estudio, esperamos constatar sus efectos en la mejora de la competencia matemática general de los niños y niñas, y en particular en lo referente a los aspectos relacionados con la aritmética escolar. Por otro lado, se espera una mejora en los elementos motivacionales de los agentes implicados y los colaterales (alumnado, profesorado, equipos directivos y familias) en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Más concretamente esperamos:

- Ofrecer al profesorado de Primer Ciclo de E. Primaria una variada gama de recursos y materiales didácticos de suma utilidad para el desarrollo del sentido numérico de sus alumnos y alumnas.
- Obtener evidencias científicas del potencial didáctico de la metodología que es objeto de estudio; particularmente en lo relativo al desarrollo integral del sentido numérico de todos los alumnos y alumnas, y en especial de los más necesitados de atención educativa.
- Verificar la mejora significativa en el alumnado participante de la capacidad para dominar reflexivamente las relaciones numéricas.
- Comprobar en el alumnado participante el desarrollo de una fluidez progresiva en el cálculo y en la estimación con los números naturales.
- Observar en los niños y niñas el desarrollo de una comprensión sólida de los conceptos de sistema de numeración y valor posicional.
- Observar un aumento de la motivación e interés del alumnado hacia las Matemáticas, especialmente necesario en el contexto social en el que se encuentra este alumnado.
- Percibir a través de la metodología objeto de estudio una gradual disminución de las dificultades para el aprendizaje de contenidos matemáticos.

Referencias

Bracho-López, R. (2013, Septiembre). *Menos reglas y más sentido: alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la Educación Primaria*. Documento presentado en VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo, Uruguay.

Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., y García-Pérez, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *28*, 41-60.

Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Revista Pensamiento Educativo*, *39*(2), 119-135.

Escudero, J. M., y Martínez, B. (2011). Educación inclusiva y cambio escolar. *Revista Iberoamericana de Educación, 55*, 85-105.

Ginsburg, H., y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: test de competencia matemática básica*. Madrid, España: TEA ediciones.

Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. Madrid, España: Síntesis.

Junta de Andalucía (2012). Orden de 8 de junio de 2012, por la que se regula el procedimiento de inscripción y continuidad de centros reconocidos como «Comunidad de Aprendizaje» y se crea la Red Andaluza «Comunidades de Aprendizaje». *BOJA, 126,* 46-59.

Maier, E. A. (1987). One Point of View: Basic Mathematical Skills or School Survival Skills?, *The Arithmetic Teacher, 35*(1), 2.

Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona, España: CissPraxis.

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matematicas: una nueva práctica*. Madrid, España: Wolters Kluwer.

Martínez, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Madrid, España: Wolters Kluwer.

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, *23*(71), 158-180.

Riviere, A. (1900). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En A. Dins Marchesi, C. Coll y J. Palacios (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación III* (pp. 155-182). Madrid, España: Alianza.

COMPETENCIAS EN LOS DECIMALES PERIÓDICOS

Competences in repeating decimal numbers

Yolanda Beltrán García, Bernardo Gómez Alfonso

Universidad de Valencia

Resumen

El objetivo de este estudio es determinar las dificultades que estudiantes de cuarto de ESO, de Bachillerato y del Máster de Profesor de Educación Secundaria de la especialidad de Matemáticas tienen con la operatoria y el orden, cuando realizan cálculos con números decimales periódicos. El trabajo se sustenta en un estudio de Rittaud y Vivier, del cual se hace una réplica de una parte de su cuestionario que utilizamos para la toma de datos. El análisis de las respuestas de los estudiantes permite identificar errores y carencias en la enseñanza, conducentes a un esquema de clasificación e interpretación de las actuaciones de los estudiantes.

Palabras clave: *Competencia, decimales periódicos, errores*

Abstract

The aim of this study is to determinate the difficulties that students of fourth course in secondary school, high school and teacher´s master of secondary school students have with operation and order when they realize calculations with periodic decimal numbers. The study is based in a previous article of Rittaud and Vivier which is a replica of a part of their test we used for data collection. The analysis of students' answers allows identifying mistakes and deficiencies in education, leading to a classification scheme and interpretation of student performances.

Keywords: *Competences, repeating decimals, mistakes*

INTRODUCCIÓN

Las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance, y varían a medida que el conocimiento de los estudiantes va evolucionando hacia un estatus superior.

La identificación y caracterización de estas concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto, ya que en algunos casos son conocimientos erróneos, y esto constituye un obstáculo para el aprendizaje y la evolución de las concepciones.

Según Socas (2001, p.298), "Los números decimales se han convertido, en estos últimos años, en los protagonistas de todos los cálculos, ordenadores, calculadoras,…, desplazando completamente las fracciones. Sin embargo, su tratamiento en el ámbito escolar, propuestas curriculares en programas oficiales y desarrollos didácticos, no parece estar a la altura de las circunstancias, y no sólo por el interés del cálculo con calculadoras y ordenadores, sino, también, por el papel determinante que pueden jugar en la organización y comprensión de los sistemas numéricos.

La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no lo es, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura decimal y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición

Beltrán, Y., y Gómez, B. (2014). Competencias en los decimales periódicos. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 11-25). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores.”

En relación con los decimales finitos, hay una problemática identificada (Centeno, 1988), o como acabamos de ver en Socas (2011), pero son pocos los trabajos en relación con los números decimales periódicos. Con el fin de aportar conocimiento fundamentado sobre este tema, este trabajo se va a centrar en el tema de los números decimales periódicos. Se quiere indagar en qué de particular se puede decir de los números decimales periódicos, más allá de la problemática de los números decimales.

OBJETIVOS

Los objetivos principales que nos planteamos en este estudio son conocer el modelo de enseñanza vigente en la Comunidad Valenciana, conocer los contenidos sobre los decimales en los libros de texto, determinar y clasificar actuaciones y errores en los estudiantes en relación a la codificación, operatividad y orden de números decimales periódicos, a través de un experimento basado en un cuestionario, y identificar los efectos de la enseñanza.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA

El currículum DOCV (2007) sitúa los decimales en los cuatro cursos de la ESO y los contenidos aparecen en el Bloque 2: Números.

En primero de ESO se trabaja la comparación y las operaciones elementales con números decimales finitos. En segundo se utilizan los decimales para introducir los porcentajes. En tercero se trabaja la relación entre las fracciones y los decimales (exactos y periódicos) mediante técnicas de transformación. Y, finalmente, en cuarto se amplía el concepto y se introducen los decimales infinitos no periódicos.

En cuanto al tratamiento de los decimales en los libros de texto, dado que el currículum oficial es común para todos, nos limitamos a resaltar los contenidos de una sola editorial, Anaya, ya que es con la que trabajaban los alumnos del centro donde se tomó la muestra para este estudio.

En el libro de 3º de ESO (Colera, Gaztelu, y Oliveira, 2010a), para introducir el tema, aparece una breve explicación del recorrido de los números decimales a lo largo de la historia. Seguidamente, se señala la utilidad de los números decimales, “sirven para designar medidas”, y cómo podemos representarlos, “sobre la recta numérica, de tal modo que con ellos podemos aproximarnos tanto como queramos a cualquiera de sus puntos”, resumiendo todo en la siguiente frase: “La expresión decimal de los números permite valorarlos, compararlo y operar con ellos de forma muy cómoda y eficaz”. Y a continuación, se presentan los tipos de números decimales.

El siguiente punto que aparece en el libro es el paso de fracción a decimal, en donde se indica que “para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador”. Además, hay una nota recordatoria que dice que “números racionales son los que se pueden poner en forma de fracción”, en donde aparece por primera vez una relación entre números decimales y racionales.

A este punto le siguen el paso de decimal exacto a fracción y los pasos de decimal periódico puro y mixto a fracción.

Finalmente, aparecen algunas actividades como las siguientes para practicar los contenidos.

Actividades

1 Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

$3,52$ $\quad 2,\widehat{8}$ $\quad 1,\widehat{54}$ $\quad \sqrt{3} = 1,7320508\ldots$

$2,7\widehat{3}$ $\quad 3,5222\ldots$ $\quad \pi - 2 = 1,1415926\ldots$

2 Ordena de menor a mayor estos números:

$2,\widehat{5}$ $\quad 2,5$ $\quad 2,3\widehat{5}$ $\quad 2,505005\ldots$

3 Escribe tres números decimales comprendidos entre $2,5$ y $2,\widehat{5}$.

4 Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o periódicos:

a) $\frac{44}{150}$ $\quad$ b) $\frac{42}{150}$ $\quad$ c) $\frac{101}{1024}$ $\quad$ d) $\frac{1001}{500}$

2 Completa el proceso para expresar como fracción el número dado.

a) $6,21\widehat{7}\begin{cases} N = 6,21777\ldots \\ 100N = 621,77777\ldots \\ 1000N = 6217,7777\ldots \end{cases}$

b) $0,031\widehat{62}\begin{cases} N = 0,0316262\ldots \\ 1000N = 31,626262\ldots \\ 100000N = 3162,626262\ldots \end{cases}$

3 Expresa como fracción los decimales siguientes:

a) $6,2\widehat{5}$ $\quad$ b) $0,00\widehat{1}$ $\quad$ c) $5,0\widehat{18}$

4 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:

a) $3,51$ $\quad$ b) $5,202002000\ldots$

c) $5,\widehat{03}$ $\quad$ d) $0,3212121\ldots$

e) $\pi = 3,141592\ldots$ $\quad$ f) $7,4\widehat{331}$

En 4º de ESO (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2010b), se recuerda la relación entre los números decimales y las fracciones vista en el curso anterior, y aparece un nuevo concepto, el de decimales no periódicos o irracionales. Además, en este curso hay un apartado dedicado a las aplicaciones de los decimales.

Por tanto, ni en este curso ni en el anterior hay problemas de operar con números decimales periódicos. Tampoco hay problemas de razonamiento, lo cual puede ayudar a entender las dificultades de los alumnos para resolver el cuestionario. También observaremos la ausencia de problemas de situaciones significativas para los alumnos.

Los contenidos de Bachillerato (DOCV, 2008) revisan los contenidos anteriores y profundizan en las nociones de recta real, distancia, intervalo y entorno.

MARCO TEÓRICO

Como ya se ha dicho antes, existen dificultades en el estudio de los números decimales y, además, también existen problemas a la hora de enseñar esta parte de las matemáticas a los alumnos. Para poder entender toda la problemática que representa el estudio de los números decimales, y en concreto el de los decimales periódicos, se han consultado los textos de "Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?" (Centeno, 1988), "Números decimales" (Castro, 2001), entre otros, y el estudio de Rittaud y Vivier (2013) sobre el cual se sustenta este trabajo.

Errores y dificultades

Los aspectos del concepto decimal que ofrecen una mayor resistencia a su adquisición por parte de los alumnos los conocemos a través del análisis de las respuestas que los alumnos dan a problemas que les planteamos. De esta manera, Centeno (1988, cap.9, p.136-138) analiza las dificultades, errores y obstáculos en los números decimales, e identifica los errores siguientes:

El primero de ellos está relacionado con *la lectura y escritura de los números decimales.* Cuando leemos un número decimal, primero pronunciamos la parte entera y después la parte decimal. Esta práctica lleva a pensar en la representación decimal como dos números enteros separados por una coma, lo que puede explicar ciertas creencias erróneas en la comparación de números expresados en forma decimal, como: un número decimal es mayor que otro cuantas más cifras tenga ($3'9 < 3'12$ porque $9 < 12$).

Otro obstáculo en la comprensión de la representación decimal nace de la utilización d*el cero*, que forma parte de mecanismos que funcionan de distinta forma según el contexto en que aparece. Por ejemplo, algunos alumnos ignoran el cero e interpretan 0'036 como 36, perdiendo la estructura global del número y viéndolo sólo como un número entero. O, otros, consideran 1'27 distinto de 1'270.

El tercer error que identifica Centeno está relacionado con *el orden entre decimales*. La aplicación del "orden lexicográfico" en la comparación de enteros y decimales requiere que los números tengan las mismas cifras, lo que en el caso de los decimales periódicos se logra desarrollando el período. Así, para la comparación de $3'\overline{91}$ y $3'\overline{125}$ debe hacerse expresando $3'919191$ y $3'125125$; de este modo se ve claramente que $919.191 > 125.125$.

Y, finalmente, el cuarto error aparece en *las operaciones.* El autor observa dificultades en el producto y la división debido a que se rompe la regla: multiplicar es aumentar y dividir es disminuir.

Ahora nos preguntamos, ¿son útiles ciertos errores en los procesos de aprendizaje?, ¿qué pueden revelarnos?

"Los errores que no se deben a distracciones, sino que se reproducen sistemáticamente en situaciones similares, son muy interesantes porque nos revelan la existencia de modelos implícitos erróneos. (…) Los comportamientos de los alumnos pueden ser correctos, aunque estén sometidos por modelos falsos"(Centeno, 1988, p. 141).

Y, ¿son los errores únicamente índices de un aprendizaje incompleto o de un fracaso?

Todas las formas de introducir los números decimales que permitan su aparición como números nuevos, con algunas propiedades diferentes a los naturales, pueden ocasionar obstáculos suplementarios que se añaden a la resistencia a la evolución del concepto. Además, muchas veces los alumnos se fabrican sus propias reglas de acción, las cuales no son siempre válidas y conducen al error.

Por tanto, los errores identificados por Centeno (1988) nos van a servir, en el apartado de la parte experimental, para construir el esquema de clasificación de las respuestas que dan los alumnos a las tareas, el cual completaremos con actuaciones observadas en las respuestas de los alumnos elegidos para nuestro experimento.

Procesos de Rittaud y Vivier para la comparación y la suma de decimales periódicos

A continuación, presentamos los procesos para la comparación y la suma de números decimales periódicos identificados en los trabajos de investigación de Rittaud y Vivier (2013), con la ayuda de ejemplos extraídos de Vivier (2011).

La comparación de dos decimales periódicos consiste en desarrollar el periodo y comparar cifra por cifra de izquierda a derecha.

Los autores dicen que los estudiantes no tienen dificultad con esta técnica, pero conduce a la desigualdad $0,\overline{9} < 1$, cuando debería conducir a $0,\overline{9} = 1$. Esto demuestra que aunque no veamos las mismas cifras en las expresiones decimales, pueden ser exactamente la misma expresión. La diferencia está en la interpretación de lo que se representa. Por eso, es necesario conocer otras técnicas como las que se describen en Vivier (2011), en particular, para el caso $0,\overline{9} = 1$:

1- $\frac{1}{3} = 0'\overline{3} \rightarrow 3\times\frac{1}{3} = 3\times 0'\overline{3}$. Entonces, $1 = 0'\overline{9}$.

2- $10\times 0'\overline{9} = 9 + 0'\overline{9} \rightarrow 9\times 0'\overline{9} = 9$. Entonces, $0'\overline{9} = 1$.

3- $\frac{1}{9} = 0'\overline{1}$; $\frac{2}{9} = 0'\overline{2}$; $\frac{3}{9} = 0'\overline{3}$; …; $\frac{9}{9} = 0'\overline{9}$. Entonces, $1 = 0'\overline{9}$.

En cuanto a los cuatro procesos o técnicas que describen Rittaud y Vivier (2013) para calcular la suma de dos números decimales periódicos, veamos detalladamente cada uno de ellos:

1. Técnica de conversión a decimal finito, guiado por la codificación.

Consiste en truncar los números tomando valores aproximados, efectuar la suma de estos números decimales e inducir el resultado. Es decir, utilizar todas las aproximaciones posibles, y considerar el período como un entero para sumar. Además, hay que tener en cuenta que la suma de dos decimales periódicos es un decimal periódico y la suma es continua.

Por ejemplo, si queremos obtener el resultado de la suma $0'\overline{5} + 0'\overline{7}$, procederemos como sigue:

$0'5 + 0'7 = 1'2;\ \ 0'55 + 0'77 = 1'32;\ \ 0'555 + 0'777 = 1'332;\ \ldots$

Así, podemos concluir que $0'\overline{5} + 0'\overline{7} = 1'\overline{3}$.

Según Vivier (2011), este proceso causa errores en los estudiantes. Algunos utilizan las aproximaciones sin conocer que el resultado es periódico o no saben que el resultado presenta necesariamente un período.

2. Técnica de conversión a fracción y haciendo la suma después

Los alumnos que utilizan esta técnica, utilizan el hecho que saben efectuar la suma de dos racionales en el registro fraccionario pero no en el de los decimales periódicos.

$$0,\overline{5} + 0,\overline{7} = \frac{5}{9} + \frac{7}{9} = \frac{12}{9} = 1 + \frac{3}{9} = 1,\overline{3}$$

Según Vivier (2011), para los alumnos es difícil entender como los números decimales periódicos pasan a fracciones.

3. Uso explícito de $0,\overline{9} = 1$

$0,\overline{5} + 0,\overline{7} = 0,\overline{9} + 0,\overline{3} = 1 + 0,\overline{3} = 1,\overline{3}$

4. Algoritmo de la suma de dos números decimales en el sistema de base diez

Al igual que los errores, estos algoritmos nos van a servir, en el apartado de la parte experimental, para construir el esquema de clasificación.

PARTE EXPERIMENTAL

Metodología

En el trabajo de investigación de Rittaud y Vivier (2013) se presenta un cuestionario dividido en dos partes: un test individual y otro para realizar en grupo.

Nosotros nos vamos a centrar sólo en el test individual, en el cual los autores dan una caracterización a cada una de las cinco tareas que lo componen, con los siguientes títulos:

- Comprensión de la codificación (Tareas 1 y 2)
- Comparación (Tarea 3)
- Suma (Tarea 4)
- Diferencia (Tarea 5)

Una vez elaborado el cuestionario, se implementó, marcando un tiempo máximo de 30 minutos para resolverlo. Seguidamente se analizaron los datos obtenidos y se clasificaron y organizaron los resultados.

Muestra

El cuestionario se aplicó a un total de 107 estudiantes, distribuidos como muestra la siguiente tabla:

Tabla 1. Caracterización de las tareas del cuestionario

Curso	Grupos	Especialidad	Género		Alumnos
			M	F	
4º ESO	1	Opción A	3	10	13
1º Bachillerato	1	Científico	17	7	24
2º Bachillerato	2	Científico-Tecnológico	5	0	5
		Ciencias-Sociales	2	8	10
Máster en	2	Matemáticas (curso 2012/13)	9	12	21
Profesor/a		Matemáticas (curso 2013/14)	15	19	34
					Total: 107

Los estudiantes de secundaria y de Bachillerato proceden del centro IES Sorolla. Su formación sigue las directrices de la programación del departamento de Matemáticas (IES Sorolla, 2013). La formación de los estudiantes de Máster viene dada por Gómez (2013).

Aunque los autores Rittaud y Vivier no dicen cuál es el objetivo de las tareas ni las caracterizan, en lo que sigue las caracterizamos de acuerdo con nuestra propia opinión. Mostramos las tareas tal y como se presentaron a los estudiantes, y la interpretación que se hace de cada una de ellas.

TAREA 1: Redondea el número que es diferente a los otros: $5,0\overline{0100}$ $5,001\overline{0001}$ $5,0\overline{01000100}$ $5,0\overline{0101}$ $5,00\overline{1000}$

La expresión numérica con decimal periódico no es única. Por eso se plantean en la tarea 1 cinco expresiones decimales periódicas, de las cuales cuatro son equivalentes (representan el mismo número), y la otra representa un número diferente. Las cuatro expresiones equivalentes se diferencian en que el período representado es diferente, no así el efecto que produce al repetirlo.

TAREA 2: Escribe de cuatro formas distintas el número $14,\overline{121}$.

Como ya hemos dicho, la expresión numérica con decimal periódico no es única. Esta tarea es recíproca a la anterior; ahora se pide encontrar otras expresiones decimales equivalentes a la dada. Se espera que, desarrollando el periodo, perciban otros períodos distintos que expresan el mismo número decimal.

TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta:

a)	$0,13 < 0,\overline{13}$	$0,13 = 0,\overline{13}$	$0,13 > 0,\overline{13}$
b)	$3,\overline{4} < 3,\overline{40}$	$3,\overline{4} = 3,\overline{40}$	$3,\overline{4} > 3,\overline{40}$
c)	$0,\overline{9} < 1$	$0,\overline{9} = 1$	$0,\overline{9} > 1$
d)	$45,\overline{101} < 45,1\overline{01}$	$45,\overline{101} = 45,1\overline{01}$	$45,\overline{101} > 45,1\overline{01}$

Aunque el orden de los números naturales viene determinado por el valor del dígito de mayor orden, en la comparación de decimales periódicos no basta con mirar únicamente las cifras significativas del período. Es decir, no basta con la comparación cifra a cifra como ocurre con los naturales, sino que hay que tener en cuenta también los desarrollos. El efecto de los desarrollos decimales es clave.

Esta tarea se presenta en cuatro ítems, en los que se pide determinar si un número es menor, igual o mayor que otro. Es decir, es una tarea de comparación de números decimales finitos con decimales periódicos puros con partes periódicas iguales, números decimales puros con diferentes cifras periódicas, etc.

Para abordar el ítem c) se necesitan otros conocimientos, como el concepto de límite, ya que si procedemos como anteriormente llegamos a conclusiones erróneas, $0,\overline{9} < 1$, de las cuales Rittaud y Vivier hablan en su trabajo.

En conclusión, como ya hemos dicho, los números decimales no se pueden comparar atendiendo a su tamaño al igual que los enteros. Por eso, el procedimiento que cabe esperar para la resolución de esta tarea es que desarrollen los períodos y los comparen.

TAREA 4: Realiza las siguientes sumas:	
$0,\overline{24} + 0,\overline{57} =$	$0,0\overline{8} + 0,\overline{2} =$
$6,7\overline{1} + 1,8\overline{5} =$	$0,\overline{9} + 0,\overline{4} =$
$0,\overline{5} + 0,\overline{7} =$	$0,\overline{5} + 0,\overline{72} =$
TAREA 5: Realiza las siguientes restas:	
$2,1\overline{7} - 0,\overline{7} =$	
$2 - 1,\overline{9} =$	
$1,\overline{28} - 0,\overline{72} =$	

En la adición y sustracción de decimales periódicos no basta con sumar cifra a cifra las partes periódicas, es necesario tener en cuenta los desarrollos.

Lo que se espera que hagan los estudiantes en esta tarea es que desarrollen los períodos, para que, teniendo el mismo número de cifras después de la coma, operen como si fuesen enteros y, al percibir regularidades, escriban el resultado en forma de expresión decimal periódica.

Esquema de clasificación

El modelo de interpretación se ha elaborado para este trabajo a partir de los datos obtenidos del análisis de las respuestas de los alumnos, para caracterizar tipos de comportamiento.

Las categorías se han tomado como punto de partida para clasificar las actuaciones de los estudiantes. A su vez estas categorías se subdividen en subcategorías, éstas en clases, y éstas en subclases, según se profundiza en la apreciación de similitudes y diferencias en las interpretaciones plausibles, tanto de las expresiones escritas por los estudiantes, como de los procedimientos llevados a cabo por ellos.

1. **RESPUESTA CORRECTA**
    - *1.1. SIN JUSTIFICACIÓN*
    - 1.2. *CON JUSTIFICACIÓN*
        - 1.2.1. Desarrollan el período
            - *1.2.1.1. Comparan números*
            - *1.2.1.2. Comparan por órdenes de unidad*
            - *1.2.1.3. Operan*

1.2.2. Perciben la regularidad

1.2.2.1. Total

1.2.2.2. Parcial

1.2.3. Conversión a fracción

1.2.4. Utilizan la igualdad $0.\overline{9} = 1$

1.3. JUSTIFICACIÓN INSUFICIENTE O INCORRECTA

1.3.1. Completan las respuestas correctas con incorrectas

1.3.2. Por aproximación / Por el siguiente

1.3.3. Perciben mayor el número con mayor cantidad de cifras en el período

2. RESPUESTA INCORRECTA

2.1. SIN JUSTIFICACIÓN

2.2. CON JUSTIFICACIÓN

2.2.1. Comparan la parte periódica y se fijan en sus diferencias

2.2.2. Perciben números decimales finitos

2.2.3. Alargan el periodo

2.2.4. Acortan el periodo

2.2.5. Señalan un periodo arbitrario y/o añaden ceros

2.2.6. Resultado en forma de fracción (a veces incorrecta) o aproximación

2.2.7. Desarrollan el periodo y/o perciben diferencias

2.2.7.1. Operan y/o diferencian la n-ésima cifra decimal

2.2.7.2. Comparan por órdenes de unidad

2.2.7.3. Desarrollo parcial o no interpretan bien el resultado

2.2.8. Diferencian la parte entera de la decimal y operan por separado

2.2.9. Error de cálculo

2.2.10. Interpretación del enunciado incorrecta y/o diferente a la esperada

3. EN BLANCO O NO IDENTIFICADA

DESCRIPCIÓN Y EJEMPLOS DE ALGUNAS CATEGORÍAS DEL ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN

Categoría 1. Respuesta correcta

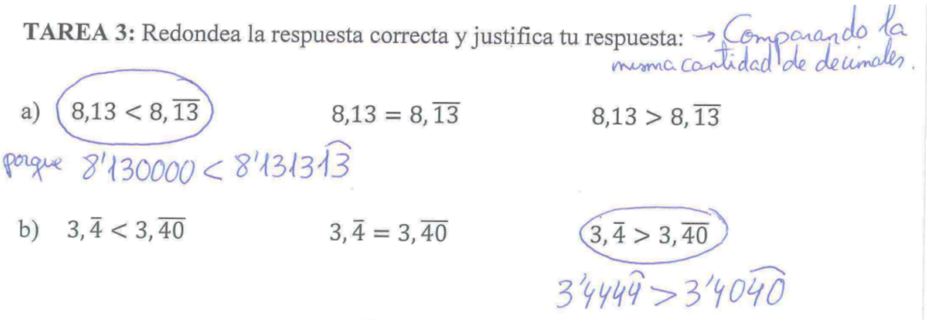
Las respuestas de los estudiantes que se agrupan en esta categoría contienen evidencias sobre el reconocimiento por parte de los estudiantes de relaciones numéricas y de diferencias entre diferentes expresiones decimales periódicas, de regularidades y de técnicas para operar con números decimales periódicos.

Esta categoría comprende subcategorías, clases y subclases, de las cuales queremos destacar las siguientes:

Subclase 1.2.1.1. Desarrollan el periodo y comparan números

En esta subclase se han agrupado todas aquellas respuestas en las que se manifiesta la atención del alumno en el número de la parte decimal como tal.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 1, donde un alumno de Máster manifiesta que obtiene la solución "comparando la misma cantidad de decimales". Lo que hace es desarrollar el periodo del número decimal si es periódico o añadir ceros si es finito, hasta obtener el mismo número de cifras en ambas partes decimales, y luego compara los números obtenidos en la parte decimal.



TAREA 3: Redondea la respuesta correcta y justifica tu respuesta: → Comparando la misma cantidad de decimales.

a) $8{,}13 < 8{,}\overline{13}$ $\quad 8{,}13 = 8{,}\overline{13}$ $\quad 8{,}13 > 8{,}\overline{13}$

porque $8'130000 < 8'131313$

b) $3{,}\overline{4} < 3{,}\overline{40}$ $\quad 3{,}\overline{4} = 3{,}\overline{40}$ $\quad 3{,}\overline{4} > 3{,}\overline{40}$

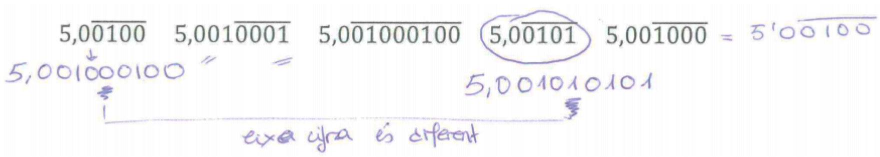
$3'4444 > 3'4040$

Figura 1.

Subclase 1.2.1.1. Desarrollan el periodo y comparan por órdenes de unidad

Esta subclase corresponde a las "respuestas esperadas". Incluye todas aquellas repuestas en las que se aprecia un centramiento del alumno en parte de la información derivada de desarrollar la parte periodica. Es decir, desarrollan el periodo de varias expresiones decimales periódicas y comparan cifra a cifra, hasta encontrar en la n-ésima posición cifras diferentes.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 2, donde un alumno, en la tarea 1, desarrolla el periodo de cada expresión decimal y reconoce cuatro expresiones decimales equivalentes, así como también identifica la no equivalente señalando la cifra que marca la diferencia.



$5{,}0\overline{0100}$ $\quad 5{,}001\overline{0001}$ $\quad 5{,}0\overline{01000100}$ $\quad 5{,}0\overline{0101}$ $\quad 5{,}00\overline{1000}$ = $5'00100$

$5{,}001000100$ = = $\quad 5{,}0010101 01$

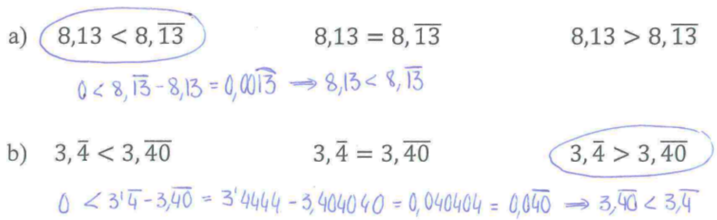
aquesta cifra és diferent

Figura 2.

Subclase 1.2.1.2. Desarrollan el periodo y operan

Se ubican en esta subclase las respuestas de los alumnos que ven los números decimales periódicos como cantidades. Por ello, para compararlos necesitan demostrar que uno es una cantidad mayor o menor que otro. También se ubican en esta clase todas las respuestas de los alumnos que en las tareas 4 y 5 desarrollan primero el periodo para luego operar.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 3.



a) $8{,}13 < 8{,}\overline{13}$ $\quad 8{,}13 = 8{,}\overline{13}$ $\quad 8{,}13 > 8{,}\overline{13}$

$0 < 8{,}\overline{13} - 8{,}13 = 0{,}00\overline{13} \rightarrow 8{,}13 < 8{,}\overline{13}$

b) $3{,}\overline{4} < 3{,}\overline{40}$ $\quad 3{,}\overline{4} = 3{,}\overline{40}$ $\quad 3{,}\overline{4} > 3{,}\overline{40}$

$0 < 3'\overline{4} - 3{,}\overline{40} = 3'4444 - 3{,}404040 = 0{,}040404 = 0{,}0\overline{40} \rightarrow 3{,}\overline{40} < 3{,}\overline{4}$

Figura 3.

Subclase 1.2.2.1. Perciben la regularidad Total

En esta subclase se ubican las respuestas en las cuales los alumnos reconocen todas las expresiones decimales equivalentes, y/o la fracción equivalente en el caso de la tarea 2.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se muestra en la figura 4, donde se recoge la respuesta de un alumno de Máster que justifica su elección diciendo: “porque es el único que entre los unos no hay tres ceros”.

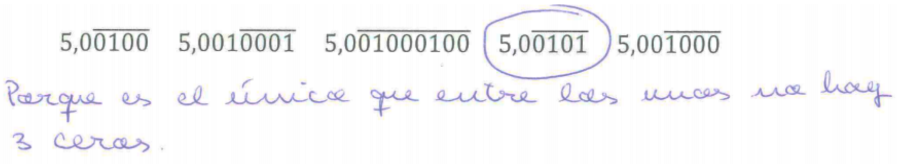


Figura 4.

Clase 1.2.3. Conversión a fracción

Las respuestas consideradas en esta clase se caracterizan por la necesidad de los alumnos de pasar las expresiones decimales periódicas a fracciones, ya que utilizan el hecho que saben efectuar sumas y restas de dos racionales en el registro fraccionario o, en el caso de la tarea 3c), para efectuar demostraciones.

Un ejemplo de actuación ubicada es el que se observa en la figura 5.

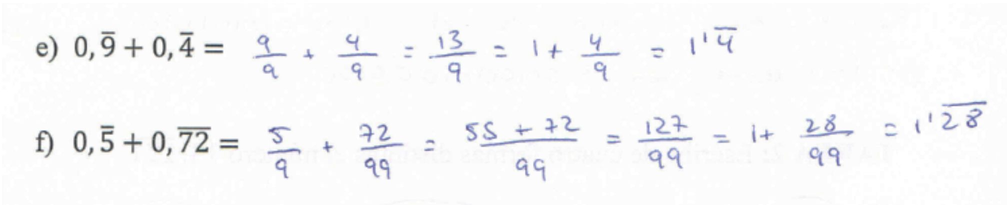


Figura 5.

Clase 1.3.2. Por aproximación/ Por el siguiente

Las respuestas de los alumnos en la tarea 3c), en las que aparecen justificaciones por aproximación o mencionando un siguiente, se agruparon en esta clase.

Un ejemplo que hace referencia a este tipo de comportamiento es el que se ilustra en la figura 6, donde se recoge la respuesta de un alumno de 2º de Bachillerato que justifica la igualdad “porque acaba en 9999 y su siguiente número es 1”.

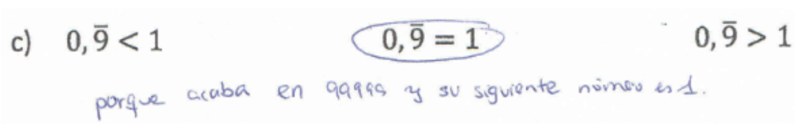


Figura 6.

Categoría 2. Respuesta incorrecta

Las respuestas que se agrupan en esta categoría contienen evidencias de la falta de percepción por parte de los estudiantes de regularidades y de técnicas para comparar y operar con números decimales periódicos.

De esta categoría destacamos las siguientes subcategorías, clases y subclases:

Clase 2.2.1. Comparan la parte periódica y se fijan en sus diferencias

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase, se caracterizan por identificar diferencias centradas en las cifras que abarca la raya del periodo.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento se muestra en la figura 7, donde se recoge la respuesta de un estudiante de 1º Bachillerato en la tarea 1, quien justifica su elección de la respuesta así: “porque el número 1 no lleva periodo”.

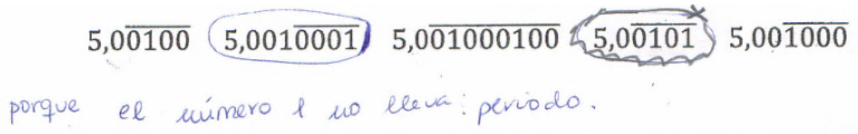


Figura 7.

Clase 2.2.2. Perciben números decimales finitos

En esta clase se ubican las respuestas en las cuales se manifiestan dificultades por parte de los alumnos en el concepto de número decimal periódico y una tendencia a trabajar con los números decimales finitos.

Una actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 8, donde se recoge la respuesta de un alumno de 1º Bachillerato a la tarea 5. Al parecer, interpreta las expresiones decimales periódicas como finitas, ya que opera como así fueran, sin preocuparse de desarrollar el periodo o de las variaciones que este pudiera comportar.

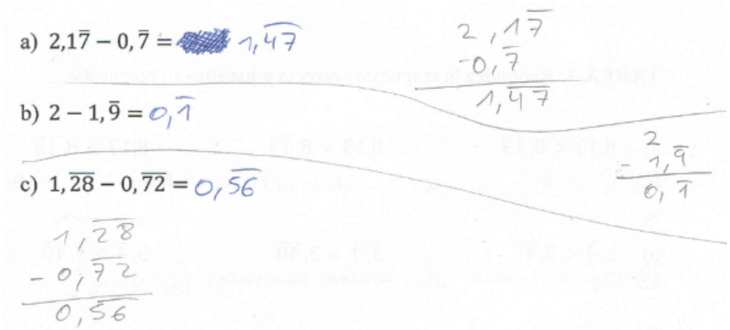


Figura 8.

Clase 2.2.3. Alargan el periodo

Las respuestas ubicadas en esta subcategoría evidencian que los alumnos toman el periodo de la expresión decimal del enunciado y lo reproducen.

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 9.

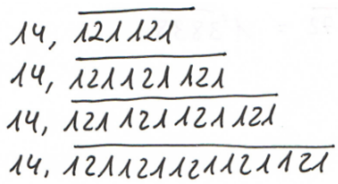


Figura 9.

Subclase 2.2.7.2. Desarrollan el periodo y comparan por órdenes de unidad

Las respuestas de los alumnos que se ubican en esta clase se caracterizan por su centramiento en la parte entera del número decimal periódico.

Una actuación ubicada en esta clase se puede observar en la figura 10, donde se recoge la respuesta de un alumno de Máster a la tarea 3c).

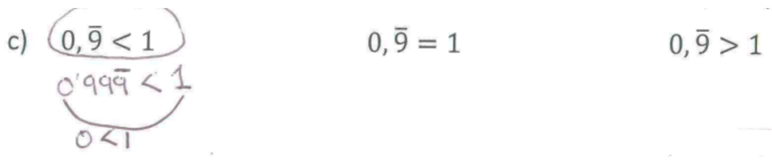


Figura 10.

Subclase 2.2.7.3. Desarrollan el periodo de forma parcial

En las respuestas agrupadas en esta subclase se puede apreciar que los alumnos no desarrollan el periodo hasta tener la misma cantidad de cifras decimales en ambos números.

En la figura 5.11 se ilustra un ejemplo de este tipo de comportamiento. En ella se recoge la actuación de un alumno de 1º Bachillerato en la tarea 4d) y se observa que no hay pruebas de que consideren necesario que haya la misma cantidad de decimales en ambos números.

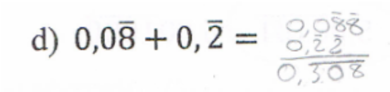


Figura 11.

Clase 2.2.8. Diferencian la parte entera de la parte decimal y operan por separado

En esta clase se ubican las respuestas en las cuales se manifiestan dificultades con el concepto de la coma decimal y una tendencia a trabajar por separado la parte entera y la parte decimal. Estos estudiantes tienen una concepción de número decimal como dos números enteros separados por el punto decimal

Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el que se recoge en la figura 12, donde un alumno de 2º Bachillerato, en la tarea 4.

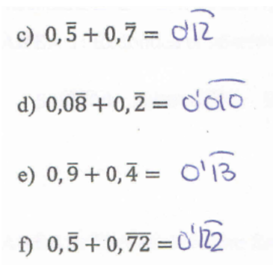


Figura 12.

Categoría 3. En blanco o no identificada

En ella ubicamos las actuaciones de los alumnos en las que se considera que el alumno no contesta a la tarea o no ha sido posible identificar las interpretaciones utilizadas por los estudiantes.

RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO

Hemos organizado los resultados obtenidos según el esquema descrito en el apartado anterior, atendiendo a los niveles de éxito y los comportamientos predominantes.

Tarea 1. Codificación

Alrededor de la mitad de los estudiantes de 1º de Bachillerato y de Máster siguen el procedimiento de resolución esperado: desarrollan el periodo del número dado y comparan cifra a cifra. Podemos observar que no hay variaciones significativas en estos grupos en cuanto a la estrategia de resolución y al total de respuestas correctas.

La diferencia más significativa está en los alumnos de la ESO, y es que no justifican las respuestas. También hay un número significativo de estudiantes que perciben la regularidad.

Por tanto, se puede decir que los estudiantes resuelven acertadamente la tarea, ya que sólo hay 8 respuestas incorrectas.

Tarea 2. Codificación

El bajo nivel de éxito indica que los estudiantes tienen dificultades para interpretar adecuadamente la tarea. A pesar de que es el recíproco de la tarea 1, en esta tarea el total de respuestas incorrectas es 70. No han entendido bien que se espera que den como respuestas diferentes expresiones decimales periódicas y/o la fracción equivalente, y no lo que hace la mayoría, que es alargar el periodo dado en la tarea y hacer diferentes combinaciones.

En la ESO y 1º Bachillerato es significativa la falta de respuestas correctas. En el máster, en cambio, es alto el número de respuestas correctas, pero en menor medida que la tarea anterior. También es significativo el número de alumnos del Máster 13/14 que dan una respuesta en forma de fracción. Lo hacen 11 de ellos, una tercera parte del total.

Tarea 3. Comparación

Observamos en los alumnos dos tendencias en relación a la comparación de números decimales periódicos: la primera, se caracteriza por desarrollar el periodo y comparar el número natural que resulta de este desarrollo en la parte decimal. La segunda, minoritaria en los alumnos de la ESO y 2º Bachillerato, y significativa en los grupos de 1º Bachillerato y Máster, se caracteriza por desarrollar el periodo, pero esta vez la comparación es cifra a cifra.

Debemos destacar otras dos tendencia significativa en los alumnos del Máster 13/14, que son la búsqueda de diferencias entre cantidades y la percepción de regularidades.

En términos totales, el nivel de éxito es alto, con una evolución natural al pasar de ciclo.

Como cabía esperar, es significativa la cifra de estudiantes que justifican el ítem c) de la misma manera que los anteriores, comparando las cifras, en este caso las unidades. La mayoría de los estudiantes no están de acuerdo con la igualdad $0'\overset{\frown}{9} = 1$ y más de la mitad de ellos justifican la desigualdad $0'\overset{\frown}{9} < 1$ con repuestas infinitesimales.

Para la resolución de esta pregunta se necesitan conocimientos superiores, como ya habíamos dicho. Esto se refleja en los resultados, ya que la justificación mediante el uso de demostraciones no ha sido observado entre los alumnos de secundaria y bachillerato. En cambio, aparece a menudo con los estudiantes de Máster.

Tarea 4. Suma

En esta tarea se percibe que el nivel de éxito aumenta de modo natural al avanzar de nivel. La tendencia de conversión al registro fraccionario no se ha observado entre los alumnos de ESO y Bachillerato. En cambio, es una técnica que utilizan a menudo los estudiantes de Máster.

En las respuestas no acertadas predomina un comportamiento, el de tratar los decimales periódicos como decimales finitos. Se observa que la mitad de los alumnos de 4º curso realizan las operaciones como si se tratara de números decimales finitos. La otra mitad, igual que la mayoría de los estudiantes de bachillerato y de máster, tienden a desarrollar primero el periodo, luego operar como si se tratara de números decimales finitos y, finalmente, vuelven a escribir el resultado en forma de expresión decimal periódica.

Además, es significativo el número de alumnos que dan un resultado correcto a los dos primeros ítems y, en cambio, son incorrectos los de los demás ítems. Esto es debido a las características de las expresiones decimales periódicas, que aunque los alumnos las vean como expresiones decimales finitos u operen por separado la parte entera y la parte decimal, hace que den un resultado correcto. Al intuir esto, estas respuestas están clasificadas como las de los demás ítems.

Finalmente, también podemos observar que los alumnos que tienden a realizar las operaciones desarrollando el periodo, el ítem 2 lo calculan de cabeza por su simplicidad. En cambio, hay un número significativo de alumnos con tendencia a operar de cabeza y eso les lleva a muchos errores.

Tarea 5. Sustracción

En términos totales, el nivel de éxito sufre una evolución natural de la ESO al Máster.

A la vista de los datos se puede decir que otra vez aparece una tendencia parecida en los alumnos de 1º de Bachillerato y los de Máster a desarrollar el periodo para luego operar. Además, se observa en estos últimos otra tendencia, la de conversión al registro fraccionario, la cual no se ha observado entre los alumnos de ESO y Bachillerato.

Los comportamientos predominantes asociados a las respuestas incorrectas son los asociados a operar como si se tratara de números decimales finitos, el cual sólo se observa en los alumnos de ESO y Bachillerato, y el de no desarrollar hasta tener la misma cantidad de cifras decimales en ambas expresiones. Además, hay un número significativo de alumnos del Máster 13/14 que dan respuestas, tanto correctas como incorrectas, sin justificación.

SÍNTESIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Como síntesis de lo observado, tras haber concluido la parte experimental y el análisis de los resultados hemos obtenido una serie de conclusiones.

- En nuestro estudio, la tarea 1, que Rittaud y Vivier llaman de codificación, tuvo éxito, ya que sólo 8 alumnos del total no fueron capaces de identificar la expresión decimal diferente. En cambio, en la tarea 2, a pesar de ser recíproca a la tarea 1, los estudiantes tuvieron dificultades para abordarla y, o bien daban respuestas incorrectas, o bien completaban las correctas con incorrectas. Por tanto, no tuvo éxito.
- La comparación de los ítems a, b y d de la tarea 3 fue un éxito. Además de la tendencia a desarrollar el periodo y comparar cifra a cifra, hemos observamos otra actuación predominante: desarrollan el periodo y comparan el número natural que resulta de este desarrollo.
- En la comparación del caso $0'\overline{9}$ y 1, se ha obtenido un mayor número de errores. Para la resolución de esta pregunta se necesitan conocimientos superiores, como los que deberían haber alcanzado los estudiantes de Máster. Sin embargo, vemos que actúan de forma similar a los estudiantes de Bachillerato y eso significa que siguen ligados a los primeros conocimientos sobre los números decimales periódicos y no han avanzado.
- Por último, en las sumas y diferencias se observa una tendencia a trabajar con los números decimales periódicos como si se tratara de números decimales finitos, además de la conversión a fracción y la utilización de la igualdad $0'\overline{9} = 1$.

Para finalizar, vamos a destacar algunos de los efectos de la enseñanza. Uno es que hace pensar que si las expresiones del período son diferentes, los números que expresan son diferentes, lo cual es falso. Podemos asumir que la dificultad para caracterizar a los números decimales periódicos independientemente de las expresiones decimales periódicas, persiste en los alumnos de niveles superiores, y que se originaría en una primera aproximación a las características de estos números, la cual aparece ligada a su representación “con coma”, en oposición a los números naturales “sin coma”, sin que esto sea cuestionado en estudios posteriores de los alumnos. No parece tener cabida en la enseñanza la reflexión y profundización progresiva de este conocimiento, lo cual produce una falta de percepción y lleva a arrastrar los procedimientos aprendidos los primeros años de la enseñanza.

Castro (2001) confirma que los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de los decimales, ya que los estudiantes suelen extender su conocimiento de los naturales y aplicarlo de manera equivocada a los decimales, predominando el conocimiento ya consolidado del número natural sobre el conocimiento en construcción de los decimales.

Referencias

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 315-345). Madrid, España: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid, España: Síntesis.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, Mª. J. (2010a). *Matemáticas 3º ESO*. Madrid, España: Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, Mª. J. (2010b). *Matemáticas 4º ESO*. Madrid, España: Anaya.

DOCV (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana.[2007/9717]. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, *5562,* 30402- 30587.

DOCV (2008). Decreto 102/2008, de 11 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo del bachillerato en la Comunitat Valenciana. [2008/8761]. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, *5806,* 71303- 71547.

Gómez, B. (2013). *Apuntes de clase en el Máster de Profesor/a en Educación Secundaria de la Universidad de Valencia*. Documento no publicado, Universidad de Valencia, España.

IES Sorolla (2013). *Programación del Departamento de Matemáticas* [Documento interno]. Valencia, España.

Rittaud, B., & Vivier, L. (2013). Different Praxeologies for rational numbers in decimal system - the $0,\overline{9}$ case. Documento presentado en el *CERME 8 - Congress of The European Society for Research in Mathematics Education*. Working Group 2 Arithmetic and number systems. Ankara, Turquía.

Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 297-318). La Laguna, España: Universidad de la Laguna.

Vivier, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. Recuperado el 28 de septiembre de 2013, de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/VIVIER_4oCalculo_Puebla2010.pdf

PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN POR MAESTROS EN FORMACIÓN

Planning of teaching the concept of fractions by pre-service elementary teachers

Elena Castro Rodríguez[a], Luis Rico[a], Pedro Gómez[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de los Andes

Resumen

En este documento indagamos sobre algunos aspectos del conocimiento didáctico que un grupo de maestros de primaria en formación inicial ponen en juego al redactar un texto cuyo propósito es iniciar a los escolares de primaria en la noción de fracción. Usamos algunas de las categorías del análisis didáctico para analizar las producciones de los futuros maestros. Los resultados destacan los conocimientos que los participantes seleccionan, como el concepto de numerador y denominador, la suma y resta de fracciones o el concepto de unidad, y el modo en que los introducen en sus propuestas.

Palabras clave: *Conocimiento didáctico del profesor, formación de maestros, fracciones*.

Abstract

In this paper we investigate about the pedagogical content knowledge that a group of preservice primary school teachers put into play when composing a text with which to start primary school students in the part-whole notion of fraction. To analyse the productions, we used a model of didactic analysis, through its content analysis categories. The results highlight the content of fractions that the participants selected, how they proposed to introduce this content in their responses.

Keywords: *Fractions, pedagogical content knowledge, pre-service teacher education.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento profesional de los profesores de matemáticas ha sido categorizado por diversos autores (Shulman, 1986; Grossman, 1990; Bromme, 1994; Ponte y Oliveira, 2002; Hill, Rowan y Ball, 2005). La mayor parte de ellos hacen una distinción entre el conocimiento del contenido, basado en la matemática como disciplina, y el conocimiento pedagógico o didáctico del contenido, entendido como aquel conocimiento que el profesor pone en juego para la enseñanza de los contenidos matemáticos. Estos tipos de conocimiento han sido foco de atención de la investigación en las últimas décadas (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2012). El interés de su estudio, radica entre otros, en la información que pueden aportar para la toma de decisiones sobre la formación inicial de profesores y la posterior mejora de la práctica en el aula de matemáticas.

Entre las distintas investigaciones realizadas sobre el conocimiento profesional, encontramos diversos estudios sobre el conocimiento didáctico de las fracciones (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Domoney, 2001; Fuller, 1996), centrados en las operaciones con fracciones (Li y Kulm, 2008; Isiksal y Cakiroglu, 2011; Charalambous, Hill y Ball, 2011) o en la equivalencia de fracciones (Chick, 2003; Marks, 1990). Todos ellos resaltan las carencias en sus conocimientos sobre fracciones que los maestros en formación presentan y por consiguiente en sus implicaciones para su enseñanza. Además Charalambous, Hill y Ball (2011) y Li y Kulm (2008) afirman que la

Castro-Rodríguez, E., Rico, L., y Gómez, P. (2014). Planificación de la enseñanza del concepto de fracción por maestros en formación. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 11-25). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

falta de conocimiento del contenido sobre fracciones por parte de los profesores participantes en sus estudios, pudieran incidir en los niveles mostrados en su conocimiento didáctico del contenido. Esta estrecha relación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido nos condujo a centrarnos en un aspecto del conocimiento didáctico de los futuros maestros, su capacidad para seleccionar los contenidos apropiados para un propósito didáctico. El conocimiento didáctico del contenido implica estos y otros aspectos de las decisiones que el profesor toma en su proceso de planificación de la enseñanza.

