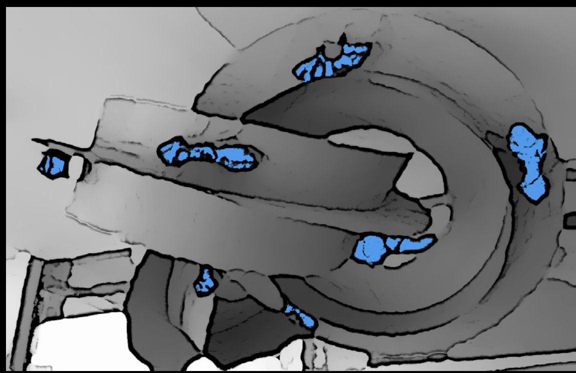


Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática

2012

Editores:

David Arnau

José Luis Lupiáñez

Alexander Maz

ISBN: 978-84-695-6765-4

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

Arnau, D., Lupiáñez, J. L., y Maz, A. (Eds.). (2012). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

Editores:
David Arnau
José Luis Lupiáñez
Alexander Maz

Edita:
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

Valencia, 2012.

ISBN: 978-84-695-6765-4

ÍNDICE

EL ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO EN EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO (ELOS). APLICACIONES A LA INVESTIGACIÓN Y AL DESARROLLO CURRICULAR EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[1]

Martín Socas

Universidad de La Laguna

Resumen

En esta ponencia se analiza la cultura matemática, entendida como un proceso de culturización matemática, y se distinguen y analizan los tres aspectos esenciales que la caracterizan como disciplina científica: el campo conceptual, la fenomenología y la funcionalidad. Se estructura el Análisis del Contenido Matemático desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), a partir de la organización de los objetos de la Matemática en campos conceptuales y de los estadios de desarrollo de los mismos. Y se describe la Competencia Matemática Formal (CMF) para los tres campos conceptuales: numérico (aritmético), algebraico y analítico desde la perspectiva disciplinar, tomando como ejemplo el campo conceptual algebraico.

Palabras clave: *Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), Cultura Matemática, Contenido Matemático, Competencia Matemática Formal (CMF).*

Abstract

This communication discusses mathematical culture, which is understood as a process of mathematical education where the three key aspects of concept, phenomenology and functionality. The Analysis of the Mathematical Content is structured from the perspective of Semiotic Logical Approach (ELOS) from the organization of the objects of the Mathematical one in conceptual fields and the stages of development of the same ones. Formal Mathematics Competence (CMF) is described for the three conceptual fields: numerical (arithmetic), algebraic and analytical, from the disciplinary perspective, using the algebraic conceptual field as an example.

Keywords: *Semiotic Logical Approach (ELOS), Mathematical Culture, Mathematical Content, Formal Mathematics Competence (CMF).*

En este trabajo se describe el Análisis del Contenido Matemático desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), a partir de la organización de los objetos de la Matemática en campos conceptuales y de los estadios de desarrollo de los mismos. Se considera la cultura matemática como un proceso de culturización matemática, y se distinguen y analizan los tres aspectos esenciales que la caracterizan como disciplina científica: el campo conceptual, la fenomenología y la funcionalidad, que deben ser

[1] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante los Proyectos: "Competencia matemática, resolución de problemas y tecnología en educación matemática" (EDU2008-05254) y "Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, de Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación" (EDU2011-29324).

Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura en el Sistema Educativo.

La Competencia Matemática Formal (CMF) es considerada como un referente fundamental del análisis del contenido, y se describe para los tres campos conceptuales: numérico, algebraico y analítico, desde la perspectiva disciplinar, tomando como ejemplo el campo conceptual algebraico.

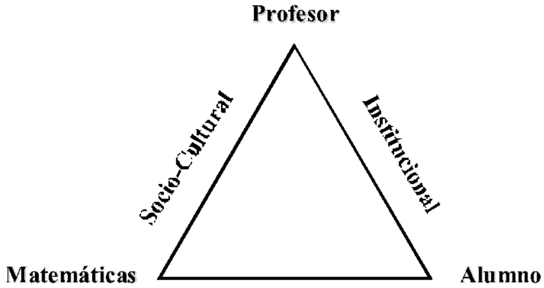
Se muestran, finalmente, diferentes usos del análisis del contenido en trabajos de investigación y de desarrollo curricular.

Se estructura este documento en los siguientes apartados: breves referencias al Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), la complejidad de los objetos y las especificidades de los procesos de Pensamiento Matemático, la Competencia Matemática Formal, el análisis del contenido matemático en la investigación, el análisis del contenido matemático en el desarrollo curricular, para concluir con unas consideraciones finales sobre la planificación y gestión de la investigación en ELOS.

Breves Referencias al Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiosis).

Se sitúa en el Sistema Educativo y describe en los términos anteriores, el Microsistema Educativo, como el ámbito en el que tiene lugar las enseñanzas regladas del conocimiento matemático, y que está formado por tres referentes o elementos básicos: Disciplina (Matemática), Alumnos y Profesores, y por tres componentes: la Social, la Cultural y la Institución Escolar, que determinan el contexto. Es decir, toma como referentes los tres elementos del llamado triángulo didáctico: conocimiento matemático, alumnos y profesores y establece, mediante un modelo de competencia o semiosis, las diferentes relaciones entre estos tres elementos, que tienen lugar en un contexto determinado por las tres componentes: Social, Cultural e Institucional, que en ELOS se expresa mediante la siguiente figura:



Semiosis Microsistema Educativo

Tres son las relaciones esenciales de toda semiosis o modelo de competencia. En el caso del Microsistema Educativo se describen como:

Relación 1: Entre el conocimiento matemático y el alumno, que se denomina: "Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual".

Relación 2: Entre el conocimiento matemático y el profesor, que se denomina: "Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar".

Relación 3: Entre el conocimiento matemático y el profesor a través del alumno, que denomina: "Interacciones".

De esta forma, los tres elementos y las tres relaciones esenciales contextualizadas en las componentes del contexto determinan, para ELOS, la naturaleza y los fenómenos que se dan en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas en los sistemas reglados. Es en este marco en el que se estudia y se desarrollan instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo. Entre estas situaciones problemáticas tenemos el estudio de la relación 1, en la que destaca como prioritario el análisis de las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático.

En este sentido en ELOS se toma como referencia uno de los grandes problemas de la Educación Matemática, que Freudhental (1981), a partir de plantearse las dificultades de Juanito para aprender la Aritmética, describe así:

Diagnóstico y remedio son términos de la medicina adoptados por los educadores que pretenden emular a los doctores en medicina. Lo que emulan es la medicina del pasado, la de los cuáqueros de la actualidad. La diagnosis médica estaba orientada a identificar lo que estaba dañado, como lo hacen los llamados exámenes de diagnóstico en educación. La verdadera diagnosis indica por qué algo se dañó. La única forma de determinar esto consiste en la observación de los errores de un niño tratando de entenderlos.

Los estudios sobre dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas (Rico, 1995; Socas, 1997), ponen de manifiesto, que los errores que cometen los alumnos no se deben al azar, y que tienen procedencias diversas. No obstante, los resultados de las investigaciones muestran dos carencias básicas: no ofrecen una perspectiva de generalidad y no determinan el origen de los errores ni a nivel general ni a nivel individual.

En Socas (1997) se establecen cinco procedencias diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático y éstas están relacionadas con*: la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos,* y *las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.*

ELOS para el estudio del problema didáctico sobre las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas escolares, toma en consideración y organiza los cinco ámbitos anteriores en los que emergen las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas. En este sentido, la organización de los dos primeros: *la complejidad de los objetos de las Matemáticas y las especificidades de los procesos de pensamiento matemático*, es lo que caracteriza el **Análisis del Contenido Matemático**.

La Complejidad de los Objetos y las Especificidades de los Procesos de Pensamiento en Matemáticas

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos (Socas, 1997).

Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Entre ellos sobresalen dos, los conflictos que surgen de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos y los signos propios de las Matemáticas que difieren de la lengua común, y que son fuente de confusión en muchos alumnos; por ejemplo, su sintaxis -reglas formales de las operaciones- puede algunas veces entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Es decir, el lenguaje de las Matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico -los signos son dados con un significado claro y preciso-, y el nivel sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-. Es decir, los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, en el que los objetos son vistos como un procedimiento; y el estatus conceptual, de carácter estático, en el que los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos integrantes de los objetos de la Matemática que le confieren un enorme grado de complejidad.

Esta dualidad conceptual-procedimental pertenece a lo que denominamos la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, y debe ser entendida en el marco del desarrollo de los mismos en diferentes etapas, que en el caso de ELOS se caracterizan como estadios de desarrollo y se denominan: semiótico, estructural y autónomo.

En el estadio Semiótico el objeto y los signos matemáticos nuevos emergen y son caracterizados por objetos y signos antiguos ya conocidos. En el estadio Estructural, el objeto y los signos nuevos se estructuran según la organización de los objetos y signos matemáticos antiguos, es decir, los objetos y signos matemáticos antiguos organizan la estructura y los signos del objeto nuevo. En el estadio Autónomo, el objeto y los signos actúan con significados propios, independientemente del sistema de objetos y signos anteriores, es el estadio autónomo del sistema nuevo.

Este es el proceso de generalización de las Matemáticas y es una característica de la misma, como parte inherente del desarrollo de los objetos matemáticos y sus signos. Es, por tanto, el sistema nuevo (objetos y signos) una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema antiguo.

Son estos aspectos los que ponen de manifiesto la complejidad de los objetos matemáticos y la naturaleza abstracta de la Matemática que generan procesos de pensamiento matemático en los que se dan rupturas y que son especificidades propias de estos procesos.

En general, los modos de pensamiento provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo. Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, desde los primeros años en los que comenzamos la enseñanza de las Matemáticas, así de esta manera los procesos aditivos crean dificultades a los procesos multiplicativo y lineal y éste, a su vez, crea dificultades a otros procesos.

Por ejemplo, en relación con los procesos aditivos, en el estadio semiótico, escuela primaria, la multiplicación se genera como una adición que se repite

$$a + \ldots^{(n)} \ldots + a = na \qquad \text{(estadio semiótico)}$$

Sin embargo esta adición no puede dar sentido a la multiplicación con otros números (enteros negativos o racionales).

Como hemos señalado la organización de los objetos y las especificidades del pensamiento Matemático que caracterizan el Análisis del contenido Matemático se organiza en ELOS mediante los dos referentes siguientes: La Competencia Matemática Formal (CMF) y Los Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM), que pasamos a describir, especialmente el primero.

La Competencia Matemática Formal (CMF)

A efectos de establecer el modelo de Competencia Matemática Formal para los campos numérico, algebraico y analítico, analizaremos, brevemente, la naturaleza de los objetos de la Matemática y su relación con los sistemas de signos de la Matemática.

En relación con la naturaleza de los objetos de la Matemática tomamos en consideración diferentes aspectos que los caracterizan, de manera que, estos aspectos esenciales de los objetos en la Disciplina Matemática, los expresaremos de forma más concreta y relacionada, en un modelo que denominaremos Competencia Matemática Formal (CMF). En este proceso de caracterización de los objetos matemáticos, nos referimos a la naturaleza de los mismos, diferenciando al objeto y a las formas de representarlos. Por ello, expresaremos, en primer lugar, diferentes cuestiones relevantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático, para analizar después el papel que atribuimos a los objetos matemáticos y a los sistemas de signos matemáticos.

Las características más sobresalientes de las Matemáticas pueden ser abordadas, en la actualidad, desde dos grandes posiciones que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático durante las distintas épocas: la prescriptiva (o normativa) y la descriptiva (o naturalista), la primera procede de una posición absolutista de la Matemática y la segunda de una posición relativista, que analiza el conocimiento matemático desde la práctica matemática y sus aspectos sociales. Del análisis de los aspectos de racionalidad que subyacen en la actividad matemática en las dos grandes perspectivas adoptadas, se pueden distinguir, en la primera, que concibe la racionalidad matemática como una propiedad de los sistemas formales, y en la segunda, que la entiende como una propiedad de la empresa humana, que abre el horizonte de una racionalidad fuera de los ámbitos de la lógica formal y sustentada en la actividad de los matemáticos, en la historia y en el contexto socio-cultural. De ellas, no obstante, se pueden extraer tres aspectos esenciales que caracterizan la Matemática y que deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza/aprendizaje de la misma:

- La Matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado (campos conceptuales) y socialmente compartido. Esta organización lógica de los conceptos, propiedades, teoremas..., explica un gran número de dificultades y obstáculos en el aprendizaje.
- La Matemática es una actividad de resolución de problemas socialmente compartida. Problemas que pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. La respuesta a estos dos tipos de problemas

explican la evolución y desarrollo progresivo de los objetos matemáticos (conceptos, teorías...). La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que ocasiona dificultades en el aprendizaje de la Matemática.

- La Matemática es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje, tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje.

Debemos tener en cuenta que los objetos del conocimiento (saber) matemático como parte del conocimiento (saber) humano han sido considerados, como un conocimiento subjetivo, y como un conocimiento objetivo. Hemos de señalar que el sentido subjetivo ha predominado en la Didáctica de la Matemática. Es común que se consideren, en general, los objetos mentales y los objetos de la Matemática sin hacer distinción aparente entre ellos, y en situaciones particulares se pase a distinguirlos sin encontrar criterios claros para esa diferenciación. Es decir, practicamos una dualidad confusa: objetivo/subjetivo, en relación con los objetos de la Matemática en la Cultura Matemática y en el Sistema Educativo.

Análogamente, al pensar en los objetos de la Matemática, podemos situarnos en dos polos opuestos: considerar el lenguaje en un nivel secundario en relación con los objetos o pensar que la objetividad de la Matemática está inseparablemente unida a su formulación lingüística: “la Matemática no es más que un juego del lenguaje formal”. Entre estas dos posiciones, sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente, parece razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974), no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestras construcciones.

La Matemática es comprensible si se considera encuadrada en el contexto de una cultura. En este sentido, la Matemática tiene objetos y sus enunciados tienen significados que deben buscarse en la comprensión compartida de los seres humanos de una determinada cultura. También, la enseñanza de la Matemática forma parte del sistema educativo obligatorio de cualquier país, y es el encargado de transmitir la herencia cultural básica de cada sociedad. Al ser la Matemática una disciplina del currículo, éste no puede ser ajeno o contrapuesto a los valores de esa cultura y sociedad.

Podemos, entonces, diferenciar dos procesos en relación con la Matemática, el de “Culturización Matemática”, entendido como el de construcción o descubrimiento de los objetos matemáticos que dan origen al saber matemático sabio o disciplinar; y el de “Matematización de la Cultura”, entendido como el de enseñanza-aprendizaje que se debe generar al situar la Matemática como un conocimiento cultural para todos los ciudadanos, al menos hasta los dieciséis años, y que se caracteriza por el saber matemático que debemos enseñar. En el primer caso nos referimos a una conciencia colectiva y en el segundo caso a una conciencia individual.

Estas reflexiones nos llevan a diferenciar los objetos matemáticos en uno u otro proceso. De tal manera que la “Culturización Matemática” es considerada como la génesis de un proceso selectivo en el que ciertamente individuos privilegiados generan este proceso, y en el que los objetos terminan por pertenecer a una conciencia colectiva (sentido histórico), mientras que los objetos matemáticos de la “Matematización de la Cultura” (saber a enseñar), están en un proceso que no es selectivo, sino que es para todos y cada uno de los individuos (sentido didáctico).

En relación con los objetos matemáticos y los sistema de signos matemáticos partimos de que la cultura matemática, es considerada como un proceso de culturización matemática, en el que se distinguen tres aspectos esenciales de la misma, que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la misma en los sistemas escolares.

Estas perspectivas de la Matemática nos obligan, desde el punto de vista del aprendizaje, a considerar de manera general, la naturaleza de los entes matemáticos, diferenciando el "objeto" y las formas de "representarlos". Por ello, describimos el papel que atribuimos a los "objetos matemáticos" y a los "sistemas de signos matemáticos".

La Didáctica de la Matemática plantea la problemática de encontrar relaciones entre los objetos del conocimiento matemático y las representaciones de ese objeto por el alumno. Esto lleva a determinar a grandes rasgos dos posiciones en relación con los objetos matemáticos.

La objetivista que supone aceptar que los signos matemáticos (ostensibles y observables) dotan a los objetos de una corporeidad que les diferencia de la conciencia mental de esos objetos. Estos supuestos metodológicos suponen aceptar diferencias en la dualidad externo e interno, es decir, postular la existencia de dos mundos, el real, formado por los objetos exteriores al sujeto y el mental, caracterizado por las representaciones internas del sujeto. Éste sería a grandes rasgos el posicionamiento objetivista, que se caracterizaría por un posicionamiento representacionalista; existe un mundo exterior independiente de la conciencia individual, nuestro sistema cognoscitivo interacciona y se desarrolla, aunque sea parcialmente, a partir de ese mundo exterior y el conocimiento de ese mundo exterior pasa por su representación en un sistema de signos y nuestra actuación sobre la base de dichas representaciones.

La subjetivista que englobaría todas las posiciones que ponen en duda el objetivismo representacionalista, supondría a grandes rasgos, negar la existencia de objetos fuera de la conciencia individual, es decir, fuera de toda experiencia individual posible.

Hemos de indicar que tanto la postura objetivista como la subjetivista se interesan por describir los procesos que se dan entre la interacción entre los objetos del conocimiento matemático y los instrumentos cognoscitivos que permiten en el individuo tal incorporación.

En el discurso matemático, por ejemplo, el número 5, el número $\prod$=3,14159…, los números combinatorios, los números amigos, el cuadrado, las funciones trigonométricas, la función Beta, o la distribución de Dirac, designan objetos matemáticos. Cuando los objetos matemáticos se encadenan mediante ciertas relaciones o leyes tenemos las estructuras matemáticas que también pueden ser consideras como objetos. El término objeto matemático connota que el objeto en cuestión tiene alguna clase de existencia. Ahora bien, la noción de existencia no está claramente delimitada y comporta diferentes dificultades lógicas y psicológicas (Davis y Hersh, 1988).

Desde los fundamentos de la Matemática, para la concepción platonista, los objetos matemáticos son reales, y su existencia, un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Por el contrario, para la concepción formalista no hay objetos matemáticos. La Matemática son fórmulas, listas de símbolos que no se refieren a nada, es decir, axiomas, definiciones y teoremas.

La naturaleza de los objetos matemáticos y su representación constituye, sin lugar a dudas, un dominio sumamente complejo. Podemos encontrar, objetos en realidades diferentes, o un mismo objeto, en diferentes estadios de desarrollo, o en diferentes mundos de pensamiento, o en experiencias de naturaleza distinta (Socas, 2010).

Señalamos, en este sentido, que a efectos de organizar la complejidad de los objetos matemáticos podemos distinguir tres escenarios:

Escenario 1: El de la materialidad o corporeidad matemática. Es el escenario de lo observable, lo perceptible, lo susceptible de ser notado. Es también el escenario de lo ostensible, lo susceptible de ser mostrado.

Los objetos matemáticos toman forma y son representados en el dominio del mundo físico, es decir, lo visible del objeto. Su encarnación en un objeto físico (baldosa cuadrada), en una figura: $\square$, o en una fórmula: $x = y^2$, $x, y \in A$ (cuadrado de un anillo, x es el cuadrado de y).

Es el escenario que llamaremos de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos, significando la doble intención de observable (percibido) y ostensible (mostrado).

Escenario 2: Culturización matemática. Es el escenario del conocimiento objetivo de los objetos matemáticos, productos de las interacciones humanas, enmarcadas en la realidad socio cultural, que encuentra lenguajes que posibilitan una potencialidad expresiva cada vez mayor y que facilita una dinámica abstractiva y generalizadora.

Escenario 3: Matematización de la cultura. Es el escenario del conocimiento subjetivo de los objetos matemáticos y, por tanto, de las representaciones mentales de naturaleza individual.

Estos tres escenarios no sólo están íntimamente relacionados, sino que deben ser considerados como un todo holístico en el que sus partes admiten una separación analítica.

También es común hablar del lenguaje matemático, como un sistema de signos matemáticos (SSM) en el que se distinguen dos subconjuntos de signos: “signos artificiales” (propios de la Matemática), y “signos naturales” o de la lengua usual. El lenguaje vernáculo es el instrumento práctico que permite indicar cómo han de utilizarse los signos del lenguaje artificial (De Lorenzo, 1971).

Otros autores como Kieran y Filloy (1989) sugieren sustituir la noción de Sistema de Signos matemáticos por la de Sistema Matemático de Signos (SMS), con su código correspondiente. Esta noción de Sistema Matemático de Signos es lo suficientemente amplia que permite analizar no sólo los textos matemáticos históricos sino también las producciones de los alumnos en clase de Matemáticas. Este punto de vista supone situarse en una semiótica de las Matemáticas centrada en los sistemas de significación y en los procesos de producción de sentido antes que en el estudio de los signos.

De las anteriores consideraciones emerge como esencial la noción de representación semiótica de un objeto matemático. Tomamos, en primer lugar, la posición de Duval (1993), quien caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: “un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable...

2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro en la que ha sido formada...

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...”

Describimos, finalmente, la posición adoptada desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) en los tres aspectos: la cultura matemática, la naturaleza de los objetos matemáticos y el papel del lenguaje matemático en la Matemática.

La cultura Matemática es considerada como una disciplina multiforme, que emerge y se desarrolla como una Actividad Humana de Resolución de Problemas. Los Problemas tienen una característica común “la búsqueda de regularidades o patrones” y el problema Matemático por excelencia es “la modelización”. La Cultura Matemática crea un Sistema de Signos propios para expresar los comportamientos regulares o patrones y este conjunto de regularidades o patrones se organiza en “campos conceptuales”. Los elementos de estos campos conceptuales son los “objetos matemáticos”. Estos objetos se “encarnan”, es decir, se hacen observables y ostensibles mediante el sistema de signos.

Las relaciones entre los objetos del campo conceptual, los signos que los representan y sus significados en la disciplina Matemática se expresan mediante la siguiente SEMIOSIS o Modelo de Competencia que describe la FENOMENOLOGÍA asociada a los objetos matemáticos en relación con los signos y los significados.

La noción de *representación semiótica* queda determinada por los referentes: signo, objeto y significado, y caracterizada como un Signo que:

(1) Tiene ciertos caracteres que le son propios (contexto)

(2) Establece una relación diádica con el significado

(3) Establece una relación triádica con el significado a través del objeto; esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado (Hernández, Noda, Palarea y Socas, 2004, p. 171)

Establecida la naturaleza de los objetos matemáticos y su relación con los sistemas de signos, trataremos de establecer lo que es la Competencia Matemática Formal (CMF), una de las dos componentes del Análisis del Contenido Matemático, y lo haremos para los tres campos conceptuales: Números, Álgebra y Análisis, aunque tomaremos en consideración para el estudio, el Álgebra.

La Competencia Matemática Formal (CMF), toma los objetos de la Matemática considerada como una Disciplina Científica, y muestra la organización formal de estos objetos en su campo conceptual en relación con los conceptos, fenómenos y funciones implicadas. Tiene como punto de partida la organización de los objetos matemáticos en su complejidad y para ello toma las dimensiones conceptual, funcional y fenomenológica de los mismos y éstos se organizan desde la perspectiva lógico semiótica que hemos considerado (Socas, 2001 y 2007).

En el análisis, tomaremos en consideración el campo conceptual algebraico y nos situaremos en el nivel temático de ESO. En consecuencia, es necesario explicitar y relacionar los objetos del campo conceptual algebraico, la funcionalidad del lenguaje algebraico y la fenomenología del conocimiento algebraico.

La caracterización del campo conceptual del Álgebra supone por una parte organizar la complejidad de los objetos del Álgebra y por otra, tomar en consideración los diferentes procesos en los que está presente el conocimiento algebraico. Los objetos matemáticos del Álgebra, como todos los objetos matemáticos, tienen un carácter dual: semántico y sintáctico, que estarán presentes tanto en los fenómenos que organizan como en las funciones que desarrollan. Necesitamos, en consecuencia, caracterizar esta dualidad operacional/conceptual en el Álgebra, es decir, relacionar los signos con los objetos algebraicos y sus significados. Esta dualidad del objeto matemático ha sido utilizada e interpretada por distintos autores Hiebert y Lefevre (1986), Douady (1986), Sfard (1991), Socas (2001),…

En los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), esta dualidad se desarrolla bajo las nociones de conocimiento conceptual y procedimental. El *conocimiento conceptual*, se caracteriza como un conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. El *conocimiento procedimental*, se construye en dos partes: una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las Matemáticas. La otra, consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una que consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos y otra, en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

Estos autores ponen de manifiesto las características diferentes de cada uno de ellos. El conocimiento conceptual indica que es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Mientras el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Establecen los autores relaciones entre ambos conocimientos de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

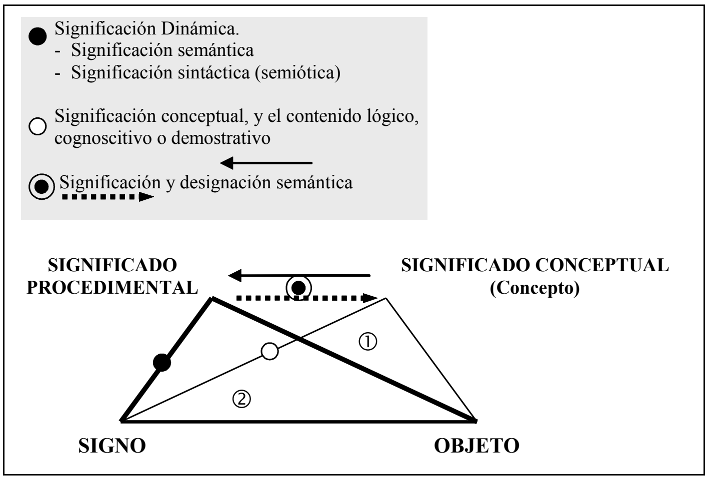
Es ciertamente una forma sencilla de explicitar a nivel conceptual la dualidad operacional/conceptual, es decir, la convivencia de los tipos de conocimiento, conceptual y procedimental, en Matemática.

Socas (2001), analiza la dualidad operacional/conceptual en el marco del enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en términos de la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado. Esquemáticamente se representa así:

SIGNO			OBJETO	SIGNIFICADO (conceptual)	← PLANO DENOTATIVO
SIGNO	OBJETO	SIGNIFICADO (procedimental)			← PLANO CONNOTATIVO

El punto de partida es la posición de Peirce (1987), en la que el signo se presenta como una relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo está relacionado con tres instancias separables analíticamente: Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que le conecta con el objeto), Objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento) e Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta).

La tríada de Peirce se expresa en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) mediante la tríada: signo-objeto-significado. Explicitar las relaciones que se dan en esta triada en los dos planos de la función semiótica, es el objetivo esencial para determinar conceptualmente el papel de los objetos y los signos en el lenguaje algebraico y una forma de expresar la dualidad operacional/conceptual. En ELOS esta dualidad se determina separando el significado en dos: significado conceptual y procedimental, y modelizando tales relaciones mediante el trapecio formado por los dos triángulos, signo-objeto-significado (conceptual) y signo-objeto-significado (procedimental) (Socas, 2001 y 2010), de la siguiente manera:



En este esquema se modelizan las diferentes relaciones que caracterizan la dualidad operacional/conceptual, en las que podemos identificar las descritas en relación al conocimiento conceptual y procedimental desarrollado en Hiebert y Lefevre (1986).

Nos ocupamos ahora de las diferentes funciones del lenguaje algebraico (matemático), y podemos decir que éstas se concretan en las cuatro funciones básicas de los lenguajes: “expresiva” (estado del objeto algebraico que facilita la representación semiótica y que permite la materialización o encarnación del objeto), “señalizadora” (que evoca, desencadena, estimula..., una reacción en el receptor), “descriptiva” y “argumentadora”.

Las dos funciones “expresiva” y “señalizadora” son consideradas como funciones inferiores de todo lenguaje, no así en el lenguaje matemático (algebraico). A la función expresiva se le asocia una “percepción primaria” y a la función señalizadora se le atribuye el poder de desencadenar una “actividad perceptual”. Deben entenderse como procesos complementarios.

Pero el lenguaje algebraico (matemático), al igual que el lenguaje humano, es mucho más rico; posee dos funciones superiores que son de vital importancia para la evolución del razonamiento matemático y para la racionalidad de los objetos matemáticos, éstas son las funciones “descriptiva” y “argumentadora”.

La organización anterior del lenguaje matemático nos ofrece una perspectiva útil para hacer una distribución de los objetos algebraicos. Si consideramos “las situaciones problemáticas” o “fenómenos” de naturaleza didáctico matemático, podemos caracterizar a los fenómenos que tienen lugar con los objetos algebraicos en la actividad matemática mediante tres entidades primarias o básicas que tomaremos como referencia: “Expresiones semióticas”, “Descripciones algebraicas” y “Argumentaciones algebraicas”.

Las “expresiones semióticas”, se refieren a los observables y ostensibles utilizados en la actividad matemática, tales como, términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras..., en general, todas las representaciones externas del objeto algebraico. Las expresiones semióticas asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico.

Las “descripciones algebraicas”, se refieren, a las definiciones, propiedades, características de los objetos algebraicos, y a las relaciones de los objetos entre sí, es decir, conceptos, proposiciones, procesos, algoritmos, operaciones...

Las “argumentaciones algebraicas” son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico.

Ahora bien desde el punto de vista de la Teoría Semiótica tenemos que suponer que una “expresión de signos matemáticos” no designa un objeto matemático del mundo real sino que transmite un contenido de la cultura matemática. En nuestro caso, aunque el significado del objeto algebraico corresponda con un objeto del mundo cultural (culturización matemática), el contenido algebraico se identifica con el referente, es decir, lo identificamos como objeto cultural y no como unidad cultural. Esta es la posición del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001 y 2007).

Finalmente, la fenomenología del conocimiento algebraico, en el nivel temático, este se manifiesta como el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas.

Actualmente encontramos un cierto acuerdo cuando se habla de las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria: “ocuparse del estudio de las "letras" o "variables" y de las propiedades que las relacionan”. Sin embargo, existen diferentes interpretaciones a la afirmación anterior (Socas et al. 1989): álgebra como aritmética generalizada (las letras forman parte de modelos que permiten generalizar las propiedades numéricas), álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos (las ecuaciones), álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y álgebra como modelo estructural.

Posteriormente encontramos una propuesta de organización de los contenidos del Álgebra en la Escuela Secundaria Obligatoria, éstos deben organizarse en torno a la generalización, la resolución de problemas, la modelización y las funciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

La propuesta de organización y fenomenología asociada a los objetos algebraicos, está relacionada con la generalización y la resolución de problemas, en la que destacan:

(1) Capacidades algebraicas que se deben desarrollar: usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones, trabajar y hacer conversiones entre diferentes representaciones semióticas, sustituir formalmente, generalizar y particularizar, hacer transformaciones en expresiones algebraicas, leer, interpretar y hacer transformaciones en funciones y fórmulas dadas, plantear y resolver ecuaciones por métodos algebraicos y otros.

(2) Usar las letras con significados algebraicos en entornos numéricos y de magnitudes (álgebra de las cantidades) y en entornos geométricos (álgebra geométrica).

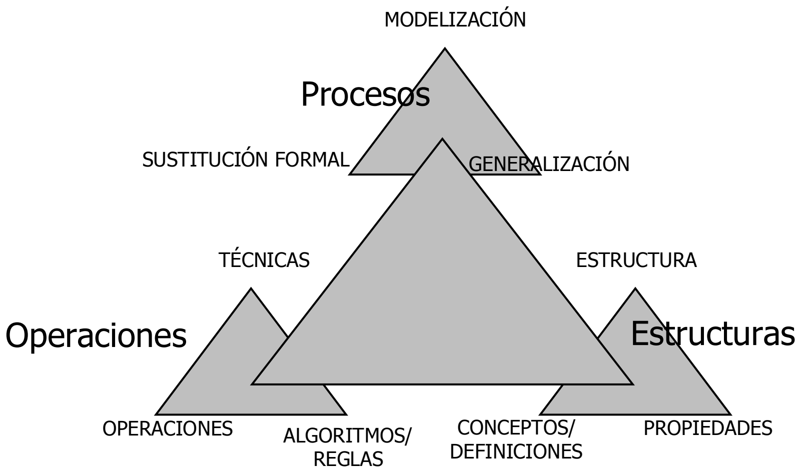
(3) Usar diferentes sistemas de representación semióticos y fuentes de significado: contextual, numérico, visual/geométrico, esquema y formal.

El análisis de los diferentes aspectos del Álgebra: conceptual, funcional y fenomenológico, nos permite describir la Competencia Matemática Formal (CMF) y como ésta se puede expresar como un modelo de competencia organizado en relación a las tres características de la Matemática como disciplina: campo conceptual, resolución de problemas y lenguaje propio, descrito anteriormente como los elementos que caracterizan a la disciplina matemática.

La organización del campo conceptual, en relación con la dualidad de los objetos operacional/conceptual, deriva del análisis anterior en el que se explicitan las diferentes relaciones que se dan en la triada: signo-objeto-significado. De esta manera, se caracterizan: las operaciones, por la semiosis que describe el significado procedimental, las estructuras, por la semiosis que describe el significado conceptual, y los procesos, por las relaciones que tienen lugar entre el significado procedimental y conceptual.

Se caracteriza así, la Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos: numérico, algebraico y analítico, mediante la siguiente semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos, y como contexto: las situaciones problemáticas, el lenguaje (expresivo y descriptivo) y los argumentos.

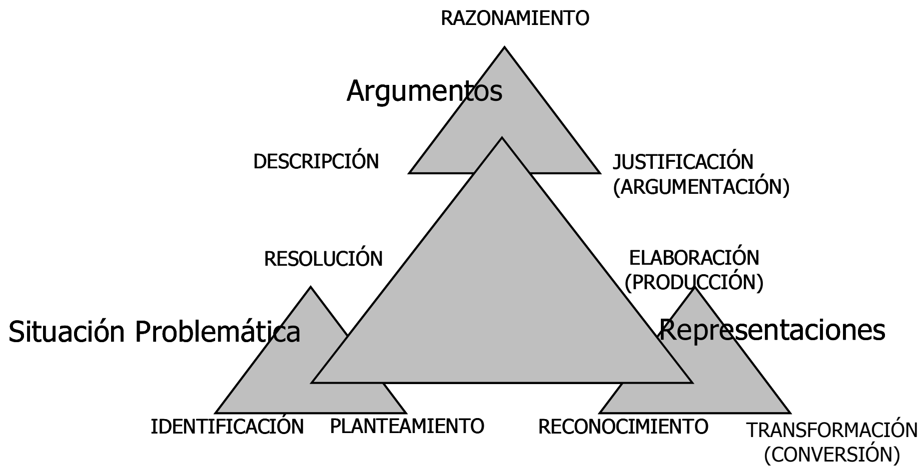
El campo conceptual de forma esquemática quedaría así:



Se expresan los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual desde la perspectiva formal y sus diferentes relaciones, es decir, se describe la dualidad de los objetos matemáticos en relación con el conocimiento matemático conceptual/procedimental del campo tratado. De manera concreta, si nos situamos en una actividad relacionada con el Álgebra de la ESO, ésta puede ser descrita en relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y sus relaciones. Cada componente a su vez, está determinada por otras tres componentes que describen una nueva semiosis. La componente Operaciones queda determinada por la semiosis: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente Estructuras por: conceptos (definiciones), propiedades y estructura; y la componente Procesos por: sustituciones formales, generalización y modelización.

Esta organización de los campos conceptuales numérico, algebraico y analítico está contextualizada en las Situaciones problemáticas que se abordan en el campo conceptual, en el Lenguaje (Representaciones) y Argumentos (Razonamientos) que se utilizan en el desarrollo de la situación problemática.

La contextualización del campo conceptual se expresa de forma esquemática así:



Análogamente, las tres componentes del contexto, quedan determinadas por las respectivas semiosis. En el caso de Situaciones problemáticas: identificación, planteamiento y resolución; en Representaciones (lenguaje): reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción); y en Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

El Análisis del Contenido Matemático en Investigaciones en Didáctica de la Matemática

En las investigaciones en Didáctica de la Matemática utilizamos distintos instrumentos, por ejemplo los cuestionarios, para responder a diferentes preguntas de investigación:

¿Qué tipos de significados y de pensamiento matemático utilizan los alumnos, cuando se enfrentan a situaciones problemáticas numéricas y algebraicas en forma de resolución de ejercicios de cálculo, en argumentaciones sobre la veracidad o falsedad de sentencias, y, en la resolución de situaciones problemáticas en las que intervienen procesos de sustitución formal, generalización o modelización?

Tomamos en consideración el trabajo de Socas, Hernández, Palarea, y Afonso (2009), en los que se utilizan un cuestionario con preguntas en diferentes formatos:

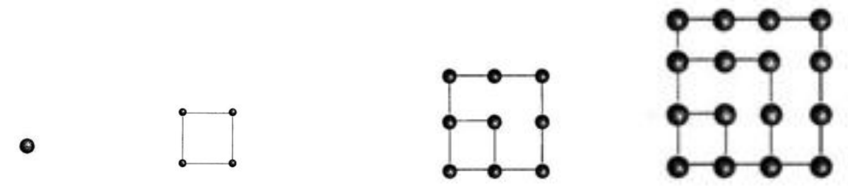
1) Formato de sentencias para decidir la veracidad o no de las mismas, por ejemplo: Indicar si las igualdades siguientes son verdaderas o falsas, explicando la respuesta:

1. $\sqrt{2} = 200/14$
2. $1.3 = \overline{1}2/9$
3. $5/3 = 60/36$
4. $1.3 + \overline{8}.3 = \overline{9}.6$
5. $\sqrt{3} = 300/173$
6. $\sqrt{6} + \sqrt{15} = \sqrt{3}\,(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
7. $-1/2 + 1/3 = -(1/2 - 1/3)$
8. $2.3 + \overline{5}.2 = \overline{7}.5$
9. $3x + 4 + 5x = 12x$
10. $40 + 12\,x = 4\,(3x + 10)$

2) Formato de sentencias incompletas para obtener el segundo miembro de la misma, por ejemplo: Realizar los siguientes cálculos:

1. $2^2 + 3 \cdot 2^2 =$
2. $3 + \sqrt{2} =$
3. $3 + 3\sqrt{2} =$
4. $0.3 + 1/2 + 2 =$
5. $\sqrt{5} - 2 =$
6. $3x + 3 =$
7. $5x + 2 =$
8. $4x - 2 + x =$
9. $3x + 2y - 3 + y =$
10. $x + (2x + y) - 2 =$

3) Cuestiones formuladas en formato de problemas, por ejemplo: Los números 1, 4, 9, 16,… reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados. Se pueden descomponer como sigue: 1=1; 4= 1 + 3; 9= 1 + 3 + 5; 16 = 1 + 3 + 5 + 7



1 4 9 16

V.1. Calcula el número cuadrado siguiente al 16.

V.2. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6.

V.3. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 20.

V.4. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición n.

En estas tareas del cuestionario es necesario, además de confirmar la validez del cuestionario como instrumento de medida, realizar el análisis del contenido matemático implícito en cada una de ellas, a efectos de poder estudiar los diferentes significados que los estudiantes muestran en su resolución.

Veamos cómo se procede, en este caso, desde el Análisis del Contenido que hemos establecido y que nos permite determinar los dominios de la actividad matemática en relación con la Competencia Matemática Formal (CMF), es decir, explicitar los objetos del campo conceptual en términos de las operaciones, estructuras y procesos implicados, así como, el contexto en el que se desarrolla la tarea; y en relación con los Estadios de Desarrollo del Objeto Matemático (EDOM) establecer los estadios de desarrollo: semiótico, estructural o autónomo, en los que se consideran los objetos tratados.

Se puede realizar el análisis del contenido para cada una de las tareas mediante un diagrama de doble entrada:

Estadios de Desarrollo / Dominios de actividad matemática desde la competencia formal	Ámbitos	Semiótico	Estructural	Autónomo
Sistemas de Representación (SR)	- Reconoce - Transforma (Conversión) - Elabora (Produce)			
Situación Problema	- Identifica - Plantea - Resuelve			
Razonamientos	- Describe - Justifica (argumenta) - Razona			
Operaciones	- Operaciones - Algoritmos (Reglas) - Técnicas			
Estructuras	- Conceptos (Definiciones) - Propiedades - Estructuras			
Procesos	- Sustitución Formal - Generalización - Modelización			

Conviene indicar en relación con los Procesos: Sustitución Formal, Generalización y Modelización, que éstos responden a las competencias matemáticas generales de reconocimiento del proceso, formulación del proceso y manipulación (validación) del mismo. Por, ejemplo, en el caso del proceso de generalización éste se organiza en relación con los cuatro pasos o momentos que le caracterizan matemáticamente:

- Reconocimiento de situaciones problemáticas numéricas o geométricas...
- Construcción de tablas u otro tipo de representación
- Explicitación de una expresión o fórmula (reconocimiento de la regla o patrón)

- Verificación de la fórmula con ejemplos

Los estadios de desarrollo de los objetos tratados permiten situar la actividad matemática en el nivel temático considerado, y estos estadios o formas de caracterizar los dominios de la actividad matemática en ELOS son compatibles e identificables con otras formas de caracterizar los dominios de la actividad, por ejemplo en PISA (Rico y Lupiáñez, 2008).

En el caso de la tarea 1, se proponen situaciones problemáticas que se sitúan en el conocimiento estructural, que los estudiantes deben identificar y resolver. Esta tarea consta de ocho sentencias que están en registros numéricos y dos en registros algebraicos, que los alumnos deben reconocer y realizar, si es necesario, transformaciones en ellas, y en las que se solicitan, además, justificaciones argumentadas. Los diez ítems están formulados en el ámbito estructural, y se expresa mediante una igualdad en la que las operaciones y las partes deben ser conocidas, se trata de la utilización del signo igual en “sentido lógico”, que inicialmente se pueden identificar con una estructura, un concepto o una propiedad matemática.

La tarea facilita información sobre el comportamiento de los resolutores y cómo actúan frente a cuestiones que implican la identificación de una estructura o una propiedad. Es decir, el dominio de la actividad matemática, permite estudiar el papel de los diferentes registros en las representaciones utilizadas, en términos de si los reconocen, los transforman o elaboran otros apropiados, y el tipo de argumentos que utilizan para asegurar la veracidad o no de la sentencia, justificando con fundamentos operacionales basados en operaciones o reglas, o con fundamentos estructurales basados en conceptos, propiedades o estructuras.

En el caso de la tarea 2, se proponen situaciones problemáticas que se sitúan en el conocimiento operacional y que los estudiantes también deben identificar y resolver, en la que cinco de las actividades están formuladas en registros numéricos y las otras cinco están expresadas en registros algebraicos. Se trata de una tarea de diez ítems, formulados mediante sentencias incompletas en las que falta el segundo miembro de la igualdad, y en la que se pide que los alumnos realicen determinados cálculos para obtener el segundo miembro de la misma, de manera que ésta sea verdadera, es decir, sea una identidad. Las diez cuestiones que se plantean, tienen inicialmente un sentido operacional, se trata de la utilización del signo igual en “sentido semántico”, que el alumno identifica como una expresión que debe completar, realizando operaciones, aplicando reglas o técnicas de cálculo adecuadas, es decir, se plantea una igualdad en la que el segundo miembro es desconocido.

Esta segunda tarea facilita información sobre el comportamiento de los resolutores y cómo actúan frente a cuestiones que implican la realización de cálculos para completar una igualdad. Permite analizar las necesidades o no de los estudiantes de dar como resultado una cantidad, aunque sea aproximada, en los apartados numéricos y de observar el tipo de objeto matemático asociado a las expresiones numéricas o algebraicas.

En el caso de la tarea 3, se propone una situación problemática que se sitúa en el conocimiento procesual, en la que de nuevo se pide la identificación y resolución del problema, pero ahora se trata de un proceso de generalización, en el que se da, de forma explícita, una descripción organizada de un comportamiento regular, en dos representaciones diferentes, en el que la regla no viene dada de forma explícita. Se trata de establecer una igualdad, en la que alguna operación o alguna parte son desconocidas y están por determinar.

Se sitúa la tarea en el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, que en este caso, se concretan en los cuatro momentos que caracterizan el proceso de generalización.

La tarea se organiza, en diferentes apartados, en la que se pide determinar otros números cuadrados más o menos cercanos a los que se facilitan, en uno de los dos registros, para terminar expresando el número cuadrado en la posición "n".

En resumen, el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas, nos permite situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que los alumnos deben identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que ésta sea la respuesta inicial del alumnado, sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar los diferentes itinerarios que siguen los alumnos.

Finalizaremos, referenciando algunos ejemplos de investigaciones que utilizan los Modelos que derivan del Análisis de Contenido y de la Competencia Cognitiva (CC) de ELOS como marco teórico o como componentes del marco conceptual.

En el ámbito del Pensamiento Algebraico destacamos los trabajos sobre "Competencias y errores de alumnos de Secundaria en los procesos de Sustitución Formal, generalización y Modelización" (Ruano y Socas, 2001; Ruano, Socas, y Palarea, 2003; Ruano, 2012).

En el ámbito del Pensamiento Numérico destacamos los trabajos sobre "El sistema numérico D en la formación de maestros" (Moreno, Hernández y Socas, 2007; Moreno, Hernández y Socas, 2010 y Moreno, 2012).

En el ámbito del pensamiento Analítico, en Pecharromán (2008), encontramos un buen ejemplo de una investigación sobre el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas, con alumnos del 2º Ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, en el que el estudio cognitivo sobre las dificultades y errores asociadas a la complejidad de los objetos y a los procesos de pensamiento matemático implicados, se desarrolla en el marco de una "investigación de diseño", guiada por la conjetura : "los alumnos tienen serias dificultades en la interpretación de las propiedades globales de las funciones cuando éstas aparecen representadas gráficamente, tanto por su identificación sobre la gráfica de la función, como por su referencia en el diagrama cartesiano que contiene a la función, (mediante puntos del plano o intervalos de la recta)" , en la que la organización del contenido de enseñanza se realiza mediante los estadios de desarrollo de los objetos implicados. Por ejemplo, para el estudio de la concavidad y convexidad, este se organiza en un primer momento, de la siguiente manera:

- El estadio semiótico: El conocimiento nuevo sería el estudio de la concavidad y convexidad de una gráfica funcional definida en función de la posición relativa de la recta secante respecto de la gráfica (la secante que une los extremos de la gráfica en un intervalo).

- En el estadio estructural: El crecimiento y decrecimiento funcional organiza la convexidad y la concavidad (los valores de la función crecen más deprisa o más despacio al crecer los valores de la variable).

- En el estadio autónomo: Se considera en la definición del concepto, el segmento que une los puntos de la gráfica y se considera la posición de ésta respecto de la de aquel. Si está por debajo es convexa y si está por encima es cóncava.

El Análisis del Contenido Matemático en el Desarrollo Curricular

La segunda de las relaciones esenciales que emergen en el Enfoque Lógico Semiótico, al describir el microsistema educativo (Socas, 2001 y 2007), es como hemos indicado: "adaptación del contenido matemático curricular como materia para enseñar". Es en esta adaptación del contenido matemático curricular como materia para enseñar en la que juega un papel fundamental el análisis del contenido descrito anteriormente.

Esta organización del contenido matemático para enseñarlo es una competencia profesional que se requiere para abordar el problema de la planificación de la enseñanza de la Matemática. Ahora bien, el contenido matemático, es un espacio de conocimiento o entorno, que tiene diferentes ámbitos. Si tomamos como referencia la Transposición Didáctica, éstos son: "contenido matemático de la investigación", "contenido matemático disciplinar", "contenido matemático curricular deseado", "contenido matemático curricular enseñado" y "contenido matemático curricular aprendido". Desde la perspectiva del profesor de matemáticas, tres son los ámbitos específicos que necesita identificar, analizar, comprender y planificar. Podemos representarlos mediante la siguiente semiosis:

ÁMBITOS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

En esta semiosis tenemos como primer ámbito que el profesor necesita organizar el contenido matemático curricular (cmc), contenido matemático deseado que es definible en el dominio del contenido matemático disciplinar, aunque no es organizado bajo esa lógica. Mediante mecanismos y organizaciones precisas se extraen del contenido disciplinar y se sitúan en el currículo. Realizadas estas acciones por diferentes elementos del Sistema Educativo, el contenido matemático curricular es intrínsecamente diferente del saber disciplinar, al menos en su aspecto epistemológico, y admite interpretaciones desde diferentes perspectivas, por ejemplo funcional, como parte de una cultura básica común (Rico y Lupiáñez, 2008); el segundo ámbito es el que deriva de la propia disciplina, el saber matemático erudito, que podemos denominar contenido matemático disciplinar (cmd) o formal (Socas, 2010); y el tercer ámbito, es el contenido matemático para la enseñanza (cme), que comprende tanto el contenido matemático enseñado como el evaluado (Hernández y otros, 2010).

El análisis del contenido propuesto permite, mediante la Competencia Matemática Formal, organizar los contenidos matemáticos curriculares en un Mapa, que presenta estos contenidos organizados en el campo conceptual tratado, en un primer momento, para luego completar el Mapa con el contexto en que se desarrollan los objetos matemáticos del campo conceptual en el nivel temático considerado (Socas, 2010).

Podemos, igualmente, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la competencia matemática formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan a los alumnos, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria.

Consideraciones Finales

En este trabajo hemos caracterizado el Análisis del Contenido Matemático mediante dos componentes: la Competencia Matemática Formal (CMF) y los Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM), desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Se ha realizado a partir de la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones, identificados como objetos que se organizan en campos conceptuales, que tienen una funcionalidad y fenomenología concreta, estableciendo así, la Competencia Matemática Formal, es decir, desde el punto de vista de la Disciplina, para los campos numérico, algebraico y analítico. Y hemos mostrado su uso en la Investigación y en el Desarrollo Curricular.

Finalizamos este trabajo, dando algunas referencias de cómo se planifica y gestiona la investigación en ELOS a efecto de aportar soluciones al problema inicialmente planteado, de estudiar las dificultades, obstáculos y errores de Juanito en la Aritmética, y demás situaciones problemáticas que emergen de las tres relaciones que se dan en el microsistema educativo en relación con las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en el sistema reglado de enseñanza. En este sentido, ELOS organiza tres modelos de competencia (semiosis): Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (CC) y Competencia de Enseñanza (CE), que conforman los referentes que describe la Semiosis General que planifica y gestiona la investigación en el microsistema educativo.

Resumidamente, el modelo de Competencia Cognitivo**,** es el segundo referente de la semiosis, y toma en consideración los aspectos anteriores (modelo de competencia matemática formal, primer referente de la semiosis), se refiere a las funciones cognitivas específicas de los objetos matemáticos tratados y a los aspectos estructurales del aprendizaje, es decir, simulará los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual considerado. Y, el modelo de Competencia de Enseñanza es el tercer referente de la semiosis, y, considera, igualmente, los aspectos anteriores (modelos matemática formal, primer referente y cognitivo, segundo referente) y describe, las acciones de los sujetos implicados, los procesos de comunicación, los mediadores, las situaciones, los contextos…, que se dan en la enseñanza).

Referencias Bibliográficas

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Montreal: Kluwer Academic Publishers.

BOE (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática*. Madrid: MEC-Labor. (Título original: The Mathematical Experience. Boston: Birkhäuser, 1982).

De Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

Douady, R. (1986). Approaches des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11,* 77-110.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México, 1997).

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,12*, 133-150.

Hernández, J., Noda, A., Palarea, M. M., y Socas, M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 159-188.

Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M. M., Ruano, R. y Socas, M.M. (2010). La programación por competencias en la clase de Matemáticas. Una actividad profesional básica. En M.T. González, M.M. Palarea y A. Maz, (Eds.), *Seminario de los grupos de investigación pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática* (pp. 26-49). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias. 7*(3), 229-240.

Moreno, M. D. (2012). *El sistema numérico D en la formación de maestros. Estudio de un programa de formación* (Tesis doctoral de próxima lectura). Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Moreno, M. D., Hernández, V., y Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 8*, 251-272.

Moreno, M. D., Hernández, V., y Socas, M. M. (2010). Interpretación y análisis de los resultados obtenidos antes y después de un programa de formación sobre los números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 10*, 179-222.

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Popper, K. R. (1974). *Conocimiento objetivo*. Madrid: Tecnos (versión castellana de *Objective knowledge.* Oxford: Oxford University Press, 1972).

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Ruano, R. (2012). *Competencias y errores de alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización. Implicaciones Didácticas para la transición del lenguaje numérico al algebraico* (Tesis doctoral de próxima lectura). Tesis doctoral. Universidad de La Laguna, La Laguna.

Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4.º de ESO. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III* (pp. 239-265). La Laguna: CAMPUS.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: SEIEM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1)*,* 1-36.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V). En Rico, L. y otros (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Ess.), *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, pp. 9-43.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Síntesis.

Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M., y Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía XII*, 101-119.

EL USO DE LA MAYÉUTICA EN LA TRANSFERENCIA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. EL CASO DE UNA TAREA DE RAZÓN Y PROPORCIÓN

Javier Monje, Bernardo Gómez y Patricia Pérez-Tyteca

Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo tratamos de evaluar la potencialidad que puede tener el uso de la mayéutica en el aula de matemáticas. Se presentan los resultados de un taller que se estructuró en torno a tres momentos metacognitivos desarrollados en el aula mediante la resolución de una tarea utilizando la mayéutica socrática. Nuestra intención es conocer, a modo meramente exploratorio, en qué medida la mayéutica promueve la transferencia del conocimiento puesto en juego al realizar una tarea de razón y proporción que ha sido trabajada en el aula hacia otra tarea que no lo ha sido.

Palabras clave: *Metacognición, Resolución de problemas, Mayéutica socrática, Razón y proporción*

Abstract

In this work we evaluate the potential that you can use the maieutics in the mathematics classroom. We present the results of a workshop was structured around three times metacognitive developed in the classroom by solving a task using the socraticmaieutics. Our intention is to know, as a purely exploratory, to what extent the maieutics promotes the transfer of knowledge brought into play when performing a task of ratio and proportion that has been worked in the classroom to another task that has not been.

Keywords: *Metacognition, Problem solving, Socratic maieutics, Ratio and proportion*

Introducción

Estudios en educación matemática (Lester, 1985; Lester y Kroll, 1990; Schoenfeld, 1985) destacan la importancia de potenciar la metacognición en los estudiantes para favorecer el aprendizaje durante la realización de tareas. El uso del término metacognición a lo largo de los años es adoptado por numerosos investigadores de distintas áreas. Es comúnmente adoptada la definición señalada por Flavell (1976) refiriéndose como el:

conocimiento o conciencia que uno tiene sobre sus propios procesos y productos cognitivos [...] hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y la consecuente regulación y orquestación de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los cuales actúan. (p. 232)

Schoenfeld (1992) remarca la importancia que tiene el uso de prácticas de enseñanzas basadas en la metacognición por parte del profesor para mejorar en los alumnos el aprendizaje de las matemáticas.

Monje, J., Gómez, B., y Pérez-Tyteca, P. (2012). El uso de la mayéutica en la transferencia del conocimiento matemático. El caso de una tarea de razón y proporción. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 23-29). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Esta importancia también ha sido reconocida en propuestas curriculares de distintos países. En España, en el RD 1631/2006 se incorporan las competencias básicas que debe desarrollar un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria, entre estas competencias se identifica la competencia de aprender a aprender, que como se señala en el currículo:

Significa ser consciente de lo que se sabe y de lo que es necesario aprender, de cómo se aprende, y de cómo se gestionan y controlan de forma eficaz los procesos de aprendizaje, optimizándolos y orientándolos a satisfacer objetivos personales. Requiere conocer las propias potencialidades y carencias, sacando provecho de las primeras y teniendo motivación y voluntad para superar las segundas desde una expectativa de éxito, aumentando progresivamente la seguridad para afrontar nuevos retos de aprendizaje (p.689).

En Estados Unidos, el NCTM(2003) también aboga por favorecer la metacognición, esto queda reflejado en uno de sus principios al afirmar que "*el aprendizaje efectivo supone reconocer la importancia de reflexionar sobre las ideas propias y aprender de los errores"* (p.22).

Desde la comunidad investigadora se defiende la implementación de técnicas metacognitivas durante la instrucción en el aula (Rigo, Páez, y Gómez, 2010; Desoete, 2007). Una de estas técnicas es la mayéutica socrática cuyo rasgo distintivo, como indica Rigo (2011) consiste en propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia mediante tres fases: Momento de construcción, Momento de de-construcción y momento de re-construcción.

En el momento de construcción, el docente presenta una tarea considerando de antemano las dificultades o los problemas que va a ocasionar en sus alumnos. Éstos formulan una conjetura para resolverla que resulta errónea. A continuación, el docente rebate la conjetura dada por los estudiantes enfrentándolos a su error, haciéndoles conscientes de la existencia de un conflicto cognitivo y propiciando que reflexionen sobre la resolución de la tarea. Este es el denominado momento de de-construcción.

Por último, en el momento de re-construcción, el docente guía a los alumnos para que construyan una nueva solución que les permita comprender lo que hasta ahora desconocían en relación a la actividad propuesta.

El uso de esta técnica en el aula reporta una serie de beneficios de los que se hacen eco tanto desde el campo de la investigación en educación matemática como desde otras esferas relacionadas con la educación, provocando que las prácticas metacognitivas que representan la quintaesencia de la mayéutica socrática, tengan hoy por hoy una presencia incuestionable en las agendas educativas de distintos países (Rigo, 2011).

En este trabajo, meramente exploratorio, se pretende evaluar la potencialidad que puede tener el uso de la mayéutica socrática para la construcción y transferencia de conocimiento matemático relacionado con la razón y proporción.

Metodología

El taller de mayéutica

Para la consecución de este objetivo se diseñó un taller de mayéutica en el que se trabajó una tarea con gran potencial metacognitivo. Este taller se realizó en una sesión de tres horas dirigido a un grupo de 48 estudiantes de la asignatura de metodología del máster en didácticas específicas de la Universidad de Valencia.

El taller se inicia con una actividad (que denominamos “El perrito”) extraída del libro *Competencia en Razón y Proporción* (Fernández, Figueras, Gómez, Monzó, y Puig, 2009). El perrito ha sido estudiado con estudiantes de distintos niveles educativos (véase Gómez, 2007), lo que ha permitido prever las posibles respuestas de los participantes. En ella se muestra la figura con forma de perro dibujada sobre una retícula (véase figura 1) y se propone a los estudiantes que dibujen la forma que tendría el perro si creciera el doble de su tamaño.

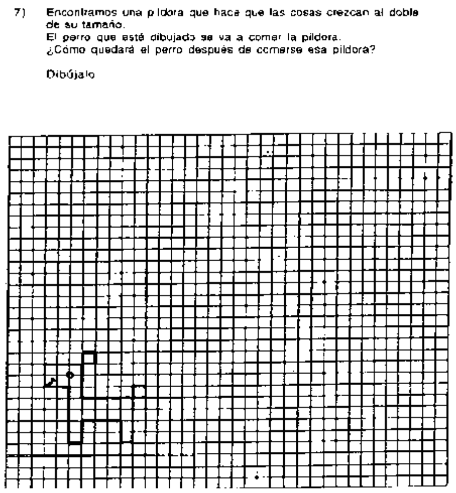


Figura 1. Tarea “el perrito”

El taller se diseñó en función de los tres momentos de la mayéutica socrática descritos anteriormente.

El momento de construcción se produce en el inicio de la actividad, cuando se pide al alumno que la resuelva, justifique su respuesta y reflexione sobre la confianza que tiene en la resolución que ha llevado a cabo.

En el momento de de-construcción el docente -que conoce de antemano cuáles van a ser las posibles resoluciones de los estudiantes- muestra ejemplos de los tipos de respuesta esperados: en primer lugar las resoluciones centradas en la forma que son las más comunes, y después las resoluciones centradas en el área y por último las resoluciones en las que se busca armonizar forma y área. De esta manera se promueve la reflexión y valoración por parte de los alumnos de cuál debe ser la resolución correcta, haciéndoles conscientes de sus propias concepciones acerca de “forma”, “tamaño” y “duplicar tamaño” así como de sus procesos de autorregulación ante los conflictos cognitivos y metacognitivos que se desencadenan a la vista de sus resoluciones.

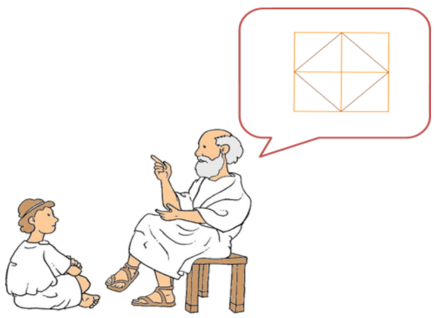


Figura 2. Demostración visual de la construcción del cuadrado

Después de esto, tiene lugar el momento de re-construcción en el que se muestra a los estudiantes la demostración visual de la argumentación que Sócrates presenta en el diálogo de Menón y que consiste en construir un cuadrado de área doble a uno dado mediante el uso de su diagonal (véase figura 2).

Como se muestra en la figura 3, por medio de este proceso se puede conseguir armonizar la duplicación del área del perro y la conservación de su forma.

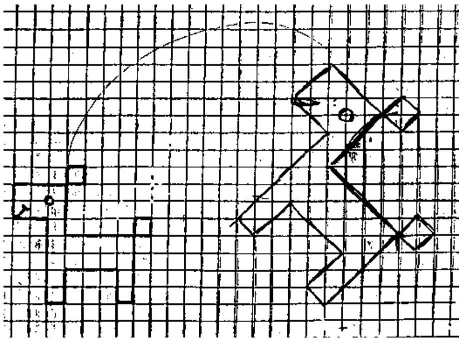


Figura 3. Armonización de área y forma

Aquí finaliza el proceso guiado por el profesor, que tiene como objetivo que los estudiantes sean capaces de construir una definición matemática de un concepto (duplicación de tamaño) que hasta el momento era intuitivo.

Para reafirmar la definición construida gracias a "el perrito" y comprobar la interiorización y transferibilidad de la misma se les pide a los estudiantes que resuelvan una nueva tarea: dado un círculo que representa el diafragma del objetivo de una cámara fotográfica, dibujar otro que doble su luminosidad (véase figura 4). Lo interesante de esta nueva tarea es que la forma ya no es relevante, ya que todos los círculos que aumentan de tamaño conservan su forma.

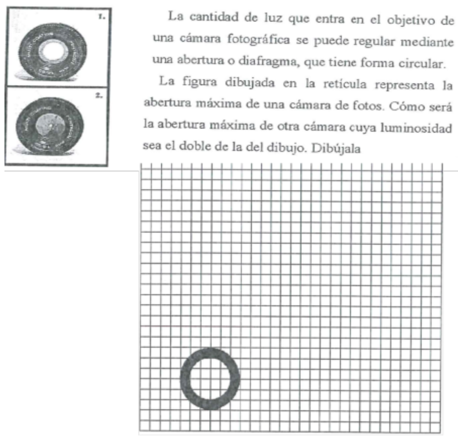


Figura 4. Tarea del diafragma

Resultados

Como ya hemos apuntado, nuestro objetivo consiste en comprobar si ha existido transferibilidad de la tarea del "perrito" a la del "diafragma". Para ello nos hemos centrado en esta última tarea y hemos categorizado las distintas actuaciones de los estudiantes, donde distinguimos dos grandes categorías: a) existe transferencia (duplican el tamaño recurriendo a la diagonal) y b) no existe transferencia (no recurren a la diagonal). Tanto en la categoría (a) como en la (b) distinguimos si se consigue o no el resultado pedido.

Dentro de la categoría (a) hemos caracterizado diferentes tipos de resoluciones ilustradas en la figura 3:

- las que utilizan un cuadrado interior o cuadrado exterior colocado en sentido diagonal,
- las que utilizan el diámetro para posteriormente colocarlo en diagonal y así doblar el tamaño del diafragma.

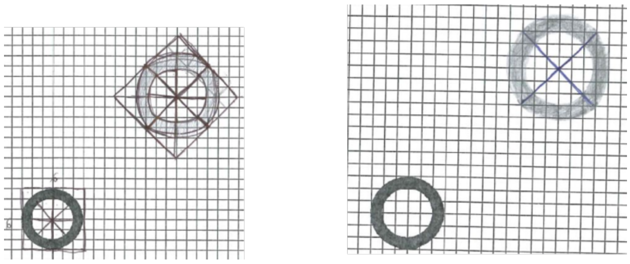


Figura 5. Ejemplos de la categoría: existe transferencia

En general, todos los estudiantes (31 estudiantes) que adoptan alguno de estos procedimientos consiguen duplicar el tamaño y por tanto alcanzar la solución pedida aunque cabe señalar que la corona en algunos estudiantes es un distractor que dificulta la resolución de la tarea.

En la categoría (b), (véase figura 5) se observan distintas actuaciones en los estudiantes como son:

- la utilización de cálculos analíticos para hallar el radio de la figura de tamaño doble
- contar los cuadrados del diafragma y dibujar la resolución con el doble de cuadrados
- doblar el diámetro de la figura
- las que no aplica ningún criterio lógico o que tenga sentido para su resolución.

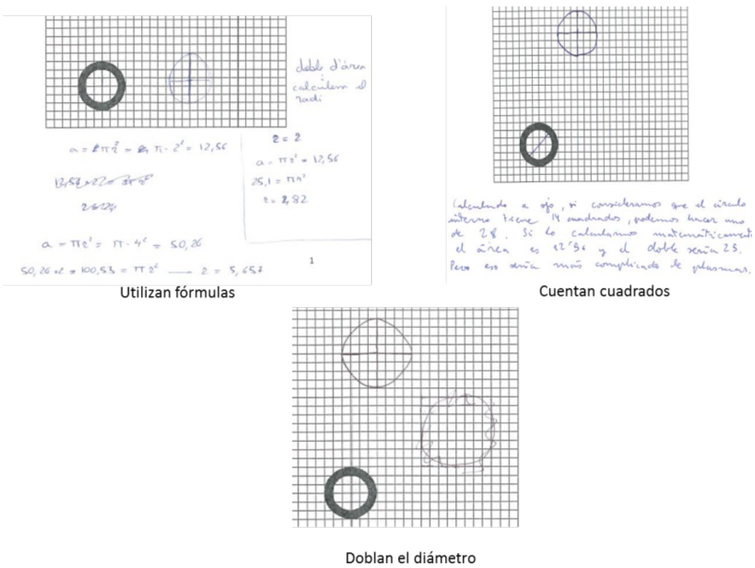


Figura 6. Ejemplos de la categoría: no existe transferencia

En general en esta categoría no se obtiene el resultado que se pide en la tarea. Estos estudiantes tienen dificultades para transferir a una tarea estructuralmente semejante aunque superficialmente diferente.

Cuando la forma ya no es relevante, que es el caso del círculo, el centramiento es necesariamente en el área, pero algunos estudiantes mantienen la estrategia usada en la tarea anterior al realizar “el perrote” ya que doblaron longitudes. Otros estudiantes que se centran en el área, la calculan usando las fórmulas aprendidas, aunque muchos de ellos como complemento o refuerzo de la transferencia. De los estudiantes que utilizan cálculos analíticos la mayoría encuentra dificultades a la hora de dibujar la figura, que llegan incluso a impedir en algunos casos que se dé una solución gráfica.

Conclusiones

Durante el taller, pese a la heterogeneidad de los participantes, hemos observado que la mayéutica nos ha permitido promover en los estudiantes mecanismos de control sobre las propias concepciones y favorecer la reflexión de las propias actuaciones, la mayoría ha reconstruido lo que sabía sobre las nociones matemáticas puestas en juego en la tarea.

Ya que queda fuera del objetivo del presente trabajo, no nos hemos centrado en describir las actuaciones de los alumnos durante el taller de mayéutica. Algunos estudiantes mantienen sus concepciones “ancladas”. Mostrarles que su respuesta es inconsistente no es suficiente para que modifiquen su forma de pensar, ellos piensan que el enunciado del problema es ambiguo y que por ello todas las respuestas son válidas.

Somos conscientes de que realizar esta descripción nos puede ayudar a depurar la técnica mayéutica con el fin de lograr aplicarla con éxito a diversos contextos y situaciones, como puede ser la formación de maestros. Queda pues, pendiente para futuros trabajos aplicar la mayéutica a la formación de maestros, partiendo de tareas propias del currículum obligatorio.

Referencias

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *5*(3), 705–730.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria.* Valencia: Universitat de València.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–235). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: el caso del perrito. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano* (pp. 237–257). Granada: Editorial Universitaria de Granada.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41–69). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K., y Kroll, D. L. (1990). Teaching students to be reflective: A study of two grade seven classes. En G. Booker, P. Cobb, y T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME Conference for the Psychology of Mathematics Education, with the North American Chapter twelfth PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 151–158). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Rigo, M. (2011). La Mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes. En M. Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 523–532). Ciudad Real, España: SEIEM, Universidad de Castilla-La Mancha.

Rigo, M., Páez, D., y Gómez, B. (2010). Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 405–416.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

TRANSFERENCIA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS: INFLUENCIA DEL CONTEXTO, LA ESTRUCTURA Y LA FAMILIARIDAD EN LA CONSTRUCCIÓN DE ANALOGÍAS

Carlos B. Gómez, Joan Josep Solaz-Portolés y Vicente Sanjosé

Universitat de València.

Resumen

En este trabajo se analiza el papel de la familiaridad, el contexto y la estructura de los problemas en la habilidad para aplicar lo aprendido en una situación a otras situaciones (resolución de problemas por transferencia). Se estudia la transferencia en estudiantes que, a partir de un ejemplo (problema fuente), intentan resolver otros cuatro problemas (problemas diana). Los resultados muestran que cuando los contextos de los problemas son familiares para los estudiantes, las analogías superficiales pueden ocultar las diferencias estructurales. Sin embargo, cuando los contextos de los problemas son no-familiares para los estudiantes, el único efecto significativo procede de la igualdad/diferencia estructural. El efecto global de la familiaridad de los problemas es una reducción sistemática del éxito en la transferencia en problemas no familiares, sea cual sea la relación entre problema 'ejemplo' y problema 'propuesto'. La detección de similitudes/ diferencias estructurales es un buen predictor del éxito con las ecuaciones

Palabras clave: *Resolución de problemas algebraicos con enunciado; transferencia; similitud superficial; similitud estructural; familiaridad con el contexto.*

Abstract

In this paper we analyze the role of the problems familiarity, surface, and structure on the ability to apply what is learned in one situation to a different one (problem solving by transfer). We study transfer in solving tasks when comparing one example or "source problem" with four "target problems". Results show that when the problem context is familiar to students then Surface similarities can hide Structural differences. However, when the context of the problems is not familiar for students, the only significant effect comes from the equal/different Structures. 'Familiarity' with the context of the problems causes a global and systematic effect: non-familiar problems achieve lower success than familiar problems, no matter the relationship between source and target problems. The detection of structural similarities / differences seems to be a good predictor of algebraic success.

Keywords: *Algebraic word problem-solving; transfer; surface similarity; structural similarity; context familiarity*

Introducción y Marco Teórico

La resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana y es un área que ha atraído el interés de los científicos cognitivos

Gómez, C. B., Solaz-Portolés, J. J., y Sanjosé, V. (2012). Transferencia en resolución de problemas algebraicos: influencia del contexto, la estructura y la familiaridad en la construcción de analogías. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 31-39). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

desde siempre, en especial en ciencias y matemáticas (Polya, 1957; Newel y Simon, 1972, Larkin y Reif, 1979). Por ser uno de los objetivos de la educación y una de las pruebas características del aprendizaje de alto nivel, la didáctica de las ciencias y la didáctica de las matemáticas también han centrado su interés en ello (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006; Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007). Un problema típico en ciencias posee un enunciado escrito en lenguaje natural en el que ciertas entidades del mundo se encuentran en una situación que las relaciona según alguna regla, principio o ley subyacente. Existen aspectos, atributos o características de esa situación que son conocidos y una demanda concreta sobre otro aspecto no conocido. Para atender a esta demanda hay que reconocer y usar esas reglas, principios y leyes pertinentes, pero también, típicamente, hay que saber utilizar algunas habilidades heurísticas y lógico-matemáticas. La comprensión de un problema parte de la comprensión de su enunciado, que no es sino un texto habitualmente corto, con unas pocas frases. Este texto corto demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007) para atender la demanda del problema.

Un importante objetivo de la educación es incrementar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de diferentes características y disciplinas. Para alcanzar este objetivo el estudiante tiene que, entre otras cosas, aprender a transferir aprendizajes. La transferencia (o *transfer*) es frecuentemente definida como la habilidad para aplicar lo que ha sido aprendido en un determinado contexto a un nuevo contexto (Byrnes, 1996). La transferencia es una estrategia cognitiva muy importante y ha recibido mucha atención en investigación especializada (Hammer et al., 2005;Barnett y Ceci, 2002; Bernardo, 2001; Bassok and Holyoak, 1989; Reed, Dempster and Ettinger, 1985; Gick and Holyoak, 1983 and 1980). En concreto, se ha dedicado una atención especial a los problemas algebraicos con enunciado(Gick y Holyoak, 1980 y 1983; Reed, Dempster y Ettinger, 1985; Bassok y Holyoak, 1989; Reed, 1987).

La analogía entre diferentes problemas se construye identificando los mismos 'rasgos' en ellos (Hesse, 1966; Tversky, 1977). Los rasgos identificados en los problemas con enunciado pueden referirse a características perceptibles de los objetos y eventos en el mundo real, o a entidades abstractas como el 'espacio del problema' (Newel and Simon, 1972), las ecuaciones, reglas o leyes, etc. El conjunto de rasgos perceptibles en una situación problemática del mundo real, que involucra objetos y hechos en términos concretos (es decir, no abstractos), se denomina 'Superficie' (o también 'Historia' ó 'Contexto') del problema. Los conceptos matemáticos o científicos, las leyes, principios, las relaciones entre cantidades, las ecuaciones, etc., constituyen la 'Estructura' del problema (Holyoak y Koh, 1987; Holyoak, 1984). La mayor parte de los problemas académicos de ciencias que se proponen y resuelven en las aulas tienen una Estructura algebraica, determinada por "*el modo en que las cantidades se relacionan unas con otras, más que por las propias cantidades*" (Novick, 1988; pp 511; traducción de los autores). Así pues, en problemas algebraicos las ecuaciones (su forma matemática y su significado) resumen la Estructura del problema.

La analogía entre problemas puede, entonces, construirse en términos de su similitud Superficial y/o Estructural (Holyoak, 1984). Reed (1987) propuso una nomenclatura para las relaciones entre problemas que parece conveniente para nuestros propósitos por su sencillez (Tabla 1):

		Superficie	
		Igual	**Diferente**
Estructura	**Igual**	Equivalentes	Isomorfos
	Diferente	Similares	Diferentes

Tabla 1: Relaciones entre problemas en términos de la similitud o diferencia de sus superficies y estructuras

Los profesores de ciencias con frecuencia asumen que las relaciones analógicas entre los problemas resueltos y los problemas propuestos son sencillas de comprender y establecer (Oliva, 2004). Normalmente se atribuye el fracaso en la resolución a dos grandes causas: falta de comprensión del problema o falta de dominio de los procedimientos matemáticos de resolución, pero trabajos como el de Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés (2007) han verificado con estudiantes de secundaria que las dificultades algebraicas y de cálculo no son el obstáculo principal en la transferencia de aprendizajes.

Estos autores formulan la hipótesis que la causa principal de los impedimentos para realizar la transferencia puede tener su origen en la fase de comprensión, es decir, en la construcción de un adecuado modelo mental del problema: si la situación descrita no plantea dificultades, entonces los obstáculos están en el proceso de "traducción algebraica", anterior a "la navegación por el espacio algebraico del problema".

En este trabajo estudiamos con cierto detalle el éxito en resolución de problemas ('problemas diana') basado en el establecimiento de analogías con problemas ejemplo ('problemas fuente'). Para simplificar el diseño, intentamos fijar los modos en que esas analogías pueden establecerse: seleccionamos el problema fuente particular que los estudiantes deben considerar como análogo (al menos, en primera instancia) para resolver el problema diana. Consideraremos las diferentes relaciones que pueden darse entre un problema fuente dado y un problema diana, dadas por la tabla 1. Concentraremos la atención en problemas algebraicos cuya estructura se concreta en un sistema de 2 ecuaciones lineales, habituales en una amplia variedad de temas de Secundaria.

Objetivos

Con este trabajo se pretende investigar:

1. El transfer en la resolución de problemas algebraicos con enunciado, en la construcción de analogías.
2. El papel que juegan la superficie, la estructura de los problemas y la familiaridad con el tema, en la construcción correcta de analogías y el éxito en la resolución.

Hipótesis

En relación con estos objetivos formulamos las siguientes hipótesis:

H1: Influencia de los factores Superficie y Estructura en el transfer. La igualdad o diferencia entre las estructuras y las superficies entre los problemas fuente y diana influye decisivamente sobre las ecuaciones elegidas para resolver el problema diana.

H2: Efectos de la Familiaridad con los contextos del enunciado. Una alta familiaridad de los problemas conduce a mayor éxito en la transferencia que una baja familiaridad.

H3: Análisis de la construcción de analogías estructurales. La relación correcta entre estructuras se relaciona significativamente con una correcta ‘’traducción algebraica”, es decir, con ecuaciones correctas.

Metodología

Sujetos

Los sujetos intervinientes en este experimento pertenecen a 4 centros de la provincia de Valencia, situados en ciudades de más de 10.000 habitantes y en entornos socioculturales medios. Todos ellos se encontraban en el mismo nivel de estudios, 4º ESO, con la opción de Física y Química y pertenecían a 4 grupos naturales en esos centros. Obtuvimos datos completos y fiables de un total de 49 estudiantes. De ellos, 28 participantes se asignaron a la condición “Alta Familiaridad” (el estudio 1). Los 21 restantes participaron en el estudio 2 y se asignaron a la condición de “Baja Familiaridad”. Cada nivel de familiaridad se asignó a dos grupos al azar.

Aunque se trató de una muestra de conveniencia, disponible para el experimento, *a priori* no presenta ningún rasgo distintivo del resto de la población de estudiantes de secundaria del mismo nivel sociocultural.

Diseño y Materiales

Se estudió, mediante una prueba preliminar de conocimientos previos, si los estudiantes reunían o no los conocimientos indispensables para poder comprender los problemas usados en la prueba de transferencia. Esta prueba preliminar consistió en 5 cuestiones cuya respuesta exige plantear una ecuación lineal. Se ofrecían 3 respuestas, una de ellas la correcta. Todos los estudiantes participantes obtuvieron 3 puntos o más en este test.

Para activar los conocimientos previos sobre ecuaciones lineales se preparó un material que recogió los conceptos, procedimientos principales, así como diversos ejemplos resueltos. El tema ya había sido tratado en la asignatura de Matemáticas, de modo que solo se trató de rescatar de la memoria a largo plazo los conocimientos importantes para la prueba de transferencia a realizar después.

Para la prueba de transferencia, se confeccionó un cuadernillo que contenía un problema-ejemplo (problema ‘fuente’) resuelto, y detalladamente explicado; y otros cuatro problemas a resolver (problemas ‘diana’). Los 4 problemas ‘diana’ se relacionaron con el ‘fuente’ de los 4 modos distintos que indica la tabla 1, y serán denominados en lo sucesivo como problema diana equivalente (misma superficie y misma estructura que el fuente), isomorfo (distinta superficie y misma estructura que el fuente), similar (misma superficie y diferente estructura que el fuente) y diferente (distinta superficie y distinta estructura que el fuente). Para diseñar estos 1+4 problemas se utilizó un diseño 2 X 2 (2 superficies diferentes y 2 estructuras diferentes), como muestra la Tabla 2. Como se ha dicho antes, las superficies consideradas fueron, en el estudio 1, ‘llenado/vaciado de piscinas’ y ‘aumento/disminución de ahorros en cuentas corrientes’. En el estudio 2, las superficies fueron: ‘dilatación/contracción de longitudes debido a aumento/disminución de la temperatura’ y ‘aumento/disminución de temperatura debido a absorción/cesión de calor’. Las estructuras consideradas fueron dos rectas que se cortan con pendientes del mismo signo y dos rectas que se cortan con pendientes de diferente signo. En lo que sigue, nos referiremos a estas estructuras como ``Alcanzar’’(A) y ``Encontrar’’ (E) respectivamente, por analogía con los clásicos problemas de dos móviles en Cinemática (bien uno alcanza al otro, bien uno se encuentra con el otro).

Fuente: Piscinas/ Alcanzar (Fuente: Dilatación/Alcanzar)	Superficie: Piscinas (Dilatación)	Superficie: Ahorros (Calor y temperatura)
Estructura: Alcanzar Estructura: Encontrar	Equivalente Similar	Isomorfo Diferente

Tabla 2: Superficies y Estructuras usados en los estudios 1 y 2 para los problemas fuente y dianas.

Variables y Medidas

En ambos estudios, los factores independientes son: la Superficie y la Estructura de los problemas diana, cada uno con 2 valores: Igual/Diferente al problema fuente. En el análisis conjunto final, la Familiaridad de los enunciados (alta/baja) fue el factor independiente.

En cada uno de los 4 problemas diana propuestos los estudiantes debían realizar varias tareas, que asociamos a variables dependientes diferentes:

1. Indicar el grado de ayuda que percibían del problema fuente. Se utilizó una escala Likert con cinco niveles: 'Mucha, Bastante, Algo, Poco, Nada'. Esta variable pretendió medir la percepción inicial de la analogía entre cada problema diana y el problema fuente.
2. Elegir, entre tres sistemas de ecuaciones lineales, el correcto para resolver cada problema fuente (solo una opción era correcta). Esta variable está asociada con la fase de aplicación de la transferencia, una vez acabada la construcción de la analogía entre el problema 'diana' y el 'fuente'. Fue valorada como 'Correcta' o 'Incorrecta'.

Procedimiento

En cada estudio utilizamos dos sesiones de unos 50 min cada una. En la primera sesión explicamos la finalidad de la tarea que llevarían a cabo y se explicó el material didáctico para activar los conocimientos ya estudiados. En la segunda sesión realizamos la prueba de "transfer".

Resultados

Familiaridad y elección de ecuaciones

La Figura 1 refleja la proporción de acierto en la elección del sistema de ecuaciones en función de la Estructura, Superficie y Familiaridad del problema diana. Lo más destacable es que los resultados para los problemas diana en la condición baja familiaridad son sistemáticamente peores que los obtenidos para los problemas diana en la condición alta familiaridad. El factor Familiaridad no alcanza significatividad, seguramente debido al tamaño reducido de la muestra, ya que la significación queda muy cercana al límite admitido ($t(31,9)= 1,853$, g.l. corregidos por varianzas no iguales, $p = 0,07$). El efecto principal de la Estructura igual/diferente al problema fuente es significativo en este estudio conjunto ($Z= -2,583$; $p= ,01$). El efecto de la Superficie no es significativo.

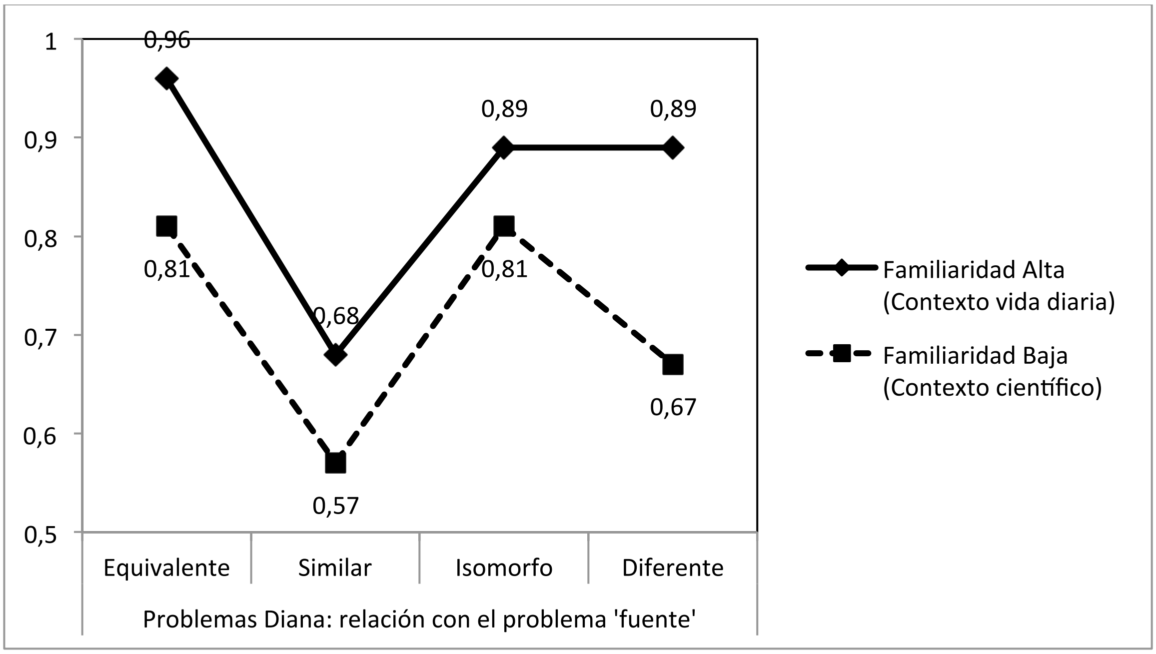


Figura 1. Proporciones de éxito en la elección del sistema de ecuaciones para resolver cada uno de los problemas diana en ambas condiciones de familiaridad.

Hay una diferencia significativa entre los 4 problemas (Q=13,481; p= ,004), debido a la menor proporción de éxito de los problemas 'similares' en comparación con el resto de problemas diana. En la condición de Alta Familiaridad, la diferencia es muy apreciable. En la condición de Baja Familiaridad el resultado es parecido al obtenido en el problema 'diferente' y peor que el de los otros dos problemas diana.

Estudio de la detección de analogías

La tabla 3 muestra la proporción de acierto en el sistema de ecuaciones en función de la detección de analogías/diferencias estructurales. En ambas condiciones de familiaridad existe una fuerte relación entre detectar las diferencias/ analogías estructurales y escoger correctamente la ecuación que resuelve el problema.

	Detección IgualEstructura ***Isomorfo***		**Detección DiferenteEstructura** ***Similar***	
Ecuaciones Correctas	Si	No	Si	No
Si	**74,4%**	14,0%	**69,4%**	11,1%
No	7,0%	4,6%	13,8%	5,5%

Tabla 3: Porcentaje de acierto en la elección de ecuaciones en función de la correcta detección de estructura igual o diferente.

La mayoría de las personas que detectan correctamente la analogía/diferencia estructura escogen en la segunda fase la ecuación que resuelve correctamente el problema con indiferencia de la condición de familiaridad.

Conclusiones

La proporción de éxito en la elección de las ecuaciones en los problemas diana es, globalmente, alta. Esto apoya la instrucción habitual en las aulas basada en ejemplos análogos resueltos, aun así los problemas de igual estructura resultan más fáciles que los de estructura diferente.

El efecto de la igualdad /diferencia entre estructuras produjo efecto significativo. Lo estudiantes tienen más dificultades a la hora de trasferir el planteamiento de un problema no isomorfo con el problema diana. El efecto de la Superficie no alcanzó significatividad, pero se encontró un resultado distinto para cada nivel de familiaridad. En problemas de alta familiaridad, las similitudes superficiales pueden obstaculizar la detección de diferencias estructurales entre problemas. En todo caso, el problema Similar alcanzó menores niveles de éxito que el resto, incluso que el Diferente, en ambos niveles de familiaridad. El error más común fue el transfer negativo. La hipótesis H1 quedó confirmada para el factor Estructura.

El efecto del factor familiaridad quedó cerca del límite estándar de significatividad. Por tanto la hipótesis H2 quedó "casi" confirmada a falta de mayor potencia estadística.

Por último se encontró una asociación entre la detección de similitudes/diferencias estructurales y la elección de ecuaciones correcta,. Por tanto, la detección de analogías estructurales un buen predictor del éxito algebraico. H3 quedó confirmada.

Referencias

Barnett, S.M. y Ceci, S.J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, *128*(4), 612-637.

Bassok, M. y Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 15,* 153-166.

Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *21*(2), 137-150

Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, *5*, 121-152.

Forbus, K.D., Gentner, D. y Law, K. (1995). MAC/FAC: A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science*, *19*, 141-205.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Friege, G. y Lind, G. (2006). Types and qualities of knowledge and their relation to problem solving in physics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*, 437-465.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, *7*, 155-170.

Gick, M. L., y Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, *12* , 306–355

Gick, M.L. y Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, *15*, 1-38

Greeno, J.G. (1989). Situations, Mental Models, and Generative Knowledge. En D. Klahr and K. Kotovsky (Eds.), *Complex Information Processing: The Impact of Herbert Simon* (pp. 285-318). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Hammer, D., Elby, A., Scherr, R. y Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. En J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89-119). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Hesse, M.B. (1966). *Models and analogies in science*. Notre Dame, IN: Notre Dame University Press.

Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. En R.J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 2, pp. 199-230). Hilsdale, NJ: Erlbaum.

Holyoak, K.J. y Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, *15*(4), 332-340.

Hummel, J.E. y Holyoak, K.J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, *104*, 427-466.

Jonassen, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, *35*(3), 362-381.

Kintsch, W. y van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological. Review*, *85*, 363-394

Kintsch, W. y Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Larkin, J. y Reif, F. (1979). Understanding and teaching problem solving in physics. *European Journal of Science Education*, *1*(2), 191-203.

Lobato, J. E. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and ViceVersa. *Educational Researcher, 32*(1), 17-20.

Newell, A. y Simon, H.A: (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 14*, 510-520.

Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *3*(3), Artículo 7. Recuperado el 1 de julio de 2007, Disponible online en: www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7_VOL3_N3.pdf.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press (2ª ed., 1973). (Trad. castellana: 1981, *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trias).

Rebello, N. S., Cui, L., Bennet, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Earlbaum.

Reed, S.K., Dempster, A. y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *11*, 106-125.

Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, *13*, 124-139

Reeves, L.M. y Weisberg, R.W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, *115*, 381-400.

Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J.J. y Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de "traducción algebraica". *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 169-184.

Schroeder, T., y Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. Trafton y A. Shulte (Eds). *New directions for elementary school mathematics (1989 Yearbook)*. Reston, VA, NCTM.

Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2006). Problemas algorítmicos y conceptuales: Influencia de algunas variables instruccionales. *Educación Química*, *17*(3), 372-378.

Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2007). Cognitive variables in science problem solving. *Journal of Physics Education On Line*, *4*(2), 25-32.

Tversky, A. (1977). Features of similarity. *Psychological Review*, *84*, 327-352.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA*. *Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía IV*, 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 113-118).

MÉTODO PARA LA DESCRIPCIÓN DEL APRENDIZAJE DE UN ORGANIZADOR DEL CURRÍCULO POR PROFESORES EN FORMACIÓN

Pedro Gómez[1] y María C. Cañadas[2]

[1]Universidad de los Andes, [2]Universidad de Granada

Resumen

Presentamos un método para describir el aprendizaje de un organizador del currículo por profesores de matemáticas en formación. Este método se basa en la noción de acción como caracterización de las actuaciones de los profesores en formación en sus producciones al abordar las actividades que configuran los programas de formación que se basan en el modelo del análisis didáctico. Ejemplificamos este método para el organizador del currículo análisis fenomenológico en un programa de formación con profesores de matemáticas en ejercicio.

Términos clave*: aprendizaje, formación de profesores, matemáticas, análisis didáctico, análisis fenomenológico, método, organizador del currículo*

Abstract

We present a method to describe mathematics trainee's learning of pedagogical concepts. This method is based on the notion of action as a way for characterizing trainee's performance in their productions when tackling the activities that configure teacher education programs based on the didactic analysis model. We present an example of this method for the pedagogical concept phenomenological analysis in an in-service mathematics teacher education program.

Keywords: *didactical analysis, learning, mathematics, method, teacher education, pedagogical concept, phenomenological analysis*

Los programas de formación de profesores en los que trabajamos se basan en un modelo funcional de la formación de profesores de matemáticas que se estructura mediante el análisis didáctico (Gómez y González, 2008). Estos programas abordan el aprendizaje de los profesores en formación desde una perspectiva social del aprendizaje, con énfasis en los procesos de aprendizaje de los conceptos (organizadores del currículo) que configuran el análisis didáctico. En estos programas, los profesores en formación aprenden a planificar una unidad didáctica mediante la realización de un ciclo del análisis didáctico.

El análisis didáctico se configura alrededor de cuatro análisis que conforman un ciclo: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007). Cuando se realiza cada uno de los análisis, se ponen en juego los organizadores del currículo. Un organizador del currículo es un concepto que forma parte del conocimiento disciplinar de Educación Matemática y permite analizar un tema matemático con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997). Por ejemplo, los organizadores del

Gómez, P., y Cañadas, M. C. (2012). Método para la descripción del aprendizaje de un organizador del currículo por profesores en formación. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 41-52). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

currículo del análisis de contenido son la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico.

Los programas de formación a los que hacemos referencia contemplan que los profesores realicen trabajos en grupo para desarrollar los análisis que conforman el análisis didáctico sobre un tema de las matemáticas escolares. Los grupos realizan una serie de actividades, cada una de ellas referida a un organizador del currículo. En general, en estos programas, para cada actividad, cada grupo ha de producir al menos un documento en el que presentan el resultado de su análisis de su tema con el organizador del currículo en cuestión. El método que presentamos proporciona un procedimiento para analizar ese documento y permite explorar y describir el aprendizaje de los grupos del organizador del currículo.

Nuestro interés se centra en explorar el aprendizaje de los organizadores del currículo por parte de los profesores en formación. En este documento describimos un método para analizar las producciones de grupos de profesores en formación que permite explorar este aprendizaje.

Marco conceptual

El procedimiento metodológico que proponemos en este trabajo se basa en tres cuestiones: (a) una posición con respecto al aprendizaje de los organizadores del currículo por parte de los profesores que participan en programas de formación basados en el modelo del análisis didáctico; (b) la descripción del organizador del currículo en términos de esa visión del aprendizaje; y (c) la noción de acción como base para caracterizar las actuaciones de los grupos.

Aprendizaje de los organizadores del currículo: SUTUP

Los grupos de profesores en formación realizan cada etapa del análisis didáctico abordando secuencialmente su tema desde la perspectiva de los organizadores del currículo que lo componen. El análisis del tema con un organizador del currículo se fundamenta en el significado de ese concepto y se configura alrededor de un conjunto de técnicas para realizarlo. Nuestro interés se centra en los conocimientos que caracterizan el aprendizaje de los organizadores del currículo. Nos basamos en los trabajos de Gómez y González (p. ej., Gómez y González, 2009) para describir esta visión.

Al abordar su tema con un organizador del currículo, los grupos de profesores en formación necesitan (a) comprender cada organizador del currículo para (b) usarlo al analizar un concepto matemático y producir una información que, a su vez, (c) puede ser utilizada, posiblemente en conjunción con la información proveniente de otros organizadores del currículo, con un propósito didáctico concreto. Estos aspectos dan lugar a tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con un organizador del currículo:

1. conocer el organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sea capaz de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares;
2. desarrollar las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre el tema; y

3. desarrollar las técnicas necesarias para usar la información sobre el tema para tomar decisiones a la hora de analizar el tema con otro organizador del currículo o para el diseño de la unidad didáctica.

Gómez y González denominan a estos tres tipos de conocimiento Significado, Uso Técnico y Uso Práctico (SUTUP) de un organizador del currículo, respectivamente, y los caracterizan como se describe a continuación.

Significado. El significado de un organizador del currículo se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura. El significado de un organizador del currículo se presenta en términos de sus propiedades y sus relaciones con otros conceptos. Estos conceptos son las ideas clave que configuran su significado.

Uso técnico. El uso técnico de un organizador del currículo se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema.

Uso práctico. El uso práctico se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del uso técnico en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

Descripción en términos de SUTUP del organizador del currículo

Para abordar la indagación sobre el aprendizaje de un organizador del currículo, es necesario describir su significado, uso técnico y uso práctico. Es decir, hay que identificar las ideas clave que caracterizan el significado del organizador del currículo y las técnicas que caracterizan su uso técnico y uso práctico. A continuación, presentamos un ejemplo para el significado y el uso técnico del organizador del currículo análisis fenomenológico.

Con el análisis fenomenológico se pretende que el profesor en formación identifique y organice los fenómenos que dan sentido al tema que está analizando (Gómez y Cañadas, 2011). La complejidad de este organizador del currículo surge de su propio significado y de las técnicas para su uso técnico y uso práctico.

Significado. El análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar fenómenos que den sentido a un tema de las matemáticas escolares. Consiste también en establecer las maneras como el tema organiza esos fenómenos (Freudenthal, 1983; Puig, 1997). Para ello, es necesario considerar las ideas claves que configuran este organizador del currículo: fenómeno, contexto, relación estructural, subestructura, situación, usos de un tema y problemas a los que el tema da respuesta. Por ejemplo, al querer identificar fenómenos relacionados con la función cuadrática podemos pensar en la antena parabólica de mi casa, el conjunto de todas las antenas parabólicas y el conjunto de todos los reflectores parabólicos de fenómenos que dan sentido al tema. La idea de reflectores parabólicos constituye un contexto que organiza todos los fenómenos que comparten unas mismas características estructurales: su forma parabólica da lugar a que las ondas confluyan en un mismo lugar —antenas— y a que los rayos de luz se proyecten paralelamente —focos—. Las características estructurales son aquellas propiedades de un fenómeno que involucran y dan sentido al tema matemático. De esta forma, las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema (Gómez, 2007, pp. 54-55). Se establece así una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Las situaciones son otra forma de organizar los fenómenos que hace referencia al tipo de entorno al que pertenecen.

Uso técnico. El análisis fenomenológico de un tema implica dos procedimientos: (a) la identificación de fenómenos que dan sentido al tema y (b) la organización de esos fenómenos. Hacerse las preguntas, "¿qué otros fenómenos son 'parecidos' a este, desde la perspectiva del tema, y en qué son parecidos?" es una técnica para aproximarse a sus características estructurales y comenzar a abordar la identificación de contextos, como primer paso para organizar los fenómenos. De esta forma identificamos los reflectores parabólicos como contexto que engloba diferentes tipos de fenómenos de la función cuadrática. Las características estructurales de los fenómenos pueden dar pistas sobre aquellos aspectos matemáticos del tema que organizan los fenómenos pertenecientes a un contexto. La identificación de la subestructura matemática que modeliza un contexto puede surgir de esta reflexión. También es posible usar otra técnica: analizar la estructura conceptual del tema e identificar posibles subestructuras en ella, para establecer cuáles de esas subestructuras adquieren sentido —se usan, resuelven problemas— para al menos un fenómeno y de qué manera se relacionan con los contextos.

La figura 1 resume esquemáticamente las ideas clave y algunas de las técnicas del uso técnico del análisis fenomenológico.

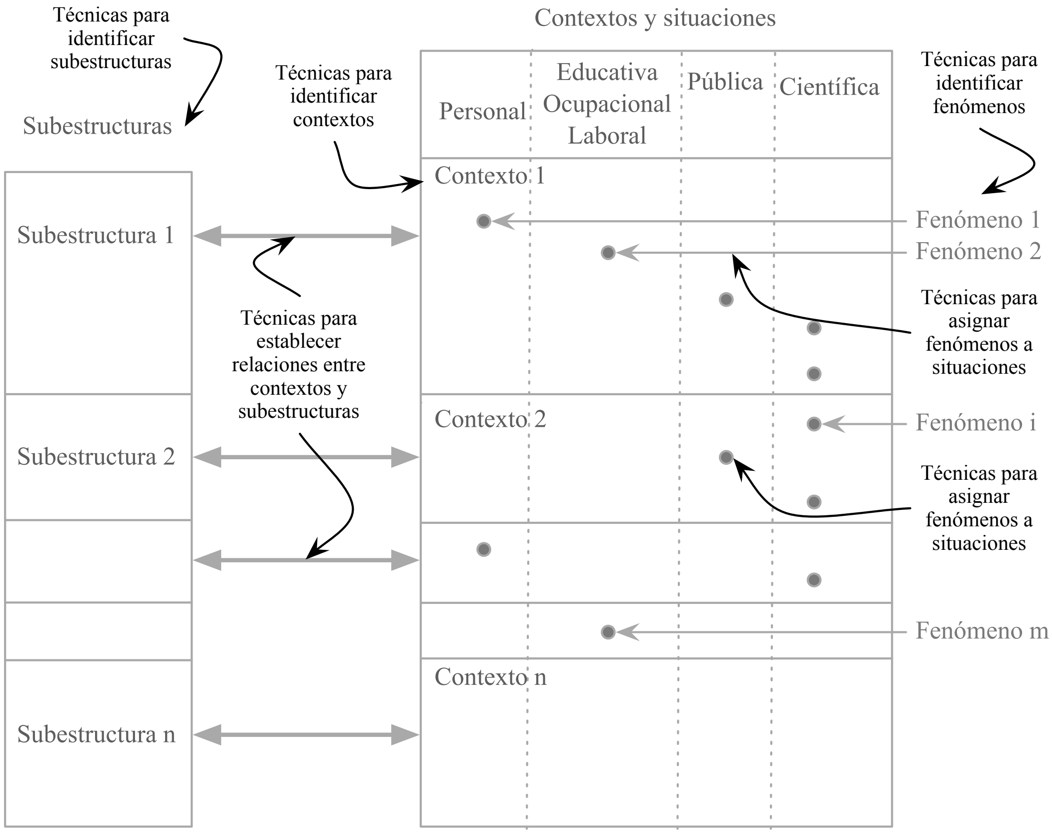


Figura 1. Ideas clave y técnicas del uso técnico en el análisis fenomenológico

Noción de acción

El procedimiento metodológico que proponemos utiliza la idea de "acción" como elemento central para la codificación y análisis de las producciones de los grupos. Una acción se refiere a una actuación concreta que los grupos pueden realizar. Las acciones deben ser observables en las producciones, surgen del análisis de la descripción conceptual del organizador del currículo y de codificaciones preliminares de los datos, y se organizan de acuerdo con las ideas clave que caracterizan su significado y con las técnicas que configuran su uso técnico.

Contexto en MAD

En este trabajo utilizamos uno de los programas mencionados para ejemplificar el método que proponemos. Se trata de MAD, la maestría de profundización en Educación Matemática ofrecida por la Universidad de los Andes en Bogotá (Colombia) para profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. MAD tiene una duración de dos años y está compuesto por 8 módulos que tienen una estructura análoga. Los formadores presentan e introducen el contenido de cada módulo durante una semana presencial al comienzo de cada módulo y presentan las actividades a realizar a lo largo del módulo. Tras esa semana, el formador continúa en contacto virtual durante el resto del módulo. Un profesor colombiano acompaña a los profesores en formación durante todo el programa en la universidad (Gómez y Restrepo, 2010, p. 26). En la primera cohorte del programa, de la que surgen los datos del ejemplo que presentamos, los profesores en formación se organizaron en grupos de 4 o 5 miembros para trabajar durante la maestría. Cada grupo se centró en un tema de las matemáticas escolares (para una descripción detallada del programa y de su fundamentación ver Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiánez, Marín *et al.*, 2010; Gómez y González, 2012; Gómez y Restrepo, 2010).

Cada módulo de MAD está compuesto por una serie de actividades a las que los profesores en formación dedican dos semanas. Para cada actividad, los profesores en formación deben elaborar un borrador, que debe tener la información suficiente como para que el tutor pueda entenderlo y comentarlo. El tutor debe reaccionar a su trabajo por la misma vía y los profesores en formación deben mejorar su trabajo con base en esos comentarios y preparar y realizar una presentación final al término de la segunda semana.

En este trabajo, nos centramos en el análisis fenomenológico, que se trabajó en el módulo de análisis de contenido de MAD. Una de las actividades de este módulo se centró en este organizador del currículo.

Requerimientos

Las actividades propuestas en MAD a los grupos de profesores en formación incluían una serie de requerimientos, que tenían que ver con lo que se esperaba que hicieran para un organizador del currículo determinado. Para la actividad relativa al análisis fenomenológico, los grupos produjeron un borrador y, tras las reacciones del tutor y de los formadores, produjeron una presentación. En la actividad sobre este organizador del currículo, los requerimientos a los grupos fueron: (a) que dieran sentido a la fenomenología como organizador del currículo y (b) que realizaran el análisis fenomenológico de su tema.

Más concretamente, la actividad solicitaba:

- Identificar y delimitar los fenómenos que dan sentido a los conceptos.
- Identificar los conceptos que organizan los fenómenos.
- Establecer las relaciones entre los fenómenos y las subestructuras matemáticas.
- Identificar subestructuras matemáticas del tema que permiten organizar grupos de fenómenos.
- Organizar grupos de fenómenos que comparten características estructurales mediante la identificación de contextos.
- Establecer las relaciones entre los contextos y las subestructuras matemáticas.
- Identificar situaciones donde se utilicen las subestructuras matemáticas.

Acciones y codificación

El método que proponemos requiere que se identifiquen las acciones que corresponden al organizador del currículo cuyo aprendizaje se desea describir. Este listado de acciones depende del organizador del currículo, de las opciones que el formador ha tomado sobre su significado, uso técnico y uso práctico, y de las características de la actividad que los profesores en formación deben realizar. Para el caso del análisis fenomenológico dentro de MAD, y con base en el marco conceptual presentado, identificamos una serie de acciones que los grupos podrían realizar al abordar la actividad. Por ejemplo, se esperaba que establecieran las “relaciones entre los contextos y las subestructuras matemáticas”. Para abordar esa expectativa de aprendizaje identificamos las siguientes acciones: (a) establecer relaciones, (b) establecer relaciones válidas, (c) establecer todas las relaciones, (d) justificar las relaciones entre los contextos y las características estructurales y (e) proponer justificaciones válidas. De manera análoga, construimos diversas acciones para cada idea clave del análisis fenomenológico.

Construcción de la lista de acciones

Para construir la lista de acciones, es necesario describir el organizador del currículo en términos de su significado, uso técnico y uso práctico con base en los documentos que se proporcionan a los profesores en formación durante la instrucción (apuntes, diapositivas del formador y bibliografía) y los requerimientos que se les solicitan a los profesores en formación (actividad). Con esta información se obtiene un primer listado de acciones, que se revisa con un primer proceso de codificación que permite identificar acciones que los grupos de profesores en formación realizan pero que no estaban previstas en la lista original.

Las acciones resultantes se pueden organizar de acuerdo con diversos criterios: (a) si fueron solicitadas en la actividad o no, (b) si fueron presentadas en la instrucción o no, (c) si tienen relación con el significado, el uso técnico o el uso práctico del organizador del currículo, (d) la idea clave con la que se relacionan, y (e) si su realización depende de la realización de otra acción previa.

En la tabla 1 presentamos la lista de acciones que produjimos para el caso del análisis fenomenológico en MAD. Las organizamos de acuerdo con la idea clave a la que corresponden y establecemos un código que identifica algunas de sus características. El primer carácter es la idea clave con la que se relaciona (fenómeno [F], contexto [C], subestructura [B], relación [R] o situación [S]); el segundo distingue su correspondencia con el significado (S) o uso técnico (T); el tercero identifica el orden del código dentro de la idea clave y el tipo de conocimiento; el cuarto identifica si la acción no fue tratada durante la instrucción (N); y el quinto es un guión que aparece cuando la acción depende de otra acción.

Tabla 1

Acciones para el análisis fenomenológico en MAD

Acción	Código
Fenómenos	
Identificar fenómenos	FS1
Identificar problemas	FS2
Usar problemas para identificar fenómenos	-FT1
Utilizar al menos un problema para identificar al menos un fenómeno	-FT2
Identificar usos	FS3
Utilizar los usos para identificar fenómenos	-FT3

Tabla 1

Acciones para el análisis fenomenológico en MAD

Acción	Código
Contextos	
Identificar contextos	CS1
Identificar una proporción de, al menos, el 80% de todos los contextos posibles	-CT1
Identificar características estructurales	CS2
Usar características estructurales para identificar fenómenos	-CT2
Usar características estructurales para justificar fenómenos	-CT3N
Organizar fenómenos con contextos	-CT4
Subestructuras	
Identificar subestructuras	BS1
Hacer referencia a la estructura conceptual	BS2
Describir las subestructuras	-BT1
Organizar fenómenos con subestructuras	-BT2
Relación de subestructuras y contextos	
Establecer relaciones	-RS1
Establecer todas las relaciones	-RS2
Justificar las relaciones entre los principios y las características estructurales	-RS3
Situaciones	
Proponer situaciones	SS1
Usar PISA para clasificar	-ST1
Usar alguna clasificación	ST2

Codificación

Estas acciones se pueden utilizar para codificar las producciones de los grupos de profesores en formación. Para cada documento y cada acción, es posible establecer si la acción se lleva a cabo, y si se realiza correctamente o no. Con esta información, se produce una tabla en la que las filas son las acciones y las columnas corresponden al documento o documentos analizados de los grupos. Un primer análisis de esta información consiste en establecer el número de grupos que hacen cada una de las acciones y, en caso de que la realicen, si la hacen bien o no. De esta forma se produce una nueva columna con los totales por grupos para cada acción. Adicionalmente, para cada grupo se puede establecer el número de acciones que realizó y cuántas de ellas las realizó correctamente. Se produce entonces una nueva fila con estos totales. Esta es la tabla básica con los resultados de la codificación. En la tabla 2 presentamos, como ejemplo, una parte de esta tabla para las acciones correspondientes a la idea clave de fenómeno para el borrador que los grupos presentaron en MAD.

Tabla 2

Instrumento de codificación para acciones sobre fenómenos en el borrador

	Grupos													
	1		2		3		4		5		6		Total	
Acc	R	V	R	V	R	V	R	V	R	V	R	V	R	V
FS1	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	✓	6	3
FS2	✓	✓					✓	✓					2	2
-FT1	✓	✓					✓	✓					2	2
-FT2	✓	✓					✓	✓					2	2
FS3			✓	✓									1	1
-FT3			✓	✓									1	1

Tabla 2
Instrumento de codificación para acciones sobre fenómenos en el borrador

	Grupos													
	1		2		3		4		5		6		Total	
Acc	R	V	R	V	R	V	R	V	R	V	R	V	R	V
Total	4	4	3	3	1	0	4	3	1	0	1	1		

Acc: acción; R: realizada; V: válida.