Siguiendo esta línea, propusimos a los maestros que redactaran una explicación introductoria al concepto de fracción. Para ello, diseñamos una serie de ilustraciones que presentan los datos básicos de una relación parte-todo multiplicativa y pedimos a los maestros que redactaran una explicación con la que introducir la noción de fracción a partir de las imágenes presentadas. En la tarea propuesta, los participantes debían realizar una breve planificación sobre la enseñanza de las fracciones. Para ello, se basaron en los datos propuestos en las ilustraciones, además de poner en juego su conocimiento del contenido y su conocimiento didáctico del contenido. Para el análisis de las producciones consideramos útil el método de análisis didáctico, como base para organizar los aspectos del conocimiento didáctico de nuestro interés.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Por análisis didáctico entendemos un procedimiento que, de manera ideal, debería realizar un profesor de matemáticas para "diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Al caracterizar, de manera ideal, el proceso de planificación del profesor, el modelo del análisis didáctico nos permite establecer aquellos aspectos del conocimiento didáctico del profesor que son relevantes para ese propósito (Gómez, 2006). Esos aspectos se organizan en tres tipos de análisis: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. Estos análisis, han sido trabajados y utilizados en diversos estudios e investigaciones (Gómez, 2006; Lupiáñez, 2009; Valverde, 2012).

Dado que en este estudio nos centramos en los distintos aspectos del contenido que seleccionan los maestros en formación para realizar una introducción al concepto de fracción, abordamos el análisis de las producciones mediante el análisis de contenido y sus componentes asociadas.

Análisis de contenido

Mediante el análisis de contenido, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción. Su propósito es la descripción de la estructura matemática, desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. El análisis de contenido se articula por medio de un sistema de tres componentes: los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología.

Estructura conceptual

La estructura conceptual incluye conceptos, propiedades, proposiciones y relaciones entre los conceptos, que se derivan de un contenido matemático (Gómez, 2006).

En el caso del concepto parte-todo de fracción consideramos los siguientes componentes básicos en su estructura: (a) el todo —T— que tomamos como punto de partida; (b) cada una de las n partes iguales en que se divide el todo —P—; (c) la relación —R(P,T)=1/n— que expresa la relación entre una de las partes iguales P y el todo T; y (d) el complementario C de la parte P — .

Representaciones

Los conceptos se muestran a través de diferentes tipos de símbolos escritos, gráficos, imágenes o el lenguaje hablado, y cada uno constituye una representación (externa) del concepto en cuestión (Hiebert y Carpenter, 1992). Las fracciones como relación parte-todo pueden ser representadas de múltiples formas como son representaciones verbales, gráficas, numéricas o simbólicas.

Fenomenología

La fenomenología muestra los sentidos de los cuales proceden y con los cuales se usan los conceptos, sentidos que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico; también muestra su conexión con las estructuras matemáticas. En el concepto parte-todo de fracción encontramos diversos sentidos, como son: división, reparto, medida o reconstrucción de la unidad.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

Este estudio se realizó con el objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de contenido, que presentan un grupo de maestros de primaria en formación cuando abordan una explicación para introducir el concepto de fracción.

MÉTODO

Sujetos

Los participantes de este estudio fueron 82 maestros en formación inicial que cursaban los estudios universitarios del Grado en Educación Primaria durante el curso académico 2011-2012. Los sujetos eran estudiantes del segundo curso de dicha titulación, matriculados en tres grupos distintos de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria.

Instrumento

La prueba se llevó a cabo al finalizar el bloque de aritmética, que conlleva el estudio de la enseñanza y aprendizaje de los números naturales, su estructura aditiva, su estructura multiplicativa y las fracciones. El instrumento de recolección de información que utilizamos en este estudio consta de diversas series de imágenes, cada una con tres tarjetas; las imágenes muestran objetos que son usuales en la introducción inicial de las fracciones. En la serie de tarjetas A incluimos ilustraciones de objetos que ejemplifican distintas magnitudes (longitud-cuerda, superficie-pizza, volumen-naranja) que dan lugar a las fracciones unitarias ½, 1/3 y 1/4.

La serie está formada por tres tarjetas distintas, que denominaremos A1, A2 y A3. Cada una de las ilustraciones presentes en las tarjetas muestra diferentes elementos básicos de una relación parte-todo multiplicativa: el todo o totalidad (T), las partes (P), y la relación entre una de las partes y el todo P = 1/n T. Las primeras ilustraciones de la tarjeta A1 (figura 1), muestran los objetos enteros, que representan, en cada caso, el todo del que se parte, con una, dos o tres dimensiones. En la tarjeta A2 se incluyen los objetos iniciales divididos en partes iguales (figura 1). Por último, en las ilustraciones de la tarjeta A3 se muestra la relación de una de esas partes con el todo del que procede (figura 1).

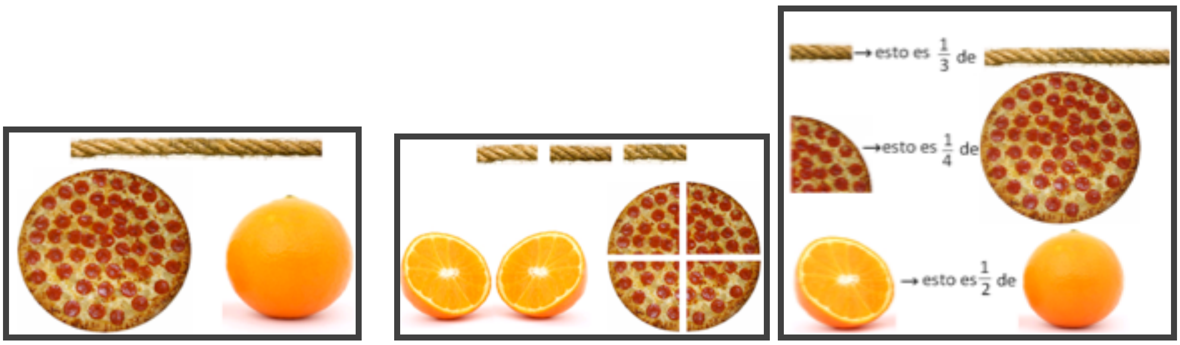


Figura 1. Tarjeta A1, A2 y A3

Además de estas tarjetas, se proporcionó una ficha de trabajo que incluía las instrucciones para que los sujetos, de manera individual, realizaran la tarea. Esta ficha, además de contener un registro inicial para la identificación de cada sujeto, incluye el enunciado de la tarea propuesta:

Las tres tarjetas que aparecen a continuación pueden usarse para ilustrar el concepto de fracción. Se desea elaborar un material para iniciar a los alumnos de primaria en las fracciones. Establece el orden en que las tarjetas deben aparecer y redacta el texto que debe ir antes y después de cada tarjeta (como si fuese un libro de texto para primaria).

Subrayamos la idea de que el grupo de escolares de primaria al que va dirigido el material es un grupo hipotético. No lo condicionamos a una edad y un nivel determinados; sólo se subraya la idea de que la actividad consiste en una introducción o iniciación al concepto de fracción.

Las ilustraciones fueron impresas como pegatinas para que pudiesen ser manejadas e insertadas libremente a criterio del estudiante durante el proceso de elaboración de la narración. La finalidad de la tarea es inducir a los sujetos a una situación docente, simulando las imágenes de un libro de texto escolar o de una ficha de trabajo. Para ello, dimos las ilustraciones de ese supuesto libro o ficha, y pedimos a los maestros que las ordenaran y que escribieran un texto que acompañara y explicara cada imagen.

Procedimiento

Para detectar y solventar posibles errores de interpretación y para que los maestros en formación se familiarizasen con la actividad, se realizó una prueba piloto, dos semanas antes, en la que los sujetos debían realizar una tarea similar sobre el concepto de multiplicación. La prueba piloto mostró que la actividad era clara, por lo que el procedimiento seguido y el tipo de material proporcionado para la actividad final fue similar al utilizado en la prueba piloto.

Durante el desarrollo de una sesión de clase, se entregó a cada uno de los sujetos una ficha y una de las series de tarjetas. Una vez distribuido todo el material, se les explicó cómo realizar la actividad y se respondió a las dudas que surgieron. Todos los estudiantes finalizaron la actividad en un tiempo máximo de media hora.

Codificación y análisis

En el análisis hemos utilizado técnicas cualitativas, cuyo objetivo es organizar y caracterizar las producciones a través del sistema de categorías del análisis de contenido procedentes de nuestro marco teórico.

En una primera etapa, uno de los investigadores identificó las unidades de análisis de cada una de las respuestas —oraciones o fragmentos de oraciones— correspondientes con cada una de las categorías de análisis, y agrupó aquellos datos que eran iguales o variaciones de la misma idea. Estas agrupaciones de datos similares se identificaron como subcategorías. Además, tras esta primera revisión de todas las respuestas, fue necesario ampliar las subcategorías, pues de los datos surgieron otras nuevas no contempladas.

Más tarde, en una segunda etapa, las subcategorías fueron validadas por el resto de investigadores. Los casos en los que hubo discordancia fueron discutidos y comparados hasta que no hubo desacuerdos.

RESULTADOS

Se obtuvieron un total 82 respuestas. A continuación presentamos un ejemplo de respuesta a la tarea.

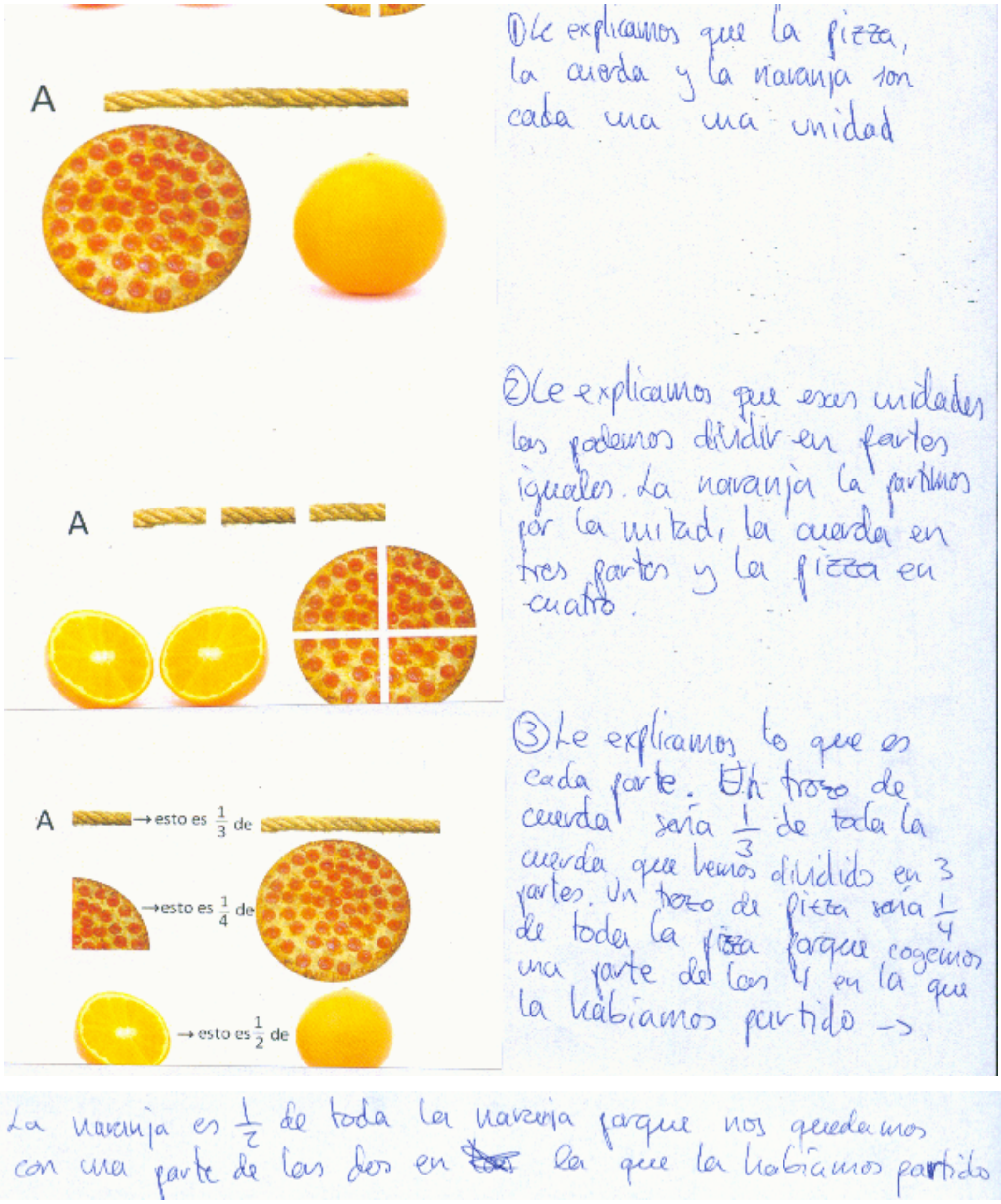


Figura 2. Ejemplo de narración realizada por un estudiante

En una instrucción inicial sobre el concepto de fracción no es posible poner en juego todos los elementos del contenido del tema. Por ello, al realizar una explicación, los sujetos seleccionan aquellas componentes del concepto que conocen y/o eligen los que les parecen más adecuados para comunicar los nuevos conocimientos e iniciar y guiar el aprendizaje de los escolares. Estos conocimientos manifestados fueron codificados según cada una de las componentes del análisis del contenido: estructura conceptual, fenomenología y representaciones. Estas tres componentes permiten identificar, analizar e interpretar las producciones realizadas por los maestros en formación en términos de aquellos aspectos del contenido que seleccionan para realizar una introducción al concepto de fracción.

Nuestro propósito no fue caracterizar las respuestas como correctas o incorrectas. Buscamos describir el conocimiento expresado por los sujetos y clasificarlo en categorías. Los resultados se presentan en tres secciones que corresponden a las tres componentes del análisis de contenido consideradas.

Datos sobre la estructura conceptual

En nuestro análisis identificamos conceptos y procedimientos distintos de los presentes en las ilustraciones que los sujetos añaden como conocimiento adicional en sus respuestas. Como vemos en el ejemplo de la figura 2, los participantes introducen en su narración la explicación del concepto de unidad.

Tabla 1. Conceptos y procedimientos añadidos

	Ejemplo	Porcentaje N=82
Concepto de numerador y denominador	"…en una fracción, el número o parte que cogemos del total se denomina numerador y el número en que dividimos el total y que se posiciona debajo es el denominador"	34%
Concepto de fracción entera	"…Como la cuerda la hemos dividido en 3 partes, la parte entera y completa sería 3/3, ya que 3 dividido entre 3 es 1 que es la parte entera…"	17%
Concepto de unidad	"para la explicación de las fracciones, hemos cogido tres objetos: pizza, naranja y una cuerda. Estos objetos representan la unidad, es decir 1"	14%
Suma o resta de fracciones	"…cada trozo equivale a 1/3 y tenemos 3 trozos, 1/3+1/3+1/3=cuerda completa…"; "nos comemos una porción ¼ al restarle ¼ a los 4/4 nos quedan ¾"	10%

El conocimiento adicional más común consiste en identificar el significado del numerador y denominador con los elementos de la estructura conceptual en un proceso de división en partes de un objeto o en un proceso de reparto (34%).

Un segundo concepto que los maestros en formación añaden con frecuencia en sus respuestas (17%) es el concepto de fracción entera y su relación con el todo dividido en partes.

Otro concepto que los sujetos introducen es el de unidad y su identificación con el todo u objeto inicial (14%).

Por último, en algunas respuestas se introducen sumas y restas de fracciones, aunque en ningún caso se explica el procedimiento para resolver estas operaciones.

Datos sobre fenomenología

A pesar de que las ilustraciones inducen un proceso de división en partes, en sus respuestas los sujetos introducen otros sentidos distintos: repartir, medir y reconstruir la unidad dada un fracción.

Tabla 2. Sentidos presentes en las respuestas

		Porcentajes N=82
(1)	Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto y la selección de algunas de ellas.	37%
(2)	Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto y la medida de una de las partes	20%
(3)	Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto	20%
(4)	Las fracciones surgen de un proceso de división y reparto	10%
(5)	Las partes se recomponen dando lugar a la unidad	7%
(6)	Las fracciones surgen de un reparto	6%

Estos sentidos se presentan en las respuestas de manera única o combinando los sentidos de división con medida o reparto. Ejemplificamos a continuación algunos de estos sentidos.

(4) "la pizza está entera.…como estamos 4 amigos la repartiremos entre todos, un trozo para cada uno. Como somos buenos amigos, los trozos serán iguales para todos….Si la pizza la partimos en 4….la unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos…".

(5) "Los fragmentos se corresponden a 1 pizza dividida en 4 trozos. Se llega a representar de la siguiente forma: al sumar las 4 porciones se representa de la siguiente forma 4/4. Con lo cual se obtendría la siguiente forma: [imagen del todo]"

Datos sobre representaciones

Puesto que la tarea propuesta a los sujetos contiene ilustraciones con elementos gráficos y numéricos, solamente en 5 casos se incluyen representaciones gráficas o simbólicas (a/b) distintas de las dadas en las ilustraciones.

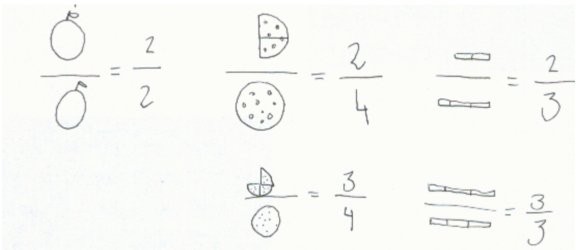


Figura 3. Ejemplo de representación gráfica presente en una respuesta

Estas nuevas representaciones, surgen para plantear nuevos ejemplos (figura 3), o reforzar la explicación de los ya presentes en las ilustraciones propuestas.

OTROS HALLAZGOS

Durante la realización del análisis de las respuestas, notamos que los participantes, además de seleccionar aquellas componentes del concepto que conocen y/o elegir los que les parecen más adecuados, utilizan diferentes modos de presentar los contenidos. Hemos agrupado estos datos en tres categorías: instrumental, narrativo y funcional. Las diferencias entre ellos no implican, en ningún caso, al contenido.

En el enfoque instrumental la narración no incluye situaciones ni problemas contextualizados que puedan ayudar a la comprensión de los contenidos. Este modo de abordar el contenido es predominante en las respuestas (73%). Un ejemplo de respuesta para este estilo es la siguiente.

(Tarjeta A1) Le explicamos que la pizza, la cuerda y la naranja son cada una unidad.

(Tarjeta A2) Le explicamos que esas unidades las podemos dividir en partes iguales. La naranja la partimos por la mitad, la cuerda en 3 partes y la pizza en cuatro.

(Tarjeta A3) Le explicamos lo que es cada parte. El trozo de cuerda sería 1/3 de toda la cuerda que hemos dividido en 3 partes. Un trozo de pizza sería ¼ porque cogemos una parte de los 4 que habíamos partido. La naranja es ½ de toda la naranja porque nos quedamos con una parte de las dos de las que habíamos partido.

En el enfoque funcional, se aborda el contenido a través de situaciones contextualizadas y presentando demandas cognitivas al escolar, la mayor parte de las veces a través de la resolución de problemas. Este enfoque tiene una presencia escasa en las respuestas (13%). En la siguiente respuesta podemos verlo reflejado.

(Tarjeta A1) Una familia de 4 personas, quiere repartirse una pizza pero no sabe cómo.

(Tarjeta A2) Como son 4 personas, dividen en 4 partes quedando así ¼, ¼, ¼, 1/4., todo sumando da 4/4.

(Tarjeta A3) Cada uno pues, se come ¼ de pizza. El hijo se ha comido ya ¼ de pizza así que quedan ¾ de pizza.

En el enfoque narrativo, al igual que en el caso anterior, se introducen los contenidos a través de una narración que modeliza una situación real pero no se incluye ninguna demanda cognitiva. Tiene una presencia similar al caso anterior (14%). Una respuesta que se corresponde con este estilo es la siguiente.

Hoy vamos a aprender lo que es una fracción, nos basamos en un ejemplo sencillo para ello.

(Tarjeta A1) Como vemos en la figura 1 la pizza está entera, si queremos comerla deberíamos de partirla. Como estamos 4 amigos deberíamos de partirla, un trozo para cada uno.

(Tarjeta A2) Como somos buenos amigos los trozos serán iguales para todos. Partiremos nuestra pizza y nos quedará como en la figura 2. Si tuviéramos que decir a cuánto nos a tocado cada uno y cuánto al resto ¿como lo haremos?

(Tarjeta A3) ¡Exacto! Con fracciones. Si la pizza la partimos en 4 trozos y nos quedamos con un trozo lo que les toca a los demás es ¾ como aparece en la figura 3. Una fracción es una parte de la unidad. La unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos, y lo que nos corresponde (nuestra porción) es una fracción.

Al cruzar esta categoría para el análisis de la explicación con la categoría fenomenología para el contenido, se observó que en los modos narrativo y funcional, la mayoría de los participantes utilizaron el sentido de reparto, mientras que en el enfoque instrumental lo hicieron mediante el sentido de división.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio fue caracterizar el conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de contenido, que presenta un grupo de maestros de primaria en formación cuando abordan una explicación para introducir el concepto de fracción. Los resultados muestran que hemos obtenido información sobre el conocimiento didáctico del contenido, categorizada en cada una de las componentes del análisis de contenido. De toda esta información, destacamos que gran parte de los participantes incluyen la noción de numerador y denominador cuando introducen a sus escolares en las fracciones, mientras que sólo un 14% de ellos abarcan la noción de unidad y un 10% consideran importante incluir aspectos procedimentales al finalizar sus respuestas con la suma y resta de fracciones. Casi la totalidad de los participantes no consideran necesario añadir otras representaciones distintas de las ilustraciones gráficas dadas en la tarea, pizza, cuerda y naranja.

Consideramos que un logro de este estudio es que, a través de un instrumento aparentemente sencillo, nos hemos aproximado a este tipo de conocimiento salvando las dificultades de otros estudios (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Li y Kulm, 2008), en los que las carencias en el conocimiento del contenido sobre fracciones incidió en sus resultados.

A pesar de que otros estudios utilizan ítems similares “¿Cómo explicarías las fracciones a alguien que no sabe lo que son?” (Domoney, 2001), en esos estudios la información adquirida no estuvo a la altura de las expectativas esperadas, ya que las respuestas fueron simples y escuetas debido al modo de plantear los ítems a los participantes. Nuestro modo de formular la actividad y el uso de ilustraciones a través de pegatinas, dio lugar a una mayor riqueza de respuestas y resultados. Además, el contexto de la asignatura hizo que la dinámica de trabajo estuviese orientada hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I

(MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knoweledge. En Biehler, R., Scholz, R., Sträber, R. y Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech: Kluwer.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. A. y Flores, P. (2012) Mathematics teacher's specialized knowledge. reflections based on specific descriptors of knowledge. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2976-2984). Ankara, Turkia: Cerme.

Charalambous, C.Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 441-463.

Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* Vol. 21, núm. 3 (pp. 13-18). Southampton: BSRLM

Fuller, R. A. (1996, Octubre). Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics. Documento presentado en Mid-Western Educational Research Asociation Conference, Chicago, Ilinois.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371- 406.

Isiksal, M. y Cakiroglu, E. (2011) The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230.

Li, Y. y Kulm, G. (2008) Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction división. *ZDM, 40*, 833-843.

Lupiáñez, J.L. (2009) Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Ponte, J. P. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, *11*(2), 145- 163.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada, España: Comares, S.L.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Valverde, G. (2012). competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE FENÓMENOS Y EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE DEFINICIONES

Phenomelogical equivalence between phenomena and phenomelogical equivalence between definitions

Francisco Javier Claros Mellado[a], María Teresa Sánchez Compaña[b], Moisés Coriat Benarroch[c]

[a] Universidad Complutense de Madrid, [b] Universidad de Málaga, [c] Universidad de Granada

Resumen

Presentamos resultados relativos a la equivalencia matemática y fenomenológica de la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy. Para ello enunciamos dos criterios que permiten determinar cuando dos fenómenos son equivalentes y cuando lo son dos definiciones, desde un punto de vista fenomenológico. A continuación y usando estos resultados realizamos avances significativos para demostrar en un futuro próximo que la definición de límite finito de una función en el infinito y la condición de Bolzano-Cauchy, además de ser equivalentes matemáticamente también lo son fenomenológicamente. Para ello enunciamos los fenómenos organizados por la definición de Bolzano-Cauchy que convenimos en llamarla definición de función de Cauchy.

Palabras clave: *equivalencia, fenomenología, límite, sucesión, función.*

Abstract

We present results about the mathematical and phenomenological definition of equivalence of finite limit of a sequence and the definition of Cauchy sequence. For this, we state two criteria to determine when two phenomena are equivalent and when two definitions are equivalent too, from a phenomenological point of view. Furthermore we use these results to make significant progress in the near future to show that the definition of finite limit of a function at infinity and the Bolzano-Cauchy condition are mathematically and also phenomenologically equivalent. For this we state phenomena organized by the Bolzano-Cauchy definition that we agree to call function Cauchy definition.

Keywords: *equivalence, phenomenology, limit, sequence, function.*

DEFINICIONES SELECCIONADAS

En Claros (2010) se eligió la definición que denominamos ε-N después de realizar una consulta a expertos en la que se presentaron siete definiciones extraídas de manuales universitarios. Esta definición convenimos en llamarla definición S y por su analogía formal elegimos la definición LFFP denominada límite finito de una función f en un punto. Junto a estas dos definiciones enunciamos la definición de sucesión de Cauchy para sucesiones (SC), la caracterización por sucesiones del límite funcional (CPS) y el criterio general de convergencia de Bolzano-Cauchy que convenimos en denominarlo definición de función de Cauchy (FC).

> Definición S: Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim $x_n = x$) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n > N$ se cumple que $|x_n-x| < \varepsilon$ (Spivak, 1991, p. 615.)

Claros, F.J., Sánchez-Compaña, M. T., y Coriat, M. (2014). Equivalencia fenomelógica entre fenómenos y equivalencia fenomenológica entre definiciones. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 37-44). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Definición SC: *Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para ε.>0 existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N, entonces* $|a_n-a_m| < \varepsilon$. *(Esta condición se escribe generalmente lim m,n→∞ $|a_n - a_m|=0$).* (Spivak, 1991, p. 624.)

Definición LFFP: *La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo* $\varepsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que, para todo x, si* $0 < |x - a| < \delta$, *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Spivak, 1991, p. 118. Notación adaptada.)

Definición CPS: *Sea f una función con valores reales definida en D y sea a un punto de acumulación de D. Diremos que el límite de f(x), cuando x tiende a a es L, si para cada sucesión $\{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$, se cumple que $f(x_n) \to L$.* (Ortega, 1993, p.68)

Definición FC. Cualquiera que sea la naturaleza del límite, bien para $x\to x_0$ *o* $x\to\infty$, *asi como que sea a la derecha o izquierda de x_0, se puede enunciar el siguiente criterio general de convergencia de Bolzano-Cauchy: La condición necesaria y suficiente para que una función f(x), definida sobre un conjunto $I \subset R$, tienda hacia un límite finito l, cuando $x\to x_0$, punto de acumulación de I, es que para todo $\mathcal{E}>0$ exista un entorno δx_0, tal que cualesquiera que sean x' y x'' $\in \delta x_0 \cap I$ se tenga $|f(x')-f(x'')|< \mathcal{E}$* (Losada-Rodríguez, 1978)

Esta definición (Def FC) vamos a dividirla en dos partes por un lado tendremos cuando $x\to x_0$ y por otro lado cuando $x\to\infty$. Nosotros nos ocuparemos del primer caso y convenimos en llamarla definición de función de Cauchy.

Una vez presentadas las cinco definiciones con las que se va a trabajar vamos a establecer la equivalencia fenomenológica entre la definición de límite finito de una sucesión (Def S) y la definición de sucesión de Cauchy (Def SC). A continuación caracterizaremos los fenómenos organizados por la definición de función de Cauchy (Def FC) como un paso previo a un trabajo que está aún por hacer: demostrar la equivalencia fenomenológica entre la definición de límite finito de una función en un punto y la definición de función de Cauchy y entre esta y la caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto.

CRITERIO DE EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE DEFINICIONES

En Claros, Sánchez y Coriat (2009) y Claros (2010) se presentaron los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy. En el caso de la definición de límite finito de una sucesión estos fenómenos se denominaron aproximación simple intuitiva (a.s.i) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s). Por otro lado en el caso de la definición de sucesión de Cauchy estos fenómenos se denominaron aproximación simple intuitiva de Cauchy y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy. En Claros, Sánchez y Coriat (2013) se dieron avances significativos respecto a estos nuevos fenómenos que habíamos observados, que llevaron a enunciar dos criterios que permiten decidir cuando dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente y cuando dos definiciones son equivalente fenomenológicamente. Los criterios fueron los siguientes:

- Criterio 1. *Dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente si corresponden al mismo enfoque (o intuitivo o formal) y la verificación de un fenómeno va irremediablemente unida a la verificación del otro y viceversa.*

Para estudiar la equivalencia fenomenológica entre definiciones, enunciamos el siguiente criterio:

- Criterio 2. *Dos definiciones matemáticamente equivalentes son equivalentes fenomenológicamente si los fenómenos organizados por cada una de ellas son fenomenológicamente equivalentes.*

Teniendo en cuenta el criterio 1 y el criterio 2 vamos a estudiar si los pares de fenómenos organizados por cada definición son equivalentes entre si. Abordaremos en primer lugar las sucesiones y en segundo lugar las funciones. En el cada caso intentaremos dar evidencias de la equivalencia fenomenológica entre los pares de definiciones: definición S – definición SC y definición F- definición FC. Para demostrar esta equivalencia fenomenológica será imprescindible demostrar la equivalencia fenomenológica entre los fenómenos asociados a cada una de ellas.

SUCESIONES. FENÓMENOS ASOCIADOS A LAS DEFINICIONES S Y SC

Los fenómenos organizados por la definición S ya fueron descritos con detalle en Claros (2010) y Sánchez (2012). Estos fenómenos son denominados fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s). En este apartado nos ocupamos de describir los fenómenos organizados por la definición de sucesión de Cauchy que convenimos en llamarlos fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy (i.v.s.c).

Aproximación simple intuitiva de Cauchy

Cuando realizamos una lectura informal de la definición de sucesión de Cauchy observamos que las distancias entre los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas a medida que n crece. Podemos decir que las distancias entre los términos de la sucesión tienden a cero cuando n y m tienden a infinito. Convenimos en llamar a este fenómeno, fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy.

- *Aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c).* Dados *k* términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1,a_1)$, $(2,a_2)$, ..., (k,a_k), caracterizamos la aproximación simple intuitiva de Cauchy como el fenómeno observado al inspeccionar cualquier secuencia de valores; a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre dos valores $|a_n - a_m|$ "parece acercarse" a cero. Es decir a medida que avanzamos en la sucesión, las diferencias existentes entre cualesquiera dos valores de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas.
- *Modelo*. En la sucesión *(1,1), (2,1/2), (3,1/3),...,* las diferencias $|1/n- 1/m|$, parecen acercarse a 0 a medida que *n y m* crecen. Las diferencias entre los términos consecutivos se van haciendo cada vez más pequeñas: $|1/2 -1| < |1/3 -1/2| < |1/4-1/3| < \ldots$

El fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy es el fenómeno más fácil de observar en las sucesiones de Cauchy y sirve para obtener cierta convicción sobre el hecho de que las diferencias entre los términos de la sucesión se hacen cada vez más pequeña a medida que avanzamos en ella. Sin embargo este fenómeno no garantiza que la sucesión con la que se esté trabajando sea una sucesión de Cauchy, solamente da una primera pista sobre ello.

Retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy

La seguridad de que los términos, cuando avanzamos en la sucesión, no van a tener un comportamiento inesperado, se adquiere con el fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy, el cual se apoya en los dos procesos siguientes, que forman parte de la Definición SC.

- Si $\varepsilon>0$ existe un N perteneciente al conjunto de los números naturales.
- Si n, m >N entonces $|a_n-a_m|<\varepsilon$

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o i.v.s.c.

El fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy se manifiesta al interpretar y aplicar los procesos indicados, desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función e-N. Dicho en términos coloquiales y gráficos, el fenómeno de Cauchy corresponde a un proceso de ida-vuelta. Una vez fijado épsilon, tenemos que determinar el valor de N (proceso de ida) a partir del cual las diferencias entre dos términos cualesquiera de la sucesión son menores que el valor de épsilon fijado anteriormente (proceso de vuelta).

En el fenómeno de Cauchy se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición de sucesión de Cauchy induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada. Esta nueva función emergente resulta ser una función natural de variable real (ε, N(ε)).

El modelo de este fenómeno es el siguiente:

Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Si fijamos e, tenemos que determinar N de manera que si n, m pertenecen al conjunto de los números naturales se cumpla que $|1/n - 1/m|<\varepsilon$. Sabemos que $|1/n - 1/m|<1/n$ es una desigualdad que se cumple para todo n, m>1 y n<m; además se cumple que $1/n< \varepsilon$, por la propiedad arquimediana. Entonces tomando $N=E(1/\varepsilon) + 1$, aseguramos que $|1/n - 1/m|<\varepsilon$.

Como consecuencia de todo lo anterior afirmamos que la definición de sucesión de Cauchy organiza los fenómenos de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c) y de ida y vuelta en sucesiones de Cauchy (a.s.i.c).

COMPARACIÓN DE LOS FENÓMENOS DESCRITOS

En este apartado comparamos los fenómenos asociados al par *definición S – definición SC* con el fin de establecer relaciones entre los pares de fenómenos asociadas a cada una de las definiciones y también para establecer relaciones entre dichas definiciones siempre desde un punto de vista fenomenológico.

Aproximación intuitiva

En el fenómeno a.s.i, los términos de la sucesión parecen acercarse a un número (candidato a límite), mientras que, en el fenómeno a.s.i.c, las diferencias entre los términos de la sucesión parecen devenir cada vez más pequeñas.

A pesar de existir diferencias notables entre los fenómenos de cada pareja, diferencias que dotan a cada uno de ellos de una entidad propia, observamos también cierta relación, que ilustraremos con un ejemplo.

Dada la sucesión $u_n = \dfrac{1+3n}{n+2}$ observamos que los términos parecen acercarse al valor 3. Esto significa que, si pensamos una escala de proximidad a 3, la secuencia u_{100}, u_{1000}, u_{10000} es una secuencia de valores cada vez más próximos a 3, como corresponde al fenómenos a.s.i. También observamos que las diferencias entre dos términos están más próximas a cero si los índices son mayores: $u_{10000} - u_{1000} < u_{1000} - u_{100}$, como corresponde al fenómeno a.s.i.c. Desde luego, en este ejemplo, no hay razón alguna para dar prioridad a uno de los fenómenos frente al otro

A lo dicho en este caso particular le asignamos validez general:

Si el candidato a límite, en la Definición S, se eligió correctamente (lo cual nunca está garantizado por el enfoque intuitivo asociado a la primera parte de la definición) es imposible que se dé el fenómeno a.s.i pero no el a.s.i.c o, recíprocamente, que se dé el fenómeno a.s.i.c pero no el fenómeno a.s.i. Dicho con otras palabras, si el candidato a límite fue elegido correctamente, los fenómenos a.s.i y a.s.i.c son distinguibles, pero se dan conjunta e inseparablemente.

Este hecho lo expresaremos diciendo que los fenómenos a.s.i. y a.s.i.c son equivalentes o que hay equivalencia fenomenológica entre los enfoques intuitivos incluidos en Definición S y Definición SC.

Queda pendiente de estudio el supuesto en que el candidato a límite no fuera elegido correctamente. Creemos que algunas respuestas a este supuesto ayudarán a desarrollar una fenomenología didáctica del límite.

Retroalimentación

En los fenómenos i.v.s e i.v.s.c, se observa que las funciones asociadas a cada uno de estos fenómenos pueden ser distintas.

Consideremos el siguiente ejemplo. Dada la sucesión $A_n=\{1/n\}$, observamos que la función (ε, N(ε)) en la definición de límite finito es distinta de la función (ε, N(ε)) asociada a la misma sucesión A_n en la definición de sucesión de Cauchy. Esta afirmación la vamos a justificar tomando valores de epsilon y observando qué valor debe tomar N para que se cumplan la definición S y la definición SC. La Tabla 1 recoge lo esencial del ejemplo.

Tabla 1. Ejemplo

	Función $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ *en la definición de límite finito de una sucesión*	Función $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ *en la definición de sucesión de Cauchy*
$\varepsilon=1/4$	$\lvert 1/n\rvert < ¼$ para N=5	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < ¼$ para N=4
$\varepsilon=1/5$	$\lvert 1/n\rvert < 1/5$ para N=6	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/5$ para N=5
$\varepsilon=1/6$	$\lvert 1/n\rvert < 1/6$ para N=7	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/6$ para N=6
$\varepsilon=1/7$	$\lvert 1/n\rvert < 1/7$ para N=8	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/7$ para N=7
$\varepsilon=1/8$	$\lvert 1/n\rvert < 1/8$ para N=9	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/8$ para N=8

Aunque la definición de la función $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ parece distinta en ambos casos ya que los valores que toma no coinciden y lo que se hace con ellos tampoco, siempre podemos encontrar una función que unifique ambas ya que si elegimos como $N=\max\{n_1,n_2\}$, (n_1 es el valor N en la definición de límite finito de una sucesión y n_2 el valor de N en la definición de sucesión de Cauchy), se cumplen la Definición S y la Definición SC. Por lo tanto si se da un fenómeno, se da otro y recíprocamente. Esto, al igual que sucede con el enfoque intuitivo, justifica nuestro criterio de equivalencia fenomenológica el cual afirma que dos fenómenos son equivalentes si la presencia de uno de ellos va irremediablemente unida a la presencia del otro y viceversa. Por ello, concluimos que, en las sucesiones con límite finito, hay un paralelismo entre la equivalencia matemática y la equivalencia fenomenológica.

EQUIVALENCIA FENOMENOLÓGICA ENTRE FENÓMENOS Y DEFINICIONES

Si reunimos todas las consideraciones sobre la equivalencia de los fenómenos, observamos que la equivalencia fenomenológica es algo más compleja que la equivalencia matemática. La equivalencia matemática establece que el contenido de una definición no es esencialmente diferente del de la otra. La equivalencia fenomenológica establece que las parejas de fenómenos son distinguibles pero no se pueden dar los unos sin los otros.

Esta equivalencia fenomenológica entre las parejas de fenómenos: a.s.i / a.s.i.c e i.v.s / i.v.s.c, lleva consecuentemente a establecer una equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una sucesión y sucesión de Cauchy, ya que cada definición organiza fenómenos que son fenomenológicamente equivalentes

FUNCIONES. FENÓMENOS OBSERVADOS EN LAS DEFINICIONES LFFP, CPS Y FC.

Los fenómenos organizados por las definiciones de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la caracterización por sucesiones del límite funcional (Def CPS) ya fueron descritos con detalle Sánchez (2012). Estos fenómenos son denominados fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en funciones (IVF) y fenómeno de infinitas retroalimentaciones o ida-vuelta de sucesiones coordinadas por la función (Iivs). También en Sánchez (2012) se vio la equivalencia fenomenológica entre ambas definiciones.

Está aún por estudiar la equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la definición de función de Cauchy (Def FC) y entre la caracterización por sucesiones del límite funcional (Def CS) y la definición de función de Cauchy (Def FC). En este apartado no vamos a demostrar la equivalencia fenomenológica entre los pares de definiciones señaladas, lo que si vamos a hacer es describir los fenómenos organizados por la definición de Cauchy- Bolzano como paso previo para establecer dichas equivalencias fenomenológicas.

Aproximación doble intuitiva de Cauchy- Bolzano. (ADICB)

Cuando dos valores cualesquiera de la variable independiente, x´ y x´´, parecen acercarse entre sí, los de sus imágenes, f(x´) y f(x´´), también parecen acercarse, con cualquier patrón de acercamiento que se elija para los valores de la variable independiente. Nos referimos a este fenómeno como "aproximación doble intuitiva de Cauchy- Bolzano" (ADICB).

El fenómeno de aproximación doble intuitiva de Cauchy- Bolzano nos puede ofecer cierta convicción sobre el hecho de que las diferencias entre las imágenes de valores de la función se hacen cada vez más pequeña a medida que los propios valores de la variable independiente se acercan entre sí. Sin embargo este fenómeno no garantiza que la función con la que se esté trabajando cumpla la condición de ser de Cauchy, solamente da una primera pista sobre ello.

El modelo de este fenómeno es el siguiente:

Dada la función $f(x)=x^2$. Si tomamos los valores (1,01, 1.0201), (1,001, 1,002001), (1,0001, 1.00020001),…. podemos observar como si las diferencias entre los valores de la variable independiente tienden a cero, los valores de la variable dependiente tienden a cero también.

Retroalimentación o ida-vuelta de Cauchy- Bolzano en funciones

Al observar la condición de Cauchy de una manera formal podemos observar dos procesos:

- El primer proceso parte de la siguiente afirmación *para todo $\mathcal{E}>0$ exista un $\delta>O$*
- El segundo proceso se observa en la siguiente afirmación: *cualesquiera que sean $|x'-x''|< \delta$ se tenga $|f(x')-f(x'')|< \mathcal{E}$*

La observación conjunta de estos dos fenómenos es lo que denominamos retroalimentación o ida-vuelta de Cauchy-Bolzano. (IVFCB)

Este fenómeno de retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar los procesos indicados, desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función e-δ. Dicho en términos coloquiales y gráficos, el fenómeno de retroalimentación de Cauchy- Bolzano para funciones corresponde a un proceso de ida-vuelta. Una vez fijado épsilon, tenemos que determinar el valor de *delta* (proceso de ida) por el cual, si dos valores de la variable independiente se diferencian en menos de ese δ, las diferencias entre las imágenes de esos términos de la función son menores que el valor de épsilon fijado anteriormente (proceso de vuelta).

En el fenómeno de retroalimentación de Cauchy-Bolzano para funciones se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la función inicial.

De hecho, con el apoyo de la propia función de referencia, la definición del criterio general de convergencia de Bolzano-Cauchy induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la función. Esta nueva función emergente resulta ser una función real de variable real (e, δ(e)).

CONCLUSIONES

Describimos las conclusiones de este estudio en los siguientes puntos:

La Definición S ("definición épsilon - delta" de límite finito de una sucesión) organiza el fenómeno de aproximación simple intuitiva o fenómeno a.s.i y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones o fenómeno i.v.s. El fenómeno a.s.i da un primer candidato a límite, que quedará confirmado, a través del fenómeno i.v.s, siempre que seamos capaces de construir una función epsilon-N que cumpla los dos procesos mencionados anteriormente en la definición del fenómeno i.v.s.

La Definición SC (de sucesión de Cauchy) organiza el fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy o a.s.i.c y el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o i.v.s.c. El fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy da una primera impresión de lo que sucede con la sucesión; si la sucesión es de Cauchy las distancias entre los términos se van haciendo cada vez más pequeñas; en caso contrario, la sucesión no sería de Cauchy. Una vez que tenemos cierta sospecha de que la sucesión es de Cauchy, recurrimos al fenómeno i.v.s.c y construimos una función épsilon-N que cumpla los dos procesos mencionados anteriormente en la definición del fenómeno i.v.s.c.

Entendemos que la equivalencia entre los cuatro fenómenos mencionados, considerados por parejas, a.s.i / a.s.i.c e i.v.s / i.v.s.c, es más compleja que la equivalencia matemática entre las definiciones; hemos precisado en qué sentido esa equivalencia fenomenológica es más compleja.

Hemos dado un criterio que permite decidir cuando dos fenómenos son equivalentes desde el punto de vista fenomenológico y esto nos ha llevado a afirmar que el fenómeno a.s.i es equivalente al fenómeno a.s.i.c y que el fenómeno i.v.s es equivalente al fenómeno i.v.s.c.

Hemos dado un criterio para decidir si dos definiciones son equivalentes fenomenológicamente y hemos usado este criterio para afirmar que la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy son equivalentes en este sentido.

Hemos recordado que la definición de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la caracterización por sucesiones del límite funcional (Def CS) son fenomenológicamente equivalentes (Véase Sánchez, 2012)

Hemos abordado el estudio de la definición de función de Cauchy, deiniendo para ello dos fenómenos organizados por dicha definición: aproximación doble intuitiva Cauchy para funciones (ADICF) y retroalimentación de Cauchy para funciones (IVFCB).

PERSPECTIVAS FUTURAS

Queda aún mucho trabajo por hacer relativo a la equivalencia fenomenológica entre definiciones. De hecho entre nuestros próximos trabajos nos proponemos las siguientes tareas:

- Demostrar la equivalencia fenomenológica entre la definición de límite finito de una función en un punto (Def LFFP) y la definición de función de Cauchy (FC).
- Demostrar la equivalencia fenomenológica entre la caracterización por sucesiones (Def CS) y la definición de función de Cauchy (FC).
- Abordar el estudio del límite finito de una función en el infinito y su correspondiente relación con el límite finito de una sucesión.

Referencias

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: Universidad de Granada.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*, (pp. 197-209). Santander: SEIEM

Losada-Rodríguez, R. (1978). *Análisis Matemático*. Madrid: Pirámide

Ortega, J. (1993). *Introducción al Análisis Matemático*. Barcelona: Labor y Universidad Autónoma de Barcelona.

Sánchez, M.T (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: Universidad de Granada.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

CARACTERIZACIÓN DE ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO MEDIANTE TAREAS DE INVENCIÓN DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Characterization of student with mathematical talent by tasks problem posing: an exploratory study

Johan Espinoza González[a], Jose Luis Lupiañez Gómez[b], Isidoro Segovia Alex[b]

[a]Universidad Nacional de Costa Rica, [b]Universidad de Granada, España

Resumen

Presentamos una experiencia llevada a cabo con dos grupos de estudiantes, uno considerado con talento en matemática y otro conformado por estudiantes de un colegio público normal, a los que se les propuso dos tareas de invención de problemas aritméticos. Los resultados indican que los estudiantes con talento matemático se caracterizaron por inventar problemas con una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas que sus compañeros con menor habilidad matemática. Este estudio es parte de un proyecto más amplio de tesis doctoral que busca caracterizar el talento matemático mediante la invención de problemas aritméticos.

Palabras clave: *Invención de problemas, resolución de problemas, problemas aritméticos; talento matemático, Educación Matemática.*

Abstract

We present a carried out experience with two groups of students, one considered talented in math and other students made up of a regular public school, to those who proposed two tasks invention of arithmetic problems. The results indicate that students with mathematical talent were characterized by inventing problems with a greater number of propositions and types of numbers, require more steps and different calculation processes to be resolved and presents a higher amount of semantic relationships other his companions with lower mathematical ability. This study is part of a larger PhD project that seeks to characterize the mathematical talent through the invention of arithmetic problems.

Keywords: *Problem posing, problem solving, arithmetic problems, mathematical talent, mathematics Education.*

INTRODUCCIÓN

El problema de investigación considerado en este trabajo de investigación comprende dos campos de estudio: los sujetos con talento matemático y la invención de problemas matemáticos. De acuerdo con el análisis de literatura realizado, se constata que ambos campos han sido de interés dentro de la investigación en didáctica de la matemática (Espinoza, 2011).

Así, la investigación de los sujetos con talento se ha centrado en tres grandes temas: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención (Castro, 2008). En el caso de la invención de problemas, existen investigaciones que la han estudiado como característica de la actividad creativa o talento

Espinoza, J., Lupiañez, J.L, y Segovia, I. (2014). Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas: un estudio exploratorio. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 45-54). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

excepcional, como actividad de clase, como característica prominente de la actividad matemática, para mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, para observar la comprensión matemática de los estudiantes (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2014).

Sin embargo, existen pocos estudios que relacionen ambos tópicos, de manera que pongan de manifiesto las características particulares que presentan este tipo de estudiantes cuando inventan problemas. Por tanto, nos centraremos en caracterizar de forma exploratoria, la actuación de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático, ante dos tareas semiestructuradas de invención de problemas aritméticos, construidas especialmente para este estudio y compararlo con las actuaciones que presentan un grupo de estudiantes de un colegio público ante la misma tarea.

Así, los objetivos planteados en esta investigación pretenden:

a) Construir un instrumento de planteamiento de problemas con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención problemas aritméticos verbales.

b) Desarrollar y utilizar un esquema analítico para valorar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes.

c) Definir categorías de análisis que permitan caracterizar las producciones de ambos grupos de estudiantes ante la tarea de invención de problemas aritméticos,

d) Identificar diferencias entre los problemas inventados por ambos grupos con base en las categorías de análisis definidas.

MARCO TEÓRICO

La revisión de literatura que se incluye en este apartado comprende tres partes bien diferenciadas: el talento matemático, los problemas aritméticos verbales y la invención de problemas matemáticos. A continuación se tratan algunos conceptos relacionados con cada uno de estos tópicos.

Talento matemático

Algunos autores sostienen que los estudiantes con talento presentan características que los diferencias del resto de sus compañeros. Por ejemplo, Greenes (1981), menciona que presentan un mayor ritmo de aprendizaje, excelente memoria y excepcionales capacidades verbales y de razonamiento y gran poder de abstracción. Pero, ¿quiénes son los estudiantes con talento?

Al respecto, se diferencian cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos (Villarraga, Martínez y Benavides, 2004). Dado que en esta investigación nos centramos en estudiar el rendimiento de estudiantes considerados con talento matemático, es que trataremos la noción de talento orientado al logro o rendimiento.

En esta investigación adoptamos la definición de Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado aptitudes específicas en el área de matemáticas. Esto porque uno de los grupos seleccionados está conformado por estudiantes que han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en el área de la matemática.

Problemas aritméticos

Adoptamos la noción propuesta por Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito), unos datos conocidos; una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan), una meta (llegar a un resultado) y un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado).