Análisis de datos y obtención de resultados

Con base en la tabla básica que se acaba de describir, es posible realizar diferentes tipos de análisis que pueden proporcionar información sobre el aprendizaje de los grupos del organizador del currículo estudiado. Consideramos dos tipos de análisis: (a) la descripción del aprendizaje de los grupos, a partir de sus producciones en un documento de la actividad que corresponde al organizador del currículo; y (b) el establecimiento de la dificultad de las ideas claves que configuran el organizador del currículo, a partir de la comparación de las producciones de los grupos en el borrador y la presentación final de la actividad.

Análisis de la tabla básica

Como hemos descrito, la tabla básica que resulta del proceso de codificación establece para cada acción (filas), qué grupos realizaron esa acción y cuáles la realizaron correctamente. Esta tabla se puede analizar por filas y por columnas.

Análisis por filas (aprendizaje de las acciones). Este análisis implica establecer el número de grupos que realizaron la acción y, de ellos, el número de grupos que la realizaron correctamente. De esta forma, es posible comparar las acciones de acuerdo con estos resultados. La tabla 3 presenta el resultado de este análisis para el ejemplo que presentamos en el apartado anterior.

Tabla 3
Análisis de las acciones del ejemplo sobre fenómenos

	Número de grupos				
Los grupos	Todos	Muchos	Algunos	Pocos	Ninguno
La realizan	FS1		FS2,FT1,FT2	FS3,FT3	
La realizan correctamente[1]	FS2,FT1,FT2,FS3,FT3		FS1		

Muchos: más del 80%. Algunos: entre 20% y 80%. Pocos: menos del 20%.
[1]Los porcentajes para la realización correcta de la acción se refiere al total de grupos que la realizaron.

De esta forma, a cada acción le corresponde una pareja —e.g., (Muchos, Algunos)— que indica el número de grupos que la realizaron y la proporción de grupos que la realizaron correctamente. Con estos datos es posible establecer en qué medida los grupos realizaron cada acción y en qué medida la realizaron correctamente. Esto permite identificar una graduación de la dificultad de las acciones. Son más fáciles aquellas que todos o muchos grupos realizan correctamente y más difíciles aquellas que pocos o ningún grupo realizan (correctamente). En el análisis de los resultados es especialmente importante identificar aquellas acciones que fueron solicitadas en la actividad y que algunos grupos no realizaron y aquellas acciones que, aunque fueron realizadas por todos o muchos de los grupos, pocos o ningún grupo las realizaron correctamente.

En el ejemplo de la tabla 3, se aprecia que, aunque todos los grupos identificaron fenómenos (FS1), solamente algunos de ellos lo hicieron correctamente. Por otro lado, solamente algunos grupos identificaron problemas (FS2) y los utilizaron para identificar fenómenos (-FT1) y pocos grupos identificaron usos (FS3) y los utilizaron para identificar fenómenos (-FT3). Todos los grupos que realizaron estas acciones lo hicieron correctamente.

Análisis por columnas (comparación de los grupos). El análisis de la tabla por columnas permite establecer la actuación de cada grupo y comparar esas actuaciones. De este análisis se puede obtener qué aprendió cada grupo y cómo ese aprendizaje se compara con el aprendizaje de los demás grupos. En este tipo de análisis resulta especialmente relevante establecer si existe o no homogeneidad en la actuación de los grupos y buscar explicaciones en el caso de que haya heterogeneidad.

En el ejemplo de la tabla 3, observamos que los grupos se organizan en dos categorías. En la primera categoría se encuentran los grupos 1, 2 y 4 que realizan 3 o 4 de las 6 acciones y las realizan correctamente —con excepción de una acción para el grupo 4—. En la segunda categoría se encuentran los otros tres grupos que realizan una sola acción y dos de ellos no la realizan correctamente.

Análisis de tablas borrador – presentación

El segundo tipo de análisis implica codificar tanto el borrador, como la presentación final de la actividad y generar las dos tablas básicas correspondientes (del tipo de la tabla 3). En este caso, cada acción tendrá asignada una cuádrupla que indica el número de grupos que realizaron la acción en el borrador y de ellos los que la realizaron correctamente, y la misma información para la presentación. Es posible realizar diferentes tipos de análisis con esta información. Presentamos a continuación, como ejemplo, un análisis que involucra solamente el número de grupos que realizaron cada acción del análisis fenomenológico en el borrador y en la presentación. Este análisis se centra en establecer la dificultad de las acciones y de las correspondientes ideas clave que caracterizan el organizador del currículo.

Definimos la dificultad que los grupos manifestaron para una acción en función del número de grupos que la realizaron en el borrador y en la presentación. Así, una noción es difícil si máximo el 20% grupos la realizaron; es medianamente difícil si la realiza entre el 20% y el 50% de los grupos; menos difícil si la realiza entre el 50% y el 80% de los grupos; y es fácil si más del 80% de los grupos la realiza. A partir de la dificultad de las acciones, es posible establecer las dificultades que los grupos manifestaron para las ideas claves que caracterizan el organizador del currículo.

Para realizar este análisis, proponemos construir una tabla. Se ubica cada acción en la celda que corresponde al número de grupos que la realizaron en el borrador —filas— y al número de grupos que la realizaron en la presentación final —columnas—. La tabla 4 presenta los resultados de este análisis para el caso del análisis fenomenológico en MAD. Por consiguiente, las acciones difíciles se encuentran en las primeras cuatro filas y columnas de la tabla. Hemos delimitado esa zona de la tabla con una línea gruesa de color negro. La acción más difícil (-RS3) se ubica en la celda (0,0) de la tabla. Análogamente, las acciones fáciles se ubican en la última fila y columna de la tabla —celda (6,6)—. Hemos identificado esta celda con una línea gruesa en gris claro. Diferenciamos estas acciones de aquellas que se encuentran en la celdas (5,5), que denominamos medianamente difíciles, y a las que hemos asignado un borde grueso en gris oscuro. Aquellas acciones en las que los grupos progresaron del borrador a la presentación —y que denominamos progresiones— se encuentran en las celdas (0,2), (0,3) y (3,5), y se identifican en la tabla por un borde punteado.

Tabla 4
Dificultad de las acciones en el análisis fenomenológico

	Presentación						
Br.	0	1	2	3	4	5	6
0	-RS3		-CT3N	CS2			
1		FS3, -FT3 FT5					
2			FS3, -FT1 -FT2, -FT3				
3				BS2, -BT1		-RS2 -CT1	
4							
5						SS1, -SS2 -ST1, BT2 -RS1	
6							FS1, CS1 -CT4, BS1, ST2

Br.: borrador.

Los resultados de la tabla 4 permiten establecer las dificultades que los grupos de MAD manifestaron al realizar el análisis fenomenológico. Abordamos la dificultad de una idea clave atendiendo a varios criterios. El primero de ellos, que se evidencia en la tabla 4, tiene que ver con el número de grupos que realizaron las acciones correspondientes a esa idea clave. El segundo criterio tiene en cuenta el número de grupos que realizaron las acciones de manera válida en el borrador y en la presentación. En ambos casos, también establecemos el número de grupos que no realizó las acciones en el borrador y sí las realizó en la presentación. De esta forma, se pueden obtener resultados como los siguientes.

Todos los grupos distinguieron contextos en el borrador y en la presentación, pero solamente la mitad de ellos propusieron contextos válidos en el borrador. Otros dos grupos lograron hacerlo en la presentación. Todos los grupos lograron organizar los fenómenos en contextos pero ninguno usó características estructurales en el borrador y solo la mitad lo hizo en la presentación. Esto pone en evidencia la dificultad de los grupos con la idea de característica estructural.

Aunque todos los grupos identificaron subestructuras para su tema, la mitad de ellos identificaron subestructuras válidas en el borrador y dos grupos en la presentación final. Esto pone en evidencia la dificultad de los grupos con el significado de subestructura. Los grupos que identificaron subestructuras válidas fueron los mismos que hicieron referencia a la estructura conceptual.

Puesto que al menos la mitad de los grupos propusieron subestructuras que no eran válidas, la organización que hicieron de los fenómenos tampoco era válida. Esto indica que los grupos tuvieron dificultades importantes con el significado de la noción de subestructura y, por ende, con su uso técnico para organizar fenómenos.

Establecer la relación entre subestructuras y contextos es una acción que depende de que los grupos hayan establecido subestructuras y contextos válidos, y que las relaciones que establecen sean válidas. Además de las dificultades heredadas de esta dependencia, se observan dificultades de la propia idea porque: (a) de los 3 grupos que presentaron subestructuras válidas en el borrador, ninguno propuso relaciones válidas en ese documento y (b) solo uno de los dos grupos que presentó subestructuras válidas en la presentación, propuso relaciones válidas en ese documento.

Conclusiones

En este trabajo proponemos un método para analizar y codificar las producciones de los grupos de profesores en formación que participan en programas de formación basados en el modelo del análisis didáctico, con el propósito de explorar el aprendizaje de los grupos de un organizador del currículo. El método requiere de al menos un documento de los que usualmente se producen en la actividad que corresponde a ese organizador del currículo. Cuando se tiene un único documento disponible para la actividad, el método permite establecer una clasificación de las acciones de acuerdo con su dificultad en términos del número de grupos que la realizaron y, de ellos, cuántos la realizaron correctamente. Además, permite comparar las actuaciones de los grupos en términos del número de acciones que llevaron a cabo y, de ellas, cuántas las realizaron correctamente. Cuando se tienen dos o más documentos disponibles, por ejemplo borrador y presentación —como es el caso en MAD—, el método permite afinar la identificación de las dificultades que los grupos manifestaron al realizar la actividad e intuir el posible papel que pudo haber jugado la interacción de los grupos con el tutor, el formador y el coordinador local para la elaboración de la presentación. Este análisis de dificultades se puede organizar de acuerdo con las ideas claves que caracterizan el significado del organizador del currículo.

El método propuesto se fundamenta en una visión del aprendizaje de los organizadores del currículo (SUTUP). Este método permite describir algunos aspectos relevantes del aprendizaje de los grupos de profesores en formación a partir de un conjunto reducido de manifestaciones de esas actuaciones. En programas como MAD, es posible utilizar información adicional para complementar estos análisis. Por ejemplo, se dispone de los documentos de texto que los grupos producen tanto para el borrador como la presentación y las grabaciones de audio de dos de los grupos cuando preparaban sus producciones. De esta forma, es posible profundizar en la caracterización de las acciones y, por consiguiente, en el estudio de su aprendizaje.

El método propuesto concreta las ideas de acción y de dificultad como elementos centrales para la codificación y análisis de las producciones de los grupos. Una acción se refiere a una actuación concreta que los grupos pueden realizar. Las acciones deben ser observables en las producciones, surgen del análisis de la descripción conceptual del organizador del currículo y de codificaciones preliminares de los datos, y se organizan de acuerdo con las ideas clave que caracterizan su significado y con las técnicas que configuran su uso técnico. Las dificultades manifestadas por los grupos se establecen en términos del número de acciones que ellos realizan correctamente en los documentos analizados.

Los resultados que se obtienen con este método pueden indicar caminos para la mejora de la instrucción. En el caso del análisis fenomenológico en MAD, hemos establecido que es necesario una mayor profundización de aquellas ideas clave que generan más dificultades. Además, consideramos que la instrucción debe promover el desarrollo coordinado del significado y el uso técnico del organizador del currículo. Finalmente, resaltamos la importancia de los ejemplos y contraejemplos (Gómez y Cañadas, 2012).

Agracedimientos

Agradecemos a María Angélica Suavita, quien revisó y comentó una versión previa de este documento.

Referencias

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 78-89. Disponible en http://vys.uniandes.edu.co/index.php/vys/article/view/89/215

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2012). *Dificultades manifestadas por profesores en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico*. Trabajo en revisión para XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Baeza. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1882/

Gómez, P., Cañadas, M. C., Flores, P., González, M. J., Lupiánez, J. L., Marín, A., et al. (2010). Máster en Educación Matemática en Colombia. En M. T. González, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/646/

Gómez, P. y González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 27, Monterrey. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/418/

Gómez, P. y González, M. J. (2009). Conceptualizing and exploring mathematics future teachers' learning of didactic notions. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII*, 223-235. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/431/

Gómez, P. y González, M. J. (2012). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Por determinar* (pp. **-**). Por determinar: Por determinar.

Gómez, P. y Restrepo, Á. M. (2010). Organización del aprendizaje en programas funcionales de formación de profesores de matemáticas. En G. García (Ed.), *11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 22-32). Bogotá, Colombia: CENGAGE Learning. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/644/

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.

EXPLORACIÓN DEL SENTIDO ESTRUCTURAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO MEDIANTE TAREAS DE GENERAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS[1]

Danellys Vega-Castro, Marta Molina, Encarnación Castro

Universidad de Granada

Resumen

Dado nuestro interés por encontrar estrategias de enseñanza para ayudar a estudiantes de Educación Secundaria en la percepción de la estructura de igualdades algebraicas, nos propusimos realizar una investigación de carácter exploratorio. Esta investigación analiza el sentido estructural mostrado por un grupo de estudiantes al realizar tareas donde se les pide generar expresiones algebraicas distintas con estructura similar a una dada. Para el logro de este objetivo, diseñamos y aplicamos una prueba escrita a un grupo de estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria en Granada. Las producciones obtenidas nos suministraron información sobre su sentido estructural y su forma de visualizar las subestructuras que componen una expresión algebraica.

Palabras Clave: *Sentido estructural, expresiones algebraicas, estructuras, igualdades notables.*

Abstract

Our interest in finding teaching strategies to help secondary students to perceive the structure of algebraic identities leads us to perform an exploratory research. This study analyzes the structural sense shown by a group of students when solving tasks that require generating different algebraic expressions with similar structure to a given one. To reach this aim, we designed a written test and administered it to a group of secondary students from a High school in Granada. The students´ productions provide us with information about their structural sense and their way to visualize the substructures that form an algebraic expression.

Keywords: *Structure sense, Algebraic expressions, Structures, Algebraic identities.*

Con frecuencia los estudiantes de educación secundaria ponen de manifiesto falta de capacidad para aplicar técnicas algebraicas básicas en contextos distintos de los que han experimentado (Novotná y Hoch, 2008). De acuerdo con algunos investigadores como Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984), Steinberg, Sleeman, y Ktorza (1990) y Pirie y Martin (1997), los estudiantes presentan dificultades para concebir una expresión

[1] Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España; y con el apoyo otorgado a la primera autora por el Programa de Becas Doctorales que patrocina la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de la República de Panamá.

Vega-Castro, D., Molina, M., y Castro, E. (2012). Exploración del sentido estructural de estudiantes de bachillerato mediante tareas de generar expresiones algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 53-61). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

compleja como un todo y reconocer semejanzas en la equivalencia de ecuaciones. La constante percepción de las diversas dificultades manifestadas por los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas de diferentes tipos, ha originado un progresivo interés en el campo de la investigación en Educación Matemática por indagar en el conocimiento relacionado con el Álgebra escolar que poseen o desarrollan los estudiantes de educación secundaria (Kaput, 1998; Herscovics y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1994; Ruano, Socas y Palarea, 2003; Kieran, 2007; Puig, Ainley, Arcavi y Bagni 2007; Vega-Castro, Castro y Molina, 2010). Destacamos recientes trabajos de Hoch y colaboradores (2006, 2007, 2010) en los que los autores reflexionan sobre las habilidades de los sujetos que intervienen en el trabajo con expresiones algebraicas y definen el constructo sentido estructural. Dicho constructo persigue precisar las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente de las técnicas algebraicas aprendidas en la resolución de tareas escolares.

Sentido estructural

El constructo sentido estructural surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir entre las posibles actuaciones aquellas que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones con las que se está trabajando. Por estructura entendemos el conjunto de términos que componen una expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2010). Se refiere a la forma gramatical de las expresiones en términos de Esty (1992), la denomina estructura superficial de una expresión en palabras de Kieran (1991) y la estructura sintáctica según Kirshner (1989). El término sentido estructural fue utilizado por vez primera por Linchevski y Livné (1999). Posteriormente, Hoch y Dreyfus han realizado varios estudios centrados en esta noción siendo estos autores los que han avanzado en su definición dando varias definiciones e identificando una serie de descriptores.

La primera definición tentativa fue presentada por Hoch en el CERME de 2003: "reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado como guía para elegir las operaciones a realizar" (p. 2). Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2005) precisan algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. A partir de estas habilidades en 2006 presentan una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria. Indican que un alumno muestra sentido estructural en dicho contexto si realiza las acciones que se detallan en la tabla 1.

Descriptor	Definición de Hoch y Dreyfus (2006)
SS1	➢ Reconocer una estructura familiar en su forma más simple. Ejemplo: Al factorizar $81 - x^2$ • reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores.

Tabla 1. Definición y ejemplos de los descriptores del Sentido Estructural.

Descriptor	Definición de Hoch y Dreyfus (2006)
SS2	➢ Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja. Ejemplo: Al factorizar $(x-3)^4-(x+3)^4$ • tratar los binomios $(x-3)^2$ y $(x+3)^2$ como una sola entidad, • reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e • identificar los factores implicados.
SS3	➢ Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura. Ejemplo: En las tareas anteriores, • aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ para factorizar dichas expresiones.

Tabla 1. Definición y ejemplos de los descriptores del Sentido Estructural.

Observamos que esta definición está influenciada por la consideración, por parte de Hoch y Dreyfus, de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas. Luego, habilidades como *dividir una entidad en subestructuras y apreciar conexiones mutuas entre estructuras*, recogidas en la definición previa, no son enfatizadas al no considerarse incluidas dentro de estos descriptores. En este trabajo, queremos destacarlas como habilidades implícitas dentro del constructo sentido estructural, las cuales pueden ser medidas separadamente de aquellas habilidades recogidas en los descriptores, por medio de tareas tales como la agrupación de expresiones según su misma estructura o la construcción de expresiones con estructura igual a otra dada. Por este motivo, añadimos a los anteriores un descriptor (**SS4**): "Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas".

Estudio empírico

En esta investigación se persigue analizar el sentido estructural puesto de manifiesto por un grupo de estudiantes de 1º de Bachillerato, al construir expresiones con la misma estructura que unas expresiones algebraicas dadas. Las expresiones algebraicas consideradas son fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

Centramos nuestra atención en las igualdades notables debido a la relevancia que estas expresiones algebraicas tienen en los programas de estudio de matemáticas a nivel de educación secundaria por sus frecuentes aplicaciones en temas posteriores al curso básico de estudio de las mismas, tanto en matemáticas como en otras áreas. En relación con el trabajo con este tipo de expresiones se encuentran objetivos curriculares de la educación matemática en secundaria y bachillerato, tales como "reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas" y "comprender el significado de formas equivalentes de expresiones" (NCTM, 2000, p. 226 y p. 300).

Tipo de estudio y muestra

Esta investigación es de carácter exploratorio, descriptivo y cualitativo. Los sujetos que intervinieron en el estudio fueron un grupo de 33 alumnos de 1º de Bachillerato perteneciente a un centro de educación secundaria de la ciudad de Granada. La muestra fue seleccionada por el nivel educativo que cursaban los estudiantes y su disponibilidad para participar en esta investigación.

Diseño del Instrumento

Al no contar con ningún instrumento utilizado por otros investigadores que nos permitiera abordar nuestro objetivo de investigación, diseñamos una prueba tomando como guía los descriptores de sentido estructural señalados anteriormente. Se elaboró en dos fases: una primera prueba que se sometió a pilotaje con estudiantes de 4º año de secundaria, y una segunda versión definitiva. En su redacción definitiva, el instrumento consta de cuatro tareas análogas en las que se presenta una fracción algebraica y se pide al estudiante que transforme la expresión en otra equivalente más sencilla y, posteriormente, que construya una expresión diferente con estructura igual a la dada. En ambos casos se le pide que explique su respuesta con el fin de obtener información adicional sobre la forma en que ha abordado la tarea, lo que ayudará a interpretar sus producciones. La tabla 2 presenta las expresiones algebraicas propuestas a los estudiantes, las cuales involucran las cuatro igualdades notables más comunes.

Tarea	Igualdades Notables	Fracción Algebraica	Nivel de Complejidad
1	Cuadrado de una diferencia	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$	Simple
2	Propiedad distributiva/ Factor común	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$	Compleja
3	Suma por diferencia	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$	Compleja
4	Suma por diferencia Cuadrado de una suma	$\frac{(5a^2-1)(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$	Compleja

Tabla 2. Diseño de las expresiones algebraicas propuestas en cada tarea.

En esta comunicación, nos centramos en el análisis de las expresiones construidas por los estudiantes al reproducir las estructuras de las fracciones algebraicas dadas (segunda parte de las tareas). En esta parte de la tarea le sugerimos que utilizaran diferentes números y letras para enfatizar la idea de que la expresión debía ser diferente y no una equivalente a la dada. En relación a este tipo de tareas, Hoch y Dreyfus (2010) y Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky (2006) argumentan que el arte de generar expresiones o estructuras es una actividad cognitiva muy significativa y que la capacidad de inventar ejemplos de acuerdo a una situación matemática es una herramienta cognitiva de expertos, que a menudo necesitan los principiantes.

Análisis de las producciones

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas atendiendo a si conservaban la estructura de las fracciones dadas: tanto la estructura del numerador y del denominador, como la relación existente entre ambas. Estos análisis nos permitieron distinguir tres tipos de producciones —exitosas, parcialmente exitosas y no exitosas— según si se conservan las estructuras del numerador y del denominador y la relación existente entre ambas, la estructura del numerador o del denominador o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas, o no conservan la estructura ni del numerador ni del denominador. La tabla 3 recoge los casos que distinguimos en las producciones de los estudiantes.

PRODUCCIÓN	CÓDIGO	DESCRIPCIÓN DE LA PRODUCCIÓN
Exitosa	PE	Conserva las estructuras de P(x) y Q(x) relacionándolas
Parcial	PP	Conserva las estructuras de P(x) y Q(x) sin relacionarlas
No Exitosa	PQ	No conserva ninguna de las estructuras.

Tabla 3. Tipos de producción en las Tareas. [P(x) = numerador, Q(x) = denominador]

En el primer caso entendemos que el estudiante está poniendo de manifiesto un buen sentido estructural pues reconoce la estructura (familiar) del numerador y denominador y aprecia conexiones entre ambas subestructuras de la fracción. En el segundo caso el estudiante evidencia cierto sentido estructural en tanto que percibe parte de la estructura de la fracción. En el caso de las producciones no exitosas no hay muestras de sentido estructural. La figura 1 muestra ejemplos de cada uno de estos tipos de producciones.

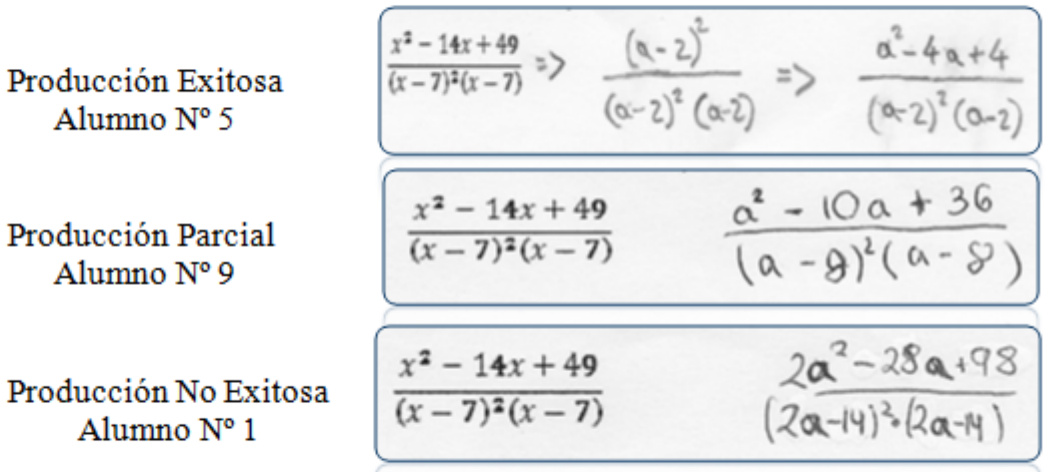


Figura 1. Ejemplos de cada tipo de producción en la Tarea 1.

En la primera producción de la figura 1 observamos que el estudiante reconoce la estructura del numerador y del denominador y la equivalencia del numerador y el binomio cuadrado del denominador, haciendo uso de la igualdad notable cuadrado de la diferencia. Esto lo justifica de la siguiente forma: *"He empleado la igualdad notable del cuadrado de una diferencia"*. En el segundo ejemplo el estudiante muestra reconocer la estructura del denominador y genera correctamente el producto de binomios. También reconoció la estructura del polinomio de segundo orden del numerador pero no percibe la relación entre los coeficientes del mismo ni de éstos con el término independiente de los binomios del denominador. La explicación dada por este estudiante fue la siguiente: "*He hecho una fracción igual pero con diferentes números y otra letra"*. En el tercer ejemplo el alumno justifica su respuesta escribiendo: *"Con la misma estructura he cambiado x por a y he cambiado números multiplicando por 2"*. Esta explicación indica que el estudiante no ha reconocido la estructura del numerador ni del denominador aunque un análisis de la construcción dada podría sugerir otra interpretación.

Clasificación de las producciones de los estudiantes

Utilizando la codificación presentada, clasificamos las construcciones de los estudiantes, como se observa en la tabla 4. El 40% de las producciones fueron exitosas el 20.4% fueron parcialmente exitosas, un 25.8% fueron producciones no exitosas y el 13.6% no fueron realizadas. Entre las producciones exitosas se observa que el mayor porcentaje corresponde a la tarea 1, mientras que sobre las tareas 2, 3 y 4 recae el mayor porcentaje de producciones no exitosas. Consideramos que este resultado se debe probablemente al hecho de que la fracción algebraica de dicha tarea sólo incluye términos simples mientras que las fracciones algebraicas de las restantes tareas (2, 3 y 4) incluyen términos compuestos. Construir una expresión algebraica que involucra términos compuestos requiere del estudiante concebir una entidad compuesta (en este caso productos y potencias) como un todo. Lo expuesto anteriormente es lo que diferencia entre los descriptores SS1 y SS2. Dentro de las tareas que involucraban términos compuestos, llama la atención el que en la tarea 4 los resultados en cuanto a la producción exitosa fueron mayores (36.4%) que en las tareas 2 y 3, (27.3% y 30.3% respectivamente) aunque un mayor número de estudiantes no responde esta tarea. Enfatizamos que la tarea 4 además de ser la última tarea, involucraba también dos igualdades notables a diferencia de las tareas 2 y 3, que solo involucraban una igualdad notable. Se necesita indagar en las características de esta tarea para explicar esta evidencia aparentemente contradictoria.

Código	**Producción**	**Tareas**				**Total**
		1	2	3	4	
PE	Conserva la estructura P(x), Q(x) y la relación entre ambas.	22 66.7%	9 27.3%	10 30.3%	12 36.4%	53 40.1%
PP	Conserva sólo la estructura de P(x) o Q(x) o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas.	3 9.1%	8 24.2%	9 27.3%	7 21.2%	27 20.4%
PQ	No conserva ninguna estructura.	8 24.2%	11 33.3%	9 27.3%	6 18.2%	34 25.8%
	No realiza	0 0.0%	5 15.1%	5 15.1%	8 24.2%	18 13.6%

Tabla 4. Frecuencia de Producciones. P(x) = numerador, Q(x) = denominador.

Niveles de Sentido Estructural

A partir de la codificación de las producciones de cada estudiante en cada una de las tareas (ver figura 2), identificamos diferentes niveles de sentido estructural puestos de manifiesto. Asociamos el nivel alto con los casos en que los estudiantes han reconocido la estructura total de las fracciones (es decir, sus producciones son exitosas) en al menos tres de las cuatro tareas. El nivel medio de sentido estructural corresponde con aquellos casos en que los estudiantes presentan producciones exitosas en la mitad de las tareas propuestas. En el resto de los casos, el sentido estructural se considera de nivel bajo o nulo según si hay alguna o ninguna evidencia de sentido estructural.

Los números ubicados en la columna izquierda indican la tarea a la que refiere. Los encabezados del resto de las columnas denotan con un número a cada uno de los estudiantes. En la figura 2 se aprecia que los primeros nueve alumnos (27%) muestran un buen sentido estructural por corresponder al menos tres de sus producciones a la conservación total de la estructura (Nº 4, 7, 20, 23, 25, 29, 14, 13, 30). Otros siete estudiantes (21%) evidencian nivel medio de sentido estructural pues en dos de las tareas sus producciones son exitosas (Nº 5, 11, 21, 33, 8, 14, 27). El nivel de sentido estructural puesto de manifiesto por el resto de los 17 estudiantes (52%) es relativamente bajo, dentro de los cuales figuran 8 estudiantes (24%) cuyo sentido estructural es nulo.

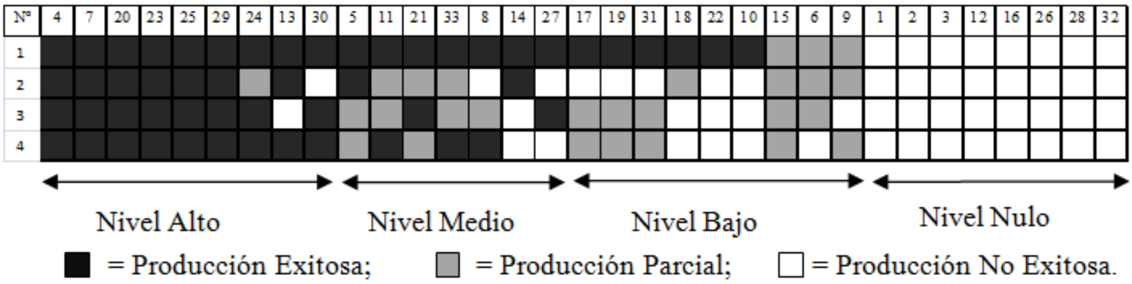


Figura 2. Nivel de SS mostrado por cada estudiante en las cuatro tareas.

Discusión y conclusiones

Dado que el objetivo de este estudio es analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato en la construcción de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, afirmamos que el instrumento diseñado en este trabajo se muestra de utilidad para inducir el uso de sentido estructural en los estudiantes. Añadido a los instrumentos considerados en investigaciones previas, las tareas aquí presentadas pueden constituir un elemento de medición del sentido estructural de estudiantes de secundaria. Así mismo se ha puesto de manifiesto la necesidad y pertinencia de considerar un nuevo descriptor para contextos o situaciones en las que no es necesario hacer transformaciones de unas expresiones dadas.

Al fijar nuestra atención en las cuatro tareas, observamos que el sentido estructural es notablemente variable entre los estudiantes participantes en este estudio. Sólo seis estudiantes (18%) generan una nueva expresión algebraica conservando la totalidad de las estructuras en las 4 tareas, tres estudiantes (9%) generan la nueva estructura conservando su totalidad en tres de las tareas, siete estudiantes (21%) generan la nueva estructura conservando su totalidad en dos de las tareas, y el resto de los estudiantes, que supera el 50%, generan la nueva estructura conservando su totalidad en una o ninguna de las tareas. El número de estudiantes que puso de manifiesto sentido estructural se redujo a la mitad cuando las expresiones incluían términos compuestos. Consideramos que son varios los factores que intervienen en la dificultad para la realización de las tareas propuestas, entre ellos, trabajar con términos compuestos (tareas 2, 3 y 4) y percibir una o parte de una expresión algebraica como un todo involucrando dentro de ella igualdades notables que son reglas fijas. También ha podido incidir el requerimiento de generar una nueva expresión, el cual no es una práctica habitual en las tareas escolares de los estudiantes.

Destacamos en este trabajo, que al relacionar los distintos niveles de sentido estructural de los estudiantes con su edad, género y rendimiento académico en la asignatura de matemáticas, dicho estudio nos permitió evidenciar que ninguna de estas variables ejerció influencia directa en el nivel de sentido estructural manifestado.

Referencias

Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11*(3), 5-6.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.
Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 14*(4), 31-53.
Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.
Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italy: ERME.
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), P*roceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 436-445). Larnaca, Cyprus: CERME
Hoch, M. y Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's algebraic structure sense. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), P*roceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 529-538). Lion, Francia: CERME
Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. Dartmouth, Massachusetts: NCISLAMS.
Kieran, C. (1991). A procedural-structural perspective on Algebra Research. En F. Furunghetti (Ed.), *Proceeding of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 245-253). Assisi. Italy: PME Program Committee.
Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, VA: NCTM.
Kirshner, D. (1989). The visual sintax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287.
Linchevski, L. y Herscovics, D. (1994). Cognitives obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 176-183). Lisboa: Universidad de Lisboa.
Linchevski, L. y Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.
Molina, M. (2010). Pensar matemáticamente en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. *Suma, 65,* 7-15.
NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Novotná, J. y Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expression or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 93-104.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 159-181.

Puig, L., Ainley, J. Arcavi, A y Bagni,G.(2007). Working on algebraic thinking. Working Group 6. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), P*roceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 812-815). Larnaca, Cyprus: CERME.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática, VII* (pp. 311-322). Granada: SEIEM.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. y Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121.

Vega-Castro, D., Castro, E. y Molina, M. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. *Presentado en el XIV simposio de la SEIEM dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico.* Lérida, 7 al 10 de Septiembre de 2010. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1555/

Wagner, S., Rachlin, S. L. y Jensen, R. J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Athens: Department of Mathematics, University of Georgia.

CATEGORIZACIÓN DE ERRORES EN LA ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE LONGITUD Y SUPERFICIE

Jesús J. Castillo-Mateo[1], Isidoro Segovia[2], Enrique Castro[2] y Marta Molina[2]

[1]IES “Algazul” (Roquetas de Mar), [2]Universidad de Granada

Resumen

En una investigación de diseño en curso sobre estimación de cantidades continuas (longitud y superficie), se han detectado importantes deficiencias en la capacidad estimativa de alumnos de 3º de E.S.O. Se ha elaborado una categorización de los errores cometidos en la realización de tareas estimativas que permite analizar el efecto, del proceso de enseñanza implementado en la capacidad estimativa de los alumnos, y la vinculación del tipo de error con la magnitud a estimar.

Palabras Clave: Magnitudes continuas, Estimación, Experimento de enseñanza, Investigación de diseño, Longitud, Superficie

Abstract

In an ongoing design research study on estimation of continuous quantities (length and surface), we detected significant deficiencies in 3[er] year of E.S.O students´ estimation ability. We have developed a categorization of errors in estimation tasks than allow to analyze the effect of the teaching process implemented on the estimation ability of the students, and to link the type of error to the magnitude to be estimated.

Keywords: Continuous magnitudes, Design research, Estimation, Length, Teaching experiment, Surface

Introducción: Origen y Planteamiento

Esta investigación supone una continuación al previo Trabajo de Investigación Tutelada (T.I.T.), que lleva por título “Estimación de cantidades continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa” (Castillo, 2006). Dicho estudio tuvo su origen en unas prácticas que realizaban los estudiantes de magisterio de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, en las que se les pedía que estimaran diversas cantidades de las magnitudes continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa. En estas prácticas se detectó que muchos de los estudiantes daban como respuesta a algunas cuestiones de estimación lo que cabría calificarse de “disparate”, en el sentido de que el error absoluto cometido era incluso superior al 100%.

La estimación es relevante para el currículo actual, pues la Estimación en Medida es en la actualidad un contenido obligatorio tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria según los reales decretos de contenidos mínimos correspondientes (el Real Decreto 1513/2006 para Primaria, y 1631/2006 para Secundaria).

El estudio que aquí presentamos trata de profundizar en las causas que provocan que los alumnos incurran en un error tan elevado. La investigación está centrada en la estimación, es decir, en el “*juicio de valor del resultado (de una operación numérica o)*

Castillo-Mateo, J. J., Segovia, I., Castro, E., y Molina, M. (2012). Categorización de errores en la estimación de cantidades de longitud y superficie. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 63-74). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

de la medida de una cantidad en función de circunstancias individuales del que lo emite" (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989, p.18). Como se deduce de esta definición la estimación tiene dos grandes campos: la estimación en cálculo o cálculo estimativo, y la estimación en medida. Nuestra investigación se centra en la estimación en medida de cantidades de magnitudes continuas, en concreto, la longitud y la superficie.

Para investigar los factores que hacen que la capacidad estimativa mejore y las dificultades que surgen al enfrentarse a tareas de estimación de cantidades continuas, llevamos a cabo un experimento de enseñanza con un grupo de alumnos de 3º curso de E.S.O. multicultural siguiendo el modelo de las Investigaciones de Diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Validez o Aceptabilidad de una Estimación

El error forma parte del conocimiento científico, y en el caso de la estimación su aceptación y el tratar de controlarlo constituye una parte esencial en el proceso enseñanza-aprendizaje.

El error admite muchos grados de incorrección, según Rico (1995): "Las características del error son muy variadas, sobre todo en cuanto al grado de incorrección: podemos estar hablando de resultados falsos, resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos deficientes o inaceptables, resultados que pueden ser correctos en un determinado contexto, pero no en otro…". Cuando se realiza una estimación, estamos emitiendo una opinión, un juicio, una valoración. Por tanto, el valor que obtenemos difícilmente va a coincidir con el exacto, va a ser un valor aproximado, al que se dará mayor o menor validez en función de las necesidades de dicha estimación. En las diferentes investigaciones llevadas a cabo en el campo de la estimación, los investigadores no se ponen de acuerdo a la hora de establecer un criterio para determinar cuándo una estimación es aceptable, válida, correcta o razonable: Paul (1971) tomó como límite el 15%; Attivo (1979) establece el criterio en ±15% de la respuesta exacta; Hildreth (1980) en 1/3 del valor exacto; Levine (1982) establece una escala graduada ,según la cuál no valora la respuestas con un error superior al 30%; Reys et al (1982) toma como límite el 10% superior de los sujetos; Siegel et al (1982) toma como límite : ±50% del valor exacto; Clayton (1992) tomo un criterio para cantidades inferiores a 100 (Criterion of Reasonableness, COR, que establece el límite en ±20% del valor real) y otro para cantidades grandes. Por lo general, la mayoría de los autores define el límite o criterio para determinar cuándo una estimación es aceptable o razonable en función de la proximidad de dicha estimación al valor considerado exacto.

En nuestro estudio consideraremos que una medida o estimación es válida o aceptable si el error relativo cometido es en valor absoluto menor o igual al 30%, límite utilizado por Levine (1982), Segovia (1997), o De Castro (2012).

En general, cuando estamos realizando estimaciones podemos hablar de dos clases de error: errores intrínsecos al proceso de estimación, y errores extrínsecos al proceso de estimación. Los primeros son debidos a las características propias del proceso estimativo. Estos errores tienen un margen o rango de aceptación que, en general, variará en función de las características de la cantidad a estimar y, sobre todo, de la finalidad de dicha estimación. Los errores extrínsecos al proceso de estimación son los derivados de conceptos mal adquiridos o procedimientos utilizados erróneamente.

Objetivos de la Investigación

El estudio que estamos realizando con un grupo de alumnos de 3º de E.S.O. persigue los siguientes objetivos específicos de investigación:

1. Analizar cómo construyen los alumnos, en la etapa de la educación obligatoria, los significados de la Estimación de Cantidades Continuas, Longitud y Superficie.
2. Detectar los errores que cometen y las dificultades que experimentan en la realización de tareas de estimación.
3. Explorar la influencia del tipo de tarea en la realización de estimaciones.
4. Analizar cómo evoluciona la Capacidad Estimativa de los alumnos con la práctica.

Para responder al segundo objetivo nos planteamos la posibilidad de realizar una clasificación de los errores. Ello nos llevó a una categorización que presentaremos a continuación.

Metodología

Describimos a continuación el grupo de sujetos que formaron parte del estudio empírico, el método de investigación y el instrumento utilizado.

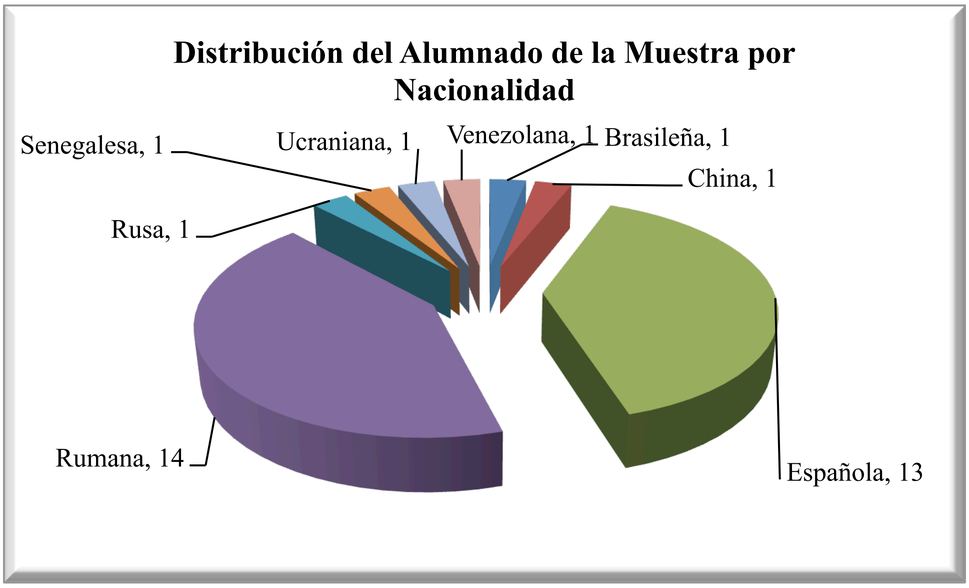


Figura 1. Distribución del Alumnado de la Muestra por Nacionalidades.

Los Sujetos

El experimento de enseñanza se realizó con un grupo de 33 alumnos del IES "Algazul" de Roquetas de Mar (Almería), centro que desarrolla un Programa de Compensación Educativa, empleando entre otras medidas de atención a la diversidad, Grupos Flexibles en algunas materias, como es la que nos ocupa. Los grupos flexibles son una forma de organizar al alumnado de cada curso en varios subgrupos teniendo en cuenta el nivel de competencia curricular del alumno (ritmo de aprendizaje y nivel de conocimientos previos). El carácter flexible de estas agrupaciones, que se organizan en la misma banda horaria, permite que se vayan integrando los alumnos paulatinamente en el grupo que sigue el currículo normal, una vez que han cubierto las carencias y lagunas de aprendizaje detectadas.

El grupo de alumnos estaba formado por 12 alumnos y 21 alumnas, de una gran variedad de nacionalidades: ocho nacionalidades distintas, de las cuales destacan dos la española y la rumana por ser las más numerosas (véase Figura 1).

Investigación de Diseño

Para alcanzar los objetivos propuestos realizamos un experimento de enseñanza que enmarcamos dentro del paradigma metodológico denominado Investigación de Diseño. En palabras de Molina et al (2011) el objetivo de este tipo de estudios es "*analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación*" (p.76). Nuestro trabajo es exploratorio y descriptivo. Pretendemos indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre, modelo que es adecuado para dar respuesta a los objetivos planteados.

La fase empírica de nuestra investigación, realizada durante el curso académico 2007/2008, consta de una sesión de evaluación inicial y otra de evaluación final y seis sesiones de trabajo intermedias en las que, utilizando diferentes agrupamientos, se propusieron a los estudiantes tareas de estimación dirigidas a incidir el desarrollo de su capacidad estimativa. En concreto, trabajamos los siguientes contenidos:

- ✓ Identificación y/o diferenciación de las magnitudes longitud y superficie.
- ✓ Representaciones de figuras planas y de cuerpos geométricos.
- ✓ Unidades de medida de longitud y superficie.
- ✓ Interiorización de referentes.
- ✓ Evaluación de errores por los estudiantes.
- ✓ Procesos o estrategias de comparación.
- ✓ Evaluación de la capacidad estimativa.

Ficha de Evaluación Inicial y Final

Nos centramos aquí en detallar la primera y última sesión (Evaluación Inicial y Final) en las cuales centraremos el apartado de resultados. En ambas sesiones los estudiantes resolvieron una misma ficha de evaluación que contenían las tareas que se presentan en la Tabla 1, organizadas en dos bloques según correspondían a estimación de cantidades de longitud o de superficie.

En las fichas los alumnos contaban con espacio suficiente tras cada tarea, no sólo para realizar las estimaciones, sino también para expresar los razonamientos que habían seguido para llegar a las mismas. Además, no se les impusieron restricciones para expresar el resultado, por tanto, pudieron escoger libremente la unidad de medida a utilizar.

Las tareas son de dos tipos siguiendo la clasificación establecida por Del Olmo, Moreno y Gil (1989): tipo A, cuando se dispone del objeto y hay que estimar la medida respecto de una unidad; tipo B, cuando se dispone de la medida de un objeto respecto de una unidad y hay que estimar de qué objeto se trata. Atendiendo a esta clasificación las tareas se clasifican como sigue:

Tareas tipo A: I.1; I.3; I.5; I.7; II.1; II.3; y II.5.

Tareas tipo B: I.2; I.4; I.6; II.2; II.4; y II.6.

El análisis de ambos tipos de tareas es diferente puesto que lo que se les pide en ellas es diferente: para las tareas del tipo A se espera que los alumnos den un resultado (valor numérico acompañado de una unidad de medida) y expresen el razonamiento de cómo llegaron a obtener dicho valor numérico; en cambio, para las del tipo B se espera que los alumnos escriban tres palabras o frases alusivas a objetos o elementos con unas medidas determinadas. La categorización de errores que presentamos a continuación clasifica los errores que tuvieron lugar en las tareas tipo A.

Numeración	Pregunta
BLOQUE I: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE LONGITUD.	
I.1	¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
I.2	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.
I.3	¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?
I.4	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m
I.5	¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?
I.6	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.
I.7	¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?
BLOQUE II: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE SUPERFICIE	
II.1	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
II.2	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm^2
II.3	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?
II.4	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m^2.
II.5	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?
II.6	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm^2.

Tabla 1. Tareas Propuestas en la Fichas de Evaluación Inicial y Final

Categorización de los Errores

Para clasificar las respuestas según los resultados y los razonamientos expresados por los alumnos consideramos la siguiente tipología de errores:

E1. Error de cálculo en las operaciones

Consideraremos que un alumno comete un error de este tipo cuando se equivoca en la realización de los cálculos. Por ejemplo, el alumno A25 responde en la tarea II.3 de la Evaluación Final que la superficie de la diana es de “15x15 cm=30 cm^2”. Como observamos el alumno suma en vez de multiplicar.

E2. Error de percepción de la magnitud

Diremos que un alumno comete este tipo de error cuando al resolver una tarea, en su argumentación pone de manifiesto que está confundiendo una magnitud con otra. Por ejemplo, el alumno A1 en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial responde que la superficie de la pizarra es de “1 m” y lo justifica: “Si la cuerda mide 1 m y medio, si ponemos la cuerda como medida nos sobrara.". Claramente está confundiendo superficie con longitud.

E3. Error de significado de términos propios de la magnitud

Un alumno comete un error de tipo E3 cuando utiliza inadecuadamente o confunde algún término relacionado con la magnitud que esta estimando. La confusión de la propia magnitud será considerada en el error tipo E2, como hemos concretado anteriormente. Por ejemplo, el alumno A5 responde en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial que la mesa mide "1 metro" y argumenta: "Porque más o menos cuando extiendes los brazos es 1 metro aproximado y lo he comparado". Entendemos a partir del razonamiento expresado, que el alumno confunde el significado de la palabra grosor.

E4. Ausencia de unidades de medida

Un alumno comete error del tipo E4 cuando expresa como resultado de una medida o estimación un valor numérico sin revelar a qué unidad de medida se refiere. Así, el alumno A23 responde en la tarea I.1 de la Evaluación Inicial que la longitud de la mesa es de "1'50", sin indicar ninguna unidad de medida.

E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas

Un alumno comete un error del tipo E5 cuando expresa la medida de una determinada cantidad de magnitud utilizando unidades de medida propias de otra magnitud. Por ejemplo, el alumno A12 en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial responde que la superficie de la pizarra mide "8 m aproximadamente", y argumenta "He multiplicado 4 m de ancho por 2 m de largo. 4·2=8 m.". Aquí podemos apreciar que el alumno se está refiriendo a la magnitud superficie, pero no ha utilizado una unidad coherente con la magnitud que está estimando al dar el resultado. Este sería un ejemplo de un alumno que incurre en error de tipo E5, pero no E2; conjuntamente también se dan.

E6. Error de conversión de unidades de medida

Un alumno comete error de tipo E6 cuando transforma la medida de una determinada cantidad de magnitud de una unidad de medida a otra, múltiplo o divisor de la anterior, y no realiza correctamente la conversión. Por ejemplo, el alumno A13 en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial indica que 2.5 metros son "0'25 dm".

E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar

Un alumno incurre en un error del tipo E7 cuando no tiene interiorizada una medida adecuada o aceptable de algún referente de la magnitud a estimar. Por ejemplo, el alumno A6 responde, en la tarea I.1 de la Evaluación Final, que la longitud de la mesa del profesor es "2 metros" porque "Si una mesa de alumno mide un metro la mesa de profesor mide aproximadamente dos mesas de alumno". El referente utilizado (la mesa del alumno) medía 70 cm de largo (incurre en un porcentaje de error del 42.9%). El origen de este error es que no tiene interiorizada una medida adecuada para el referente que utiliza.

E8. Interiorización inadecuadas de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar

Un alumno comete error del tipo E8 cuando no tiene interiorizada una cantidad adecuada o aceptable de una unidad de medida del Sistema Internacional. Consideramos que el alumno comete este error cuando compara directamente con las unidades de medida del Sistema Internacional o utiliza sus múltiplos o divisores tomando como unidad de medida una cantidad que no se corresponde con dicha unidad de medida. Por ejemplo, el alumno A21 responde en la tarea I.7 de la Evaluación Inicial que la longitud de la cuerda es de "cuatro metros" y argumenta "La he dividido en 4 partes, para ver si un cuarto, equivaldría a un metro. Sí equivale. Por lo que la cuerda mide cuatro m. aproximadamente". Aquí el alumno compara la cuarta parte de la cuerda con la idea que tiene interiorizada de lo que es un metro y llega a la conclusión de que son iguales, incurriendo en un error del 33.3% (recordemos que la cuerda medía 3 metros) fuera del margen de aceptabilidad que hemos establecido.

E9. Error en la comparación de cantidades

Un alumno comete error del tipo E9 cuando realiza una comparación e iguala cantidades que no lo son, dando lugar a una estimación no aceptable.

Este tipo de error puede ser de tres subtipos:

a) Error en la comparación por igualdad de cantidades

Un alumno comete este error cuando considera iguales cantidades que no lo son. Por ejemplo, el alumno A14 respondió en la tarea I.7 de la Evaluación Final que la longitud de la cuerda era de "2 m" razonando: "He comparado la cuerda con la longitud de la puerta que tiene 2 m y creo que son aproximadamente iguales. Creo que tiene unos 2 m". Si tomamos como válida la medida de la longitud de la puerta (ya que medía 2.05 m), y teniendo en cuenta que la medida exacta de la cuerda era 3 m obtenemos un porcentaje de error de -33%.

b) Error en la comparación aditiva de cantidades

Un alumno incurre en este error cuando obtiene un resultado fuera del margen de aceptabilidad mediante la suma de la medida de dos cantidades o la diferencia de cantidades. Por ejemplo, el alumno A11 contesta en la tarea I.1 de la Evaluación Final que la longitud de la mesa del profesor (recordemos que medía 1.4 m) es de "1 metro", y argumenta: "Nuestra mesa mida más o menos 70 cm, y he pensado que la del profesor sería un poco más grande así que le he sumado 30 cm; 70+30=100 cm=1 m."

c) Error en la comparación multiplicativa de cantidades

El error lo comete el alumno al comparar una cantidad con un múltiplo de la otra cantidad o con un divisor de la otra cantidad y obtener un resultado fuera del margen de aceptabilidad. Por ejemplo, el alumno A10 responde en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial que el grosor de la mesa sobre la que escribía era de "4 cm" justificándolo del siguiente modo: "porque sé que 1 cm es como 2 cuadritos de hoja de libreta normal y si la mesa es 4 veces más gorda significa que tiene 4 cm". Como el grosor de la mesa era de 2 cm obtenemos que el alumno incurrió en un error del 100%.

E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos

Diremos que un alumno comete error del tipo E10 cuando obtiene la estimación de la medida empleando una fórmula inadecuada. Consideramos que una fórmula inadecuada es aquella que no nos permite hallar una aproximación de la cantidad pedida. Las fórmulas inadecuadas son frecuentemente fórmulas erróneas. Por ejemplo, el alumno A4 utiliza en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial como fórmula para medir el área de la pizarra: "2'5+1'5=4m; Longitud+Altura=4 m". Lógicamente, el alumno está utilizando una fórmula errónea, y por tanto, inadecuada.

Los errores descritos los clasificamos por una doble vía (véase Tabla 2): según el carácter del error, tenemos errores conceptuales y procedimentales; y atendiendo a la relación con el proceso estimativo tenemos errores intrínsecos al proceso estimativo, que son los que se producen en la actividad propiamente estimativa, y los errores extrínsecos al proceso estimativo, que son los debidos a otros conceptos o procedimientos deficientemente adquiridos, como pueden ser los asociados a la magnitud o a su medida.

Tipos de Error	Carácter	Relación con el Proceso Estimativo
E1. Error de cálculo en las operaciones	Procedimental	Extrínseco
E2. Error de percepción de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E3. Error de significado de términos propios de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E4. Ausencia de unidades de medida	Conceptual	Extrínseco
E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas	Conceptual	Extrínseco
E6. Error de conversión de unidades de medida	Procedimental	Extrínseco
E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E8. Interiorización inadecuadas de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E9. Error en la comparación de cantidades	Procedimental	Intrínseco
E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos	Procedimental	Extrínseco

Tabla 2. Clasificación de los Tipos de Error

Las anteriores categorías de error están referidas a estimación de longitudes y superficies. En muchos casos en los que los estudiantes estiman superficies, detectamos que al utilizar técnicas indirectas de estimación, como es el empleo de fórmulas matemáticas, la estimación de la superficie se reduce a estimar cantidades de la magnitud longitud y emplear dichas cantidades en la fórmula. Hay una tipología de error que solo tiene sentido para la magnitud superficie.

E11. Error por propagación de la longitud a la superficie

Diremos que un alumno comete error del tipo E11 cuando utiliza una fórmula adecuada en la estimación de la superficie, pero realiza una estimación deficiente de diferentes cantidades de la magnitud longitud, que utiliza posteriormente en la fórmula matemática, lo cual da lugar a que el porcentaje del error en la estimación de la magnitud superficie supere el 30%, y en consecuencia, la estimación sea no aceptable.