De igual forma, se acogió la definición de problema aritmético propuesta por Puig y Cerdán (1988), al considerarla como un enunciado verbal o escrito que proporciona información de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

En relación con su clasificación, Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, et al. (1997), mencionan los problemas de una etapa o más de una etapa. También Puig y Cerdán (1988), sugieren otra clasificación que atienden al tipo de estructura operatoria (aditiva o multiplicativa) y al componente semántico involucrado en el problema. Este mismo autor menciona los problemas combinados mixtos que son un tipo de problemas de más de una etapa.

Por último, diversos autores hacen referencia a variables de estudio de los problemas aritméticos. Al respecto, se destacan las variables sintácticas, de contenido, componente semántico (Puig y Cerdán, 1988), el tipo de proposición interrogativa (Castro, 1995), la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta (Castro, Rico y Gil, 1992).

Invención de problemas

El término invención de problemas o planteamiento de problemas, también conocida en la literatura en inglés como "problem posing" (Brown y Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1997), implica la formulación de nuevos problemas, así como la reformulación de situaciones dadas (Silver, 1994; English, 1997; Silver y Cai, 1996).

En este sentido, los estudiantes pueden inventar problemas durante la solución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996). Por ejemplo, en el trabajo de Polya (1979), se cuestiona ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición? Este proceso también podría ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución, sino la formulación de problemas a partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Por último, los estudiantes pueden inventar problemas después de resolver un problema, cuando se le indica a los estudiantes que modifiquen el objetivo, condición o pregunta del mismo, con el fin de generar nuevos problemas (Silver, 1994). Por ejemplo, Brown y Walter (1993), proponen una estrategia denominada "¿What if not?", la cual consiste en cambiar las condiciones y restricciones de un determinado problema, para así plantear nuevos e interesantes problemas.

Por otra parte, se identifican tres formas en las cuales se podrían formular problemas: situación libre, semiestructuradas y situaciones estructuradas (Stoyanova, 1998). En la primera, los estudiantes no tienen restricciones para inventar problemas; mientras que en las situaciones semiestructuradas se les propone que planteen problemas con base en alguna experiencia o situación. Por último, las situaciones estructuradas, son aquellas en las que se reformulan los problemas dados o se cambia la condición del mismo.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo exploratorio descriptivo, pues corresponde a un primer acercamiento al estudio de la invención de problemas aritméticos por estudiantes considerados con talento matemático, privilegiando la descripción e interpretación de la información, pero al mismo tiempo dando un tratamiento cuantitativo a los datos (Espinoza, 2011). Los sujetos de estudio corresponden a dos grupos de estudiantes con características diferentes. El primero, denominado grupo talento, está conformado por 21 estudiantes considerados con talento matemático que participaron en el proyecto ESTALMAT Andalucía durante el curso 2010-2011 y que tienen edades comprendidas entre los 13 y 15. Este proyecto pretende detectar y estimular durante dos años académicos el talento precoz en matemática de 25 alumnos de centros andaluces escogidos mediante la realización de pruebas de selección[1]. El segundo lo conforman 19 estudiantes de tercer grado del Instituto de

---

[1] http://thales.cica.es/estalmat/

[2] http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

Educación Secundaria Nazarí, ubicado en Salobreña, provincia de Granada, España y que llamamos “grupo estándar”. Estos estudiantes tienen entre 14 y 15 años.

Descripción del instrumento para recolectar información

En este estudio se elaboró un cuestionario con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención de problemas (Stoyanova, 1998). Para el diseño de este instrumento se tomaron en cuenta aspectos como la clase de información que proporciona el problema, el tipo de información que permanece desconocida y que el contexto escolar presentado en la situación sea muy familiar para los estudiantes (Moses et al., 1990). Además, debía ser una situación que motive a plantear diferentes tipos de problemas, estimule la creatividad, permita el empleo de diferentes tipos de números, así como favorecer e incentivar la invención de problemas difíciles para ambos grupos de estudiantes.

La primera tarea plantea lo siguiente: “de acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información”.

La figura propuesta[2] a los estudiantes para que inventen el problema es la siguiente:

Figura 1. Imagen utilizada en la primera tarea

Las indicaciones de la segunda tarea son similares a la anterior; pero en ésta tuvieron que inventar un problema matemático a partir de la siguiente situación expuesta de forma textual: “Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros”.

Descripción de las categorías de análisis empleadas

Para elaborar las categorías de análisis consideramos las características propias de esta investigación y realizamos una revisión de las variables de estudio de los problemas aritméticos propuestas por Puig y Cerdán (1988); Castro (1995); Castro et al., (1988) y los esquemas empleados por Silver y Cai (2005; 1996); Cázares (2000); Ayllón (2012). Así, definimos las siguientes tres categorías de análisis y en cada una de ellas variables de estudio. Dichas variables se explican con mayor detalle y sustento teórico en Espinoza (2011).

En la primera categoría, denominada estructura sintáctica, se estudió la longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. La segunda categoría, llamada estructura matemática, fue analizada de acuerdo con el tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Por último, en la categoría de estructura semántica, los problemas fueron estudiados en relación a su estructura semántica y cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado.

[2] http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Todas las producciones correspondieron a problemas matemáticos, por lo que los autores del estudio los resolvieron y clasificaron en resolubles y no resolubles. Dentro de éstas encontramos problemas matemáticos no resolubles que presentaron características importantes de analizar. Por ello las clasificamos como incompletas (Puig y Cerdán, 1988) y los distinguimos de aquellos que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérico o conceptual. A los problemas matemáticos resolubles y no resolubles incompletos o que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica se les aplicó el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática explicado anteriormente. Mientras que los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual fueron analizados sólo desde su estructura sintáctica, pues no era posible analizar la estructura semántica y matemática.

La figura 2 muestra el esquema utilizado para valorar las producciones de los estudiantes.

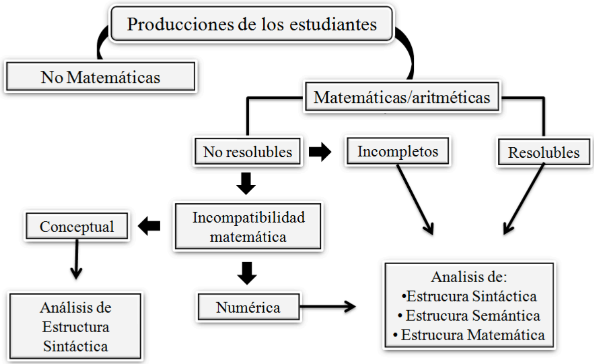


Figura 2. Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

RESULTADOS

Para transcribir las producciones se utilizó una codificación con seis caracteres para hacer referencia a las mismas, de manera que los primeros cuatro indican el número del estudiante y grupo al que pertenece y los restantes a la producción, ya sea de la primera o segunda tarea. Por ejemplo, el código 6GE-T2 se refiere a la producción del estudiante número seis del grupo estándar ante la segunda tarea de invención de problemas.

A continuación se muestran las características generales de los problemas inventados por dichos estudiantes y seguidamente se exponen los resultados obtenidos según la estructura sintáctica, matemática y semántica de los problemas.

Características generales de los problemas inventados

En primera instancia resultó que todos los enunciados inventados por los estudiantes son problemas matemáticos, de los cuales el 65% son resolubles. Es interesante hacer notar que los estudiantes del grupo estándar plantearon una mayor proporción de problemas resolubles (74%) que el grupo talento (57%). Este último resultados nos sorprende en la medida que se espera que ocurra lo contrario; a falta de la realización de otro estudio más amplio que los confirme, pueden ser varios los factores que inciden en los mismos: mejor actitud del grupo talento ante las matemáticas, menor ansiedad, menor miedo a equivocarse, el no tener que resolver los problemas que inventaban, etc.

También se obtuvo que los problemas no resolubles por incompatibilidad matemática representan el 22,5% (18 problemas) y los problemas incompletos 12,5 % (10 problemas). Estos dos tipos de problemas representan el 35% de los problemas matemáticos producidos por los estudiantes. Un ejemplo de problema incompleto es el siguiente: *En este viaje va lleno. En una primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan*

290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenían cada pareja (de la 1° parada)? (3GT-T2)

Este problema es interesante porque propone una serie de relaciones entre los datos y presenta una gran riqueza en cuanto a las variables de estudio; sin embargo, no es resoluble porque el estudiante no indicó el total de personas que quedaron en el interior del tren luego de la última parada.

Un problema planteado que presenta incompatibilidad matemática de tipo numérica porque 294 no es divisible por 4 es el siguiente: *De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294) pero en un último momento uno de los vagones sufre una serie de desperfectos por lo que debe quedarse en la estación. Si todos los vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros deben quedarse en tierra?* (6GE-T2)

Análisis según la estructura sintáctica

El análisis según la estructura sintáctica comprende el estudio de tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. A continuación se describen los principales resultados en relación con estas tres variables.

Longitud del enunciado: Resultó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas planteados por el grupo talento (5,27) es mayor que en los problemas inventados por sus compañeros del grupo estándar (3,44). Además, resultó que el 69,1% de los problemas matemáticos inventados por el grupo talento están formados por cinco o más proposiciones, mientras que el grupo estándar planteó 31,6% de problemas con dicha característica.

También se observó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas no resolubles (5,58) es mayor que en los resolubles (5,04). Esto se evidenció en el planteamiento de una mayor proporción de problemas no resolubles que presentan cinco o más proposiciones (77,8%) que resolubles con la misma característica (62,5%).

Tipo de proposición interrogativa**:** Con respecto a esta variable, resultó que la mayoría de las proposiciones interrogativas que plantearon los estudiantes del grupo talento y estándar son de asignación (52,4% y 60,5% respectivamente), mientras que las proposiciones interrogativas relacionales fueron las menos preferidas por los estudiantes de ambos grupos. El siguiente es un ejemplo de problema que presenta una proposición interrogativa de asignación: *A las 9:00 de la mañana sale un tren con 50 pasajeros, a las once vuelve con 70 pasajeros, vuelve a salir y vuelve con 30 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros han entrado y salido en total?* (2GE-T2).

Tipo de número empleado: Se observó que ambos grupos prefirieron utilizar números naturales en el planteamiento de su problema, con un 97,6% en el grupo talento y 97,4% en el grupo estándar. También resultó que el 43,9% de los problemas planteados por el grupo talento presentan el uso de número racionales expresados tanto en notación decimal como fraccionaria; mientras que el uso de este tipo de número en los problemas planteados por el grupo estándar representó el 18,5%. Además, el grupo talento planteó casi el doble de proporción de problemas con dos o más tipos de números que el grupo estándar, los cuales corresponden a 34,1% y 18,4% respectivamente.

Análisis según la estructura matemática

Esta categoría fue analizada con base en cuatro variables. A continuación se presentan los principales resultados en cada una de ellas. Este análisis fue aplicado a 78 problemas ya que dos que presentaron incompatibilidad matemática son imposibles de resolver incluso con información adicional.

Tipo de estructura operatoria y cantidad de etapas: Con respecto a esta variable resultó que la mayoría de los problemas planteados por ambos grupos son de estructura mixta; sin embargo, el grupo talento planteó una mayor proporción de este tipo (80%) que sus compañeros del grupo estándar (55,3%). Además, se observó que el grupo estándar planteó una proporción mayor de problemas de estructura multiplicativa y aditiva (31,5% y 13,1% respectivamente) que sus compañeros del grupo talento (17,5% y 2,5% respectivamente). Por último, se encontró que el 97,5% y 94,8% de los problemas planteados por el grupo talento y estándar, respectivamente, son de más de una etapa.

Tipo de operación y cantidad de procesos implicados en la solución del problema: En relación con el tipo de operación encontramos que el grupo talento prefirió plantear problemas que implicaban el uso de multiplicación-división, suma-multiplicación y suma-resta-multiplicación-división, los cuales corresponden al 60% de los problemas planteados por este grupo. En el caso del grupo estándar, los problemas requieren aplicar las operaciones de multiplicación, multiplicación-división y suma-multiplicación que corresponden al 55,2%.

Con respecto a la cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, resultó que el grupo talento y estándar plantearon respectivamente el 92,5% y 81,6% de los problemas con dos o más procesos. También se observó que aproximadamente la mitad de los problemas inventados por el grupo talento (47,5%) presentan tres o más procesos distintos; mientras que el 21,1% de los problemas del grupo estándar presentan tal cantidad de procesos. Es importante resaltar que los estudiantes del grupo talento y estándar plantearon una proporción similar de problemas con dos procesos o tres procesos (70% y 73,7% respectivamente).

Cantidad de pasos distintos para resolver el problema**:** Los resultados muestran que el promedio de pasos requeridos para resolver los problemas planteados por el grupo talento (3,95) es mayor que el promedio de pasos que incluyen los planteados por el grupo estándar (2,92). Esta diferencia también se reflejó en la cantidad de problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos, puesto que el grupo talento planteó más del doble en proporción de problemas con dicha característica (67,5%), que sus compañeros del grupo estándar (31,6%). En contraste, el 68,4% de los problemas planteados por el grupo estándar requieren tres o menos pasos distintos para ser resueltos.

Otro aspecto interesante es que los estudiantes del grupo estándar plantearon una gran cantidad de problemas que requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos (80%); en contraste con el grupo talento donde el 39% presentan dicha característica. También resultó que el 66,6% de los problemas del grupo talento que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas, implican cuatro o más pasos para ser resueltos; mientras que el 42% de los inventados por el grupo talento presentan dicha característica. Por último, se observó que de los problemas que incluyen dos o tres procesos, los estudiantes del grupo talento plantearon una mayor proporción que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos (60,7%) que los inventados por el grupo estándar con dicha característica (35,7%).

Análisis según la estructura semántica

En esta categoría se analizó el tipo de estructura semántica presente en los problemas de estructura aditiva y multiplicativa. Además, se estudió la cantidad de relaciones semánticas implicadas en los problemas inventados por los estudiantes. Es importante recordar que en esta categoría, al igual que en la anterior, sólo se analizaron 78 problemas.

Estructura semántica de los problemas aditivos: Resultó que el único problema aditivo planteado por el grupo talento presenta la relación semántica de cambio, mientras que en el grupo estándar se encontraron cuatro (80%) que presentan la estructura semántica de combinación, tres de cambio (60%) y uno de comparación. Además, de los 59 problemas de estructura aditiva y mixta, de los cuales 33 fueron inventados por el grupo talento y 26 por el estándar, se encontró que ambos grupos prefirieron plantear problemas de combinación, seguido de problemas que incluyen la componente semántica de cambio.

Estructura semántica de los problemas multiplicativos. Observamos que las estructuras semánticas más utilizadas por el grupo talento fueron la de producto de medidas (71,4%) e isomorfismo de medida (57,1%). En el caso del grupo estándar, el 91,7% de los problemas multiplicativos presentan la relación semántica de isomorfismo de medida y el 25% producto de medidas. También se encontró que de los 72 problemas de estructura multiplicativa y mixta, de los cuales 39 fueron planteados por el grupo talento y 33 por el grupo estándar, ambos grupos de estudiantes prefirieron plantear problemas que incluyeran la componente semántica de isomorfismo de medida, seguida de producto de medidas y en menor proporción comparación multiplicativa.

Relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos: En relación con esta variable, resultó que la mayoría de problemas mixtos planteados por el grupo estándar (66%), incluyen las componentes semánticas combinación-isomorfismo de media o cambio-isomorfismo de medida, mientras que el grupo talento planteó sólo el 13% de los problemas mixtos con estas características. En el caso del grupo talento la combinación que tiene mayor frecuencia (30%) es cambio-combinación-isomorfismo de media o cambio-comparación-isomorfismo de medidas.

Cantidad de relaciones semánticas distintas: En esta variable observamos que los estudiantes del grupo talento inventaron problemas con una mayor media de cantidad de relaciones de estructura semántica distintas (2,83) que el grupo estándar (1,89). Además, el grupo talento planteó una proporción mayor (65%) de problemas con tres o más relaciones semánticas distintas que sus compañeros del grupo estándar (15,8). Además, todos los problemas del grupo estándar poseen tres o menos relaciones semánticas y un alto porcentaje (84,2%) presentan dos o menos relaciones semánticas distintas. También resultó que el grupo talento y estándar plantearon un porcentaje similar de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas (67,5% y 73,7 respectivamente).

CONCLUSIONES

En primera instancia, concluimos que los problemas inventados por el grupo talento presentan mayor riqueza que los inventados por el grupo estándar, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren de más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas. Este resultado es similar al obtenido por Ellerton (1986), ya que los problemas inventados por los estudiantes más hábiles requieren mayor dificultad de cálculo, presentan una mayor cantidad de operaciones e implican un sistema numérico más complejo.

Consideramos que estas diferencias también se reflejaron en la sensación de dificultad percibida al resolver los problemas, ya que en el caso del grupo estándar, al terminar de leer el enunciado se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo. Sin embargo, esto no siempre fue así en el grupo talento, donde varios problemas daban la sensación de no ser tan fáciles de resolver a simple vista. De hecho, en uno de ellos, no fue posible encontrar la solución aun cuando creemos que sí tiene.

Por otra parte, tomando en cuenta las limitaciones de este estudio, podemos concluir que un estudiante con talento se puede caracterizar por:

- Inventar una gran cantidad de problemas no resolubles.
- Incluir en el enunciado del problema cinco o más proposiciones.
- Emplear números naturales y en menor proporción números racionales.

- Emplear dos tipos de números distintos, ya sean naturales o racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria.
- Incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación.
- Combinar la estructura aditiva y multiplicativa para plantear problemas de estructura mixta.
- Incluir las relaciones semánticas de combinación y producto de medidas.
- Plantear tres o más relaciones semánticas distintas.
- Inventar problemas que requieren cuatro o más pasos para resolverlo.
- Plantear problemas que presentan dos o más procesos de cálculo distintos en su solución y en menor proporción tres o más procesos.
- Combinar los bloques de contenido curricular de aritmética y física

El siguiente es un ejemplo de problema que cumple con las características citadas

En este viaje va lleno. En la primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja (de la 1° parada)? (3GT-T2)

Por último, consideramos que a pesar de las limitaciones de nuestra investigación, identificamos algunos indicios del uso de la invención en la identificación de estudiantes con talento matemático. Por ejemplo, los problemas planteados por el grupo talento presentan características distintas a los inventados por el grupo estándar. Además, si consideramos que la capacidad de los estudiantes para inventar problemas aritméticos se relaciona con la riqueza de los problemas planteados, entonces los estudiantes con talento mostraron una mayor capacidad ante dichas tareas. Esto también se refleja en la solución de los problemas planteados por este grupo, ya que desde nuestro punto de vista, estos dan la sensación de mayor dificultad, puesto que al leer el enunciado no se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo.

Referencias

Ayllón¸ M. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. Tesis Doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Brown, S., y Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada, España: Comares.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada, España: Universidad de Granada.

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp. 63-76). Granada, España: SEIEM.

Castro, E (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y B. Lorenzo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo.* Memoria de tercer ciclo. Granada, España: Universidad de Granada.

Ellerton N. (1986). Children’s made up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17(3)*, 261-271.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3),* 183-217.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada, España: Universidad de Granada

Espinoza, J., Lupiañez, J.L., y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ambitos de investigación en Educación Matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet 14*(2), 1-12

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematic. *Arithmetic Teacher, 28*(8), 14-17.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Shoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education.* (pp. 123-148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Moses, B., Bjork, E., y Goldenberg, E. R (1990): Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. Yearbook: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 83-91.

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid, España: Síntesis.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A., & Cai, J. F. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., y Kenney, P (1996). Posing matehematical problem: an exploratory study. *Journal for research in matehematics education. 27*(3), 293-309.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. (pp. 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.

Villarraga, M., Martínez, P., y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y B. Blanco (Eds). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 25-35). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

DEMOSTRACIONES ALGEBRAICAS DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS EN SHARḤ AL-URJŪZA AL-YĀSMĪNIYYA DE IBN AL-HĀ'IM

Algebraic Proofs of Quadratics Equations in Sharḥ al-Urjūza al-Yāsmīniyya of Ibn al-Hā'im

Abdelaziz Fadil[a], Luis Puig[b]

[a]I.E.S. Isabel la Católica (Granada), [b]Universitat de València Estudi General

Resumen

El álgebra árabe es operar con cantidades desconocidas aplicando las mismas reglas aritméticas que operan con los números conocidos. Esta conceptualización, junto con la definición de las especies de números, ha facilitado el desarrollo del cálculo algebraico de las expresiones algebraicas. En particular, ha permitido la denominación, enunciación, clasificación y formulación de seis ecuaciones cuadráticas. Se han propuesto demostraciones ingenuas, geométricas y algebraicas de los algoritmos de resolución de estas ecuaciones. Ibn al-Hā'im justifica las demostraciones con preliminares numéricos enunciados sin demostraciones y explicados con ejemplos. Presentaremos un análisis de estas demostraciones de los algoritmos de resolución de las formas canónicas de las tres ecuaciones cuadráticas compuestas.

Palabras clave: *historia del álgebra, historia de la demostración, álgebra árabe medieval*

Abstract

Arabic algebra is to operate with unknown quantities using the same arithmetic rules operating with known numbers. This conceptualization, together with the definition of species of numbers, has facilitated the development of algebraic calculus of algebraic expressions. In particular, it has allowed the denomination, enunciation, classification and formulation of six quadratic equations. Naïve, geometric and algebraic proofs to the algorithms of solving these equations have been proposed. Ibn al-Hā'im justifies the proofs with numerical preliminaries enunciated without proof and explained with examples. We present an analysis of these proofs of the algorithms of resolution of the canonical forms of the three composite quadratic equations.

Keywords: *history of algebra, history of proof, medieval arabic algebra*

INTRODUCCIÓN

Los historiadores de las matemáticas han consensuado que el álgebra medieval árabe empezó con la publicación de *al-Kitāb al-mukhtasar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*, el libro conciso en el cálculo de la restauración y la oposición de Mohammad Ibn Mūsa al-Khawārizmī. Definiendo tres especies de números, *māl* (bien), *jidhr* (raíz del bien), y *`adad mufrad* (número simple), consiguió denominar, enunciar y resolver seis formas canónicas de ecuaciones cuadráticas, tres simples y tres compuestas a las cuales se reduce la resolución de una colección de problemas aplicando principalmente, entre otras, dos transformaciones algebraicas denominadas *al-jabr wa al-muqābala*, la restauración y la oposición.

Aunque su intención era escribir un libro que sirva a la gente en sus herencias, repartos, y en sus tratos comerciales, al-Khawārizmī se empeñó en justificar los algoritmos de resolución de estas

Fadil, A. y Puig, L. (2014). Demostraciones algebraicas de las ecuaciones cuadráticas en Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya de Ibn al-Hā'im. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 55-64). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

ecuaciones (al-Khawārizmī, 1939, p. 21). Así comenzó una tradición en la historia de la demostración en el álgebra árabe que ha sido seguida durante muchos siglos después. Se trata de las primeras demostraciones de los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Este esfuerzo considerable para justificar los algoritmos de resolución motivó la aparición después de al-Khawārizmī de dos escuelas de pensamiento algebraico en torno a la demostración. La primera considera que la demostración en el álgebra debe basarse en la aplicación de los postulados geométricos recogidos mayoritariamente en los *Elementos* de Euclides, mientras la segunda busca conseguir autonomía e independencia de la geometría creando sus propias herramientas para tratar los objetos algebraicos a partir de los instrumentos de cálculo que ofrece la *Aritmética* de Diofanto.

Mientras al-Khawārizmī restringe el álgebra a la manera de un cálculo para transformar ecuaciones cuadráticas generales a sus formas canónicas, Abu Bakr al-Karajī (953-1028) ha sido el primero en delimitar el corpus del álgebra al operar con cantidades desconocidas aplicando las mismas reglas aritméticas que actúan sobre los números conocidos. Precisamente ha condicionado saber las operaciones aritméticas básicas para poder llevar a cabo las transformaciones algebraicas de restauración y oposición (al-Karajī, 1986, p. 158).

En Puig (2011a, 2011b) se propone una clasificación provisional de las demostraciones en el álgebra árabe en tres tipos. El primer tipo es la demostración que llamamos "ingenua", cuya argumentación se desarrolla dentro de un marco discursivo que toma como referencia una figura geométrica que está acompañada de letras sobre la cual se efectúan acciones de cortar, pegar y mover, en general. La garantía de verdad de este discurso es lo que se ve en la figura en cuestión sin dudar de lo que la vista muestra. Así son las demostraciones de al-Khawārizmī.

El segundo tipo es la que llamamos demostración "geométrica", cuya argumentación se basa en el modelo euclídeo en el que sigue habiendo figuras geométricas acompañadas de letras, pero que son explicadas dentro de un marco discursivo cuya garantía de verdad reside en las definiciones, postulados, y proposiciones ya demostradas. En este marco discursivo, la argumentación toma la forma de un deducción lógica, por lo cual es necesario que haya un acuerdo sobre qué cosas pueden tomarse como asentadas, es decir que son verdaderas y por tanto no necesitan ser justificadas y forman unas nociones comunes, y qué cosas, por lo contrario, presentan reservas a la hora de aceptarlas como verdaderas. Así son las demostraciones de Thābit Ibn Qurra (836-901) o Abū Kāmil (850-930).

Finalmente, el tercer tipo es la demostración algebraica cuyo discurso de justificación no se basa en ninguna figura geométrica, sino se fundamenta en las operaciones de cálculo que se realizan con las expresiones algebraicas. De hecho, para que se pueda razonar con este tipo de demostración es necesaria una definición clara de la naturaleza de estas expresiones algebraicas, y de ahí definir el tipo de las posibles operaciones que actúan sobre estas expresiones.

En este trabajo hemos seleccionado la obra *Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya* de Ibn al-Hā'im al-Maqdisī (1352-1412), que representa la segunda escuela de pensamiento algebraico, porque incluye demostraciones de los algoritmos clásicos de resolución de las ecuaciones cuadráticas que se pueden calificar de algebraicas. De hecho, las figuras geométricas desparecen por completo, y las argumentaciones de las mismas se basan en la aplicación de preliminares numéricos a las especies del álgebra que componen la ecuación.

La obra, que es uno de sus muchos comentarios, tiene carácter explicativo del celebre poema didáctico compuesto de 54 versos redactado en el estilo *rajaz,* uno de los 15 estilos para escribir poesías en árabe, por Ibn al-Yāssamīn (m. 1204) para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, cuando enseñaba en Sevilla. Su poema sobre álgebra ha sido editado recientemente por Mahdi Abdeljaouad (Abdeljaouad, 2003).

ENUNCIACIÓN DE LOS ALGORITMOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN

Los tres algoritmos clásicos se ejecutan en una secuencia de cinco pasos que tienen una parte común que el propio al-Khawārizmī usa para diferenciar las ecuaciones compuestas de las simples. Se trata de los dos primeros pasos: calcular la mitad de la cantidad de la raíz del bien, y elevar al cuadrado esta mitad.

Aunque la demostración se efectúa sobre un ejemplo numérico concreto, Ibn al-Hā'im enuncia los algoritmos clásicos de resolución en su forma general porque la secuencia de sus cinco pasos se expresa con palabras que se refieren a las cantidades abstractas de las dos especies de números, la raíz del bien y el número simple, sin especificación numérica alguna de estas cantidades.

Siguiendo con la misma tradición de al-Khawārizmī, después de enunciar los algoritmos Ibn al-Hā'im propone una colección de ejemplos que explican los pasos de ejecución de los mismos. Estos ejemplos han sido escogidos cuidadosamente para que cubran cantidades positivas enteras y racionales de la raíz del bien y del número simple. Se plantean en forma de ejercicios que preguntan hallar el valor numérico del bien y de su raíz. Cuando finaliza el algoritmo, se comprueba que el resultado obtenido es la solución numérica buscada. En ocasiones se omite la comprobación y se delega al alumno para que ejercite.

Respecto a la organización secuencial y temática de los contenidos, Ibn al-Hā'im hubiera preferido enunciar los algoritmos de resolución después de abordar las operaciones con expresiones algebraicas tal como lo hizo al-Karajī en su libro *al-Fakhrī*. Ahora bien, como se trata de explicar la urjūza, se ha visto obligado a seguir el orden mismo impuesto por Ibn al-Yāssamīn, al igual que al-Khawārizmī, que aborda los algoritmos de resolución antes de tratar las expresiones algebraicas.

Aunque aporta numerosos ejemplos que explican los procedimientos de resolución, Ibn al-Hā'im los considera insuficientes para alcanzar un aprendizaje satisfactorio de los mismos. Por ello, exige un buen dominio de las cinco operaciones aritméticas: la adición, la substracción, la multiplicación, la división, y la extracción de las raíces cuadradas.

> No seas un creído por la sencillez de este ejemplo y su claridad, y te crees que has aprendido las cinco tareas que ha señalado en el poema, y que son fáciles, no necesitan el esfuerzo de prestarlas atención. Si no has conseguido dominar las cinco tareas según lo que ha dicho el cálculo, no te avaricias en saber esta ciencia, ni en percibir su olor. Cuántas ecuaciones ponen en duda la mente y se cansa en hallar su mitad, que es la más fácil de las tareas, además de extraer su raíz que es la más difícil. Sin embargo, he dicho esto para instarte a prestar atención a dominar las operaciones del número conocido, entero y fracción, expresable y sordo, y que son: la suma, la substracción, la multiplicación, la división, la denominación, y la extracción de la raíz (al-Hā'im, 2003, p. 78).

La enunciación de los algoritmos clásicos de resolución ha sido complementada por cuatro aportaciones sistemáticas para cada una de las tres ecuaciones compuestas. La primera es demostrar los algoritmos clásicos con preliminares numéricos enunciados, sin demostración, y explicados con ejemplos. La segunda es explicar los pasos de dos algoritmos, con ejemplos y sin demostración, para hallar el valor numérico del bien antes de la raíz, seguidos de un algoritmo que termina con hallar simultáneamente el bien y su raíz. La tercera aportación es enunciar, y explicar con ejemplos sin demostración, un método para formular una colección de ecuaciones cuadráticas que poseen al menos una solución racional positiva. Por último demostrar con preliminares numéricos un algoritmo que transforma las ecuaciones compuestas en las simples.

ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN DEMOSTRADOS CON PRELIMINARES NUMÉRICOS

Se puede agrupar los algoritmos de resolución que han sido demostrados con preliminares numéricos en dos bloques. El primer bloque lo forman los algoritmos clásicos. Las demostraciones de estos algoritmos se justifican con la aplicación directa de preliminares numéricos (*muqaddimāt* *`adadiyyah*) que han sido enunciados en su formal general, sin demostración, y cuya comprobación se ejecuta con ejemplos numéricos. La omisión de la demostración de estos preliminares ha sido intencionada. Además de su fin didáctico, que es facilitar el aprendizaje, la demostración recurre a la manipulación de figuras geométricas que a su vez necesitan el conocimiento de los postulados de los *Elementos* de Euclides, aspecto que Ibn al-Hā'im quiso evitar.

> Sobre mostrar el porqué de este camino que lleva a la raíz, y la manera de deducirla de las cinco tareas. La gente tiene la tradición de aclarar las demostraciones de estas ecuaciones con la geometría, sea con líneas o bien con áreas. Efectivamente, saber aquello necesita saber Euclides. Me ha parecido mostrar aquello con preliminares numéricos sin recurrir a mencionar línea o área, aunque estos preliminares mismos necesitan las argumentaciones geométricas. Sin embargo, hago esto para aproximar la asimilación, y remitir las aclaraciones de estos preliminares a Euclides u otros libros de la geometría (al-Hā'im, 2003, p. 79).

Con la omisión de las figuras geométricas, Ibn al-Hā'im quiere romper con la tradición de las demostraciones ingenuas y geométricas, lo que muestra el grado de autonomía y madurez que alcanzó el álgebra como área científica, independiente de la geometría, con sus propias definiciones de los conceptos y sus formulaciones de sus postulados. Por consiguiente los preliminares no necesitan demostración alguna y se pueden usar cuando se considere imprescindible ya que forman parte del entramado de los objetos del álgebra.

El segundo bloque está formado por los procedimientos mediante los cuales las ecuaciones compuestas son transformadas algebraicamente en las ecuaciones simples. Las argumentaciones también se basan en la aplicación de preliminares numéricos. Son cuatro los preliminares numéricos que han sido enunciados por Ibn al-Hā'im. Algunos de ellos sirven para justificar más de una demostración. Sin embargo cada demostración se argumenta recurriendo a un solo preliminar que se recuerda o se enuncia inmediatamente antes de proceder a exponerla. Cuando un preliminar ya se había enunciado antes, sólo se recuerda el lugar donde se había utilizado sin una nueva enunciación del mismo. Presentamos a continuación cómo enuncia Ibn al-Hā'im cada uno de los preliminares en lenguaje vernáculo y su traducción al sistema de signos actual del álgebra simbólica, indicando también en qué demostraciones usa cada uno de ellos.

El primer preliminar se ha aplicado al demostrar el algoritmo clásico de resolución de la primera ecuación compuesta y al justificar las operaciones algebraicas que permiten transformar la tercera ecuación compuesta a la primera o tercera ecuación simple.

> Cualquier número que se divide en dos mitades, y luego se le añade otro número, entonces el resultado de multiplicar el número y el añadido por el añadido, cuando se suma al cuadrado de la mitad del número, es igual al producto de la suma del número añadido a la mitad del número por sí misma (al-Hā'im, 2003, p. 79).

En nuestro sistema de signos, el preliminar se traduce a la identidad: $(m+n)n+\left(\frac{m}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}+n\right)^2$

El segundo preliminar es útil para demostrar cómo transformar la primera ecuación compuesta a la primera o tercera ecuación simple.

> Para cada dos números distintos, cuando sumas, al cuadrado de la mitad de la diferencia entre ellos, el producto de uno de ellos por el otro, el resultado es lo mismo que el cuadrado de la mitad de su suma (al-Hā'im, 2003, p. 82).

Expresado en lenguaje simbólico, el preliminar se traduce a la identidad: $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

Con el tercer preliminar se justifica la demostración del algoritmo de resolución de la segunda ecuación compuesta, y la manera de cómo llevarla a la primera o tercera ecuación simple.

> Cualquier número que se divide en dos mitades y se descompone en dos sumandos distintos, entonces el resultado de multiplicar uno de los distintos por el otro, cuando se le suma el cuadrado de la diferencia entre uno de ellos y la mitad del número impuesto, es igual al cuadrado de la mitad del número impuesto (al-Hā'im, 2003, p. 87).

En nuestro sistema de signos, el preliminar se traduce a la identidad: $mn+\left(m-\frac{m+n}{2}\right)^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$

El último preliminar es usado para justificar la demostración del algoritmo de resolución de la tercera ecuación compuesta.

> Cualquier número del cual has disminuido unas raíces suyas, y has sumado a lo que queda el cuadrado de la mitad de la cantidad de aquellas raíces, entonces la raíz del resultado es menor que la raíz del bien con una cantidad igual a la mitad de la cantidad de estas raíces (al-Hā'im, 2003, p. 94).

En nuestro sistema de signos, el preliminar se traduce a la identidad: $\sqrt{\left(m-n\sqrt{m}\right)+\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{m}-\frac{n}{2}$

El hecho que Ibn al-Hā'im remita las demostraciones de los preliminares numéricos a los libros de la geometría no significa que no se han propuesto demostraciones numéricas a los mismos. En efecto, en el capítulo cuatro dedicado a la multiplicación de su tratado *Raf` al-ḥijāb `an ujūh a`māl al-ḥisāb*, Ibn al-Bannā al-Murrāqushī (m. 1321) afirma que las demostraciones de los métodos que transforman las ecuaciones compuestas a las simples se basan en una manera de multiplicar que él denomina *adarbu bī-attarbī`* (la multiplicación elevando al cuadrado)

> El porqué del operar en las ecuaciones compuestas se entiende con la multiplicación elevando al cuadrado (al-Bannā, 1988, p. 309).

Esta forma de multiplicar incluye tres identidades numéricas donde la multiplicación de dos números positivos se expresa como una descomposición aditiva, sustractiva, multiplicativa, o división de dos números positivos, que dependen de los números multiplicados, y donde al menos uno de ellos se eleva al cuadrado. Previa enunciación de tres identidades equivalentes, Ibn al-Bannā aporta una demostración numérica al segundo preliminar de Ibn al-Hā'im (Ibn al-Bannā, p. 260).

Además de una diversificación en la enunciación de los preliminares numéricos en distintas formas equivalentes, encontramos justificaciones numéricas del primer y tercer preliminar de Ibn al-Hā'im. Lo que significa que los preliminares numéricos, con sus diferentes enunciaciones en el lenguaje vernáculo, ya forman parte de la secuencia didáctica de los contenidos en los manuales de texto del álgebra árabe.

Lo que distingue a Ibn al-Hā'im de su antecesor Ibn al-Bannā es recordar los preliminares necesarios justo antes de empezar la demostración para su aplicación inmediatamente después en la justificación del encadenamiento lógico de la demostración.

DEMOSTRACIONES ALGEBRAICAS DE LOS ALGORITMOS DE RESOLUCIÓN DE LA PRIMERA ECUACIÓN COMPUESTA

La primera ecuación compuesta canónica, un bien y sus raíces igualan un número, se traduce con nuestro lenguaje simbólico a la siguiente ecuación: $x^2+bx=c$ donde b y c son números positivos enteros o racionales. A continuación presentamos un análisis de dos demostraciones algebraicas de resolución de la primera ecuación compuesta. La primera es del algoritmo clásico, la segunda es la de transformar la primera ecuación compuesta a la primera o tercera ecuación simple.

Demostración del algoritmo clásico de resolución

Es bien conocido que el algoritmo clásico de resolución se ejecuta en cinco pasos: tomar la mitad de la cantidad de las raíces, elevar al cuadrado esta mitad, sumarle el número simple, extraer la raíz cuadrada del total, y substraerle la mitad de la cantidad de las raíces. En nuestro lenguaje simbólico, los pasos se traducen a:

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Ibn al-Hāʼim ha explicado los pasos de ejecución del algoritmo clásico con cinco ejemplos numéricos distintos, el primero de ellos servirá luego para explicitar la demostración del algoritmo: un bien y diez de sus raíces igualan veinticuatro.

Inmediatamente antes de explicitar la demostración del algoritmo, Ibn al-Hāʼim recuerda el primer preliminar que se limita a explicar con un ejemplo. Partiendo de la ecuación $x^2 + 10x = 24$ procede a desglosar con palabras los pasos de la demostración.

> Supongamos que estamos hablando del primer ejemplo, que es un bien y diez de sus raíces igualan veinticuatro. Entonces, decimos que la cantidad de las raíces es el número inicial, y la cantidad de las raíces del bien ligado a ella es el número añadido a él. Y el número simple es como el resultado de multiplicar el número con el añadido por el añadido. Entonces los veinticuatro, en el ejemplo, serán obtenidas a partir de multiplicar el diez y la cantidad de las raíces del bien, añadida a ella, por la cantidad de las raíces añadidas. Cuando tomamos la mitad de la cantidad de las raíces y elevamos al cuadrado esta mitad y añadimos el resultado, que es veinticinco, al número se juntan cuarenta y nueve, que es lo mismo que el cuadrado de la suma de la cantidad de las raíces añadidas a la mitad de diez. La raíz de cuarenta y nueve, que es siete, será la suma de la mitad de la cantidad de las raíces y la cantidad de las raíces añadidas al diez. Cuando se substrae del siete la mitad de diez quedan dos que son la cantidad de las raíces del bien añadidas a las diez raíces. Así sabes que el bien iguala dos de sus raíces, y entonces cada raíz será dos, tal como hemos anticipado que en cada bien hay tantas raíces como unidades haya en una raíz. Se ha quedado claro, por lo que hemos dicho, el porqué de hallar la mitad de las raíces, sumar el cuadrado de la mitad al número, tomar la raíz del total, y substraerle la mitad (al-Hā'im, 2003, p. 80).

El esquema de la demostración puede describirse de la manera siguiente:

- Reenunciación del primer preliminar numérico usando las especies de números del álgebra. El preliminar se expresa en su forma general para cualquiera ecuación compuesta de este tipo. Se hace referencia a las especies de números que componen la ecuación de manera abstracta, y no se menciona el ejemplo numérico de la ecuación.
  - Decimos que la cantidad de las raíces es el número inicial. Aquí identifica *b*, que es la cantidad de las raíces en la ecuación, con *m*, que es el número inicial en el primer preliminar.
  - La cantidad de las raíces del bien ligado a ella es el número añadido a él. El bien, x^2, es concebido geométricamente como producto de la raíz por sí misma. Sin embargo aquí se define aritméticamente como suma de la raíz tantas veces como la propia raíz. Es decir $x^2 = x \cdot x = x + x + \ldots + x$ (*x*-veces, la cantidad de las raíces del bien). Al sustituir *n* por *x* en el primer preliminar, se obtiene $\left(b+x\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} + x\right)^2$.
  - Y el número simple es como el resultado de multiplicar el número con el añadido por el añadido. Es una factorización del primero miembro de la ecuación: $\left(b+x\right)x = c$.

- Ejemplificación explicativa de la abstracción. La demostración se concreta con el ejemplo numérico de la ecuación, aunque el razonamiento sigue desarrollándose en términos generales.
  - Entonces los veinticuatro, en el ejemplo, serán obtenidos a partir de multiplicar el diez y la cantidad de las raíces del bien, añadida a ella, por la cantidad de las raíces añadidas. Ejemplifica la factorización anterior de la ecuación, es decir, $(10+x)x=24$.
  - Cuando tomamos la mitad de la cantidad de las raíces. Esto es $\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{10}{2}=5$.
  - Elevamos al cuadrado esta mitad. Esto es $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2=5^2=25$.
  - Añadimos el resultado, que es veinticinco, al número, se juntan cuarenta y nueve. Esto es $\left(\frac{b}{2}\right)^2+c=(b+x)x=25+24=49$.
  - Que es lo mismo que el cuadrado de la suma de la cantidad de las raíces añadida a la mitad de diez. Se aplica la igualdad del preliminar numérico $(b+x)x+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}+x\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$, y con el ejemplo se escribe $\left(\frac{10}{2}+x\right)^2=49$.
- Hallar la raíz. Este paso se consigue con la extracción de la raíz cuadrada, que es una operación aritmética.
  - La raíz de cuarenta y nueve, que es siete, será la suma de la mitad de la cantidad de las raíces y la cantidad de las raíces añadida al diez. Esto es $\left(\frac{b}{2}+x\right)=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$, y con el ejemplo se escribe: $\left(\frac{10}{2}+x\right)=\sqrt{49}=7$.
  - Cuando se substrae del siete la mitad de diez quedan dos que son la cantidad de las raíces del bien añadida a las diez raíces. Esto es $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$, es decir, $x=2$.
- Justificación de los cinco pasos del algoritmo clásico. Es un desglose de las cinco operaciones aritméticas que hay que efectuar para calcular el valor numérico de la raíz.
  - El porqué hallar la mitad de las raíces (Tarea 1).
  - Sumar el cuadrado de la mitad al número (Tareas 2 y 3).
  - Tomar la raíz del total (Tarea 4).
  - Substraerle la mitad de la cantidad de las raíces (Tarea 5).

La demostración ha sido expuesta en términos generales, ya que se refiere, en todos sus pasos, a las especies del álgebra que componen la ecuación. Aquí el ejemplo sirve sólo de explicación de un razonamiento abstracto.

Demostración del algoritmo que transforma la ecuación compuesta a la simple

Además del algoritmo clásico, existe otro procedimiento de resolución que consiste en transformar la ecuación compuesta en la primera o tercera ecuación simple y que se basa en el segundo preliminar numérico. No se aporta ningún ejemplo que acompaña la explicación de la demostración como se hizo en el caso de la demostración del algoritmo clásico. Se razona sobre las especies de números en términos abstractos.

Una vez recordado el preliminar Ibn al-Hā'im describe la demostración con estas palabras donde la diferencia entre dos números *al-fadl* es siempre positiva.

> Que consideres los dos números cuya diferencia se calcula: el bien y el número, siempre. Entonces las raíces serán la diferencia entre ellos. Multiplicas uno de ellos por el otro como bienes, y añades al resultado el cuadrado de la mitad de la diferencia entre ellos considerada como bienes, el total será el cuadrado de la mitad de su suma. Tomas su raíz, que será la mitad de su suma, y que es cosas y la guardas. Luego miras la mitad de su suma, que será siempre el bien y la mitad de las cosas ligadas a él porque el número, por supuesto, es como el bien y las cosas. Cuando se suma esto al bien, el total del bien y el número será dos bienes y las cosas impuestas. Y la mitad de aquello es un bien y la mitad de las cosas. Si quieres la primera ecuación, iguala con aquel guardado, y substraes lo común, quedan cosas igualan un bien, que es lo solicitado. Si quieres la tercera, ya sabes que el número iguala el bien y las cosas impuestas y que la mitad de la suma del bien al número es un bien y la mitad de las cosas, el número será adición de la mitad de la suma del bien al número y la mitad de las cosas, y que el guardado iguala la mitad de su suma. Añades a lo guardado la mitad de las cosas, el total será cosas igualan el número impuesto (al-Hā'im, 2003, p. 82).

Hemos fraccionado la demostración en tres partes. La primera es común a las dos restantes. La segunda explica cómo transformar la ecuación compuesta en la primera simple. La tercera explicita cómo llevar la ecuación compuesta a la tercera simple. Una descripción de la parte común de la demostración se detalla como sigue.

- Aplicar el segundo preliminar.
  - Que consideres, siempre, los dos números cuya diferencia se calcula: el bien y el número. Tomar el bien como *n*, y el número *c* impuesto en la ecuación como *m*, es decir $n = x^2$ y $m = c$ en el segundo preliminar.
  - Entonces las raíces serán la diferencia entre ellos considerada como bienes. La multiplicación de un número por el bien es concebida como bienes $bx = c - x^2$.
  - Multiplicas uno de ellos por el otro. Esto es $mn = cx^2$.
  - Añades al resultado el cuadrado de la mitad de la diferencia entre ellos como bienes. Sustituyendo, expresa el primer miembro de la igualdad del segundo preliminar en función del bien
    $$\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + mn = \left(\frac{c-x^2}{2}\right)^2 + cx^2 = \left(\frac{bx}{2}\right)^2 + cx^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 x^2 + cx^2 = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right)x^2 .$$
  - El total será el cuadrado de la mitad de su suma. Se aplica la igualdad del segundo preliminar $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + mn = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c\right)x^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+x^2}{2}\right)^2$
- Demostrar la parte común del método.
  - Tomas su raíz, que será la mitad de su suma, y que es cosas, y la guardas. Al aplicar la raíz cuadrada a los dos miembros de la igualdad anterior, salen las raíces del bien, es

decir $\frac{c+x^2}{2} = x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$.

- Luego miras la mitad de su suma, que será siempre el bien y la mitad de las cosas ligadas a él. Esto es $\frac{c+x^2}{2} = x^2 + \frac{bx}{2}$.
  - Porque el número, por supuesto, es como el bien y las cosas. Esto es $c = x^2 + bx$.
  - Cuando se suma esto al bien, esto es $c + x^2 = x^2 + bx + x^2$.
  - El total del bien y el número será dos bienes y las cosas impuestas $c + x^2 = 2x^2 + bx$.
  - Y la mitad de aquello es un bien y la mitad de las cosas $\frac{c+x^2}{2} = \frac{2x^2+bx}{2} = x^2 + \frac{bx}{2}$.

Se aprovecha la parte común de la demostración en dos ocasiones. La primera es para demostrar cómo transformar la primera ecuación compuesta a la primera ecuación simple.

- Si quieres la primera ecuación.
  - Iguala con aquel guardado. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = x^2 + \frac{bx}{2}$.
  - Substraes lo común. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{bx}{2} = x^2$.
  - Quedan cosas igualan un bien, esto es, se consigue la primera ecuación simple $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}\right)x = x^2$.

La segunda aplicación de la parte común es para demostrar la manera de llevar la primera ecuación compuesta a la tercera ecuación simple.

- Si quieres la tercera
  - Ya sabes que el número iguala al bien y las cosas impuestas. Esto es $c = x^2 + bx$.
  - Que la mitad de la suma del bien al número es un bien y la mitad de las cosas $\frac{c+x^2}{2} = x^2 + \frac{bx}{2}$.
  - El número será la adición de la mitad de la suma del bien al número y la mitad de las cosas $c = \frac{c+x^2}{2} + \frac{bx}{2}$.
  - Que el guardado iguala la mitad de su suma. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{c+x^2}{2}$.

- Añades a lo guardado la mitad de las cosas. Esto es $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{bx}{2}=\frac{c+x^2}{2}+\frac{bx}{2}$.
- El total es cosas igualan el número impuesto $x\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{bx}{2}=\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}\right)x=c$.

CONCLUSIONES

Después de la descripción y el análisis de las demostraciones de los algoritmos de resolución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en *Sharḥ al-urjūza al-yāsmīniyya* de Ibn al-Hā'im podemos deducir algunas conclusiones que enfocan tres líneas de reflexión.

La primera se centra en la naturaleza y los rasgos de las propias demostraciones de estos procesos de resolución. Las demostraciones estudiadas son puramente algebraicas. En ninguna de las demostraciones analizadas se ha recurrido a la manipulación de figuras geométricas. Aunque las demostraciones están hechas en un lenguaje retórico, es decir con ausencia del lenguaje simbólico, esto no impide calificarlas de algebraicas porque los conceptos que las nutren son algebraicos y no apelan explícitamente a las proposiciones de Euclides. El núcleo de estas demostraciones reside en la aplicación de cuatro preliminares numéricos que han sido enunciados antes de abordar las demostraciones y explicados con ejemplos. Estos preliminares no necesitan ser demostrados, ya que forman parte de las herramientas del álgebra.

La segunda reflexión se centra en las consideraciones didácticas hechas por el autor para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. Es un proceso de enseñanza basado en la explicación de los conceptos usando ejemplos. Estos ejemplos han sido diversificados para abarcar números naturales y racionales positivos. La presentación temática de las tres ecuaciones ha sido ordenada y sistemática.

La tercera reflexión aborda las consecuencias que pueden derivarse del análisis que hemos realizado de estas demostraciones para la organización de la enseñanza de la demostración en el álgebra. El aprendizaje de la demostración en el álgebra no será posible sin que este proceso esté acompañado de ejemplos numéricos que lo clarifiquen.

Referencias

Abdeljaouad, M. (2003). *12th Century Algebra in an Arabic Poem: Ibn Al-Yāsamīn's Urjūza fi'l-jabr wa'l-muqābala*. Tunis. http://membres.multimania.fr/mahdiabdeljaouad/Urjuza.pdf

al-Bannā, I. (1988). *Rafʿ al-ḥijāb `an ujūh a`māl al-ḥisāb*. Edición árabe y comentario de Mohammed Aballagh. Fez: Universidad Sidi Mohammed ben Abdellah. Publicaciones de la Facultad de Letras y Ciencias Humanas, Dhar al-mahrāz.

al-Hā'im, I. (2003). S*harḥ al-urjūza al-yāsmīniyya*. Edición árabe y comentario de Mahdi Abdeljaouad. Tunis: L'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

al-Karajī, A. (1986). *Al-kāfī fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*. Edición árabe y comentario de Sami Shalhoub. Ma`had atturath al `ilmī al-`arabī. Alepo: Universidad de Alepo.

al-Khawārizmī, M. (1939). *Al-kitāb al-mukhtasar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*. Edición árabe y comentario A.M, Musharrafah y A. Mursi. Cairo: Universidad Egipcia. Facultad de Ciencias.

Puig, L. (2011a). Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega). El cálculo con la cosa. *Suma*, 67, pp. 101-110.

Puig, L. (2011b). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. *Suma*, 68, pp. 93-102

¿CÓMO ES EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LA SUMA Y LA RESTA EN EDUCACIÓN INFANTIL?

What Is the Process for Constructing Addition and Subtraction in Early Childhood Education?

Catalina Mª Fernández Escalona

Universidad de Málaga

Resumen

Se estudia el proceso que va desde las acciones reales y efectivas de añadir y quitar hasta la construcción de las operaciones aritméticas de suma y resta por parte de los escolares de 3, 4 y 5 años. El esquema lógico-matemático subyacente es el de transformaciones. Para que se den estas operaciones deben presentarse simultáneamente dicho esquema y la cuantificación, siendo esa simultaneidad la que lleva a las relaciones numéricas. Teniendo en cuenta que el origen de las operaciones de suma y resta en el escolar está supeditado a las acciones de añadir y quitar que se desarrollan en un proceso de construcción mental de los esquemas lógicos-matemáticos de transformaciones de cantidades discretas, se propone un plan de actuación en el aula de educación infantil mediante un tratamiento sistemático de dichas operaciones.

Palabras clave: *Suma, resta, operaciones aritméticas, educación infantil, educación matemática.*

Abstract

This study examines the process that spans from real and effective addition and deduction actions to constructing the arithmetic operations of adding and taking away in schoolchildren aged 3, 4 and 5. The underlying logical-mathematical model is that of transformations. For these operations to take place this model must be introduced at the same time as quantification, since it is this simultaneity that leads to numerical relationships. Bearing in mind that the inception of addition and subtraction operations in schoolchildren is subject to the actions of adding and taking away that are developed in a process of mental construction of the logical-mathematical models of transformations of discrete quantities, an early childhood classroom action plan is proposed using a systematic treatment of these operations.

Keywords: *Addition, subtraction, arithmetic operations, early childhood education, mathematical education.*

INTRODUCCIÓN

Existen transformaciones que cambian la cantidad frente a otras que la dejan invariante. Las primeras son las transformaciones cuantitativas y las segundas son las cualitativas. Cuando las cantidades que se están tratando son cantidades discretas esas transformaciones tienen un reflejo en las operaciones aritméticas. (Naito y Miura, 2001).

Los niños y niñas pequeños/as (menos de tres años) son capaces de actuar sobre los objetos reales (conchas, piedras, lápices, hojas, etc.) manipulándolos y realizando acciones que más tarde concluirán en la suma y la resta; se trata de la acción real y efectiva (Dickson, Brown y Gibson. 1991). El siguiente paso, es conseguir que los niños y niñas relaten las acciones que realizan, así van contando la acción al mismo tiempo que la ejecutan, es lo que Mialaret (1984) llama "acción

Fernández, C. (2014). ¿Cómo es el proceso de construcción de la suma y la resta en Educación Infantil? . En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 65-73). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

acompañada de lenguaje". Con ello se consigue que: se adquieran términos básicos equivalentes a reunir-añadir, quitar-separar, diferencien unas acciones de otras, tomen conciencia del esquema de las transformaciones, sepan diferenciar las partes de un todo, etc., y en definitiva se den cuenta de todos los aspectos, a nivel de acción, que se ponen en funcionamiento al realizar una operación aritmética. A la edad de tres años los niños y niñas son capaces de contar lo que está sucediendo. (Vilette, 2002).

En este camino ascendente hacia la abstracción, nos encontramos que los niños y niñas de cuatro años son capaces de relatar una acción que sólo existe en su mente, que no se está realizando de forma efectiva, ya no se actúa sobre objetos concretos, es "la conducta del relato" (Hughes, 1981, Mialaret, 1984).

Finalmente, a los cinco años, los niños son capaces de comprender que una traducción simbólica del tipo 3+2 expresa una acción real, además, por conteo ascendente, pueden resolver problemas abstractos sin base concreta como por ejemplo: "¿Cuántos son tres más dos?" (Hughes, 1981).

En el periodo que abarca la Educación Infantil se dan los primeros encuentros del niño/a con la adición y la sustracción puesto que las acciones y transformaciones que dan lugar a estas dos operaciones son elementales y aparecen simultáneamente con el concepto de número.

Mediante la revisión de investigaciones en niños y niñas pequeños/as sobre la suma y la resta (Ginsburg y Pappas, 2004; Hughes, 1981; McCrink y Wynn, 2004; Naito y Miura, 2001; Robinson, 2001; Starkey y Gelman, 1982; Zur y Gelman, 2004). podemos asegurar que existen tareas apropiadas en las que estas operaciones parten de las acciones de añadir y quitar, siendo ésta la forma más adecuada para tratar los inicios de la aritmética en Educación Infantil.

EL PASO DE AÑADIR Y QUITAR A SUMAR Y RESTAR

Es un hecho constatado que los primeros encuentros del niño/a con la suma y la resta se realiza sin necesidad de una instrucción previa (Canobi, Reeve y Pattison, 2003; Carpenter y Moser, 1979; Carpenter et al, 1999; Dickson, Brown y Gibson, 1991). Estos contactos se realizan en un entorno cercano al niño/a; es por ello por lo que nos planteamos analizar algunas situaciones familiares en las que aparecen las acciones de quitar o añadir y en base a ellas analizar la interiorización de las operaciones aritméticas de suma y resta (Fernández, 2001).

Las acciones de añadir o quitar objetos, a una colección dada, transforman la cantidad. Lo primero que queremos observar en los niños es si realmente ellos se percatan de este hecho en edades tempranas. En general, los niños de tres años, son capaces de observar, e incluso de decir, "hay más" o "hay menos" ante situaciones en las que se transforman la cantidad.

Una de las situaciones familiares trabajadas consistía en lo siguiente: la madre le prepara para desayunar al niño pequeño (de dos a tres años) una bandeja con 4 galletas y un vaso de leche. Esta situación se repite día tras día. Después de un tiempo, una mañana sólo aparecieron 3 galletas en lugar de las cuatro que venía siendo habitual; fué entonces cuando el niño pequeño advirtió que faltaba una (Fernández, 2007).

Aprovechamos esta situación para presentarle bandejas con tres galletas, él o ella decía que había tres (respuesta que daba por subitización). Cuando ya se tenía la certeza de que conocía el estado inicial y que lo podía retener en su memoria (ésto ocurría día tras día preguntándole, varias veces y en distintos momentos, que cuántas galletas había en la bandeja), se realízaba la transformación que consistía en añadir una, y así llegamos al estado final que son cuatro galletas en la bandeja, el niño/a ante esta nueva situación decía que había una más.

Se repiten los ejercicios durante varios días. La madre ponía dos bandejas con tres galletas cada una. Él o ella las veía y decía que había lo mismo. Entonces a una de las bandejas se le añadía una más, y se le preguntaba qué era lo que había pasado, y decía que había puesto una. El hecho de poner dos bandejas con el mismo número era para que tuviese simultáneamente presente el estado inicial y final de la transformación, y con ello se perseguía que el niño/a se centrase en la acción, en este caso de añadir una galleta.

No obstante, en su quehacer diario los niños y niñas dan muestra inequívoca de que las acciones de quitar o añadir cambian la cantidad. Así, por ejemplo, si un niño/a está jugando con cochecitos y en su monólogo dice: "voy a por más" y acto seguido trae dos coches más que une a su colección, prueba que este niño o niña es consciente de que la colección de objetos aumenta cuando se añaden nuevos elementos frente a la conducta de separar objetos para obtener más. Asimismo, si alguien le quita algún coche y el niño/a hace comentarios como éste: "dámelo porque ahora tengo pocos", estaremos ante un caso en el que sabe que si se quitan objetos de la colección la cantidad queda modificada para tener menos que antes.

En general, todos los niños y niñas investigados, a la edad de tres años, son capaces de decir "hay más" ante una situación en la que se añaden varios objetos a una colección de cinco elementos como máximo (si ponemos más de cinco objetos algunos niños/as de tres años dicen que hay muchos y cuando añadimos nuevos objetos, sigue habiendo muchos). Análogamente son capaces de decir "hay menos" cuando la situación se plantea quitando varios objetos de una colección dada.

Además los niños/as pequeños/as, son capaces de establecer la relación inversa entre las dos acciones. Saben que si quitamos un objeto de una colección, lo que debemos de hacer para tener el mismo número que al principio es añadir uno. Así, por ejemplo, cuando un niño o niña juega con coches, y la madre le quita uno, dice "dame el que me has quitado". Incluso en situaciones en las que el niño/a tenía los coches dipuestos en los cuatro vértices de una mesa cuadradra, se le quitaba uno y se le preguntaba ¿qué hacemos para tener lo mismo que antes?, respondía "poner uno más", y aún en un grado de abstracción mayor, si tenía cuatro galletas en una bandeja y la madre se comía una, a la vista de que quedaban tres galletas en la bandeja, le preguntaba que cuántas galletas se había comido y respondía que una; entonces ¿qué tenemos que hacer para tener el mismo número de galletas que al principio?, y el niño/a respondía que poner una.

Esta última situación, además de poner de manifiesto la relación inversa entre las acciones de añadir y quitar, indica que los niños y niñas de tres años pueden cuantificar el cambio cuando la diferencia es de uno. Así, si cambiamos tres galletas por dos, dicen: "falta una"; pero si cambiamos cinco por tres dicen "hay menos". Por lo tanto, los pequeños y pequeña no cuantifican el cambio cuando la diferencia entre el estado inicial y el estado final de la transformación aritmética es más de uno.

¿Cómo se recorre el camino hacia la cuantificación?

Para Dickson y otros (1991), el paso previo hacia la cuantificación, y por tanto el inicio de las operaciones, es el principio de cardinalidad. Cuando el niño/a toma conciencia de que el proceso de recuento se puede usar para obtener el número de elementos de una colección, estará iniciando el camino adecuado para cuantificar el número de objetos que se añade o se quita a una colección dada; y ésto, según los autores citados se da a la edad promedio de cuatro años y dos meses.

Pero las operaciones de sumar y restar conllevan algo más que el simple recuento de una colección de objetos. Bajo las acciones de añadir y quitar, subyace el esquema de transformaciones de cantidades discretas (Vergnaud, 1985); cuando se realiza una de estas acciones se tiene que recordar y pensar simultáneamente en: el estado inicial (lo que se tenía), la transformación (acciones de quitar o añadir) y el estado final (lo que se tiene ahora); y se da la circunstancia de que las tres secuencias de la transformación no se dan al mismo tiempo, por eso en la suma y la resta el niño/a tiene que hacer algo más que contar una colección de objetos. Así, por ejemplo, se le presenta tres caramelos, se guardan en una bolsa y le damos dos caramelos más en la mano; el niño/a, que efectivamente, tiene adquirido el principio de cardinalidad dice que hay 3 caramelos en la bolsa, y que después tiene 2 caramelos más en la mano; pero si no utiliza el esquema de transformación no es capaz de llegar a la operación de sumar, que requiere establecer una relación numérica entre los 3 caramelos de la bolsa y los 2 que tiene en la mano.

¿Cómo se establece las relaciones numéricas para cuantificar la acción?

Un indicio de que el niño/a empieza a establecer relaciones numéricas es cuando usa estrategias de recuento progresivo para cuantificar la acción. Cuando cuenta a partir de tres, dos unidades más, para determinar el número de caramelos que tiene, está estableciendo la relación que existe entre el cardinal 3 y el cardinal 2 atendiendo a la acción de añadir, y por tanto está sumando 3 y 2. Otra conducta menos evolucionada que la anterior, pero que indica el establecimiento de relaciones numéricas, es cuando se recurre al recuento completo de la nueva colección ayudándose de los dedos o de objetos materiales concretos.

Estamos en un momento de la investigación en el que se tiene adquirido el principio de cardinalidad, nuestro esfuerzo irá dirigido al establecimiento de relaciones numéricas, para ello trabajamos: *El esquema de transformaciones de cantidades discretas.*

Ello supone distinguir entre transformaciones que cambian la cantidad de aquellas que no la cambian, y que los niños y niñas sean capaces de describir y reconocer las tres partes de una transformación, esto es: Estado Inicial (E.I.), Transformación (T) y Estado Final (E.I.).

Cuando son capaces de relatar, por ejemplo, situaciones como estas: "Tenía 3 caramelos (E.I.), tú me has dado 2 (T) y por eso tengo 5 caramelos (E.F.)", será la prueba inequívoca de que están estableciendo relaciones numéricas y que por tanto están cuantificando la acción de añadir.

Este tipo de relato lo consiguen los niños y niñas a una edad promedio de cuatro años y medio (Fernández, 2007). Debemos señalar que a la hora de describir la transformación anterior presentan fundamentalmente tres conductas, a saber:

- Conducta uno. Se describe una única secuencia: a) Estado Inicial (E.I.): "Antes tenía menos"; b) Estado final (E.F.): "Ahora tengo más"; c) Transformación (T): "Me has dado dos".
- Conducta dos. Se describen dos secuencias: a) Estado Inicial y Estado Final (E.I. y E.F.): "Antes tenía menos y ahora tengo más"; b) Transformación y Estado Final (T. y E.F.): "Me has dado dos y por eso ahora tengo más"; c) Estado Inicial y Transformación (E.I. y T): ""Tenía menos y me has dado dos".
- Conducta tres. Se describe todo la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.):"Antes tenía menos tú me has dado dos y ahora tengo más", o bien "tengo más que antes porque tú me has dado dos".

En estas conductas se realiza una descripción cualitativa de las transformaciones, los niños y niñas saben que la cantidad ha variado, que el estado final supone una modificación de la cantidad de caramelos respecto del estado inicial lo que constituye un primer paso para llegar a cuantificar la acción.

Una vez que son capaces de realizar esas descripciones, el siguiente paso sería conseguir que pudieran describir todo el proceso de la transformación con la exigencia de que deben indicar cantidades concretas. Cuando se describe toda la transformación: Estado Inicial, Transformación y Estado Final (E.I., T. y E.F.): "Tenía 3 y ahora tengo 5 porque me has dado 2", estamos en el caso de conducta más evolucionada y supone el éxito operatorio; en ella se llega a interiorizar de tal forma la acción que se consigue expresar los estados mediante números, lo cual indica el paso de las operaciones en sentido físico a las operaciones aritméticas (Fernández, 2007).

Para pasar de las descripciones cualitativas a las cuantitativas debemos trabajar con los niños y niñas estos interrogantes: ¿cuántos tenías al principio?, ¿cuántos tienes ahora?, ¿cuántos te he dado?, ¿cuánto más tienes ahora que antes?, con el fin de que se percaten de las tres secuencias de la transformación y de que establezcan relaciones numéricas.

Referente a la acción de quitar podemos seguir los mismos pasos. Debemos conseguir que describan toda la secuencia de la transformación donde, ahora, la acción en lugar de "añadir" es "quitar". Trabajamos, por tanto, situaciones como estas: "Nuria tenía 5 caramelos, se come 2 y ahora tiene 3 caramelos".

En las descripciones cualitativas se da una situación análoga a la anterior, en este sentido los niños/as dicen: "antes tenía más y ahora tengo menos", o bien "me he comido 2", ó "tengo menos porque me he comido 2". A la hora de hacer una descripción cuantitativa, hay niños/as que establecen correctamente la relación entre 3 y 5 cuando se trata de añadir dos y no así llegar del 5 al 3 quitando 2, y es que parece ser que en un principio el recuento progresivo es más fácil que el recuento regresivo.

Para ello se propone trabajar desde el principio la acción de quitar como inversa de la de añadir. Entonces cuando decimos “tienes 3 y añades 2, ¿cuántas tienes?, inmediatamente proponemos ¿qué tienes que hacer para tener las mismas que al principio?, con ello pretendemos que con la cuenta 3+2=5 se tenga además las cuentas 5-3=2 y 5-2=3 (Fernández, 2007).

TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LA SUMA Y LA RESTA

Hay modelos aditivos en los que no se da el esquema de transformaciones sino que subyace el esquema parte-parte-todo, como por ejemplo “Tengo 3 coches rojos y 2 verdes, ¿cuántos coches tengo?”, dándose las acciones de reunir y separar.

Teniendo en cuenta los dos esquemas lógico matemáticos, junto a los tipos de acciones añadir-quitar y reunir-separar, y todo lo tratado anteriormente, proponemos que el tratamiento didáctico de la suma y la resta en Educación Infantil se realice atendiendo a 4 tareas tipo. Cada una de ellas conlleva estos esquemas:

- Acciones de añadir y quitar, que denominaremos como AQ
- Cuantificación de las acciones de añadir y quitar mediante el esquema de transformaciones, que denominaremos como T
- Acciones de reunir y separar que denominaremos como RS
- Cuantificación de las acciones de reunir-separar mediante el esquema parte-parte-todo que denominaremos como PPT

A su vez, cada uno de estos esquemas estará dividido en tres de este modo:

AQ

- Acciones de añadir, que denominaremos A
- Acciones de quitar, que denominaremos Q
- Acciones de añadir y quitar, que denominaremos A-Q

T

- Cuantificación de las acciones de añadir, que denominaremos TA
- Cuantificación de las acciones de quitar, que denominaremos TQ
- Cuantificación de las acciones de añadir y quitar, que denominaremos T(A-Q)

RS

- Acciones de reunir, que denominaremos R
- Acciones de separar, que denominaremos S
- Acciones de reunir y separar, que denominaremos R-S

PPT

- Cuantificación de las acciones de reunir, que denominaremos PPTR
- Cuantificación de las acciones de separar, que denominaremos PPTS
- Cuantificación de las acciones de reunir y separar, que denominaremos PPT(R-S)

Recogemos esto en la tabla siguiente:

Tabla 1. Tratamiento didáctico de suma y resta en 3, 4 y 5 años

Clases	3 años	4 años	5 años
Tareas	**AQ3**: A3, Q3, (A-Q)3 **T3**: TA3, TQ3, T(A-Q)3 **RS3**: R3, S3, (R-S)3 **PPT3**: PPTR3, PPTS3, PPT(R-S)3	**AQ4**: A4, Q4, (A-Q)4 **T4**: TA4, TQ4, T(A-Q)4 **RS4**: R4, S4, (R-S)4 **PPT4**: PPTR4, PPTS4, PPT(R-S)4	**AQ5**: A5, Q5, (A-Q)5 **T5**: TA5, TQ5, T(A-Q)5 **RS5**: R5, S5, (R-S)5 **PPT5**: PPTR5, PPTS5, PPT(R-S)5

Acabamos de establecer una codificación de tareas que aclaramos a continuación: Una tarea cualquiera XYn, donde XY toma los valores AQ, T, RS y PPT y n los valores 3, 4 y 5, es la tarea que conlleva el esquema lógico-matemático XY para proponerla en la clase de 3 años, de 4 años ó de 5 años. Así por ejemplo AQ3 es la tarea propuesta para el tratamiento didáctico de "Acciones de Añadir y Quitar" en niños de 3 años.

Llamaremos Tarea XYn (con XY variando entre los valores AQ, T, RS y PPT, y n toma los valores 3 años, 4 años ó 5 años) a un conjunto de actividades que conlleva el esquema lógico-matemático XY adecuadas para la clase de n años.

Para cada tarea haremos lo siguiente: presentación que conlleva sistemáticamente 3 actividades (por ejemplo, para la tarea AQ3, las tres actividades son: acciones de añadir A3, acciones de quitar Q3 y acciones de añadir y quitar (A-Q)3); análisis operatorio que consiste en analizar las competencias lógico-matemáticas implicadas en la realización de la actividad; y por último, para los esquemas implicados surgidos del análisis operatorio, se planteará una situación didáctica. Todo esto se recoge en la figura 1.

Por ejemplo, para la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años quedaría tal como se muestra en la figura 2.

El modelo de la figura 1 se aplica, para las acciones de añadir y quitar y la cuantificación mediante el esquema de transformaciones, en la clase de 3, 4 y 5 años atendiendo a las siguientes pautas:

- En la clase de 3 años se trabaja las acciones de añadir y quitar provocando la acción, por eso se le dice al niño "coge más", "quita algunas". Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo uno con el esquema de transformaciones y con el formato "caja abierta-caja cerrada" (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo "acción real" (Mialaret, 1984).
- En la clase de 4 años se trabaja las acciones de añadir y quitar sin provocar la acción, por eso se le dice al niño "¿qué tienes que hacer para tener más? y para tener menos" Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática añadiendo 2, 3 ó 4 con el

esquema de transformaciones y con el formato “caja cerrada-caja hipotética” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “acción real y conducta del relato” (Mialaret, 1984).

- En la clase de 5 años se trabaja las acciones de añadir y quitar mediante un relato, sin objetos tangibles. Para la cuantificación de estas acciones se realiza de manera sistemática trabajando los dobles, los dobles más uno con el esquema de transformaciones y con el formato “caja hipotética- código formal” (Hughes, 1981) o lo que es lo mismo “conducta del relato-representación simbólica” (Mialaret, 1984).

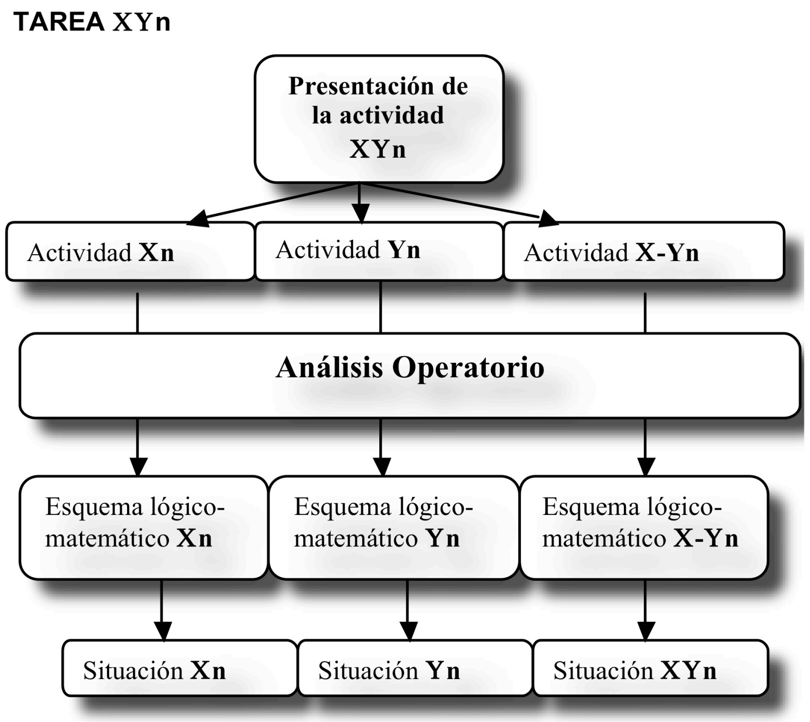


Figura 1. Actuación en el Aula de Educación Infantil en el tratamiento didáctico de suma y resta

TAREA T3

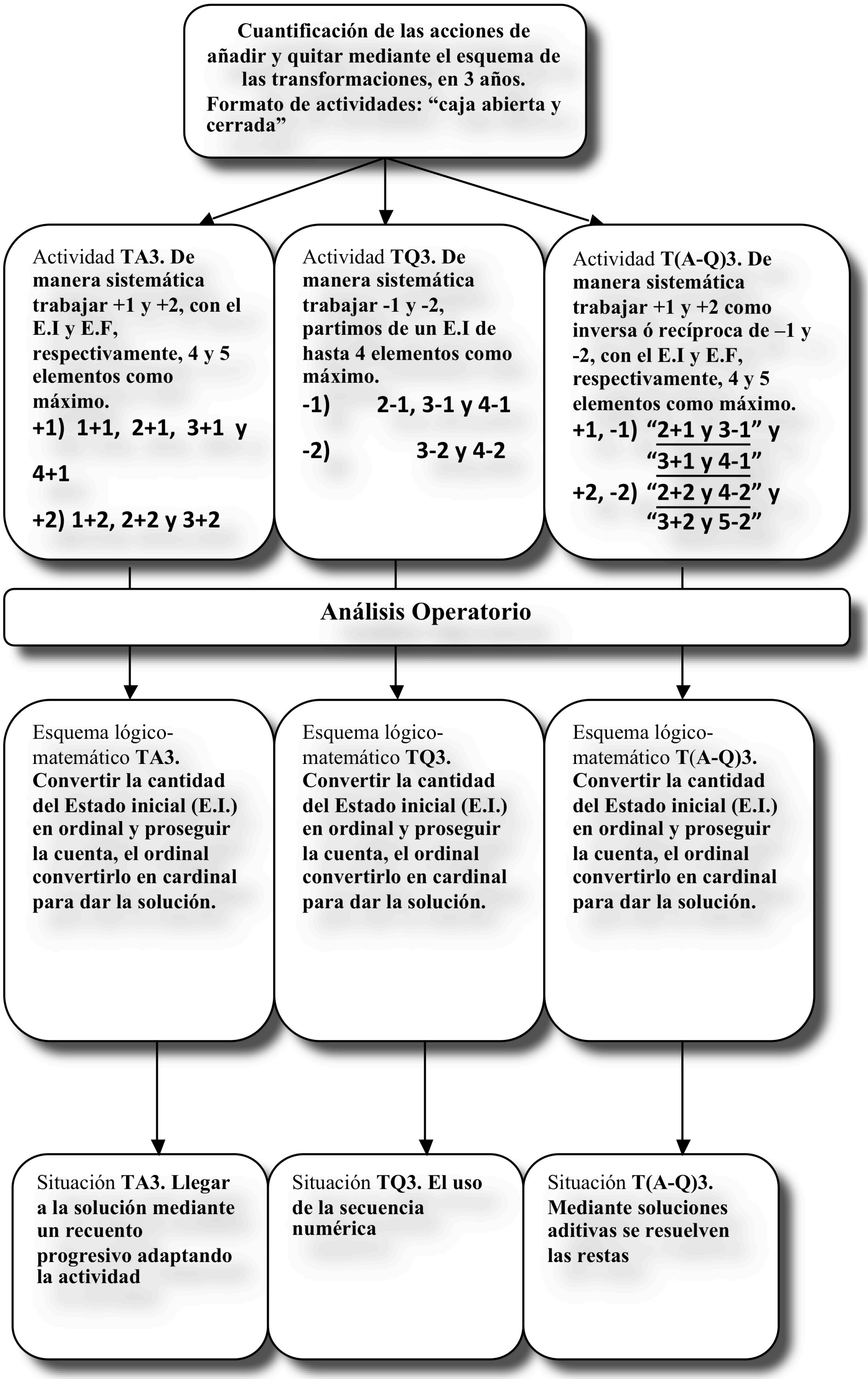


Figura 2. Tarea para la cuantificación de las acciones de añadir y quitar en 3 años

Referencias

Canobi, K. Reeve, R. y Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology*, *39*(3), 21-34.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1979). *An investigation of de learning of addition and subtraction.* Madison, Wisconsin: Wisconsi Research and Development Center for Individualizad Schooling.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson. O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Cerdanyola, España: Editorial Labor, S.A.

Fernández, C. (2001). Aprendizajes numéricos en el ámbito familiar. En A. Gervilla, M. Barreales, R. Galante y I. Martinez (Eds.), *Familia y Educación* (pp. 339-348). Málaga, España: HUM 205.

Fernández, C. (2007). ¿Cómo y cuándo abordar la didáctica de las operaciones de suma y resta? *Bordón, 59*(1), 63-80.

Ginsburg, H., & Pappas, S. (2004). SES, Ethnic, and Gender Differences in Young Children's Informal Addition and Subtraction: A Clinical Interview Investigation. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *25* (2), 171-192

Hughes, M. (1981). Can Pre-School Children Add and Subtract? *Educational Psychology*, *1*(3), 207-219.

McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large,number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psycological Science, 15*, 776-781.

Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid, España: Aprendizaje Visor

Naito, M. y Miura, H. (2001). Japanese Children's Numerical Competencies: Age- and Schooling-Related Influences on the Development of Number Concepts and Addition Skills. *Developmental Psychology, 37* (2), 17-30.

Robinson, K. (2001). The Validity of Verbal Reports in Children's Subtraction. *Journal of Educational Psychology*, *93*(1), 211-222

Starkey, P. y Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.99-116). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1985). *L´enfant, la mathématique et la réalité*. New York, NY: Peter Lang.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction? Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development, 17*, 1365-1383

Zur, O. y Gelman, R. (2004). Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 121-137.

LA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN UNIVERSITARIA DE MAGISTERIO Y SU APLICACIÓN EN LA PRÁCTICA REAL EN LAS AULAS DE PRIMARIA: UN ESTUDIO DE CASO

Mathematics in the university of teacher training and its application in the real practice in elementary education classrooms: a case study

Eugenia Fernández Martín

Universidad de Málaga

Resumen

La mayoría de los alumnos que eligen la carrera de magisterio, suelen pertenecer al ámbito de letras, aspecto muy relevante en cuanto a las inclinaciones y preferencias por la matemática de estos futuros profesionales en la mayoría de los casos. El conocimiento didáctico-matemático impartido en las aulas universitarias y el conocimiento práctico que se descubre con la experiencia real, tienen una enorme importancia en la formación del profesional de la educación. Es por ello, por lo que este estudio pretende comprender como los protagonistas del mismo (estudiantes de magisterio de primaria en prácticas) perciben la conexión entre los conocimientos didáctico-matemáticos aprendidos en la Facultad y las experiencias reales en sus prácticas en un periodo de cinco años (en el año 2009; y en la actualidad: año 2014).

Palabras clave: *Matemáticas, Educación Primaria, asignatura, universidad.*

Abstract

Most students, who choose the career of teaching, are often in the field of language, this is very relevant as to the inclinations and preferences for mathematics of these future professionals in most cases look. The teaching-mathematical knowledge taught in university classrooms and practical knowledge that is discovered with the actual experience, are extremely important in the formation of professional education. Therefore, this study aims to understand how the subjects (students of teachers in elementary education practices) perceive the connection between teaching and mathematical knowledge learned in the Faculty and the actual experiences in their practices in a period of five years (in the year 2009 and today: 2014).

Keywords: *Mathematics, Primary Education, matter, university.*

INTRODUCCIÓN

En los actuales momentos de cambio que vive la universidad con los procesos de convergencia Europea, la formación inicial del estudiante, parece recobrar un especial interés. Las prácticas reales se convierten en uno de los ámbitos que más atención requiere, ya que suponen el pilar fundamental como elemento de tránsito entre la institución universitaria y el campo laboral, pudiéndose poner de manifiesto las competencias (Angulo, Barquín y Pérez; 1999).

Uno de los aspectos más importantes de la formación del profesional de la educación es, no solo los conocimientos que se imparten en las aulas universitarias, sino también el conocimiento práctico que estos alumnos y alumnas van vislumbrando con la experiencia real (Angulo, 1994; Elliott, 1989; Vaillant y Pierzynski, 2006), lo que se lleva a cabo en el periodo de prácticas en los centros educativos de primaria, mediante las asignaturas de *Prácticums*. Este hecho, es más notorio en

Fernández-Martín, E. (2014). La matemática en la formación universitaria de magisterio y su aplicación en la práctica real en las aulas de primaria: un estudio de caso. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 75-80). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

asignaturas relacionadas con la matemática, donde las competencias didáctico-matemáticas que se ofrecen en la Facultad *deben* relacionarse con las experiencias prácticas reales que se viven en los centros educativos en la asignatura de matemática, pues lograr el equilibrio entre teoría y práctica supone la dificultad más apremiante con la que se enfrenta la formación inicial de estos futuros profesionales (Angulo, 1994). Ambos conocimientos son importantes para la formación del alumnado y debe existir una coherencia entre lo que se diseña teóricamente y la práctica, manteniendo en todo momento un equilibrio entre las herramientas teóricas y la práctica (Elliott, 1989; Sepúlveda, 2009), debiéndose evitar la descontextualización y el exceso teórico (Vaillant y Pierzynski, 2006).

El principal hecho que se observa en cuanto al alumnado que elige la carrera de magisterio, es que la mayoría pertenecen al ámbito de letras, lo que hace vislumbrar su "predilección" por la matemática en la mayoría de los casos. Aspecto que también influirá en el proceso de enseñanza-aprendizaje y formación inicial de estos alumnos y alumnas como futuros profesionales de la educación.

Esta formación inicial para los que van a desarrollar su práctica profesional se orienta desde una perspectiva muy concreta, pero puede que sea necesario restablecer y mejorar los criterios para seleccionar al profesional de la educación, fundamentalmente de entrada a la Universidad (Imbernón, 2006; Ingarson y Kleinhenz, 2006). Así mismo, este periodo de formación inicial constituye una herramienta necesaria para enfrentarse a los dilemas profesionales y mejorar la educación, mediante la relación práctico-teórica y la comprensión de la realidad educativa (Elliott, 1989; Fraile, 1997; Martínez, 2001; Schön, 1992; Stenhouse, 1985, 1987; Tardif, 2004).

En esta formación didáctico-matemática es fundamental la ayuda del profesor universitario apoyándose en los estudios teóricos y vinculando la teoría a la práctica (Vaillant y Pierzynski, 2006), actuando como agente facilitador, guía del proceso de enseñanza - aprendizaje, teniendo en cuenta también las relaciones entre Facultades de Educación y centros educativos (Angulo, 1994; Cochran-Smith y Lytle, 2002; Schön, 1992).

Por lo tanto, el presente estudio pretende indagar y comprender como los protagonistas del mismo (estudiantes de magisterio de primaria en prácticas) perciben la conexión entre las experiencias reales en sus prácticas en la asignatura de matemática y los conocimientos didáctico-matemáticos aprendidos en la Facultad en un periodo de cinco años (en el año 2009; y en la actualidad: año 2014). Así como la evolución de dicha percepción en este periodo de un lustro, incluyendo las diferencias y/o similitudes que se evidencian.

OBJETIVOS

Se pretende comprobar, comprender, valorar y conocer el sentido y valor educativo de la matemática en la formación universitaria de magisterio y su aplicación en la práctica real en las aulas de primaria.

Comprobar su evolución y/o cambios-similitudes en un periodo de cinco años.

RELATO DE LA INVESTIGACIÓN

El diseño del presente estudio, se enmarca dentro de la literatura científica de investigación definido desde el paradigma cualitativo, ya que permite al investigador/a acercarse a los datos y proveerle oportunidades para construir percepciones y conocimientos a partir de las evidencias que se obtienen (Burgess, 1984). El objetivo que se pretende en esta investigación -posicionada en las Ciencias Sociales y Educativas-, es estudiar una realidad múltiple y compleja, sin deformación ni manipulación (Murillo, 2009).

METODOLOGÍA

Participantes

Estudiantes en prácticas de Grado de Educación Primaria, divididos para este estudio en dos grupos: un primer grupo de estudiantes en el año 2009, del año académico 2008-2009; y un segundo grupo de estudiantes en la actualidad, año 2014, del año académico 2013-2014.

Instrumentos

En cuanto a los instrumentos, se aplicarán las técnicas para la recopilación de datos de:

- Entrevistas en profundidad semiestructuradas a los participantes.
- Cuestionarios semiestructurados aplicados a los participantes.
- Análisis de las Memorias, portafolios y Diarios de prácticum de los estudiantes.
- Observación participante de las puestas en común de las prácticas de los estudiantes en los seminarios de trabajo del prácticum.
- Análisis de documentos pertinentes, desde el marco legal hasta la planificación.
- Diario de campo o diario de la investigación.

Como procedimiento de contraste, valoración y comprensión entre los diferentes componentes de la investigación, se hará el contraste entre fuentes, métodos, informantes, etc., que permitirá poner en diálogo las distintas perspectivas que se recogen, lo que permite un control sobre la recogida de datos y su interpretación, realizándose mediante la triangulación, procedimiento por el que se reconstruye y se comprende la realidad a partir de las diferentes percepciones de los protagonistas de este estudio, así como de los métodos o técnicas utilizados.

Procedimiento

Las observaciones, aplicación de cuestionarios y entrevistas del estudio se realizaron en el periodo de prácticas del año 2009 (año académico 2008/2009) y en la actualidad, año 2014 (año académico 2013/2014). Para su análisis y contrastación de datos, se divide un primer grupo (año 2009), y un segundo grupo (2014).

RESULTADOS

Los resultados obtenidos a partir de los datos recopilados, se resumen y sintetizan en el siguiente cuadro (Tabla 1), haciendo referencia a los aspectos más importantes y relevantes para la investigación.

Tabla 1. Cuadro- resumen de los resultados obtenidos comparados de los años 2009 y 2014

Primer grupo de alumnado en prácticas Año 2009 (curso académico 2008/2009)	Segundo grupo de alumnado en prácticas Año 2014 (curso académico 2013/2014)
La matemática en la formación Universitaria de magisterio tiene poca aplicación en la práctica real en las aulas de primaria, son aspectos diferentes.	La matemática en la formación Universitaria de magisterio tiene aplicación total en la práctica real en las aulas de primaria.
No existe tácitamente relación de utilidad, no existe conexión entre los conocimientos.	Existe relación de utilidad, existe conexión entre los conocimientos.
El sentimiento de desconexión viene marcado por la Facultad, que es visto como dos mundos a parte (Facultad y centros de primaria)	El sentimiento de desconexión viene marcado por el centro de primaria en el que no se usan materiales como ábacos, regletas, etc. para

	enseñar matemáticas; cosa que si se hace en la Facultad.
No todo lo dado en las clases de la Facultad, les ha servido de apoyo para enfrentarse a una clase de primaria.	Todo lo dado en las clases de la facultad les ha servido de apoyo para enfrentarse a una clase de primaria.
Soluciones propuestas por el alumnado: necesidad de un mayor enfoque práctico en la Facultad.	Soluciones propuestas por el alumnado: Concienciar a los maestros de mayor edad (reciclarse en cuanto a los nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje)
Las matemáticas en los centros de prácticas se dan igual que otras materias (libro de texto, fichas, corregir en pizarra, etc.)	
Al preguntar a los estudiantes sobre cómo darían las clases de primaria ellos: Desarrollarían la asignatura igual que se hace en los centros de prácticas.	Lo harían de diferente manera, más dinámica, más manipulativa, introduciendo los elementos estudiados en la facultad (ábacos, regletas, bloques lógicos, etc.), incidiendo en los centros de interés de sus alumnos.
Las asignaturas a las que se les dan mayor importancia en el centro educativo son lengua y matemáticas.	
Los conocimientos aprendidos en la Facultad no sirven para poder enfrentarse a esa asignatura como maestros, es muy teórico, y la realidad es diferente. En la práctica es donde se observa realmente el trabajo del maestro.	Los conocimientos aprendidos en la Facultad sirven para poder enfrentarse a esa asignatura como maestros, les proporcionan nuevas metodologías que no vieron en los centros de primaria, les proporciona el conocimiento de materiales didácticos, de enfocar actividades, etc.
La inmensa mayoría de los alumnos entrevistados pertenecieron a la opción de letras o sociales.	

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hoy en día, para el segundo grupo de alumnado en prácticas (año 2014), la matemática en la formación Universitaria de magisterio tiene mucha aplicación en la práctica real en las aulas de primaria, existe relación de utilidad, existe conexión entre los conocimientos, todo lo dado en las clases de la Facultad, les ha servido de apoyo para enfrentarse a una clase de primaria (materiales didácticos, metodologías específicas, enfocar actividades, etc.).

A diferencia que el primer grupo (año 2009) que experimenta una marcada desconexión entre los conocimientos impartidos en la Facultad y los vislumbrados en las prácticas reales.

En la actualidad, el sentimiento de desconexión viene marcado por el centro de primaria en el que no se usan materiales como ábacos, regletas, etc. para enseñar matemáticas, elementos que si se presentan en la Facultad. La problemática se detecta en los maestros de mayor edad (el hecho de no "reciclarse" en cuanto a los nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje supone un problema al respecto). La crítica principal, por estos estudiantes, viene dada a los centros de prácticas por el uso abusivo del libro de texto, fichas, y trabajo repetitivo.

Hace cinco años, el sentimiento de desconexión venía marcado por la Facultad, principalmente en la necesidad de un mayor enfoque práctico. La crítica principal recaía en la Facultad misma y al sentimiento de desconexión de la materia de matemática en relación con el centro de prácticas.

En cuanto a lo que se mantiene inalterable desde hace un lustro hasta nuestros días es que:

La inmensa mayoría de los alumnos entrevistados pertenecen a la opción de letras o sociales.

Las asignaturas a las que se les dan mayor importancia son lengua y matemática.

La matemática en los centros de prácticas se imparte igual que otras materias (libro de texto, fichas, corrección en pizarra, etc.)

Estos hechos pueden deberse al enfoque particular de estos alumnos en concreto, o bien al hecho de que los conocimientos didáctico-matemáticos impartidos en la Facultad van evolucionando de manera positiva hasta cumplimentarse óptimamente con las prácticas de estos alumnos en la actualidad. Aspecto en el que también puede influir la diferencia del plan de estudios y del número de créditos asignados a los prácticums.

En definitiva, se evidencia, cada vez más en el tiempo, una mayor aplicación de los conocimientos universitarios didáctico-matemáticos en la práctica real en los centros de primaria, mayor relación de utilidad, conexión entre los conocimientos, mayor noción de nuevas metodologías, materiales didácticos, actividades prácticas, lúdicas y manipulativas.

Propuesta

Nuestra materia en la actualidad proporciona la oportunidad de pasar de la mera experiencia a la reflexión y no quedarse solo en la reproducción de patrones, lo que se puede desarrollar mediante el análisis de comparaciones, contrastaciones, conexiones de los modelos observados, extraer el conocimiento tácito, proponer alternativas de trabajo, asesorar y responder a las necesidades formativas (Elliott, 1989; Fraile, 1997; García-Ruso, 2002; Martínez, 2001; Pérez-Gómez, 1992; Schön, 1992; Sepúlveda, 2005, 2009; Stenhouse, 1987, 1985; Tardif, 2004; Toja, 2001).

Esta forma de trabajar, propia del enfoque práctico-reflexivo defendido por Elliott (1989), Schön (1992) y Stenhouse (1985, 1987), hacen que el valor de las clases sea no solo de contenido sino también de competencias profesionales. El alumnado debe tomar conciencia de la construcción del conocimiento profesional (Sepúlveda, 2005, 2009; Murillo, 2000; Marcelo, 1995; Montero, 2003; Zeichner, 1990; Pérez-Gómez, 1992, 1998; Tardif, 2004; Martínez, 2001), lo que se puede conseguir dándole la importancia que tiene a la crítica de la experiencia (Tardif, 2004), mediante la reflexión, investigación y pensamiento crítico (Day, 2005).

Referencias

Angulo, J. F. (1994). *La perspectiva de los supervisores sobre las prácticas* (Vol. 6) [Documento multicopiado]. Málaga, España: Universidad de Málaga.

Burgess, R. G. (1984). *In the Field. An introduction to field Research*. Londres, Reino Unido: George Allen and Urwin.

Cochran-Smith, M. y Lytle, S. L. (2002). *Dentro-fuera: Enseñantes que investigan*. Madrid, España: Akal.

Day, C. (2005). *Formar docentes. Cómo, cuándo y en qué condiciones aprende el profesorado*. Madrid, España: Narcea.

Elliott, J. (1989). Educational Theory and the Professional Learning of Teachers: An Overview. *Cambridge Journal of Education, 19(1)*, 81-101.

Fraile, A. (1997). El prácticum como actividad de formación colaborativa. En D. Ayora, et al. (Eds.), *Aportaciones al estudio de la actividad física y el deporte.* Valencia, España: INEV.

García-Ruso, H. M. (2002). *El pácticum herramienta para la investigación y la formación en la Educación Física.* Universidad Santiago de Compostela, España: Servicio de Publicaciones.

Imbernón, F. (coord.) (2006). *Vivencias de maestros y maestras, compartir desde la práctica educativa*. Barcelona: Garó.

Ingarson, L., y Kleinhenz, E. (2006). Estándares profesionales de práctica y su importancia para la enseñanza. *Revista de Educación, 340*, 265-295.

Murillo, J. F. (2000). La formación inicial y permanente del profesorado: el cuento de la formación. En J. I. Rivas (Coord.) *Profesorado y reforma: ¿un cambio en las prácticas de los docentes?* (pp. 115-124). Málaga, España: Aljibe.

Murillo, J. F. (2009). Documento policopiado, apuntes de cátedra del postgrado de *Políticas y prácticas de innovación educativa para la sociedad del conocimiento. Métodos y Técnicas de Investigación Cualitativa en Educación.* Málaga, España: UMA.

Marcelo, C. (1995). *Formación del profesorado para el cambio educativo*. Barcelona, España: PPU.

Montero, L. (2003). La formación inicial. ¿Puerta de entrada al desarrollo profesional? *Revista Educar, 30*, 69-89.

Martínez, L. (2001). *Los seminarios de seguimiento, una ayuda para fomentar la reflexión. Desarrollo de competencias personales y profesionales en el prácticum.* Lugo, España: Unicopia.

Pérez-Gómez, A. I. (1992). *Recrear la práctica, la reflexión y la experimentación como ejes de la formación de profesores.* Universidad de Barcelona. España: Servicio de Publicaciones.

Pérez-Gómez, A. I. (1998). *La cultura escolar en la sociedad neoliberal*. Madrid, España: Ediciones Morata, S. L.

Sepúlveda, M. P. (2005). Las prácticas de enseñanza en el proceso de construcción del conocimiento profesional. *Educar, 36,* 71-93.

Sepúlveda, M. P. (2009). Documento policopiado, apuntes de cátedra del postgrado de *Políticas y prácticas de innovación educativa para la sociedad del conocimiento. Políticas y prácticas de formación del profesorado (parte I: La Formación Inicial).* Málaga, España: UMA.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos; Hacia el nuevo diseño de enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: MEC, Paidós.

Stenhouse, L. (1985). El profesor como tema de investigación y desarrollo. *Revista de Educación, 277,* 43-53.

Stenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid, España: Morata.

Tardif, M. (2004). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Madrid, España: Narcea.

Toja, M. B. (2001). *Estudio de un programa de formación: la investigación acción como estrategia en un programa de formación e investigación*. Málaga, España: Servicio de Publicaciones UMA.

Vaillant, G. C., y Pierzynski, G. M. (2006). Remediation to Reduce Ecological Risk from Trace Element Contamination: A Decision Case Study. *Journal of Natural Resources and Life Sciences Education, 35*, 85-94

Zeichner, K. (1990). Traditions of reform in U. S. teacher education. *Journal of teacher education, 41,* 3-20.

CONCEPCIONES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. ESTUDIO A PARTIR DE GRÁFICAS

Conceptions about finite limit of a function at a point. Study based on graphs

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico Romero

Universidad de Granada

Resumen

Este estudio se centra en las concepciones individuales de estudiantes de bachillerato acerca de límite finito de una función en un punto al emplear una definición personal para justificar la existencia o no de límite de funciones proporcionadas mediante sus gráficas. Analizamos los argumentos proporcionados por los estudiantes a cada una de las gráficas, en primer lugar, sin tener en cuenta la definición personal correspondiente, dando lugar a significados parciales del concepto; en segundo lugar, valorando la coherencia entre los argumentos y su definición personal asociada evaluando la capacidad de argumentar deductivamente a partir de definiciones. Entre los resultados, destacamos la persistencia de concepciones erróneas como identificación del límite como imagen, como el valor de la abscisa x, la no alcanzabilidad o no rebasabilidad y caracterizamos tres grados de coherencia entre argumento y definición; uso adecuado de condiciones necesarias y/o suficientes, uso inadecuado de condiciones necesarias y/o suficientes, y uso inadecuado de condiciones no necesarias ni suficientes.

Palabras clave: *Límite finito de una función en un punto, Sistema de representación gráfico, Definición personal, Concepciones individuales, Coherencia argumento-definición.*

Abstract

This paper focuses on students'conceptions in Non-Compulsory Secondary Education about finite limite of a function at a point when they apply a personal definition in order to justify the existence or not of the limit of functions given their graphs. We analyse the collected arguments, firstly, without considering the corresponding personal definition, leading to partial meanings of the concept; secondly, exploring the coherence between personal definition and argument, in order to describe the ability to make deductions properly from definitions. Among the results, we highlight the persistence of misconceptions such as, identification between limit and image or x-value, the unreachability or "not exceedability"of the limit and we characterise three different levels of coherence between argument and definition; adequate use of necessary/sufficient conditions, inadequate use of necessary/sufficient conditions, and inadequate use of non-necessary/sufficient conditions.

Keywords: *Finite limit of a function at a point, Graphical System of Representation, Personal definition, Individual Conceptions, Coherence argument-definition.*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación" (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICINN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico. L. (2014). Concepciones sobre límite finito de una función en un punto. Estudio a partir de gráficas. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (p. 81). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

COMPETENCIAS DE LOS ESTUDIANTES EN RAZÓN Y PROPORCIÓN: EL CASO DE LAS TAREAS DE RELATIVIZAR[1]

Students' competences in ratio and proportion: the case of relatively tasks

Bernardo Gómez Alfonso, Amparo García Nadal

Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se estudia la resolución de tareas de razón y proporción referentes a ofertas comerciales. Se identifican las componentes críticas de las tareas y se analizan las respuestas de los estudiantes de distintos niveles al resolverlas. Finalmente se extraen conclusiones acerca de su desempeño.