Para aplicar esta categoría no profundizaremos en la valoración de los motivos por los cuales las estimaciones de la magnitud longitud son deficientes, ni qué porcentaje de error se comete al realizar dichas estimaciones, ya que lo que nos interesa es controlar que el porcentaje de error de la estimación de la magnitud superficie no supere los límites establecidos (30% en nuestro caso). Téngase en cuenta que es posible que las estimaciones de la magnitud longitud sean aceptables (en el sentido de que no superan el 30%), pero resulte que la estimación de la magnitud superficie sea no aceptable. Por ejemplo, el alumno A21, en la tarea II.3 de la Evaluación Final estima que el área de la diana es "530'66 cm²". Estimación no aceptable (superior al 30%), porque comete un error relativo del 39.65% (recordemos que el valor considerado exacto es 380 cm^2). En este caso el alumno utiliza la fórmula del área del círculo correctamente, pero comete un error al estimar el radio de la diana, ya que indica que el radio "estimado a simple vista valdría 13 cm". Sin embargo, el error que comete al estimar el radio es aceptable, ya que tan sólo comete un error relativo del 18.18% (el valor considerado exacto del radio es de 11 cm). La explicación para esta propagación del error la encontramos en la Teoría de Errores. En nuestro caso, si llamamos "r" al radio exacto y "e" al error cometido al estimar el radio, al aplicar la fórmula del área del círculo se obtiene:

$$A_e = \pi(r+e)^2 = \pi(r^2+e^2+2re) = \mathrm{A} + \pi(e^2+2re)$$

En el desarrollo se observa que el área estimada "A_e" es igual al área exacta "A" más un residuo: "$\pi(e^2+2re)$" que es el error cometido en la estimación de la superficie, y depende del error cometido al estimar el radio "e" y del valor exacto del propio radio "r".

No incluimos el error E11 en la Tabla 2 pues su clasificación depende de la naturaleza del error en que se incurre cuando se estima la magnitud longitud.

Resultados del Análisis de Errores

Las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las tareas tipo A, de la Evaluación Inicial y Final, son clasificadas atendiendo a la tipología anteriormente descrita. El proceso de clasificación ha sido realizado por tres investigadores, resolviéndose por consenso los desacuerdos. A partir de dicha clasificación generamos las frecuencias relativas utilizadas en los gráficos de la Figura 2, para la Evaluación Inicial, y de la Figura 3, para la Evaluación Final.

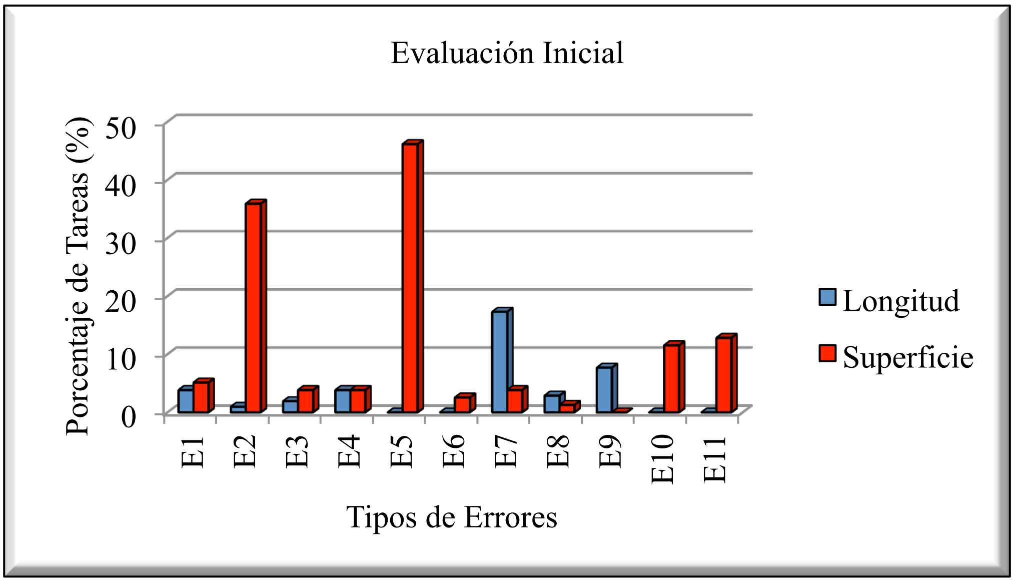


Figura 2. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en la Evaluación Inicial.

Resultados en la Evaluación Inicial

La Figura 2 muestra las frecuencias relativas en porcentaje de error de los diferentes tipos de error en la Evaluación Inicial. Observamos como para las estimaciones de longitudes el error más frecuente es del tipo E7 (se presenta en el 17.31% del total de tareas evaluadas) seguido del E9 (en el 7,69% del total de tareas), errores intrínsecos al proceso estimativo. En cambio, para las estimaciones de superficies los errores más frecuentes son el E5 (se presenta en el 46.15% del total de tareas) y el E2 (35.9% del total de tareas), ambos son errores conceptuales extrínsecos al proceso estimativo, seguidos del error E11 (12.82%) y E10 (11.54%) que son errores asociados al uso de fórmulas matemáticas, por tanto, errores procedimentales extrínsecos al proceso estimativo de superficies.

Resultados en la Evaluación Final

En el caso de la Evaluación Final observamos (véase Figura 3) que se mantienen como más frecuentes los mismos tipos de error que para la Evaluación Inicial, aunque disminuyen las frecuencias para casi todos ellos. En las estimaciones de longitudes el tipo de error más frecuente sigue siendo el E7 (14.42%) seguido del E9 (1.92%). En las estimaciones de superficies los tipos de error más frecuentes son el E5 (14.1%), el E2 (11.54%), el E11 (11.54%) y el E10 (6.41%). En las estimaciones de superficies de la Evaluación Final disminuyen los errores extrínsecos a procesos estimativos respecto de la Evaluación Inicial, además algunos de ellos considerablemente, como ocurre con el E5 o el E2. Sin embargo, aumentan las frecuencias de los errores intrínsecos a procesos estimativos, como ocurre con el E8, E7 o E9. Esto creemos que es debido a que los alumnos, en la Evaluación Final, se "atrevían" a realizar estimaciones directas de las superficies, evitando tener que recurrir a fórmulas matemáticas, más frecuentes en la Evaluación Inicial.

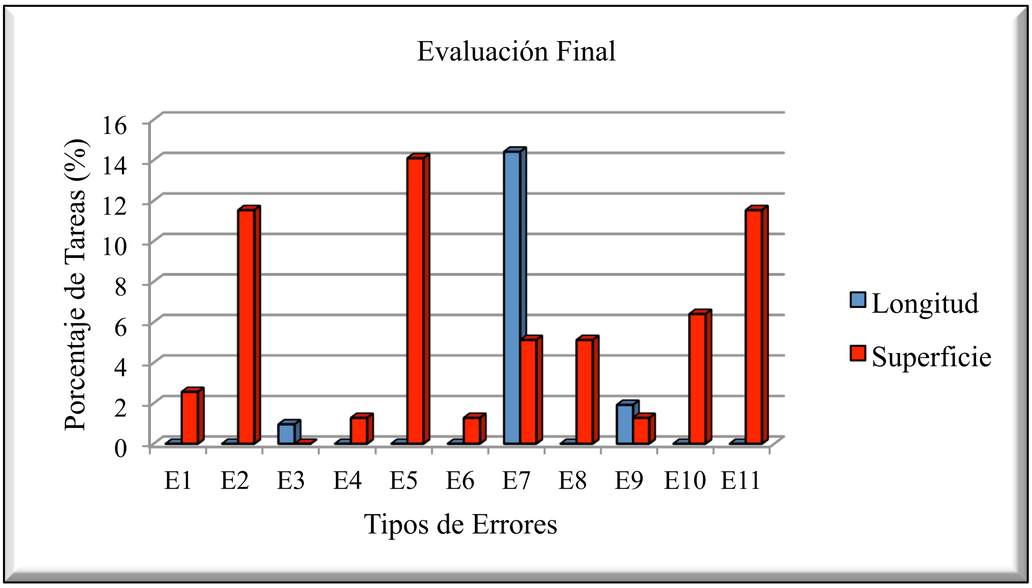


Figura 3. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en la Evaluación Final.

Comparativa Evaluación Inicial-Evaluación Final

Realizamos la comparativa de errores entre las tareas tipo A de la Evaluación Inicial-Final distinguiendo la magnitud a estimar:

a) Para las tareas de estimación de longitudes:

La Figura 4 muestra como disminuyen las frecuencias de todos los tipos de error para las estimaciones de longitudes. El error más frecuente sigue siendo el E7, error propio de procesos estimativos.

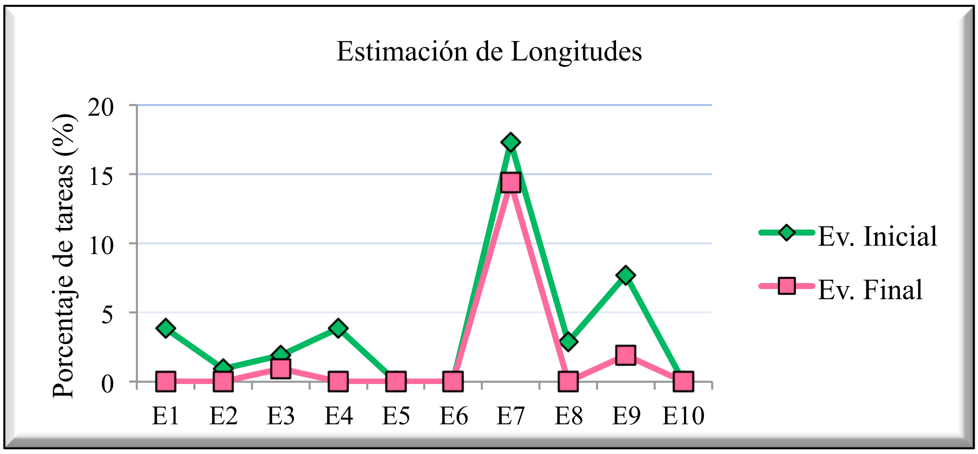


Figura 4. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en las Estimaciones de Longitudes

b) Para las tareas de estimación de superficies:

Es aquí donde encontramos una mejoría más notable (véase Figura 5), pues el número de respuestas erróneas desciende para casi todos los tipos de error, en algunos casos drásticamente, como ocurre con los tipos E2 o E5. Esto nos sugiere que se produjo una mejora en la interiorización del concepto de superficie y en el uso de sus unidades de medida. El error del tipo E10 también disminuye. Esto supone que las tareas de estimación de superficies propuestas contribuyeron a la interiorización de fórmulas matemáticas.

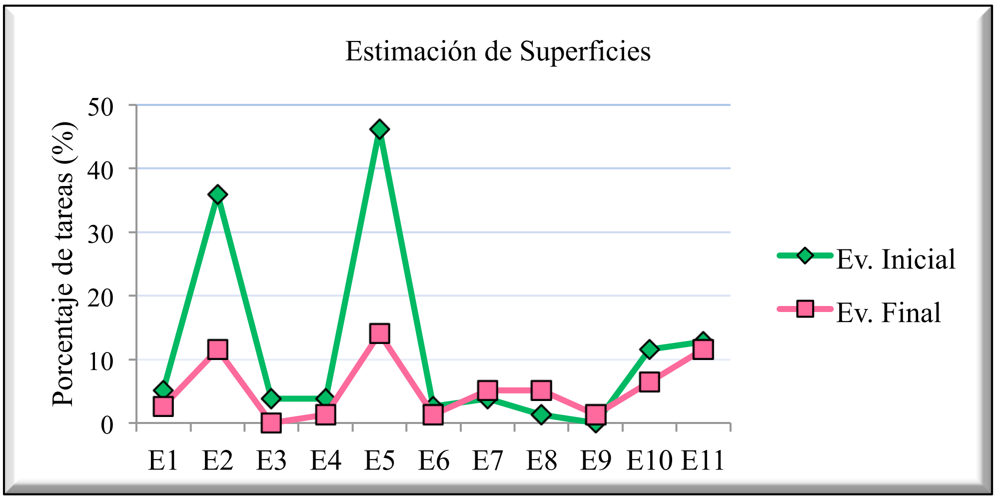


Figura 5. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en las Estimaciones de Superficies

Conclusiones

Las conclusiones que presentamos a continuación son relativas a los resultados obtenidos con una muestra de conveniencia, y por tanto, con una representatividad limitada. En consecuencia, las conclusiones que se derivan servirán como una primera prospección.

Concluimos que los alumnos en las estimaciones ponen de manifiesto cierto dominio conceptual y procedimental de la magnitud longitud y su medida y sin embargo manifiestan falta de dominio conceptual y procedimental para la magnitud superficie

Esto supone, para el caso de la superficie, un obstáculo para evaluar la capacidad estimativa de los alumnos.

Los alumnos, manifiestan tendencia al uso de fórmulas matemáticas cuando realizan estimaciones de superficies. Posiblemente, porque la enseñanza no trabaja lo suficiente la medida directa de superficies.

Aunque la estimación mejora con la práctica, hay unos errores que son más persistentes que otros. Por ello, creemos que la estimación debería ser trabajada transversalmente, poniéndola en práctica en cualquier tarea que se preste. Además, la estimación constituye un campo de trabajo que permite detectar deficiencias conceptuales y procedimentales básicas, al mismo tiempo que constituye un campo de entrenamiento para el manejo de conceptos y destrezas relativos a las magnitudes y a su medida.

Referencias

Attivo, B. J. (1979). *The Effects of Three Instructional Strategies on Prospective Teacher's Ability to Estimate Length and Area in the Metric System.* PhD. Pensilvania: Universidad del Estado de Pensilvania.

Castillo, J. J. (2006). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa.* Granada: Universidad de Granada.

Clayton, J. (1992). *Estimation in Schools*. Londres: Universidad de Londres.

De Castro, C. (2012). *Estimación en Cálculo con Números Decimales: Dificultad de las Tareas y Análisis de Estrategias y Errores con Maestros en Formación.* Granada: Universidad de Granada.

Del Olmo, M.A.; Moreno, M.F.; Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con formulas?* Madrid: Síntesis.

Hildreth, D. J. (1980). *Estimation Strategy Use in Length and Area Measurement Tasks by Fifth and Seventh Grade Students.* PdD. Columbia: Universidad del Estatal de Ohio.

Levine, D. (1982). Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 350-359.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29* (1), 75-88.

Paull, D. R. (1971). *The Ability to Estimate in Mathematics*. EdD. Nueva York: Universidad de Columbia.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez (Eds.). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos.* Granada: Comares.

Siegel, A. W., Goldsmith, L. T. y Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education. 13*(3), 211-232.

MODELIZACIÓN CON FUNCIONES

Eugenia Marmolejo, François Pluvinage y Gonzalo Zubieta

Cinvestav, IPN. México

Resumen

En álgebra las variables juegan diferentes papeles, uno de ellos es el de parámetro. Nuestro interés en los parámetros surge de la gran utilidad que tienen en problemas prácticos que se pueden resolver con modelos matemáticos. En esta plática presentaremos una actividad que se llevó a cabo en una escuela particular de la Ciudad de México con alumnos que estaban cursando el último año de bachillerato. El objetivo de esta tarea de modelización matemática fue que los alumnos evaluaran y mejoraran la funcionalidad de un modelo dado que describe el movimiento de un montacargas. Los resultados de este experimento exploratorio dan evidencia de que hace falta insistir en el análisis cualitativo de la situación que se está modelando.

Palabras clave: Parámetros, modelización, pensamiento funcional.

Abstract

In algebra the variables play different roles, one of them is the role of parameter. Our interest in parameters arises from the great value they have in practical problems that can be solved with mathematical models. In this talk we present an activity that took place in a private school in Mexico City with students who were attending the last year of high school. The objective of this task of mathematical modeling with functions was that students assess and improve the functionality of a given model describing the motion of an elevator. The results of this exploratory experiment give evidence that it is necessary to insist on a qualitative analysis of the situation being modeled.

Keywords: Parameters, modeling, functional thinking.

En Álgebra las variables juegan diferentes papeles, uno de ellos es el de parámetro. Nuestro interés en los parámetros surge de la gran utilidad que tienen en problemas prácticos que se pueden resolver con modelos matemáticos. Entre los obstáculos que hubo que superar, durante el desarrollo histórico del concepto de parámetro, Drijvers (2003) cita las siguientes:

1) sus diferentes significados;
2) la distinción de las variables ordinarias y las que juegan el papel de parámetros; y
3) la percepción de expresiones como objetos que representan soluciones generales.

A estos mismos problemas se enfrentan los alumnos en el salón de clases. Nos interesó la actividad que presentaremos porque permite diferentes acercamientos y soluciones como veremos más adelante e involucra la manipulación de parámetros para mejorar un modelo dado.

Montacargas

En la actividad participaron seis alumnos entre 16 y 19 años de edad que estaban cursando el nivel superior de matemáticas a nivel bachillerato. El objetivo del trabajo

Marmolejo, E., Pluvinage, F., y Zubieta, G. (2012). Modelización con funciones. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 75-84). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

fue que los alumnos evaluaran y mejoraran la funcionalidad de un modelo dado que tiene dos parámetros y describe el movimiento de un montacargas. El bachillerato internacional es un curso de dos años durante los cuales los alumnos hacen otras investigaciones que se analizan y discuten en el salón de clase. Al final del curso hacen un trabajo final individual que deben completar en, a lo más, cinco horas. Analizaremos el trabajo final de dos alumnos: Carmen y Sebastián. A los alumnos se les dieron las siguientes especificaciones:

Actividad Montacargas[1]

En esta actividad, primero vas a explorar un posible modelo para un montacargas que se usa para transporte de equipo y ascenso de minerales. Vas a evaluar las fortalezas y debilidades del modelo y finalmente, vas a crear las especificaciones para desarrollar tu propio modelo.

Análisis del modelo dado.

La fórmula $y = 2.5t^3 - 15t^2$ representa la posición y de un elevador medida en metros ($y = 0$ representa el nivel del suelo) donde t representa el tiempo medido en minutos ($t = 0$ es el tiempo de inicio). Sabemos que el viaje de ida y vuelta, sin tomar en cuenta el tiempo que está abajo, es aproximadamente de seis minutos y que la profundidad del pozo vertical es aproximadamente de 100 metros.

Grafica el desplazamiento, la velocidad y la aceleración y usa estas funciones para:

a) Explicar el significado de los valores negativos, positivos y cero de la gráfica de la velocidad.

b) Explicar las relaciones entre velocidad y aceleración en los intervalos en los que el montacargas aumenta la velocidad, disminuye la velocidad o está en reposo.

c) Evaluar la utilidad e identificar los problemas del modelo dado.

Crea tu propio modelo.

1. *Haz una lista de especificaciones para rediseñar el modelo del montacargas.*
2. *Crea tu propio modelo. Puedes usar una sola función o puedes definir una función por pedazos.*
3. *Explica por qué tu modelo satisface las especificaciones del problema y mejora el modelo dado.*

Aplica tu modelo.

Explica qué tipo de modificaciones se le pueden hacer a tu modelo para usarse en otras situaciones.

[1] International Baccalaureate, 2008.

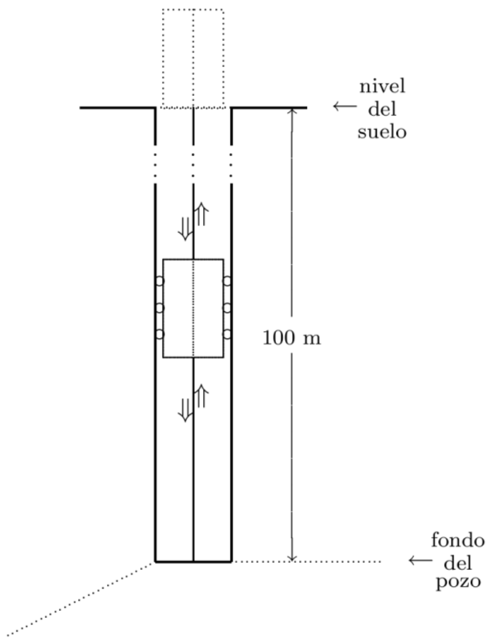


Figura 1: Montacargas.

Observemos que el modelo propuesto se puede escribir en la forma

$$f(t) = 2.5t^3 - 15t^2 = 2.5t^2\left(t - \frac{15}{2.5}\right) = 2.5t^2(t-6)$$

y que, por lo tanto, es un elemento de la siguiente familia de funciones

$$f_a(t) = at^2(t-6)$$

En la siguiente gráfica mostramos elementos de esta familia:

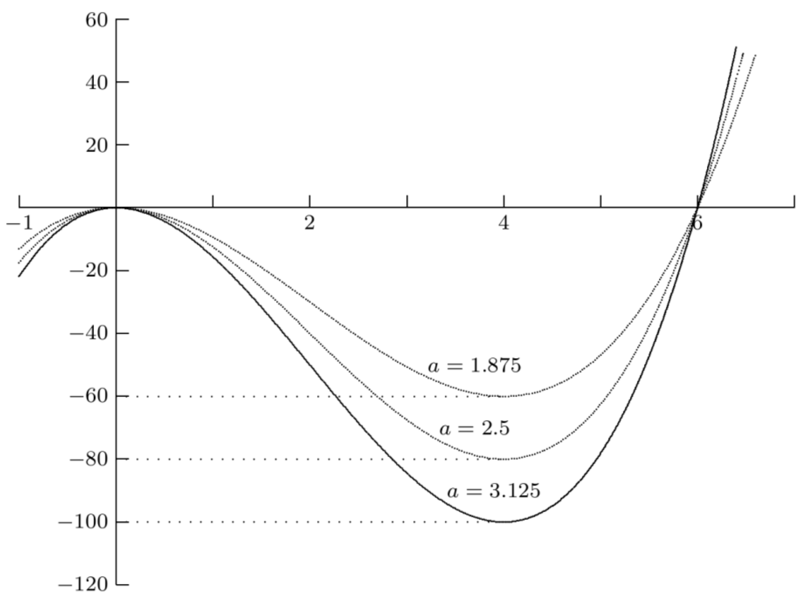


Figura 2: $f_a(t) = at^2(t-6)$

Para todos los elementos de esta familia, que dependen del parámetro a, se cumple que $f_a(0) = 0$, $f_a(6) = 0$, $f_a'(0) = 0$ y $f_a'(4) = 0$.

Sin embargo, estas funciones presentan varios defectos: no son simétricas, el descenso es más lento que el ascenso. El montacargas no se detiene al regresar ya que la derivada en $t = 6$ no es cero. Con el valor propuesto $a = 2.5$, no se alcanza la profundidad del pozo que es de 100 metros. Para encontrar el valor de a con el que se alcanza esta profundidad (ver figura 2), debemos resolver la ecuación

$$-100 = a(4^2)(4 - 6),$$

de donde obtenemos$a = 3.125$. Fijando a con este valor, se alcanza la profundidad del pozo, pero no se corrigen los otros defectos ya señalados. En consecuencia, podemos suponer que en esta actividad se espera, por parte de los alumnos, una propuesta alternativa para corregir los problemas mencionados.

Resultados

Para hacer su propio modelo, *Carmen* consideró que el montacargas:

1. Debería llegar al fondo del pozo.
2. Se debía detener totalmente cuando llegara al nivel del suelo.

Su estrategia para rediseñar el modelo fue la siguiente: Por ensayo y error y utilizando un software dinámico, fue modificando los parámetros a y b de la función$f(t) = at^3 + bt^2$ para ajustar la gráfica de tal forma que el mínimo se acercara a -100 metros. Finalmente eligió el valor 2.3 para el parámetro a y -15.2 para b. En la siguiente figura se puede apreciar que el modelo es muy sensible a la variación de los parámetros:

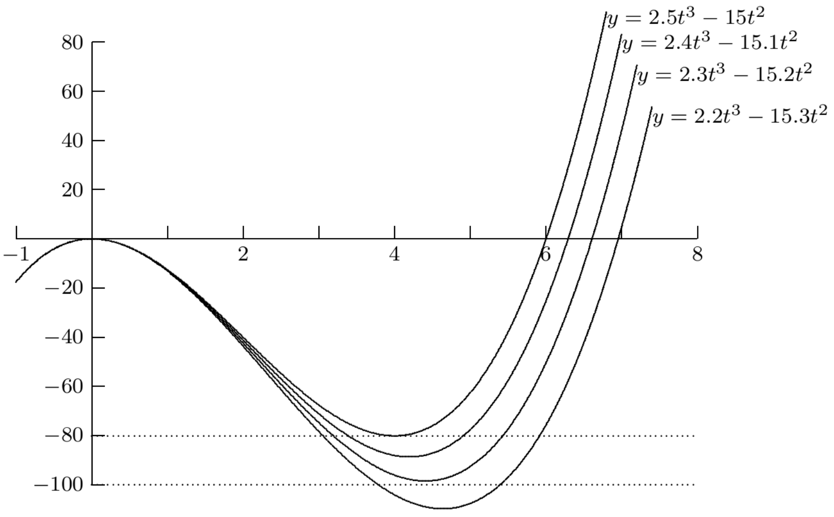


Figura 3: Variación de los parámetros en $f(t) = at^3 + bt^2$

Con este método de prueba y error obtuvo la función: $f_1(t) = 2.3t^3 - 15.2t^2$ (recordemos que el modelo dado es $y = 2.5t^3 - 15t^2$).

Consigue su primer meta ya que el valor mínimo de $f_1(t)$ es -98.35 que se alcanza a los 4.4 minutos. Sin embargo, todavía tiene el problema de que el montacargas no se detiene cuando sube. Para resolverlo, Carmen decide reflejar el pedazo de la gráfica de $f_1(t)$ entre $t = 0$ y $t = 4.4$ usando como eje de reflexión la recta $t = 4.4$. De esta forma conserva el mínimo; y como la gráfica es simétrica, la velocidad al inicio y al final del recorrido es cero.

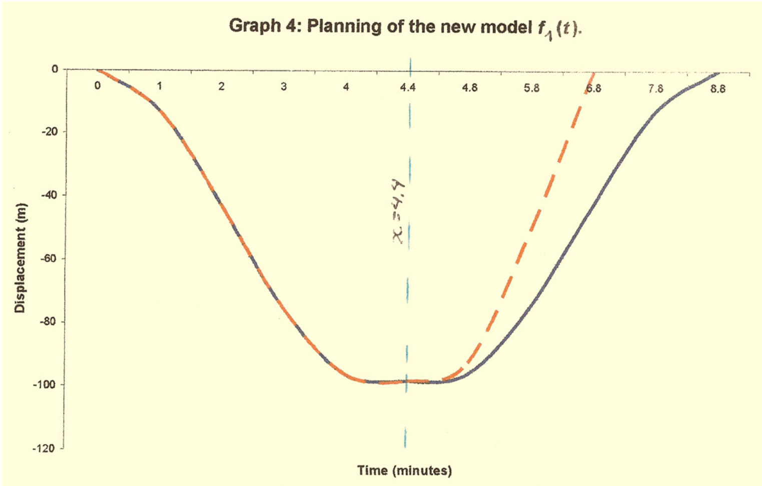


Figura 4: Planeando el nuevo modelo

Con esta estrategia, obtiene una gráfica que puede funcionar como modelo. Para obtener una función que se ajustara a su gráfica hizo un acercamiento discreto, tabuló $f_1(t)$ para seis valores de t; y luego, completó la tabla con valores simétricos. A continuación recreamos su idea en la siguiente tabla:

t	$f_1(t)$
0	0
1	-12.9
2	-42.4
3	-74.7
4	-96
4.4	-98.35 ← punto mínimo

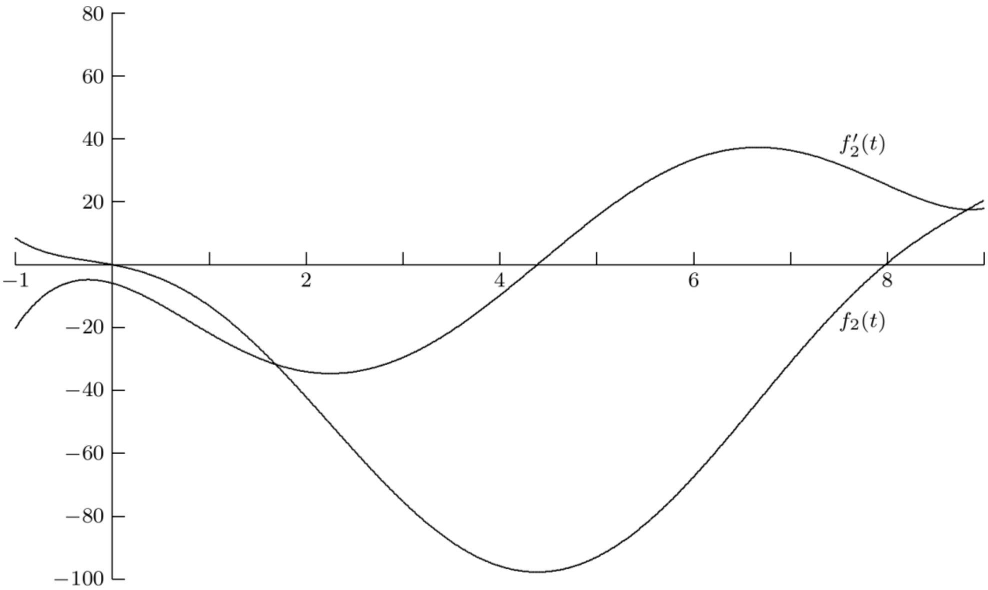
valores simétricos:

$f_1(t)$	t
0	8.8
-12.9	7.8
-42.4	6.8
-74.7	5.8
-96	4.8

Su técnica ahora fue usar *Excel* para ajustar un polinomio a sus datos. La función que obtiene es la siguiente:

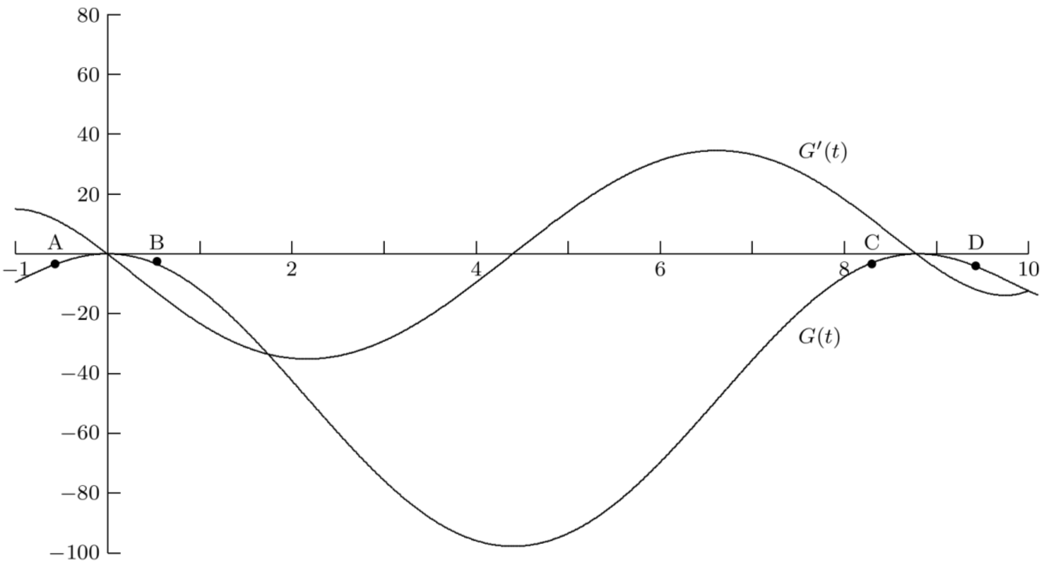
$$f_2(t) = 0.0085t^6 - 0.2234t^5 + 1.9027t^4 - 4.6561t^3 - 4.218t^2 - 5.869t + 0.0191$$

Lo que Carmen no verificó en su modelo fue que el montacargas se detuviera al nivel del suelo, es decir, que la velocidad al principio y al final fuera cero; si hubiera graficado la función y su derivada, quizá podría haberse percatado de esta falla. En la siguiente figura presentamos las gráficas de $f_2(t)$ y $f_2'(t)$, donde puede apreciarse que el elevador sólo se detiene en el fondo, cuando $t = 4.4$, pues $f_2'(4.4) = 0$; pero, aunque $f_2(0) = f_2(8.8) = 0$, se puede verificar que la derivada no es cero, y por lo tanto la velocidad en $t = 0$ y en $t = 8.8$ es diferente de cero.



Cabe observar que sería difícil modificar el modelo que propone Carmen para usarlo en otros pozos.

Su procedimiento es adecuado, sin embargo, de acuerdo a su estrategia, hubiera sido suficiente agregar algunos puntos en la tabla, como por ejemplo $A(0.5714, 3.5185)$, $B(0.5357, -2.5926)$, $C(8.2286, -2.5926)$ y $D(9.3357, -3.5185)$ antes de hacer el ajuste, de tal forma que se forzara un punto crítico al principio y otro al final, que aseguraran que la derivada ahí fuese cero. Sea $G(x)$ la función que resulta del ajuste hecho de esta manera. En la siguiente gráfica podemos apreciar como quedan $G(x)$y su derivada:



Por su parte, *Sebastián* hace la siguiente observación. Si la posición está dada por

$$s(t) = 2.5t^3 - 15t^2 \quad \text{metros,}$$

entonces

$$v(t) = s'(t) = 7.5t^2 - 30t \quad \text{m/min}$$

$$a(t) = s''(t) = 15t - 30 \qquad \text{m/min}^2$$

Como en el modelo dado la aceleración tiene la forma $a(t) = mt + c$, decidió que en su modelo también debía ser así. Por lo tanto, debía calcular los parámetros m y c.

Además decidió que el montacargas bajaría en 3 minutos y subiría en 3 minutos, en lugar de bajar en 4 y subir en 2; y que la profundidad máxima a la que llegaría sería 80m. Definió una función en dos partes, una para el descenso de $0 \le t \le 3$ (los primeros tres minutos), y otra para el ascenso (de $3 \le t \le 6$). Para la primera parte supuso que la aceleración estaba dada por

$a_1(t) = m_1 t + c_1$ para $0 \le t \le 3$ (1)

de donde

$$v_1(t) = \int_0^t a_1(x)dx = \int_0^t (m_1 x + c_1)dx = \frac{m_1}{2}t^2 + c_1 t \qquad (2)$$

$$s_1(t) = \int_0^t v_1(x)dx = \int_0^t (\frac{m_1}{2}x^2 + c_1 x)dx = \frac{m_1}{6}t^3 + \frac{c_1}{2}t^2 \qquad (3)$$

Supone que a la mitad del tiempo de descenso, el montacargas alcanza su máxima velocidad, de donde concluye que si $t = \frac{3}{2}$, entonces $a_1(t) = 0$. Sustituye estos datos en (1) y obtiene la ecuación

$$\frac{3}{2}m_1 + c_1 = 0 \quad (4)$$

Además establece la condición de que a los tres minutos el montacargas alcanzará una profundidad de 80 metros, es decir,

$s_1(3) = -80$

y a partir de la ecuación (3) obtiene una segunda ecuación:

$$\frac{3^3}{6}m_1 + \frac{3^2}{2}c_1 = \frac{27}{6}m_1 + \frac{9}{2}c_1 = -80$$

De esta forma, con esta ecuación y la (4), obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m_1 + c_1 = 0 \\ \frac{27}{6}m_1 + \frac{9}{2}c_1 = -80 \end{cases}$$

de donde obtiene los valores para los parámetros:

$$c_1 = -\frac{160}{3} \quad \text{y} \quad m_1 = \frac{320}{9}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1), (2) y (3) obtuvo

$$a_1(t) = \frac{320}{9}t - \frac{160}{3} \quad \text{m/min}^2$$

$$v_1(t) = \frac{160}{9}t^2 - \frac{160}{3}t \quad \text{m/min}$$

$$s_1(t) = \frac{160}{27}t^3 - \frac{80}{3}t^2 \quad \text{m}$$

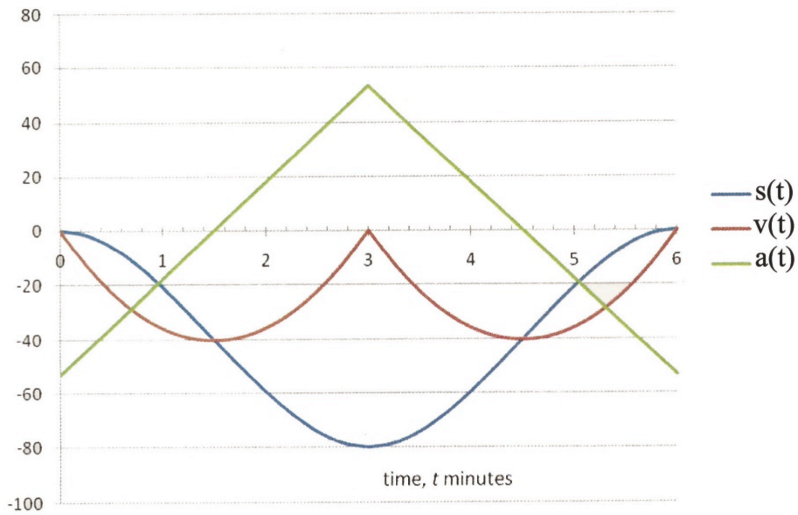
Ahora bien, para definir el segundo pedazo de las funciones (de $3 < t \le 6$), basándose en la gráfica de a_1, decide reflejar verticalmente con respecto a la recta $t = 3$; analíticamente hace primero lo siguiente

$$a_2(t) = a_1(3-(t-3)) = a_1(6-t)$$

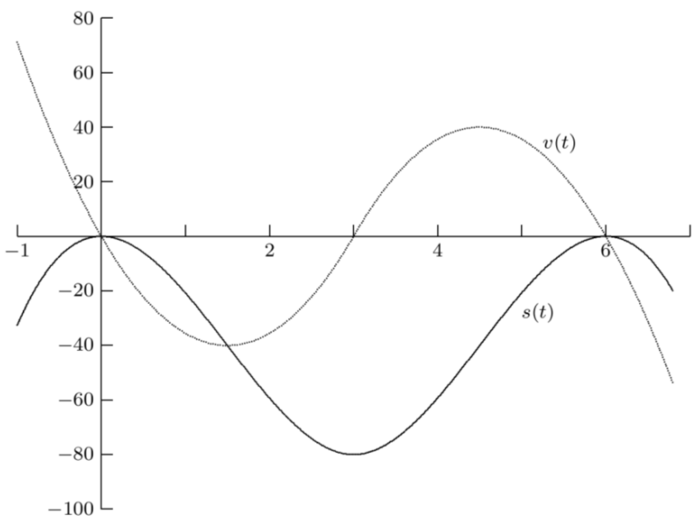
Aplica el mismo razonamiento para encontrar $v_2(t)$ y $s_2(t)$, y posteriormente presenta las tres funciones

$$a_2(t) = a_1(6-t)$$
$$v_2(t) = v_1(t-6) \leftarrow \text{aquí tiene un error}$$
$$s_2(t) = s_1(6-t)$$

Y sus gráficas:



El procedimiento que sigue lo lleva a conseguir un buen candidato para $s(t)$, aunque parte de la premisa incorrecta de suponer que las tres funciones son simétricas con respecto a la recta vertical $x = 3$. Bastaba con definir $s(t)$ a partir de s_1 y s_2 tal y como lo hace él, y luego simplemente derivar para calcular $v(t)$ y $a(t)$. En la siguiente gráfica mostramos el modelo propuesto por Sebastián con la versión correcta de la derivada:

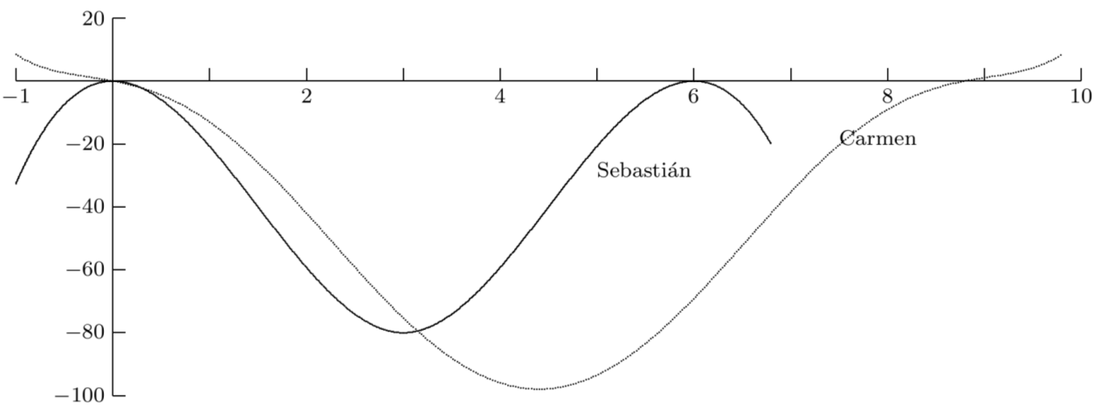


Es un buen modelo en el que fácilmente se puede cambiar la profundidad y el tiempo total del ascenso y descenso: basta establecer el tiempo de descenso y la profundidad deseada en la ecuación (5), es decir

$$s(t_d) = P$$

donde los parámetros t_d y P son el tiempo que tarda el montacargas en descender y la profundidad deseada, respectivamente.

Podemos ver que Carmen y Sebastián se aproximaron con estrategias y técnicas muy distintas entre sí. En la siguiente figura mostramos las gráficas de los dos modelos, la de Carmen en línea punteada y la de Sebastián en línea continua.



Conclusiones

Los resultados de este experimento exploratorio dan evidencia de que hace falta insistir en el análisis cualitativo de la situación que se está modelando. Así diseñada, la actividad definitivamente invitó a los alumnos a usar polinomios, toda vez que el modelo original propuesto pertenece a dicha familia de funciones. Nos cabe ahora la inquietud de pensar, con más ambición, en la posibilidad de que los alumnos cuenten con una variedad más amplia de familias de funciones, aunque por supuesto esto requeriría del correspondiente entrenamiento previo para los alumnos.

Monzó y Puig (en prensa) señalan la importancia del conocimiento de diversos tipos de funciones, ya que este tipo de conocimiento desempeña un papel importante al momento de decidir qué tipo de función será la que se use como modelo. Señalan también la importancia del conocimiento de las formas canónicas, por el significado de sus parámetros y los efectos que se producen al introducir variaciones en sus valores, lo cual resulta muy apropiado para sustentar las intenciones de nuestro trabajo.

Para nuestra actividad del montacargas, se podrían considerar, por ejemplo, la familia de las trigonométricas. Las funciones seno y coseno tienen la forma básica que se está buscando para el montacargas. Por ejemplo, podríamos proponer el modelo original definido por

$$f(t) = 50 \ \text{sen} \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) - 50; \text{o análogamente,} \quad f(t) = 50 \ \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 50.$$

Y a través de un correcto manejo de los parámetros –que, dicho sea de paso, es el objetivo de nuestra investigación– podemos transformar la amplitud y el período, en este caso de la función $f(t) = a \ \text{sen}(bt - c) + d$ [análogamente, $f(t) = a \ \cos(bt - c) + d$]

para conseguir las mejoras requeridas al modelo. De esta manera, incrementaríamos las opciones para elegir un modelo más eficiente.

Reconocimientos

Queremos hacer explícito nuestro agradecimiento a la M. en C. Susana Cristina Martínez Sánchez por el profesionalismo con el que fueron elaboradas las figuras, así como la revisión técnica y corrección de estilo del documento.

Agradecemos el apoyo brindado por CONACYT.

Finalmente, les damos las gracias a los alumnos Carmen y Sebastián sin cuyo trabajo no hubiese sido posible el nuestro.

Referencias

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter* (Tesis doctoral). Disponible en: http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0925-101838/inhoud.htm

Monzó, O. y Puig, L. (en prensa). *Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones*. En T. Rojano (Ed.) “Tecnologías digitales en la clase de matemáticas”, (pp. *-*). México: Ed. Trillas.

NÚCLEO COMÚN DE LA ACTUACIÓN DE TUTORES EN UN PROGRAMA DE FORMACIÓN DE POSTGRADO PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Marlene Arias[1] y Pedro Gómez[2]

[1]Universidad de Carabobo, [2]Universidad de los Andes

Resumen

En este estudio se describe la actuación de los tutores en un programa híbrido de formación de postgrado para profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. En este programa, los grupos abordaron el análisis didáctico de temas como números enteros, introducción al lenguaje algebraico, ecuaciones lineales con una incógnita y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Codificamos y analizamos los comentarios de los tutores a los trabajos de los grupos de profesores en formación a su cargo. Para ello, construimos una estructura de categorías y códigos conjugando una revisión de literatura, una visión del aprendizaje de los profesores en formación y una revisión cíclica de los datos. En este trabajo destacamos el proceso seguido para caracterizar las actuaciones comunes de los tutores mediante el análisis de frecuencia de sus comentarios.

Términos clave: Formación de profesores, Matemáticas, Secundaria, Tutorías y caracterización de tutores

Abstract

In this study, we characterize the performance of the mentors in a blended in-service mathematics teacher master education program. In this program, the groups performed the didactic analysis of topics such as integers, introductory algebraic language, linear equations with one unknown and systems of linear equations solving. We coded and analyzed the mentors' comments to their trainees group work. We designed a categories and codes structure based on a literature review, a perspective on trainees' learning and a cyclic checking of the data. In this paper, we emphasize the process used to characterize the common core of the mentors' performance through the frequency analysis of their comments.

Keywords: *Teacher education, Mathematics, Secondary, Mentoring and characterization of mentors*

En los últimos años se han realizado múltiples investigaciones sobre programas de formación de profesores en los que se hace énfasis en el trabajo colaborativo, en el sentido de que quienes se forman trabajan en grupos, construyendo activamente los conocimientos requeridos en colaboración con otros (e.g., Borko, 2004). La guía y el apoyo que formadores y tutores proporcionan a los profesores en formación es una de las características de este tipo de programas (Borko, 2004). En este tipo de programas también destaca la interacción entre los grupos de profesores en formación con sus tutores (Llinares, 2008; Murphy, Mahoney, Chen, Mendoza y Yang, 2005). Para

Arias, M., y Gómez, P. (2012). Núcleo común de la actuación de tutores en un programa de formación de postgrado para profesores de matemáticas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 85-96). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

comprender mejor el proceso de interacción se hace necesario conocer el papel que juegan los tutores. Numerosas investigaciones que han estudiado a los tutores, sus roles y funciones (e.g., Wang, 2008) destacan la importancia de las relaciones entre tutores y tutorandos en los procesos de aprendizaje de los profesores en formación. En el ámbito de la Educación Matemática, también ha ido creciendo el número de trabajos de investigación que tratan sobre el papel del tutor y la formación profesional de docentes: se ha estudiado la cooperación que brindan los tutores a profesores en formación, en relación con la construcción de su conocimiento del contenido pedagógico en matemáticas (Nilssen 2003, 2010). En este estudio centramos nuestra atención en la actuación de los tutores en un programa de maestría en Educación Matemática en el que ellos acompañaron a grupos de profesores en formación que abordan el análisis didáctico de temas de matemáticas escolares —números enteros, introducción al lenguaje algebraico, ecuaciones lineales con una incógnita y resolución de sistemas de ecuaciones lineales— . Exponemos el proceso de investigación seguido para caracterizar la actuación común de los tutores cuando comentaron por escrito las producciones de sus grupos de tutorando y algunos resultados relevantes del estudio.

Contexto

El estudio tiene como contexto la cohorte 2009-2011 de un programa de formación de profesores a nivel de maestría que se conoce como MAD[1]. MAD es un programa de maestría de profundización en Educación Matemática, implementado en una modalidad de aprendizaje híbrido. Se desarrolla en la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia, para profesores de matemáticas en ejercicio de educación básica secundaria y educación media (11 a 16 años). Los profesores en formación se organizan en grupos y cada grupo trabaja sobre un tema de las matemáticas escolares a lo largo de los dos años del programa, con el propósito de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica sobre el tema (Gómez, Cañadas, Flores, González, Lupiánez, Marín *et al.*, 2010). Cada grupo tiene un tutor que revisa y comenta el trabajo del grupo a su cargo en cada una de las 32 actividades que configuran el programa. Los tutores y formadores del programa son profesores de la Universidad de los Andes y de las universidades españolas de Almería, Cantabria y Granada.

Cada grupo escoge un tema matemático concreto y realiza un ciclo del análisis didáctico (ver el procedimiento de análisis didáctico en Gómez, 2007) sobre su tema. El análisis didáctico se configura alrededor de cuatro análisis que conforman un ciclo: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Cuando se realiza cada uno de los análisis, se ponen en juego los organizadores del currículo (Rico, 1997). Un organizador del currículo (a) es una noción que forma parte del conocimiento disciplinar de la Educación Matemática y (b) permite analizar un tema matemático con el propósito de producir información sobre el tema que sea útil en el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas (Rico, 1997, pp. 45-46).

El programa dura 2 años. Consta de ocho módulos distribuidos en cuatro semestres, cada módulo con 4 actividades. En la figura 1, presentamos la estructura de los módulos que integran el programa.

[1] MAD: Máster en Análisis Didáctico. Utilizamos esta abreviatura para referirnos a la concentración en Educación Matemática de la maestría en Educación del Centro de investigación y Formación en Educación de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia.

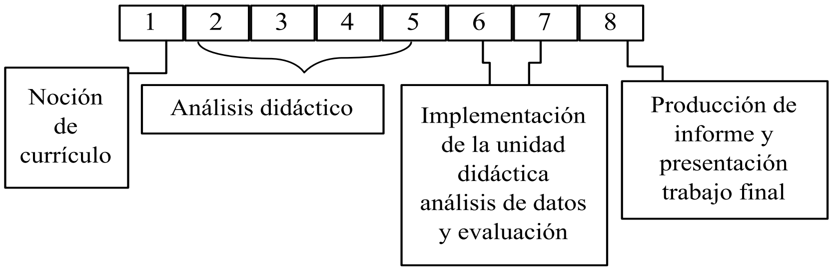


Figura 1. Organización de los módulos en MAD

El tutor acompaña al grupo de profesores en formación a su cargo a lo largo de todo el programa. Su función es comentar el trabajo del grupo guiándolo en cada una de las actividades. De esta forma, el tutor construye una visión integrada del proceso de aprendizaje de su grupo, y de los avances y dificultades que experimenta en el proceso. Además, él logra enlazar los resultados de cada actividad y hacer recomendaciones y orientaciones concretas. En este sentido, el tutor juega un papel esencial.

Marco conceptual

Con el propósito de caracterizar la actuación de los tutores, asumimos una posición con respecto al aprendizaje de los profesores en formación para el tipo de programa objeto de este estudio y revisamos la literatura existente en cuanto a roles y funciones de los tutores y categorías que se han usado en diversas investigaciones para caracterizar su actuación. Por último destacamos la estructura de categorías propuesta.

Aprendizaje de los organizadores del currículo

Los grupos de profesores en formación realizan cada etapa del análisis didáctico abordando secuencialmente su tema desde la perspectiva de los organizadores del currículo que lo componen —por ejemplo: estructura conceptual, sistema de representaciones, fenomenología, entre otros—. El análisis del tema con un organizador del currículo tiene como propósito producir información sobre el tema que sea útil para otros análisis o para el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica; se fundamenta en el significado de ese concepto; y se configura alrededor de un conjunto de técnicas para realizarlo. Nuestro interés se centra en los conocimientos que caracterizan el aprendizaje de los organizadores del currículo. Nos basamos en trabajos de Gómez y González (e.g., Gómez y González, 2008) para describir esta visión y usar los elementos conceptuales que lo caracterizan en la descripción y caracterización de la actuación del tutor y de los grupos de profesores en formación.

Al abordar su tema con un organizador del currículo, los profesores en formación necesitan (a) comprender cada organizador del currículo para (b) usarlo al analizar un concepto matemático y producir una información que, a su vez, (c) puede ser utilizada, posiblemente en conjunción con la información proveniente de otros organizadores del currículo, con un propósito didáctico concreto. Estos aspectos establecen tres tipos de conocimiento que un profesor en formación puede desarrollar en relación con un organizador del currículo:

1. conocer el organizador del currículo de tal forma que, por ejemplo, sea capaz de distinguir instancias de esa noción con respecto a un tema de las matemáticas escolares;

2. desarrollar las técnicas necesarias para usar el organizador del currículo como herramienta de análisis de un tema de las matemáticas escolares y producir información relevante sobre el tema; y
3. desarrollar las técnicas necesarias para usar la información sobre el tema para tomar decisiones a la hora de analizar el tema con otro organizador del currículo o para el diseño de la unidad didáctica.

Gómez y González denominan a estos tres tipos de conocimiento *significado*, *uso técnico* y *uso práctico* de un organizador del currículo y los caracterizan como se describe a continuación.

Significado. El significado de un organizador del currículo se refiere al conocimiento disciplinar relacionado con el organizador del currículo que los formadores de ese programa han seleccionado como opción dentro de aquellas disponibles en la literatura. El significado de un organizador del currículo se presenta en términos de sus propiedades y sus relaciones con otros conceptos. Estos conceptos son las ideas clave que configuran su significado.

Uso técnico. El uso técnico de un organizador del currículo se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran útiles para producir información sobre el tema.

Uso práctico. El uso práctico se refiere al conjunto de técnicas que los formadores consideran que son necesarias para usar la información que surge del uso técnico en los análisis con otros organizadores del currículo o en el diseño de la unidad didáctica.

Nos basaremos en estas tres nociones y en sus relaciones para caracterizar el aprendizaje de los grupos de profesores en formación y la actuación de los tutores cuando interactúan con los grupos a su cargo.

Roles y funciones del tutor y categorías de análisis

Los expertos distingue diferentes roles y funciones de los tutores, y destacan su papel de guía en la construcción nuevos conocimientos y prácticas (e.g., Borko, 2004). También consideran que el tutor es un apoyo a otros que están encontrando su camino en la profesión (Jaworski y Watson, 1994). En el ámbito de la educación matemática se considera que, a través de reflexiones con el tutor, quienes se forman como profesores pueden desarrollar el conocimiento del contenido pedagógico en matemáticas (e.g., Nilssen, 2010).

Revisamos en la literatura trabajos en donde se han caracterizado actuaciones de tutores (e.g., Van Looy y Vrijsen, 1998) y los resumimos en cuatro dimensiones —informativa o correctiva, de sugerencias o reflexivas, afectiva o valorativa, y de precisión en su comentario—. Con base en estas dimensiones, en la visión de aprendizaje de los organizadores del currículo en la que se fundamenta el programa de formación y la revisión previa de los comentarios de los tutores, construimos una estructura de categorías para el análisis de la actuación de los tutores.

Sistema de categorías

Generamos una estructura de categorías que nos permitió caracterizar, entre otros aspectos, las actuaciones que son comunes en el conjunto de los tutores. Estas categorías surgen de tres fuentes: de una visión del aprendizaje de los organizadores del currículo, de las dimensiones descritas anteriormente, y de la revisión de documentos generados por los tutores en el programa de formación objeto de este estudio. Según su estructura lógica y relaciones, organizamos las categorías en tres grupos: (a) de contenido didáctico; (b) con énfasis en la orientación; y (c) con énfasis en el formato. La figura 2 muestra cada grupo con sus respectivas categorías.