Palabras clave: *razón y proporción, relativamente, normalizar*

Abstract

In this work, the resolution of ratio and proportion tasks concerning commercial offers are studied. The critical components are identifying and student's responses to each task are analyzed. Finally, concluding remarks are extracted.

Keywords: *ratio and proportion, relatively, norming*

INTRODUCCIÓN

Razón y proporción es muy importante en el currículum obligatorio por su gran aplicación práctica en situaciones de la vida cotidiana, i.e., las ofertas comerciales, velocidades, densidades, escalas, etc. A pesar de su importancia, es un tema cuya enseñanza no está bien resuelta. Como señala la investigación precedente, los estudiantes muestran dificultades para aprender y manejar estos conceptos, y los profesores para enseñarlos.

En didáctica de las matemáticas, razón y proporción se ha estudiado desde diferentes puntos de vista a lo largo de los últimos años. Uno de ellos es el estudio de competencias en la educación primaria tal y como se puede ver en Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009). Las aportaciones de estos textos son los antecedentes de este trabajo y también lo es el análisis fenomenológico del concepto de razón y proporción que elabora Freudenthal (2001) ya que de aquí se extrae el concepto base sobre el cual se desarrolla este estudio, es lo que él denomina "relatively". El eje central de este trabajo es pues el concepto de relativizar ya que, al revisar la literatura, se comprueba que hay pocos textos que lo estudian, en particular, uno de los que se ha encontrado y en el cual se desarrolla esta idea es Fernández (2009), aplicado a problemas de densidades.

MARCO TEÓRICO

La problemática que existe entorno al razonamiento proporcional y la proporcionalidad es muy compleja y se ha estado estudiando desde hace varias décadas. Entre los estudios centrados en este tema, se distinguen dos tipos:

1. Los que se centran en el desarrollo cognitivo.
2. Los que se orientan a la estructura y caracterización del contenido matemático.

Gómez, B., y García, A. (2014). Competencias de los estudiantes en razón y proporción: El caso de las tareas de relativizar. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 83-91). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Según Tourniaire y Pulos (1985), los del primer tipo han cambiado desde una perspectiva del razonamiento proporcional como una habilidad global o una manifestación de una estructura cognitiva, hacia otra perspectiva que focaliza su atención en la descripción de procedimientos usados en el mismo y cómo influyen las variables personales y de tarea. La idea principal en la cual se centran es en lo que el alumno puede o no puede hacer. Para evaluar esto, se han utilizado distintos tipos de tareas: *Valor perdido, Comparación, Transformación, Valor medio, Proporciones que implican conversión de razones a razones de cambio o fracciones, Proporciones que involucran tanto clasificaciones de ciertas unidades como de números, y tareas de Traslación "entre-modo"* (Lesh, Post y Behr, 1988). El análisis de las respuestas a este tipo de tareas ha permitido identificar estrategias correctas: *Razón unitaria, Factor de cambio, Método de la fracción* y *Producto cruzado*; y estrategias incorrectas: *Construcción progresiva, Diferencia constante* y *Operaciones aleatorias* (Cramer y Post, 1993; Lamon, 1993; Hart, 1981).

Los estudios centrados en el contenido matemático, apuntan a que dos de los conceptos que resultan esenciales en razón y proporción: *relativizar* y *normalizar*, y sus técnicas, han sido poco estudiados, mención aparte del trabajo de Fernández (2009) aplicado a problemas de densidades.

Relativizar, es "poner en relación con…". Esto permite comparar cantidades con referentes diferentes transformando el referente. Un ejemplo representativo es: "una pulga puede saltar -relativamente- más alto que un hombre" (Freudenthal, 2001).

El segundo concepto, "normalizar", se refiere al conjunto de técnicas mediante las cuales se pueden percibir razones que a priori resultan difíciles de imaginar. Un ejemplo es: "si imaginamos la Tierra como la cabeza de un alfiler (1 mm de diámetro), el Sol aparece como una esfera con un diámetro de 10 cm a una distancia de 10 m".

Freudenthal, además, define una secuencia de niveles para su enseñanza, que es útil para caracterizar las respuestas de los participantes en este estudio.

Esto va a suponer una herramienta para caracterizar las respuestas de los participantes en este trabajo. Además, la enseñanza de esta secuencia de niveles puede ser útil para resolver problemas de razón y proporción.

OBJETO DE ESTUDIO Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El propósito de este trabajo es aportar información fundamentada en relación con tareas de "relativizar" y normalizar, aunque aquí solo documentamos algunos resultados en relación con el primer concepto. A tal fin, las preguntas de investigación que se han formulado son:

- ¿Cómo responden a estas tareas: cuantitativa o cualitativamente?
- ¿Qué estrategias utilizan: aditivas, multiplicativas, etc.?
- ¿En qué aspectos se fijan: datos, imágenes, texto, etc.?
- ¿Qué dificultades manifiestan: comprensión, conceptos, procedimientos, etc.?

METODOLOGÍA

El referente de la metodología en nuestro estudio son los trabajos previos de nuestro grupo, Fernández (2009) y Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009). Se trata de una investigación de tipo cualitativo que se basa en el "análisis de las tareas" a partir de un cuestionario diseñado *ex profeso*. Las tareas propuestas para el cuestionario son realistas, más concretamente, tomadas de folletos de ofertas comerciales de diversos establecimientos.

Estas tareas se clasifican, según su tipología, como tareas de comparación cuantitativa ya que se trata de razonar cuándo una razón es mayor, igual o menor que otra [A/B (<, =, >) C/D]. Esto se puede hacer o bien de modo grosero, o bien de forma precisa.

La muestra tomada para el estudio corresponde a tres niveles educativos diferentes. En primer lugar, se facilitó el cuestionario a alumnos de primer curso de bachillerato del instituto Jaume II el Just de Tavernes de la Valldigna, a un grupo de ciencias sociales (grupo A, 18 alumnos) y a otro de ciencias (grupo B, 25 alumnos). En segundo lugar, se realizó la prueba con estudiantes de segundo curso de grado de magisterio (48 alumnos) y del máster de profesorado (38 alumnos) de la Universidad de Valencia (UV).

Las actividades del cuestionario se distribuyeron en hojas de trabajo individuales y la actitud en los tres grupos fue interesada y participativa.

ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Para poder ilustrar el tipo de análisis que se realizó con cada una de las tareas y para dar cuenta de las preguntas de investigación, se muestra a continuación como ejemplo el análisis de la tarea denominada "pizzas". Primero se caracteriza esta tarea, se definen sus objetivos y se relaciona con el marco conceptual previo, después se determinan sus componentes críticas, se discuten las soluciones aportadas por expertos y, finalmente, se aporta un esquema de clasificación de las respuestas de los estudiantes por categorías y subcategorías.

Tarea "Pizzas"

La tarea se presenta a los participantes mediante una hoja individual de trabajo en la que aparece una imagen que corresponde a una oferta de pizzas. El texto dice: ¿Qué es mejor, dos pizzas medianas de 30cm de diámetro y 14.95€ cada una, o una pizza familiar de 50cm diámetro y 27.95€? (Figura 1).

Figura 1. Tarea Pizzas

Se trata de una tarea de comparación de comparaciones internas (áreas entre sí y costes entre sí) o externas (valores unitarios).

Atendiendo al marco conceptual, la tarea es de comparación en el sentido de Lesh, Post y Behr (1988) [A/B(=?=)C/D], aunque no se precisa respuesta numérica precisa, puede ser grosera (Freudenthal, 2001). La relación numérica puede ser interna o externa (Freudenthal, 2001). Por último, el contexto se corresponde con el de ofertas comerciales de establecimientos.

El objetivo principal de esta tarea es comprobar si los estudiantes son capaces de percibir la relación de relaciones que da respuesta a la tarea. Esto, ya se ha visto que se puede hacer calculando el precio en relación a la cantidad, es decir, el coste unitario, o su relación inversa.

Notar que una de las respuestas esperadas es la que se refiere a qué oferta ofrece más cantidad de comida con el menor precio, no de forma absoluta sino relativa. Para ello es necesario:

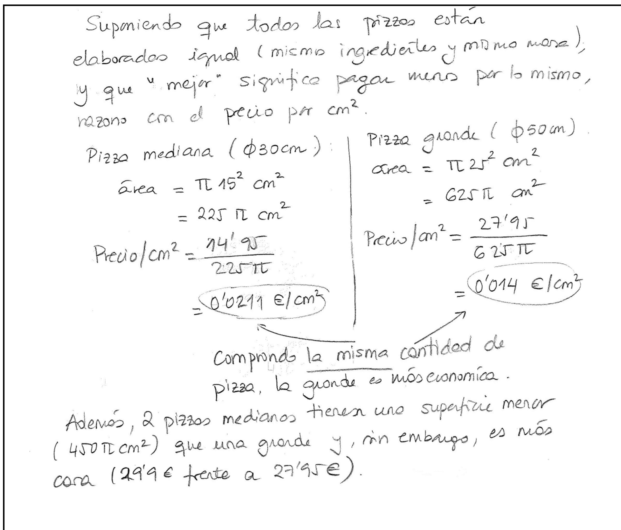
1. Calcular:
    a. El área de las pizzas medianas y el de la familiar.

   b. El coste de las pizzas medianas.
   c. Los costes unitarios de cada oferta.
2. Comparar:
   a. Área (¿dónde hay más?)
   b. Precio (¿cuál es más barata?)
   c. Comparar comparaciones cualitativamente: “a más, menos o igual de esto le corresponde más, menos, igual de esto otro”.

Soluciones aportadas por los expertos

Con el objetivo de conocer a priori diversas estrategias de resolución de la tarea y tener información de los procesos de resolución, se facilitó el cuestionario a 4 expertos. Se considera experto a todo profesor experimentado y/o con sólida formación matemática. Las soluciones aportadas por los expertos se consideran soluciones esperadas al resolver una tarea.

Se presenta a continuación un ejemplo representativo (Figura 2) correspondiente a una experta, la cual muestra los dos tipos de resoluciones diferentes identificadas en sus actuaciones.



Suponiendo que todas las pizzas están elaboradas igual (mismos ingredientes y misma masa), y que "mejor" significa pagar menos por lo mismo, razono con el precio por cm^2.

Pizza mediana (ϕ 30 cm)	Pizza grande (ϕ 50 cm)
área = $\pi \cdot 15^2 = 225 \cdot \pi$ cm^2	área = $\pi \cdot 25^2 = 625 \cdot \pi$ cm^2
Precio/cm^2 = 14.95/225·π =	Precio/cm^2 = 14.95/225·π =
= 0.0211€/ cm^2	= 0.014€/ cm^2

Comprando la misma cantidad de pizza, la grande es más económica.

Además, 2 pizzas medianas tienen una superficie menor (450·π cm^2) que una grande y, sin embargo, el más cara (29.9€ frente a 27.95€).

Figura 2. Experta

La experta calcula el área de una pizza mediana ($S_m = \pi \cdot 15^2 = 225 \cdot \pi$ cm^2) y el área de la pizza familiar ($S_f = \pi \cdot 25^2 = 625 \cdot \pi$ cm^2) ya que el precio de cada unidad viene dado como dato. Luego calcula los valores unitarios (P_m/S_m = 0.0211€/cm^2 y P_f/S_f = 0.014€/cm^2) en cada caso y los compara. Finalmente apoya su conclusión con que “*2 pizzas medianas tienen una superficie menor (450·π cm^2) que una grande y, sin embargo, el más cara (29.9€ frente a 27.95€)*”.

En la resolución de esta profesora se identifica la percepción de la invariancia de la razón ya que para calcular el coste unitario solamente utiliza los datos de una pizza mediana y no los de las dos medianas en total.

Los expertos han mostrado dos tipos de respuestas: una que se basa en el cálculo del coste unitario de las pizzas y otra que se centra en la idea de qué oferta proporciona más cantidad a menor precio.

Esquema de clasificación

Con el fin de dar cuenta de las respuestas aportadas por los estudiantes se organizan en un esquema de categorías y subcategorías atendiendo a los rasgos comunes y no comunes identificados. Se acompaña cada una de ellas con un ejemplo extraído de las respuestas proporcionadas por los alumnos.

Categoría 1: Relativiza

En esta categoría se incluyen respuestas que se centran en razonamiento relativo, no absoluto.

Subcategoría 1.1. Compara razones adecuadas - Normaliza (Figura 3)

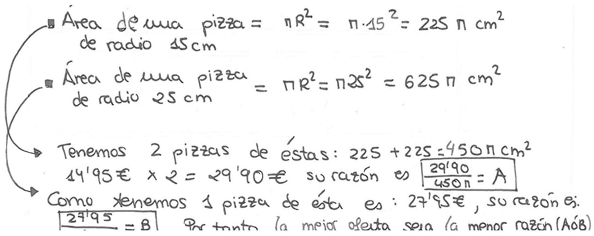
	Área de una pizza de radio 15cm = $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot 15^2 = 225 \cdot \pi$ cm^2 Área de una pizza de radio 25cm = $\pi \cdot R^2 = \pi \cdot 25^2 = 625 \cdot \pi$ cm^2 Tenemos 2 pizzas de éstas: 225+225=450·π cm^2 14.95€ x 2 = 29.90€ su razón es A = 29.90/450·π Como tenemos 1 pizza de ésta es: 27.95€, su razón es B = 27.95/625·π Por tanto la mejor oferta será la menor razón (A ó B).

Figura 3. Alumno 14 (máster)

El alumno calcula el área de la pizza familiar ($S_f = \pi \cdot 25^2 = 625 \cdot \pi$ cm^2) y el área y coste de las pizzas medianas ($S_m = \pi \cdot 15^2 = 225 \cdot \pi$ cm$^2 \rightarrow 225 \cdot \pi + 225 \cdot \pi = 450 \cdot \pi$ cm^2; 14.95€ ·2 = 29.90€). A continuación calcula los costes unitarios (A = 29.90/450·π; B = 27.95/625·π) y concluye que "*la mejor oferta será la menor razón (A ó B)*".

Esta estrategia es adecuada y se basa en el cálculo de los valores unitarios, que ha sido identificada como estrategia correcta.

Subcategoría 1.2. No compara razones adecuadas - Linealidad (Figura 4).

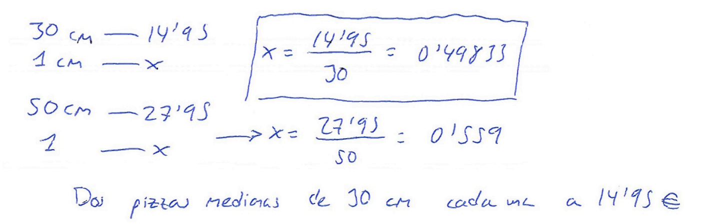
	30 cm → 14.95 x = 14.95/30 = 0.49833 1 cm → x 50 cm → 27. x = 27.95/50 = 0.559 1 cm → x Dos pizzas medianas de 30 cm cada una a 14.95€.

Figura 4. Alumno 7 (máster)

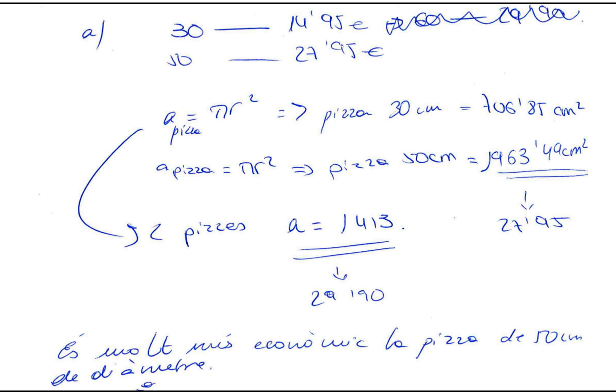
Este estudiante calcula el coste por centímetro de pizza mediante reglas de 3 (30cm → 14.95, 1cm → x; x = 14.95/30 = 0.49833 y 50cm → 27.95, 1cm → x; x = 27.95/50 = 0.559) y concluye que es mejor "*dos pizzas medianas de 30cm cada una a 14.95€*".

Si el alumno hubiese usado esta estrategia pero en lugar de considerar cm hubiese considerado cm^2, entonces sería correcto. La dificultad observada es lo que se conoce como "linealidad" (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006).

Subcategoría 1.3.a. Compara razones cualitativamente de forma adecuada (Figura 5)

En esta respuesta, el alumno calcula el área totas de ambas ofertas (S_f = 1963.49cm^2; S_m = 706.85cm^2, $2 \cdot S_m$ = 1413cm^2) y el coste de las dos pizzas medianas (29.90€). Concluye que "*es mucho más económico la pizza de 50cm de diámetro*".

Se observa en los datos, sin tener que realizar cálculo de razones explícitas que la familiar ofrece más área a menor precio.



$30 \rightarrow 14.95€$

$50 \rightarrow 27.95€$

$a_{pizza} = \pi \cdot r^2 \rightarrow$ pizza 30 cm = 706.85 cm^2

$a_{pizza} = \pi \cdot r^2 \rightarrow$ pizza 50 cm = 1963.49 cm^2

2 pizzes a = 1413 ↓

↓ 27.95

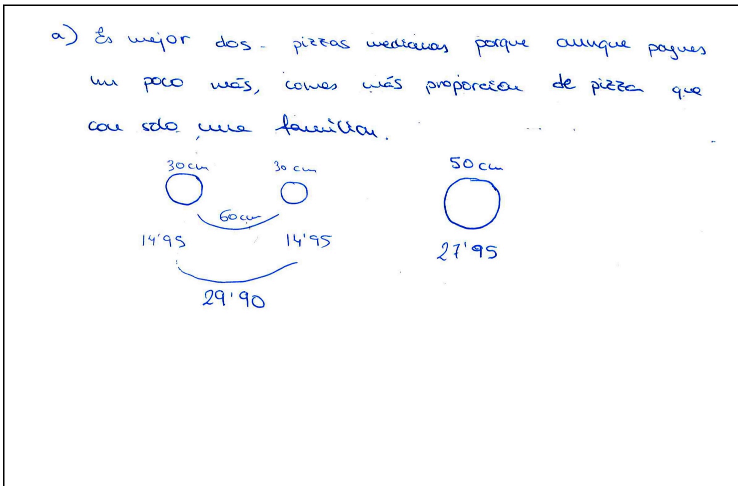
29.90

Es más económica la pizza de 50 cm de diámetro.

Figura 5. Alumno A1 (bachillerato)

Esta estrategia ofrece una solución correcta a la tarea.

Subcategoría 1.3.b. Compara razones cualitativamente de forma no adecuada (Figura 6)



Es mejor dos pizzas medianas porque aunque pagues un poco más, comes más porción de pizza que con solo una familiar.

30 cm 30 cm 50 cm

↓ ↓

60 cm 27.95

14.95 14.95

↓

29.90

Figura 6. Alumno A3 (bachillerato)

Este estudiante procede igual que el de la figura 5, pero la diferencia es que este no considera áreas sino diámetros (Familiar: 27.95€ y 50cm; Medianas: 29.90€ y 60cm). Concluye que "es mejor dos pizzas medianas porque aunque pagues un poco más, comes más proporción de pizza que con solo una familiar".

Esta estrategia no es correcta ya que le ocurre algo similar al de la figura 4 ("linealidad") y, si se calcula el área de una pizza de 60cm de diámetro, es mucho mayor que el área de dos pizzas medianas de 30cm de diámetro cada una. Si solamente se considerase un ítem en cada oferta, razonar mediante el diámetro sería correcto ya que a mayor diámetro mayor área, pero al considerar dos ítems de pizzas medianas, esto no es suficiente.

Lo que tienen en común ambas respuestas es que muestran pensamiento relativo pero sin calcular explícitamente las razones. El tipo de razonamiento es "a más, menos o igual de esto, le corresponde más, menos o igual de esto otro".

Categoría 2: No relativiza

A diferencia de la categoría anterior, las respuestas que se muestran aquí se centran en cálculos con datos absolutos, no relativos.

Subcategoría 2.1. Cualitativa (Figura 7)

a) Creo que a 14,95€ la mediana, si coges dos tienes que pagar 29,90€, mientras que la grande vale 27,95€ entonces ahorras 1,95€ y quieras o no con ~~lo~~ poca diferencia de comida que hay vas a terminar igual de saciado por menos precio. Yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de trasporta	Creo que a 14.95€ la mediana, si coges dos tienes que pagar 29.90€, mientras que la grande vale 27.95€ entonces ahorras 1.95€ y quieras o no con la poca diferencia de comida que hay vas a terminar igual de saciado por menos precio. Yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de transportar.

Figura 7. Alumno B37 (bachillerato)

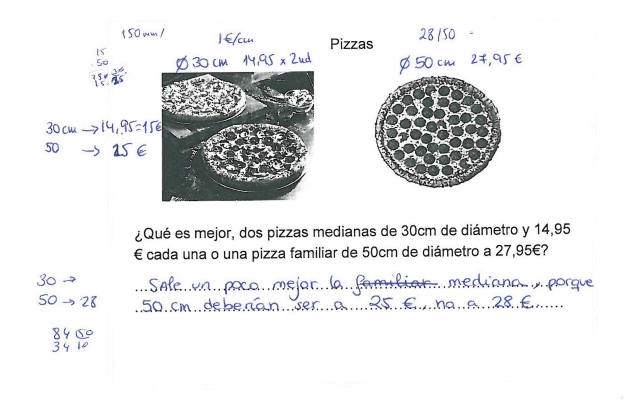
Aunque este alumno empieza a razonar con cálculos aditivos, su conclusión se basa en razonamiento cualitativo ya que expresa que "*yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de transportar*".

Está claro que la estrategia no es adecuada ya que no se centra en datos numéricos de la oferta.

Subcategoría 2.2. Cuantitativa

En esta subcategoría se distinguen dos clases:

Clase 2.2.1. Extensión de la razón y comparación aditiva (Figura 8)



ϕ 30 cm 14.95 x 2 ud ϕ 50 cm 27.95

30 cm → 14.95 = 15€

50 cm → 25€

30 →

50 cm → 25€

Sale un poco mejor la mediana, porque 50 cm deberían ser a 25€, no a 28€.

Figura 8. Alumno 3 (máster)

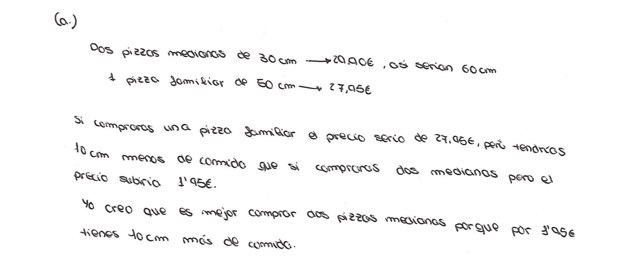
Este estudiante calcula el precio del diámetro de la familiar fijando los datos de una pizza mediana (30cm → 15€, 50cm → x; x = 25€) y concluye que "*sale un poco mejor la mediana porque 50cm deberían ser a 25€ y no a 28€*".

Al igual que ocurre en la respuesta del alumno de la figura 6, si se calculase respecto de áreas y no de diámetros, esta estrategia sería correcta. El alumno intenta extender la razón entre el diámetro y el precio de una pizza mediana a los datos de la familiar. Sin embargo, el uso de la "linealidad" le lleva a responder incorrectamente a la tarea. Incluimos este tipo de respuestas en esta categoría porque las cantidades que finalmente compara el alumno son absolutas

Clase 2.2.2. Tentativas (Figura 9)

En esta respuesta se observa que el alumno realiza cálculos aditivos ya que dice que "*si compras una pizza familiar el precio sería de 27.95€, pero tendrías 10cm menos de comida que si compraras dos medianas pero el precio subiría 1.95€. Yo creo que es mejor comprar dos pizzas medianas porque por 1.95€ tienes 10 cm más de comida*".

Está claro que la estrategia no es adecuada porque está comparando datos absolutos, no relativos. Además, concluir que a más de esto más de esto otro no es suficiente, se debe apoyar con cálculos que lo justifiquen debidamente.



Dos pizzas medianas de 30 cm → 29.90€, así serían 60 cm

1 pizza familiar de 50 cm → 27.95€

Si compraras una pizza familiar el precio seria de 27.95€, pero tendrías 10 cm menos de comida que si compraras dos medianas pero el precio subiría 1.95€.

Yo creo que es mejor dos pizzas medianas porque por 1.95€ tienes 10 cm más de comida.

Figura 9. Alumno B40 (bachillerato)

Categoría 3: No identificados

En esta categoría se recogen respuestas en blanco, no justificadas o que no se entienden, bien sea por la letra o porque se realizan cálculos aleatorios.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación se muestra una tabla resumen en la que se distribuyen las diferentes respuestas de los estudiantes en las categorías y subcategorías definidas. Notar que esta tarea solamente se hizo en los grupos de bachillerato y en el del máster.

Tabla 1. Resumen de datos por categorías y subcategorías

Categoría	1. Relativiza				2. No relativiza			3	Total
Subcategoría	*1.1*	*1.2*	*1.3*		*2.1*	*2.2*		-	-
Clase	-	-	*1.3.a*	*1.3.b*	-	*2.2.1*	*2.2.2*	-	-
Grupo A	0	2	1	2	0	1	8	4	18
Grupo B	3	4	0	1	3	1	12	1	25
Máster	14	3	9	0	1	4	2	3	36
Total	17	9	10	3	4	6	22	8	79

En la tabla 1 se observa que los estudiantes del máster utilizan pensamiento relativo (26/36) más que absoluto (7/36). Esto era de esperar dada la formación y madurez de los estudiantes del máster, ahora bien, la mayoría de los que relativizan lo hacen con la estrategia escolar del valor unitario (14/36) y algunos utilizan una estrategia de comparación cualitativa (9/36) que también da respuesta a la tarea. Notar que a pesar de tener una formación amplia en matemáticas, todavía hay alumnos que recurren a estrategias aditivas (2/36) y al uso de la linealidad en el cálculo del valor unitario (3/36). En cambio, en los alumnos de bachillerato ocurre lo contrario (Relativo: 13/43; Absoluto: 25/43). Se identifica una tendencia a responder aditivamente (25/43) mientras que muy pocos alumnos que siguen la estrategia del valor unitario que mostraron los expertos (3/43).

Por lo que se refiere a la subcategoría 1.3, se observa que 9/36 estudiantes del máster usan el tipo de razonamiento “a más, menos o igual de esto le corresponde más, menos o igual de esto otro”, es decir, que comparan razones cualitativamente y además de forma adecuada. Este tipo de respuesta también se identificó entre las aportaciones de los expertos. Notar que esta respuesta es menos escolar o producto de la enseñanza que la del cálculo del valor unitario. Sin embargo, ocurre lo contrario con los de bachillerato. Solamente 1/43 alumnos utiliza esta estrategia mientras que 3/43 la usan linealmente, por lo que éstos no la resuelven adecuadamente.

Por último, destacar que de los que realizan extensión de la razón (2.2.1), entre los de bachillerato, 1/43 lo hace linealmente mientras que 1/43 lo hace respecto del área aunque se equivoca en los cálculos. En el máster, 1/36 lo hace respecto del diámetro y 3/36 respecto del área pero estos 3 muestran dificultades al realizar los cálculos y ninguno llega a dar una solución correcta a la tarea.

Respecto a las conclusiones del estudio, se distinguen las siguientes:

- hay dificultades en la interpretación de comparaciones del tipo unidades por euro más que en la relación inversa y también para recordar el área de un círculo,
- la palabra “mejor” genera, en diversas ocasiones, valoraciones subjetivas,
- la mayoría de los estudiantes no perciben la invariancia de la razón y eso se identifica cuando buscan el valor unitario en la tarea pizzas y calculan el área total y el costes de las dos medianas para obtener dicha razón,
- hay una tendencia al cálculo del valor unitario según avanza el nivel educativo,
- el uso de la “linealidad” persiste en todos los niveles, de hecho, la mayoría de los estudiantes intentan usar los diámetros en lugar de calcular áreas y,
- algunos alumnos expresan verbalmente la idea de “relatively” pero no lo manifiestan numéricamente, por lo que no alcanzan el último nivel definido por Freudenthal.

Referencias

Cramer, K., & Post, T. (1993). Proportional Reasoning. *The Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*. Valencia: Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria.* Valencia: Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Textos seleccionados, Traducción Luis Puig). México, D. F. Dpto de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Hart, K.M. (1981). Ratio and Proportion. In K. M. Hart (Ed.), *Children´s Understandings of Mathematics: 11-16* (pp. 88-101). London: John Murray Ltd.

Lamon, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Children’s cognitive and metacognitive processes. In T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp.131-156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: a Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía IV*, 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 113-118).

---

[1] Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC. Ref.: EDU2009-10599 (subprograma EDUC).

METODOLOGÍA PARA UNA COMPARACIÓN INTERNACIONAL DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EVALUADO EN TEDS-M

Methodology for an international comparison of the pedagogical content knowledge evaluated in TEDS-M

Araceli Gutiérrez-Gutiérrez[a], Luis Rico Romero[a], Pedro Gómez Guzmán[b]
[a]*Universidad de Granada,* [b]*Universidad de los Andes*

Resumen

El objetivo general de nuestra investigación es describir y caracterizar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros maestros en el estudio TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) en relación con el resto de países participantes en el estudio. En este trabajo, presentamos los criterios que hemos establecido para valorar las respuestas de los futuros profesores a las preguntas del cuestionario y el procedimiento que usamos para calcular las medias de cada país y realizar las comparaciones pertinentes. Ejemplificamos estos procedimientos para las preguntas que evaluaban el conocimiento sobre números y operaciones.

Palabras clave: *Didáctica de la Matemática, Estudios internacionales, Formación inicial de maestros, Números y operaciones, TEDS-M.*

Abstract

The general aim of our research is to describe and characterize the pedagogical content knowledge that Spanish future primary teachers showed in TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) in comparison with the other countries participating in the study. In this paper, we present the criteria that we have established to assess prospective teachers' responses to the questionnaire, and the method we use to calculate the averages of each country and make relevant comparisons. We exemplify these procedures by the questions that assessed the knowledge about number and operations.

Keywords: *Mathematics Pedagogy, number and operations, pedagogical content knowledge, pre-service teacher education, TEDS-M.*

CONTEXTO: EL ESTUDIO TEDS-M

El estudio TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) es un estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos que los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria debieran conseguir durante su preparación como profesores de matemáticas. Se llevó a cabo durante los años 2006-2010. La publicación del informe internacional tuvo lugar en el año 2012 (Tatto et al., 2012). Fue patrocinado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés) y se basaba en el supuesto de que un factor importante que puede explicar las diferencias en las capacidades, conocimientos y actitudes de los alumnos de primaria y secundaria obligatoria manifestadas en estudios internacionales (como PISA o TIMSS) tiene que ver con la variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas.

España participó en el estudio para —entre otros objetivos—: analizar y caracterizar, sobre una sólida base empírica, cómo era la formación inicial del profesorado de matemáticas en España;

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L., y Gómez, P. (2014). Metodología para una comparación internacional del conocimiento didáctico evaluado en TEDS-M. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 93-99). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

establecer relaciones entre ese conocimiento y las características del plan de estudios en el que habían recibido su formación (1991-2010) y poder realizar comparaciones internacionales (INEE, 2012).

Los resultados españoles sobre el conocimiento matemático y didáctico de las matemáticas escolares que se presentaron en el informe internacional de TEDS-M (Tatto et al., 2012, p. 143), al igual que los que presenta el informe nacional (INEE, 2012, p. 85), son globales. Estos resultados indican únicamente el resultado obtenido por los futuros profesores españoles en el conocimiento matemático (481) y didáctico del contenido (492) en relación con una media internacional de 500. Este argumento pone de manifiesto la necesidad de describir y caracterizar el conocimiento manifestado por los futuros profesores de primaria españoles y ubicarlo a nivel internacional.

MARCO CONCEPTUAL

TEDS-M, siguiendo las ideas de Shulman (1987), consideró que el conocimiento matemático para la enseñanza tiene dos componentes—el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático— y diseñó un cuestionario que evaluaba por separado el dominio de los profesores en formación sobre ambos tipos de conocimientos. Al mismo tiempo, basándose en el marco conceptual de TIMSS 2007, TEDS-M organizó las preguntas según cuatro dominios conceptuales: números y operaciones, geometría y medida, álgebra y funciones, y datos y azar (Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan, Arora y Erberber, 2007).

TEDS-M evaluó el conocimiento didáctico sobre matemáticas escolares de los futuros maestros con base en 22 preguntas que interrogan sobre cómo abordar diversas tareas y problemas matemáticos escolares. Algunas de las preguntas del cuestionario provenían de estudios como *Learning Mathematics for Teaching Projects* (Hill y Ball, 2004) y *Mathematics Teaching for the 21st Century Project* (Schmidt, Blömeke, y Tatto, 2011). El resto de las preguntas fueron elaboradas por TEDS-M.

Este trabajo se centra en las 8 preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico sobre números y operaciones. En trabajos previos, concluimos que "TEDS-M no presenta una estructura de categorías propia y completa que permita establecer el conocimiento didáctico del contenido matemático de cada pregunta" (Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico, en prensa), por lo que seleccionamos un conjunto de categorías con las que caracterizamos el conocimiento didáctico requerido para responder correctamente las preguntas de este dominio conceptual. Las categorías, que se presentan a continuación, surgen del análisis de los enunciados de las preguntas y de sus guías de corrección y derivan de las establecidas en el método del análisis didáctico (Rico, 2013).

- Identificar y distinguir los elementos que afectan a la dificultad de un problema (DI).
- Reconocer y describir los errores en los que incurren los alumnos al realizar una actividad o sus concepciones erróneas sobre un concepto o procedimiento determinado (RE).
- Representar alternativamente conceptos y procedimientos matemáticos en el proceso de enseñanza (REP).
- Reconocer aquellos conceptos y procedimientos matemáticos involucrados en la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares y las relaciones entre ellos (CPM).

Las dos primeras categorías se refieren al conocimiento que el futuro profesor puede manifestar sobre limitaciones en el aprendizaje de los escolares—las dificultades relacionadas con el conocimiento matemático o los errores en que pueden incurrir al abordar tareas matemáticas—. Las otras dos categorías hacen referencia al conocimiento de un contenido matemático escolar y aluden a sus representaciones y a la estructura conceptual de ese contenido.

OBJETIVO Y MÉTODO

Nuestro objetivo es realizar una comparación internacional de los resultados españoles en el dominio de números y operaciones con respecto a los de los otros países participantes según las categorías con las que hemos caracterizado el conocimiento didáctico evaluado por TEDS-M. Se trata, por tanto, de una investigación comparativa y cuantitativa, a partir de los datos procedentes del estudio internacional TEDS-M.

Muestra

En el estudio internacional participaron 17 países. El trabajo de campo siguió el diseño establecido en Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley (2008). En cada país, se seleccionaron, de manera aleatoria, muestras representativas de las instituciones que ofrecían formación a la población diana de futuros profesores que se estaban preparando para enseñar matemáticas y que se encontraban en su último año de formación. En cada institución, se seleccionó una muestra aleatoria de 30 futuros profesores —o la población completa si su tamaño era inferior a 30—que en el año 2008 se encontraran cursando su último año de formación. Participaron un total de 483 instituciones con sus respectivos programas de formación y 13871 futuros profesores de primaria de matemáticas de dichas instituciones (Tatto et al., 2012).

La muestra de instituciones españolas estuvo compuesta por 50 de un total de 73 instituciones que ofrecían formación inicial a futuros maestros de primaria. Dos de ellas declinaron la invitación a participar. Un total de 1093 futuros profesores de primaria españoles, que seguían el programa de formación establecido por el Real Decreto 1440/1991 (MEC, 1991) anterior al actual título de Grado, respondieron el cuestionario (INEE, 2012).

Instrumentos y fuentes de información

Este estudio se basa en la información proporcionada por el cuestionario de TEDS-M, las guías de corrección diseñadas para la corrección de las preguntas de respuesta abierta y las respuestas de los futuros profesores participantes a dicho cuestionario.

Procedimiento

Para lograr el objetivo propuesto seguimos un procedimiento que consta de los siguientes pasos:

- selección, análisis y clasificación de las preguntas del dominio de números y operaciones;
- establecimiento de criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores y
- cálculo de parámetros.

Describimos a continuación brevemente estos pasos.

Selección y clasificación de las preguntas del dominio de números y operaciones

En trabajos previos, presentamos el proceso de identificación, análisis y clasificación de las preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico de los profesores en formación sobre números y operaciones (Gutiérrez 2012; Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez, en prensa). El resultado de ese proceso se muestra en la tabla I que incluye las 8 preguntas con las que se evaluó el conocimiento didáctico sobre números y operaciones en el estudio TEDS-M. En ella indicamos, para cada pregunta, su contenido matemático, el conocimiento didáctico específico que se requiere para contestarla correctamente —identificado por las categorías establecidas— y el tipo de respuesta. Como es habitual en este tipo de estudios, las preguntas del cuestionario son de respuesta múltiple —varias opciones de respuesta de la cuales solo una era correcta—, de respuesta múltiple compuesta —cada opción de respuesta del problema se presenta como un apartado con dos opciones de respuesta—, o de respuesta abierta. Para estas últimas, TEDS-M diseñó las guías de corrección correspondientes y su procedimiento de codificación.

Tabla 1. Preguntas de conocimiento didáctico sobre números y operaciones

Número de pregunta	Contenido matemático	Conocimiento didáctico	Tipo de Respuesta
1	Problemas aritméticos	DI	Abierta
2	Proporcionalidad directa entre magnitudes	DI	Abierta
3	Números decimales	RE	Abierta
4	Representación de números decimales	REP	Abierta
5	Orden de fracciones	CPM	Múltiple
6	Interpretación gráfica de la división de fracciones	REP	Múltiple compleja
7	Operaciones con números mixtos	RE	Múltiple
8	Algoritmos de la resta	CPM	Múltiple

Fuente: Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (En prensa)

Establecimiento de criterios de valoración de las respuestas de los futuros profesores

En segundo lugar y de forma similar a como se hace en TEDS-M para calcular los resultados generales, valoramos las respuestas de los futuros profesores a cada pregunta atendiendo a los distintos tipos de respuesta. En nuestro caso la valoración será la siguiente:

- Si la pregunta es de respuesta múltiple asignamos el valor 1 si el futuro profesor contestó correctamente y 0 si contestó de forma incorrecta.
- Si la pregunta es de respuesta abierta asignamos el valor 1 si el futuro profesor contestó correctamente, 0 si contestó de forma incorrecta y 0,5 si contestó de forma parcialmente correcta. Consideramos en el último caso, a partir del análisis de las guías de corrección que realizaron Gutiérrez (2012) y Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez (En prensa), que el conocimiento manifestado en los distintos tipos de respuestas parcialmente correctas merece la misma puntuación.
- Si la pregunta es de respuesta múltiple compuesta asignamos el valor 1 si el futuro profesor contesta correctamente todas las opciones de respuesta, 0,5 si contesta correctamente todas menos una, y 0 para el resto de los casos. Las respuestas ilegibles, tachadas o en blanco se consideran valores perdidos.

Proponemos a continuación tres preguntas liberadas del cuestionario TEDS-M —figura 1, figura 2 y figura 3— que ejemplifiquen la valoración que hacemos de los distintos tipos de respuestas —respuesta múltiple, respuesta abierta, y respuesta múltiple compuesta respectivamente—.

¿Cuántos números decimales hay entre 0,20 y 0,30?

Marque la opción que crea correcta.

A. 9

B. 10

C. 99

D. Un número infinito

Figura 1. Ejemplo de pregunta de respuesta múltiple

La pregunta que presenta la figura 1 es de respuesta múltiple. La respuesta correcta sería la opción (D). Aquellos futuros profesores que contestaran la opción (D) serían puntuados con 1 punto y los que marcaran cualquier otra opción recibirían 0 de puntuación.

Indique para cada número si es racional o irracional. Marque con una X la opción correcta en cada fila

	Racional	Irracional
a) π		
b) 2		
c) $\sqrt{49}$		
d) $-\frac{3}{2}$		

Figura 2. Ejemplo de pregunta de respuesta múltiple compuesta

La pregunta que presenta la figura dos es de respuesta múltiple compleja. Los números racionales son 2, raíz de 49 y -3/2; mientras que l único número irracional es el número pi. Saber distinguir correctamente los números racionales de los irracionales en todos los casos lo puntuamos con 1 punto. Reconocer 3 de los 4 casos que se presentan lo puntuamos con 0,5. Y reconocer 2, 1 o ninguno se puntúa con 0 puntos.

[Jeremy] se da cuenta de que cuando introduce 0,2 x 6 en la calculadora el resultado es menor que 6, y que cuando introduce 6 : 0,2 tiene un resultado mayor que 6. Él está perplejo por esto, y le pide a su profesor ¡una nueva calculadora!

¿Cuál es la concepción errónea más probable [de Jeremy]?

Figura 3. Ejemplo de pregunta de respuesta abierta

La pregunta que presenta la figura 3 es de respuesta abierta y la valoración de las respuestas la hacemos de acuerdo con la información que nos proporciona la guía de corrección.

Respuestas correctas: se puntúan con 1 punto. Se considera que un futuro profesor contesta correctamente si su respuesta sugiere que el alumno ha podido considerar que la multiplicación de números decimales siempre da un resultado mayor que los números propuestos y que la división siempre da un resultado menor que el dividendo.

Respuestas parcialmente correctas: se puntúan con 0,5. Las respuestas parcialmente correctas pueden ser de dos tipos según la guía de corrección. Tipo 1: la respuesta del futuro profesor sugiere que el alumno considera que la multiplicación siempre da un resultado mayor que los números propuestos o que la división siempre da un resultado menor que el dividendo pero no ambos. Y tipo 2: la respuesta del futuro profesor sugiere que el alumno considera 0,2 como un número entero. En este último caso el futuro profesor estaría manifestando otro error usual de los escolares al trabajar con números decimales pero no tendría relación con el error en el que incurre el alumno del problema.

Respuestas incorrectas: se puntúan con 0. Según las guías de corrección se consideran respuestas incorrectas aquellas en las que los futuros profesores manifiestan que al alumno le falta comprensión de los números decimales en general, o de la multiplicación o división en particular. O bien que tiene problemas con la calculadora. También se puntúan con un 0 aquellas respuestas ilegibles.

Cálculo de parámetros

Para nuestra investigación utilizaremos los siguientes parámetros para describir y comparar el conocimiento didáctico sobre números y operaciones:

- La media internacional y la desviación típica, por grupos y de cada país para las 8 preguntas que lo evaluaban.
- La media internacional, la media de cada país y las desviaciones típicas correspondientes para cada una de las categorías establecidas: (a) la dificultad de los problemas y elementos que afectan a la dificultad de los mismos, (b) las concepciones erróneas de los escolares, (c) la representación de los conceptos y (d) el conocimiento del contenido matemático a enseñar. Estos resultados se obtienen de calcular la media de los resultados obtenidos por cada país para cada una de las dos preguntas que componen cada una de las 4 categorías.

CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un método para caracterizar los resultados en conocimiento didáctico de los futuros maestros españoles en el estudio TEDS-M a nivel internacional que nos permitirá hacer conjeturas acerca de los conocimientos que los futuros profesores han manifestado en este estudio según su tipo de respuesta. Nuestro objetivo es poder describir el conocimiento didáctico manifestado para cada dominio conceptual. Somos conscientes de que un análisis pormenorizado de las preguntas y de las guías de corrección da lugar a establecer carencias o limitaciones tanto en el cuestionario como en las guías de corrección que tendremos en cuenta como aportación a futuros estudios del mismo tipo.

Referencias

Gutiérrez, A. (2012). *Conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M.* Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1921/

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P., y Rico, L. (En prensa). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación.*

Hill, H., & Ball, D. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330–351.

INEE (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español.* Madrid: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestros en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *BOE, 244*, 33004-33008.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J.,O'Sullivan, C. Y., Arora, A., & Erberber, E. (2007). *TIMSS 2007 assessment frameworks*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión*, 33, 11-27.

Schmidt, W. H., Blömeke, S., & Tatto, M. T. (Eds.). (2011). *Teacher education matters: A study of middle school mathematics teacher preparation in six countries*. New York, NY: Teachers College Press.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk S., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M., & Reckase, M. (2012). *Policy, Practice and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

LA COINCIDENCIA DEL ORDEN DE LAS PALABRAS COMO UN MODELO EXPLICATIVO AL ERROR DE INVERSIÓN [1]

The word order matching as an explanatory model of the reversal error

Belén Laserna-Belenguer[a], David Arnau[a], José Antonio González-Calero[b]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

El error de inversión se produce al traducir comparaciones multiplicativas del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Diversos estudios han mostrado la persistencia del error, que se mantiene incluso en niveles universitarios. Presentamos resultados de un estudio en el que entre otros aspectos se analizó si el orden en que aparecían las cantidades en el enunciado, se reflejaba en el orden en que aparecían las cantidades en la ecuación. Los resultados muestran que la ecuación con error de inversión que más se repite es aquella en la que el orden de las cantidades se corresponde con el que aparecen en el enunciado. Esto refuerza la idea de que el error de inversión aparece ligado más a la parte de lectura y traducción del enunciado que a los efectos de la reelaboración del modelo de problema, lo cual soportaría la explicación conocida como coincidencia del orden de las palabras.

Palabras clave: *resolución de problemas verbales, álgebra, error de inversión, coincidencia del orden de las palabras.*

Abstract

The reversal error occurs when translating multiplicative comparisons from natural language into algebraic language. Several studies have shown the persistence of this error, which appears even in college levels. We present results from a study that analysed, among others factors, if the order in which the quantities appear in the statement, it is reflected in the order in which the quantities are used in the equations. The results show that the most repeated equation with reversal error is the one in which the order of the quantities corresponds to the order shown in the statement. This reinforces the idea that the reversal error is more related to the part of reading and translating the statement than to the part of reprocessing the problem model. This would support the explanation known as word order matching.

Keywords: *word problem solving, algebra, reversal error, word order matching.*

INTRODUCCIÓN

En los trabajos de John Clement y colaboradores (Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981; Clement, Lochhead y Soloway, 1980; y Clement, Narode y Rosnick, 1981) se describe un error recurrente, al que llamaron error de inversión, que se produce al traducirse del lenguaje natural al lenguaje algebraico determinadas comparaciones multiplicativas. De entre los enunciados utilizados, la mayor incidencia de error se produjo en:

> Write an equation using the variables *S* and *P* to represent the following statement: "There are six times as many students as professors at this university." Use *S* for the number of students and *P* for the number of professors. (Clement, 1982, p.17)

Laserna-Belenguer, B., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2014). La coincidencia del orden de las palabras como modelo explicativo al error de inversión. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 101-108). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Sólo un 63% de los estudiantes fueron capaces de resolver correctamente la tarea. Además, se comprobó que un 68% de las respuestas erróneas fueron del tipo $6 \cdot S=P$, mostrando una clara permutación en las letras utilizadas como variables. Clement (1982) hizo hincapié en la dificultad
Sólo un 63% de los estudiantes fueron capaces de resolver correctamente la tarea. Además, se comprobó que un 68% de las respuestas erróneas fueron del tipo $6 \cdot S=P$, mostrando una clara permutación en las letras utilizadas como variables. Clement (1982) hizo hincapié en la dificultad
que supone para los estudiantes construir una ecuación correcta, pues según este autor, implica poner una operación hipotética que no describe al pie de la letra la situación descrita. Esto es así, porque para plantear la ecuación es necesario realizar una operación en la que el grupo de profesores se hace seis veces mayor de lo que realmente es.

En posteriores estudios, se centraron en analizar las respuestas de 25 estudiantes mientras resolvían en voz alta problemas similares al del enunciado de "Estudiantes y Profesores". Estas entrevistas dejaron ver que estos errores no eran debidos a descuidos sino que, más bien, eran consecuencia de problemas conceptuales bastante arraigados (véase, por ejemplo, Clement, 1982). Tras analizar las transcripciones identificaron dos fuentes, no necesariamente excluyentes, para explicar el error de inversión a las que llamaron coincidencia en el orden de las palabras (en inglés, *word order matching*) y comparación estática (en inglés, *static comparison*).

La coincidencia en el orden de las palabras sitúa el origen de este error en una traducción directa de las palabras del enunciado a los símbolos algebraicos, considerando a esta interpretación como una traducción sintáctica errónea. El término "traducción sintáctica" fue tomado de Paige y Simon (1996) y supone una traducción lineal del enunciado de izquierda a derecha, palabra por palabra, del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Esta interpretación proporciona una explicación lógica para la respuesta errónea $6 \cdot S=P$ si se considera que la traducción se realiza de la siguiente manera: (a) "Hay seis veces tantos Estudiantes" como $6 \cdot S$, (b) "como" como el signo igual y, (c) "Profesores" como P.

La otra posible explicación al error de inversión la llamaron comparación estática. Esta interpretación supone que el estudiante transforma la comparación del enunciado en una razón en la que a cada profesor le corresponden seis estudiantes; siendo, en este caso, las letras interpretadas como etiquetas o unidades de referencia al número que acompañan y no variables como debería ser. Y, por tanto, el signo igual no representa equivalencia sino una correspondencia.

OBJETIVOS

Los estudios sobre el error de inversión han sido, principalmente, llevados a cabo con comparaciones escritas en inglés. En nuestro caso, aprovecharemos las posibilidades del español (véase, Castro, 1995; Puig y Cerdán, 1988) para introducir nuevas variables de formato de la tarea. Así, como indica Castro (1995), en español existen tres tipos de términos comparativos en función de que se quiera mostrar superioridad, inferioridad o igualdad. La comparación de superioridad se consigue utilizando en el enunciado el término "más…que"; la comparación de inferioridad se consigue utilizando en el enunciado el término "menos…que"; y, la comparación de igualdad se consigue utilizando los términos "tantos…como" o "tan…como". Si se desea enunciar problemas multiplicativos pero a la vez comparativos, como sería el caso de "Estudiantes y Profesores", se ha de añadir el término "veces". De este modo, la comparación multiplicativa en la que se denota superioridad se expresaría mediante "veces más que"; para denotar inferioridad, "veces menos que"; y para denotar igualdad, "veces tantas como".

En esta comunicación nos marcamos el objetivo de analizar los formatos de respuesta con error de inversión que se producen con mayor frecuencia. Si la coincidencia en el orden de las palabras fuera la principal explicación para la aparición del error de inversión, el formato que más aparecería sería aquel que siguiera el mismo orden de las cantidades que el que se expresa en el enunciado correspondiente.

MATERIAL Y MÉTODOS

Participantes

El estudio se realizó con 172 estudiantes que pertenecían a seis grupos naturales de segundo curso del grado de Maestro de Educación Primaria. El recurso a estudiantes de un grado de ciencias sociales también se ha dado en otros estudios centrados en el error de inversión (por ejemplo, Wollman, 1983). De hecho, partimos de la base de que los participantes tienen unos conocimientos básicos en matemáticas, que son más que suficientes para considerar que los errores que pudieran aparecer no son consecuencia de una falta de conocimiento suficiente en la materia.

El cuestionario

Todos los participantes realizaron el mismo cuestionario que constaba de ocho ítems obtenidos de la combinación de tres variables dicotómicas diferentes: (1) el formato de la comparación multiplicativa "veces más que" y "veces tantos como"; (2) la presencia o no de pistas contextuales que permite identificar qué cantidad es mayor; (3) el uso de cantidades que refieren a magnitudes discretas o continuas.

Ítem 1

Escribe una ecuación usando "ESTUDIANTES", "PROFESORES" y "6" para representar el enunciado siguiente: "Hay seis veces más estudiantes que profesores en esta universidad".

Ítem 2

Escribe una ecuación usando "NIÑOS", "NIÑAS" y "4" para representar el enunciado siguiente: "Hay cuatro veces más niños que niñas en una guardería".

Ítem 3

Escribe una ecuación usando "DEPENDIENTES", "CLIENTES" y "5" para representar el enunciado siguiente: "Hay cinco veces tantos clientes como dependientes en un mercado".

Ítem 4

Escribe una ecuación usando "CERDOS", "OVEJAS" y "3" para representar el enunciado siguiente: "Hay tres veces tantas ovejas como cerdos en una granja".

Ítem 5

Escribe una ecuación usando "BASTÓN", "BOLÍGRAFO" y "7" para representar el enunciado siguiente: "Un bastón es siete veces más largo que un bolígrafo".

Ítem 6

Escribe una ecuación usando "HABITACIÓN A", "HABITACIÓN B" y "4" para representar el enunciado siguiente: "La habitación A es cuatro veces más amplia que la habitación B".

Ítem 7

Escribe una ecuación usando "DESPACHO A", "DESPACHO B" Y "5" para representar el enunciado siguiente: "El despacho A es cinco veces tan amplio como el despacho B".

Ítem 8

Escribe una ecuación usando "SERPIENTE", "GUSANO" y "10" para representar el enunciado siguiente: "Una serpiente es diez veces tan larga como un gusano".

La aplicación para la recogida de datos

Dada la dificultad que entraña realizar un estudio de estas características con lápiz y papel se ha desarrollado una aplicación ad hoc para la recogida de datos (ver Figura 1). La aplicación nos ha permitido: (a) recoger las producciones de los estudiantes y codificar las ecuaciones de una manera rápida; (b) evitar que los participantes dejen ítems sin contestar; (c) reducir el número de ecuaciones que contienen errores distintos al de inversión.

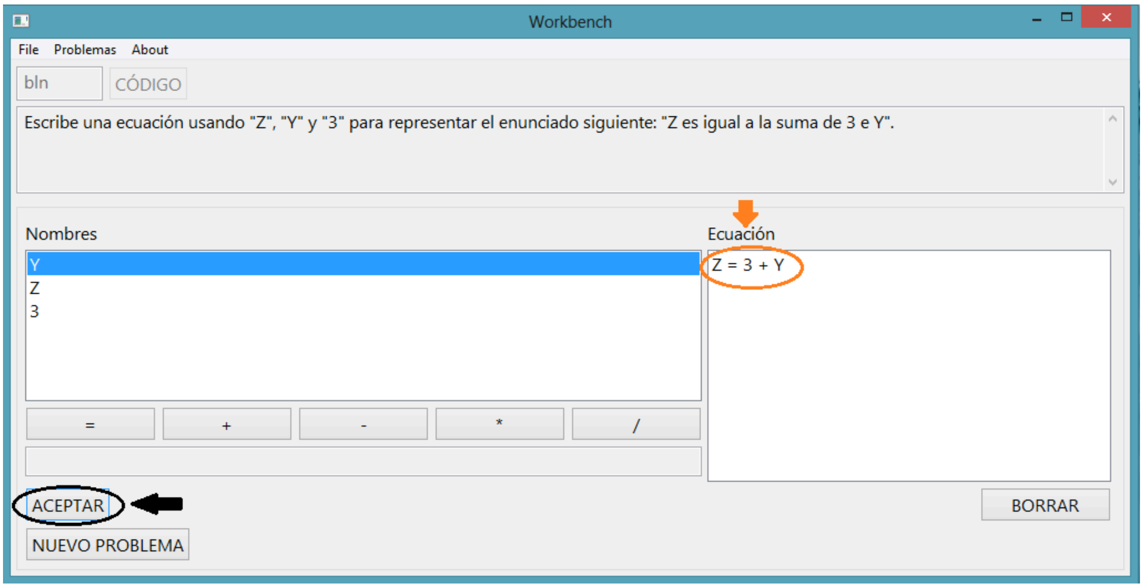


Figura 1. Aplicación para la recogida de las respuestas

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación presentamos una clasificación de las ecuaciones utilizadas por los estudiantes en los ocho ítems del estudio cuando cometían error de inversión. La intención fundamental es determinar si existe una tendencia a expresar ecuaciones que toman las cantidades en el orden en que se ofrecen en el enunciado. El hecho de que las cantidades no se presenten en el mismo orden en los ítems en los que se emplean magnitudes discretas (1-4) que en los que se usan magnitudes continuas (5-8) nos puede permitir comprobar la influencia de este factor en la construcción de las ecuaciones. Así, por ejemplo, en el ítem 1 ("Estudiantes y profesores") si se siguiera el orden ("Hay *seis* veces más *estudiantes* que *profesores* en esta universidad") en el que se presentan las cantidades en el enunciado cuando se comenté error de inversión, se plantearía la ecuación 6 * ESTUDIANTES = PROFESORES. Sin embargo, en el ítem 4 ("Bastones y bolígrafos) si se siguiera el orden del enunciado ("Un *bastón* es *siete* veces más largo que un *bolígrafo*"), la ecuación invertida sería BASTÓN * 7 = BOLÍGRAFO.

En la Tabla 1 se observa que la ecuación construida en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 1 es 6 * ESTUDIANTES = PROFESORES. En esta ecuación las cantidades aparecen en el mismo orden que aparecen reflejadas en el enunciado. Por otro lado, se observa que sólo el 5,17% de los errores de inversión cometidos se emplea la operación división y, además, en sólo una de las cuatro opciones diferentes que existen para expresar dicha operación.

En la Tabla 2 se observa que la ecuación construida en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 2 es 4 * NIÑOS = NIÑAS. En esta ecuación las cantidades aparecen en el mismo orden que aparecen reflejadas en el enunciado. Por otro lado, se observa que sólo el 2,04% de los errores de inversión cometidos se emplea la operación división y, además, en sólo una de las cuatro opciones diferentes que existen para expresar dicha operación.

Tabla 1. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 1

	Frecuencias	Porcentajes
6 * ESTUDIANTES = PROFESORES	24	41,38%
PROFESORES = 6 * ESTUDIANTES	12	20,69%
ESTUDIANTES * 6 = PROFESORES	10	17,24%
PROFESORES = ESTUDIANTES * 6	9	15,52%
ESTUDIANTES = PROFESORES / 6	3	5,17%
PROFESORES / 6 = ESTUDIANTES	0	0,00%
PROFESORES / ESTUDIANTES = 6	0	0,00%
6 = PROFESORES / ESTUDIANTES	0	0,00%
Total	58	

Tabla 2. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 2

	Frecuencias	Porcentajes
4 * NIÑOS = NIÑAS	25	51,02%
NIÑAS = 4 * NIÑOS	11	22,45%
NIÑOS * 4 = NIÑAS	6	12,24%
NIÑAS = NIÑOS * 4	6	12,24%
NIÑOS = NIÑAS / 4	1	2,04%
NIÑAS / 4 = NIÑOS	0	0,00%
NIÑAS / NIÑOS = 4	0	0,00%
4 = NIÑAS / NIÑOS	0	0,00%
Total	49	

En la Tabla 3 se observa que la ecuación construida en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 3 es 5 * CLIENTES = DEPENDIENTES. En esta ecuación las cantidades aparecen en el mismo orden que aparecen reflejadas en el enunciado. Por otro lado, se observa que no se han realizado construcciones en las que se cometa error de inversión utilizando la operación división.

Tabla 3. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 3

	Frecuencias	Porcentajes
5 * CLIENTES = DEPENDIENTES	48	50,00%
DEPENDIENTES = 5 * CLIENTES	20	20,83%
CLIENTES * 5 = DEPENDIENTES	15	15,63%
DEPENDIENTES = CLIENTES * 5	13	13,54%
CLIENTES = DEPENDIENTES / 5	0	0,00%
DEPENDIENTES / 5 = CLIENTES	0	0,00%
DEPENDIENTES / CLIENTES = 5	0	0,00%
5 = DEPENDIENTES / CLIENTES	0	0,00%
Total	96	

En la Tabla 4 se observa que la ecuación construida que más repite cuando se produce error de inversión en el ítem 4 es 3 * OVEJAS = CERDOS. Vemos que esta construcción se produce un 53,21% de las veces que se comete error de inversión en este ítem, lo que supone más de la mitad de los errores cometidos. Además en este caso las cantidades aparecen en el mismo orden que aparecen reflejadas en el enunciado. Por otro lado, ninguna ecuación con error de inversión ha sido construida utilizando la operación división.

Tabla 4. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 4

	Frecuencias	Porcentajes
3 * OVEJAS = CERDOS	58	53,21%
CERDOS = 3 * OVEJAS	19	17,43%
CERDOS = OVEJAS * 3	18	16,51%
OVEJAS * 3 = CERDOS	14	12,84%
OVEJAS = CERDOS / 3	0	0,00%
CERDOS / 3 = OVEJAS	0	0,00%
CERDOS / OVEJAS = 3	0	0,00%
3 = CERDOS / OVEJAS	0	0,00%
Total	109	

En la Tabla 5 se observa que la ecuación construida en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 5 es 7 * BASTÓN = BOLÍGRAFO con un porcentaje del 33,33%. En esta ocasión la ecuación más utilizada no es la que presenta las cantidades en el orden en que se ofrece en el enunciado. La construcción BASTÓN * 7 = BOLÍGRAFO, la que seguirían el orden reflejado en el enunciado dado que el término "BASTÓN" aparece antes que el término "7", se construyó en 27,27% de los casos en los que hubo error de inversión. Por otro lado, se observa que sólo el 3,03% de los errores de inversión cometidos se emplea la operación división y, además, en sólo una de las cuatro opciones diferentes que existen para expresar dicha operación.

Tabla 5. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 5

	Frecuencias	Porcentajes
7 * BASTÓN = BOLÍGRAFO	11	33,33%
BASTÓN * 7 = BOLÍGRAFO	9	27,27%
BOLÍGRAFO = 7 * BASTÓN	9	27,27%
BOLÍGRAFO = BASTÓN * 7	3	9,09%
BASTÓN = BOLÍGRAFO / 7	1	3,03%
BOLÍGRAFO / 7 = BASTÓN	0	0,00%
BOLÍGRAFO / BASTÓN = 7	0	0,00%
7 = BOLÍGRAFO / BASTÓN	0	0,00%
Total	33	

En la Tabla 6 se observa que la ecuación construida en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 6 es HABITACIÓN A * 4 = HABITACIÓN B. Como ya se ha comentado previamente, la estructura del enunciado cambia al expresar comparaciones de magnitudes continuas y, la ecuación HABITACIÓN A * 4 = HABITACIÓN B se corresponde con la traducción lineal de esta estructura. Por otro lado, se observa que sólo se han construido un 4,65% de ecuaciones con error de inversión utilizando la operación división aunque existían cuatro construcciones distintas posibles.

En la Tabla 7 se observa que la construcción realizada en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 7 es DESPACHO A * 5 = DESPACHO B. Dicha ecuación se corresponde con la lectura de izquierda a derecha del enunciado. Por otro lado, se observa que no se ha construido ninguna ecuación con error de inversión en la que se realice la operación de división.

Tabla 6. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 6

	Frecuencias	Porcentajes
HABITACIÓN A * 4 = HABITACIÓN B	15	34,88%
4 * HABITACIÓN A = HABITACIÓN B	12	27,91%
HABITACIÓN B = HABITACIÓN A * 4	8	18,60%
HABITACIÓN B = 4 * HABITACIÓN A	6	13,95%
HABITACIÓN A = HABITACIÓN B / 4	2	4,65%
HABITACIÓN B / 4 = HABITACIÓN A	0	0,00%
HABITACIÓN B / HABITACIÓN A = 4	0	0,00%
4 = HABITACIÓN B / HABITACIÓN A	0	0,00%
Total	43	

Tabla 7. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 7

	Frecuencias	Porcentajes
DESPACHO A * 5 = DESPACHO B	32	44,44%
5 * DESPACHO A = DESPACHO B	18	25,00%
DESPACHO B = 5 * DESPACHO A	13	18,06%
DESPACHO B = DESPACHO A * 5	9	12,50%
DESPACHO A = DESPACHO B / 5	0	0,00%
DESPACHO B / 5 = DESPACHO A	0	0,00%
DESPACHO B / DESPACHO A = 5	0	0,00%
5 = DESPACHO B / DESPACHO A	0	0,00%
Total	72	

En la Tabla 8 se observa que la construcción realizada en más ocasiones cuando se comete error de inversión en el ítem 8 es SERPIENTE * 10 = GUSANO. Dicha ecuación se corresponde con el orden de las cantidades reflejado en el enunciado. Por otro lado, se observa que no se ha construido ninguna ecuación con error de inversión en la que se realice la operación de división.

Tabla 8. Frecuencias absolutas y porcentajes de error de inversión en el ítem 8

	Frecuencias	Porcentajes
SERPIENTE * 10 = GUSANO	15	42,86%
10 * SERPIENTE = GUSANO	13	37,14%
GUSANO = 10 * SERPIENTE	4	11,43%
GUSANO = SERPIENTE * 10	3	8,57%
SERPIENTE = GUSANO / 10	0	0,00%
GUSANO / 10 = SERPIENTE	0	0,00%
GUSANO / SERPIENTE = 10	0	0,00%
10 = GUSANO / SERPIENTE	0	0,00%
Total	35	

CONCLUSIONES

Se observa que en todos los ítems menos en el ítem 5 (“Bastones y bolígrafos”) la estructura de la ecuación con error de inversión que más se repite es aquella cuyo orden de las cantidades se corresponde con el mismo orden en que aparecen las cantidades en el enunciado correspondiente, lo que apoyaría el modelo explicativo de la coincidencia en el orden de las palabras. Esta tendencia se mantiene tanto en los ítems en los que se comparan tanto magnitudes discretas como continuas.

Referencias

Castro, E. (1995). Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation Difficulties in Learning Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286-290.

Clement, J., Lochhead, J., & Soloway, E. (1980). Positive effects of computer programming on students understanding of variables and equations. En *Proceedings of the American Society for Computing Machinery 1980 Annual Conference* (pp. 467-474). Nashville, TN: ACM.

Clement, J., Narode, R., & Rosnick, P. (1981). Intuitive misconceptions in algebra as a source of math anxiety. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *3*(4), 36-45.

Paige, J. M., & Simon, H. A. (1966). Cognitive processes in solving algebra word problems. En B. Kleinmuntz (Ed.), *Problem solving: Research, method and theory*. New York: John Wiley & Sons.

Puig, L., y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Ed. Síntesis.

---

[1] Esta investigación se ha sido realizada gracias en parte a la financiación del proyecto EDU2012-35638 del Ministerio de Economía y Competitividad

USO DE MATERIALES DIDÁCTICOS Y DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN PRIMARIA

Use of teaching resources and development of number sense in Primary Education

Alexander Maz-Machado, Cristina Adrián Jiménez

Universidad de Córdoba

Resumen

Este trabajo analiza si la utilización de materiales manipulativos favorece el desarrollo del sentido numérico en el alumnado de 1º de Educación Primaria en un centro público de Educación Infantil y Primaria en la provincia de Córdoba. Para detectar las posibles diferencias que manifiesta el alumnado que los utiliza respecto a otro que no lo hace, se tomaron datos cuantitativos mediante un test al finalizar el curso académico. El test aplicado se denomina TEMA-3 (Test de Competencia Matemática Básica). La prueba valora dos aspectos, uno basado en la matemática formal y otro en la informal. No se hallaron diferencias estadísticamente significativas debidas a la utilización de los materiales manipulativos.

Palabras clave: *Sentido númerico; Materiales manipulativos; educación primaria; competencia matemática.*

Abstract

The present study examine whether the use of manipulative materials fosters the development of number sense from the students in 1st year in Primary Education form a public Kindergarten and Primary school located in the province of Córdoba. In order to detect the posible differences between students who employ this materials and those who do not, some quantitative data were collected by means of a test at the end of the academic year. The test is called TEMA-3 (Basic Mathematics Competence test). It focuses on two aspects, the first one based on the formal mathematics and the other one on the informal mathematics. No statistically significant difference was noted due to the employment of the manipulative materials.

Keywords: *Number sense; manipulative materials; Primary Education; Mathematical competence.*

INTRODUCCIÓN

Desde sus primeros años de aprendizaje, los niños y niñas tienden a utilizar de manera natural sus habilidades de pensamiento para ordenar sus mundos, usando para ello las matemáticas y la lógica; por ello, el uso de una metodología adecuada resulta fundamental en los inicios del complejo y largo proceso de la construcción del pensamiento matemático.

El sentido numérico no es conocimiento que se enseñe, por ello no es fácil definir de manera precisa la expresión relativa al "sentido numérico". En términos generales hace referencia a varias capacidades importantes de la persona, "incluyendo cálculo mental flexible, estimación numérica y razonamiento cuantitativo" (Greeno, 1991, p. 170).

Por tanto, se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y operaciones, junto con la capacidad para usar esta comprensión de manera flexible para emitir juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para resolver problemas complejos.

Maz-Machado, A., y Adrián, C. (2014). Uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 109-114). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

El National Council of Teachers of Mathematics identificó cinco componentes que caracterizan el sentido numérico: significado del número, relaciones numéricas, tamaño de los números, operaciones con los números y referentes para los números y cantidades. Para adquirir un buen sentido numérico es necesario alcanzar destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los mismos, reconocimiento de las relaciones parte-todo, conceptos de valor posicional y resolución de problemas. Expresiones como "sentido numérico", "conciencia numérica" o "pensamiento numérico" se están imponiendo con fuerza en los estudios actuales sobre el conocimiento matemático.

> El sentido numérico se desarrolla cuando los estudiantes comprenden el tamaño de los números; piensan sobre ellos y los representan de diferentes maneras; utilizan los números como referentes y desarrollan percepciones acertadas sobre los efectos de las operaciones con números. (Sowder,1992, p.36)

Por otra parte, desde sus primeros años de aprendizaje, los niños y niñas tienden a utilizar de manera natural sus habilidades de pensamiento para ordenar sus mundos, usando para ello las matemáticas y la lógica; por ello, el uso de una metodología adecuada resulta fundamental en los inicios del complejo y largo proceso de la construcción del pensamiento matemático.

Los estándares del NCTM (2000) señalan que los estudiantes aprenden Matemáticas a través de las experiencias que les proporcionan sus profesores y profesoras. En consecuencia, su comprensión de los conocimientos, su habilidad para aplicarlos a la resolución de problemas y su confianza para hacerlos está determinada por la enseñanza que reciben en la escuela.

Estas experiencias relacionadas con los objetos concretos se desarrollan mediante el uso de materiales didácticos manipulativos. Éstos son objetos físicos usados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los materiales didácticos suelen usarse como organizadores curriculares de dos formas (Coriat, 2002):

- Partiendo del material, el maestro o la maestra se pregunta qué actividades son más idóneas para que sus alumnos y alumnas aprendan matemáticas al emplearlos.
- Partiendo de unas actividades ya elaboradas, el o la docente se pregunta qué materiales son más adecuados para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes.

Por lo anterior nos interesa conocer en que medida el uso delos materiales didácticos favorecen el desarrollo del sentido numérico en primaria.

MATERIAL Y MÉTODO

Esta investigación se enmarca dentro de un proyecto más amplio y ambicioso financiado parcialmente por la Consejería de Educación y el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Córdoba (UCO), titulado "Impacto escolar de nuevos materiales didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas del primer ciclo de la Educación Primaria", Convocado en virtud de la Orden de 14 de enero de 2009 (BOJA núm. 21 de 2 de febrero de 2009). Aprobado con la referencia PIV-042/10, y publicado en el BOJA 150 de 2 de agosto de 2010, según la Resolución de 14 de julio de 2010.

La investigación se realizó mediante una experimentación sobre grupo de alumnos de primero primaria y se tomó otro grupo de 1º del mismo centro como grupo control. Como la elección tanto del grupo experimental como del grupo control no fue aleatoria, sino se hizo de forma intencional y por conveniencia, podemos afirmar que esta investigación es cuasiexperimental.

Objetivo: Identificar posibles diferencias en la competencia matemática relacionadas con el sentido numérico entre el alumnado que utilizó los materiales didácticos y aquellos que no los usaron.

La población de este estudio, está formada por todo el alumnado de 1º de Educación Primaria de la provincia de Córdoba en el curso 2011 –2012.

La muestra de los casos a investigar está formada por el alumnado de dos grupos de 1º de Educación Primaria de un centro público en el curso 2011-2012. Uno considerado como grupo control (1ºA) con 27 sujetos, el cual no ha utilizado el manejo de materiales manipulativos en sus explicaciones de clase y el grupo 1ºB, con 25 sujetos, tomado como grupo experimental que sí que ha empleado este tipo de recursos.

El profesorado que participó asistió a una serie de seminarios y talleres periódicos donde se les orientó y asesoró sobre el conocimiento y utilización de los materiales en el aula.

Los materiales didácticos utilizados en las clases fueron: la cinta numérica, el panel numérico, la caja de numeración, ruedas de sumas, caja de puntos para la suma y la multiplicación. Las características de estos materiales ya han sido descritas en otros trabajos (Bracho, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul y García, 2011).

Para obtener los datos del estudio se utilizó un test estandarizado denominado TEMA-3 (Test de Competencias Matemáticas Básica) de Ginsburg y Baroody (2003), que ha sido adaptado al contexto español por Nuñez del Río y Lozan Guerra. Este test se aplica de manera individual a niños de 3 a 8 años. Tiene una duración entre 30 y 45 minutos aproximadamente.

Para determinar el Índice de Competencia Matemática (ICM), éste se elabora a partir de las puntuaciones directas obtenidas por cada sujeto y se relaciona con su edad, distinguiendo años y meses (para una explicación más amplia y detallada ver Ginssburg y Baroody, 2003).

Finalmente se analizará si hay diferencias significativas entre el ICM de los dos grupos, como la muestra no es aleatoria y son grupos de diferente tamaño el análisis se realiza mediante la prueba U de Mann-Witney para muestras independientes. Para ello establecemos dos hipótesis.

H0: Ambos grupos no tienen diferente índice de competencia matemática (ICM) debido al uso de los materiales manipulativos: $\mu A = \mu B$.

H1: Ambos grupos tienen diferente índice de competencia matemática (ICM) debido al uso de los materiales manipulativos: $\mu A \neq \mu B$.

RESULTADOS

Si segregamos los grupos por edades (Figura 1), observamos que a diferencia que en la competencia matemática informal, en la formal si se aprecia diferencia entre el grupo control y el grupo experimental, debido a que este último, tiene mayor desarrollo en todas las competencias, independientemente de la edad; encontrándose las diferencias más destacadas en hechos numéricos y conceptos formales.

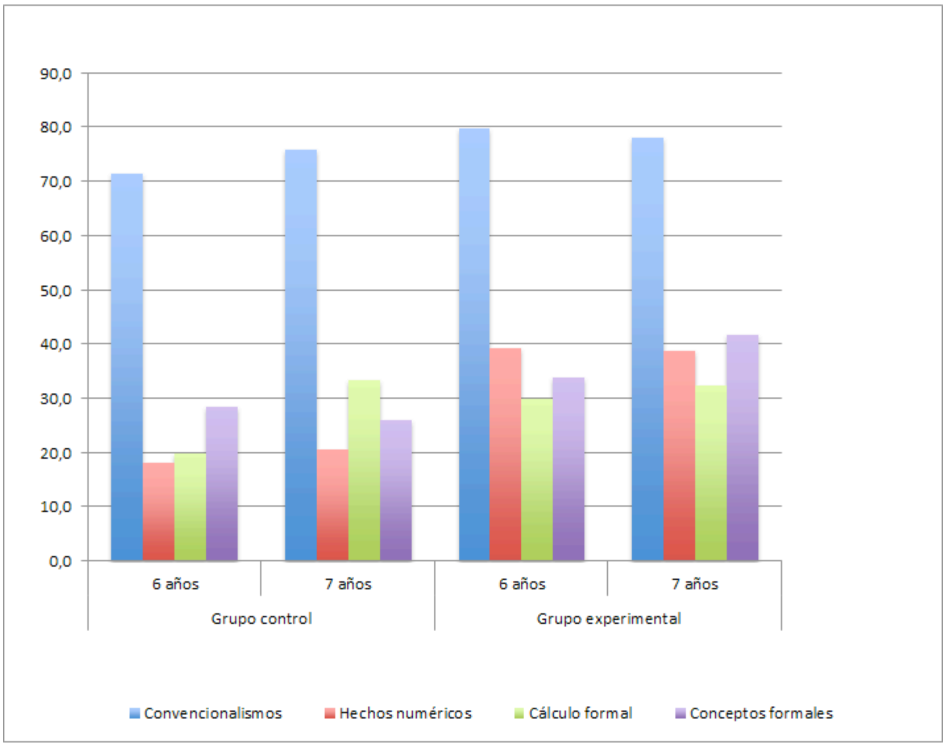


Figura 1. Comparación de competencia en Matemática formal por edades en Grupo control vs Grupo experimental

En cuanto al género, observamos que en el grupo control, los porcentajes de las medias son superiores en los niños respecto a las niñas en todos los aspectos de la matemática informal (figura 2). Esta diferencia se encuentra aún más acentuada si observamos las medias en la competencia en matemática formal.

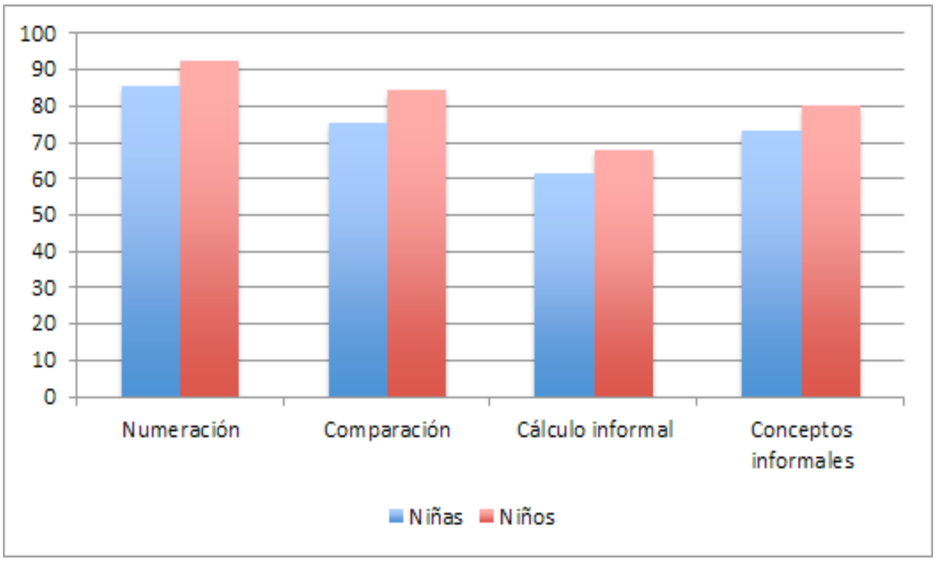


Figura 2. Comparación del rendimiento en matemática informal por género en el grupo control

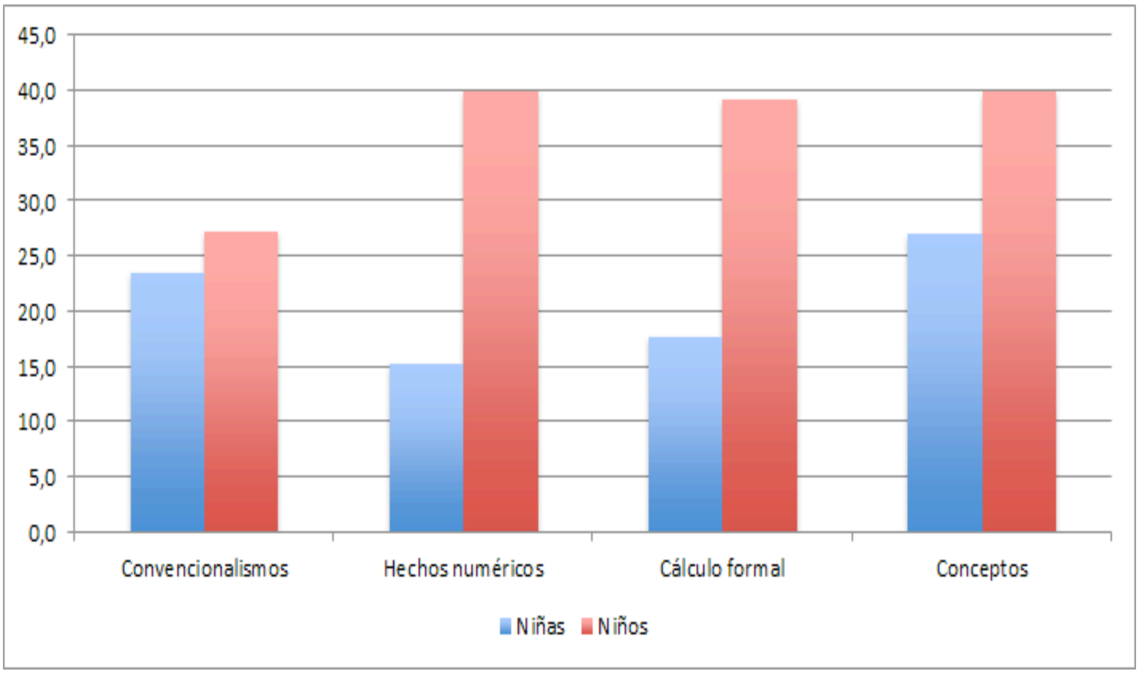


Figura 3. Comparación del rendimiento en matemática formal por género en el grupo control

Ahora aplicamos la prueba U de Mann-Whitney para muestras independientes, con un nivel de confianza (α)=0,05. Comparamos el valor ICM con los dos grupos para aceptar o rechazar la hipótesis nula que hemos definido.

Prueba de Mann-Whitney

Rangos

	Grupo	N	Rango promedio	Suma de rangos
ICM	Grupo experimental	25	29,16	729,00
	Grupo control	27	24,04	649,00
	Total	52		

Estadísticos de contraste[a]

	ICM
U de Mann-Whitney	271,000
W de Wilcoxon	649,000
Z	-1,219
Sig. asintót. (bilateral)	,223

a. Variable de agrupación: Grupo

Como se observa, el valor de la significancia asintótica bilateral (p-valor) es mayor que 0,05, por lo tanto se acepta la hipótesis nula. Al ser los datos no significativos no nos permite afirmar que hay diferencia del ICM debido al uso de los materiales manipulativos entre los dos grupos.

Referencias

Bracho, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., y García, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico*. UNIÓN. Revista Iberomaericana de Educación Matemática,* 28, 41-60.

Coriat, M. (2002). *Jornadas sobre tutoría y orientación.* Granada. Universidad de Granada.

Ginsburg, H. P., & Baroody, A. J. (2003). Test of early mathematics ability, Third edition Austin, TX: Pro-ed.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for research in mathematics education*, 170-218.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Autor.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y R. A. Hattrup (Eds.): *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

LA INFLUENCIA DE PROPORCIONAR LOS NOMBRES DE LAS CANTIDADES EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS VERBALES

The influence of providing the names of the quantities in arithmetic word problem solving

Borja Navas[a], David Arnau[a], José Antonio González-Calero[b]

[a]Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

[b]Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

Cuando un profesor supervisa la resolución de un problema que lleva a cabo un estudiante, debe valorar el potencial de las ayudas que proporciona. Presentamos parte de una investigación que tenía como objetivo estudiar el papel de las ayudas expresadas en lenguaje natural en la resolución aritmética de problemas. En el experimento participaron 32 estudiantes de quinto curso de primaria (10-11 años). En concreto, hemos analizado cómo influye, en el proceso de resolución de un problema, el hecho de proporcionar un conjunto de nombres (o etiquetas) que hacen referencia a un número suficiente de cantidades para resolverlo. Los nombres usados eran del tipo "kilos de naranjas", "precio de las naranjas que se han comprado", etc. El análisis de los resultados nos ha permitido elaborar un catálogo de actuaciones en el que se reflejan los procesos de gestión y las dificultades de los estudiantes para integrar estas etiquetas en el proceso de resolución.

Palabras clave: *enseñanza y aprendizaje, resolución de problemas verbales, aritmética, nombres de las cantidades.*

Abstract

When a teacher supervises the resolution of a problem that a student is carrying out, he/she must assess the potential of aid that he/she provides. We present part of a research aimed to study the role of the aids expressed in natural language in arithmetic problem solving. The experiment involved 32 students in the fifth grade of primary school (10-11 years). Specifically, we analyzed how the fact of providing a set of names (or labels), which refer to a number of quantities sufficient to solve a problem influences in the solving process. The used names were of the type: "kilograms of oranges", "price of oranges that have been bought," etc. The analysis of the results has allowed us to develop a catalog of actions into which management processes and difficulties of students to integrate these labels in the resolution process are reflected.

Keywords: *teaching and learning, word problem solving, arithmetic, names of the quantities.*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En Cerdán (2007) se define la idea de diccionario de cantidades de un problema como un conjunto de triadas (x, u, n), donde x puede ser un número, una letra, una expresión aritmética o una expresión algebraica; u es una unidad de una magnitud; y n "es la manera en la cual en el lenguaje vernáculo proporcionamos un sentido, que tiene por referente la cantidad (x, u), en el mundo de los sentidos que para ella sería posible imaginar en el contexto del problema" (p, 33). A este componente n es al que llamamos nombre o etiqueta de la cantidad.

Navas, B., Arnau, D., González-Calero, J.A.. (2014). La influencia de proporcionar los nombres de las cantidades en la resolución aritmética de problemas verbales. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 115-123). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Cuando se resuelve un problema, los sujetos construyen nombres con una mayor o menor precisión.

Neuman y Schwarz (2000), pusieron de manifiesto que la ambigüedad a la hora de construir etiquetas (o nombres para las cantidades) puede impedir al resolutor identificar de forma unívoca la cantidad a la cual se hace referencia. Durante la resolución del problema "En la fábrica de mermelada de la abuela de Raquel, se mezclan 300 kilos de mermelada que contiene un 30% de azúcar con otra que contiene un 20%. ¿Qué porcentaje de azúcar contiene la nueva mezcla?", una alumna asignó la etiqueta "peso", cosa que impedía identificar si hacía referencia al peso del azúcar o al de la mermelada. Los autores concluyeron que "este etiquetaje impreciso podría considerarse insignificante […] pero, consideramos que esta vaguedad lingüística refleja las dificultades de organizar los elementos matemáticos en las categorías semánticas adecuadas" (p. 212).

Por otro lado, Küchemann (1978) observó que la respuesta errónea más común a la tarea "Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compro algunos lápices azules y algunos rojos y juntos me cuestan 90 peniques. Si b es el número de lápices azules comprados, y r el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedes escribir sobre b y r?" (p. 26) era $b + r = 90$. El autor interpretó esto indicando que parecía que los estudiantes utilizaban las letras como etiquetas para referirse a los dos tipos de lápices, r para los rojos y b para los azules.

En el trabajo de Sánchez (2010) se pretendía analizar la habilidad que tienen los estudiantes para asignar una expresión verbal o etiqueta a expresiones aritméticas y algebraicas que aparecían en la resolución de un problema. Para este fin, se elaboró un cuestionario que constaba de nueve ítems. En cada uno de ellos, se planteaba un problema en el que se preguntaba por la etiqueta que debía asignarse a una determinada expresión aritmética o algebraica. En las Figuras 1 y 2 se muestran dos ítems de este cuestionario.

2. PERÍMETRO

El perímetro de un rectángulo es 2400 m y el ancho es el triple que el largo. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
Si representamos mediante la letra *x* al largo del rectángulo, ¿cómo llamarías a la cantidad que resulta de hacer la operación *x* más 3 por *x*? ¿x+3x?

Figura 1. Problema "Perímetro", ítem 2 del cuestionario (Sánchez, 2010, p. 18)

9. BOLÍGRAFOS Y LÁPICES

Se disponen de bolígrafos y lápices para guardar en bolsas de tal forma que todas las bolsas tengan el mismo número de artículos y del mismo tipo. Si hay un total de 200 bolígrafos y 260 lápices y hay 12 bolsas más de lápices que de bolígrafos, ¿cuántos artículos incluye cada bolsa?

A) ¿Cómo llamarías a la cantidad que se obtiene de hacer la operación 260 menos 200? ¿260-200?

B) ¿Cómo llamarías a la cantidad que se obtiene de dividir entre 12 el resultado de hacer la operación 260 menos 200? ¿(260-200)/12?

Figura 2. Problema "Bolígrafos y lápices", ítem 9 del cuestionario (Sánchez, 2010, p. 18)

En las conclusiones, la autora recomienda incidir en la enseñanza de estructuras conceptuales, con la consecuente reflexión verbal alrededor de estas, además de que se realicen tareas específicas en las que los alumnos hayan de proponer nombres (etiquetas) para expresiones aritméticas o algebraicas, que pueden surgir durante la resolución de un problema.

Cuando se resuelven problemas con lápiz y papel, los estudiantes no suelen asignar nombres a las cantidades desconocidas que usan. Sin embargo, cuando se resuelven problemas en el entorno de la hoja de cálculo, el resolutor se ve obligado a asignar un nombre-etiqueta junto a las celdas en las que representa una cantidad ya que los cálculos quedan ocultos.

En Arnau y Puig (2006), se describen casos en los que las dificultades para construir nombres para las cantidades desconocidas lleva a los estudiantes a evitar asignar nombres a las cantidades no presentes en el enunciado. Además cuando lo hacen "construyen nombres que las sitúan fuera de contexto. Así se distinguen comportamientos como: hacer la operación de cabeza, utilizar más de una operación aritmética en una fórmula o asignar la etiqueta "extra" a la cantidad creada" (p. 152).

En González-Calero, Arnau y Puig (2013), se puede observar las dificultades que presentan los estudiantes de primaria en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales en la hoja de cálculo. La investigación pone de manifiesto la incapacidad, por parte de algunos estudiantes que participaron en el estudio, para construir nombres apropiados para las cantidades que intervienen en el problema y como este hecho se traduce en dificultades durante el proceso de resolución. Las dificultades mostradas por los participantes se reflejan en una tendencia a escribir nombres ambiguos a determinadas cantidades, cosa que da origen a errores a la hora de establecer las relaciones entre las cantidades.

La investigación de la que presentamos parte de los resultados nace de una pregunta que se planteó en la XV SEIEM durante la presentación de una comunicación en el que se describía el funcionamiento de un sistema tutorial inteligente (Arnau, Arevalillo-Herráez, Puig y González-Calero, 2013). Se cuestionó si el hecho de ofrecer los nombres de las cantidades que se usaban para resolver el problema, ofrecía al alumno una gran ayuda en la resolución. Así nos planteamos dos preguntas de investigación: 1) ¿Ayuda ofrecer el nombre-etiqueta de las cantidades que intervienen en un problema a resolver problemas en los que se había tenido dificultades anteriormente? 2) ¿De qué manera integran los alumnos estas etiquetas en el proceso de resolución de un problema?

POBLACIÓN, DISEÑO Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El experimento se realizó en un centro de la Comunidad Valenciana. Se dispuso de un grupo natural de 32 alumnos de quinto de primaria (10-11 años), a los que se les administró un pre-test. El desarrollo de esta primera fase del experimento se llevó a cabo en el aula de los alumnos y dispusieron de un tiempo máximo de 55 minutos para realizarla. La prueba inicial constaba de una colección de nueve problemas que podían resolverse de forma aritmética. Con la finalidad de evitar que la dificultad a la hora de realizar las operaciones aritméticas pudiera influir en la resolución del problema, además de agilizar el proceso, se les permitió el uso de calculadora.

Cada resolución correcta se puntuó con un 1 y cada resolución incorrecta con un 0. Se consideró como resolución correcta aquella que tuviera un planteamiento correcto, aunque contuviera algún error de cálculo. Después de codificar las resoluciones de los alumnos, se clasificó a la población por parejas. Para ello, se buscaron alumnos que tuvieran bien y mal los mismos problemas, a la vez que sus resoluciones tuvieran las mismas características. Una vez formadas las parejas, se seleccionaron tres de ellas para participar en la siguiente fase del experimento.

La segunda etapa del experimento constaba de dos partes. En primer lugar, las parejas seleccionadas debían resolver con lápiz y papel los problemas que habían realizado de forma incorrecta en el pre-test, pero dándoles, en este caso, un número suficiente de nombres-etiquetas de cantidades, tanto conocidas como desconocidas. En concreto, bajo el enunciado se ofrecía una tabla con tantas casillas como cantidades eran necesarias para resolver el problema. Cada una de las celdas estaba encabezada por una etiqueta que hacía referencia a la cantidad que debía expresarse en el recuadro (ver Figura 3). Los estudiantes usaron un bolígrafo digital Livescribe© que nos permitió obtener una película del trazo durante la resolución y un registro del sonido ambiente.

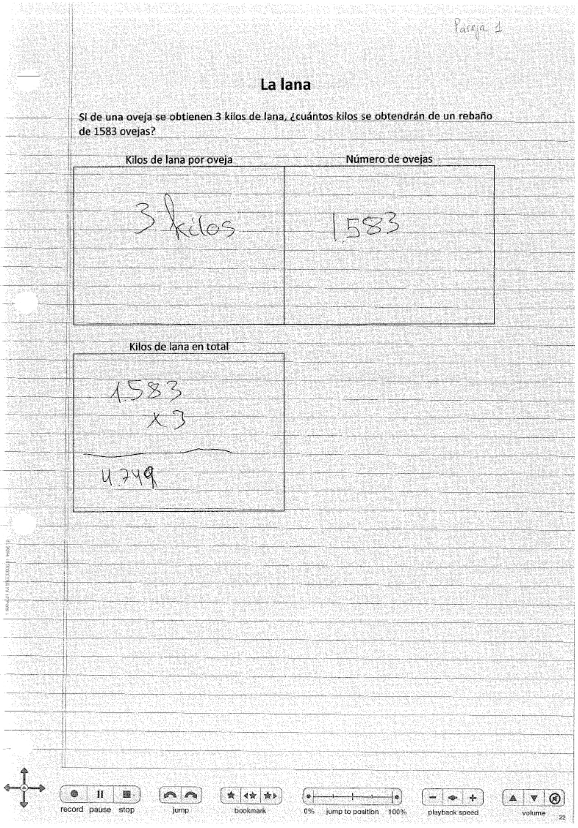


Figura 3. Resolución del problema "La lana" de la pareja Carlos-Juan

Como era la primera vez que se enfrentaban a problemas en este formato, se les resolvió un problema (de los que habían resuelto de manera correcta en el pre-test) a modo de ejemplo. Esta segunda fase se realizó en un aula en la que sólo estaban la pareja de estudiantes y los investigadores. Los alumnos disponían de un tiempo máximo de diez minutos por problema. Pasado este tiempo, y si la resolución se encontraba en un punto muerto, se les facilitaba otro problema para continuar. De nuevo, por las mismas razones que en el pre-test, se les proporcionó una calculadora y se les animó a utilizarla.

Una vez acabada la resolución con lápiz y papel en el formato tabular, debían resolver los problemas que no habían conseguido resolver de forma correcta usando un sistema tutorial inteligente (Arnau, Arevalillo-Herráez, Puig y González-Calero, 2013). El programa, al igual que en el caso anterior, facilitaba también las etiquetas de las cantidades que intervenían durante la resolución. Ahora bien, el programa avisaba si un paso realizado era incorrecto, sin dar ninguna orientación sobre dónde residía el error. Las actuaciones de los estudiantes se grabaron en vídeo.

De estos dos procesos, se obtuvieron unos protocolos audiovisuales que se utilizaron para la obtención de los protocolos escritos, que permitieron el posterior análisis de los casos.

ANALISIS DE LAS RESOLUCIONES EN FORMATO TABULAR

El análisis de los datos cuando resolvían los problemas en formato tabular nos permitió elaborar un catálogo de actuaciones de las que presentamos aquellas más relevantes. Es evidente que las actuaciones están condicionadas por el formato en el que se ofrecen los problemas. Junto a cada categoría, se acompaña un ejemplo extraído del análisis realizado. Para más comodidad, agruparemos las actuaciones por problemas. Los enunciados de los problemas se pueden encontrar en la sección Anexos.

Actuaciones de los alumnos en el problema “Las cortinas”

Una vez iniciado el problema, después de leer la primera etiqueta “precio de las cortinas”, la pareja Dani-Héctor vuelven a leer el enunciado, en lo que parece un intento de integrar las etiquetas en la historia que se está contando en el enunciado del problema.

4. Dani: Precio de una cortina, pues…
5. Héctor y Dani Vuelven a leer el problema en voz baja.
6. Dani: Un precio de una cortina pues…
7. Héctor: Espérate. 528 euros (lo indica con el bolígrafo), tan tan (señala otra parte del enunciado). Yo lo que hice fue…

Uno de los errores más comunes fue asignar el valor de una cantidad conocida a varias etiquetas. Después de llenar la primera casilla, “precio de las cortinas”, la pareja Dani-Héctor pasa a la segunda, “precio de las cortinas en la situación imaginaria”, identificando que el valor que se debe escribir es 564 (ver Figura 4).

32. Héctor: […] precio de las cortinas si sólo se hubieran comprado seis metros que hay, además… que hay de más en la situación imaginaria.
33. Dani: 528, ¿no?
34. Héctor: ¿Cómo qué 528? ¡Precio de las cortinas si se hubieran comprado los metros que hay de más en la situación imaginaria!
35. Dani: 528, ¿no?
36. Héctor: 564 (lo escribe).

A continuación, abordan la tercera casilla, “precio de las cortinas si sólo se hubieran comprado los metros que hay de más en la situación imaginaria”, asignándole el valor. Es decir, asignan un mismo valor a dos etiquetas diferentes, por lo que se podría decir que los estudiantes asignan al valor 564 dos significados diferentes en la resolución del problema.

Precio de las cortinas	Precio de las cortinas en la situación imaginaria
6 metros 564€	564
Precio de las cortinas si sólo se hubieran comprado los metros que hay de más en la situación imaginaria	**Metros de más que hay en la situación imaginaria**
564	
Precio de un metro de tela	**Metros de tela que se compraron realmente**

Figura 4. Contenido de la resolución antes del ítem 36

Una pauta observada durante la actuación de la pareja Arantxa-Ainhoa (ver Figura 5) en este mismo problema ha sido considerar como condición para darlo por resuelto haber completado todas las casillas, sin tener en cuenta si la última calculada era aquella por la que se preguntaba en el enunciado (“metros de tela que se compraron realmente”).

48. Arantxa: La situación imaginaria son... (mira la hoja) 564... dividido entre...
49. Ainhoa: 36.
50. Arantxa: (Realiza los cálculos) 15,6.
51. Ainhoa: (Escribe el resultado de la operación).

52. Arantxa: Ya lo tenemos.

Así, como se observa en el diálogo anterior, las estudiantes calculan en última instancia el valor de la cantidad "precio de las cortinas si sólo se hubieran comprado los metros que hay de más en la situación imaginaria" sin que se observe ninguna reflexión sobre si esta cantidad era aquella por la que se estaba preguntando.

En definitiva, parece que en algunas ocasiones tratan las cantidades desconocidas como si fueran independientes las unas de las otras, sin integrarlas en el proceso de resolución.

Precio de las cortinas	Precio de las cortinas en la situación imaginaria
528	564
Precio de las cortinas si sólo se hubieran comprado los metros que hay de más en la situación imaginaria	**Metros de más que hay en la situación imaginaria**
564:36=15,6	6
Precio de un metro de tela	**Metros de tela que se compraron realmente**
564-528=36	528:36=14,6

Figura 5. Contenido de la resolución final de la pareja Arantxa-Ainhoa

Además, observando los valores escritos en las casillas en la Figura 5, se puede ver que el valor 6 ligado de forma correcta a la etiqueta "metros de más que hay en la situación imaginaria", no ha sido utilizado en ningún otro recuadro, es decir, no lo integran dentro del proceso de resolución.

Actuaciones de los alumnos en el problema "Las ovejas"

Otra pauta observada ha sido asignar el cálculo de una cierta cantidad a otra casilla que no le correspondía. En el ejemplo (ver Figura 6), Arantxa se fija en la segunda casilla, "ovejas en el corral pequeño", la cual hace referencia a una cantidad desconocida, que, en el instante en el que están de la resolución no se puede abordar. En el ítem 55, la misma alumna plantea de forma correcta dejarla para más tarde pero Ainhoa propone el cálculo incorrecto 180-30 que en realidad, corresponde a la última casilla "ovejas quitando las que hay de más en un corral".