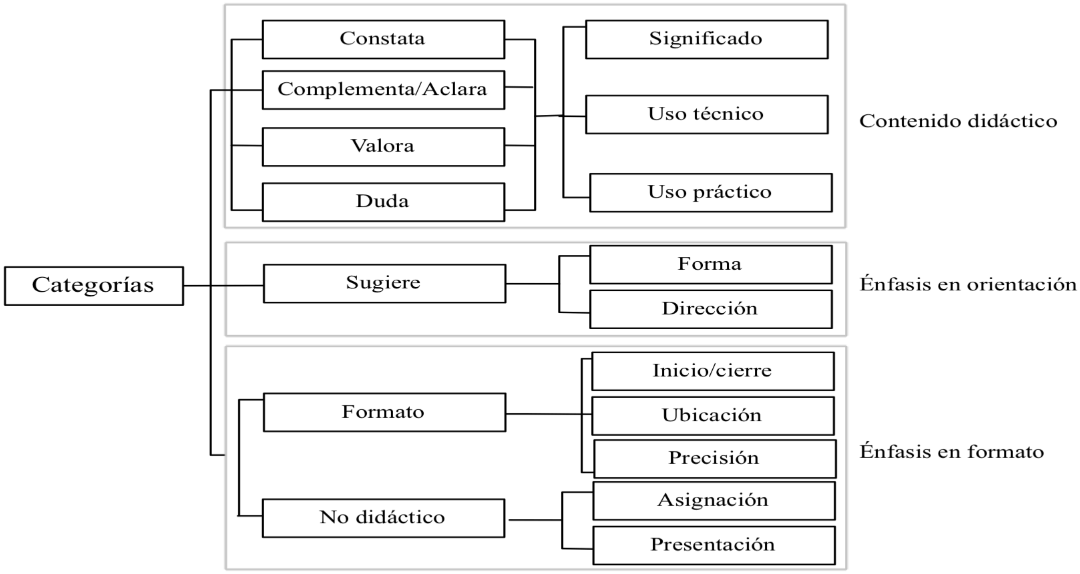


Figura 2. Categorías para la caracterización de la actuación de los tutores

Hay cuatro categorías que se refieren al contenido didáctico. Por ejemplo, el tutor puede constatar características del trabajo de su grupo de tutorandos. Los comentarios del tutor en este grupo de categorías se pueden clasificar en uno de los tres tipos de conocimientos mencionados anteriormente —significado, uso técnico o uso práctico—.

Agrupamos los comentarios donde el tutor hace énfasis en la orientación de acuerdo con la forma en que se expresa cuando hace sugerencias a su grupo de tutorandos —sugiere en forma de pregunta, de manera directa, generando dudas o invitando a reflexionar—. También organizamos en esta categoría los comentarios de acuerdo con la orientación de la sugerencia —si le indica la revisión de bibliografía, revisión de trabajos anteriores, entre otros aspectos—.

Las categorías que constituyen el conjunto énfasis en formato reúnen los comentarios de los tutores en los que ellos expresan observaciones sobre la asignación de la actividad o la presentación del trabajo. También se ubican en este grupo las categorías que aluden a la forma en que se expresa o ubica el comentario.

Objetivo del estudio

El objetivo de nuestro estudio consistió en caracterizar el núcleo común de las actuaciones de los tutores en relación con sus comentarios escritos. Delimitamos el estudio al análisis de los comentarios a los borradores correspondientes a las actividades que configuran los módulos sobre análisis de contenido y análisis cognitivo.

Método

En este apartado, exponemos brevemente el tipo de estudio realizado, describimos los sujetos, los datos, el procedimiento seguido para la construcción de categorías y códigos, la codificación de los datos, y la elaboración de instrumentos y procedimientos para el análisis de los datos. También presentamos los aspectos contemplados para la realización del análisis de frecuencias que nos permitieron describir la actuación común del conjunto de los tutores.

Tipo de estudio, muestra y datos

Nuestro estudio fue de tipo exploratorio-descriptivo. Fue de carácter exploratorio porque hicimos una primera aproximación a la caracterización de la actuación de los tutores. Su carácter descriptivo viene dado por el hecho de describir la actuación de los tutores, sin pretender explicar por qué actúan de una forma determinada.

Los sujetos del estudio fueron los 6 tutores de la primera cohorte de MAD. Todos ellos son doctores en Didáctica de la Matemática y pertenecen a diferentes universidades españolas. Trabajamos con base en sus comentarios a los borradores de los trabajos de su grupo de tutorandos. Consideramos un total de 48 documentos, 8 por tutor, correspondientes a las 8 actividades de los módulos de análisis de contenido y análisis cognitivo.

Nuestros datos fueron los comentarios escritos de los tutores a los borradores de los trabajos de su grupo de tutorandos. La unidad de análisis es un segmento de texto —frase, oración o párrafo— donde el tutor expresa su opinión sobre determinado aspecto del trabajo de sus tutorandos. Es un texto que contiene una información que es posible asociar con uno o más códigos. A continuación presentamos ejemplos de comentarios codificados. Se indica el tutor (T1) y la actividad (A 2.4).

T1-A2.4: *Podéis revisar bibliografía sobre los números relativos, eso os puede ayudar a organizar información sobre la suma y la resta de números enteros. (El tutor sugiere que revisen bibliografías referidas a su tema*)

T1-A2.1 Los elementos simétricos dentro de los enteros o la propiedad de la simetría que se puede observar en el conjunto de los enteros no la veo reflejada. *(El tutor constata que falta información referida al tema)*

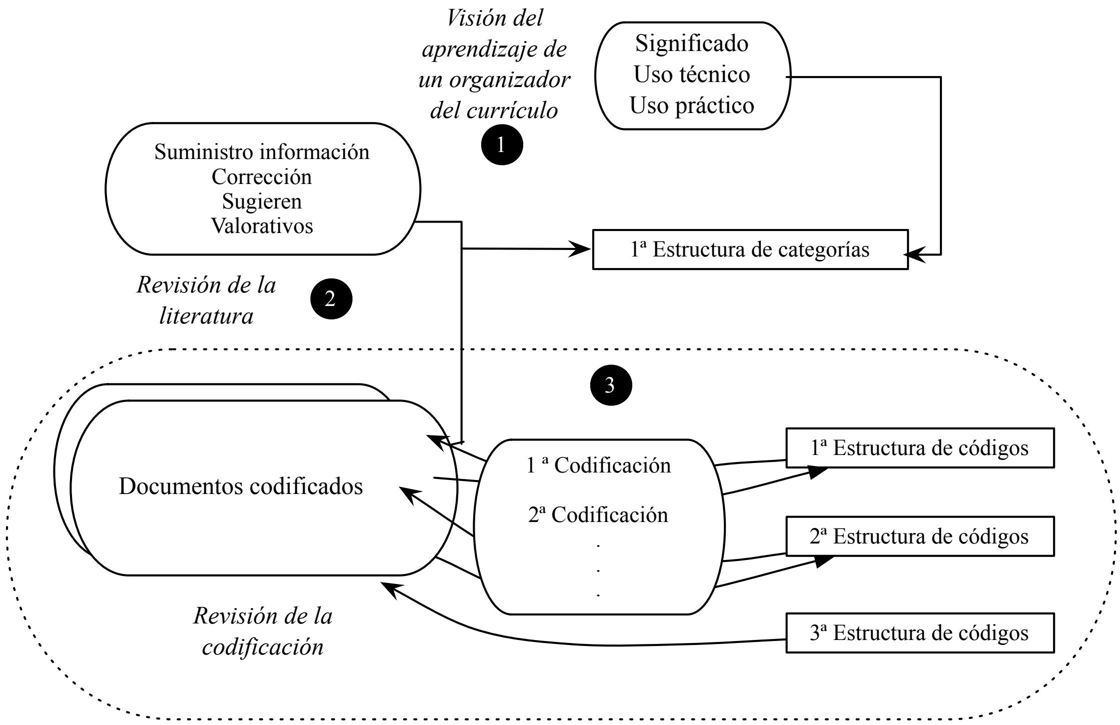


Figura 3. Proceso para la construcción de categorías y códigos

Construcción de códigos y codificación

Realizamos un proceso iterativo que nos permitió establecer, a partir de la propuesta de la figura 2, la estructura de categorías y códigos con los que codificamos y analizamos los datos. La figura 3 muestra este proceso.

La primera versión de la estructura de categorías y subcategorías se construyó, como se describió anteriormente, con base en la revisión de la literatura —paso 1— y el marco conceptual —paso 2—. Definimos unos códigos que concretaban estas categorías y, con ellos, realizamos primer proceso de codificación —paso 3—. De manera inductiva, con la revisión de los datos de nuestro estudio, se modificó esa lista. El paso 3 es un proceso cíclico y sistemático, en el que las categorías y códigos se transformaron hasta considerar que teníamos un listado de códigos claro, excluyente y que permitía caracterizar la actuación de los tutores. Generamos 52 códigos que daban significado operacional a las categorías y permitieron analizar los comentarios de los tutores (ver figura 4).

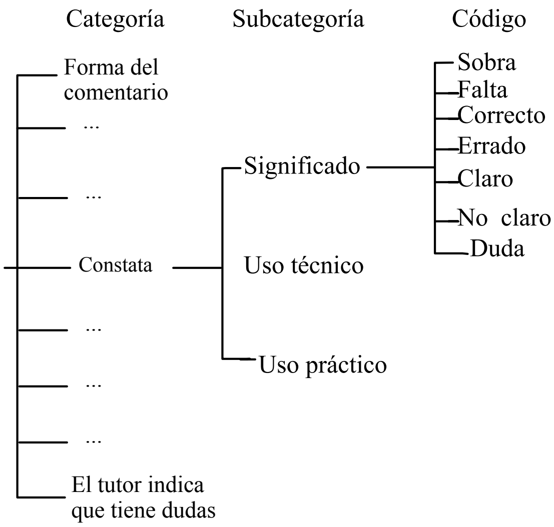


Figura 4. Organización por categorías, subcategorías y códigos

Procesamiento para el análisis de los datos: análisis de frecuencias

La realización del análisis de frecuencias tiene como propósito distinguir elementos comunes en la actuación de los tutores. Contamos con los valores porcentuales por cada tutor para cada código. Estos valores se organizaron por actividad, por los totales de cada módulo y por el total de los dos módulos juntos. Trabajamos con los valores correspondientes a los dos módulos conjuntamente.

Utilizamos la estructura de categorías, subcategorías y códigos para hacer un análisis escalonado de los datos. Produjimos una tabla que contiene los porcentajes de comentarios de tutores por categorías, subcategorías y códigos. Con base en los datos de la tabla, elaboramos gráficos de barras para representar estos resultados. En lo que sigue, definimos lo que consideramos el núcleo común de los tutores y las condiciones que establecimos para poder determinarlo.

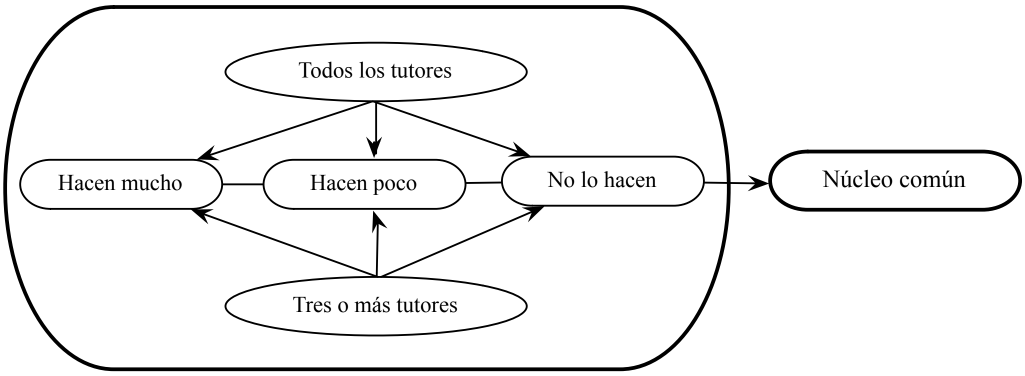


Figura 5. Consideración en el Núcleo Común

Núcleo común de la actuación de los tutores

El núcleo común está configurado por las características de la actuación de los tutores (de acuerdo al sistema de categorías, subcategorías y códigos) que al menos tres de ellos presentan (o no presentan) y que permiten describir esa actuación. La figura 5 resume las consideraciones que hemos establecido para definir el núcleo común.

Fijamos valores de referencia que vinieron dados por el grado de concentración de la información. Estos valores fueron 4% y 1%. Si tres o más tutores tienen valores por encima del 4% para un código determinado, entonces dicho código se considera dentro del conjunto de lo que hacen mucho. Por otra parte, si tres o más tutores tienen valores por debajo del 1% en un código, entonces ese código pertenece al conjunto de lo que hacen poco o no hacen. Discriminamos una dimensión positiva y una dimensión negativa del núcleo. En el primer grupo de características, se resalta lo que frecuentemente hacen los tutores. Lo denominamos núcleo común positivo. El segundo grupo de características se refiere a lo que los tutores hacen menos, o nunca hacen. Lo denominamos núcleo común negativo.

Resultados

En este apartado presentamos los resultados más relevantes del estudio asociados con las características que destacan en el núcleo común de la actuación de los tutores. En la figura 6 se muestra para cuáles códigos tres o más tutores tienen valores por encima del 4% o por debajo del 1%. Para el caso de la categoría tutor constata, en las subcategorías asociadas —significado, uso técnico o uso práctico— se observa que los tutores, con mayor frecuencia, hacen comentarios en donde constatan la falta de dominio o la falta de claridad en el uso técnico de los organizadores del currículo. También se observa que hacen menos comentarios en donde constatan aspectos asociados con el significado o uso práctico de los organizadores.

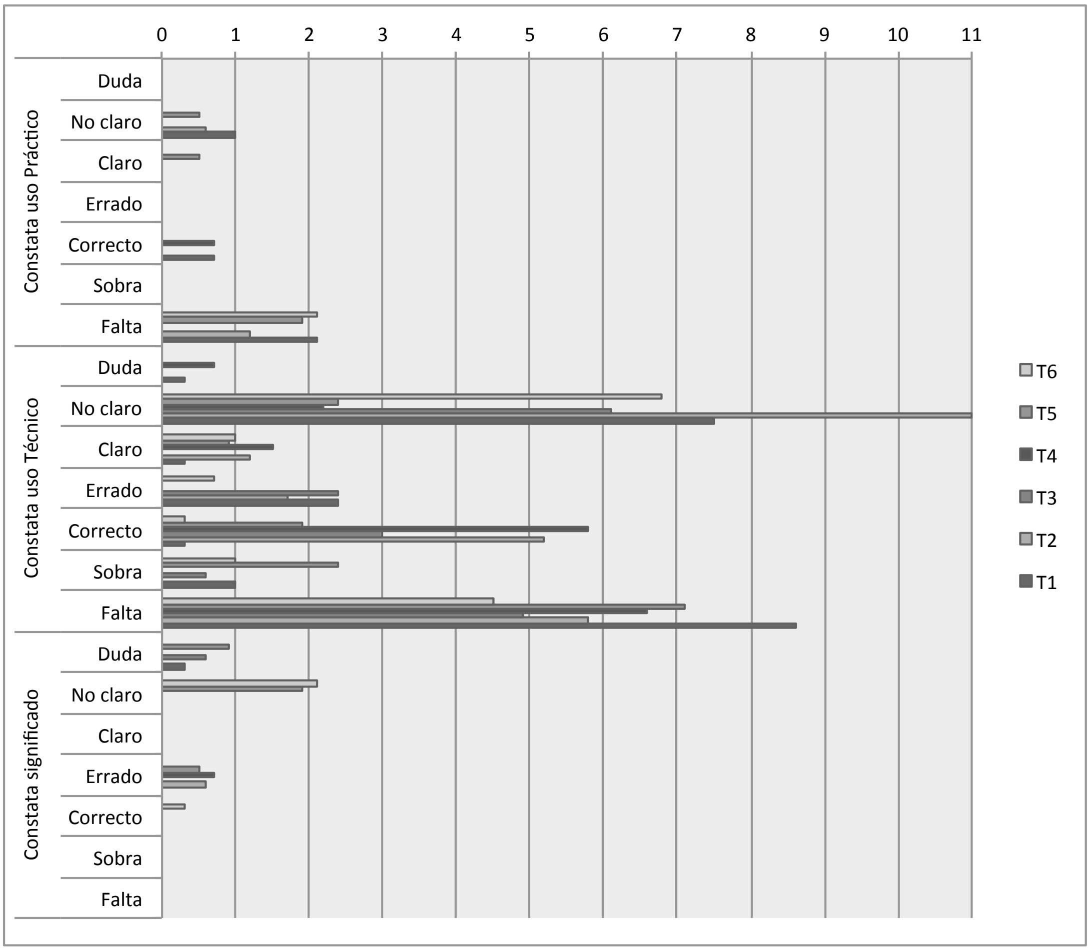


Figura 6. Porcentaje de comentarios por código. Ejemplo para la categoría tutor constata

En la figura 7 observamos los resultados obtenidos en los códigos asociados a la categoría tutor aclara uso técnico. En esta categoría se concentra una cantidad importante de comentarios codificados. El 75% de los códigos de esta categoría pertenecen a la dimensión positiva del núcleo común de la actuación de los tutores. Estos códigos hacen referencia al foco, características y organización del tema matemático. Inicialmente consideramos una sola categoría para agrupar a los comentarios en los que el tutor hace aclaraciones sobre aspectos referidos al significado, uso técnico o uso práctico del organizador del currículo. Al analizar la frecuencia de los códigos correspondientes al aspecto del uso técnico de esta categoría, decidimos configurarla como una categoría aparte y establecer descriptores más detallados para ella. Distinguimos si la aclaración es sobre la técnica o sobre la información que se produce con su aplicación. Los resultados muestran que la actuación de los tutores es homogénea, haciendo mayor énfasis en las características de la información producida por los grupos de tutorandos.

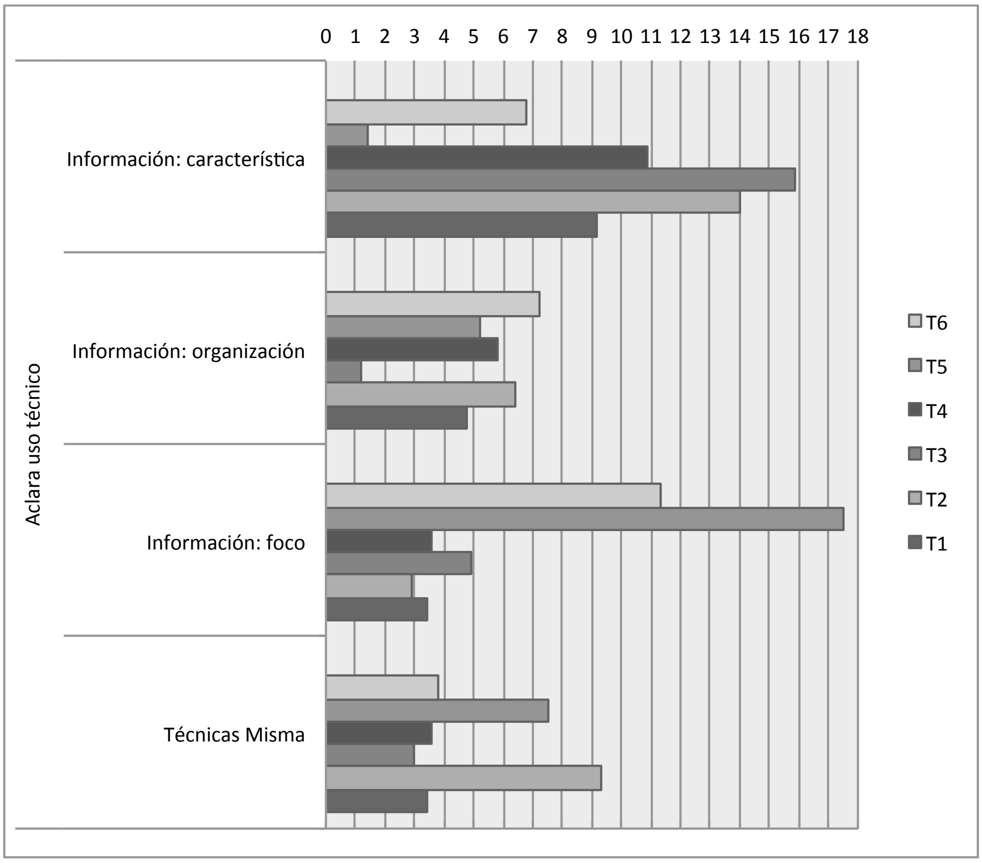


Figura 7. Porcentaje de comentarios por código. Ejemplo para la categoría tutor aclara uso técnico

Al revisar los resultados para los 52 códigos y basados en el análisis de frecuencias, constatamos que el 67,3% de los códigos se clasifican en el núcleo común negativo, el 17,3% en el núcleo común positivo y el 15,4% no queda clasificado en ninguno de los dos grupos. En la dimensión positiva del núcleo común resalta lo que los tutores hicieron frecuentemente. Los códigos que describen esta situación se corresponden con aquellos comentarios en donde los tutores: (a) constataron si a su grupo le faltaba dominio o no tenían claridad en relación con el uso técnico de los organizadores del currículo; (b) aclararon aspectos referidos a la información que produce su grupo de tutorandos, destacando el foco, organización y características de la misma en relación con su tema; (c) expresaron sus dudas en relación con cómo su grupo hace uso técnico de los organizadores; e (d) hicieron sugerencias de manera directa, por medio de preguntas, o invitando a reflexionar. En cuanto a la dimensión negativa del núcleo común los tutores hicieron pocos comentarios sobre: (a) el significado o el uso práctico de los organizadores del currículo; (b) la validez o claridad del uso técnico; (c) orientaciones para la búsqueda de información complementaria; y (d) el cumplimiento de los requisitos expuestos en la actividad. Además, los tutores nunca hicieron comentarios: (a) sobre claridad en el significado de un organizador del currículo o falta de dominio de alguna de las nociones teóricas que lo constituyen; (b) sobre errores y dudas en el uso práctico; o (c) vagos.

Conclusiones

Para producir los resultados que acabamos de presentar, construimos una estructura —organizada en categorías, subcategorías y códigos— con la que describimos la actuación de los tutores. Consideramos que esta estructura es un aporte de nuestro estudio, puesto que propone un sistema operacional que posibilita la caracterización de la actuación de los tutores en un contexto particular. Este sistema, a diferencia de los existentes en la literatura, es específico y permite establecer aspectos concretos que describen la forma en que los tutores comentan por escrito los trabajos de sus grupos de tutorandos.

El núcleo común de la actuación de los tutores se caracteriza por comentarios centrados en el aspecto didáctico, con énfasis en el uso técnico de los organizadores del currículo más que en sus significados y su uso práctico. Los comentarios que configuran el núcleo común son específicos, orientados hacia sugerencias directas, por medio de preguntas o invitando a reflexionar.

El núcleo común de la actuación de los tutores que hemos caracterizado es seguramente una consecuencia del diseño de las actividades del programa. En estas actividades se espera que los grupos de profesores en formación analicen y produzcan información sobre su tema con la ayuda del organizador del currículo que corresponde a cada actividad. Conjeturamos que es por esta razón que la mayor parte de los comentario esta asociado al uso técnico de los organizadores del currículo.

Referencias

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, *33*(8), 3–15.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Universidad de Granada.

González, M. J. y Gómez, P. (2008). Significados y usos de la noción de objetivo en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Investigación en educación matemática XII*, 425-434.

Gómez, P., Cañadas, M., González, M. J., Flores, P., Lupiáñez, J., Marín, A., Molina, M., et al. (2010). MAD: maestría en Educación Matemática en Colombia. En M. González, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Seminario de Investigación de los Grupos de Trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Educación Matemática de la SEIEM* (pp. 7-25). Salamanca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Jaworski, B. y Watson, A. (Eds.) (1994) *Mentoring in mathematics teaching*. Oxford, Reino Unido: Falmer Press.

Llinares, S. (2008). Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación. *Conferencia en el III encuentro de programas de formación inicial de profesores de matemáticas*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Murphy, K., Mahoney, S., Chen, C., Mendoza, N. y Yang, X. (2005). A constructivist model of mentoring, coaching, and facilitating online discussions. *Distance Education*, *26*(3), 341–366.

Nilssen, V. (2003). Mentoring teaching of mathematics in teacher education. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 381-388). Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.

Nilssen, V. (2010). Guided planning in first-year student teachers' teaching. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *54*(5), 431-449.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Van Looy, L. y Vrijsen, M. (1998). *A multi-dimensional analysis of feedback by tutors and teacher-educators to their students*. Trabajo presentado en the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Wang, C. (2008). How secondary mathematics mentor teachers think and do for mentoring mentee teachers. Trabajo presentado en *Third International Conference on Science and Mathematics Education (CoSMEd)*, Penang, Malasia.

EL APRENDIZAJE DE ALGUNOS ASPECTOS DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL A TRAVÉS DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS VERBALES AL INICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Mónica Ramírez y Carlos de Castro

Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En este trabajo se narra la experiencia de un taller de resolución de problemas con niños de 6 y 7 años, pertenecientes a dos aulas de primero de Educación Primaria. La resolución de problemas favorece la comprensión de las relaciones que se dan en las cantidades involucradas en las operaciones aritméticas. Uno de los contenidos matemáticos que se introduce en el primer ciclo de Educación Primaria es el sistema de numeración decimal. Este trabajo se basa en la instrucción guiada cognitivamente de resolución de problemas para introducir algunos aspectos del sistema numérico decimal en el primer curso de Educación Primaria, y se ve reflejado las primeras estrategias basadas en el manejo de grupos de diez utilizando problemas de estructura multiplicativa.

Palabras clave: Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI), Problemas Aritméticos Verbales, Sistema de Numeración Decimal, Educación Primaria, Investigación de diseño.

Abstract

This paper narrates the experience of a workshop on problem solving with children aged 6 and 7, from two classrooms of primary school first. Problem solving promotes understanding of the relationships that exist in the quantities involved in arithmetic operations. One of the mathematical content is introduced in the first cycle of primary education is the decimal number system. This work is based on the Cognitively Guided Instruction on problem solving to introduce some aspects of the decimal number system in the first year of primary education, and reflected the first strategies based on managing groups of ten using multiplicative structure problems.

Keywords: *Cognitively Guided Instruction (CGI), Verbal Arithmetic Problems, Decimal Number System, Primary Education, Design Research.*

El modelo teórico de Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI) (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999) pone de manifiesto que no es necesario enseñar una estrategia de resolución para un determinado tipo de problema, sino que en una ambiente en el que se estimule a los niños a desarrollar sus propias estrategias, son capaces de representar las acciones y relaciones que ocurren entre las cantidades de los problemas, encontrando procedimientos de resolución con sentido para ellos. Los problemas aritméticos se clasifican según las acciones y relaciones que se describen en su enunciado. Los problemas aditivos se clasifican en problemas de cambio creciente,

Ramírez, M., y De Castro, C. (2012). El aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal a través de problemas aritméticos verbales al inicio de educación primaria. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 97-109). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

cambio decreciente, combinación y comparación (Carpenter y otros, 1999). Otros autores incluyen los problemas de igualación (Puig y Cerdán, 1995; Rodríguez, Lago, Caballero, Dopico, Jiménez, 2008). Por otro lado, tenemos los problemas de estructura multiplicativa, entre los cuales hay problemas asimétricos, como los de grupos iguales, los de razón, precio, y los de comparación multiplicativa. Como problemas multiplicativos simétricos están los problemas de matrices, de producto de medidas y de combinaciones (Carpenter y otros, 1999).

Desde el modelo CGI se plantea un enfoque innovador para el aprendizaje de algunos aspectos del sistema de numeración decimal, como el valor posicional de las cifras de los números de dos cifras o las equivalencias y conversiones entre decenas y unidades, partiendo de problemas aritméticos verbales. Estos problemas pueden ser de dos etapas, con una primera etapa de estructura multiplicativa, de multiplicación con grupos de diez, y una segunda etapa de estructura aditiva, de combinación, y problemas de división agrupamiento con resto (también con grupos de 10). En el primer caso, serán problemas en los que hay que pasar de las decenas y unidades de un número al número, dentro del contexto de un problema. En el segundo caso, habrá que pasar del número a sus decenas y unidades, también a través de una situación contextualizada en un problema.

Las estrategias que desarrollan los niños ante estos problemas comienzan por la modelización directa de las cantidades, las relaciones y acciones descritas en los enunciados. Estas estrategias van evolucionando hacia estrategias de conteo hasta que los niños comienzan a utilizar hechos numéricos básicos y derivados. Se puede observar que los niños inicialmente utilizan una *modelización directa* para resolver los problemas multiplicativos que consiste en una *estrategia de agrupamiento,* formando los grupos de 10 que indica el problema y juntando los objetos de estos grupos con las unidades sueltas. Para concluir realizan un conteo uno a uno de todos los objetos reunidos. Si se proporciona materiales estructurados como lo bloque de base 10, pueden empezar a utilizar las barras para modelizar los grupos de 10, aunque para realizar el recuento final cuentan de una en una cada una de las unidades de la barra (Carpenter y otros, 1999; Caballero, 2005; Rodríguez, Lago, Caballero, Dopico, y Jiménez, 2008). Poco a poco, empiezan a *contar decenas*, es decir, representan las decenas como el paso anterior, y al contar el total de elementos cuentan de 10 en 10 señalando cada una de las decenas. Los niños dicen, 10, 20, 30 (señalando cada decena), 31, 32, 33, 34. Hay un momento en el que no necesitan representar las decenas, sino que mentalmente van contando de 10 en 10 el número de decenas que tiene el enunciado. Harían 10, 20, 30 (3 cajas), 31, 32, 33, 34. Finalmente, *utilizan el valor posicional***,** tomando como decenas el número de grupos de 10 y como unidades, las unidades sueltas. Los niños dirían, si son 3 cajas de 10, son 3 decenas y 4 unidades, 34.

En problemas de división medida, la *modelización directa* puede realizarse a través de la *estrategia de medida*, que consiste en ir formando grupos de 10 hasta alcanzar el valor del dividendo. Hay dos variantes de esta estrategia: Se puede representar inicialmente el número total de elementos, del que se van quitando elementos para formar grupos de 10, o también ir formando grupos de 10 sin haber previamente representado la cantidad total de elementos. En la resolución de problemas con resto, es necesario tener en cuenta qué sentido va a tener el resto en el problema. El contexto del problema suele indicar el trato que debemos dar al resto en la respuesta a la cuestión que se nos formula. Hay veces que se incluye un grupo más, que se desprecia el resto, que el resto es la solución o incluso se fracciona el resto para que no quede nada (Carpenter, 1999). La resolución de problemas realistas (Jiménez, 2008) incluye los problemas de división con resto como problemas que se plantean habitualmente en la vida cotidiana, con más frecuencia que los problemas de división con resto cero.

Investigación de diseño

La investigación de diseño es un paradigma metodológico de naturaleza cualitativa que se está aplicando y desarrollando en la investigación educativa, en concreto, en la Didáctica de las Matemáticas (Molina, 2006; Molina, Castro, Molina, y Castro, 2011). Promueve el diseño de innovaciones curriculares basadas en teorías que, a través de un ciclo de diseño, implementación, análisis y rediseño, trata de explicar cómo funcionan los diseños en situaciones reales, mejorarlos, y desarrollar las teorías que sustentan la innovación y que orientan el diseño (Núñez, de Castro, del Pozo y Pastor, 2010). Se ha diseñado el taller de resolución de problemas que consta de 25 sesiones, una por semana, fundamentado en estudios previos sobre resolución de problemas aritméticos verbales (Carpenter y otros, 1999; Puig y Cerdán, 1995) y se ha llevado a la práctica. En el momento de escribir este trabajo, nos encontramos en la fase de análisis retrospectivo posterior a la implementación del taller.

Objetivos de la investigación

El presente trabajo es una investigación basada en diseño, orientada al desarrollo del currículo, cuyo objetivo principal es el diseño un producto curricular, un taller de resolución de problemas aritméticos, para primer curso de Educación Primaria. Partiendo del modelo teórico CGI (Carpenter y otros, 1999), se persigue que los estudiantes desarrollen su *competencia matemática*, según plantea el marco de PISA 2003 (OCDE, 2004) que defiende "un concepto de competencia matemática vinculado a la capacidad de los alumnos de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en diversas situaciones, incluyendo conceptos matemáticos cuantitativos" (pp. 37). Pensamos que este planteamiento sobre las competencias es perfectamente compatible con las competencias básicas del currículo actual de Educación Primaria (MEC, 2007).

Los objetivos del taller, además de los propios de la enseñanza enfoque cognitivo, son la agilización del cálculo mental (sustitución de la modelización directa por conteo y uso de hechos numéricos) y el conocimiento del sistema de numeración decimal, y especialmente en el valor posicional de las cifras de los números, que es en el punto en que nos centramos en el presente trabajo.

Método

Participantes

En la investigación, han participado 54 alumnos de dos grupos (con 28 y 26 alumnos) de primer curso de Educación Primaria, del CEIP Virgen de Peña Sacra, colegio público de la localidad de Manzanares el Real (Madrid).

Taller de resolución de problemas en Primer curso de Educación Primaria

El taller de resolución de problemas está basado en el modelo CGI (Carpenter y otros, 1999). Sobre la forma de trabajo de la CGI, introducimos una variante principal: los problemas son planteados por carta, por una persona externa al aula, a la que hay que dar la solución a la vuelta de correo. Esta forma de trabajo persigue que, tras el esfuerzo personal individual por resolver el problema, los alumnos deban explicar su solución, argumentar por qué es la mejor, y debatir entre ellos para decidir qué solución (única de la clase) transmiten a la persona que les ha planteado el problema. Esta variante en el trabajo con problemas ha sido ensayada en Educación Infantil, con el objetivo de incorporar decididamente las competencias de comunicación y argumentación al trabajo matemático (De Castro y Escorial, 2007; De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009; Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010). Por otra parte, que los enunciados estén basados en cuentos que previamente se utilizan en el aula, tiene el objetivo de favorecer la comprensión de, y la posibilidad de modelizar, los propios enunciados.

Esta experiencia está incluida dentro de un proyecto mayor, que abarca todo el curso escolar con un total de 24 sesiones, una sesión por semana y cada sesión con una duración entre 45 minutos y una hora y cuarto. Cada taller se desarrolla siguiendo las siguientes etapas:

1. Lectura del cuento. Previamente a cada sesión, se debe leer dos o tres veces el cuento en el que está basado el enunciado del problema correspondiente a la sesión.

2. Lectura de la carta. La sesión comienza con la lectura de una carta en la que alguien conocido y apreciado por los niños (en este caso, Clara, la maestra en prácticas que compartió parte importante del curso anterior con ellos) pide ayuda para resolver un problema relacionado con el cuento que se ha leído.

3. Trabajo individual. Cada niño tiene que intentar resolver el problema utilizando la estrategia y los materiales que considere adecuado. Si acaban pronto, se les recomendará que prueben a hacerlo con algún otro material, que lo hagan con un dibujo o que ayuden a algún compañero (sólo si la ayuda es solicitada).

4. Puesta en común y consenso sobre resultado y estrategia. En esta parte debe enfatizarse, por parte del profesor, lo que es una explicación válida y lo que no. No vale, por ejemplo, decir que la solución es 5 'porque lo he pensado' y cosas de este tipo. Es un momento en que destaca el trabajo de las competencias de comunicación y argumentación.

5. Escritura de la carta de respuesta. Dado que el problema está planteado en un contexto de comunicación, en la que se ha recibido una carta, se debe contestar a la carta como final del taller.

Los alumnos de este centro ya han trabajado los talleres de resolución de problemas en Educación Infantil (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009; Núñez, De Castro, Del Pozo, Mendoza y Pastor, 2010) y están habituados a trabajar con materiales como la banda numérica, la tabla 100, cubos encajables, plastilina, o cualquier tipo de material que les sirva para representar los enunciados. Como el objetivo es empezar a trabajar las unidades y decenas, se incluyen, entre los materiales, bloques de base 10, sólo con unidades y decenas. La Tabla 1 muestra las sesiones 7, 8, 8b, 11, 12 y 15 con problemas de dos etapas (multiplicación y combinación) y de división agrupamiento con resto (con grupos de 10).

Procedimiento

Hemos recogido grabaciones de video de las sesiones, así como hojas de registro en las que anotamos los materiales empleados por los niños, descripciones de los procedimientos utilizados, y los comentarios que hacen los niños al explicarnos cómo han resuelto el problema. También hemos recogido las hojas de trabajo y realizado fotos, de momentos clave del proceso de resolución de los problemas, durante las sesiones, para su posterior análisis.

Sesión	Problema	Tipo	Cuento
7	Si tenemos 2 cajas llenas de patitos, con 10 patitos en cada caja, y 3 patitos sueltos, ¿Cuántos patitos tenemos en total?	Multiplicación +combinación	Carle (2011)
8	Si hay 26 patitos de goma, y en cada caja caben 10 patitos, ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Cuántos patitos quedan sin guardar?	División medida	Carle (2011)
8b	Si hay 34 patitos, y en cada caja caben 10 patitos. ¿Cuántas cajas podemos llenar? ¿Y cuántos patitos quedan sin guardar?	División medida	Carle (2011)
11	Si tenemos 37 huevos, ¿cuántas cajas de 10 huevos podemos llenar y cuántos huevos sobran?	División medida	Bruno (2003)
12	Si tenemos 4 decenas de huevos y 5 huevos más, ¿cuántos huevos tenemos en total?	Multiplicación +combinación	Bruno (2003)
15	Cuando había 65 pingüinos, los guardaron poniendo 10 en cada caja. ¿Cuántas cajas llenaron y cuántos pingüinos sobraron?	División medida	Fromental (2007)

Tabla 1. *Problemas de multiplicación y división con grupos de 10*

Resultados

Durante las seis primeras sesiones del taller (ver Apéndice II), al inicio del curso, las estrategias de los niños eran fundamentalmente de modelización directa y conteo. En la quinta semana del proyecto, se introdujo el concepto de decena en las clases ordinarias, donde la decena se enseña como un grupo compuesto por diez unidades, y se propone a los niños el uso de los bloques de base diez, con unidades (cubitos) y decenas (barras). Por otro lado, y de manera complementaria, en los talleres se añaden diferentes materiales con agrupaciones de 10. Por ejemplo, en la Figura 1 vemos una modelización del problema de la sesión 11 utilizando bloques de base 10 y cajas de decenas de huevos. Estos materiales van siendo integrados poco a poco por los alumnos en el taller. Así, aunque en el problema de la sesión 5 aparece el número 18, ninguno de los alumnos lo representó como 1 decena y 8 unidades, sino como un conjunto de 18 unidades. En la sesión 6, siguen sin emplear las decenas, y utilizando estrategias de modelización directa y conteo. A continuación, describimos estrategias empleadas por los niños en las sesiones indicadas en la Tabla 1 (a partir de la séptima).

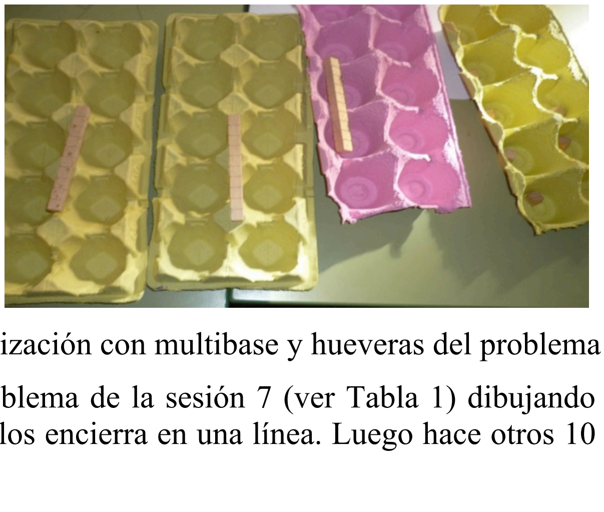


Figura 1. Modelización con multibase y hueveras del problema de la sesión 11.

Irene resuelve el problema de la sesión 7 (ver Tabla 1) dibujando redondeles. Cuando lleva 10 redondeles, los encierra en una línea. Luego hace otros 10 redondeles y debajo dibuja otros tres. En la Figura 2, vemos como Irene cuenta uno a uno todos las redondeles (que representan los patitos del enunciado) previamente dibujados. Irene ha utilizado la modelización directa con una estrategia de agrupamiento, y la estrategia de "juntar todos" para el problema de combinación (contando las 20 redondeles provenientes de los dos grupos y diez y los 3 redondeles que representan los patitos sobrantes).

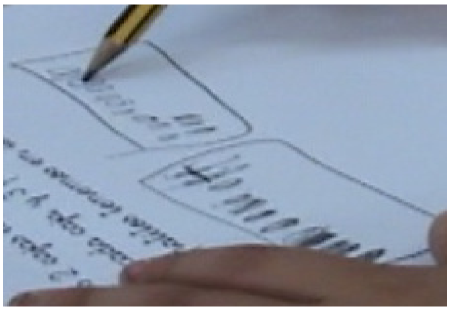


Figura 2. Modelización directa, estrategia de agrupamiento.

En la Figura 3, Juan Daniel representa las dos cajas con dos barras de 10 y los 3 patitos sueltos con cubitos. Para saber el total de elementos, utiliza la modelización con bloques de base diez, y cuenta de una en una cada una de las unidades de las dos barras (y los tres cubos sueltos) para saber cuántas tiene en total.

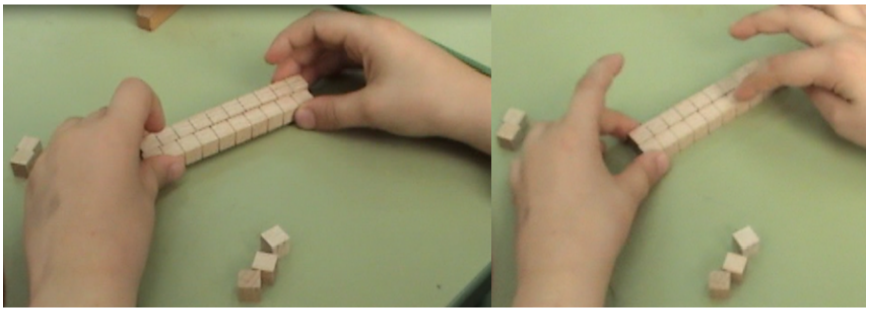


Figura 3. Modelización con multibase, con conteo uno a uno.

Pablo utiliza también dos barras y 3 unidades de los bloques de base 10 y dice: "Aquí hay 10 y aquí otros 10, 20 y 3 más 23". Por tanto, Pablo también modeliza el problema con los bloques de base diez, pero después utiliza hechos numéricos para determinar la solución. Ismael, sin usar ningún material, dice: "Diez y diez, veinte; y tres, veintitrés". Merche, Nuria y Mónica (la investigadora) mantienen la siguiente conversación sobre el problema de la sesión 12, en la que se plantea cuántos huevos hay en 4 decenas y 5 huevos sueltos.

Merche: Yo voy a poner "Merche" [para "firmar" en la hoja de trabajo] y voy a escribir la carta, porque ya sé cuánto es.

Nuria: Pero… ¿Y si te equivocas? Mejor que lo hagas primero, por si te equivocas.

Inv.: Merche. ¿Ya lo sabes?

Merche: ¡Sí!

Inv.: [Pregunta para comprobar si Merche, al escribir 45 como solución, comprende el significado de cada cifra] ¿Cuántas cajas se llenan?

Merche: [Mira el folio donde está escrito el enunciado, en vez de su solución] Cuatro.

Inv.: ¿Y cuántos quedan?

Merche: [Enseña una mano con los cinco dedos abiertos. Mira el papel y, señalando el 45]: Cuatro, que son cajitas, y cinco unidades.

Cuando sale a la pizarra a explicarlo (Figura 4), escribe el número 45 en grande marcando que 4 son decenas y 5 unidades y por lo tanto, “Son 4 decenas, 4 cajas, y sobran 5”. Merche utiliza la estrategia de utilizar el conocimiento del valor posicional de las cifras. El uso de esta estrategia es el que los diseñadores del taller nos planteamos como “estrategia óptima” y objetivo fundamental del taller para primer curso de Educación Primaria. En las clases ordinarias, los alumnos estudian el valor posicional, pero sólo lo emplean en el taller cuando lo van comprendiendo.

Figura 4. Utilizar el valor posicional en un problema de división medida.

Nuria coge centicubos y forma una barra con 45 de ellos. Después dice: “He puesto 45 y he contado 10”. Luego, cuenta 10 centicubos y los quita de la barra y sigue así, sucesivamente, hasta ya no puede formar más barras con 10 cubos (Figura 5, a la derecha). Cuando termina, cuenta las que sobran y dice: “Quedan cinco”. Se trata de una estrategia de medida en la que, además, se hace una correcta interpretación del resto de la división.

Figura 5. Modelización directa, estrategia de agrupamiento con centicubos.

Amaya dibuja 45 redondeles. A continuación, va tachando 10 y dibuja una caja con 10 redondeles menores. Después, tacha otras 10 y dibuja otra caja de 10. Cuando sólo le quedan 5 bolitas escribe: “4 cajas y sobran 5” (Figura 6). La estrategia es igual que la del ejemplo anterior, con la diferencia de que, en este caso, se utiliza el dibujo en vez de un material manipulativo.

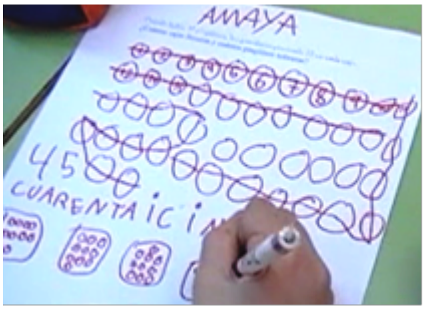


Figura 6. Modelización directa, estrategia de agrupamiento con dibujo.

En el siguiente problema, en que se debe descomponer 45 en decenas y unidades, Lucía utiliza una estrategia de reparto en la que prueba a distribuir 45 pingüinos en 6 grupos.

Lucía: Había hecho muchos grupos y no me quedaban, no me sobraban y he tachado éstos.
Inv.: ¿Y cuál es la solución?
Lucía: Se pueden llenar sólo 4 grupos de 10 y luego me sobran 5.
Inv.: ¿Y cómo lo has hecho?
Lucía: Primero he ido poniendo un pingüino en cada caja, luego dos…
Inv.: ¿Cómo te has dado cuenta de que sobraban cajas?
Lucía: Porque las he contado y, como no me coincidían para que hubiera 10 en cada caja, pues he tenido que quitar para que me salieran 10 en cada caja y me han sobrado 5.

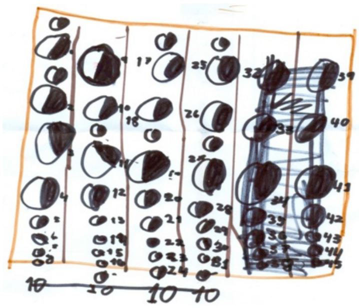


Figura 7. Ensayo y error, repartiendo.

En problemas de división medida con resto, se dio el caso de alumnos que introducían un grupo de más para dar cuenta del resto. La Figura 8 muestra como Yolanda considera que se necesitan 3 cajas para guardar 26 patitos, cuando el enunciado establece que las cajas deben estar llenas y se pregunta por los patos que quedan sin guardar.

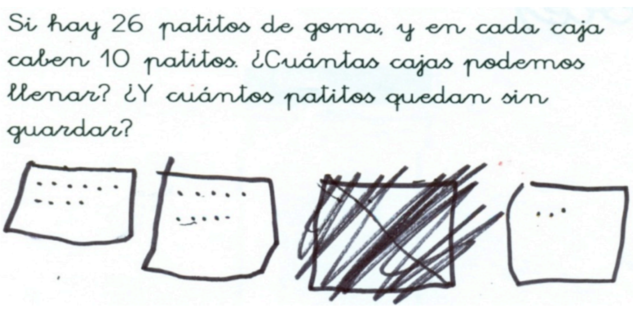


Figura 8. División con resto incluyendo un grupo más.

En la Tabla 2 se recogen los porcentajes de utilización de las estrategias que hemos descrito en los párrafos anteriores, correspondientes a dos sesiones separadas por 2 meses, para resolver dos problemas similares dos etapas (de multiplicación y combinación). Los números entre paréntesis indican los alumnos que, al utilizar la estrategia señalada, necesitaron ayuda de la tutora o algún compañero para resolver correctamente el problema. Como se puede observar, el porcentaje de la estrategias más evolucionada, que es utilizar el valor posicional de las cifras del número, va incrementándose desde un 0% en la primera sesión, hasta un 25,8% en la segunda.

En general, las estrategias que utilizan los niños para explicar la resolución de problemas de multiplicación es la modelización directa, realizando grupos de 10 y juntándolo con las unidades y para los problemas de división medida es la modelización directa utilizando la estrategia de medida en la que representan inicialmente el dividendo. Estas estrategias se basan en la modelización de grupos de 10, una de las características del sistema de numeración. Juntar decenas y unidades respeta el carácter aditivo. Los niños tienden a utilizar estrategias de modelización directa para poder comunicar mejor su solución y se observa que el tener que comunicar las estrategias a sus compañeros y por escrito les obliga a reflexionar sobre ellas.

Estrategias	**Sesión 7**		**Sesión 12**	
	Nº alumnos	**%**	**Nº alumnos**	**%**
Modelización directa, (agrupamiento y juntar todo), contando de uno en uno	20 (5)	37%	8	14,8%
Modelización directa(agrupamiento y juntar todo), contando de 10 en 10	11 (4)	20,3%	4	7,4%
Modelización utilizando bloques de base 10 y contando de 1 en 1	1 (1)	1,9%	2	3,7%
Modelización utilizando bloques de base 10 y contando de 10 en 10	3 (1)	5,5%	1	1,9%
Modelización directa con reparto de las unidades	1	1,9%	0	0
Conteo de 10 en 10	6 (1)	11%	2	3,7%
Usar el valor posicional	0	0%	14 (1)	25,8%
Estrategias erróneas	1	1,9%	11	20,3%
No resuelve	3	5,5%	10	18,5%
No asistencia al taller	9	16,5%	2	3,7%

Tabla 2. *Número de alumnos y porcentaje de las estrategias utilizadas por los niños en dos problemas de multiplicación en dos sesiones separadas por dos meses*

Entre las estrategias erróneas ponemos el ejemplo de la sesión 12, en que varios alumnos trataron decenas y unidades como si ambas fuesen unidades, empleando estrategias de juntar todos, contar a partir del primero o el uso de hechos numéricos (5+4 = 9), quizás influenciados por la sesión anterior, en que se planteaba un problema de combinación.

Eloy: [Leyendo el enunciado] Si hay 4 cajas de huevos, y 5 huevos más, ¿cuántos huevos hay en total? Son nueve.
Sara: ¡No! [Alargando la o].

Eloy: ¡Sí! [Alargando la i]. Mira. Cuatro [Muestra 4 dedos en una mano] y cinco [con la otra mano]. ¿Cuántos son? Nueve.

Sara: ¡No son 9! ¡Que son 4 decenas!

Figura 9. Eloy propone sumar unidades con grupos de 10.

Eloy piensa durante un momento y sostiene que hay 40. Después, con la ayuda de Sara, se da cuenta de su error. Algunos otros alumnos no lo advirtieron hasta la puesta en común. Algunas de las dificultades observadas en este problema son la confusión con datos del problema cuando se dan decenas y unidades, como ocurre en el último ejemplo, confusión al comunicar el resultado por escrito y confusión de las decenas con unidades. En vez de decir 2 decenas o 20 unidades, dicen 20 decenas. En la Figura 10, tenemos la solución del problema de la sesión 8, dada por uno de los alumnos. La solución es correcta, pero aparece escrito “20 cajas” en lugar de “2 cajas”. Posiblemente, este error tenga su origen en las descomposiciones que se hacen en la clase ordinaria (26 = 20 + 6), y muestra que el proceso de comprender correctamente el sistema de numeración decimal está todavía en curso.

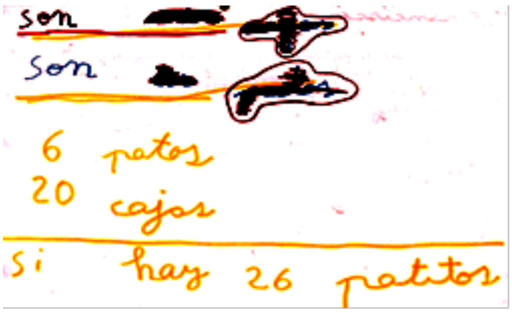
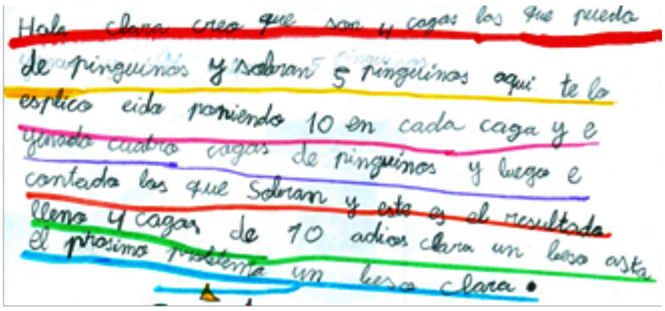


Figura 10. Confusión entre decenas y unidades.

La parte final del taller consiste en la puesta en común de las estrategias y la elaboración de cartas, por grupos de alumnos, para indicar la solución y explicar la estrategia de resolución a la persona que les ha planteado el problema (Clara). En la Figura 11, mostramos un ejemplo de carta.



Hola clara creo que son 4 cagas las que puedo de pinguinos y sobran 5 pinguinos aquí te lo esplico eido poniendo 10 en cada caga y e yenado cuatro cagas de pingüinos y luego e contado 4 cagas de 10 adios clara un beso asta el prosimo problema un beso clara.

Figura 11. Carta de Lucía explicando la estrategia de resolución.

Discusión y conclusiones

Los resultados muestran que las estrategias que utilizan los niños van evolucionando según el modelo CGI (Carpenter y otros, 1999), utilizando cada vez más el conteo de 10 en 10 y el conocimiento del valor posicional de las cifras de los números, en detrimento de estrategias de modelización directa en que se cuentan uno a uno los objetos. Este era uno de los objetivos principales del taller.

Los niños utilizan estrategias que resuelven los problemas y que tienen cierta semejanza con el desarrollo histórico de los sistemas de numeración (Gómez, 1988), ya que inicialmente se utilizaba un solo representante por cada elemento de una colección, al igual que los niños utilizan modelización directa. El agrupamiento simple se puede observar en las estrategias de los niños, al plantearles problemas de estructura multiplicativa de multiplicación y división agrupamiento con grupos de 10, y de hecho la mayoría de los niños combinan las unidades y las decenas (convertidas en unidades) mediante estrategias de "juntar todos", reflejando el carácter aditivo del sistema de numeración.

En el intento de comunicar por escrito las soluciones y las estrategias se ven reflejadas los avances y dificultades para comprender y expresar adecuadamente el valor posicional de las cifras.

Durante este curso, los niños han tenido clases de matemáticas todos los días, y sesiones del taller únicamente los miércoles por la tarde. Esto ha dado lugar a un taller de 25 sesiones, sobre un total de 32 semanas lectivas. Sabemos que es casi imposible, por fiestas u otros acontecimientos propios de la vida escolar, aprovechar todas las semanas del curso. Esta es una clara restricción con la que contamos en el desarrollo del taller. Una de las consecuencias de esta restricción es que la gama de problemas planteados es muy reducida, y no aspira a representar de forma completa ninguna categoría de problemas de estructura aditiva o multiplicativa. Uno de los objetivos que nos planteamos para el futuro, es que el tipo de trabajo matemático que se hace en el taller vaya incorporándose al trabajo cotidiano de la clase diaria de matemáticas. También aspiramos a agilizar los procedimientos del taller, para lograr realizar más de un problema por sesión. Es importante señalar en este punto que el taller de resolución de problemas tiene también una intención formativa para los maestros del centro, igual que en el modelo CGI de Carpenter y otros (1999) se aúnan la formación de maestros y el trabajo con los alumnos. Esperamos que, a medida que los maestros vayan dominando, cada vez con ayuda menor de los investigadores, la dinámica del taller, se sentirán cómodos para ir incorporando esta forma de trabajo en su aula, en la clase de matemáticas.