53. Arantxa: Eh... ovejas en el corral perqueño...

54. Ainhoa: Sería 180...

55. Arantxa: Bueno, mmm... lo dejamos para después, ¿no?

56. Ainhoa: Sería 180-30. És que eso es fácil (escribe "180-30=150" en la segunda casilla).

Total de ovejas	Ovejas en el corral pequeño
180	180-30=150
Ovejas de más en el corral grande	**Número de corrales**
Ovejas quitando las que hay de más en un corral	

Figura 6. Contenido de la resolución antes del ítem 56

Actuaciones de los alumnos en el problema “El olvido”

Otro error que se ha repetido en más de una ocasión, ha sido confundir una etiqueta que hace referencia a una cantidad conocida por otra que se refiere a una que no lo es. En este caso, después de la lectura de la casilla “lo que tuvieron que pagar los que tenían dinero”, la pareja Carlos-Juan no identifica que la etiqueta hace referencia a una cantidad conocida (20). Carlos propone un producto (9×20), escribiéndolo posteriormente en la celda indicada (ver Figura 7) que deberían haberse introducido en la celda “precio de todas las meriendas”.

Precio de una merienda	Amigos a los que se les olvido el dinero
20€	A seis amigos

Amigos que sí pagaron	Lo que tuvieron que pagar los que tenían dinero
9 amigos 15-6=9	9x20=180€

Precio de todas las meriendas	Número de amigos
20x15=300	15 amigos

Figura 7. Contenido de la resolución final de la pareja Carlos-Juan

Actuaciones de los alumnos en el problema “Naranjas y kiwis”

Al contrario que en el caso anterior, la pareja Arantxa-Ainhoa asigna el valor de una cantidad conocida a una etiqueta que hace referencia a una que es desconocida.

8. Arantxa: Precio de los kiwis que se han comprado... eh... 3€ el kilogramo.
9. Ainhoa: (Escribe “3€ el kilo” en la casilla “Precio de los kiwis que se han comprado”).

Después de la lectura de la celda “precio de los kiwis que se han comprado”, la pareja acuerda que se debe escribir el valor tres (ver Figura 8), el cual debería asignarse al recuadro “precio de un kilo de kiwis”.

Precio de las naranjas que se han comprado	Kilos de kiwis
	40 Kg

Precio de un kilo de naranjas	Precio de los kiwis que se han comprado
	3€ el kilo

Kilos de naranjas	Precio de un kilo de kiwis	Precio de total de la fruta

Figura 8. Contenido de la resolución antes del ítem 9

COMPARATIVA CON RESOLUCIÓN CON EL SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE

En la Tabla 1 se recogen la relación de problemas realizados de forma correcta e incorrectamente en la resolución con lápiz y papel usando el formato tabular. De nuevo, se asignó el valor 0 a una resolución incorrecta mientras que una resolución correcta se puntuó con un 1, aunque contuviera algún error numérico. Entre otros factores, estos porcentajes podrían deberse al trabajo colaborativo de los alumnos, por lo que no son lo suficientemente altos para asegurar que el hecho de ofrecer el nombre de las cantidades que intervienen en un problema suponga una ayuda tan potente como se podría presuponer.

Tabla 2. Relación de problemas correctos e incorrectos en la resolución con lápiz y papel

	Pareja 1	*Pareja 2*	*Pareja 3*
Las cortinas	0	0	0
Los planos	0	1	0
Las ovejas	0	0	0
Los globos	Correcto Pre	Correcto Pre	Correcto Pre
El olvido	0	0	0
Naranjas y kiwis	0	0	1
La lana	1	Correcto Pre	Correcto Pre
El camión	1	Correcto Pre	Correcto Pre
Pelotas de tenis	Correcto Pre	Correcto Pre	Correcto Pre
Porcentaje de éxito	28,6%	20,0%	20,0%

Por el contrario, en la Tabla 2, se recogen la relación de problemas realizados en el sistema tutorial inteligente. Los alumnos sólo realizaron en el programa aquellos problemas que hicieron de forma incorrecta en la resolución con lápiz y papel usando la representación de los datos en formato tabular.

Tabla 2. Relación de problemas correctos e incorrectos en la resolución con el sistema tutorial inteligente

	Pareja 1	*Pareja 2*	*Pareja 3*
Las cortinas	0	1	1
Los planos	0	Correcto Tab	1
Las ovejas	1	1	1
Los globos	Correcto Pre	Correcto Pre	Correcto Pre
El olvido	0	1	1
Naranjas y kiwis	0	1	Correcto Tab
La lana	Correcto Tab	Correcto Pre	Correcto Pre
El camión	Correcto Tab	Correcto Pre	Correcto Pre
Pelotas de tenis	Correcto Pre	Correcto Pre	Correcto Pre
Porcentaje de éxito	28,0%	100,0%	100,0%

En este caso, observando los porcentajes, sí se aprecia un incremento notable en el número de resoluciones correctas.

CONCLUSIONES

Tal y como se ha podido observar en la revisión de antecedentes, algunos estudios habían identificado que la forma en que los estudiantes construyen nombres o etiquetas para referirse a la cantidades, podía estar detrás de algunos errores y/o dificultades observadas durante la resolución. En nuestro estudio se ha constatado que los estudiantes también tienen dificultades para integrar, dentro del proceso de resolución, etiquetas construidas con suficiente precisión para que no dieran pie a posibles confusiones.

Por otra parte, el estudio abordado ha dado indicios en los que el hecho de aportar las etiquetas de las cantidades que intervienen en un problema no da una ayuda suficiente para resolver problemas en los que se tenía dificultades previamente, mientras que la información sobre si un paso es correcto o incorrecto, sí que ofrece una ayuda suficiente para una correcta resolución.

Referencias

Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., Puig, L., & González-Calero, J. A. (2013). Fundamentals of the design and the operation of an intelligent tutoring system for the learning of the arithmetical and algebraic way of solving word problems. *Computers & Education*, *63*, 119 - 130

Arnau, D., y Puig, L. (2006). Formas de construir nombres y referirse a las cantidades en las actuaciones de alumnos de secundaria al resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En P. Bolea, M. J. González, y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la SEIEM* (pp. 145-153). Huesca, España: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético-Algebraicos*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de València, Valencia.

González-Calero, J. A., Arnau, D., y Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 301-310). Bilbao: SEIEM.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Neuman, Y., & Schwarz, B. (2000). Substituting one mystery for another: the role of self-explanations in solving algebra word-problems. *Learning and Instruction*, *10*(3), 203 - 220.

Sánchez, V. (2010*). Problemas de lectura algebraica. El proceso de traducción y los estudiantes*. Trabajo de investigación no publicado. Universitat de València, España.

ANEXO

El problema "Las cortinas"

Se compró una cierta cantidad de metros de tela para cortinas, pagándose 528 €. Si se hubiesen comprado 6 metros más se hubiera pagado 564 €. ¿Cuántos metros de tela se compraron?

El problema "Las ovejas"

En una granja hay 180 ovejas en dos corrales de distinto tamaño. Si sabemos que en el corral grande hay 30 ovejas más que en el pequeño, ¿cuántas ovejas hay en el corral pequeño?

El problema "El olvido"

Un grupo de 15 amigos se compraron para merendar una hamburguesa y un refresco, pero a seis de ellos se les olvidó el dinero. Los demás decidieron pagarles la merienda y tuvieron que dar 20 € cada uno. ¿Cuánto costaba cada merienda?

El problema "Naranjas y kiwis"

Por 30 kg de naranjas y 40 kg de kiwis he pagado 180 €. Si los kiwis están a 3 €/kg, ¿cuánto cuesta un kilo de naranjas?

EL PROCESO DE MODELIZACIÓN EN EL AULA CON DATOS REALES. UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL ENTORNO INFORMÁTICO DE LAS TABLETAS[1]

The modelling process with real data in the classroom. An exploratory study in the computer environment of tablets

Miriam Ortega, Luis Puig

Universitat de València Estudi General

Resumen

El trabajo que presentamos es un estudio de carácter exploratorio sobre la aplicación de un modelo de enseñanza en un grupo de alumnos de 1º de bachillerato que permite trabajar el proceso de modelización de una situación real a partir de datos reales obtenidos en el aula. La peculiaridad de este estudio es que dichos datos se obtienen a partir de la grabación y análisis de un vídeo del fenómeno estudiado utilizando aplicaciones de iPads®. En particular, el modelo de enseñanza que utilizamos permite trabajar los conceptos de parámetro y familia de funciones y hace énfasis en el análisis cualitativo del fenómeno.

Palabras clave: *proceso de modelización, iPad®, parámetros, familias de funciones, datos reales*

Abstract

This paper is an account of an exploratory study on the application of a teaching model in a grade 11 students group. The teaching model allows us to work the modelling process of a real situation using real data collected in classroom. The peculiarity of this study is that these data are obtained from recording and analysing a video of the studied phenomenon using apps for iPads®. Particularly, the teaching model that we use allows us to work on the concepts of parameter and family of functions and emphasizes the qualitative analysis of the phenomenon.

Keywords: *modelling process, iPad®, parameters, families of functions, real data*

INTRODUCCIÓN

La aparición de nuevas tecnologías está cambiando todo aquello que nos rodea día a día, en particular también la forma en que se concibe la enseñanza y el aprendizaje en las aulas. Por ello, la adaptación a estas nuevas formas de entender la enseñanza es un factor importante en el aprendizaje eficaz por parte de los alumnos.

El trabajo de investigación que presentamos es un estudio exploratorio sobre la enseñanza y el aprendizaje del proceso de modelización de una situación real en un grupo de alumnos de primer curso de bachillerato. Una de las peculiaridades de nuestro estudio es que los datos que se utilizan son datos reales que se obtienen a partir de la grabación de un vídeo del fenómeno representado por los propios alumnos en el aula utilizando iPads®. Además, este dispositivo no sólo sirve para grabar dicha situación en vídeo, sino que también permite, mediante una combinación de aplicaciones, trabajar sobre éste a partir de los datos obtenidos.

El uso de datos reales es importante en el sentido en que éstos tienen un papel destacado en la elaboración de conceptos por parte de los alumnos ya que la situación real que se pretende estudiar

Ortega, M. y Puig, L. (2014). El proceso de modelización en el aula con datos reales. Un estudio exploratorio en el entorno informático de las tabletas. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 125-134). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

no se presenta como una mera aplicación de los conceptos aprendidos por los alumnos, sino más bien para introducirlos y desarrollarlos. Así, las situaciones de modelización en la enseñanza resultan ser un lugar óptimo para el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos (Puig, en prensa).

Además, tanto el análisis cualitativo del fenómeno que se estudia como el conocimiento de las características de las familias de funciones y el significado de los parámetros son un elemento crucial en la gestión y el control del proceso de modelización, ya que permiten tomar decisiones sobre el tipo de función que se usará como modelo y controlar su posterior adecuación a lo largo del proceso de modelización (Puig, en prensa). Por este motivo, uno de nuestros objetivos será el de constatar la influencia de dichos factores, en particular, cuando se utiliza un modelo de enseñanza que, por un lado, permite trabajar conceptos como el de familia de funciones y el de parámetro y, por otro, hace énfasis en el análisis cualitativo del fenómeno.

Sin embargo, éste no es el único objetivo que se persigue, sino que, por el carácter exploratorio de nuestro estudio, tendrá también como finalidad explorar todo aquello relacionado con las actuaciones y las concepciones de los alumnos cuando trabajan en el entorno informático de los iPads® y con un modelo de enseñanza que presenta estas características.

PROBLEMÁTICA Y MARCO TEÓRICO

La problemática en la que se enmarca nuestro estudio es la de la enseñanza de este tipo de situaciones y se engloba dentro de un grupo de trabajos desarrollados por nuestro grupo de investigación (Monzó y Puig, 2007; Monzó y Puig, 2008; Puig y Monzó, 2008; Monzó y Puig, 2010; Monzó y Puig, 2011; Monzó y Puig, 2012; Puig y Monzó, 2013; Puig, en prensa; Juan, 2012; Infante y Puig, 2013; Monzó, Puig y Navarro, en prensa), que tienen una serie de variantes en lo que respecta al contexto educativo en el que se desarrollan, el hardware y software utilizados y el uso o no de datos reales, y en los que lo que se pretende es, por un lado, presentar un modelo de enseñanza que permita estudiar el proceso de modelización, los conceptos de familia de funciones y forma canónica de una familia de funciones y el significado de los parámetros de las formas canónicas respecto a la función y al fenómeno que se modeliza, y, por otro, analizar los resultados después de la aplicación de éste.

El marco teórico y metodológico desde el que abordamos esta problemática es el de los Modelos Teóricos Locales (MTL), cuya elaboración fue iniciada por Eugenio Filloy (Kieran y Filloy, 1989; Filloy, 1990) y cuya exposición más detallada y completa se puede encontrar en Filloy, Puig y Rojano (2008). Desde esta perspectiva, consideramos que las situaciones de enseñanza y aprendizaje en los sistemas escolares pueden concebirse como situaciones de comunicación y de producción de sentido en las cuales estan implicados la materia objeto de enseñanza y aprendizaje, la enseñanza, que organiza el profesor, y los alumnos, en cuyas actuaciones se muestra lo que han aprendido.

Además, los MTL permiten tomar en consideración la complejidad de los fenómenos que se producen en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje mediante varios componentes teóricos relacionados entre sí que permiten, así mismo, organizar la investigación. En particular, en esta investigación, se aborda el componente de competencia haciendo referencia a trabajos anteriores de esta misma línea (Puig y Monzó, 2013), el de enseñanza cuando se detallan la organización del experimento y se explican los materiales utilizados, el de actuación cuando se analizan las actuaciones de los alumnos tanto durante las sesiones de clase como en las entrevistas y, por último, el de comunicación que se incluye de forma implícita.

No obstante, por motivos de espacio, en esta comunicación nos centraremos sólo en describir los elementos necesarios para poder mostrar los resultados obtenidos, por lo que detallaremos cuál fue el proceso seguido así como el material utilizado y nos fijaremos en algunas de las actuaciones de los alumnos a lo largo del experimento.

Ahora bien, aunque el marco teórico desde el que abordamos esta problemática sea el de los MTL, integramos también elementos tomados de la Educación Matemática Realista, en concreto, la consideración de que el proceso de matematización tiene dos direcciones, horizontal y vertical. Esa idea que caracteriza lo que en esa escuela se llama “realista”, tiene entre otras consecuencias para el diseño de las situaciones de enseñanza, la de usar contextos y datos reales, proponiendo en esos contextos reales actividades que contengan las dos direcciones de la matematización, lo que hace que los procesos de modelización, como procesos de matematización, sean un elemento importante dentro de la Matemática Realista.

Además, como nosotros consideramos el proceso de modelización como un caso particular de proceso de resolución de problemas (Puig, en prensa), también integramos resultados que provienen de estudios sobre el proceso de resolución de problemas en general, especialmente, la consideración de la importancia de la gestión del proceso (Schoenfeld, 1985; Puig, 1996). En el caso de los problemas de modelización, consideramos que un factor fundamental para que la gestión del proceso sea buena es la realización de análisis cualitativos tanto del fenómeno que hay que estudiar como de las familias de funciones con las que el fenómeno se va a modelizar (Puig y Monzó, 2013).

Finalmente, prestamos una atención específica al hecho, observado en investigaciones de didáctica del álgebra, de que los alumnos suelen tomar las transformaciones algebraicas como reglas mecanizadas que ejecutan sin sentido, y, en consecuencia, incorporamos a nuestra enseñanza el dar sentido a las transformaciones algebraicas, dándole un papel importante a las formas canónicas de las familias de funciones y el significado de los parámetros en ellas.

EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

En este apartado recogemos todo aquello relacionado con el experimento que se llevó a cabo, es decir, cuál fue la situación que se pretendía estudiar, la descripción del procedimiento seguido, las características de la población estudiada y el diseño del material utilizado y su finalidad.

El estudio que realizamos consistió en analizar una situación de enseñanza en la que un grupo de alumnos, organizados por parejas, tenían que estudiar matemáticamente un fenómeno de la vida cotidiana, es decir, con la intención de matematizarlo. En particular, el fenómeno estudiado fue la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una posición elevada pero sólo desde el momento en el que ésta toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar.

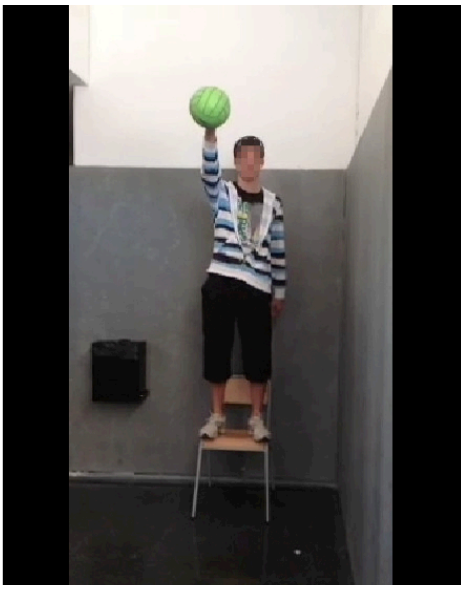


Figura 2. Imagen del fenómeno que los alumnos tenían que estudiar

Cabe destacar que el hecho de escoger este fenómeno como objeto de estudio se debe a que se intentó buscar un fenómeno cuya representación gráfica no coincidiera con la trayectoria del objeto de estudio (en este caso, la pelota) para evitar lo que, según Janvier (1978), hacen muchos alumnos que, "incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base".

Población y contexto

La población que participó en nuestro experimento de enseñanza fue la formada por un grupo de alumnos de 1º de bachillerato, entre 16 y 17 años, de la especialidad de Ciencias de la Salud de un centro de la Comunidad Valenciana. El grupo estaba formado por un total de dieciséis alumnos, de los cuales seis eran chicos y diez chicas.

Los alumnos se agruparon por parejas libremente con el fin de favorecer la verbalización entre ellos de lo que estan haciendo, pensando o quieren hacer (Shoenfeld, 1985; Puig, 1996). Además, según Balacheff y Laborde (1985), el trabajo en parejas no sólo es una fuente de explicaciones, sino también una fuente de enfrentamientos con los demás, cosa que aporta dinamismo a la tarea a estudiar y que es positivo ya que fomenta la aparición de contradicciones que, probablemente, no se percibirían si los alumnos trabajaran en solitario.

Con respecto al contexto en el que se encontraban los alumnos en el momento en el que tuvo lugar el experimento, cabe destacar que aún no tenían conocimientos sobre modelización, aunque sí que habían estudiado diferentes familias de funciones en cursos anteriores y habían trabajado con estas usando como forma canónica $y=a\cdot f((x-c)/b)+d$ y como soporte calculadoras gráficas. En particular, según el currículum en vigor en la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2007), ya habían recibido enseñanza sobre funciones lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales en cursos anteriores.

Descripción del material utilizado y del procedimiento seguido

El experimento se efectuó en un total de tres sesiones de cincuenta minutos, divididas en dos partes, una primera en la que tuvo lugar la enseñanza, que ocupó dos de las sesiones, y otra en la que se efectuaron las entrevistas, que tuvieron lugar durante la sesión restante.

En primer lugar, en la primera sesión los alumnos realizaron una ficha que contenía unas preguntas previas a la realización y grabación del experimento. Estas preguntas se propusieron con la finalidad de indagar sobre las ideas previas de los alumnos y de servir de guía en el proceso de modelización. En particular, había una primera pregunta donde se les pedía a los alumnos que realizaran un análisis cualitativo del fenómeno que había que estudiar (es decir, que realizaran un esbozo de la curva que pensaban que lo modelizaba) y otras dos preguntas donde se pretendía que escogieran una familia de funciones de las de una lista dada y dieran una justificación.

Después de rellenar la ficha por parejas, los alumnos realizaron el experimento de forma que mientras uno de ellos dejaba caer la pelota desde lo alto de una silla, su compañero lo grababa utilizando un iPad®. Para la grabación, se utilizó la aplicación Video Physics® de Vernier®, aplicación que no sólo permitió grabar el fenómeno en vídeo, sino también obtener una nube de puntos después de realizar una serie de operaciones sobre éste. En concreto, después de grabar el vídeo, los alumnos tenían que fijar unos ejes de coordenadas en un fotograma cualquiera de la grabación, tomar una medida de referencia en la realidad e introducírsela a la aplicación para que ésta usara ese dato como referencia para calcular cualquier otra medida y, finalmente, marcar sobre la pelota una serie de puntos en distintos fotogramas del vídeo indicando la trayectoria que seguía en cada instante. La aplicación produce entonces una gráfica de puntos que muestra la relación entre el tiempo y la altura.

Respecto a la segunda sesión, estaba previsto que los alumnos rellenaran una segunda ficha con los datos obtenidos del experimento que habían realizado en la sesión anterior. Sin embargo, por problemas externos, finalmente no pudieron utilizar estos datos y les tuvimos que proporcionar los de otro experimento. En particular, lo que sucedió fue que para responder los ítems de esta ficha, era necesario pasar las coordenadas de los puntos obtenidos en la aplicación Video Physics® a otra aplicación, Data Analysis®, para lo que se requería conexión a internet, con la que tuvimos problemas en el centro.

En cuanto a la segunda ficha, cabe destacar que estaba pensada para que los alumnos comprobaran la adecuación de la función escogida y que estudiaran el fenómeno con mayor profundidad. Para eso, se les proponía una primera pregunta donde estos, utilizando la aplicación Data Analysis®, tenían que elegir la función de regresión que mejor ajustara a la nube de puntos obtenida. Después, se les proponía una pregunta para que se dieran cuenta de que la función de regresión (que en este caso era la parábola) no representa a la función que modeliza el fenómeno en todo su dominio, sino solamente en el intervalo en el que se está estudiando y para el que se ha definido (es decir, desde que toca el suelo la pelota por primera vez hasta que lo vuelve a tocar). Y, finalmente, se les propuso una última pregunta para ver si eran capaces de interpretar los datos obtenidos en el experimento con relación al fenómeno.

Por último, en la tercera sesión tuvieron lugar las entrevistas, que se realizaron a dos de las parejas, no sólo con la intención de analizar el origen de sus respuestas y conocer cuáles eran sus concepciones con mayor profundidad, sino también con la intención de guiarlos para que fueran capaces de reflexionar y modificar algunas de las ideas erróneas que presentaban.

RESULTADOS MÁS DESTACADOS

En cuanto a los datos obtenidos de los alumnos, cabe destacar que provienen de tres fuentes distintas: de las fichas, de los iPads® y de las entrevistas. Ahora bien, por un lado, se analizaron las respuestas de los alumnos a las fichas y la información disponible en los iPads® (los vídeos, la representación de las diferentes funciones de regresión...) haciendo una reconstrucción racional de los hechos transcurridos durante las sesiones primera y segunda pareja por pareja y posteriormente un resumen de los resultados obtenidos (relativos a las concepciones de los alumnos, la influencia del conocimiento que estos tenían de los parámetros y las familias de funciones a lo largo del experimento, etc.). Por otro lado, se analizaron las entrevistas realizadas, primero transcribiéndolas (incluyendo no sólo sus intervenciones, sino también comentarios sobre gestos, comportamientos y reacciones con la finalidad de contribuir a la comprensión de la situación y a entender a qué se hacía referencia en cada momento) y, luego, haciendo una reconstrucción racional de los hechos, analizándola y agrupando los resultados obtenidos.

A continuación, presentamos algunos de los resultados más destacados de los que pudimos observar a partir tanto del análisis de las fichas y los iPads® como de las entrevistas a algunas de las parejas estudiadas con mayor profundidad, relativos a las actuaciones y las concepciones de éstos a lo largo de todo el experimento de enseñanza.

Las concepciones del concepto de altura

En primer lugar, pudimos observar algunas concepciones que presentan los alumnos por lo que respecta al concepto de altura.

En particular, observamos dos concepciones: que los alumnos consideran que la altura por encima del nivel del suelo es positiva siempre y que es cero exactamente en el suelo, cosa que podría ser consecuencia de que habitualmente se toma éste como referencia, pero que no tiene por qué ser así. En realidad, lo que observamos fue que, cuando se les da libertad para que elijan qué referencia tomar (cosa que sucede en la ficha 1 y cuando trabajan en el video que ellos mismos graban), todos los alumnos eligen el suelo pero, cuando ya hay una referencia tomada (como cuando realizan la segunda ficha, ya que, se utilizan otros datos que nosotros les proporcionamos), continúan considerando el suelo como referencia a pesar de no serlo y de tener información suficiente para comprobar cuál es. Veamos algunos ejemplos que ponen de manifiesto lo que acabamos de mencionar.

En primer lugar, vemos que, efectivamente, cuando no hay una referencia tomada, los alumnos eligen el suelo. Esto se puede observar en el ítem 1 de la primera ficha, cuando les hacemos preguntas antes del experimento para averiguar sus concepciones ya que, como podemos ver en el ejemplo de respuesta de la figura 2, los alumnos consideran que el eje de las *x* es el suelo ya que es la altura a la que rebota la pelota.

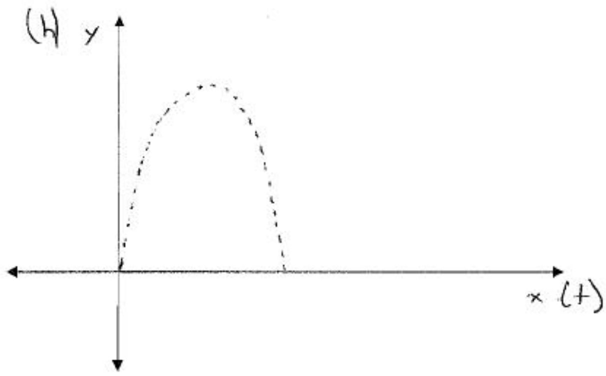


Figura 3. Respuesta de la pareja 1 al ítem 1

Además, como hemos dicho, este hecho no sólo se puede observar en las respuestas de los alumnos al ítem 1, sino también cuando trabajan sobre el vídeo que ellos mismos graban y, en particular, a la hora de fijar los ejes de coordenadas, ya que la mayoría de ellos (excepto una única pareja) fijan el eje *OX* en la base de la pelota para que el suelo coincida con éste y, por tanto, la altura en el suelo valga cero, tal como se puede observar en la figura 3.

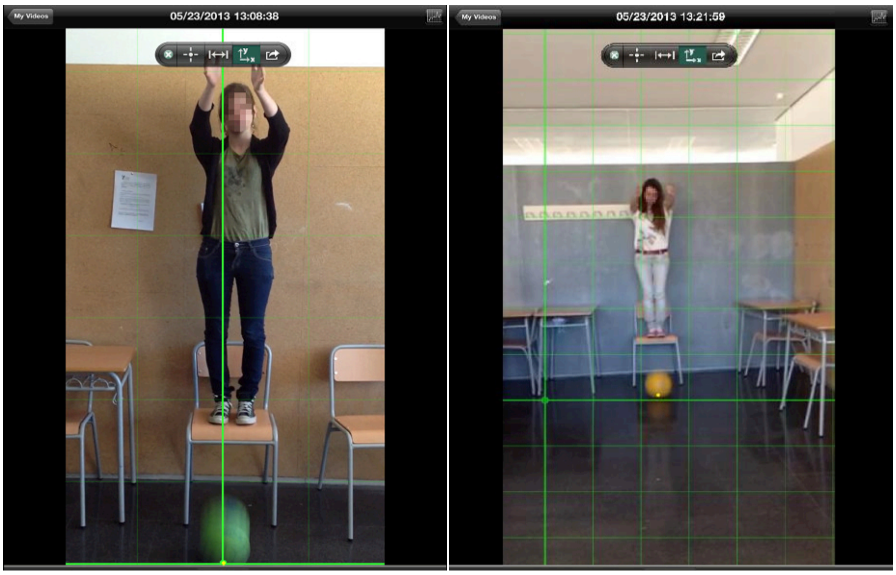


Figura 4. Posición de los ejes de coordenadas (parejas 6 y 8)

Sin embargo, en la segunda ficha vemos, como ya habíamos comentado, que, a pesar de que la altura del suelo en los nuevos datos no es exactamente cero, los alumnos continúan considerando éste como referencia.

Este hecho se puede observar, por ejemplo, en la respuesta de la pareja 5 al ítem 7, donde les pedimos a los alumnos que calculen para qué valores del tiempo la pelota golpea el suelo, a lo que responden igualando *y* a cero, suponiendo que la altura a la que se encuentra éste continúa siendo nula.

Hem igualat la y que correspon a l'altura a zero que és quan colpeja amb el terra. x_1= -0,558905
x_2 = 3.552899

Hemos igualado la *y* que corresponde a la altura a cero que es cuando golpea con el suelo. x_1 = -0,558905
x_2 = 3,552899

Figura 5. Respuesta de la pareja 5 al ítem 7

Además, este tipo de respuesta se da exactamente en todas y cada una de las parejas analizadas, sin considerar aquellas que dejan en blanco la pregunta, cosa que nos da una idea de cómo de fuerte es esta concepción.

Los factores que influyeron en la elección de la función de modelización

Por otro lado, pudimos observa la influencia de diferentes factores a la hora de escoger un modelo de entre todos los que se proponen en una lista.

En primer lugar, de forma similar a lo que se expone en Puig (en prensa), pudimos constatar que tanto el análisis cualitativo del fenómeno a estudiar como el conocimiento de las características de las diferentes familias de funciones son elementos cruciales en la gestión y el control del proceso de modelización y, en particular, a la hora de tomar decisiones sobre el tipo de función que se usa como modelo y de controlar su adecuación a lo largo del proceso de modelización. Este hecho se puede observar en diferentes momentos del experimento como, por ejemplo, durante la realización de la entrevista a los alumnos de la pareja 2, como vemos a continuación.

I: En la pregunta 2, ¿por qué escogisteis la opción c? [$f(x) = ax^2 + bx$]

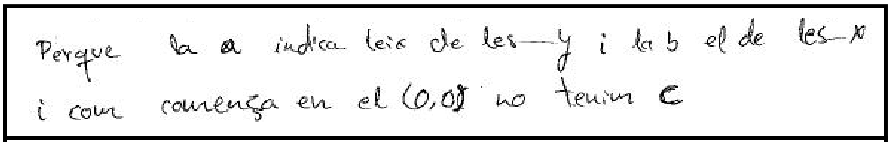
A: Al final encontramos que ésa era la más... la más coherente.

I: ¿Y en qué os basasteis para responder?

A: Pues... como el dibujo era una parábola... sabíamos que *x* llevaba un cuadrado.

Como podemos observar, al preguntarle a uno de los alumnos por qué escogieron la función cuadrática de la opción c) en el ítem 2, que es la función $f(x) = ax^2 + bx$, nos responde que fue porque sabían que la gráfica de la función era una parábola y que, por tanto, la *x* tendría que tener como exponente un 2, utilizando sus conocimientos sobre las propiedades cualitativas de las funciones para responder.

Por otro lado, otro factor que también influye claramente en las respuestas de los alumnos a la hora de tomar decisiones sobre la elección de la función que modeliza el fenómeno, es el significado que los alumnos le atribuyen a los parámetros, aunque no siempre sea el correcto, como veremos a continuación en un ejemplo. Esto se puede observar en la respuesta al ítem 3 de los alumnos de la pareja 3 donde, al preguntarles por qué eligen la familia de funciones $y = ax^2 + bx$, responden que lo hacen porque los parámetros *a* y *b* son el eje de las *y* y de las *x* respectivamente, y que el parámetro *c* de la función $y = ax^2 + bx + c$ vale cero porque la gráfica que éstos dibujan en el ítem anterior pasa por el origen de coordenadas. Es decir, aunque no interpreten correctamente todos los parámetros, el significado que éstos les atribuyen hacen que los alumnos elijan como modelo la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas,


Perque la a indica l'eix de les y i la b el de les x
i com comença en el (0,0) no tenim c

Porque la *a* indica el eje de las *y* y la *b* el de las *x* y como empieza en el (0,0) no tenemos *c*.

Figura 6. Respuesta de la pareja 3 al ítem 3

Por último, cabe destacar que otro de los factores que pudimos observar que influyó claramente en la elección de la función, y que se repitió en siete de las ocho parejas analizadas, fue la concepción que los alumnos tenían del tiempo. En particular, pudimos ver lo que denominamos una concepción absoluta del tiempo, esto es, el hecho de considerar que el tiempo vale cero justo en el momento en que se empieza a estudiar el fenómeno, es decir, en el momento en el que la pelota toca el suelo por primera vez, obviando que éste se presenta descrito y englobado en un contexto más general que es desde que se suelta la pelota hasta que se para.

Por tanto, los alumnos, al considerar el suelo como referencia y que el valor del tiempo cuando se empieza a estudiar el fenómeno es cero, dibujan las gráficas en el ítem 1 de forma que pasan por el origen de coordenadas. Esto se puede observar en diferentes respuestas, como, por ejemplo, en las de las parejas 1 y 2 que, a pesar de ser distintas, todas ellas tienen la característica de que cuando el tiempo vale cero, la altura de la pelota es cero también.

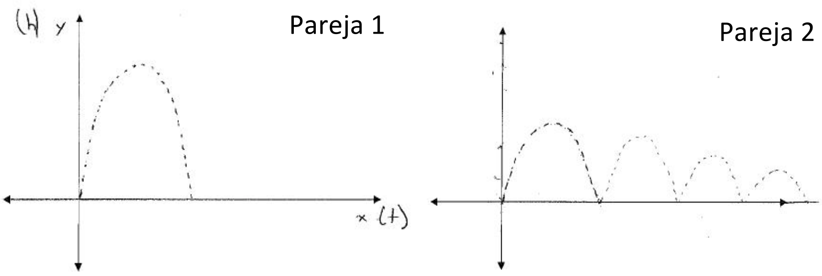


Figura 7. Respuestas de las parejas 1 y 2 al ítem 2

Además, este hecho no sólo se puede observar en la realización de las fichas, sino también durante las entrevistas, como podemos ver en las transcripciones de las intervenciones de la pareja 1, donde uno de los alumnos afirma que para ellos la gráfica pasa por el origen de coordenadas porque en el enunciado se describe que el fenómeno que hay que estudiar empieza cuando la pelota toca el suelo por primera vez, y no antes.

I: [...] ¿Por qué dibujasteis la gráfica de forma que empezara desde (0,0) y no desde otro lugar?

A: [...] porque consideramos el tiempo inicial cero y que la altura en el primer salto era cero también.

I: Pero, ¿por qué? [...]

A: Porque aquí [refiriéndose al enunciado donde se describe el fenómeno que hay que estudiar] pone que es desde que [la pelota] toca el suelo por primera vez.

CONCLUSIONES

El estilo que caracteriza nuestro trabajo condiciona el tipo de conclusiones que extraemos de éste, ya que el objetivo no es la investigación experimental de una hipótesis, sino la realización de una exploración del proceso de modelización de una situación real determinada. Por este motivo, las conclusiones que extraemos son una recopilación de los resultados obtenidos y presentados ampliamente en el apartado anterior.

En primer lugar, hemos podido observar que tanto el análisis cualitativo del fenómeno como el conocimiento de las propiedades cualitativas de las familias de funciones y el significado de los parámetros son elementos cruciales en la gestión y el control del proceso de modelización, ya que los alumnos se basan en éstos tanto para tomar decisiones como para justificar sus respuestas.

Además, también hemos podido observar una concepción absoluta del tiempo al considerar el fenómeno estudiado independientemente del contexto en el que se presenta.

Pero, sobre todo, hemos podido observar en los alumnos una muy arraigada concepción de que la altura cuando se trabaja por encima del nivel del suelo es positiva y exactamente cero en el suelo ya que, incluso cuando no es así, los alumnos consideran éste como referencia.

Por tanto, las implicaciones que tiene este estudio en la elaboración de trabajos futuros es el hecho de que se prestará especial atención a las cuestiones observadas en nuestro experimento, especialmente a las relativas al tiempo y a la altura, para que los alumnos sean capaces de superarlas.

Referencias

Balacheff, N., & Laborde, C (1985). Social interactions for experimental studies of pupils conceptions: its relevance for research in didactics of mathematics. *First Conference on the Theory of Mathematics Education.* Bielefeld: I.D.M.-T.M.E.

Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A working perspective. En G. Booker, P. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psychology of Marhematics Education* (1, PII 1-PII 33). Oaxtepec, Morelos, México.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Generalitat Valenciana (2007). *Decreto 112/2007, de 24 de julio, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículum de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana*. DOGV, *5562*, 30402- 30587.

Infante, F., y Puig, L. (2013). Modelos emergentes en un primer curso de economía y administración. *Modelling in science education and learning*, *6* (2), 235-248.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham.

Juan, M. A. (2012). *Modelo plausible vs. Modelo esperable. Un estudio exploratorio de aspectos del proceso de modelización*. Trabajo de fin de máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Valencia: Universitat de València. Disponible en roderic.uv.es.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*, 230-240.

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, *24*, 26-29.

Monzó, O. y Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. *Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (CD3, T05-01). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Monzó, O., y Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. *Veintidós Séptimos*, *26*, 4-6.

Monzó, O., y Puig, L. (2011). Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). *Actas de las IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (I, 167-185). València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

Monzó, O., y Puig, L. (2012). Familias de funciones. En M. Torralbo y A. Carrillo (Eds.) *Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas* (103-133). Sevilla: SAEM Thales y División didáctica CASIO-Flamagas.

Monzó, O., Puig, L., y Navarro, M. T. (en prensa). Un estudio sobre el proceso de modelización, en el entorno informático de las tabletas. *Actas de las XVI JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (en prensa). Modelización con datos reales. *Actas de las XVI JAEM*. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Puig, L., y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.), *El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (pp. 142-158). Castelló: SEMCV.

Puig, L., y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35). México: Trillas.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

---

[1] Esta investigación ha sido realizada en el contexto del Proyecto de Investigación EDU2012-35638 subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA ESTUDIAR LA REFLEXIÓN DE PROFESORES SOBRE MODELIZACIÓN EN ÁLGEBRA[1]

Didactic Analysis to Study the Teachers' Reflection in the Modeling in Álgebra

Elisabeth Ramos-Rodríguez[a], Pablo Flores Martínez [b], João Pedro da Ponte[c]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Lisboa

Resumen

En la investigación conducente a una tesis doctoral, estudiamos cómo reflexionan sobre su enseñanza, profesores de matemáticas, mientras participan en un curso de formación. La reflexión comienza seleccionando un problema profesional. Una de las parejas de profesores se planteó profundizar en las dificultades que tienen los alumnos para traducir enunciados a expresiones algebraicas (que los profesores llaman modelización). Para poder interpretar la reflexión hemos realizado un análisis didáctico de la enseñanza del álgebra en el inicio de secundaria. En esta comunicación presentamos algunas apreciaciones sobre el papel de la modelización en álgebra y su relación con los diferentes "roles de las letras en álgebra", que nos servirán para interpretar los planteamientos y reflexiones de los profesores.

Palabras clave: *enseñanza del álgebra, modelización, rol de letras.*

Abstract

In the investigation conducive to a doctoral thesis, we study how they reflect about his teaching, teachers of mathematics, while they take part in a training course. The reflection starts by selecting a professional problem. One of the pairs of teachers considered to penetrate in the difficulties that the pupils have to translate terms of reference into algebraic expressions (that the teachers are called a modeling). To be able to interpret the reflection we have realized a didactic analysis of the education of the algebra in the beginning of secondary. In this communication we present some appraisals on the paper of the modeling in algebra and his relation with different "roles of the letters in algebra ", that will serve us to interpret the ideas and reflections of the teachers.

Keywords: *teaching algebra, modelling, role of letters.*

INTRODUCCIÓN

Estudiar los procesos ligados a la formación de profesores es una línea de investigación ampliamente desarrollada dentro de la didáctica de la matemática. Dentro de los trabajos que atienden al desarrollo profesional, una línea importante se ocupa de la reflexión del docente como un proceso que le ayuda a fundamentar su autonomía, a la vez que le permite relacionar su proceso de formación con su desempeño profesional en aula.

En un estudio doctoral nos hemos propuesto como objetivo principal analizar la reflexión sobre la práctica referente a un problema del álgebra, en un programa de formación continua, consistente en un curso impartido en Chile el año 2012.

En dicho estudio se utiliza el análisis didáctico, para profundizar en la problemática profesional que el grupo analizado ha seleccionado, relativa a la enseñanza del álgebra. El propósito de esta comunicación es presentar algunos resultados de este análisis, centrándonos particularmente en el análisis de contenido.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P., y Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 135-143). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

A continuación mostramos algunos aspectos del análisis didáctico como herramienta de apoyo al investigador, que ejemplificamos examinando el papel de la letra en el álgebra y la modelización.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Para facilitar tanto nuestra actuación durante el curso, como el análisis de las producciones de los docentes sobre la enseñanza del álgebra, desarrollamos parte del proceso de análisis didáctico que se lleva a cabo en el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la Universidad de Granada. El análisis didáctico (Rico, 1997), aunque tiene un origen teórico, su objetivo es eminentemente práctico, al facilitar al profesor el proceso sistemático de diseño de unidades didácticas (Rico, 1997). Gómez (2007), señala que “el análisis didáctico es un procedimiento que permite explorar, profundizar y trabajar diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (p.18-19). Por tanto, permite al profesor organizar el saber desde dos ámbitos, desde las matemáticas y desde la enseñanza.

Este análisis se compone de cuatro subanálisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Para interpretar las intervenciones de los profesores hemos profundizado en el análisis de contenido sobre el álgebra escolar, a partir de dos elementos: la modelización y el uso de la letra.

Modelización

El proceso de modelización en educación matemática es un tema de interés que tiene espacio en reuniones científicas como la International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) (Matos, Blum, Houston y Carreira, 2001; Niss, Blum y Huntley, 1991), la International Conference in Mathematics Education (ICME) (Gómez y Waits, 2000), en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en la Asian Technology Conference in Mathematics y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre muchas otras. Diversos investigadores han mostrado interés en conceptualizar este proceso con miras a su comprensión, como Blum (1991), Castro y Castro (1997), Cross y Moscardini (1985), Galbraith y Haines (1997), Ponte (2004); Ríos (1995), Swets y Hartzler (1991), Stewart y Pountney (1995), entre otros. En la revisión realizada observamos que el término modelización tiene diversas acepciones.

Considerando los aportes de investigadores (Arora y Rogerson, 1991; Castro y Castro, 1997; Ríos, 1995; Swets y Hartzler, 1991) denominaremos modelización matemática “...al proceso de concebir el modelo matemático” (Swetz y Hartzler, 1991, p.1), proceso que contribuye a realizar una aproximación a problemas del mundo real mediante las matemáticas (Ríos, 1995); forma parte de la resolución de problemas (Swets y Hartzler, 1991). La modelización matemática es "...el arte y ejercicio de construir y trabajar con modelos matemáticos." (Arora y Rogerson (1991, p.12). Por tanto es fundamentalmente una forma de resolución de problemas de la vida real (Ponte, 2004), que conlleva la consideración del problema como un todo, como lo veremos más adelantes al examinar las etapas del proceso de modelización.

Con el fin de examinar la modelización como proceso, varios autores han considerado ciertos esquemas que permiten estudiarla de manera más precisa (Castro y Castro, 1997; Blum, 1991, Blum y Niss, 1991; De Lange, 1997; Swets y Hartzler, 1991, entre otros). A partir de estos autores asumiremos el proceso de modelación como un proceso que conlleva cuatro fases principales, ilustradas en la figura 2.

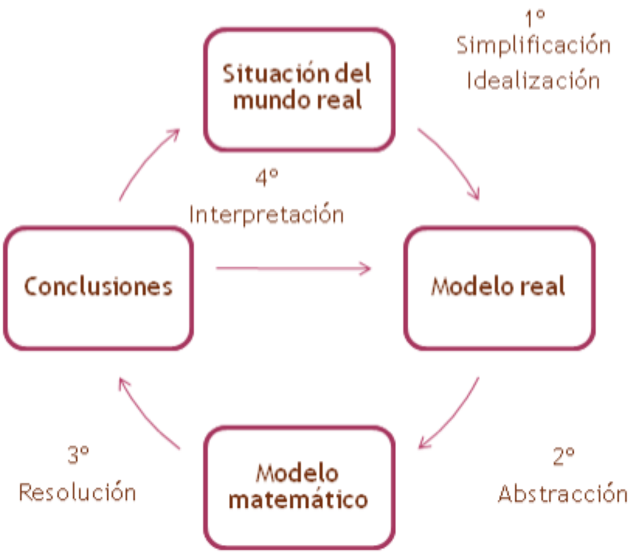


Figura 2. Proceso de modelización matemática

Estas fases se describen como:

- *Identificación del modelo real*. A partir de situaciones del mundo real se identifica una situación susceptible de ser tratada con herramientas matemáticas. En este primer momento se perciben cuestiones e interrogantes procedentes de un mundo de fenómenos, que dan lugar a problemas para cuya respuesta es necesario un proceso de abstracción y simplificación. Se constituye la imagen de alguna parte objetiva existente en la realidad. Se hace necesario entender la estructura, idealizar y precisar el sentido de la situación o problema real, enmarcado sobre la base del contexto en el cual se construirá el modelo real. Aquí se incluye la posible toma de datos y su organización para análisis posterior;

- *Construcción del modelo matemático*. Momento de abstracción, en el que el sujeto focaliza la atención sobre propiedades específicas de la situación y considera esas propiedades aisladas de la situación original (Harel y Tall, 1991). Al modelizar se establecen los datos, conceptos, relaciones, condiciones y premisas que serán traducidos al lenguaje matemático;

- *Elección de los contenidos y utilización de métodos matemáticos apropiados*. En este momento se acude a los conceptos y técnicas matemáticas;

- *La interpretación y validación de las conclusiones*. Se contrastan directamente con la situación del mundo real que está siendo estudiada, o a través del modelo real configurado en la modelización realizada. Las conclusiones matemáticas obtenidas serán traducidas del lenguaje del modelo matemático al lenguaje de la situación real. Cuando los resultados de esa comparación realidad-modelo son favorables termina el proceso de modelización. En caso contrario se reinicia el proceso para refinar el modelo existente o para buscar otro diferente, siempre teniendo como norte encontrar un modelo aceptable.

En la figura 2, se refleja el carácter cíclico del proceso de modelización que promulgan los autores mencionados, lo cual le confiere una estructura dinámica y flexible que permite su permanente enriquecimiento e incorporación de nuevas interrogantes, cada vez que se desea modelizar una situación dada.

La letra en álgebra

El tratamiento de expresiones, la solución de problemas y la modelación de situaciones reales mediante el uso del álgebra requieren de una comprensión global y flexible del concepto de variable. No sería exagerado decir que, a nivel elemental, el álgebra gira en torno a esta idea. Sin embargo, a pesar de su papel protagónico, este concepto es muy difícil de definir, ya que la variable en el álgebra se presenta con caracterizaciones que varían según el problema en el que ésta está involucrada (Trigueros, 1999). Considerando además que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos (Ursini y Trigueros, 2006), hemos incluido el tema como parte de los contenidos a tratar con los docentes dentro del curso formativo, constituyendo ~~y~~ un apartado especial dentro del análisis de contenido sobre el álgebra escolar.

Las profesoras protagonistas de nuestro estudio seleccionaron para su estudio un problema ligado a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en específico a la traducción del lenguaje verbal al algebraico. Nuestra elaboración de un análisis de contenido sobre el álgebra escolar nos lleva a apreciar que las profesoras estudiadas enfatizan la representación simbólica formal de las expresiones algebraicas, para lo cual utilizan letras que adquieren un significado específico. Con objeto de comprender mejor el significado que le atribuyen a las letras, hemos estudiado el papel de la letra en el álgebra escolar, partiendo del papel que adquiere con mayor generalidad, el de variable.

La función que le asignamos a las letras y símbolos varía de acuerdo al contexto y al contenido matemático en donde se desenvuelven. Filloy (1999) hace hincapié en la fuerza que tienen los símbolos:

> “los símbolos matemáticos no tienen interpretación única y, por lo tanto, una lectura correcta de los mismos requiere de una reconceptualización de los objetos matemáticos que dichos símbolos representan, cuando se pasa de un contexto a otro (del aritmético al algebraico)” (Filloy, 1999, p. 50).

Esto nos hace notar la diferencia entre variable y letra. En primer lugar la variable es un objeto matemático que indica variabilidad y que se simboliza generalmente con una letra. El uso que se le asigna a la letra repercute en el significado de la variable, por lo tanto la comprensión de los distintos usos de las letras es fundamental para llegar al de la variable.

Küchemann (1980) identificó seis maneras de interpretar los símbolos literales o letras, a saber:

- *letra evaluada*, a la letra se le asigna un valor numérico;
- *letra no utilizada*, la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- *letra como objeto*, se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- *letra como incógnita especifica*, representando un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
- *letra como número generalizado*, por lo que representa o es capaz de asumir distintos valores;
- *letra como relación entre cantidades*, en cuyo caso representa un rango de valores no especificados, mediante una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

El papel de la letra para un objeto matemático puede ser variable. Así por ejemplo, en el caso de las expresiones algebraicas la letra toma el papel de número generalizado. En el caso de las ecuaciones (igualdad de expresiones) puede ser considerado (según el contexto) como incógnita o como relación funcional. Cuando hablamos de representaciones algebraicas no estamos particularizando a ecuaciones, ni a expresiones ni a funciones, etc., por tanto, en este caso, el uso de la letra (y por ende el significado de la variable) depende del contexto.