Referencias

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de Educación Infantil* (Tesis doctoral). UCM, Madrid.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

De Castro, C., Pastor, C., Pina, L. C., Rojas, M. I., y Escorial, B. (2009). Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 105-128.

De Castro, C. y Walsh, J. y Del Coso, E. y Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 73*(3), 33-42.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: Una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IX*, pp. 23-47.

Jiménez, L. (2008). *La activación del conocimiento real en la resolución de problemas: un estudio evolutivo sobre los problemas no-rutinarios de adición* (Tesis doctoral). Editorial de la Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 20 de julio). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE, 173*, pp. 31487-31566.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Núñez, C., De Castro, C., Del Pozo, A., Mendoza, C. y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). Lleida: SEIEM.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003: Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Puig, L., y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rodríguez, P., Lago, O., Caballero, S., Dopico, C. y Jiménez, L. (2008). El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. *Anales de Psicología, 24*(2), 240-252.

Apéndice I: Libros utilizados en las sesiones

Bruno, P. (2003). *Cuento para contar mientras se come un huevo frito*. Pontevedra: Kalandraka.

Carle, E. (2011). *Diez patitos de goma*. Madrid: Kókinos.

Fromental, J.-L. (2007). *365 pingüinos*. Madrid: Kókinos.

Apéndice II: Problemas hasta la sesión 15 que no aparecen en la Tabla 1

Sesión 1: Al principio había 11 damas atrevidas, ¿Cuántas quedaban cuando se habían ido 6?

Sesión 2: Si había 11 damas atrevidas, y después se fueron algunas y quedaban 3 ¿Cuántas damas se habían ido?

Sesión 3: Si el gato tragón se comió un hombre, un burro, 5 pajaritos y 7 niñas. ¿Cuántos se comió en total?

Sesión 4: El gato tragón se comió 7 niñas. Si cada niña tiene 2 brazos, ¿Cuántos bracitos se comió el gato?

Sesión 5: Marcel y Tristán se comieron 18 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?

Sesión 6: En el cumpleaños de Marcel había 3 globos. Si por la mañana había 15, ¿Cuántos habían explotado?

Sesión 9: Finn Herman cenó un jamón, dos pollos, tres filetes y veintiséis deliciosas salchichas. ¿Cuántas cosas tomó para cenar?

Sesión 10: Si Finn Herman tiene 38 dientes en la mandíbula superior y 30 en la inferior, ¿cuántos dientes tiene en total?

Sesión 13: Si en enero llegaron 31 pingüinos y en febrero vinieron otros 28, ¿cuántos pingüinos había al final de febrero?

Sesión 14: Cuando llegaron a 60 pingüinos, repartieron los pingüinos en 4 grupos iguales. ¿Cuántos pingüinos pusieron en cada grupo?

CONOCIMIENTOS MANIFESTADOS POR LOS FUTUROS MAESTROS DE MAGISTERIO SOBRE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL ESTUDIO TEDS-M. EJEMPLO DEL ANÁLISIS DE UNA PREGUNTA

Araceli Gutiérrez[1], Pedro Gómez[2], Luis Rico[1]

[1]Universidad de Granada, [2]Universidad de los Andes

Resumen

En este trabajo, describimos el método con el que nos proponemos establecer el conocimiento que los futuros profesores de primaria españoles manifestaron en el estudio TEDS-M sobre Didáctica de la Matemática, centrando nuestra atención en el bloque de preguntas correspondientes al subdominio de números. Hemos analizado la formulación de una pregunta sobre proporcionalidad directa entre magnitudes, las posibles respuestas de los futuros profesores y su correspondiente guía de corrección. Con base en esta información, interpretamos los resultados españoles a esa pregunta.

Términos clave: Conocimiento didáctico; Educación primaria; Formación inicial de profesores; Matemáticas; Pensamiento numérico; TEDS-M

Abstract

In this paper we describe the method with which we seek to describe the mathematics pedagogical knowledge on the number subdomain shown by the Spanish primary pre-service teachers who participated in the TEDS-M study. We have focused our attention on the number subdomain. We analyzed a question on direct proportionality, its possible answers and the corresponding scoring guide. We interpret the Spanish results from this information.

Keywords: Mathematics; Numerical thinking; Pedagogical knowledge; Pre-service teacher education; Primary; TEDS-M

Contexto: el estudio TEDS-M

El TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) es un estudio internacional comparativo sobre los planes de formación inicial y sobre los conocimientos que los futuros profesores de primaria y secundaria obligatoria debieran conseguir durante su preparación como profesores de matemáticas. El estudio fue patrocinado por la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo) y surgió de la constatación de las diferencias y deficiencias en el rendimiento matemático de los escolares de los distintos países, de acuerdo con los resultados proporcionados por el estudio internacional TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) y otros estudios anteriores. Se basa en el supuesto de que un factor importante que puede explicar esas diferencias tiene que ver con la variedad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en esos países (Rico, Gómez, y Cañadas, 2009).

España participó en TEDS-M a través del Instituto de Evaluación. La Universidad de Granada participó en el estudio por medio del grupo de investigación *Didáctica de la*

Gutiérrez, A., Gómez, P., y Rico, L. (2012). Conocimientos manifestados por los futuros maestros de magisterio sobre didáctica de la matemática en el estudio TEDS-M. Ejemplo del análisis de una pregunta. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 111-118). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación (PAIDI), siendo el Dr. L. Rico coordinador nacional de la investigación, por designación del Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado. La coordinación con las universidades y la gestión de los datos estuvo a cargo de la Secretaría General del Consejo de Coordinación Universitaria.

Diversas razones determinaron evaluar en este primer estudio sólo la formación inicial del profesorado de primaria. España participó con 48 instituciones —cada una con un plan de estudios propio—, 574 formadores y 1263 futuros profesores (Gómez, 2007).

La recogida de datos se realizó en el año 2008. Algunos países han publicado algún estudio parcial, el informe internacional se acaba de publicar (Tatto, Sharon, Senk, Ingvarson y Rowley, 2012) y el informe español se encuentra en fase de edición. No obstante, no hay por el momento análisis secundarios de los resultados de TEDS-M que profundicen en los conocimientos de los futuros profesores en los diferentes subdominios. Nuestro objetivo es realizar un estudio de este tipo que nos permita desarrollar e interpretar con mayor detalle los resultados de los futuros profesores españoles. En este documento presentamos y ejemplificamos el método que pretendemos utilizar para realizar el estudio.

Objetivo y método de este estudio

Este estudio se enmarca dentro de la pregunta de investigación que plantea TEDS-M: “¿Cuál es el nivel y profundidad del conocimiento matemático y de su enseñanza que logran los futuros profesores de primaria y secundaria al final de su programa de formación?” (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008, p. 14).

En este trabajo, presentamos, a través del análisis de una pregunta del cuestionario de TEDS-M, el método que utilizaremos para describir el conocimiento en Didáctica de la Matemática que los futuros profesores españoles manifestaron en el subdominio de números.

Analizar cada pregunta requerirá los siguientes pasos:

1. Establecer el marco conceptual donde se encuadra la pregunta y determinar el cocimiento en Didáctica de la Matemática y, en su caso, el conocimiento matemático que necesita tener el futuro profesor para poder contestarla correctamente.
2. Analizar las guías de corrección con el propósito de formular conjeturas sobre el conocimiento que los futuros profesores pueden poner en juego para contestar de manera incorrecta o parcialmente correcta a cada pregunta.
3. Interpretar los resultados de los futuros profesores españoles para cada pregunta.

En este trabajo analizaremos con este método una pregunta sobre proporcionalidad directa entre magnitudes. En la tabla 1 presentamos la clasificación de las preguntas sobre el conocimiento de Didáctica de la Matemática en TEDS-M.

Tabla 1
Clasificación de las preguntas sobre conocimiento de Didáctica de la Matemática

Criterio	Clasificación			
Dificultad	Novel	Intermedio	Avanzado	
Dominio conceptual del contenido	Números	Geometría	Álgebra	Datos
Dominio del conocimiento pedagógico	Currículo	Aplicación	Planificación	
Según el tipo de respuesta	Respuesta abierta	Respuesta múltiple	Respuesta múltiple compuesta	

Un análisis pormenorizado de las preguntas puede dar lugar a descubrir carencias o limitaciones tanto en el cuestionario como en las guías de corrección que acompañan a las preguntas de respuesta abierta, pero en este estudio nos vamos a limitar a estudiar la información que surge de los instrumentos y datos proporcionados por TEDS-M.

Pregunta analizada

En la figura 1 presentamos la pregunta sobre la que vamos a aplicar el método anteriormente expuesto.

> "Una máquina consume 2,4 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas si sigue consumiendo combustible al mismo ritmo?"
>
> Formule un problema diferente, del mismo tipo que el problema propuesto (los mismos procesos/operaciones) que sea MÁS FÁCIL de resolver para los alumnos de primaria.

Figura 1. Pregunta a analizar

Marco conceptual para el análisis de la pregunta

En esta pregunta se estudia el conocimiento sobre la proporcionalidad directa entre magnitudes. TEDS-M la clasifica dentro del dominio de planificación de la enseñanza y la considera de nivel intermedio; es de respuesta abierta y tiene guía de corrección para clasificar las posibles respuestas.

Se plantea que el futuro profesor idee un problema para alumnos de primaria del mismo tipo que el propuesto (mismos procesos/operaciones) y que sea más fácil. El problema que se propone es un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes.

En primer lugar, el futuro profesor debe saber qué procesos/operaciones son necesarios para resolver correctamente el problema propuesto y poder plantear así uno más fácil. Debe tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad donde hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres magnitudes conocidas directamente proporcionales; es decir, reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad directa. Este problema puede considerarse también como un típico problema de "regla de tres simple directa".

En segundo lugar, para poder plantear un problema más fácil, el futuro profesor debe conocer las variables que afectan a la dificultad de este tipo de problemas. A partir de la revisión de la literatura, hemos identificado las siguientes variables:

Tipo de números. La dificultad del problema depende del tipo de números implicados en el problema. En particular, se considera que los problemas que incluyen únicamente números enteros son más fáciles. El tamaño de los números también puede influir en la dificultad del problema.

Relación entre las cantidades. Son más fáciles aquellos problemas en los que la relación entre las cantidades está vinculada a la mitad o al doble, así como aquellos problemas donde se puede hallar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

Contexto. Se considera que los problemas cuyo contexto es cercano al entorno escolar son más fáciles.

Conceptos adicionales que intervienen en el problema. Sería el caso de que en el problema aparezcan, por ejemplo, diferentes unidades de medida, lo cual aumentaría la dificultad del problema.

Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

La guía de corrección establece 4 tipos de respuestas que resumimos en la tabla 2.

Tabla 2. Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

Correcta
Un problema diferente del mismo tipo (mismos procesos/operaciones) pero más fácil de resolver. *Ejemplos* Una máquina consume 3 litros de combustible cada 30 horas de funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas? (se puede resolver buscando el valor unitario del litro de combustible) Un coche consume 2,4 litros de combustible cada 50 km. ¿Cuántos litros de combustible consumirá el coche en 100 km? (hay una relación multiplicativa del doble o mitad entre las cantidades)
Incorrecta
Un problema diferente del mismo tipo (mismos procesos/operaciones) pero no tan fácil de resolver. *Ejemplos* Una máquina consume 2 litros de combustible cada 30 horas de

Tabla 2. Tipos de respuestas y ejemplos en la guía de corrección

funcionamiento. ¿Cuántos litros de combustible consumirá la máquina en 100 horas? (2 no es divisible por 3) Un grifo gotea 2 litros de agua al día. ¿Cuántos ml gotea por segundo? (el conocimiento métrico y computacional requerido es significativamente más alto; en este caso los datos se presentan en diferentes unidades de medida)
Otras incorrectas Incluye soluciones tachadas, borradas, ilegibles, etc. *Ejemplo* Cuestiones que no sean significativas o que no tenga respuesta
En blanco

Conocimientos manifestados en los distintos tipos de respuesta

Nos basamos en los análisis del apartado anterior para interpretar estos tipos de respuesta.

Conocimientos necesarios para responder correctamente la pregunta

Se consideran correctas aquellas formulaciones de problemas en las que se utilicen los mismos procesos u operaciones que en el propuesto pero que sean más fáciles de resolver. Se consideran más fáciles aquellos problemas donde, por una parte no aparecen números decimales, o si aparecen el problema se puede resolver sencillamente gracias a que la relación entre las cantidades está vinculada a la mitad o al doble, o bien se puede encontrar fácilmente el valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

Podemos afirmar que los futuros profesores que contestan correctamente a esta pregunta:

✓ reconocen que se trata de un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes, en el que hay que averiguar una cantidad desconocida que forma proporción con otras tres cantidades conocidas directamente proporcionales;

✓ tienen el conocimiento didáctico suficiente para identificar las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales (como las unidades de medida) que pueden intervenir en el problema.

Parece difícil que en este problema haya otros motivos —como el azar— por los que los futuros profesores hayan contestado correctamente. No tenemos en cuenta estos motivos en nuestro análisis.

Nos parece importante añadir que tanto en el enunciado de la pregunta como en la guía de corrección no se hace distinción entre los distintos métodos con los que se pueden resolver los problemas de proporcionalidad directa. Pero es importante destacar, por su importancia en el tema de proporcionalidad que hay acuerdo entre los educadores en la necesidad de buscar métodos que favorezcan la resolución de las cuestiones de una forma más significativa que los puramente algorítmicos (Fernández, 2001). Por ello se recomienda la importancia de contemplar en el currículo de primaria situaciones problemáticas relacionadas con el pensamiento proporcional como son las relaciones multiplicativas de doble o mitad, así como favorecer el uso de la estrategia denominada “búsqueda del valor unitario”, es decir, la búsqueda del valor correspondiente a la unidad y a partir de él hallar el valor desconocido.

Tampoco se hace mención expresa ni en el enunciado de la pregunta ni en la guía de corrección a que los problemas propuestos por los futuros profesores no deban plantear situaciones irreales.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas incorrectas

Se consideran incorrectos aquellos problemas que aun siendo de proporcionalidad directa entre magnitudes y se resuelvan igual que el propuesto, sean más difíciles de resolver. En este caso los futuros profesores no habrían reconocido los elementos que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo.

Es decir, los futuros profesores cuyas respuestas se pueden clasificar dentro de esta categoría tienen el conocimiento matemático suficiente para plantear un problema de proporción directa entre magnitudes pero no tienen el conocimiento didáctico suficiente para plantear un problema más fácil que el propuesto puesto que no reconocen en el problema los elementos de los que depende la dificultad del mismo.

Conocimientos puestos en juego en las respuestas clasificadas como “otras incorrectas”:

Se consideran también problemas incorrectos, aunque se clasifican de forma distinta a los anteriores, aquellos problemas que no sean significativos porque no se trabaje el concepto de proporcionalidad directa entre magnitudes o bien que no tengan respuesta. A los futuros profesores cuyas respuestas se puedan clasificar dentro de esta categoría les falta el conocimiento matemático necesario para reconocer el problema propuesto como un problema de proporcionalidad directa y plantear a continuación otro similar.

También entran dentro de esta categoría las respuestas ilegibles; no obstante no podemos hacer conjeturas sobre los conocimientos de los futuros profesores que han contestado de esta forma.

Conocimientos manifestados por los futuros profesores españoles

En la tabla 3 presentamos nuestra interpretación de los resultados de los futuros profesores españoles con base en el análisis anterior.

En la primera columna de la tabla 3 aparece el porcentaje de futuros profesores españoles correspondiente a cada tipo de respuesta —segunda columna—. En la tercera columna interpretamos estos resultados en términos de los conocimientos que los futuros profesores pudieron poner en juego.

Tabla 3. Interpretación de los resultados españoles

%	Respuesta	Conocimientos
59 %	Correcta	✓ Reconocer que se trata de un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes ✓ Identificar las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo
20,8 %	Incorrecta	✓ Reconocer el problema como un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes ✓ No identificar las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo
11,4 %	Otras incorrectas o Ilegibles	✓ No reconocer que el problema es de proporcionalidad directa entre magnitudes o ✓ En el caso de las respuestas ilegibles: no es posible determinar qué conocimientos se han puesto en juego
8,2 %	En blanco	
0,6 %	No llegaron a abordar la pregunta	

Interpretación de los resultados

El que un 59 % de los futuros profesores haya contestado correctamente a esta pregunta nos permite afirmar que en España se ha trabajado el concepto de la proporción directa entre magnitudes para primaria desde la Didáctica de la Matemática. La mayoría de los futuros profesores fueron capaces de plantear un problema donde se trabaja el concepto de proporcionalidad directa más fácil que el propuesto para alumnos de primaria.

Un 20,8% de futuros profesores tienen el conocimiento matemático suficiente como para plantear un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes pero les falta el conocimiento didáctico suficiente para plantear un problema más fácil que el propuesto para alumnos de primaria al no ser capaces de distinguir las variables que afectan a la dificultad del problema: tipos de números, relación entre las cantidades, contexto y conceptos adicionales que intervienen en el mismo.

Podemos afirmar que un 79,8% de futuros profesores tienen el conocimiento matemático suficiente para reconocer un problema de proporcionalidad directa entre magnitudes y plantear uno similar.

Sin embargo nos faltan datos para poder hacer conjeturas acerca del 20,2 % de futuros profesores que contestaron en blanco, no llegaron a abordar la pregunta o sus respuestas se pueden clasificar dentro de la opción de "otras incorrectas". En principio podemos afirmar que entre estos futuros profesores hay cierto número de ellos que no tienen el conocimiento matemático suficiente para reconocer el problema de proporcionalidad directa entre magnitudes.

Referencias

Castro, E. (Ed.). (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Fernández, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Gómez, P. (2007). *TEDS-M: Teacher Education Study in Mathematics. Estudio Internacional sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas*. Trabajo presentado en XI Simposio de la SEIEM, Tenerife.

Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, C. (2009). *Estudio TEDS-M: estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas.* En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 425-434). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study In Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatto, M. T., Sharon, J. S., Senk, L., Ingvarson, L. y Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam, The Netherlands: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO COMO GENERADOR DE LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO EN 5 AÑOS.

María Salgado y María Jesús Salinas

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

El número está presente en el entorno desde edades muy tempranas y a diario en las aulas de Educación Infantil. Muchos adultos consideran su construcción y conocimiento, algo sencillo y obvio; sin embargo su construcción y aprendizaje es más laboriosa de lo que la sociedad cree. El hecho de adquirirse de forma temprana conlleva en ocasiones a dificultades, de ahí la importancia de una correcta intervención en el colegio, en la que el docente debe ofrecer variedad de propuestas y medios, entre las que está el razonamiento inductivo, que favorezcan su abstracción y eviten errores conceptuales que puedan persistir en la edad adulta. En este trabajo exponemos algunas ideas sobre el razonamiento inductivo en la etapa de Educación Infantil y el desarrollo de una propuesta pedagógica que pone de manifiesto la potencialidad del razonamiento en esta etapa.

Palabras clave: número, Educación Infantil, razonamiento inductivo.

Abstract

The number is present in the environment from an early age and every day in the kindergarten classrooms. Many adults consider their construction and knowledge, something simple and obvious, but its construction and is more laborious learning of what society believes. The fact of early acquired often causing difficulties, hence the importance of proper intervention at school, in which the teacher should offer a variety of proposals and media, among which is the inductive reasoning that favor its abstraction and avoid misconceptions that may persist into adulthood. In this paper we present some ideas on inductive reasoning in the pre-primary education and the development of an educational plan that demonstrates the potential of the reasoning at this stage.

Keywords: number, Early Childhood Education inductive reasoning

La LOE considera la Educación Infantil como la primera etapa educativa. Los niños/as en esta etapa (Torra Bitlloch, 1994) tienen necesidades e intereses relacionados con la expresión matemática que les inducen a buscar y elaborar estrategias para resolver los problemas que se plantean. Resulta por tanto la Educación Infantil una etapa de la escolarización dónde se debería ofrecer al alumnado la ayuda necesaria que guiara sus intereses y proporcionara los complementos adecuados para conseguir un desarrollo matemático completo y coherente que no conlleve a errores que persistan en la edad adulta; introduciendo desde edades tempranas (Cañadas y Castro, 2010) la búsqueda de regularidades que permitan establecer futuras generalizaciones; fomentando así en la enseñanza de la matemática "habilidades en el alumnado".

Salgado, M., y Salinas, M. J. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 119-125). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Enseñanza- aprendizaje del número

El concepto de "número" es muy difícil de definir, es tan abstracto como usual en el entorno. Todos los seres humanos lo utilizan diariamente, contar, leer y escribir números, realizar cálculos y razonar con números son aspectos de muchas de las tareas diarias de las personas adultas (Baroody, 1997).

Los niños/as de infantil a menudo recitan números, aunque no comprendan su representación y las relaciones que se establecen entre ellos (Orton, 1990), los construyen poco a poco (Veiga, 1999). Esta construcción del número hace referencia a su conocimiento, refiriéndose este (Canals, 2007) a saber ver mentalmente la cantidad que representa, saber manipularla y familiarizarse con ella.

En la Escuela Infantil, es donde se deben iniciar la construcción de conocimientos numéricos. A lo largo de la historia estos conocimientos estuvieron presentes en las aulas de los más pequeños, aunque su tratamiento fue distinto. Siguiendo estudios de Chamorro (2006), antes del año 1971 el objetivo de la escuela infantil era enseñar a recitar y escribir la serie numérica. En las décadas setenta y ochenta, se fomentaba la construcción de saberes prenuméricos, clasificar, ordenar, entre otros, como paso previo a la construcción del número y actualmente se incide en que para su construcción es necesaria la actividad de contar.

Los currículos actuales de esta etapa presentan en el Área de Conocimiento del Contorno un bloque de contenidos de expresión matemática, entre los que se encuentra el concepto del número. Dicho concepto está presente diariamente en el aula, y profesores y profesoras intentan que sus alumnos los adquieran empleando para ello distintos modos de enseñanza, que deberían estar planteados en contextos concretos con significado para los niños (Salinas y Fernández, 2006) para así avanzar en su aprendizaje y llegar a conocerlos, considerándolos desde distintos puntos de vista, identificándolos en diversos contextos y comprendiéndolos, llegando a la adquisición del "conocimiento real, significativo y práctico del número" (Canals, 2007: 53).

El docente, en el diseño del proceso de enseñanza del número (Chamorro, 2006), no puede basarse solamente en la definición matemática de número natural y en las reglas del algoritmo de "contar", tiene que establecer un conjunto de situaciones que lleven a los niños/as a encontrar las "razones de ser" del número. En la búsqueda de estas razones juega un papel importante las propuestas didácticas planificadas por el profesor/a, que debe tener en cuenta que las matemáticas son un modo de pensar y no siempre que aparecen números es matemática, ni viceversa (Fernández, 2007).

Además debe conocer y tratar todos los componentes del aspecto informal y formal del número para así dar una correcta intervención en el aula. Los aspectos informales son cuatro: numeración, dominio de la serie numérica; comparación de cantidades, habilidad de establecer relaciones entre números; cálculo informal, con situaciones de suma y resta y conceptos básicos, reparto intuitivo, regla de cardinalidad, constancia numérica y estrategias de conteo avanzadas. Con respecto a los aspectos formales son: convencionalismos de lecto-escritura de cantidades, dominio de hechos numéricos, cálculo formal, valorando la exactitud y procedimiento y conceptos básicos del sistema numérico decimal.

Razonamiento inductivo y patrones numéricos

¿Qué es razonar? es la acción de dar razones para explicar un hecho.

El razonamiento inductivo es (Castro, Cañadas y Molina, 2010) "un proceso de pensamiento que permite observar conclusiones a partir de premisas previamente establecidas". Se considera un importante camino de acceso al conocimiento matemático.

Existen diferentes modelos teóricos de razonamiento inductivo, Cañadas y Castro (2004) proponen un modelo teórico de siete pasos basado en aportaciones de Pólya y Hadamard, que exponemos a continuación:

1. Trabajo con casos particulares.
2. Organización de casos particulares.
3. Identificación de patrones.
4. Formulación de conjeturas.
5. Justificación de las conjeturas.
6. Generalización.
7. Demostración.

Las autoras señalan que no todos los pasos son necesarios y no todos tienen el mismo peso. Afirmando que el último, la demostración, es el que pone de manifiesto si hay o no un nuevo conocimiento.

Los patrones ocupan un importante espacio en la educación matemática para la enseñanza de los primeros niveles.

Basándose en estudios de Orton, Palhares y Mamede (2002) relacionan el término patrón con regularidad. Según Araújo, Palhares y Giménez (2008) uno de los fines de la introducción de patrones es conseguir que los niños/as vean la matemática útil, que les da poder para resolver situaciones diarias. Además provoca modelos de repetición que permite el acceso a elementos del pensamiento matemático que no están disponibles a través de cualquier otro medio.

Todos los días en el aula de infantil se presentan situaciones relacionados con los números. Por ejemplo: pasar lista, reparto de material, mirar la fecha,… son algunas de las situaciones que nos lleva a manejar la cantidad expresada en números y a establecer patrones numéricos que favorezcan la abstracción del concepto del número.

Basándonos en características del pensamiento concreto de los niños/as de 3 a 6 años, concretamos el modelo anterior en los siguientes pasos para el 2º ciclo de Educación infantil:

1. Trabajar con casos concretos, sencillos y observables.
2. Identificar patrones, que ayuden a ver las regularidades.
3. Formular conjeturas.
4. Justificar conjeturas.
5. Demostrar.

La abstracción es el instrumento de la generalización. No es posible construir conocimiento general sin eliminar lo individual, sin abstraer (Cañadas y Castro, 2010) .Estas autoras basándose en estudios de Polya, hacen hincapié en la importancia del reconocimiento de patrones para generalizar, ya que a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos.

Objetivo de la investigación

El objetivo de este trabajo, es obtener y confrontar visiones y opiniones de razonamiento inductivo empleado por alumnos/as de educación infantil.

Sujetos

La entrevista se realizó a una muestra de 21 niños de 5 años de un colegio público de educación infantil y primaria de la comarca de Santiago de Compostela. De esta muestra 11 son niñas y 10 son niños. Todos estuvieron escolarizados en los cursos anteriores en el mismo centro a excepción de un alumno que se incorporó este curso procedente de Cartagena (Murcia).

Metodología

Se ha realizado la entrevista colectiva, como metodología. Somos conscientes que este tipo de entrevistas no ayuda a profundizar en conocimientos, ésta adquiere características de una "conversación o discusión" abierta de los alumnos; pero debido a las características de estos, consideramos esta entrevista la más apropiada para el tipo de actividad planificada

La persona que realizó la entrevista fue una de las investigadoras. A los alumnos/as se les plantea una situación abierta y éstos tienen flexibilidad y libertad para dar sus respuestas.

Problema

A diario en las aulas de E.I. existen situaciones que pueden ser tratadas para su resolución mediante el razonamiento inductivo. El ejemplo que presentamos a continuación requiere del proceso descrito anteriormente en pasos de Cañadas y Castro (2010).

Medir es una manera de valorar la cantidad. Establecer y/o comparar una longitud es algo que interesa a los niños/as de infantil y lo hacen espontáneamente. Frecuentemente se escuchan diálogos como "yo soy más alto", "el mío es más grande", etc. Estas comparaciones son importantes (Torra Bitlloch, 1994) ya que son el primer eslabón del pensamiento abstracto.

En el caso que nos ocupa, la situación planteada a los alumnos fue la descrita a continuación:

Determinar a partir de 1 metro, cuánto son 8 metros.

En esta situación surge la necesidad de un instrumento intermedio (un metro) que nos permitirá establecer comparaciones y relaciones entre lo abstracto-concreto.

Recogida y análisis de datos

Los datos se recogieron en vídeo y en soporte papel a través de los trabajos escritos de los alumnos/as y de las anotaciones de la entrevistadora.

El análisis de los datos recogidos permite afirmar que, la comprensión del enunciado presentó dificultades para algunos alumnos/as. Estas dificultades estaban relacionadas con la comprensión del enunciado y la abstracción del problema, ya que aún siendo el vocabulario empleado muy sencillo, algunos alumnos/as no comprendían lo que se estaba planteando ni abstraían algunos conceptos necesarios para la resolución del problema.

Una vez que la entrevistadora explica el enunciado, se observan dos comportamientos diferentes por parte de los alumnos/as, una activo y participativo, por el contrario, otro más pasivo e introvertido. Destacar que todos los estudiantes en alguna ocasión intervinieron en la entrevista.

Todos los estudiantes coincidieron en el comienzo de la solución del problema, añadiendo otra unidad a la dada. Este procedimiento fue reiterativo hasta realizar 4 casos que fue cuando 3 alumnos/s comenzaron a intuir la solución, saltando del caso 4 al caso 8. El resto de los estudiantes seguían proponiendo, ir aumentando de 1 en 1.

A la hora de organizar los datos, lo hicieron guiados por la entrevistadora y por los resultados obtenidos de la entrevista.

Algunas representaciones de alumnos/as de la organización de datos.

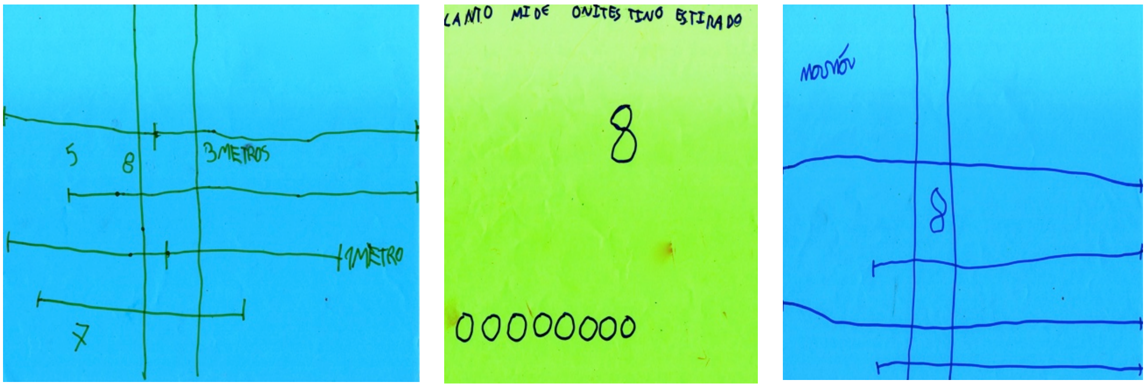


Figura 1. Representaciones organización de datos

Algunos estudiantes intentan generalizar, pero no obtienen ninguna conjetura para el caso general. 3 alumnos consiguen generalizar justificando la respuesta.

La forma de expresar estas generalizaciones era oral, en todos los casos. La traslación del lenguaje oral a la expresión escrita se hizo mediante dibujos y/o rectas y/o números, fundamentalmente.

Ejemplos de estas generalizaciones son los siguientes:

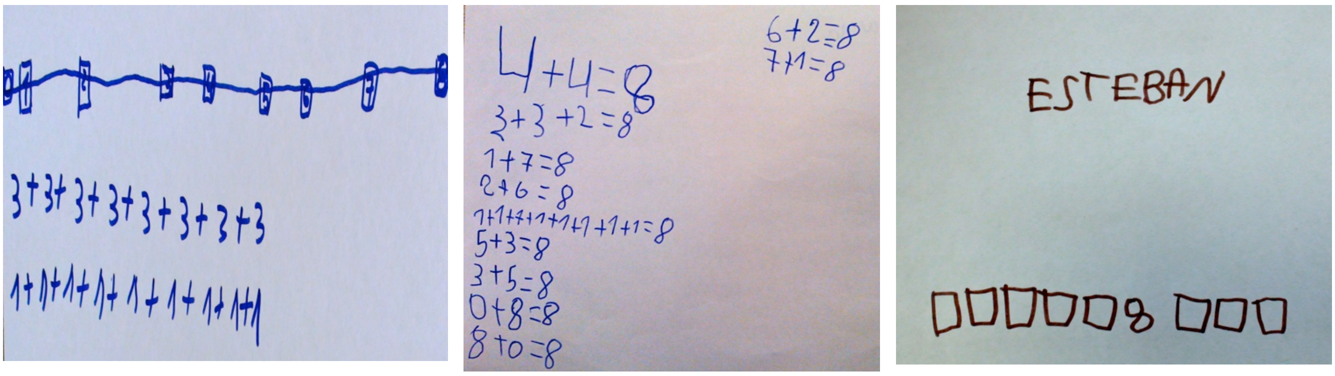


Figura 2. Representaciones generalizaciones.

La tarea propuesta no era familiar para los alumnos/as, sin embargo este hecho no supuso una negativa a la participación en la actividad; por el contrario todos participaron con mayor o menor éxito en los resultados, pero todos se implicaron, sin grandes diferencias en sus aportaciones.

Donde si hubo diferencias fue a la hora de generalizar los resultados, ya que el nivel de abstracción implicó que algunos alumnos visualizasen la respuesta a la tarea frente a otros que reflejaron solamente casos particulares.

Conclusiones

El objetivo de este estudio no pretende generalizar resultados sino reflejar los obtenidos y traducirlos en orientaciones a otros maestros.

Transmitir a los alumnos, que las matemáticas o la solución a un problema no es realizar correctamente una grafía o un algoritmo mecánicamente, es una de las tareas más importantes que los docentes deberían plantearse a la hora de planificar sus actividades.

La intervención de guía por parte de la entrevistadora fue mucha, lo que nos lleva a sugerir que es necesaria mucha participación del maestro, orientando la propuesta para la consecución correcta de la misma.

El tipo de metodología no contribuyó a un conocimiento profundo y sistemático, ya que algunos niños/as en vez de dar sus opiniones, se conformaron con asentir o rebatir a los otros. En este tipo de actitud además de caracteres individuales del alumnado tiene que ver la inseguridad, ya que no son frecuentes este tipo de acciones en las aulas de infantil, por lo que es algo a trabajar para potenciar la participación crítica de todos los participantes.

Dado que 3 alumnos/as han obtenido una relación nos muestra que es posible este tipo de situaciones y razonamientos en la educación infantil.

Referencias

Araújo, E.; Palhares, P. y Giménez, J. (2008). Niños de cuatro años investigan con patrones. *UNO*, *47*, 54-66.

Baroody, A.J. (1997). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Aprendizaje-Visor.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Canals, M. A. (2007). La construcción progresiva del saber numérico desde infantil a primaria. En J. A. Fernández (Ed.), *Aprender matemáticas, metodologías y modelos europeos* (pp. 51-57). Madrid: MEC.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2004). El razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 173-182). La Coruña: SEIEM.

Chamorro, M. C. (2006). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Fernández-Bravo, J. A. (2007). Metodología didáctica para la enseñanza de la matemática: variables facilitadoras del aprendizaje. En J. A. Fernández (Ed.), *Aprender matemáticas, metodologías y modelos europeos* (pp. 9-26). Madrid: MEC.

Orton, O. (1990). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Morata.

Palhares, P. y Mamade, E. (2002). Os padroes na matemática do pré-escolar. *Educare-educere, 10*, 107-123.

Salinas, M. J. y Fernández, T. (2006). Errores sobre las matemáticas de los estudiantes de magisterio. Estudio del sistema de numeración decimal. En J. Díaz y M. P. Jiménez (Eds.), *Perspectivas sobre a aprendizaxe das ciencias e das matemáticas.*

Estudos en honor ao profesor Eugenio García- Rodeja Fernández (pp. 233-245). Santiago de Compostela: Unidixital.

Torra Bitlloch, M. (1994). ¿Para qué es necesario la matemática en la edad infantil?. *UNO, 1*, 7-14.

Veiga, E. J. (1999). El trabajo lúdico-plástico. Una manera de llegar al número. *Actas de las IX JAEM, Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 427-430).

DIAGRAMAS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN PROBLEMAS DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA[1]

Fany Markela González y Enrique Castro

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas dadas por estudiantes de educación secundaria a la traducción de dos problemas verbales de comparación multiplicativa a representación simbólica y gráfica. Hemos categorizado las respuestas en la traducción del problema verbal a una representación simbólica y a una representación gráfica, lo que nos ha permitido elucidar categorías para cada tipo de representación, e hipotetizar indicios de prioridad y subordinación entre ellas. Los participantes fueron 89 estudiantes sin preparación previa y a quienes se les aplicó una prueba que consta de dos problemas con dos apartados cada uno: en el primer apartado se pide a los estudiantes que resuelvan el problema a partir de un enunciado verbal y, en el segundo, que utilicen un diagrama para representar las relaciones existentes en el enunciado del problema. Los resultados muestran que: a) un buen número de estudiantes realizan de forma correcta la traducción del enunciado verbal a la expresión simbólica; b) los estudiantes tienen dificultad para traducir el enunciado verbal a un diagrama, incluso después de haber resuelto el problema de forma correcta, c) el diagrama lo dibujan a partir de la solución que han obtenido y no del problema mismo, y d) en estos niveles hay estudiantes que cometen el error de inversión al resolver un problema de comparación con enunciado inconsistente y, en el dibujo, mantienen el error de inversión.

Palabras clave: problemas verbales, comparación multiplicativa, diagramas, representación simbólica, representación gráfica.

Abstract

This paper analyzes the answers given by high school students to the translation of two multiplicative comparison word problems to symbolic and graphical representation. We have categorized the responses in translating the word problem to symbolic representation and a graphical representation, which has allowed us to elucidate categories for each type of representation, and hypothesize indication of priority and subordination among them. Participants were 89 students without prior preparation and those who had a test consisting of two problems with two sections each: the first section asks students to solve the problem from an utterance and in the second, using a diagram to represent the relationships in the problem statement. The results show that: a) a number of students correctly perform the translation of verbal statement to the symbolic expression b) students have difficulty translating the verbal statement to a

[1] Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

González, F. M., y Castro, E. (2012). Diagramas producidos por estudiantes de secundaria en problemas de comparación multiplicativa. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 127-138). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

diagram, even after solving the problem of how correct, c) draw the diagram from the solution obtained and not the problem itself, and d) at these levels there are students who make the reversal error in solving a problem compared to inconsistent statement, and in the drawing, maintain the reversal error.

Keywords: word problems, multiplicative comparison, symbolic representation, graphical representation.

En este estudio pretendemos indagar si los estudiantes de primeros cursos de educación secundaria son capaces de hacer diagramas que integren las relaciones que aparecen en los datos del problema y verlo a través de las distintas formas en las que este grupo de estudiantes traducen un enunciado verbal a simbólico y gráfico.

Esta idea la vamos a analizar contextualizada en problemas de comparación multiplicativa con referente desconocido, que son problemas que plantean cierta dificultad de comprensión y que ocasionan dan lugar a que los resolutores cometan errores en la resolución, siendo el más típico el llamado error de inversión (Lewis y Mayer, 1987). Para ello realizamos un análisis de las producciones y los errores cometidos en dichas traducciones.

Debido a que la resolución de problemas no es fácil para muchos estudiantes, hay estudios que han propuesto formas para superar las dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de resolver problemas. Algunos investigadores han descrito la resolución de problemas matemáticos como una de las áreas más difíciles para los estudiantes (Puig y Cerdán, 1988). El desarrollo de habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas ha sido un tema importante (por ejemplo, Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985).

Lewis y Mayer (1987) realizaron un estudio para determinar qué aspectos de los problemas de comparación eran más difíciles para los estudiantes universitarios y encontraron que el error de inversión fue cometido en estos niveles, este hecho se produce cuando el estudiante resuelve un problema con la operación inversa a la que debe ser, es decir multiplica en lugar de dividir o viceversa y suma en lugar de restar o viceversa y cuyos resultados muestran que estos estudiantes cometen más errores de inversión en problemas con enunciado inconsistente que en problemas con enunciado consistente. De hecho varios estudios han demostrado que los problemas verbales de comparación que exigen la misma operación matemática no siempre son iguales en dificultad (Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; Riley y Greeno, 1988; Stern, 1992).

Muchos han sido los estudios realizados acerca de la resolución de problemas verbales de comparación en matemáticas encontrándose éstos entre los más difíciles para los estudiantes. (Lewis y Mayer, 1987; Weinberg, 2007). Debido a su complejidad lingüística y matemática, los estudiantes tienen dificultades para entender y resolver estos problemas. (Lewis y Mayer, 1987). A partir de estos resultados nuestro estudio pretende comprender mejor las operaciones mentales que los estudiantes de los primeros niveles de secundaria llevan a cabo cuando resuelven problemas de comparación multiplicativa.

El uso de diagramas en los problemas verbales

El contenido visual-espacial de las matemáticas es amplio e incluye conceptos relacionados con la geometría y sentido espacial, medición, razonamiento, las estadísticas, la visualización de los objetos y la representación gráfica de datos numéricos en matemáticas que ayudan a los estudiantes en la resolución de problemas. (Lowrie, 1996).

El NCTM sugiere que, en las normas y principios para la enseñanza de las matemáticas las formas en que las ideas matemáticas son representadas es fundamental para saber cómo las personas comprenden y utilizan esas ideas (NCTM, 2000). “los estudiantes necesitan desarrollar y utilizar una variedad de representaciones de ideas matemáticas a modelos de problemas... se debe utilizar representaciones informales, tales como el dibujo, para poner de relieve las diversas características de los problemas… estas representaciones sirven como herramientas para pensar y resolver problemas. También ayudan a los estudiantes a comunicar su pensamiento a los demás” (pág. 206).

Uno de los principales elementos a estudiar es el uso de las representaciones visuales, como es el caso de los diagramas, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en resolución de problemas (Booth y Thomas, 2000; Diezmann y English, 2001, y Novick, Hurley y Francis, 1999). Entre las primeras investigaciones que han hecho hincapié en la importancia de cultivar en los estudiantes capacidades en el uso de la heurística, que incluye la promoción de diagramas tenemos el trabajo de Pólya (1945), y en un estudio posterior, Schoenfeld (1985) confirma la eficacia de la heurística y el uso de diagramas como estrategia para la resolución de problemas. Entre las múltiples estrategias que se han sugerido para mejorar la eficacia en la solución de problemas de matemáticas, el uso de diagramas ha sido descrito uno de los más eficaces. Hembree (1992) encuentra mediante el empleo del meta-análisis que el uso de diagramas fue el más eficiente entre las estrategias que se habían sugerido como ayuda para la solución de problemas.

La utilización de diagramas gráficos se remonta al trabajo de Willis y Fuson (1988) en el que mostraron la mejora en la resolución de problemas, enseñando a los estudiantes de segundo grado de educación primaria a utilizar diferentes dibujos esquemáticos para representar diferentes categorías de problemas verbales (cambio, combinación y comparación), que involucran suma y resta, encontrando que los estudiantes fueron capaces de hacer el dibujo correcto para una categoría determinada, siendo los problemas de comparación más difíciles, incluso con la ayuda de los dibujos esquemáticos. Más tarde, Marshall (1995) subraya la importancia en la utilización de diagramas como ayuda para la conceptualización de un gran número de problemas matemáticos. De este modo los problemas aritméticos de suma y resta necesitan diversos esquemas que ayuden a formarse una representación adecuada para su resolución. Los alumnos necesitan conocimiento estratégico para elegir los esquemas adecuados a los distintos tipos de problemas que mejoren la representación de los mismos (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003). Otros estudios han demostrado empíricamente los efectos beneficiosos de la presentación de un diagramas específico o representaciones visuales en la resolución de problemas (Ainsworth y Th Loizou, 2003; Cheng, 2004; Mayer, 2003).

Los diagramas se han utilizado como método en el proceso de resolución de problemas en distintas situaciones (Espinosa, 2004; González, 2010; Martínez, 2011).

Por otro lado, varios estudios han demostrado que los diagramas son útiles cuando los inventan los alumnos, no cuando se les proporcionan (Cox, 1999). En esa misma línea, (Castro, Morcillo y Castro, 1999) obtienen que en algunos problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la educación secundaria obligatoria, utilizan de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. Estudios como el de Saundry y Nicol (2006), donde presentan un proyecto que examina cómo los niños responden cuando se les presenta un problema matemático a resolver, los tipos de imágenes que pintan de manera espontánea, las cosas que están pensando al mismo tiempo que dibujan. Han encontrado que hay niños que hacen dibujos elaborados para el más simple de los problemas, centrando su interés, por ejemplo en las pestañas de una persona que comparten los asientos en un autobús, lo que podría perder el punto matemático del problema, otros niños emplean el dibujo como un proceso que representa la solución del problema.

Otros estudios investigan los factores que promueven el uso de diagramas construidos espontáneamente mediante el examen de las percepciones de los estudiantes y las actividades diarias de clase (Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007).

En las investigaciones que hasta este momento hemos revisado, observamos que algunas tratan de promover el uso de diagramas como métodos para resolver problemas otras como facilitadores del proceso de resolución, la gran mayoría promueven la instrucción para mejorar el conocimiento en el uso de diagramas, mientras que otros investigan el uso espontaneo de diagramas por parte de los estudiantes a la hora de resolver un problema de matemáticas. En este trabajo queremos ver cómo piensan los estudiantes cuando se les pide que construyan un diagrama que represente las relaciones existentes entre los datos del enunciado. Por ello nos hemos planteado un objetivo que nos permita dar cuenta de la importancia que ejercen las representaciones simbólicas y gráficas en el proceso de resolución a partir de un problema verbal de comparación multiplicativa.

Objetivo

Analizar el tipo de representación simbólica y gráfica en forma de diagramas que producen estudiantes de primer curso de secundaria en la resolución de problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa.

Preguntas de investigación

Para estudiar el papel que desempeñan los diagramas en la resolución de problemas de verbales comparación multiplicativa nos hemos planteado las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los distintos tipos de representaciones simbólicas que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa de enunciado inconsistente? Y ¿Qué tipos de diagramas utilizan para representar las relaciones existentes entre los datos del enunciado verbal?

Método

Participantes

En esta experiencia han participado un total de 89 estudiantes de cuatro grupos de primer curso de educación secundaria obligatoria de dos institutos públicos de la ciudad de Granada, con edades comprendidas entre 12 y 14 años, sin preparación previa al respecto para este estudio.

Instrumento

Los datos que analizamos en este trabajo los hemos obtenido del resultado parcial de un cuestionario con seis problemas y que hemos diseñado y construido para alcanzar un objetivo más amplio del que aquí tratamos. En este informe analizamos sólo los problemas 1 y 2 y sus apartados a y b, correspondientes al paso de lo verbal a lo simbólico y de lo verbal a lo gráfico, respectivamente. Es decir, tratamos de observar cómo representan simbólica y gráficamente un problema de comparación de enunciado inconsistente a partir de un enunciado verbal. En la tabla 1 se muestran los problemas verbales de comparación multiplicativa presentados a los estudiantes.

Tarea	*Enunciado*	*Preguntas*
1	En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.
2	Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Tabla 1. Problemas planteados a los estudiantes

Los problemas 1 y 2 del cuestionario son problemas aritméticos verbales simples de comparación multiplicativa con referente desconocido, también conocidos como problemas de enunciado inconsistente. Los dos problemas constan de dos apartados. En el primer apartado se les pide que resuelvan el problema y en el segundo que dibujen un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Los problemas fueron aplicados y resueltos de forma individual en una prueba de lápiz y papel a la hora normal de clases de matemáticas y con la presencia del profesor natural y la investigadora en calidad de observadores del proceso de resolución.

Resultados

Para cada uno de los dos problemas, hemos analizado de forma conjunta las respuestas de los estudiantes en los dos apartados correspondientes (1a con 2a y 1b con 2b), con la finalidad de categorizar las producciones desde el punto de vista simbólico y gráfico.

Criterios para evaluar las respuestas del paso verbal a simbólico

En el apartado **a** hemos categorizado de forma inductiva a partir de las producciones de los resolutores las distintas formas con que traducen el enunciado verbal en una representación simbólica**.** Las respuestas producidas por los estudiantes han sido evaluadas en función del proceso utilizado en la traducción del enunciado a la representación simbólica, independientemente de los errores de cálculo. Para ello hemos tenido en cuenta las caracterizaciones de las fases del proceso de resolución. Para efectos de este trabajo hemos tomado en cuenta las dos fases generales utilizadas por Castro (1994), que son: la comprensión del problema y la solución del problema, tal y como se muestra en la figura 1.

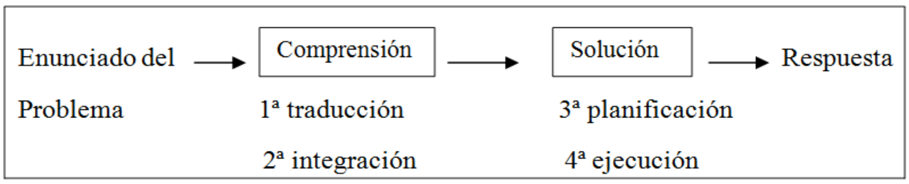


Figura 1. Fases de resolución de problemas verbales. Tomado de Castro (1994)

Como hemos expuesto antes en este estudio tomamos en cuenta sólo la fase de comprensión con las dos subetapas independientemente si cometen errores de cálculo o no.

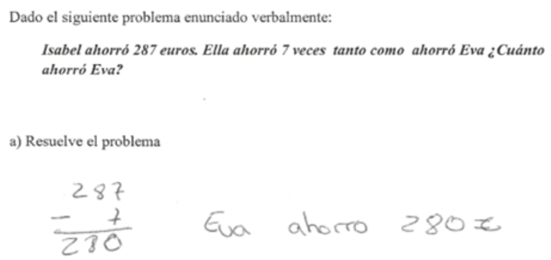
Establecimiento de las categorías

A través de un proceso inductivo hemos llegado a establecer seis categorías en las respuestas producidas por los participantes al problema enunciado en el apartado **a** del cuestionario de problemas. Mediante un proceso de refinamiento progresivo hemos detectado que las categorías de respuestas de los participantes se pueden reducir a seis tipos, armonizadas en torno a tres ideas claves iniciales: ausencia de respuesta, respuesta errónea y respuesta correcta. Y dentro de cada una de ellas hemos indagado si había variantes con una significación propia diferenciada. Para el establecimiento de las categorías hemos tenido también en cuenta los tipos de errores más frecuentes que se han detectado en este tipo de problemas y que están recogidos en la literatura (Castro, Rico, Castro, 1992). Las categorías finales establecidas son:

- I_1: no hay información/sin proceso de resolución; el estudiante no produce ningún tipo de registro escrito, deja el espacio en blanco y no presenta proceso de resolución.

- I_2: comete error aditivo; el estudiante utiliza la suma o la resta en lugar de la multiplicación o la división, es decir, el estudiante interpreta el problema como si fuese de estructura aditiva, empleando una adición o una sustracción para resolverlo.

  Ejemplo 2a: El estudiante **E-36** en la tarea 2a comete error aditivo, en este caso interpreta "7 veces" como "restar 7", y pasa de la estructura multiplicativa a la aditiva, es decir resta 287 - 7 en lugar de dividir 287 : 7.



Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?

a) Resuelve el problema

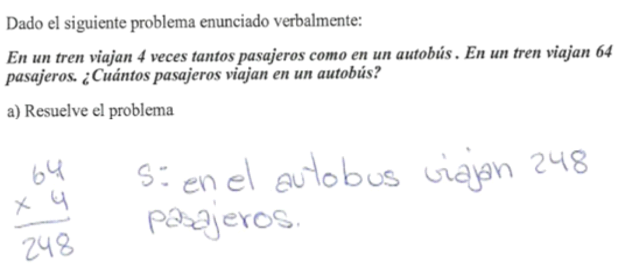
287
− 7
280

Eva ahorro 280 €

Figura 2. Error aditivo del estudiante E-36

- I_3: comete error de inversión; cuando el resolutor utiliza la operación inversa a la que debería utilizar, es decir emplea la multiplicación por la división o viceversa. En este caso utiliza la multiplicación en lugar de la división.

  Ejemplo I_3: el estudiante E-04 en la tarea 1a comete error de inversión, es decir resuelve el problema con la operación inversa, en este caso multiplica 64 x 4 en lugar de dividir 64: 4.



Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?

a) Resuelve el problema

64
x 4
248

S: en el autobus viajan 248 pasajeros.

Figura 3. Error de inversión del estudiante E-04

- I_4: comete error de inversión con rectificación; el estudiante anota una primera respuesta en la que comete error de inversión y a continuación tacha la respuesta que supone equivocada y resuelve nuevamente.

  Ejemplo I_4: El estudiante E-30 en la tarea 1a comete error de inversión con rectificación. Primeramente multiplica 64 x 4 = 256, seguido rectifica tachando todo el proceso y a continuación divide 64: 4 =16 mostrando esto como única respuesta.

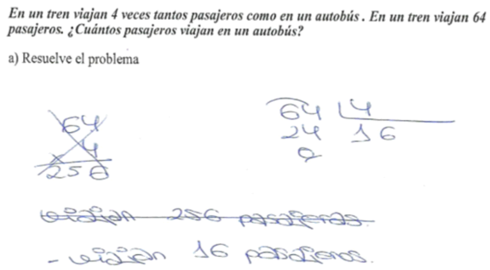


Figura 4. Error de inversión con rectificación del estudiante E-30

- I_5: representación aritmética; cuando utilizan números y operaciones aritméticas de forma correcta para resolver el problema.

  Ejemplo I_5: El estudiante E-77 en la tarea 2a representa y resuelve el problema con procedimientos puramente aritméticos de forma correcta.

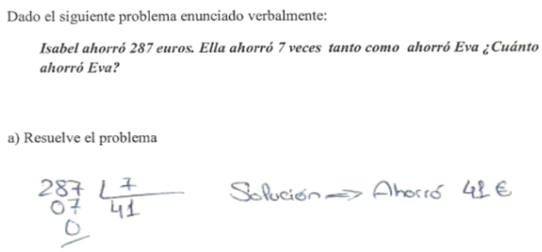


Figura 5: Representación aritmética del estudiante E-77

- I_6: representación algebraica; cuando en el proceso de resolución los estudiantes explicitan de manera correcta relaciones de carácter algebraico (ecuaciones simples) entre los datos utilizando operaciones algebraicas para resolver el problema.

  Ejemplo I_6: El estudiante E-69 en la tarea 1a utiliza un procedimiento algebraico y representa el problema verbal de comparación utilizando una ecuación simple.

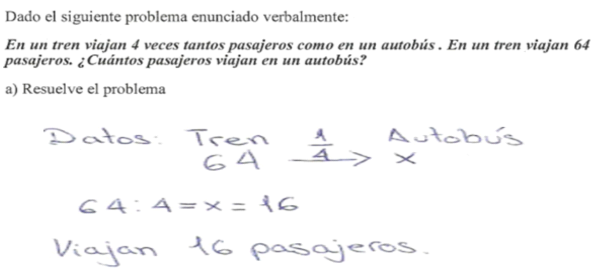


Figura 6. Representación algebraica del estudiante E-69

En la tabla 2, observamos las frecuencias y porcentajes de los tipos de representaciones simbólicas producidas por los estudiantes, en la que se observa un alto porcentaje de representación aritmética correcta y la presencia errores especialmente el error de inversión.