Considerando el trabajo de Kücheman (1980), Ursini y Trigueros (Trigueros, 1999; Ursini y Trigueros, 2006), identifican tres formas principales en las que se manifiestan las variables en el álgebra escolar:

- *La variable como incógnita*, es decir, como un número desconocido. Aparece desde los primeros años escolares cuando los alumnos empiezan a trabajar con problemas, aunque la incógnita no se representa mediante una letra sino mediante otros signos, como una raya, un cuadrito, un espacio vacío, etc. Este signo se sustituye por la letra al iniciarse la enseñanza del álgebra propiamente tal.
- *La variable como número generalizado*, se refiere a la variable como una herramienta que se usa en matemáticas para expresar propiedades derivadas de una generalización. Cuando se quiere expresar un patrón, una regularidad o un método general en matemáticas, se usan variables para indicar la generalidad de los números involucrados. Por ejemplo, para expresar propiedades de los números reales, o bien el término general de sucesiones de números reales, como por ejemplo, la sucesión $1+\frac{2}{3}, 2+\frac{3}{4}, 6+\frac{4}{5}, 24+\frac{5}{6},....$ se puede generalizar con la expresión algebraica $n¡+\frac{n}{n+1}$.
- *La variable en una relación entre cantidades*, es decir, las variables que expresan una relación entre dos cantidades que cambian. Cuando se usa así, las características principales de la variable son su variación en un rango de valores y el hecho de que el cambio en una de las variables produce un cambio en el valor de la otra. Esta característica se enfatiza cuando la relación funcional se concibe como la expresión del cambio (Trigueros, 1999). Bajo esta concepción, una variable es un *argumento* (es decir, un valor del dominio de una función) o un *parámetro* (es decir, representa un valor del cual dependen otros valores). Solo en esta concepción toman sentido las nociones de variable independiente y dependiente.

De esta forma letras y variables están relacionadas, pero se debe tener en cuenta que no toda simbolización literal representa una variable, solo tres de las seis clasificaciones de las letras tiene que ver con el significado de la variable, como se ilustra en la figura 3.

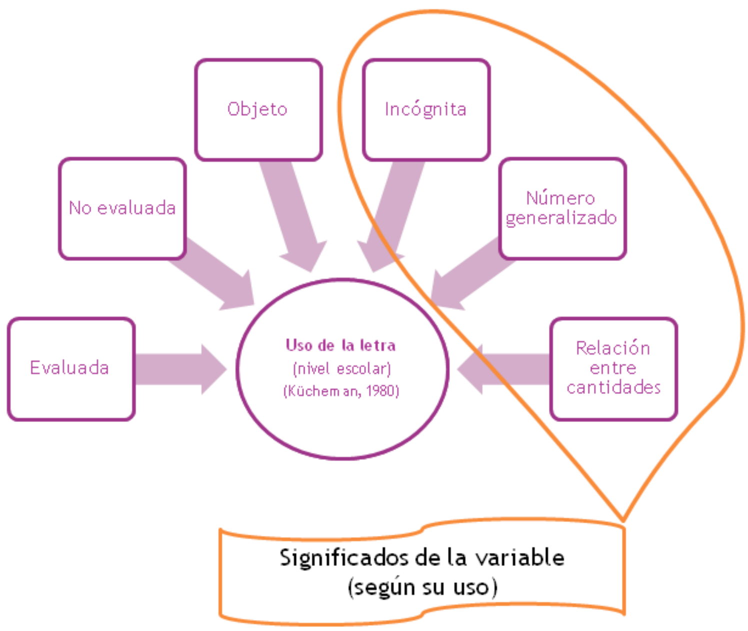


Figura 3. La letra y los significados de la variable

La modelización en álgebra

En esta sección estudiamos el papel específico que desempeña la modelización en el álgebra, examinando su relación con el papel que juega la letra.

Sabiendo que el análisis de contenido de un concepto matemático arranca identificando su significado en la terna Definición-Representación-Fenómeno, podemos identificar y ubicar elementos implicados en problemáticas educativas referentes a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, como lo ilustra la figura 4.

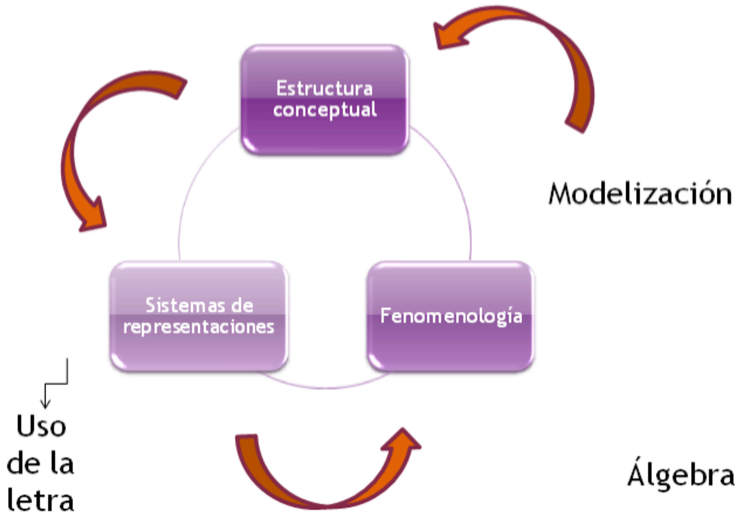


Figura 4. Dimensiones del signifcado del concepto matemático y su relación con el álgebra, la modelización y el uso de la letra

A través de este esquema, focalizamos nuestra atención sobre dos aspectos que se destacan en el tratamiento del álgebra, el papel de la modelización y el uso de la letra. La modelización se ubica en la relación entre la estructura conceptual y la fenomenología de los conceptos algebraicos. El sistema de representación literal adquiere una gran importancia en álgebra escolar, por medio del lenguaje algebraico, en cuyo desarrollo juegan un papel importante los distintos papeles de la letra en el álgebra. La articulación de estos dos elementos (modelización y usos de la letra) que llevamos a cabo en el análisis de contenido, suministra referentes importantes con los que estudiar la problemática del grupo.

En el caso de la modelización matemática (figura 2), considerando el simbolismo algebraico como modelo matemático, es posible apreciar la presencia de la letra en el proceso, como se ilustra en la figura 5.

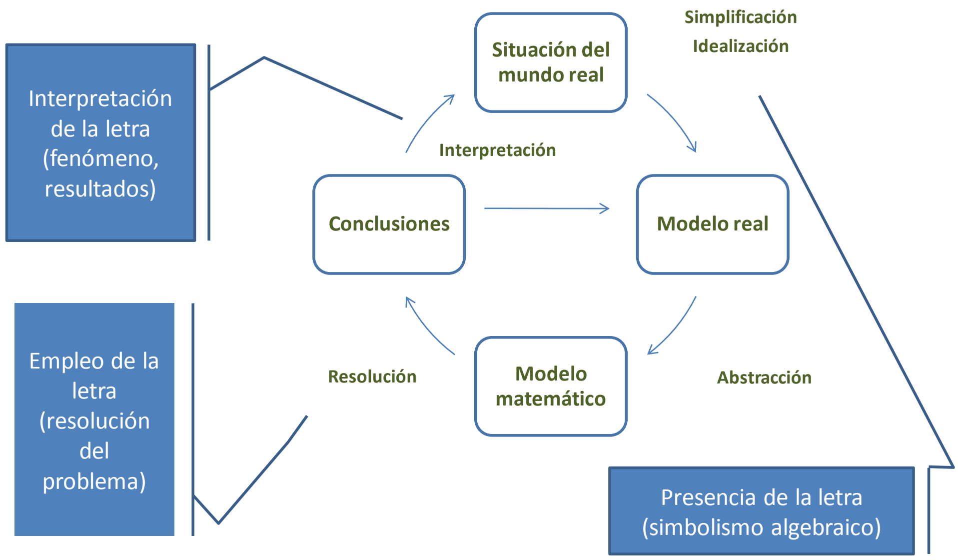


Figura 5. El uso de la letra en la modelización matemática en el caso del simbolismo algebraico como modelo matemático

Desde esta perspectiva, en la segunda etapa de la modelización aparece la letra como simbolismo algebraico para representar elementos del fenómeno o modelo real. Llevando este análisis al plano de la matematización (Rico, 2007), la matematización horizontal involucra diversas actividades de las que destacamos: representar el problema de modo diferente, comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal, encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera, traducir el problema a un modelo matemático, utilizar herramientas y recursos adecuados. Todas estas actividades sugieren usos de la letra en distintas formas y niveles. Así por ejemplo, comprender la relación entre el lenguaje natural y el simbólico, exige un manejo de ambos sistemas de representación y, en el caso del simbólico, el manejo de la letra en el papel adecuado a la situación.

En la tercera etapa del proceso de modelización, la letra se emplea para resolver el problema, lo que conlleva una serie de actividades por parte del estudiante desde el punto de vista de la matematización. En concreto: usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos, argumentar, generalizar.

Por último en la etapa final, la letra es interpretada de acuerdo al fenómeno estudiado.

Este análisis lo ilustramos a partir del esquema de la figura 6.

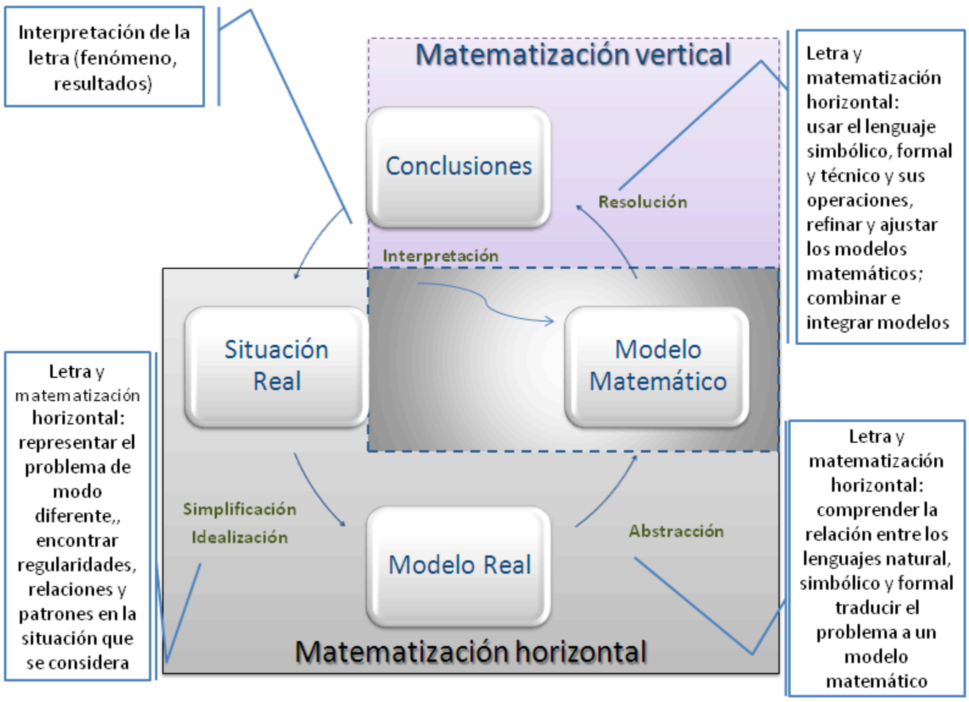


Figura 6. La letra, la modelización y la matematización

Este esquema nos permite mirar con mayor profundidad las tareas que plantean los profesores para favorecer que los alumnos lleven a cabo la modelización (contemplada como matematización). Por ejemplo, una propuesta de tarea matemática escolar que lleve a representar la situación real de diferentes modos, como por ejemplo, empleando esquemas, diagramas, tablas, etc., puede mostrarnos que el docente ha tomado en cuenta el uso de la letra en forma más concreta y explícita, antes de afrontar la simbolización y el uso de la letra como incógnita. En el caso de las profesoras estudiadas, éstas consideran el uso de diagramas en el diseño de las tareas, otorgándoles en una primera instancia un rol verificador del modelo matemático que los alumnos construyen. Más adelante, en el proceso reflexivo las docentes le dan un rol mediador para la construcción del modelo matemático, evidenciando una mayor profundización en su problemática.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado algunos elementos del análisis de contenido dentro de lo que es el análisis didáctico referido a la enseñanza del álgebra. Esta profundización nos ha obligado a examinar cómo se entiende la modelización en álgebra y cómo se relaciona con el papel de las letras. De esta forma hemos contado con elementos más precisos para analizar la reflexión de las profesoras estudiadas, apreciando qué protagonismo conceden al papel de las letras y caracterizar qué entienden por modelización en álgebra. Así hemos podido interpretar las diversas reformulaciones en las tareas de enseñanza propuestas por las profesoras investigadas, examinando manifestaciones de la reflexión que realizan sobre su práctica. Con ello ampliamos la visión del análisis didáctico como herramienta para apreciar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Rojas, Flores y Ramos, 2013), incluyendo otras funciones como las consideradas en este escrito.

Referencias

Arora, M. S., & Rogerson, A. (1991). Future trends in Mathematical modelling and applications. In M. Niss, W. Blum & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp.111-1 16). New York: Ellis Horwood.

Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching. A review of arguments and instructional aspects. In M. Niss, W. Blum & I. Huntley, *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*, pp. 10-29. Chichester: Ellis Horwood Limited.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects–State, trends and issues in mathematics instruction, *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37–68.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cross, M., & Moscardini, A. O. (1985). *Learning the art of mathematical modelling*. John Wiley y Sons, Inc.

De Lange, J. A. N. (1997). Using and Applying Mathematics in Education. *International Handbook of Mathematics Education*, *4*, 49.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Gómez, P., y Waits, B. (Eds.) (2000). *Papel de las calculadoras en el salón de clase*. Bogotá: Una empresa docente.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 38-42.

Küchemann, D. (1980), Children's Understanding of Integers, *Mathematics in School, 9*, 31-32.

Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K., & Carreira, S. P. (Eds.) (2001). *Modelling and mathematics education: ICTMA 9 – Applications in science and technology*. Chichester, UK: Horwood.

Niss, M., Blum, W., & Huntley, I. (Eds.) (1991). *Teaching and mathematical modeling and applications*. New York: Horwood.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Rojas, N., Flores, P., y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática*. Granada, España.

Ríos, S. (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Stewart, M., & Pountney, D. (1995). *Learning Modelling with Derive*. London: Prentice Hall.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum. A resource guide of classroom exercises.* Reston, VA: NCTM.

Trigueros, M. (1999). *Un modelo de medida con interacción*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid. España.

Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, *18*(3), 5-38.

[1] Este trabajo ha sido financiado por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile) y por medio de una Beca del gobierno de Chile a través de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT. Realizado dentro del Proyecto: "Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, EDU2012-33030", del Ministerio de Economía y Competitividad de España.

DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA[1]

Difficulties in solving mathematical problems of the students of primary and Secondary Education Teacher

Martín M. Socas, Josefa Hernández, M. Mercedes Palarea

Universidad de La Laguna

Resumen

En esta comunicación se analizan dificultades y recursos que tienen los estudiantes para profesores de Educación Primaria y Secundaria al resolver problemas de Matemáticas, que se proponen como tareas y actividades básicas en un plan de formación inicial de Profesores de Matemáticas en la Educación Obligatoria, que facilitan el desarrollo de competencias profesionales útiles

Palabras clave: *resolución de problemas, dificultades, recursos, formación de profesores.*

Abstract

We analyze in this communication the difficulties and students resources for teachers of primary and secondary education to solve mathematical problems, which are proposed as basic tasks and activities in an initial plan of training teachers of Mathematics in Compulsory Education, that facilitate the development of useful skills.

Keywords: *problem solving, difficulties, resources*, *teacher training.*

INTRODUCCIÓN

El análisis de los resultados obtenidos en diversas evaluaciones, a nivel nacional e internacional, ha puesto de manifiesto que la mayoría de los alumnos tienen serias dificultades al enfrentarse a la resolución de problemas de Matemáticas.

Varias han sido las revistas que han dedicado números monográficos a este tema. En especial destacan: SEIEM (2008), la *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ZDM (2008) y *The Mathematics Enthusiast* TME (2013).

En el Simposio de la SEIEM (2008) diferentes autores hacen una revisión sobre el estado de la resolución de problemas en el Seminario titulado: Resolución de problemas: 30 años después.

En la ZDM, titulada *Problem solving around the world – Summing up the state of the art*, pone de manifiesto cómo durante algún tiempo la "resolución de problemas" ha sido un tema fundamental en la investigación y en los currículos. En los variados trabajos se comprueba cómo el término "resolución de problemas" tiene diversos significados en diferentes países, e incluso en el mismo país. Los artículos tratan de responder a dos preguntas: ¿cuáles son los principales temas en la investigación? y ¿en los currículos?, ¿qué relaciones se establecen entre ambos? y muestra una variedad amplia de respuestas de los diferentes países (Törner, Schoenfeld y Reiss, 2008).

La segunda, la revista TME, en los números 1 y 2, volumen 10, *International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*, a través de 18 artículos y más de 500

Socas, M. M., Hernández, J., y Palarea, M. M. (2014). Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para Profesor de Educación Primaria y Secundaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 145-154). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

páginas, ofrece al lector una presentación de la situación actual de la resolución de problemas, con trabajos de investigadores de México, Francia y España y autores pioneros como A. Schoenfeld, R. Lesh, F. Lester, entre otros (Santos-Trigo y Moreno-Armella, 2013).

Conviene destacar, en la problemática sobre la resolución de problemas, el papel esencial del profesorado de Educación Primaria y Secundaria, en la consecución de un aprendizaje efectivo en Matemáticas y de manera especial en resolución de problemas. Es, en este contexto, en el que emerge la necesidad de Programas de Formación de Profesores de Matemáticas. El trabajo que se presenta se sitúa en el marco de un Programa de Formación de Profesores de Matemáticas que se viene implementando en los últimos años en la Universidad de La Laguna, resaltando el papel de la Resolución de Problemas en la propuesta de formación, en la que se proponen tareas (buenas prácticas) que facilitan el desarrollo de competencias profesionales útiles para propiciar una enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la Resolución de Problemas, estudios que tienen su origen a finales de los años noventa en la universidad citada, en los que han participado también alumnos de otras universidades españolas, y que muestran las enormes deficiencias de los alumnos que inician los estudios de Maestros de Educación Primaria en recursos básicos de Matemáticas. Los resultados obtenidos manifiestan que los alumnos utilizan como estrategia general, la tendencia a operar con los datos del problema, sin mostrar una clara comprensión del mismo y sin identificar las relaciones operacionales, conceptuales o procesuales que se dan. Aportan muchas veces soluciones que no pueden ser válidas para las condiciones del problema, lo que evidencia, además de una carencia de estrategias cognitivas (métodos heurísticos), una falta de pensamiento crítico (Palarea, Hernández y Socas, 2001).

En estudios posteriores los alumnos no mejoran los datos obtenidos con anterioridad, encontrándose que el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el pensamiento operacional, puede estar creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas que están más asociadas a un pensamiento estructural e incluso procesual, y que crea dificultades en la consecución de las competencias matemáticas (Socas y otros, 2009).

El marco conceptual utilizado toma como referencia el Enfoque Lógico Semiótico, ELOS (Socas, 2001, 2007), propuesta teórico-práctica que aporta instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de situaciones problemáticas en el microsistema educativo y centra su estudio en uno de los grandes problemas de la Educación Matemática, las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas. En Socas (1997) se establecen cinco procedencias diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático y están relacionadas con: la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En este Enfoque, se toma como punto de partida el Modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), que permite describir el campo conceptual del objeto matemático con sus funciones y su fenomenología, en términos operacionales, estructurales y procesuales y sus relaciones (Socas, 2010).

De manera resumida se puede expresar que cualquier actividad matemática puede ser descrita en relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y cada una de ellas queda determinada, a su vez, por otros tres elementos. Las *Operaciones* por operaciones, algoritmos y técnicas; las *Estructuras* por conceptos, propiedades y estructura; y los *Procesos* por sustituciones formales, generalización y modelización.

Además las actividades matemáticas están siempre situadas en un contexto que debemos analizar, y que viene descrito por las tres componentes: Situaciones problemáticas, Representaciones y

Argumentos. En las Situaciones problemáticas, se consideran las tres fases de la resolución de un problema: identificación, planteamiento y resolución, además de los contenidos matemáticos implicados en ellas; en las representaciones (lenguajes): el reconocimiento, la transformación y la elaboración de las mismas; y en los Argumentos (razonamientos): la descripción, justificación y razonamientos implicados.

Describimos brevemente, ahora, la propuesta de formación de los estudiantes para profesor de Matemáticas en la educación obligatoria (Socas y Hernández, 2013). Se trata de una propuesta global, desde una perspectiva profesional, que pretende facilitar un acercamiento desde el conocimiento matemático disciplinar, al conocimiento matemático curricular, al conocimiento didáctico matemático y al conocimiento de la práctica educativa, mediante una propuesta que va desde la globalidad general del currículo y del conocimiento matemático disciplinar implicado, a la totalidad organizada de un contenido curricular como contenido para enseñar.

La propuesta toma en consideración el conocimiento del profesor de Matemáticas, considerado como conocimiento profesional (Shulman, 1986; Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Las consideraciones anteriores, sobre los conocimientos matemáticos de los estudiantes para profesores y los resultados de la investigación en Educación Matemática sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching), lleva a considerar que los conocimientos y competencias para la organización de los contenidos matemáticos, desde la perspectiva disciplinar, necesitan en los estudiantes para profesores una revisión de la disciplina en términos de unas “Matemáticas” para formar profesionalmente a los Profesores, que mejore, no solo sus conocimientos matemáticos sino sus creencias sobre la finalidad de estos conocimientos en la Educación Obligatoria.

Es en este marco en el que los autores desarrollan la investigación en relación con la resolución de problemas de Matemáticas. En la misma se considera de gran importancia determinar los recursos matemáticos que los estudiantes para profesores usan en la resolución de los problemas propuestos así como la identificación de las dificultades que tienen cuando se enfrentan a estos problemas.

Por ello las preguntas siguientes son las que han dirigido el propósito de esta investigación.

¿Qué tipo de recursos eligen los estudiantes para profesor de Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria para resolver los problemas propuestos?

¿Qué tipo de dificultades tienen estos estudiantes al resolver los problemas propuestos?

En resumen, este trabajo es un estudio que tiene como objetivo analizar los recursos y las dificultades que exteriorizan los alumnos, estudiantes para profesores de Matemáticas en Primaria y Secundaria, cuando resuelven problemas de Matemáticas.

METODOLOGÍA

Se analizan los problemas planteados a dos grupos de alumnos: 25 de un grupo de 90, del 3.^{er} curso del Grado de Maestro en Educación Primaria, que cursan la materia Didáctica de la numeración, el azar y la probabilidad y 12 de un grupo de 27 alumnos de 3.^{er} curso de la Licenciatura de Matemáticas en la materia optativa: Didáctica de las Matemáticas I (Licenciatura en extinción). La selección de los estudiantes se realiza a través del criterio de asistencia a las clases y participación en las tareas y actividades propuestas. En este informe de investigación consideraremos, para mostrar el análisis que realizamos, únicamente, a cuatro estudiantes para profesores, dos de Educación Primaria y otros dos de Educación Secundaria.

Los instrumentos para la recogida de la información fueron: cuestionarios, informes y análisis en grupo o puestas en común.

Se elaboraron dos cuestionarios, uno para cada nivel de profesores, en los que algunos problemas coincidían. A modo de ejemplo, seleccionamos una situación problemática del primer cuestionario (la 5) y dos del segundo (la 1 y la 2); planteadas en el formato "problemas" y comunes a los dos niveles. Estos problemas los hemos llamado: números cuadrados, puertas y trenes, respectivamente

Los cuestionarios se realizaron previamente y en los informes analizaron las respuestas correctas, erróneas y las no contestadas, de forma individual. Por ejemplo, en relación con el primer Informe que aborda aspectos sobre el Conocimiento Operacional, Estructural y Procesual, los alumnos respondieron a cuestiones como:

- Análisis de los errores cometidos en el cuestionario. Determinación del origen de los errores. En las cuestiones erróneas o sin contestar, explicar las razones y contestarlas correctamente.
- Análisis de los conocimientos operacionales, estructurales y procesuales utilizados en las respuestas dadas en el cuestionario, tanto las correctas como las incorrectas.
- Autoevaluación sobre los tipos de pensamiento utilizados en las respuestas.

En relación con el segundo Informe, que aborda específicamente cuestiones relacionadas con la resolución de problemas, los alumnos respondieron a cuestiones como:

- Resolver correctamente los problemas planteados (sin contestar o incompletos).
- Análisis de las dificultades y errores cometidos en la resolución de los problemas.
    a. Identificar en cada problema las fases aceptación, bloqueo y exploración.
    b. Determinar el origen de las dificultades y errores.
- Identificar diferentes razonamientos o heurísticos utilizados en las respuestas dadas al cuestionario.
- Plantear y resolver problemas mediante el uso de los diferentes heurísticos tratados, para un ciclo o nivel determinado.
- Elegir un problema y elaborar un mapa de los conocimientos implicados en el mismo.

En estas tareas propuestas es necesario, además de confirmar la validez como instrumento de medida, realizar el análisis del contenido matemático implícito en cada uno de ellos, a efectos de poder estudiar los diferentes recursos y significados que los estudiantes muestran en su resolución. El Análisis del Contenido nos permite determinar los dominios de la actividad matemática en relación con la Competencia Matemática Formal (CMF).

En la tarea 5, por ejemplo, se propone una situación problemática que se sitúa en el conocimiento procesual, en la que se pide la identificación y resolución del problema. Se trata de un proceso de generalización, en el que se da, de forma explícita, una descripción organizada de un comportamiento regular, en dos representaciones diferentes, en el que la regla, sin embargo, no viene dada de forma explícita. Se trata de establecer una igualdad, en la que alguna operación o alguna parte son desconocidas y están por determinar. Se sitúa la tarea en el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, que en este caso, se concreta en los cuatro momentos que caracterizan el proceso de generalización.

La tarea se organiza, en diferentes apartados, en la que se pide determinar otros números cuadrados más o menos cercanos a los que se facilitan, en uno de los dos registros, para terminar expresando el número cuadrado en la posición "n".

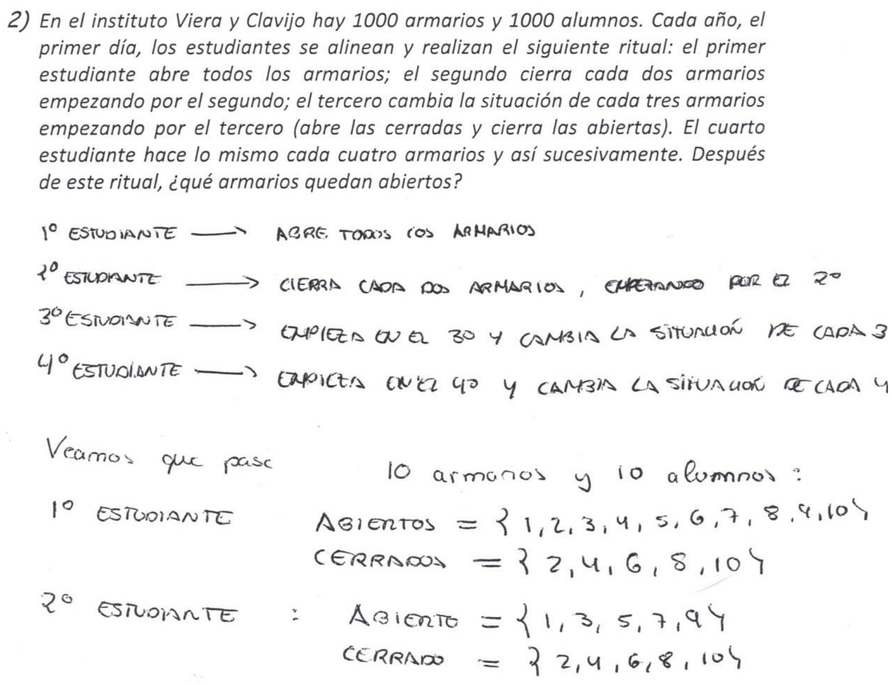
En resumen, el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas, nos permite situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que los alumnos deben identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que ésta sea la respuesta inicial del alumnado, sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar las diferentes situaciones e itinerarios que siguen los alumnos.

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN

Consideramos en primer lugar el problema de "las puertas"; en él encontramos estudiantes que no tienen dificultades para resolverlo, es decir, que no sufren un bloqueo en su resolución y se apoyan en diferentes recursos, y estudiantes que tienen verdaderas dificultades y manifiestan:

> "En este problema me encontré en una fase de bloqueo, ya que no sabía cómo enfrentarme a él. Intenté buscar la solución, simplificando el problema, tomando 10 armarios, pero no llegué a la solución correcta. Creo que la forma en la que pensé en resolverlo inicialmente no fue la más adecuada ya que hacer una simplificación del problema, no nos daban datos lo suficientemente precisos como para llegar a una conjetura, la dificultad en este problema se centra en que teníamos que llegar a varias conjeturas, que en ese momento desconocía por completo el resultado que teníamos que usar para poder llegar a la solución (los únicos números que tienen un número impar de divisores son los números cuadrados)"

Solo es capaz de dar una respuesta como (Figura 1):



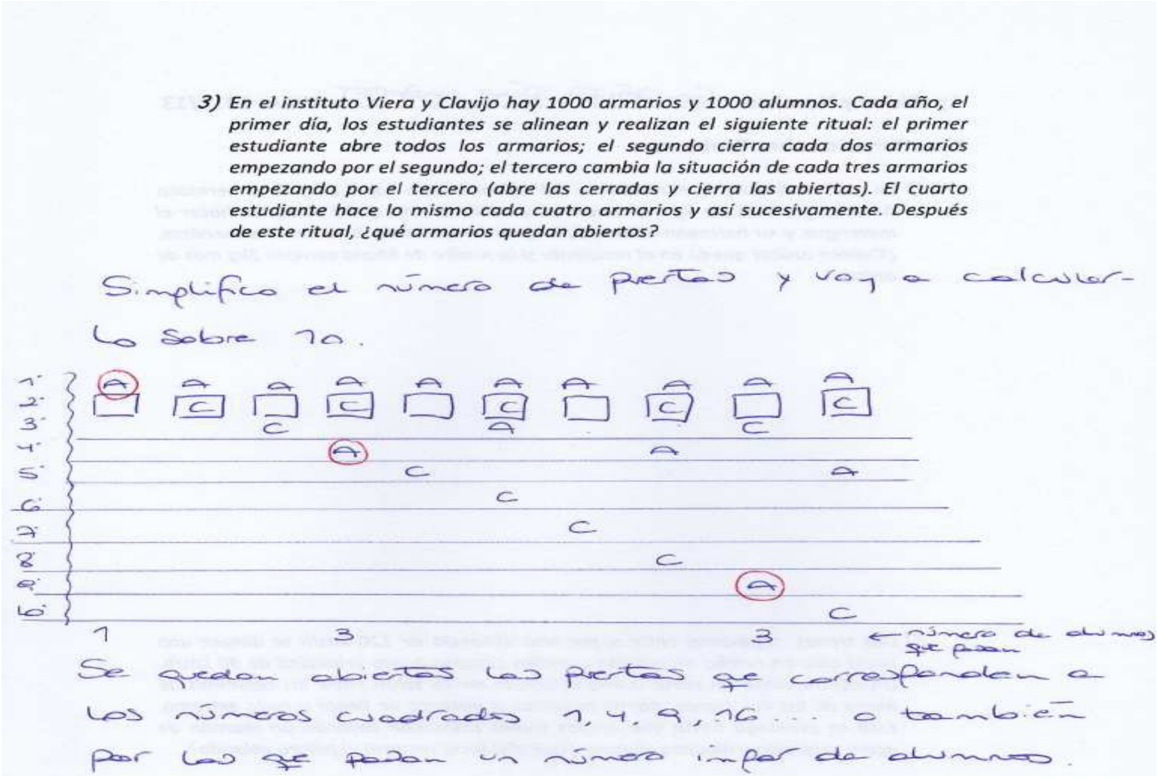
2) En el instituto Viera y Clavijo hay 1000 armarios y 1000 alumnos. Cada año, el primer día, los estudiantes se alinean y realizan el siguiente ritual: el primer estudiante abre todos los armarios; el segundo cierra cada dos armarios empezando por el segundo; el tercero cambia la situación de cada tres armarios empezando por el tercero (abre las cerradas y cierra las abiertas). El cuarto estudiante hace lo mismo cada cuatro armarios y así sucesivamente. Después de este ritual, ¿qué armarios quedan abiertos?

1º ESTUDIANTE ⟶ ABRE TODOS LOS ARMARIOS
2º ESTUDIANTE ⟶ CIERRA CADA DOS ARMARIOS, EMPEZANDO POR EL 2º
3º ESTUDIANTE ⟶ EMPIEZA EN EL 3º Y CAMBIA LA SITUACIÓN DE CADA 3
4º ESTUDIANTE ⟶ EMPIEZA EN EL 4º Y CAMBIA LA SITUACIÓN DE CADA 4

Veamos que pasa 10 armarios y 10 alumnos:
1º ESTUDIANTE ABIERTOS = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
CERRADOS = {2, 4, 6, 8, 10}
2º ESTUDIANTE : ABIERTO = {1, 3, 5, 7, 9}
CERRADO = {2, 4, 6, 8, 10}

Figura 1. Respuesta de un estudiante para profesor de Primaria al problema de "las puertas"

Este es un ejemplo de un estudiante para profesor de Primaria. En el caso de estudiantes de Secundaria encontramos situaciones análogas (Figura 2):



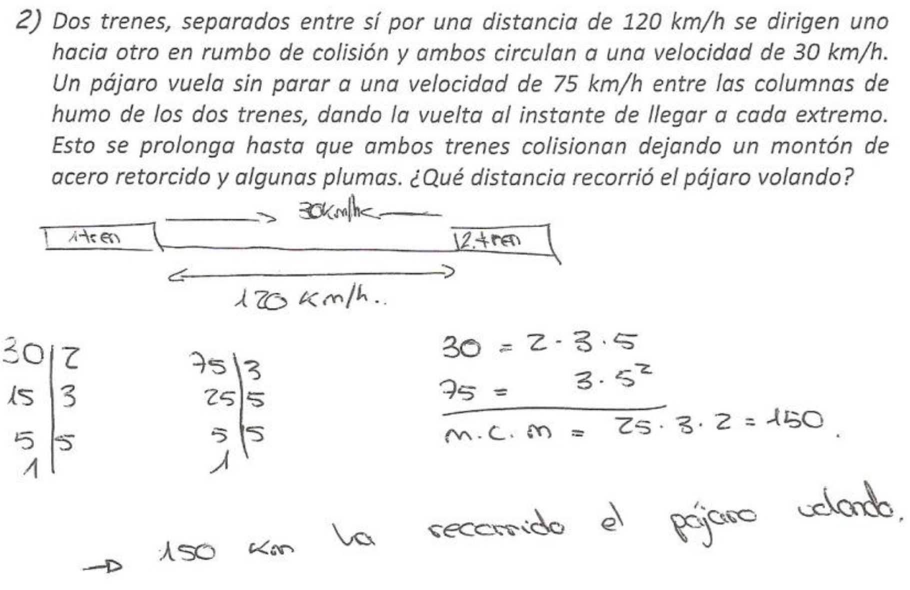
3) En el instituto Viera y Clavijo hay 1000 armarios y 1000 alumnos. Cada año, el primer día, los estudiantes se alinean y realizan el siguiente ritual: el primer estudiante abre todos los armarios; el segundo cierra cada dos armarios empezando por el segundo; el tercero cambia la situación de cada tres armarios empezando por el tercero (abre las cerradas y cierra las abiertas). El cuarto estudiante hace lo mismo cada cuatro armarios y así sucesivamente. Después de este ritual, ¿qué armarios quedan abiertos?

Simplifico el número de puertas y voy a calcular-lo sobre 10.

Se quedan abiertas las puertas que corresponden a los números cuadrados 1, 4, 9, 16 ... o también por los que pasan un número impar de alumnos.

Figura 2. Respuesta de un estudiante para profesor de Secundaria al problema de "las puertas"

En el problema de "los trenes", encontramos diferentes formas de resolver el problema que van desde la que muestra la figura 3 hasta situaciones como la que muestra la figura 4:



2) Dos trenes, separados entre sí por una distancia de 120 km/h se dirigen uno hacia otro en rumbo de colisión y ambos circulan a una velocidad de 30 km/h. Un pájaro vuela sin parar a una velocidad de 75 km/h entre las columnas de humo de los dos trenes, dando la vuelta al instante de llegar a cada extremo. Esto se prolonga hasta que ambos trenes colisionan dejando un montón de acero retorcido y algunas plumas. ¿Qué distancia recorrió el pájaro volando?

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$75 = 3 \cdot 5^2$

$m.c.m = 25 \cdot 3 \cdot 2 = 150$.

→ 150 km ha recorrido el pájaro volando.

Figura 3. Respuesta de un estudiante para profesor de Primaria al problema de "los trenes"

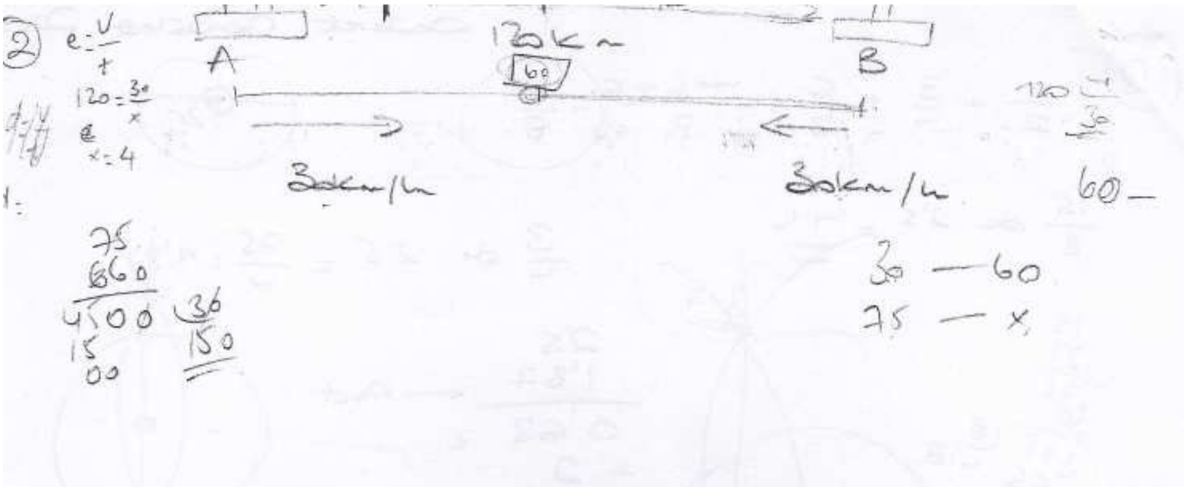
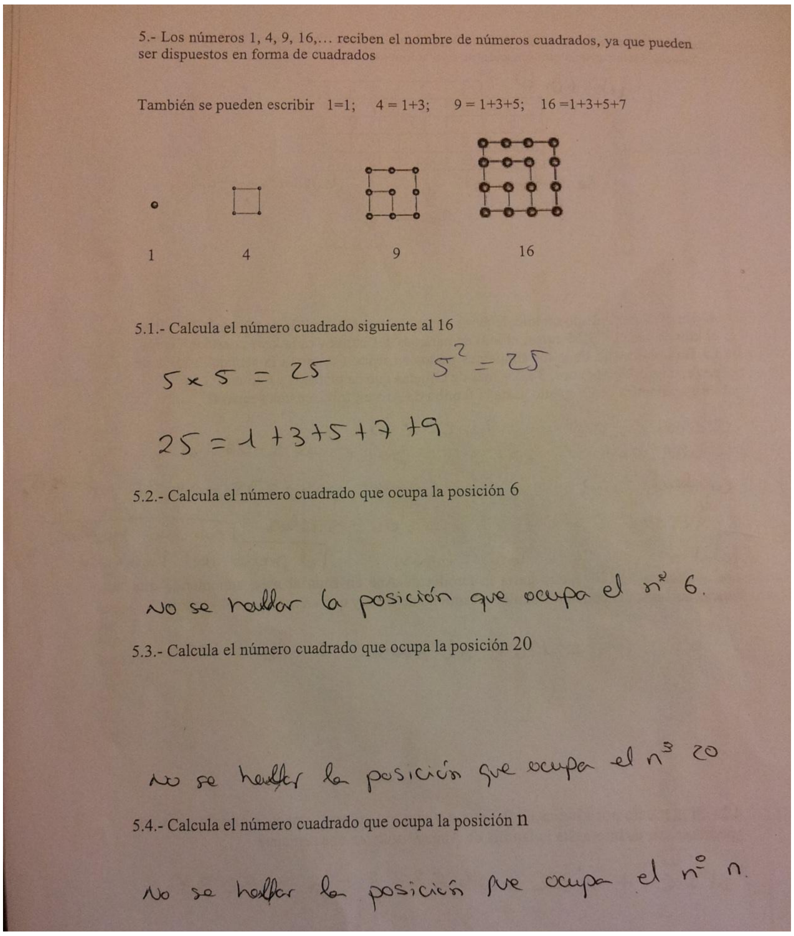


Figura 4. Respuesta de un estudiante para profesor de Secundaria al problema de "los trenes"

En el problema "números cuadrados", volvemos a encontrar situaciones de bloqueo, como las dadas por las figuras 5 y 6:



5.- Los números 1, 4, 9, 16,… reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados

También se pueden escribir 1=1; 4 = 1+3; 9 = 1+3+5; 16 =1+3+5+7

1 4 9 16

5.1.- Calcula el número cuadrado siguiente al 16

5 x 5 = 25 $5^2 = 25$

25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9

5.2.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6

No se hallar la posición que ocupa el nº 6.

5.3.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 20

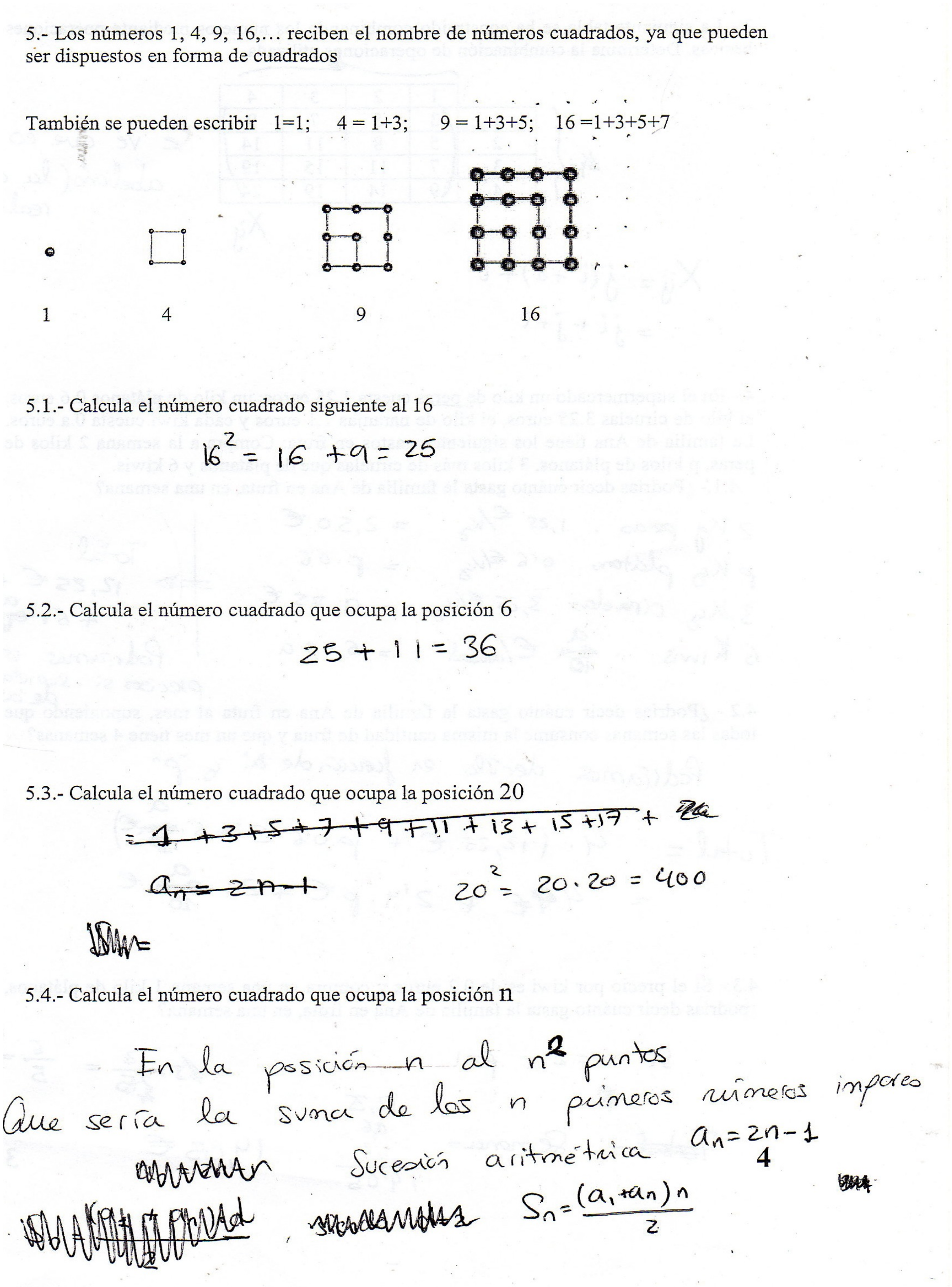
No se hallar la posición que ocupa el nº 20

5.4.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición n

No se hallar la posición que ocupa el nº n.

Figura 5. Respuesta de un estudiante para profesor de Primaria al problema "números cuadrados"

Hasta alumnos que responden correctamente con una variedad de razonamientos aplicados, llegando a una solución válida. Los alumnos utilizan diferentes tipos de conocimientos aunque predominen los operacionales, también identifican estructuras y desarrollan procesos como la sustitución formal, la generalización y la modelización



5.- Los números 1, 4, 9, 16,… reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados

También se pueden escribir 1=1; 4 = 1+3; 9 = 1+3+5; 16 =1+3+5+7

1 4 9 16

5.1.- Calcula el número cuadrado siguiente al 16

$16^2 = 16 + 9 = 25$

5.2.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6

$25 + 11 = 36$

5.3.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 20

~~= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17~~ +

~~$a_n = 2n - 1$~~ $20^2 = 20 \cdot 20 = 400$

5.4.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición n

En la posición n al n^2 puntos

Que sería la suma de los n primeros números impares

Sucesión aritmética $a_n = 2n - 1$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}$

Figura 5. Respuesta de un estudiante para profesor de Secundaria al problema “números cuadrados”

Unos estudiantes pasan por la fase de bloqueo que no llegan a superar:

> “Me bloqueé en el momento de saber si los cálculos los tenía que hacer sobre el total o sobre el restante.”
>
> “Mis dudas surgieron a la hora de calcular porque, a pesar de que lo representé, no sabía qué operaciones eran las adecuadas.”
>
> “Fue difícil comprender el problema por cómo estaba redactado, estaba un poco enrollado.”
>
> “Sabía que consistía en hallar una fórmula, pero no sabía cómo. Me bloqueé en ese momento.”
>
> “Me bloqueo a la hora de sacar la generalización, pues no veo ninguna relación.
>
> “Pensaba que era un típico problema de ecuaciones, pero me doy cuenta que no tengo datos suficientes para resolverlo de esa manera, así que me bloqueo y no puedo continuar.”

Algunos identifican, para este tipo de problemas, que sus recursos le permiten seguir con la exploración del mismo, a pesar de haberse bloqueado. Buscan la manera de resolverlo utilizando diferentes heurísticos, e intentan llegar una solución y aunque no los resuelven todos correctamente, no dejan ninguno en blanco

En general el origen de las dificultades depende del problema, unas veces está asociado a la complejidad de los objetos matemáticos implicados en el problema, y manifiestan que han tenido que releerlo varias veces e irlo desglosando en partes.

Encuentran dificultades vinculadas con la afectividad y las emociones, por ejemplo, en los problemas de móviles que siempre han rechazado, por el proceso de pensamiento que generan y se pierden en el razonamiento. También en determinar el orden en que hay que realizar las operaciones, siendo incapaces de seguir un pensamiento lógico. Algunas veces tienen dificultad para identificar con claridad lo que le piden o para aplicar la heurística, aunque en general utilizan razonamientos heurísticos como "ensayo-error", parece predominar "la analogía", afirman "*recordé otros ejercicios de ese tipo que había hecho*".

La simplificación y la construcción de un modelo son también otros tipos de razonamiento heurístico presentes en diversos estudiantes, ya que representan la situación para facilitar, de manera visual, la organización de los datos y la comprensión del problema. Por ejemplo la referencia al problema de las puertas es muy común: "*Replanteé el problema con menos puertas, con 100 en vez de con 1000 para ver si así descubría la secuencia. Además construí un modelo para ver si eso me ayudaba a comprender el problema. No dibujé 1000 puertas, sino que simplifiqué y dibujé 100 y las fui tachando según se abrían o cerraban. Mi objetivo en este problema era buscar regularidades para luego generalizar, pero no lo conseguí".*

En resumen, del análisis de la resolución de estos problemas y de los informes elaborados por los estudiantes, encontramos que los alumnos presentan diferentes tipos de dificultades. Unas relacionadas con los **Conocimientos lingüísticos**, asociados a la falta de comprensión del texto; **Conocimientos semánticos**, no saber el significado de las palabras; **Conocimientos de la estructura del problema** o conocimiento esquemático, que implica la comprensión global del texto y el conocimiento de los distintos tipos de problemas; **Conocimientos del lenguaje o de las representaciones** que pueden utilizar para resolver el problema; **Conocimientos de los razonamientos**, las estrategias generales, los heurísticos en los que se pueden apoyar; **Conocimiento de las operaciones** (operaciones, algoritmos y técnicas); **Conocimiento de las estructuras** (definiciones, propiedades y estructuras); y, **Conocimiento de los procesos** (sustitución formal, generalización y modelización).

Referencias

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Palarea, M. M., Hernández, J. y Socas, M. M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En Socas, Camacho y Morales (Eds*.), Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 213-226. CAMPUS. La Laguna.

Santos-Trigo, M., & Moreno-Armella, L. (Eds.) (2013). International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast,* 10, 1 y 2.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 17(1), 4-14.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, 125-154). En L. Rico et al. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, *19-52.*

Socas, M. M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X, 9-43.*

Socas, M. M., & Hernández, J. (2013). Mathematical Problem Solving in Training Elementary Teachers from a Semiotic Logical Approach. *The Mathematics Enthusiast,* 10, 1 y 2, 191-218.

Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M., Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía XII, 101-119.*

Törner, G., Schoenfeld, A. H., & Reiss, K. (Eds.) (2008). Problem solving around the world – Summing up the state of the art. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*.

[1] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: “Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación” (EDU2011-29324).