Categoría	Descripción	Frecuencias 1a	Frecuencias 2a	Porcentajes 1a	Porcentajes 2a
I_1	sin información /sin proceso de resolución	4	5	5	6
I_2	error aditivo	0	2	0	2
I_3	error de inversión	10	25	11	28
I_4	error de inversión con rectificación	10	7	11	8
I_5	representación aritmética correcta	62	47	70	53
I_6	representación algebraica correcta	3	3	3	3

Tabla 2. Frecuencias de los tipos de representación simbólica

Establecimiento de las categorías para el paso de lo verbal a lo gráfico

En el apartado **b** de los problemas 1 y 2 se les pide a los estudiantes que dibujen un diagrama a partir de un problema enunciado verbalmente. Se trata pues, de que realicen una traducción desde una representación verbal de un problema de comparación multiplicativa a un diagrama.

Hemos tomado en cuenta las categorizaciones utilizadas en estudios anteriores como las de Edens y Potter (2007), categorizan los dibujos o diagramas producidos por los estudiantes en *esquemáticos* y *no esquemáticos*. Por otra parte Uesaka, Manalo e Ichikawa (2007) los llaman *diagramas de alta calidad* y *diagramas de baja calidad.* Algunas de estas categorías pueden coincidir con nuestro análisis. Hemos establecido unos criterios en función de los cuales categorizar el nivel de respuesta. Concretamente, los criterios para analizar los diagramas producidos por los estudiantes han sido:

- 1º: Si en la respuesta aparece un dibujo o no.
- 2º: Grado de integración del problema, es decir, si se reflejan las relaciones entre las cantidades.
- 3º: Presencia o no de errores de integración del enunciado.
- 4º: Grado de abstracción de las representaciones.

De acuerdo con los dos primeros criterios hemos obtenido respuestas de los siguientes tipos:

- Sin dibujo
    - Respuestas en blanco. En este apartado están las respuestas en las que los sujetos no hacen ninguna anotación.
    - Reformulación verbal del problema en forma más resumida, sintética o telegráfica.
    - En forma de operador
- Con dibujo
    - Dibujo cualitativo: Si el dibujo representa sólo el contexto o los sujetos mencionados
    - Dibujo cuantitativo: Si en el dibujo realizado aparece algún aspecto cuantitativo y, dentro de este nivel si:
        - Representan sólo las cantidades que se comparan o
        - Representan la relación entre las cantidades

Descripción de las categorías

A continuación definimos las categorías establecidas anteriormente según las producciones de los estudiantes de este estudio y mostramos ejemplos de cada una de ellas, excepto las categorías sin dibujo.

- C_1: sin dibujo / en blanco; no hay información, no dibuja o está en blanco.
- C_2: sin dibujo/ reformulación del enunciado; el estudiante no dibuja, hace anotaciones, reescribe el enunciado en forma sintética, telegráfica, resumida.
- C_3: sin dibujo/ en forma de operador.
- C_4: dibujo cualitativo; dibujan personajes u objetos alusivos a la temática o el contexto del enunciado.

  Ejemplo C_3: El estudiante E-02 en la tarea 1b dibuja objetos y personajes alusivos a la temática en este caso dibuja autobús, tren y pasajeros.

Figura 7: dibujo cualitativo del estudiante E-02

- C_5: dibujo cuantitativo; los diagramas más elaborados son los que hemos denominados cuantitativos. En ellos, se observa un dibujo que refleja las dos cantidades que intervienen en el esquema de comparación (comparado y referente) y también la relación multiplicativa que existe entre ellos. Puesto que en estos dibujos se refleja la integridad del problema los denominamos *diagramas integrados*.

  Ejemplo C_5: El estudiante **E-62** en la tarea **1b** hace un dibujo con aspecto relacional, es decir dibuja en una sola figura y de mayor tamaño, el comparado (cantidad de pasajeros del tren), lo relaciona con los datos del referente (la cantidad desconocida), dibujando 4 figuras más pequeñas para representar el escalar (4 veces) y utiliza el signo de interrogación para señalar la incógnita del problema en el dibujo.

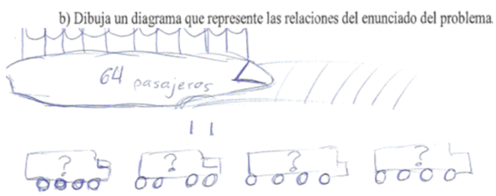


Figura 8: diagrama cuantitativo del estudiante E-62

Hemos realizado un análisis de frecuencias simples de las producciones de los estudiantes para este apartado presentados en la tabla 3.

Categoría	Descripción	Frecuencia 1b	2b	Porcentaje 1b	2b
C_1	sin dibujo/ está en blanco	6	13	7	15
C_2	sin dibujo/reformulación del enunciado	12	15	13	17
C_3	sin dibujo/ esquemas de proporcionalidad	5	5	6	6
C_4	con dibujo/ diagramas cualitativos	30	40	34	45
C_5	con dibujo/ diagrama cuantitativo	36	16	40	18

Tabla 3: Frecuencias de los tipos de representación gráfica

Hemos observado que la frecuencia es mayor donde utilizan diagramas cualitativos que representan personajes u objetos de la temática del enunciado al igual que los dibujos en los que aparecen representadas las respuestas del problema, en otros casos el uso de otros tipos de dibujos, donde actúan como operador en ambos casos las frecuencias alcanzan poco más del 34% y 45% respectivamente. La frecuencia con la que hacen dibujos cuantitativos en el apartado 1b es mayor que en el apartado 2b, esto nos lleva a pensar que el apartado 1b es más fácil de representar en forma cuantitativa que el apartado 2b.

Conclusiones

Exponemos por separado las conclusiones para cada uno de los apartados a y b, correspondientes a las dos preguntas planteadas.

Con respecto a las representaciones simbólicas. La mayoría de los estudiantes producen una representación aritmética correcta de los problemas, muy pocos lo dejan en blanco, se podría decir que este tipo de problemas son abordables para este nivel de alumnado. Un pequeño porcentaje de estudiantes utiliza ideas algebraicas. Se pone de manifiesto que el error de inversión se produce en estos niveles escolares. A la luz de los resultados hay algunos estudiantes que cometen el error aditivo, pero en menor medida que el error de inversión.

Con respecto a las representaciones gráficas. Una primera conclusión es que ningún alumno utiliza de forma espontánea los diagramas para resolver el problema. Una segunda conclusión es que, cuando se le pide que dibujen un diagrama hay estudiantes que no lo dibujan a partir del enunciado, sino que lo dibujan a partir de la solución. Como consecuencia de ello, mantienen en el diagrama el error de inversión que ya habían cometido al resolverlo simbólicamente. Utilizan para hacer el diagrama los datos que aparecen en la solución, sin percatarse del error una vez hecho el dibujo. Una tercera conclusión es que los estudiantes utilizan diagramas de diferentes tipos para representar el problema verbal de comparación multiplicativa, predominando el dibujo alusivo a la temática del enunciado, así como también los que en el dibujo utilizan la solución, como dato del mismo.

A pesar de que hay un alto porcentaje de estudiantes que realizan de forma correcta la traducción del problema a una solución de carácter simbólico, según los resultados obtenidos son pocos los estudiantes que hacen un diagrama que relacione las cantidades que aparecen en el enunciado del problema. Lo que nos lleva a pensar que los participantes no están familiarizados con el dibujo de diagramas que integren las relaciones existentes entre los datos del enunciado verbal del problema, y no reconocen la utilidad que puedan tener los diagramas para la resolución de problemas. Por lo que sería necesario instruirles en la construcción de diagramas integrados.

Referencias

Aguilar, M., Navarro, J. I. y Alcalde, C. (2003). El Uso de Esquemas Figurativos para Ayudar a Resolver Problemas Aritméticos. *Cultura y Educación, 15*(4), 385-397.

Ainsworth, S., y Th Loizou, A. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science*, *27*, 669-68 1.

Booth, R. y Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 169–190.

Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en los problemas verbales de comparación multiplicativa* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations Produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Castro, E, Rico, L. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin and K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth* PME (Vol. 1, pp. 113-120). Durham, NH (USA): University of New Hampshire.

Cheng, P. C. H. (2004). Why diagrams are (sometimes) six times easier than words: benefit beyond locational indexing. In A. Blackwell, K.Marriott, y A. Shimojima (Eds.), *Diagrammatic representation and inference, third international conference, diagrams*, LNAI 2980 (pp. 242-254). Heidelberg: Springer.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*, 343–363.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K., y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20,* 405-438.

Diezmann, C. M., y English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 77–89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Edens, K., y Potter, E (2007). The Relationships of Drawing and Mathematical problem Solving: Draw for Math Tasks. *Studies in Art Education A Journal of Issues and Research. 48*(3), 282-298.

Espinosa, E. (2004).*Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

González, F. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem-solving - a metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*, 242-273.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Lowrie, T. (1996). The use of visual imagery as problem-solving tool: Classroom implementation. *Journal of Mental Imagery, 20,* 127–140.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

Martínez, M. (2011). *Utilización del Método Geométrico Lineal (MGL) para la Resolución de Problemas de Álgebra Elemental* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Novick, L. R., Hurley, S. M., y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory y Cognition, 27,* 288–308.

Pantziara, M., Gagatsis, A. y Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non-routine mathematical problems. *Educ. Stud. Math, 72*, 39-60.

Pólya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Puig, L. y Cerdán, F (1988). *Problemas Aritméticos Escolares.* Madrid: Síntesis.

Saundry, C., y Nicol, C. (2006). Drawing as Problem-Solving: Young Children's Mathematical Reasoning through Pictures. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 57-63). Prague.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

Stern, E. (1992). Why do children solve nonsense problems? Understanding and solving arithmetic word problems from a psychological point of view. *Der Mathematikunterricht, 4,* 7-29.

Uesaka, Y., Manalo, E., y Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instructions, 17*, 322-335.

Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. In T. Lamberg y L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* [CD-ROM] Lake Tahoe, NV: University of Nevada-Reno.

Willis, G.B. y Fuson, K.C. (1988). Teaching Children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word problem. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192-201.

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTACIÓN DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS

José García[1], Isidoro Segovia[2] y José Luis Lupiáñez[2]

[1]Universidad de Guadalajara (México), [2]Universidad de Granada

Resumen

Este artículo hace un recorrido sobre diferentes perspectivas que a través del tiempo se le han asignado a la definición del término álgebra, además de los diversos enfoques desde donde se han abierto distintas líneas de investigación con el objetivo de indagar las posibles fuentes de error en la enseñanza y aprendizaje de la misma. Finalmente, para evidenciar los errores más comunes que los estudiantes presentan al resolver distintas tareas algebraicas, se tomó en cuenta el trabajo de investigación de García (2010) realizado con un grupo de estudiantes universitarios de primer curso, con el objetivo de caracterizar las principales fuentes de errores que se presentan en las producciones de los alumnos al resolver dichas tareas.

Palabras claves: álgebra; tareas algebraicas; errores; estudiantes universitarios.

Abstract

This article talks about the different perspectives over time has been allocated to the meaning of algebra, as well as the various approaches from which opened various lines of research aimed to investigate the possible sources of error in the teaching and learning of it. Finally, to highlight the common mistakes that students make when solving algebraic variety of tasks, took into account the research of Garcia (2010) conducted with a group of first-year university students, in order to characterize the main sources of errors that occur in the productions of the students to solve such tasks.

Keywords: algebra; algebraic tasks; mistakes; college students.

El álgebra desde su nacimiento como conocimiento científico, fue concebida como una generalización de la aritmética para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades. Sin embargo, a través del tiempo ha sufrido diferentes variaciones, por lo que el presente estudio pretende, en un primer momento, realizar una aproximación a la definición del concepto de álgebra, analizando las características más comunes estudiadas desde las diferentes perspectivas establecidas por algunos investigadores de la educación matemática. El recorrido, evidencia, además, la existencia de diversos conceptos que pueden ser considerados como fuente de errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Para ejemplificar lo anterior, se toma en cuenta la investigación previa de García (2010), en donde se analizan los errores encontrados al resolver distintas tareas algebraicas por parte de estudiantes de primer curso universitario, a través de la revisión de sus respuestas en 153 pruebas aplicadas en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México.

García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 139-148). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Cabe señalar que los alumnos de primer curso universitario acceden a este nivel, después de una formación escolar previa, en donde hipotéticamente adquieren conocimientos algebraicos en los distintos cursos de matemáticas de la educación secundaria y del bachillerato, como quedo comprobado al analizar los contenidos de los currículos del álgebra documentados de los niveles mencionados en distintos planes educativos, en los cuales se reconoció la presencia de los distintos enfoques que se describen en este trabajo y sin embargo, los distintos errores identificados en las producciones de los estudiantes en el trabajo de García (2010), revelan un aprendizaje deficiente de los mismos.

La fase inicial de esta investigación consistió en una revisión bibliográfica de las distintas concepciones del álgebra que forman parte de la instrucción matemática de los estudiantes, y una vez que consideramos los distintos contenidos que implican la enseñanza del álgebra desde esas perspectivas, inferimos la necesidad del diseño y fundamentación de un instrumento de evaluación que nos permita explorar los conocimientos adquiridos por los alumnos que reciben la instrucción del álgebra bajo los enfoques mencionados. Así mismo, estimamos que al evaluar las producciones de los alumnos de las distintas tareas algebraicas propuestas en el citado instrumento, podremos obtener información valiosa al analizar los errores que se presenten en dichas producciones, para posteriormente orientarnos hacia el estudio de las posibles fuentes que pudieran estar en la base de los distintos errores encontrados. Con ese fin, un segundo eje de este trabajo gira en torno a la revisión de las investigaciones acerca de los errores en la educación matemática que tratan de aclarar las fuentes de errores más comunes.

Enfoques del álgebra

De acuerdo con Katz (2007, p.41), Euler, definía álgebra en el siglo XVI, como “la ciencia que enseña a determinar las cantidades desconocidas a través de lo que se sabe”. Así mismo, Lacampagne en 1995, considera álgebra como el lenguaje de las matemáticas, sin embargo, otra idea extendida es que el álgebra es la ciencia que se encarga de resolver ecuaciones, graficar funciones en el plano de coordenadas, y muchos otros algoritmos que se realiza con las omnipresentes letras x e y.

La naturaleza del álgebra tiene una de sus raíces epistemológicas en el problema de las consideraciones históricas del álgebra como una generalización de la aritmética y su definición precisa ha estado en el centro de las discusiones desde siempre. Kieran (1990), por ejemplo, habla de un serio debate entre los matemáticos británicos en la primera mitad del siglo XX. Por un lado, sostenían la posición de que el álgebra es la aritmética universal (o aritmética generalizada). En una corriente contraria, debatían si el álgebra era puramente un sistema de símbolos arbitrarios, esencialmente regida por principios arbitrarios.

Por su parte Wheeler (1996), sostiene que el álgebra debería ser una etapa terminal de la aritmética, ya que reconoce que el álgebra resuelve problemas que la aritmética no considera dentro de su campo de estudio.

Durante el siglo XX, se desarrolló el concepto de que el álgebra es la disciplina que involucra la manipulación de símbolos, la resolución de ecuaciones y expresiones en donde se implica la simplificación de símbolos. Sin embargo, el álgebra es más que mera manipulación de símbolos. Coincidimos con el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), quienes afirman que el álgebra comprende además las relaciones entre cantidades, incluyendo las funciones, formas de representar las relaciones matemáticas, y el análisis del cambio. Sharma (1988) sostiene que hacer o realizar álgebra es la manipulación de los símbolos para producir otro tipo de relaciones y soluciones a los ejemplos, ejercicios y problemas, que en determinado momento se pueden plantear.

Por su parte Lane y Birkhoff (1999), consideran que el álgebra empieza como el arte de manipular sumas, productos y potencias de los números; las reglas para estas manipulaciones deben de ser válidas para todos los números, por lo que dichas manipulaciones nos deben llevar a la utilización de letras en lugar de números.

Más allá de las discusiones epistemológicas y de contenido que en torno al álgebra se han desarrollado, cabe añadir que diversos investigadores han descrito diferentes caracterizaciones del álgebra que se pueden encontrar en el currículo de matemáticas. Por ejemplo Kaput (1995) afirmó que hay varios conceptos de álgebra en el programa de enseñanza de las matemáticas, él sostiene que, en este caso, el álgebra se basa en la generalización, la manipulación de la sintaxis, el aprendizaje de la estructura, el estudio de las funciones, relaciones y variaciones, y el lenguaje de modelado.

Asimismo, Kieran (1996) caracteriza el álgebra escolar como una actividad de generación. Esta actividad consiste en la formación de las ecuaciones como incógnitas o variables que representan las situaciones problemáticas, las expresiones que forman a partir de patrones numéricos y geométricos, y la formación de las expresiones de las relaciones numéricas. También caracteriza al álgebra escolar como una actividad de transformación, es decir, en actividades que se basan en normas como la factorización, la sustitución, sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, resolver ecuaciones y expresiones simplificar y trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes. Además de que también Kieran caracteriza el álgebra escolar como las actividades "global/meta-level", es decir, las actividades para las que, el álgebra se utiliza como una herramienta, pero que no son exclusivas de la misma. Entre las actividades que pueden considerarse de este tipo están algunas soluciones de problemas, el modelado, los esquemas, la generalización, el análisis de las relaciones, las justificaciones, demostraciones y las predicciones.

Bednarz, Kieran y Lee en 1996 desarrollaron cuatro enfoques relacionados con los objetivos y contenidos del currículo de álgebra en la escuela, que se basan en los cuatro aspectos diferentes del álgebra y en cada uno de ellos pone un especial énfasis. Los aspectos a los que se refieren son: el álgebra como la expresión de la generalidad, el álgebra como una herramienta para resolver problemas, el álgebra como modelado y uso de múltiples representaciones y, el álgebra como el estudio de las funciones

Una perspectiva utilitarista y mas apegada al currículo escolar, la encontramos en Usiskin (1998), quien propone enfoques para el álgebra a partir de lo que hacemos con ella. Él sostiene que los propósitos para el álgebra son determinados por las diferentes concepciones, y usos de las variables.

Así pues Usiskin, desarrolla la concepción del álgebra como: 1) aritmética generalizada, en donde las variables pueden ser consideradas como patrones generalizadores; 2) estudio de procedimientos para la resolución de ciertos tipos de problemas en los que las variables aparecen como incógnitas o constantes; 3) el estudio de las relaciones entre las cantidades en que las variables varían; y 4) el estudio de la manipulación y justificación de las estructuras en las que la esencia se encuentra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre una o varias x, y o n ya sean sumandos, factores, bases, o exponentes. Cabe señalar que en esta percepción, la variable, se ha convertido en un objeto arbitrario, en una estructura abstracta relacionada con ciertas propiedades algebraicas.

Estas distintas perspectivas del álgebra concebidas por Usiskin (op. cit.), son compartidas por diversos autores que concuerdan en percibir el álgebra como una generalización de la aritmética (Kaput,1995 y 1999; Mason,1996; Bell , 1996; Hewitt,1998; Kieran,1989 y 2006; Socas Palarea y Ruano, 1997),como un método de resolución de problemas (Kaput,1995; Langrall y Swafford,1997; Filloy, Rojano y Puig 2008; Bell, 1996; Socas, Palarea y Ruano, 1997), como el estudio de las funciones (Fey y Good,1985; Kaput,1995; Dugdale, Thompson, Harvey, Demana, Waits, Kieran, McConnell, y Christmas 1995; Bell, 1996; Driscoll, 1999), así como el estudio de las estructuras abstractas (Kaput ,1995; Ruano, Socas y Palarea, 1997; NCTM , 2000).

A manera de conclusión, podemos decir que no existe un acuerdo global para definir el término álgebra, ya que involucra diferentes tareas y procesos cognitivos, por lo que es difícil que exista un consenso en el que todos los involucrados estén satisfechos. Por consiguiente, orientamos nuestro estudio hacia la investigación de la valoración de las habilidades algebraicas de los alumnos de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas, relacionadas con los cuatro enfoques antes mencionados (Generalización de la aritmética, método para la resolución de problemas, herramienta para el estudio de las funciones y estudio de estructuras matemáticas).

Considerando estos enfoques, se propondrá la aplicación de un instrumento de evaluación que nos proporcione, por un lado, información relacionada con los conocimientos algebraicos que los estudiantes adquieren bajo estas perspectivas, respecto a la resolución de tareas algebraicas, y por otro, evidencias de errores, que nos permitan investigar las principales fuentes que se encuentran en las bases de los mismos.

En virtud de lo anterior, presentamos a continuación, la revisión de literatura de trabajos relacionados con la investigación de los errores en la educación matemática, como fundamento para el análisis de los errores que pudieran presentarse como consecuencia de la aplicación del instrumento de evaluación referido anteriormente.

Errores en la educación matemática

Rico (1995), considera que los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de la matemática y constituyen datos objetivos que se encuentran frecuentemente en todo proceso educativo.

Además, Rico (Op. cit), afirma que la investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es una de las principales preocupaciones actuales de la Educación Matemática. Para sustentar lo anterior, Rico, describe cuatro líneas actuales de investigación en torno a los errores:

- Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores.
- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

Estimamos que nuestro estudio, está relacionado principalmente con la primera línea de investigación, sin descartar las posibles implicaciones que pudieran surgir con las demás líneas.

En la investigación bibliográfica realizada, identificamos diversos trabajos que tratan de clasificar los errores de acuerdo a sus causas, pero sin tener especificidad en el contenido algebraico, y posteriormente, al efectuar una revisión más detallada desde el punto de vista del álgebra de esos errores, consideramos que muchos de ellos tienen su concreción en ella.

Por otra parte, también identificamos, aquellos errores cuyas fuentes son consideradas de carácter procedimental, es decir, cuyas causas pudieran generarse en el proceso de resolución de las tareas, y que han sido descritos en la bibliografía consultada, algunos de esos errores serían, los que se mencionan a continuación: errores de manipulación de distintas expresiones matemáticas (Ruano, Socas y Palarea, 2003), errores ocasionados en la transcripción de la información (Esteley y Villareal; 1996; Astolfi, 1999), secuencias incoherentes en los procedimientos de los alumnos (Caputo y Macías, 2006), aplicación de algoritmos defectuosos (Roberts, 1968), errores de cálculo simple (Roberts, 1968; Esteley y Villareal, 1996), errores en los cuales se truncan algunas operaciones o no se completan las demostraciones (Engelhart, 1977; Caputo y Macías; 2006; Mosvshovits et al., 1987; Esteley y Villareal, 1996), y algunos errores fortuitos (Cox , 1975; Zigmond, Vallecorsa y, Silverman; 1981).

Así mismo, se reconocieron aquellos errores cuyas fuentes son consideradas de carácter conceptual u originados en los procesos de adquisición del conocimiento algebraico, siendo algunos de estos, los que se refieren a continuación: errores ocasionados por inferencias erróneas (Mosvshovitz et al, 1987; Esteley y Villareal, 1990; Astolfi, 1999), aquellos ocasionados por la interferencia de los conocimientos previos (Davis, 1984; Caputo y Macías, 2006); los originados por la estructura semántica del lenguaje matemático (Davis,1984; Radatz, 1980; Mosvshovitz et al., 1987; Esteley y Villareal, 1990), los provocados por las representaciones inadecuadas de la información (Davis , 1984); los motivados por la rigidez del pensamiento (Radatz, 1980); aquellos cuyo origen está en las propiedades y reglas aritméticas (Astolfi, 1999; Ruano, Socas y Palarea 2003), los engendrados por conceptos estructurales mal comprendidos (Zigmond et al., 1981; Davis, 1984; Mosvshovitz et al., 1987; Esteley y Villareal, 1990; Astolfi, 1999; Caputo y Macias, 2006) y los originados por una sobrecarga cognitiva (Astolfi, 1999).

En cuanto a las investigaciones vinculadas con el análisis de errores relacionados con contenidos algebraicos, destacamos el trabajo de Booth (1984), quien cita los estudios realizados en el proyecto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M.), para la explicar algunas de las causas que, a su juicio, originan errores al trabajar con expresiones de carácter algebraico, en dichos estudios se describen las siguientes categorías como fuentes de los errores:

- La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras.
- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas.
- La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.
- El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.

En este mismo sentido, recalcamos el trabajo de Matz (1980), quien sostiene que los errores que se presentan en la resolución de tareas algebraicas, pueden ser resultado razonable de los intentos por parte de los estudiantes de adaptar sus conocimientos previos a las nuevas situaciones que se les presentan. Así mismo, afirma que los estudiantes recurren a sus conocimientos previos, para resolver las nuevas situaciones que se les presentan y que generalmente dichos conocimientos consisten en reglas básicas de la aritmética, las cuales han estudiado con anterioridad y además, hacen uso de distintas técnicas de extrapolación de las que se auxilian para la resolución de dichas situaciones. Estas técnicas de extrapolación, les puede generar dos escenarios al momento de utilizarlas para resolver problemas, el primero seria un contexto conocido en el cual, aparentemente dominan las reglas para la resolución del problema y un segundo entorno nuevo en el cual se ven obligados a la creación nuevos procedimientos o intentar adaptar sus procedimientos conocidos a las nuevas condiciones de las situaciones que se les presentan.

Por consiguiente, y continuando bajo estas perspectivas; retomamos el trabajo previo (García, 2010) en el cual se detectaron diez categorías de errores que en su momento, y bajo los objetivos que se perseguían, sus fuentes fueron descritas como de carácter procedimental. Así pues, recurrimos a las categorías propuestas de Booth (Op. cit),con la acotación de que consideramos que éstas son muy amplias y debemos profundizar un poco más para precisar el análisis de las causas de los errores.

La revisión de nueva literatura nos permitió elaborar un análisis más detallado de esos errores que nos orientó hacia la búsqueda de fuentes conceptuales y procedimentales en la base de los mismos.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de esa nueva revisión de los errores encontrados.

Ejemplo 1

Efectuar la siguiente división: $(2y^3+5y^2+2y+15) / (y+3)$

Solución: $2y+5y+2+5$

En este caso produce una disociación entre letras con números y números que no van acompañados de letras; así los números acompañados por letras se operan de manera independiente de los números que van solos; divide por tanto las expresiones con letras por y, y 15 lo divide por 3.

Inicialmente, este error fue clasificado como debido a procedimientos propios incorrectos e inferencias no validas (García, 2010). Y complementado nuestra visión encontramos qué estos errores estarían asociados a la naturaleza y significado de los símbolos y las letras en el álgebra como lo sugiere Booth (1984), quien sostiene que a pesar de que, aparentemente, para los estudiantes es mas fácil concebir que las letras representan números con valores únicos, en algunos casos pueden manejarlas como entidades mas que como cantidades, y es común que inventen reglas para operar con los números por un lado y agrupar o eliminar las letras por otro.

Ejemplo 2

Cuando se les indica factorizar la siguiente expresión, se tuvo como respuesta:

$8x^2y^3 + 4x^3y^2 + x^2y^2 - 2xy^2 = 11\,x^8\,y^9$

En este caso observamos como el estudiante realiza la suma de los coeficientes por separado y la de los exponentes por otro lado.

Estos errores se habían clasificado inicialmente como: Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra (García, 2010). Al realizar un nuevo análisis, los consideramos relacionados con la segunda de las clasificaciones de Booth (1984), quien sugiere que la fuente de este tipo de error se puede encontrar en las dificultades que presentan los estudiantes para separar el álgebra de la aritmética, al considerar el álgebra como una generalización de la aritmética y por consecuencia tratan de aplicar las reglas que conocen de la aritmética en las expresiones algebraicas. Así mismo, dichos errores pueden ser causados, por la tendencia común de los estudiantes de buscar obtener una respuesta numérica de las operaciones algebraicas, lo que los lleva a realizar operaciones inventadas, que los conducen a resultados erróneos.

Ejemplo 3

Esta es la respuesta encontrada al resolver un sistema de ecuaciones lineales:

$2x + 2y + 2z = 4 \; 2x + 2y + 2z = 6xyz$

$4x + 10y + 6z = 24x + 10y + 6z = 20xyz$

$6x - 2y - 4z = -2 \; 6x - 2y - 4z = 8xyz$

En este ejemplo, se les pedía a los estudiantes resolver un sistema de ecuaciones lineales y en este caso vemos como los resuelven, sumando los coeficientes y agrupando las incógnitas del sistema.

Clasificamos estos errores inicialmente dentro de la categoría: Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas (García, 2010). Estos errores los relacionamos con las categorías descritas por Booth (1988), en las cuales dichos errores pudieran tener su origen en el objetivo de la actividad algebraica y la naturaleza de sus respuestas. Cabe añadir, que otra fuente de error de estos errores, puede estar en el hecho de que en la aritmética, el centro de actividad es encontrar soluciones numéricas concretas, y por lo tanto, muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica. Al mismo tiempo estos errores pueden explicarse a partir de la técnica de extrapolación descrita por Matz (1980), como rescritura del problema, en la cual menciona, que algunos estudiantes cuando se enfrentan a una situación desconocida, tratan de rescribir las condiciones del problema intentando adaptarlo a sus conocimientos previos y en muchas ocasiones, tan solo insertan sus reglas conocidas en el nuevo contexto, en este caso la suma de los coeficientes de las incógnitas, inventando reglas de agrupación de las incógnitas y finalmente “arreglan” los resultados para que parezcan correctos.

En un primer análisis de los errores encontrados en el estudio de García (2010), se obtuvieron entre otros resultados, los que destacamos a continuación y en los cuales se evidenciaron, entre otras cosas:

- Un rendimiento de los estudiantes bastante deficiente en la resolución de distintas tareas algebraicas: Productos notables, ecuaciones lineales, operaciones con expresiones algebraicas y desigualdades.
- Una amplia gama de errores presentes en sus producciones relacionadas con la resolución de distintas tareas algebraicas: Se distinguieron 10 categorías de errores.
- Diversos errores desfasados con el nivel de enseñanza donde se aplicaron las pruebas.

Los últimos resultados referidos, fueron los que nos abrieron una línea de investigación para continuar con nuestro trabajo, ya que es nuestro interés profundizar en el estudio de las probables fuentes que pudieran estar en las bases de los errores hallados.

Conclusiones

En resumen, la revisión de la literatura ha puesto de manifiesto que no hay una definición única del álgebra y pero si distintas aproximaciones que son compatibles, además no encontramos una definición consensuada del término álgebra. La investigación realizada hasta el momento nos ha permitido observar grandes similitudes entre los enfoques mencionados y la práctica docente derivada de los distintos documentos curriculares de los diferentes planes educativos revisados en nuestro trabajo.

A manera de conclusión final, se propone, una perspectiva holística del álgebra, la cual se estructura con base en las definiciones y enfoques mencionamos anteriormente y sustentada en los distintos trabajos de investigación revisados. Dicha perspectiva estriba en considerar el álgebra como:

- Una generalización de la aritmética.
- Un método para la resolución de problemas.
- Una herramienta para el estudio de las funciones.
- Como estudio de estructuras matemáticas.

Consecuentemente con lo anterior, consideramos que surge la necesidad de fundamentar y diseñar un instrumento que nos permita evaluar y caracterizar los conocimientos de los estudiantes acerca de esa visión holística del álgebra que estamos considerando, el cual nos permita analizar y caracterizar las distintas habilidades cognitivas de carácter operacional y las habilidades cognitivas de carácter conceptual, presentes en las producciones de los alumnos de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas. Para posteriormente, una vez que se obtengan resultados de la aplicación del instrumento de evaluación, realizar la organización y caracterización de los errores que se manifiestan en las producciones antes mencionadas y poder establecer las fuentes en donde se encuentran las bases de esos errores.

Referencias

Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar.* Sevilla: Diada

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to Algebra: Two aspects. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching,* (pp. 167-185). Dordrecht: Kluwer.

Caputo, S. y Macías, D. (2006). *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones*. Disponible en: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Cox, L. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *6*(4), 202-220.

Driscoll, M (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann

Dugdale, S., Thompson, P., Harvey, W., Demana, F., Waits, B., Kieran, C., Mcconnell, J., y Christmas, P. (1995). Technology and algebra curriculum reform: Current issues, potential directions, and research questions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *14*(3), 325-357.

Engelhardt, j. M. (1977). Analysis of children's computational errors: a qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology*, *47*,149–154.

Esteley, C.; Villarreal, M. (1990). *Categorización de errores en Matemática*. XIII REM. San Luis

Esteley*, C.; Villarreal, M. (1996). Análisis y Categorización de errores en Matemática. Revista de Educación Matemática*. Volumen 11. Nº 1. (16−35). Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba.

Fey, J. T., y Good, R. A. (1985). Rethinking the sequence and priorities of high school mathematics curricula. In C. R. Hirsch y J. Zweng (Eds.*), The secondary school mathematics curriculum, 1985 yearbook* (pp. 43-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Filloy, E.; Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer

García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* (Tesis de fin de Master). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada

Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching*, *163*, 19-29.

Kaput, J. (1995). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics*. Boston MA.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Katz, V. J. (2007). Learning algebra: An historical overview. En V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a technological future* (pp. 7-25). Washington, DC: The Mathematics Association of America.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-136 ST - Cognitive processes involved in learn). Cambridge University Press.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.

Lane, S. M. y Birkhoff, G. (1999). *Algebra*, AMS Chelsea Publishing.

Langrall, C. W. y Swafford, J. O. (1997). Grade six students" use of equations to describe and represent problem situation. *Paper presented at the American Educational Research Association*, Chicago, IL.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra*: Perspectives for Research and Teaching (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behaviour, 3*(1), 93-166.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics*, Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), pp. 3-14.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*. *1*(1), 16-20.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez (Eds.). *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils, *Arithmetic. Teacher, 15*, 442-446.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322).

Sharma, M,C. (1988). Math Notebook (From Theory to Practice). *Information for Teachers/Parents of Children with Learning Problems in Mathematic*s. Volumes 5 and 6. Center for Teaching/Learning of Mathematics, Framingham, MA.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Wheeler, D. (1996). Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 317-325). Netherlands: Kluwer Publishers.

Zigmond, N., Vallecorsa, A., y Silverman, R. (1981). *Assessment for instructional planning in special education*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall

ASPECTOS ESTRUCTURALES Y CONCEPCIONES PERSONALES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

José Antonio Fernández, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

El objeto de este trabajo es describir e interpretar las concepciones personales de un grupo de estudiantes de bachillerato acerca del concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados a partir de investigaciones previas. Estos aspectos son: la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, su carácter exacto o aproximado, su consideración como proceso potencialmente infinito o finito en la práctica, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. Los estudiantes respondieron a seis cuestiones para valorar la veracidad o falsedad de enunciados relativos a estos aspectos. Basados en estos aspectos, analizamos y tipificamos respuestas obtenidas en perfiles y destacamos la riqueza de relaciones entre los aspectos estructurales descritos, particularmente la vinculación entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad.

Términos clave: límite de una función en un punto; límite finito; concepciones personales; aspectos estructurales del concepto de límite; dualidad objeto/proceso.

Abstract

The purpose of this work is to describe and interpret the personal conceptions related to the concept of finite limit of a function at one point from a group of non-compulsory secondary education students in terms of structural aspects, compiled and synthesized from prior research. These aspects are: the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, its consideration as a potentially infinite or finite in practical process, its reachability and its possibility of being exceeded. Students answered six questions to verify the truthfulness or falsity of statements related to these properties. Based on these structural aspects, we analyze and typify the provided responses in profiles, pointing out the richness of relationships between these structural aspects, highlighting the one between reachability and the possibility of being exceeded.

Keywords: limit of a function at one point; finite limit; personal conceptions; structural aspects of the concept of limit; object/process duality.

La presencia de características estructurales que subyacen en las concepciones de los escolares acerca del concepto de límite, en particular para el límite finito de una función en un punto, está documentada en diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) o del carácter inalcanzable y/o irrebasable del valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingedorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Fernández, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2012). Aspectos estructurales y concepciones personales sobre límite finito de una función en un punto de estudiantes de bachillerato. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 149-157). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los escolares y las características citadas, ofrece la oportunidad de revisar, actualizar y discutir las interpretaciones hechas por los autores citados.

Este estudio está enfocado hacia la exploración de significados que organizan el concepto de límite, poniendo de manifiesto que las características estructurales mencionadas no han perdido actualidad, que forman parte de las concepciones de los escolares y de los usos del lenguaje. Detectamos también cómo la revisión de estas características contribuye a explicar e interpretar las concepciones específicas y globales de los alumnos, lo cual es objetivo del trabajo.

Antecedentes y Marco Teórico

Tall (1980) enfatiza la riqueza y diversidad de procesos de paso al límite (limiting processes) clasificados en dos tipos, según tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952, pp. 27-30). En primer lugar, procesos de paso al límite continuos, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad. En segundo lugar, procesos de paso al límite discretos, como ocurre con los límites de sucesiones y series, las expansiones decimales, o la aproximación de áreas de formas geométricas. Los procesos de paso al límite tienen fundamentación métrica, o bien una topológica más general.

Tall identifica que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y, posteriormente, la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Los estudiantes conciben, en su mayoría, la noción de límite como un proceso dinámico y no lo identifican con una cantidad numérica (Tall, 1980).

Las técnicas algorítmicas para el cálculo de límites no suelen provocar dificultades a los escolares (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005). Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) pone de manifiesto la naturaleza distinta de estas técnicas respecto a las de los algoritmos aritméticos y algebraicos a las que los escolares están acostumbrados.

Monaghan (1991) estudia la influencia del lenguaje sobre las ideas de los estudiantes con los términos "tender a", "aproximarse a", "converger a" y "límite", en cuanto a su uso referido a diferentes gráficas de funciones y a los ejemplos con los que los escolares explican dichos términos. Nuestro enfoque en este caso es diferente al no pedir a los escolares que definan los términos; estimulamos su uso libre, haciendo las inferencias de significado oportunas a partir de sus producciones, lo cual permite explorar la amplitud y precisión del vocabulario utilizado por los escolares cuando hablan de límite funcional y de los matices que asocian.

Romero (1995) y Blázquez (2000) recogen los avances y limitaciones de los estudiantes frente a los conceptos de número real y límite, respectivamente. La definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega (2009).

Concepciones y Aspectos Estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual, este último término adoptado en el sentido de Tall y Vinner (1981), subyacente a un concepto dado, lo que dichos autores llaman *definición conceptual*, siendo irrelevante la fidelidad entre esa descripción y la comprensión del sujeto. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Por otra parte, cuando hablamos de *concepciones locales o específicas* entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual mediante estímulos apropiados, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. Las *concepciones globales* surgen de compilar y sintetizar varias concepciones específicas de un mismo sujeto. Nuestra interpretación trata sobre aquello que entendemos quiere comunicar el sujeto. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones.

Llamamos *aspectos estructurales* a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Contribuyen a interpretar las concepciones personales, declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite. Describimos a continuación tales aspectos, identificando cada aspecto con un código; subrayamos que ninguno de ellos agota el concepto de límite.

- *Dualidad objeto/proceso (O/P).* Paralelamente a los modelos cognitivos de Cottrill et al. (1996) y Sfard (1991) que postulan la naturaleza dual de un concepto como proceso y objeto, los escolares pueden distinguir entre el "objeto" límite (un número o punto) y el "proceso" que lo origina. Este aspecto trata de dilucidar dónde el estudiante pone el énfasis cuando enuncia su concepto de límite, si en el objeto, en el proceso dinámico (Tall, 1980), o si considera ambos mediante una visión dual.

- *Naturaleza del "objeto límite": Carácter Exacto/Aproximado (E/A).* Sierpinska (1987) detectó concepciones que asumen el carácter definido (corresponde a un valor exacto que es posible calcular) o indefinido (sólo conocemos aproximaciones del límite).

- *Naturaleza del "proceso límite": Carácter infinito potencial/Finito práctico (IP/FP).* Este aspecto trata de discriminar entre los escolares que enfatizan el carácter finito del proceso (práctico o formal), los que destacan su carácter infinito potencial, o bien, aquellos que aceptan los dos.

- *Propiedad local de la función: Límite Alcanzable/No alcanzable. (Alcanz.)* Este aspecto fue tratado por Cornu (1991) y Monaghan (1991) quienes lo asocian con un uso coloquial de los términos "límite" y "tender". Consideramos tres sentidos no excluyentes para interpretar la alcanzabilidad del límite: (a) Si la función puede o no tomar el valor del límite en un entorno reducido del punto (un entorno sin incluir el punto); (b) Considerar la alcanzabilidad "real" del límite como término "final" del proceso infinito actual que desencadena; (c) No alcanzabilidad, debida al carácter infinito potencial del proceso práctico, es decir, a la exclusión (provocada por la función o por el algoritmo) de la imagen del punto donde se lleva a cabo el estudio. Añadimos un cuarto sentido: (d) Continuidad / posibilidad de evaluación de la función en el punto. Conjeturamos que los escolares pueden manifestar estos cuatro sentidos.

- *Propiedad local de la función: Acotación superior o inferior por el valor del límite (Reb.)* Consideramos esta propiedad relacionada con la interpretación coloquial del término "límite" (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). Un límite es considerado *no rebasable* si acota los valores de la función en el proceso de aproximación, superior o inferiormente según la monotonía creciente o decreciente, respectivamente, de la función en un entorno del punto.

El objetivo de este trabajo es valorar la pertinencia de estos aspectos estructurales para describir y relacionar las concepciones específicas declaradas por los estudiantes de bachillerato encuestados.

Contexto, Participantes y Métodos

Se trata de un estudio descriptivo basado en el método de encuesta con reactivos abiertos, cuyo diseño resumimos a continuación.

Sujetos

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes españoles de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología, todos del mismo grupo académico. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia se utilizó el libro de texto *Matemáticas I* de la editorial SM y los apuntes propios del profesor.

Instrumento y aplicación

Trabajamos con un cuestionario que incluye seis preguntas de respuesta abierta, que se presentan en dos versiones diferentes, A y B. Los ítems son adaptados de Lauten, Graham y Ferrini-Mundy (1994); sus enunciados se encuentran en el Apéndice.

Las preguntas son de respuesta abierta. Requieren asignar, de manera justificada, los valores verdadero (V) o falso (F) a una afirmación sobre una propiedad relativa al concepto de límite de una función en un punto.

La Tabla 1 incluye una caracterización de los ítems de verdadero/falso en términos de los aspectos estructurales directamente vinculados y descritos en el apartado anterior.

Ítems	Aspectos estructurales				
	O/P	E/A	IP/FP	Alcanz.	Reb.
1.A	X				
2.A					X
3.A			X	X	
1.B				X	
2.B		X	X		
3.B			X		

Tabla 1: Vinculación teórica entre los reactivos de verdadero/falso del instrumento y los aspectos estructurales teóricos

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010/2011. Del total de sujetos, 18 respondieron al cuestionario A y otros 18 respondieron al cuestionario B; el instrumento se aplicó durante una sesión ordinaria en la clase de matemáticas. Durante el trabajo de campo 18 sujetos respondieron a la versión A y otros

18 sujetos a la versión B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas.

Análisis de datos

La instrucción previa recibida por los estudiantes justifica la adecuación de los reactivos utilizados para que los estudiantes puedan contestarlos, siendo aceptable las respuestas en blanco o atípicas.

Para la interpretación fundada de las concepciones personales de los estudiantes buscamos características estructurales que las discriminen, sin destacar errores o aciertos. Utilizamos como categorías de análisis los aspectos estructurales antes presentados.

Recogemos y organizamos las descripciones que hacen los sujetos en respuesta a los reactivos de Verdadero/Falso. Clasificamos según perfiles basados en el o los aspectos estructurales teóricos principales asociados a cada reactivo, las respuestas recogidas en cada pregunta según afinidad de los argumentos propuestos. La existencia de subperfiles permite añadir matices al perfil correspondiente no contemplados a priori –los sujetos proporcionan información adicional a la que se solicita– por eso utilizaremos el término "empírico" para indicar que emergen de las respuestas de los sujetos.

Por razones de espacio, ejemplificaremos el análisis de las respuestas asociadas a un ítem en particular, aunque la discusión de los resultados la realizaremos de manera global.

Análisis de un ítem particular

Ilustraremos el análisis para el ítem 1.A cuyo enunciado es "Un límite describe cómo se mueve una función cuando x se mueve hacia cierto punto". El término clave *describe cómo* relaciona "teóricamente" este ítem al aspecto estructural *objeto/proceso (O/P)*, por lo que diremos que es *principal* respecto a dicho aspecto.

Así los perfiles de respuesta que mostramos en la tabla 2 se denominan según las variantes del aspecto estructural considerado. Mientras que los subperfiles, según el caso, denotan otro/s aspecto/s estructurales diferentes, en este caso, los aspectos estructurales *Exacto/Aproximado (E/A)* y *Alcanzabilidad (Alcanz.)*, por lo que el ítem 1.A es secundario respecto a tales aspectos estructurales, y por tanto subordinados al aspecto estructural O/P.

Perfiles	Descripción de los perfiles
Perfil I (Proceso)	Opción verdadero. El límite origina y describe un proceso dinámico. Ejemplo: *"Verdadero: Sí, ya que el límite nos da todos los puntos posibles que puede adquirir la función".*
Perfil II (Objeto/Proceso)	Opción verdadero. Se enfatiza el límite como el resultado del proceso dinámico que, implícitamente, también es parte del concepto; expresa una concepción dual de objeto y proceso. Ej. *"Verdadero: Porque el límite describe hacia qué punto se acerca la función"*
Perfil III (Objeto)	Opción falso. Se diferencia el objeto límite del proceso dinámico que lo origina. Ej. *"Falso. Un límite describe hacia dónde tiende la función f(x)"* Esa diferencia se hace patente

Perfiles	Descripción de los perfiles
	cuando se establece que el proceso dinámico no alcanza el valor del límite y en la consideración del carácter aproximado de su valor **Subperfil III.1 (No Alcanzable / Aproximado).** Ej. *"Falso: Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto"*.

Tabla 2: Perfiles y subperfiles de argumentos para el ítem 1.A

Ejemplos de vínculos entre los aspectos estructurales teóricos propuestos

Como muestra la Tabla 2, la respuesta al ítem 1.A *"Falso. Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto"* remarca la distinción entre el objeto límite y el proceso correspondiente, por razón de la no alcanzabilidad.

No podemos esclarecer si el término "aproximado" se refiere a (1) la acción o efecto de aproximar el valor exacto límite; (2) el valor del límite es aproximación de otro "valor exacto", por lo tanto, no existe una vinculación clara entre este aspecto y el carácter exacto/aproximado del valor. La respuesta que este sujeto propone para el ítem 2.A "*Verdadero. Si el límite de una función es 4 un resultado de esa función no puede ser 5*" parece indicar un sentido (1), luego interpretamos que el valor del límite es exacto pero "aproximado por" los valores de la función correspondiente sin llegar a alcanzarlo, y en este caso a rebasarlo.

Discusión

La Tabla 3 resume las distintas vinculaciones que se dan entre los aspectos estructurales prefijados y los ítems correspondientes que provocan tales vínculos.

Aspectos estructurales principales	Aspectos estructurales secundarios				
	O/P	E/A	IP/FP	Alcanz	Reb
O/P		1.A		1.A	
E/A	2.B		2.B		
IP/FP	2.B, 3.B	3.B		3.B, 3.A[1]	
Alcanz			1.B, 3.A[1]		1.B
Reb			2.A	2.A	

Tabla 3: Vinculación empírica entre los aspectos estructurales teóricos y los ítems secundarios implicados

Observamos que ningún aspecto estructural es considerado de manera aislada por los escolares y se establecen relaciones relevantes entre ellos. Las relaciones más llamativas son las siguientes:

[1] El ítem 3.A es principal para los aspectos estructurales *IP/FP* y *Alcanz.*, pero algunos sujetos ponen de manifiesto la equivalencia intrínseca entre el carácter infinito potencial del proceso y la no alcanzabilidad del límite, por ejemplo, "El límite no se puede alcanzar, pero sí que se aproxima la cifra cada vez más a él".

- *OP-Alcanz-E/A*. Esta relación está ejemplificada en el apartado anterior.
- *Reb-Alcanz-IP/FP*. Aparte de la relación (IP/FP-Alcanz) dada por el ítem 3.A explicada al pie de página, el ítem 2.A induce una relación más compleja entre estos tres aspectos estructurales contemplada en la respuesta *"Verdadero: Porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él"*.
- *Alcanz-Reb*. Entre estos dos aspectos se establece otro vínculo dado por el ítem 2.B, cuando un sujeto admite la alcanzabilidad del límite pero no su rebasabilidad. Por ejemplo, *"Un límite es un número que la función alcanza pero no lo sobrepasa"*, esto concuerda con resultados de Cornu (1991).
- *OP-E/A*. El ítem 2.B provoca también que los sujetos enfaticen la naturaleza del límite como un objeto, y dentro de esta naturaleza su carácter exacto, como se puede interpretar de la respuesta: *"Falso. Un límite, es un tope numérico y no es aproximativo, sino concreto"*. Su carácter procesual: "*Falso: Un límite es una aproximación que puedes hacer hasta cierto punto de precisión";* y su naturaleza dual como en: "*Verdadero. Los límites pueden ser infinitos aproximándose a un valor que cada vez será más preciso* [límite se considera como un proceso]. *O también puede ser un número exacto, que cuanto más nos aproximamos más concreto será este* [límite se considera un objeto]*"*, además pone de manifiesto que la naturaleza exacta-aproximada del límite es relativa. Esta interpretación tiene sentido en el modelo de Sfard (1991).

La Figura 1 muestra un diagrama que detalla las vinculaciones entre los aspectos estructurales teóricos y los reactivos que las establecen. Las flechas unidireccionales expresan el sentido del vínculo, es decir, el aspecto estructural "origen" provoca vía un reactivo otro aspecto estructural "extremo". Mientras que las flechas bidireccionales muestran que un reactivo provoca argumentos que se interpretan en términos de ambos aspectos estructurales.

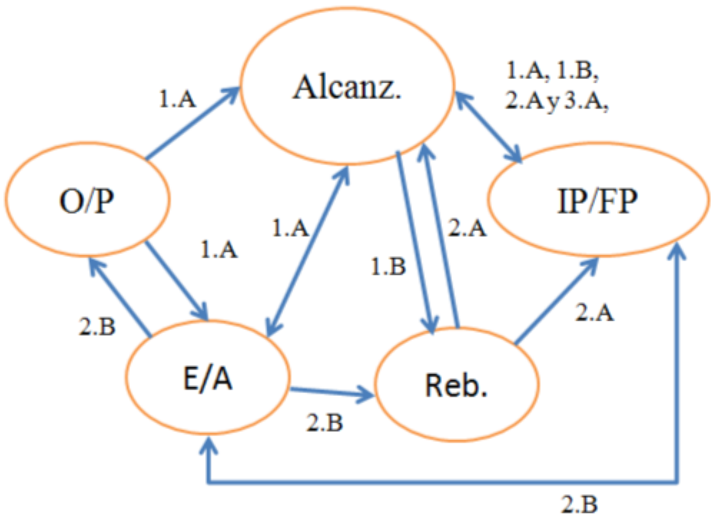


Figura 1: Diagrama de vínculos establecidos empíricamente entre los aspectos estructurales teóricos

Conclusiones

Se hace patente que los reactivos utilizados han recogido información adicional a la que en principio fueron diseñados y que muestran la riqueza de conexiones que los escolares establecen entre unos aspectos estructurales teóricos y otros. A nivel de concepciones específicas, los escolares tratan con gran amplitud los aspectos teóricos correspondientes, mientras que en cuanto al carácter global, las concepciones personales de los escolares giran en torno a una concepción de límite como un número exacto generado por un proceso infinito potencial ontológicamente diferente y que se caracteriza como inalcanzable y no rebasable, concordando con Cornu (1991), Monaghan (1991) y Sierpinska (1987), no obstante, añadimos evidencias particulares referidas a la dualidad objeto/proceso de Tall (1980) y Sfard (1991).

Las relaciones establecidas por los escolares entre los aspectos estructurales propuestos justifican la necesidad de modificaciones en la planificación de la enseñanza de este concepto, sobre todo las que implican el carácter infinito potencial del proceso, la no alcanzabilidad del límite, su no rebasabilidad y el carácter aproximado de su valor.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto "Modelización y representaciones en educación matemática (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3er Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Referencias

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, *12*(1), 145-168.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* (pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Schwingendorf, K., Thomas, K., Nichols D. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 167-192.

Edwards, B.S., Dubinsky, E. y McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Gray E.M. y Tall, D.O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115-141.

Lauten, A.D., Graham, K. y Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 225-237.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of* Mathematics, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Tall D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En Karplus, R. (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley.

Tall, D. O y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Apéndice: Ítems incluidos en los cuestionarios

Cuestionario A.

(1.A.) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto.

(2.A.) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

(3.A.) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

Cuestionario B.

(1.B.) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.

(2.B.) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera

(3.B.) Un límite es un número al cual los valores de una función f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x.

REACCIONES AFECTIVAS DE FUTUROS MAESTROS AL ENFRENTARSE COMO DOCENTES A LA RESOLUCIÓN IMPROVISADA DE UN PROBLEMA ARITMÉTICO DE PORCENTAJES.

Patricia Pérez-Tyteca, Bernardo Gómez y Javier Monje

Universidad de Valencia

Resumen

Existen investigaciones que muestran que existen docentes de educación primaria tanto en formación como en activo que se sienten inseguros ante la enseñanza de las matemáticas (Levine, 1996; Peker y Halat, 2008; Peker, 2009) y sienten miedo a tener que enfrentarse a la resolución de una tarea matemática en el aula que no sepan solucionar (Cohen y Green, 2002). Con el fin de conocer si nuestros estudiantes de grado siguen este patrón, les hemos planteado una situación hipotética en la que un alumno les requiere que resuelvan una tarea aritmética de porcentajes de manera improvisada en el aula. A partir de esta situación hemos caracterizado tanto las respuestas afectivas asociadas a dicho requerimiento como las resoluciones de la tarea llevadas a cabo por los futuros maestros.

Palabras clave: Afecto, Problemas aritméticos, Porcentajes, Maestros en formación, Enseñanza

Abstract

There is research to show that there are primary school teachers in both training and active that are uncertain about the teaching of mathematics (Levine, 1996; Peker & Halat, 2008; Peker, 2009) and are afraid to have to face the solving a mathematical task in the classroom who can't solve (Cohen & Green, 2002). In order to know whether our undergraduate students follow this pattern, we have proposed a hypothetical situation in which a student required to solve an arithmetic task percentages improvise in the classroom. From this situation we have characterized both the affective responses associated with that request and the resolutions of the task undertaken by future teachers.

Keywords: Affect, Arithmetic problems, Percentages, Teacher training, Teaching

Lo que se espera hoy en día de un docente no es simplemente que transmita conocimientos a sus alumnos, sino que los prepare para afrontar los retos que la sociedad actual les tiene preparados, y esto se consigue dotándolos de la capacidad de ser reflexivos y críticos con su propio aprendizaje.

En el campo de la educación matemática podemos hacernos eco de estos requerimientos al analizar documentos como los Principios y Estándares del NCTM, o el Real Decreto que rige el currículum oficial de la Educación Secundaria. En el primero de ellos se defiende que el aprendizaje efectivo pasa por reflexionar sobre las ideas propias y aprender de los errores. En el segundo, se contempla como competencia que debe ser

Pérez-Tyteca, P., Gómez, B., y Monje, J. (2012). Reacciones afectivas de futuros maestros al enfrentarse como docentes a la resolución improvisada de un problema aritmético de porcentajes. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 159-167). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

adquirida por los estudiantes la de *aprender a aprender* que consiste, entre otras cosas, en “ser consciente de lo que se sabe y de lo que es necesario aprender, de cómo se aprende y de cómo se controlan de forma eficaz los procesos de aprendizaje” (Real Decreto, 2007, p. 689).

De este modo, es responsabilidad del profesor fomentar la metacognición en el aula, entendida ésta como el conocimiento y control que tiene una persona sobre su propia actividad cognitiva (De Castro, 2012). Por tanto, en el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en la metacognición el docente juega un papel doblemente importante, ya que promueve estrategias metacognitivas en sus estudiantes a la vez que sirve como modelo de cómo han de implementarse estas estrategias.

Atendiendo, pues, tanto a la recomendación de llevar la metacognición al aula como a la necesidad de que los maestros estén formados al respecto, consideramos interesante trabajar con maestros en formación. El trabajo con este colectivo puede ser doblemente fructífero ya que por un lado podemos promover en ellos estrategias metacognitivas que favorezcan su aprendizaje, y por otro lado les damos a conocer las herramientas que tienen a su disposición para poder implementar este tipo de enseñanza en su práctica futura.

Fundamentación teórica

Simultáneamente a la concienciación por parte de la comunidad investigadora de la importancia de promover la metacognición en nuestros estudiantes, se han creado diferentes modelos teóricos bajo los cuales poder valorar los procesos metacognitivos que se ponen en juego al realizar una experiencia concreta.

Lester (1985) propone un modelo centrado en la educación matemática (véase figura 1) que conjuga la componente cognitiva (basada en el modelo de Polya) y la componente metacognitiva (basada en el modelo de Flavell), y que considera esta última como un constructo tridimensional en la que entran en juego variables que hacen referencia al propio sujeto (variables de persona), a la tarea que debe resolver (variables de tarea) y a las estrategias de que dispone para ello (variables de estrategia).

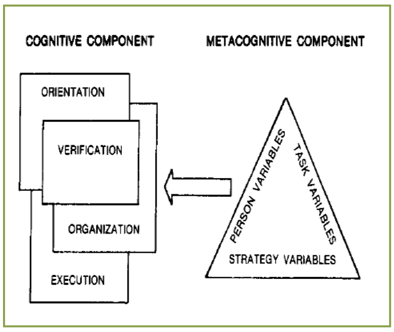


Figura 1. *Modelo Cognitivo-Metacognitivo (Lester,1985)*

Pero esta componente metacognitiva ha de complementarse, ya que como indica Flavell (1976) la metacognición no es sólo el conocimiento o conciencia que uno tiene sobre sus propios procesos y productos cognitivos sino que “hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y la consecuente regulación y orquestación de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los cuales actúan” (p. 232).

De Castro (2012) resume esta idea caracterizando la metacognición como un constructo formado por dos componentes (véase figura 2):

- El conocimiento metacognitivo, que hace referencia al conocimiento que el sujeto posee acerca de su propia persona, de la tarea y de las estrategias que posee para resolverla.
- El control metacognitivo que comprende las fases de comprensión, planificación-ejecución y evaluación y que necesita de la auto-monitorización y regulación por parte del sujeto.

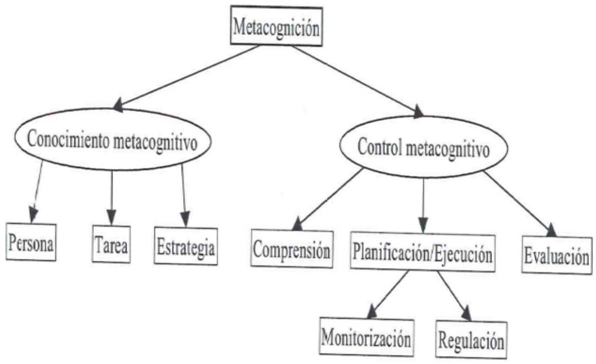


Figura 2. *Componentes de la metacognición*

Como hemos visto, además de variables cognitivas, en la metacognición entran en juego diferentes variables afectivas. Las creencias, por ejemplo sobre la propia capacidad para resolver un problema o el autoconcepto matemático forman parte de las variables de persona incluidas en el conocimiento metacognitivo y constituyen un aspecto importante en la investigación (Schoenfeld, 1987). Pero además, existen otras variables afectivas estrechamente relacionadas con la metacognición (Lester, Garofalo y Kroll, 1989) y que hay que tener en cuenta. En la fase de regulación y control, además de adaptar los procesos cognitivos asociados a la resolución de un problema, es importante regular variables afectivas tales como la ansiedad y la angustia ya que podrían impedir que se logre la solución de dicho problema (Kagan y Lang, 1978). En esta fase, como indica Schoenfeld (1987), una de las conductas asociadas a un proceso metacognitivo adecuado puede ser abandonar el enfoque de resolución adoptado inicialmente y tomar en cuenta otro diferente, pero esto no se producirá si el sujeto experimenta reacciones afectivas negativas como desmotivación, nervios o bloqueo mental, ya que éstas suelen llevar al abandono de la tarea (Guerrero y Blanco, 2004).

Teniendo en cuenta la importancia de la metacognición dentro del aprendizaje de las matemáticas, podemos considerar la habilidad metacognitiva como una cualidad deseable en todos nuestros estudiantes, ya que constituye una componente esencial para la ejecución matemática competente. Nosotros como docentes podemos colaborar a su desarrollo ya que la habilidad metacognitiva se puede aprender como consecuencia de una enseñanza explícita que se centre en los aspectos metacognitivos del pensamiento matemático (Schoenfeld, 1985).

Nuestro trabajo

Bajo esta perspectiva, nos hemos planteado realizar un protocolo de enseñanza que promueva la metacognición en los estudiantes y consideramos que la mayéutica es una herramienta útil que se perfila muy potente para conseguirlo.

La mayéutica es un método pedagógico cuyo rasgo distintivo consiste en propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia (Rigo, 2011, p.

523). Así, partiendo de lo que el alumno sabe o cree saber, el profesor actúa de guía promoviendo en éste la metacognición.

Nos proponemos, pues, diseñar una actividad basada en la mayéutica que permita desarrollar estrategias metacognitivas en nuestros estudiantes de grado. La conveniencia de elegir a este tipo de alumnos ha quedado justificada anteriormente.

Para diseñar la actividad debemos contar, en primer lugar, con una tarea adecuada. La tarea escogida (véase figura 3) es una tarea rica en cuanto a los conceptos matemáticos que entran en juego (porcentajes, razón y proporción, regla de tres…) que forman parte de lo que consideramos deben ser las competencias mínimas de un futuro maestro. Además, esta actividad cuenta con diferentes posibles resoluciones y es cercana y familiar. Y lo más importante, es una tarea que, debido a la experiencia, sabemos que presenta dificultades para los estudiantes.

Como hemos dicho, la mayéutica parte de lo que el sujeto sabe y utiliza el conflicto cognitivo como etapa de avance hacia el conocimiento. Por este motivo resulta fundamental conocer de antemano cuáles son las resoluciones que llevan a cabo los alumnos. Actualmente nos encontramos clasificando dichas resoluciones con el fin de extraer perfiles de resolutores.

Además necesitamos saber cuáles son los afectos de los sujetos ante la tarea, ya que deben ser tenidos en cuenta a la hora de diseñar la actividad mayéutica por formar parte tanto del conocimiento metacognitivo que debe poseer el estudiante, como del control metacognitivo que debe aprender a regular y monitorear.

El alumno te cuenta lo siguiente con respecto al problema que les surgió a sus padres:

"Mis padres discutían sobre unos descuentos que vieron en los folletos de varias tiendas. Querían saber cuál de esos descuentos era el mejor. Mira, he traído los folletos."

Figura 3. *Tarea propuesta a los estudiantes*

En cuanto a cómo se sienten al resolver esta tarea concreta y en general al hacer matemáticas, lo que se espera de un futuro docente de la materia es que disfrute y esté motivado ya que, como apuntan Mato y De la Torre (2010), la influencia que los profesores pueden tener en la formación de actitudes (positivas o negativas) hacia las matemáticas y la motivación hacia su estudio, la ansiedad, el agrado, la utilidad y la confianza es un hecho. A este respecto, existen investigaciones (Castro de Bustamante, 2002; Hidalgo, Maroto y Palacios, 2000; Mato, 2010) que prueban que los alumnos empiezan su etapa educativa mostrando afectos positivos hacia las matemáticas que se van transformando en afectos negativos a lo largo de su vida escolar. En esta transformación juega un papel central el docente, ya que como sugieren algunos investigadores (Perina, 2002; Tooke y Lindstrom, 1998) los problemas afectivos de los estudiantes tienen sus raíces en la docencia y los docentes, llegando estos últimos incluso a transmitir a sus alumnos sus propias respuestas afectivas negativas (Sloan, Daane y Giesen, 2002; Wood, 1988).

Así pues, dada la obligación que tienen los maestros de transmitir la enseñanza de las matemáticas como algo atractivo, divertido y excitante, debemos esperar que éstos tengan una mejor predisposición hacia la asignatura que el resto de la sociedad (Wood, 1988). Sin embargo, las investigaciones realizadas al respecto (Bulmahn y Young, 1982; Caballero, Blanco y Guerrero, 2008; Monje, Pérez-Tyteca y Castro, 2011; Hernández, Palarea y Socas, 2001) apuntan a lo contrario: muchos de los estudiantes que escogen estudiar magisterio no disfrutan con las matemáticas, presentan falta de confianza, seguridad, calma y tranquilidad ante la resolución de problemas y no se perciben capaces y hábiles en la materia.

Las reacciones afectivas negativas que experimentan estos estudiantes tienen influencia directa sobre su práctica docente ya que desarrollan miedo a enseñar matemáticas al no sentirse capaces ante la materia ni seguros ante las resoluciones que llevan a cabo (Bursal y Paznokas, 2006). Además, los maestros en activo que poseen afectos negativos hacia la materia son menos eficaces a la hora de impartirla (Gresham, 2008; Swars, Daane y Giesen, 2010). Estos maestros temen especialmente que algún alumno les formule una pregunta en clase de cierta dificultad a la que no sepan responder (sobre todo relacionada con álgebra o resolución de problemas), ya que en numerosas ocasiones sienten que no disponen de herramientas matemáticas suficientes para hacer frente a este tipo de situaciones.

Pero pese a que muchos maestros en formación sienten aversión por las matemáticas y dudan de su capacidad para enfrentarlas, los resultados de trabajos como los de Trujillo, y Hadfield (1999) y Swars (2004) revelan que están convencidos de que serán unos buenos maestros de matemáticas.

Teniendo todo esto en cuenta, hemos considerado interesante recoger la siguiente información afectiva asociada a la resolución de la tarea de porcentajes propuesta:

- Cuánta seguridad tienen nuestros estudiantes en la resolución que han hecho
- Qué sentimientos han experimentado durante la resolución
- Cómo se sienten después de resolverla
- Si creen que serán buenos maestros de matemáticas

Actualmente la estamos analizando con el objetivo de extraer perfiles afectivos y posibles vínculos con los perfiles de resolutores que extraigamos.

Por tanto, nos encontramos en la fase previa al diseño de la actividad mayéutica que consiste en analizar tanto las resoluciones como las repuestas a las preguntas sobre afecto que hemos realizado. Por este motivo sólo contamos con resultados parciales que iremos completando a medida que vayamos avanzando en la investigación.

Algunos resultados

Aunque la muestra con la que contamos está formada por 314 estudiantes del grado de maestro en educación primaria, pertenecientes a 11 grupos diferentes, hasta el momento hemos codificado y analizado los datos correspondientes a 2 de estos grupos que reúnen a 59 estudiantes.

En el proceso de análisis de datos que estamos llevando a cabo hemos observado algunos patrones que podemos considerar resultados iniciales y que pasamos a describir.

Atendiendo a las reacciones afectivas experimentadas por los sujetos, observamos que más de la mitad de los mismos experimentan sensaciones negativas al resolver la tarea. Aunque lo deseable y óptimo es que los futuros maestros se sientan cómodos y confiados al resolver una tarea escolar en el aula, comprobamos cómo la realidad es muy diferente: el hecho de plantearles una actividad improvisada genera tensión, incomodidad y desconcierto en los futuros docentes.

De los 59 estudiantes, únicamente 10 resuelven la tarea correctamente. Como hemos apuntado anteriormente, consideramos que la actividad propuesta requiere la puesta en juego de conocimientos básicos que cualquier maestro debe manejar, pero observamos cómo la realidad vuelve a imponerse mostrando que esta premisa no se cumple ya que son 49 los sujetos que no consiguen dar una solución satisfactoria a la actividad. Aún así, estos sujetos declaran estar bastante seguros de la resolución que han realizado y muchos de ellos indican sentirse satisfechos con ella.

Pese a estos datos, prácticamente la totalidad de los estudiantes participantes consideran que serán buenos maestros de matemáticas.

Además de lo resultados globales que hemos obtenido, hemos analizado las diferentes resoluciones hechas por los futuros maestros y las hemos conectado con sus variables afectivas. De este análisis emergen 5 perfiles de resolutores que comparten una serie de características afectivas, y que a continuación detallamos.

Perfil CU: reúne a aquellos sujetos que asignan a cada producto un precio unitario independiente del anuncio que les resulte cómodo de manejar sobre el que aplican los diferentes descuentos para acabar comparando el coste o ahorro de cada unidad. Estos estudiantes resuelven correctamente la tarea, se sienten muy seguros de sus respuestas y consideran que serán buenos maestros de matemáticas

Perfil %i: A este perfil se ajustan aquellos alumnos que calculan porcentualmente el coste o ahorro en cada producto, independientemente de los datos proporcionados en el anuncio. Los participantes que muestran este perfil resuelven la tarea correctamente, se sienten muy seguros de sus respuestas, están satisfechos después de resolver y creen que serán buenos maestros. Sin embargo durante el proceso de resolución declaran sentirse dubitativos.

Perfil CUG: Existe otro grupo de futuros maestros que se centra en las unidades que salen gratis con cada descuento y que hemos reunido en este perfil. Estos sujetos se caracterizan por resolver de manera incorrecta la actividad. Además, los que se sienten bien resolviendo, se sienten bien una vez resuelta y los que experimentan sentimientos negativos durante el proceso de resolución también lo hacen una vez resuelta la tarea. Es decir, no existe cambio de tendencia afectiva. Por último, a pesar de haber errado en la resolución, consideran que serán buenos maestros de matemáticas.

Perfil C%: En este perfil se incluyen aquellos alumnos que trabajan con porcentajes (no con precios) pero que comparan el descuento aplicado a cada una de las unidades de la oferta 3x2 con el descuento aplicado a las unidades rebajadas (no a cada unidad, que sería lo correcto) en las otras dos ofertas. Estos estudiantes resuelven la tarea de manera incorrecta. Los que se sienten bien resolviendo también lo hacen después de resolver y están muy seguros de sus respuestas, mientras que los que se sienten mal resolviendo también se sienten mal después de hacerlo y no están seguros de sus respuestas. A diferencia de los perfiles anteriores, en éste existen algunos sujetos que dudan sobre su capacidad para ser buenos maestros.

Perfil CP: Considera a aquellos participantes que se centran en los precios dados en el anuncio y calculan lo que se gastan o ahorran en total al comprar el número de unidades especificadas en el folleto. Dentro de este grupo de resolutores existen resoluciones incorrectas y resoluciones inacabadas. Los alumnos que resuelven mal tienen sentimientos negativos asociados al proceso de resolución, destacando el sentimiento de confusión que describen con expresiones como "me siento perdido" "no sé por donde tirar". Aún así, los estudiantes que se ajustan a este perfil consideran que serán buenos maestros de matemáticas.

Reflexiones finales

A partir de este momento, y de cara a realizar un diseño óptimo de la actividad mayéutica, se nos planean una serie de desafíos.

1. Hay diferentes perfiles de resolutores (usan una variedad de estrategias), no debemos ignorarlas. Dada esa disponibilidad de estrategias el desafío es ayudarles a reconocer cuál es la más conveniente en cada situación.

2. Dado que existen estudiantes seguros de sus respuestas pese a ser éstas erróneas, deberemos conseguir crear en ellos un conflicto cognitivo que les haga replantearse su resolución.

3. Dado que el proceso de monitoreo y regulación de los procesos metacognitivos puede estar fuertemente condicionado por las reacciones afectivas negativas que acompañan a la mayoría de sujetos mientras resuelven, el desafío es ayudarles a gestionarles esos afectos.

4. Dado que existen alumnos desmotivados y sin interés hacia la tarea, el desafío es conseguir que este tipo de alumnos cambie su predisposición.

Referencias

Bulmahn, B. J. y Young, D. M. (1982). On the transmission of mathematics anxiety. *Arithmetic Teacher, 30*(3), 55-56.

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers´confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics, 106*(4), 173-180.

Caballero, A., Blanco, L. J. & Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la universidad de Extremadura**.** *Paradigma, 29*(2), 157-171.

Castro de Bustamante, J. (2002). *Análisis de los Componentes actitudinales de los docentes hacia la enseñanza de la Matemática* (Tesis doctoral). Universitat Rovira i Virgili.

Cohen, R. y Green, K. (2002). Upper elementary teachers´mathematics related anxieties and their effects in their teaching. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 265-272). Norwich, England: PME.

De Castro, C. (2012). *Estimación en cálculo con números decimales: dificultad de las* *tareas y análisis de estrategias y errores con maestros en formación* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–235). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Guerrero, E. y Blanco, L.J. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*(5).

Gresham, G. (2008). Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy in elementary pre-service teachers. *Teaching Education, 19*(3), 171-184.

Hernández, J., Palarea, M. y Socas, M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, pp. 115-125. Universidad de La Laguna: Área de Didáctica de la Matemática, Departamento de Análisis Matemático.

Hidalgo, S. Maroto, A. y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: Relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática, 17*(2), 89-116.

Kagan y Lang (1978). *Psychology and Education. An Introduction.* New York: Harcourt, Brace y Jovanovich.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41–69). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F.K., Garofalo, J., y Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 75-88). New York: Springer-Verlag.

Levine, G. (1996). *Variability in anxiety for teaching mathematics among pre-service elementary school teachers enrolled in a mathematics course*. Comunicación presentada en el Annual Meeting of the American Educational Research Assocation, New York, Estados Unidos. Disponible en la base de datos Education Resources Information Center (ERIC, ED 398067).

Mato, M. D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación, 18* (1), 19-32.

Mato, M. D. y De La Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA, 5*(1), 25-36.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Boletin Oficial del Estado, 5.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Castro, E. (2011). Resolución de problemas y ansiedad matemática: una relación basada en la influencia mutua. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A.Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática – 2011* (pp. 59-67). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Peker, M. (2009). Pre-service teachers' teaching anxiety about mathematics and their learning styles. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *5*(4), 335-345

Peker, M. y Halat, E. (2008, septiembre). *The pre-service teachers' mathematics teaching anxiety and gender*. Trabajo presentado en la European Conference on Educational Research.

Perina, K. (2002). The sum of all fears. *Psychology Today, 35*(6), 19-19.

Rigo, M. (2011). La Mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes. En M. Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 523–532). Ciudad Real, España: SEIEM, Universidad de Castilla-La Mancha.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Sloan, T., Daane, C. J. y Giesen, J. (2002). Mathematics anxiety and learning styles: What is the relationship in elementary preservice teachers?. *School Science and Mathematics, 102*(2), 84-87.

Swars, S. (2004). *Mathematics teaching efficacy beliefs of elementary preservice teachers and their relationship to mathematics anxiety.* (Tesis doctoral). University of Alabama, Tuscaloosa.

Swars, S., Daane, C. J. y Giesen, J. (2010). Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy: What is the relationship in elementary preservice teachers? *School Science and Mathematics, 106*(7), 306-315.

Tooke, D. J. y Lindstrom, L. C. (1998). Effectiveness of a mathematics methods course in reducing math anxiety of preservice elementary teachers. *School Science and Mathematics, 98*(3), 136-139.

Trujillo, K. M., y Hadfield, O. D. (1999). Tracing the roots of mathematics anxiety through in-depth interviews with preservice elementary teachers. *College Student Journal, 33*(2), 219-232.

Wood, E. F. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us?. *For the Learning of Mathematics*, *8*(1), 8-13.

APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO AL DISEÑO DE UNA HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE LOS TEXTOS DE ANDRÉS MANJÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Irene Real, Isidoro Segovia y Francisco Ruiz

Universidad de Granada

Resumen

En nuestro trabajo presentamos una herramienta de análisis de textos escolares de matemáticas fundamentada en la perspectiva moderna y en la estructura que proporciona el análisis didáctico. Con dicho instrumento realizamos un análisis del contenido de las lecciones de Aritmética y Geometría presentes los textos escolares redactados por Andrés Manjón, lo cual nos permitirá en última instancia caracterizar la enseñanza de las matemáticas llevada a cabo en sus Escuelas del Ave María de Granada entre 1889 y 1923, justificándola dentro de los planteamientos pedagógicos y metodológicos del propio Manjón, muy influenciados por el contexto educativo y social de la España finisecular.

Palabras clave: historia, educación matemática, análisis didáctico, texto escolar

Abstract

In this paper we present a tool for the analysis of mathematics textbooks based on the modern perspective and the framework provided by the known as "didactic analysis". This tool will help us study the content of the Arithmetic and Geometry lessons included in the textbooks written by Andrés Manjón and it will eventually allow us to characterize the teaching of mathematics carried out in his Ave-María Schools between 1889 and 1923, explaining it within his particular pedagogical and methodological principles, very much influenced by the social and educational context of the late 19^th^ century in Spain.

Keywords: history, mathematics education, didactic analysis, textbooks

El análisis didáctico como marco para el análisis de las Hojas Catequistas y Pedagógicas de Manjón

En este trabajo describimos la aplicación del análisis didáctico a la elaboración de un instrumento de análisis de textos escolares de matemáticas en el contexto de un trabajo de carácter histórico iniciado en Real (2008), y cuyo objetivo es caracterizar la enseñanza de las matemáticas pensada y puesta en práctica por Andrés Manjón en sus Escuelas del Ave María de Granada entre 1889 y 1923. Para ello contamos con las *Hojas Catequistas y Pedagógicas*[1], los textos escolares que el propio Manjón redactó y en los que no solo organiza y presenta los contenidos curriculares fundamentales de la

[1] Las *Hojas Catequistas y Pedagógicas* constituyen una enciclopedia escolar de 960 páginas compuesta por cinco libros, publicados entre 1909 y 1914 (veinte años después de que Manjón fundase su primer carmen escolar) y formados cada uno por doce *Hojas*: la cuarta y décima están dedicadas siempre a las Matemáticas.

Real, I., Segovia, I., y Ruiz, F. (2012). Aplicación del análisis didáctico al diseño de una herramienta de análisis de los textos de Andrés Manjón para la enseñanza de las matemáticas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 169-180). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

Primera Enseñanza de la época, según sus particulares principios pedagógicos y didácticos, sino también el auténtico "procedimiento" de sus escuelas. Es decir, además de una secuencia de actividades de enseñanza y aprendizaje, encontramos en ellas numerosos ejemplos, sugerencias y orientaciones didácticas que inciden en la enseñanza integral, intuitiva, activa y lúdica que él propugna y lleva a cabo día a día en sus escuelas y en la que los valores sociales, morales y religiosos desempeñan un papel central.

Las *Hojas Catequistas y Pedagógicas* constituyen en realidad la propuesta didáctica que Manjón depura tras años de práctica en sus escuelas, fruto de una profunda reflexión acerca de las necesidades concretas del alumnado al que su enseñanza va dirigida y basada en el conocimiento del marco curricular y pedagógico de su época, en el intercambio de experiencias y opiniones con los maestros de sus escuelas y reconocidos pedagogos y, muy especialmente, en la observación concienzuda y evaluación personal del proceso diario de enseñanza-aprendizaje. En este sentido consideramos que el análisis didáctico puede aportarnos el enfoque adecuado para abordar la primera fase del análisis del contenido de dichos textos, que consiste en registrar y presentar de manera sistemática la información contenida en dichas Hojas acerca de la labor de Manjón como maestro que planifica, lleva a cabo la enseñanza de las matemáticas con alumnos con unas características socio-culturales muy concretas y reflexiona sobre esa práctica docente.

Recordemos que, según la definición de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), el análisis didáctico se fundamenta en los organizadores del currículo y consta de cuatro fases o análisis que guían el proceso de reflexión asociado al diseño, implementación y evaluación que debe realizar un profesor que se plantea abordar la enseñanza de unos contenidos de matemáticas determinados. En nuestro caso, este "procedimiento ideal que debería llevar a cabo un profesor de matemáticas" (Lupiáñez, 2009, pp. 34-35) nos proporciona el marco estructural para realizar un recorrido inverso, esto es, caracterizar y valorar el papel de Manjón como profesor de matemáticas, partiendo de su propuesta didáctica para el aula en forma de secuencia organizada de tareas.

Delimitación de las unidades de análisis

Para extraer y organizar la información contenida en las Hojas aplicamos los procedimientos del *análisis de contenido categorial* descritos por Bardin (1986), que supone en primer lugar la *codificación* de los texto seleccionado, esto es, su descomposición en unidades, la elección de reglas de recuento y de categorías según criterios de analogía, entre las que posteriormente se distribuirán los componentes del texto (*categorización*).

En nuestro caso, descomponemos las lecciones matemáticas en los fragmentos de texto de extensión máxima con una misma finalidad o intencionalidad didáctica y que demanden del alumno y/o del profesor un tipo de actividad diferenciada sobre un determinado contenido (matemático o no). Estas *unidades de registro* se corresponden en gran medida con los epígrafes bien diferenciados en que Manjón presenta el texto y que introducen *tareas*, entendidas como "demandas que un profesor plantea a los escolares, que movilizan el conocimiento de estos sobre un tema matemático determinado, y que concretan los objetivos específicos de ese tema matemático en términos de actuaciones" (Lupiáñez, 2009, p. 61).

Por encima de estas unidades de registro (tareas) es posible distinguir otros niveles de división del texto o *unidades de contexto*, la lección, la Hoja y el Libro, que nos permiten captar la significación exacta de aquellas, no sólo en términos de la estructura matemática, sino también del criterio de uniformidad religiosa con el que Manjón organiza la enseñanza en las Hojas en torno a cinco aspectos del Catecismo[2].

Definición de categorías desde la perspectiva del análisis didáctico

Una vez descompuestas las Hojas en lecciones y éstas en tareas, pretendemos inferir de ellas los aspectos fundamentales que caracterizan el papel de Manjón ante la enseñanza de las matemáticas, para lo cual definimos una serie de categorías que nos ayuden a reconocer en aquellas los organizadores curriculares y demás elementos que intervienen en las distintas fases del análisis didáctico. Introduciendo en ciertos casos algunas dimensiones y terminología características en Manjón o presentes en la Pedagogía y la Didáctica de la época, para cada tarea:

a) identificaremos la presencia o ausencia de ciertos aspectos relacionados con el *análisis de contenido*, la primera fase del análisis didáctico, según la que Manjón organizaría el contenido matemático de cada tarea (en particular, observamos el tipo de contenido, los sistemas de representación y la fenomenología);

b) observaremos si para el diseño de la tarea se ha tenido en cuenta la dimensión cognitiva del aprendizaje, esto es, si al planificar la enseñanza Manjón realiza lo que en términos del análisis didáctico se denomina *análisis cognitivo* (en concreto, si menciona expectativas de aprendizaje o posibles errores y dificultades a los que el alumno puede enfrentarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y reconoceremos las competencias matemáticas que cada tarea contribuye a desarrollar).

En el análisis didáctico, toda esta reflexión acerca del contenido matemático y su aprendizaje intervendrá después en la siguiente fase, el *análisis de instrucción,* que permite al profesor diseñar, seleccionar y secuenciar las tareas que conformarán la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que concretó anteriormente, teniendo en cuenta además otros aspectos relativos de la gestión del aula, al uso de materiales y recursos y al diseño de los criterios e instrumentos de evaluación (Lupiáñez, 2009, p. 69). Por eso nosotros a continuación

c) buscaremos elementos relativos asociados a la puesta en práctica de la tarea en el aula, tales como la caracterización del papel que juegan las tareas dentro de la secuencia didáctica, así como el desempeñado por el profesor y el alumno; el reconocimiento de los principios didácticos que orientan el diseño y organización de las tareas y de otras estrategias metodológicas que guían su implementación en el aula, incluyendo, entre otras, el uso de materiales y recursos.

La última fase del análisis didáctico es el *análisis de actuación*, que supone llevar a la práctica las actuaciones planificadas en las fases anteriores y da pie a comenzar un nuevo ciclo a partir de la información producida al respecto de la comprensión de los estudiantes y la consecución de los objetivos alcanzada (Lupiáñez, 2009, p. 69). En nuestro caso, aunque no encontramos alusión por parte de Manjón a la evaluación ni a la comprobación de la bondad o idoneidad de su propuesta didáctica en relación a los objetivos y expectativas generales que se plantea para la enseñanza de las matemáticas

[2] La educación moral y religiosa constituye el centro del programa escolar de Manjón. Cada uno de los cinco libros se dedica a una parte del Catecismo entonces en uso, impregnado esta temática la enseñanza de los contenidos de las diversas materias. El primer libro está dedicado a *El fin del hombre y la señal del cristianismo*, el segundo libro se centra en *El Credo o la fe*; y el tercer, cuarto y quinto libros llevan por título, respectivamente, *El Padrenuestro o la oración, Los Mandamientos o la moral* y *Los Sacramentos o la Gracia*.

de la Primera Enseñanza, podemos entender en cierta forma que el análisis de actuación se ha completado, en tanto que las Hojas Catequistas y Pedagógicas son el fruto, no solo de una profunda reflexión y formación pedagógica previas, sino de años de trabajo en el aula, observación y perfeccionamiento del "buen método" que Manjón propugna. Por dicha razón no incluimos entre las categorías de nuestro instrumento de análisis ninguna relacionada con el análisis de actuación.

	Análisis didáctico		
	Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción
Categorías para el análisis de las Hojas Catequistas y Pedagógicas	• Tipo de contenido • Valores (transmitidos, implícita o explícitamente) • Sistemas de representación • Situación donde se presentan o aplican los contenidos • Conexiones de los contenidos matemáticos (con otras disciplinas)	• Expectativas de aprendizaje explícitas • Competencias matemáticas que se fomentan • Mención explícita a errores y dificultades	• Tipo de tarea • Relación profesor-alumno • Estrategias docentes • Materiales y recursos - manipulativos - de tipo lingüístico - vinculados a la acción (juegos y "personalización")

Tabla 1. *Categorías que componen el instrumento de análisis organizadas según la componente del análisis didáctico a la que se asocian*

Caracterización de las tareas (tipos de tareas)

Siendo las unidades mínimas para nuestro análisis las tareas que componen las lecciones de matemáticas de Manjón, la primera categoría tiene por objeto caracterizarlas dentro de dicha secuencia didáctica.

Partiendo de la clasificación de las tareas que ofrecen Mason y Johnston-Wilder (2006), según a la intencionalidad con que son diseñadas, y de la de Parcerisa (1996), según la función que desempeñan en la secuencia de tareas, y tras una revisión del texto a analizar, hemos establecido catorce tipos exhaustivos de tareas (describen todas las unidades del texto) aunque no mutuamente excluyentes: *tareas de introducción o motivación de los contenidos; de detección de los conocimientos previos de los alumnos; tareas para establecer una definición; para explicación del uso de una regla o procedimiento; para la elaboración y construcción de significados; de ejercitación, consolidación; de modelización de situaciones reales* (son "problemas enunciados en un contexto real, que deben ser reformulados en términos matemáticos para su resolución y que después se vuelven a interpretar en el contexto original" (Lupiáñez, 2009, p. 64))*; tareas de síntesis; de ampliación; de fomento o motivación de la reflexión (sobre el contenido matemático); tareas para la reflexión religiosa/moral; de memorización/evaluación; orientaciones/sugerencias/aclaraciones de tipo didáctico dirigidas al profesor.*

Categorías vinculadas al análisis de contenido

Tipo de contenido

Para describir el contenido matemático que se pone en juego en cada tarea identificamos las nociones fundamentales que en ella se abordan y, siguiendo la división del conocimiento matemático presente en los diferentes diseños curriculares oficiales para las matemáticas de la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria de las últimas décadas, distinguiremos si el contenido matemático implicado es de tipo *conceptual* o *procedimental* (Hiebert y Lefevre, 1986) o si incide en ”la *educación en valores* (*contenidos transversales, actitudes, normas, valores,…*) (MEC, 1991, 2006).

Valores

En la enseñanza practicada por Andrés Manjón, los contenidos meramente matemáticos se entremezclan con las enseñanzas destinadas a forjar caracteres firmes y comprometidos con la sociedad de su tiempo; para él “educar es instruir y algo más, es formar costumbres” (1895, p. 4). Por esta razón, dedicamos una categoría de nuestro análisis a identificar los valores que, implícita o explícitamente, impregnan los contenidos matemáticos. Tomamos la clasificación de valores que hace Álvarez (2001) [3] y con la que establece una jerarquía de valores en la base del pensamiento pedagógico de Manjón:

1) *Valores Intelectuales* 2)*Valores Morales* 3) *Valores Sociales/Afectivos* 4) *Valores Religiosos* 5) *Valores Globalizadores 6) Valores Temporales 7) Valores* Espaciales 8) *Valores Estéticos* 9) *Valores Corporales* 10) *Valores Ecológicos* 11) *Valores Volitivos* 12) *Valores Instrumentales* 13) *Valores Individuales* 14) *Valores Dinámicos*.

Intentaremos establecer entre ellos la jerarquía con la que se presentan en las lecciones de matemáticas y corroborar si la jerarquía que Álvarez establece en un plano teórico efectivamente se mantiene cuando el sacerdote plasma su pensamiento en actuaciones concretas para la instrucción.

Sistemas de representación

En numerosos escritos pedagógicos Manjón insiste en la importancia de combinar la representación verbal de un objeto con otros sistemas de representación que favorezcan la intuición, especialmente gráfico y manipulativo: “Unid a la palabra la imagen o representación de aquello que se habla, y mejor, si podéis, la cosa misma, que los educandos la vean, gusten, toquen y palpen, siempre que sea posible” (Manjón, 1900, p. 19).

Para comprobar si en la enseñanza de las matemáticas Manjón emplea realmente la variedad de representaciones y conexiones entre ellas por la que aboga, en nuestro análisis constataremos el sistema o los sistemas de representación que usa en cada tarea, de los cuatro que se distinguen en el análisis de contenido: *simbólico*, *verbal*, *gráfico*, *manipulativo*, y también si menciona expresamente la *relación entre los sistemas de representación empleados*.

Situaciones donde se presenta o aplica el contenido matemático

El fin pedagógico de formar hombres y mujeres completos, preparados para vivir en la sociedad, se consigue a través de las matemáticas, según Manjón, “empezando la historia de cosas por las que el niño ve en su casa y escuela y en la calle” (1923, p. 51).

---

[3] Álvarez (2001) realiza un análisis de contenido categorial del discurso que Manjón pronunció en la Universidad de Granada en 1897 con motivo de la apertura del curso académico (*Discurso de apertura en la Universidad. Condiciones de una buena educación y cuáles nos faltan*) y en el que el pedagogo expone “los grandes principios teórico-prácticos que constituyen la estructura de su concepción educativa” (Prellezo, 1975, p. 58). Con él identifica los valores que según Manjón se deben transmitir a través de la educación, y determina la jerarquía que se establece entre ellos.

Presentar los contenidos en contextos próximos al entorno y a la experiencia del al alumno, le permite incidir en su aplicación práctica, motivar y despertar el interés en los alumnos y, en definitiva, garantizar la funcionalidad y utilidad de la instrucción en la vida diaria:

Para clasificar las situaciones en que Manjón presenta o aplica los contenidos matemáticos tomaremos la clasificación que ofrece el estudio PISA (Lupiáñez, 2009, p. 48; Rico, 2005, p. 20) y la completaremos con las situaciones de carácter religioso, pues son sin duda las aplicaciones y los contextos de carácter religioso lo más peculiar de la enseñanza practicada por Manjón. Especificaremos entonces para cada tarea si la estructura matemática se presenta o aplica en alguna de estas situaciones:

- *Matemáticas*, cuando la tarea implique solo objetos matemáticos.
- *Científicas*, cuando el contenido matemático modeliza o ayuda a la comprensión de procesos tecnológicos, científicos o del mundo físico.
- *Personales*, relacionadas con las actividades, situaciones u objetos cotidianos o familiares para los escolares.
- *Educativas o laborales*, que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Dentro de ellas distinguiremos aquellas situaciones propias de la realidad escolar de las *Escuelas del Ave María*, relacionadas con los espacios físicos, el funcionamiento o las actividades que caracterizan el día a día de los cármenes.
- *Públicas*, referidas a la comunidad local o a otra más amplia. (se incluirían aquí las transacciones comerciales, divisas, cuestiones de salud pública…).
- *Religiosas*. A veces la religión suministra un contexto con que presentar o ilustrar el contenido matemático, y otras son las matemáticas las que se ponen al servicio de la educación religiosa cuando Manjón, quien alaba la precisión, rigor y exactitud que las caracterizan, articula peculiares razonamientos con los que intenta justificar verdades religiosas apoyándose en conceptos y propiedades matemáticos, mediante recursos de tipo lingüístico y etimológico (Real, 2008, pp. 85-90).

Conexiones de los contenidos matemáticos (con otras disciplinas curriculares)

La estructura de los contenidos matemáticos en relación a la estructura lógica de la propia disciplina es otro de los organizadores del currículo, pero además lo es "la relación con otros tópicos o temas y las relaciones entre conocimientos" (González Marí, 2000). En este sentido, los distintos diseños curriculares oficiales inciden en el carácter integrador e interdisciplinar del conocimiento matemático y contemplan entre los principios para el desarrollo de los contenidos las "conexiones entre las distintas partes del currículo de matemáticas y los currículos de otras materias o aspectos de la realidad social más próxima al alumnado" (Consejería de Educación de Andalucía, 2007). De esta visión interdisciplinar de los contenidos matemáticos ya hemos incluido en nuestro análisis las aplicaciones a la vida cotidiana y las conexiones con otra variedad de fenómenos. Ahora tendremos en cuenta las conexiones con las materias del currículo escolar con *otros contenidos matemáticos del mismo bloque de contenidos*, con *contenidos de otro bloque del currículo de Matemáticas* y con *otras disciplinas del currículo.*

Categorías vinculadas al análisis cognitivo

Una vez contemplados los elementos del análisis de contenido, incluimos en nuestra herramienta de análisis tres categorías en la que trataremos de poner de manifiesto si Manjón reflexiona sobre la dimensión cognitiva del proceso de aprendizaje. A priori, podemos pensar que sí lo hace, pues sus planteamientos ante la enseñanza parten del respeto hacia la naturaleza del niño y del joven: busca que la enseñanza sea motivadora y agradable, que tenga en cuenta las necesidades y "apetitos" de los escolares, pero que atienda también a su desarrollo físico y mental y que proporcione las condiciones necesarias para que puedan desarrollar y perfeccionar sus facultades (Real, 2008, p. 34). En sus propias palabras, el "buen método" de enseñanza supone "allanar dificultades, salvar obstáculos y abreviar, facilitar y amenizar la enseñanza" (Manjón, 1923, p. 4).

Expectativas de aprendizaje explícitas

Observaremos, en particular, si Manjón menciona expresamente las expectativas que se plantea para el proceso de aprendizaje y que orientan la tarea o la secuencia de tareas.

Competencia matemática

Las tareas, a través de las cuales el profesor brinda a sus alumnos la oportunidad de aprender, se diseñan para activar en el alumno unas capacidades relativas a unos conocimientos específicos en aras de alcanzar las expectativas de aprendizaje establecidas, que en un enfoque funcional del currículo se enuncian en forma de competencias. En particular, para cada tarea de las lecciones de Manjón ponemos también de relieve qué aspectos de la *competencia matemática*[4] ayuda a desarrollar o puede permitir al profesor valorar en el alumno. Omitimos la competencia relativa al uso de soportes y herramientas tecnológicas por razones obvias.

Mención explícita a errores y dificultades de aprendizaje

Constataremos, por último, si Manjón hace mención explícita a las dificultades que algunos contenidos del currículo de matemáticas pueden entrañar para el alumno o a si las tiene al diseñar las tareas o secuenciarlas.

Categorías vinculadas al análisis de instrucción

El último bloque de categorías se inspira en los organizadores asociados al análisis de instrucción y tiene por objeto ayudarnos a extraer conclusiones acerca de cómo organiza Manjón la práctica real de la enseñanza; para ello identificaremos en las tareas que componen las Hojas Catequistas y Pedagógicas los principales elementos que sustentan el diseño de la enseñanza dialogada, sencilla y razonada, gradual, intuitiva, sensible y manipulativa, activa y práctica, lúdica y motivadora que Manjón (1916, p. 13) propugna y que se resume en la "trilogía didáctica" *palabra-intuición-acción*, organizados en estas tres categorías:

Relación profesor-alumno (formas de enseñanza)

La finalidad de esta categoría es clasificar las tareas según sea el papel que en ellas desempeñan el profesor y el alumno, en la construcción del conocimiento, y la interacción que se establece entre ellos. Nos basaremos en lo que Manjón, en la línea de los pedagogos más reconocidos de la época, denomina *formas de enseñanza*,

---

[4] 1) Pensar y razonar. 2) argumentar. 3) Comunicar. 4) Modelizar. 5) Plantear y resolver problemas. 6) Representar. 7) Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones. 8) Emplear soportes y herramientas tecnológicas.

refiriéndose con ello a “la manera de expresión de que el maestro se vale para comunicarse con los discípulos, suministrarles conocimientos, hacer que se los asimilen y suscitarles el pensamiento individual y reflexivo” (Alcántara, 1891, p. 63) y que vienen determinadas por el uso que hagan de la palabra el maestro y el alumno para transmitir/adquirir el conocimiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Consideraremos las *formas de enseñanza* a las que Manjón, siguiendo a Carderera (1877), alude:

- *Forma dogmática* o *expositiva.* “Es la enseñanza por discursos seguidos”, dice Manjón, y no la más recomendable en la enseñanza elemental, pues si los discursos son largos, “exigen atención superior a la que pueden prestar los niños” y además, al no existir interacción con el alumno, no permite al maestro conocer su grado de comprensión, sus dudas y dificultades.
- *Interrogativa (socrática).* Aunque existen distintas formas de enseñanza interrogativas, en el sentido estricto de que el maestro interroga al alumno, solo las llamadas *de investigación* son las más apropiadas para obligar al alumno a pensar, a juzgar, a reflexionar, a descubrir, o al menos indagar, lo que se le quiere enseñar, y constituyen, en último término la llamada *forma socrática*, que es la propia del método activo, pues requiere del alumno su esfuerzo personal en la adquisición del conocimiento (Alcántara, 1891, p. 70; Blanco, 1912, p. 235; Carderera, 1872, p. 118).
- *Catequística.* Aunque se trata del procedimiento tradicional de enseñanza de los catecismos religiosos, a base de preguntas mecánicas sobre asuntos conocidos, Manjón denomina *catequística* a una forma mixta de dogmática y socrática, en la que “se expone el asunto en un corto discurso o narración, y enseguida vienen las preguntas y respuestas. Se desenvuelven y aclaran las ideas ya existentes [por medio de discursos cortos], y se adquieren otras nuevas por medio de preguntas”.
- *De repetición*, que “consiste en repetir para fijar en la memoria”. La presencia de tareas con forma de repetición en los textos escolares de Manjón permitirá establecer la importancia que el pedagogo del Ave María le otorga a la memorización en el proceso de enseñanza-aprendizaje y/o la presencia de tareas de evaluación con las que comprobar la adquisición de los contenidos por parte de los alumnos.

Estrategias docentes

Además de adecuar la dificultad de las tareas matemáticas a los escolares mediante el uso de sistemas de representación adecuados y variados y de contextos motivadores y auténticos, Manjón se refiere también a otras estrategias para facilitar el aprendizaje a sus alumnos y aumentar su motivación (Real, 2008, §3 y §5):

Inducción

En su afán por desarrollar una enseñanza adaptada a la edad y la capacidad intelectual del niño, Manjón defiende este principio metodológico básico en la Didáctica de las Matemáticas por el que se conduce al alumno “por grados, de lo sencillo á lo complejo, de lo concreto á lo abstracto, de lo empírico á lo racional, de lo sensible á lo suprasensible, de lo incompleto á lo completo, de lo incipiente á lo consumado, á ser posible” (Manjón, 1916, p. 13).

Gradación de las tareas

Además del principio de inducción, el diseño y secuenciación de las tareas matemáticas debe respetar un orden en cuanto a su dificultad y complejidad, esto es, “no enseñar cada vez sino una sola cosa, ni poner más de una dificultad, y ésta vencida, otra (…), las fórmulas sencillas y aceptadas antes que las demostraciones, de las cuales sólo son capaces las inteligencias superiores” (Manjón, 1923, p. 19).

Ejemplificación

Convencido de que las explicaciones del maestro son tanto más efectivas cuanto más próximos al entorno y a la propia experiencia del alumno se escojan, anima a los maestros a ilustrar y enriquecer sus explicaciones con “ejemplos, que son verdades prácticas que convencen y persuaden más que las palabras, y verdades que atajan el camino del saber y le hacen más simpático” (Manjón, 1996, p. 26). La clasificación que presentamos para los contextos y situaciones nos servirá para catalogarlos, y a ella añadiremos los ejemplos tomados de objetos del entorno (por ejemplo, las líneas de la puerta como ejemplo de paralelismo).

Enseñanza al aire libre

La intención de Manjón es llevar a cabo la enseñanza al aire libre, en los jardines y patios de sus escuelas ubicadas en cármenes granadinos, siempre que el tiempo lo permitiera. En este sentido, como todas las tareas que encontramos en las Hojas Catequistas y Pedagógicas son susceptibles de desarrollarse fuera del aula, nos fijamos en aquellas en las que Manjón menciona explícitamente que deben realizarse al aire libre o que por sus características requieran de espacios grandes o abiertos o recursos que se encuentren en el exterior.

Premios (motivación)

Materiales y recursos

En concordancia con la terna didáctica *intuición-palabra-acción* que vertebra los planteamientos didácticos de Manjón, es posible organizar los recursos que emplea para la enseñanza de las matemáticas, recopilados y descritos en Real (2008, § 5), en estas tres grandes categorías:

Los materiales didácticos y recursos de tipo manipulativo (intuición sensible)

En las tareas donde se haga referencia al uso de recursos de tipo manipulativo distinguiremos si se trata de *objetos del entorno*, recursos de tipo material no diseñados ex profeso para la enseñanza pero usados ocasionalmente con fin didáctico, o *materiales didácticos*, entendidos como “concreciones de modelos, realizadas por casas comerciales o por el profesor” (Rico, 1997b, p. 54), en el caso de Manjón, ábacos, pizarrines, bloques o fichas de madera, petos de tela, murales, etc., bien fabricados por una casa comercial, bien por el propio maestro valiéndose de su ingenio y de los medios que el entorno le proporciona.

Los recursos de tipo lingüístico (palabra)

Manjón insiste en la importancia de conjugar la forma dialogada de enseñanza con la intuición, lo que en la práctica se traduce en acompañar las explicaciones con los recursos manipulativos que hemos descrito antes, para favorecer la intuición sensible, o bien enriquecerlas con ejemplos tomados del entorno cercano del alumno y aderezarlas con recursos de índole lingüística, que ayuden a la intuición intelectual (Manjón, 1923, pp. 104-105).

Entre los recursos de tipo lingüístico incluimos las *figuras del lenguaje* (figuras retóricas: símiles, comparaciones, metáforas, analogías, personificación de virtudes mediante nombre alegóricos…) y los *juegos de palabra*s de los que Manjón se vale para establecer relaciones de tipo etimológico entre vocablos en un contexto matemático y otro contexto (muchas veces religioso o moral) con el fin de favorecer su comprensión o aclarar su significado (no necesariamente el matemático). Por ejemplo: "La línea *recta* expresa la *derechura* necesaria, absoluta, inflexible; y de *recta* o *recto* se deriva *rectitud,* que en el orden moral significa lo que es *recto*, *derecho* o *justo*, *bueno*, *honrado* y *santo*" (Hoja 4ª, Libro 4º, p. 10). Y también tendremos en cuenta cuando las tareas sean planteadas en forma de *cuento o parábola*, lo que permite a Manjón, además de trabajar los contenidos matemáticos en contextos cercanos, extraer una enseñanza para la vida (moraleja).

Recursos de tipo lúdico (acción)

El uso de materiales didácticos y recursos manipulativos se combina con los procedimientos activos, en muchos casos de carácter lúdico, que caracterizan la enseñanza en el Ave María. Manjón aspira a crear todo un sistema de *juegos pedagógicos* para sus escuelas, y para ello se inspira en los juegos espontáneos de los niños y los adapta a sus intenciones didácticas. En el caso de las matemáticas, es posible encontrar en los textos alusiones al uso de rayuelas, juegos de cartas, bolos, etc. (Real, 2008, pp. 61-62).

Estrechamente relacionadas con el juego y el gusto del niño por lo cómico y la imitación, Manjón contempla las representaciones teatrales como recurso didáctico. Las escenificaciones en clase de matemáticas se llevan a cabo a través de lo que el pedagogo denomina *personalización* de objetos matemáticos, esto es, cada niño encarna una figura, un guarismo, una propiedad, etc., cuya representación puede llevar colgada en un peto o *escapulario*, y cuyo papel se pretende que asuma para relacionarse matemáticamente con el resto de compañeros.

El análisis didáctico y el análisis de textos escolares de matemáticas

El análisis didáctico se presenta "como un procedimiento para diseñar, llevar a cabo y evaluar unidades didácticas sobre un tema concreto de las matemáticas escolares", desde una visión curricular y funcional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo cual lo convierte en "una herramienta útil para el profesor, que le permite planificar sus actuaciones profesionales de una manera fundamentada, sistemática y justificada" (Lupiáñez, 2009).

Nosotros hemos descrito una aplicación de la estructura que proporciona el análisis didáctico a la caracterización a posteriori de esa actuación docente, centrándonos en el estudio del fruto de esa planificación, reflexión y práctica, en nuestro caso, una propuesta didáctica concreta en forma de texto escolar.

Puesto que los libros de texto constituyen importantes fuentes información acerca de la enseñanza en un determinado momento histórico, y dada la fundamentación rigurosa y sistemática de las componentes del análisis didáctico, el análisis que proponemos podría aplicarse a la caracterización de la enseñanza de las matemáticas reflejada en textos escolares de muy diferentes autores y épocas.

Como recuerda Vea (1995, pp. 33-34), la importancia de los textos escolares para abordar el estudio de la Historia de la Educación reside además en la componente de subjetividad de su autor (en muchos casos también profesional de la docencia) quien concreta los contenidos curriculares y las ideas pedagógicas y metodológicas que las disposiciones legales establecen, adecuadas a necesidades de los alumnos y de los profesores, e intentando reflejar sus propias expectativas y experiencia en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y las aspiraciones educativas que la sociedad espera de la formación escolar.

Nosotros hemos considerado importante completar la visión del análisis didáctico con esta componente axiológica que subyace a toda práctica docente y producción didáctica. De hecho, pese a que el análisis didáctico en el que nos inspiramos supone, de los niveles de reflexión sobre la noción de currículo definidos por Gómez (2007) y Rico (1997a), el más cercano a la planificación, práctica y evaluación del currículo de matemáticas por parte del profesor, como reconoce Rico (p. 408), tales niveles de reflexión no agotan los puntos de vista posibles sobre el currículo, sino que, admiten una mayor riqueza de interpretaciones, como la posibilidad de asumir un planteamiento axiológico.

Referencias

Alcántara García, P. de (1891). *El método activo en la enseñanza*. Madrid: Viuda de Hernando y Cª.

Álvarez, J. (2001). *Análisis de un modelo de educación integral*. Tesis doctoral: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Blanco, R. (1912). *Teoría de la Enseñanza*. Madrid: Imprenta de la Revista de Archivos.

Carderera, M. (1872). *Principios de educación y métodos de enseñanza.* Libro de texto para las escuelas normales (4ª ed). Madrid: Imprenta de Gregorio Hernando.

Carderera, M. (1877). *Principios de educación y métodos de enseñanza.* Libro de texto para las escuelas normales (5ª ed). Madrid: Librería de Hernando.

Consejería de Educación de Andalucía (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *BOJA, 171, 23-65.*

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

González, J. L. (2000). *Estructura, fuentes y organizadores del currículo de Matemáticas.* Descargado el 3/8/2011, de http://www.gonzalezmari.es/ESTRUC_FUENTES_Y_ORGANIZAD.pdf.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge the Case of Mathematics* (pp. 1-28). Hillsdale: Lawrence Erlbaum, Associates Publishers.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria*. Tesis doctoral: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

Manjón, A. (1895). *Pensamiento de la colonia escolar titulada Escuelas del Camino del Sacro-Monte o Colegio del Ave-María.* Granada: Imprenta de Indalecio Ventura.

Manjón, A. (1900). *El pensamiento del Ave-María Colonia escolar permanente establecida en los cármenes del Camino del Sacro-Monte de Granada.* Granada: Imprenta-Escuela del Ave María.

Manjón, A. (1916). *Ley, Instrucción, Reglamento y Presupuesto del Ave-María.* Granada: Imprenta-Escuela del Ave-María.

Manjón, A. (1923). *El maestro mirando hacia fuera o de dentro a fuera*. Libro cuarto. Maestros didácticos y antididácticos. Madrid: Tipografía de la "Revista de Archivos".

Manjón, A. (1996). *El maestro mirando hacia dentro. Obras selectas de Don Andrés Manjón.* Granada: Imprenta de las Escuelas del Ave María.

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Exeter: Tarquin.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1344/1991 de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. BOE, *220*, 30226-30228.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE, *293*, 43053-43102.

Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares*. *Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Graó.

Prellezo, J.M (1975). *Manjón educador. Selección de sus escritos pedagógicos.* Madrid: Magisterio Español.

Real, I. (2008). *La enseñanza de las matemáticas en Andrés Manjón*. Granada: CEPPAM, Imprenta Editorial Ave-María.

Renes, A. (1922). *Leído, visto y soñado a la sombra del Ave María de Granada*. Escuelas Profesionales Salesianas de Artes y Oficios.

Rico, L. (Ed.) (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio Pisa 2003. En *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas* (pp. 11-25). Madrid: INECSE.

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*. Cuadernos de Historia de la Ciencia 9-I y 9-II. Zaragoza: Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Universidad de Zaragoza.

ACTITUDES DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA HACIA EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LAS MATEMÁTICAS

Rubí López, Enrique Castro y Marta Molina

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo describe las tendencias de las actitudes de estudiantes de ingeniería hacia el uso de la tecnología en la enseñanza, aprendizaje y práctica de las matemáticas, mediante un análisis de opiniones descritas por los estudiantes como respuesta a una pregunta abierta de un cuestionario de actitudes. El análisis de las opiniones se realiza a través de categorías establecidas siguiendo un método de análisis de contenido, donde la unidad de registro es una palabra o idea común contenida en el comentario de los estudiantes. Los resultados procedentes de la aplicación de dicho cuestionario sirvieron de utilidad para diseñar el experimento de enseñanza nos informan para el diseño y desarrollo de un experimento de enseñanza sobre el proceso de modelización con la ayuda de un Sistema Algebraico Computacional (CAS).

Palabras clave: Actitudes / Estudiantes de ingeniería / Análisis de contenido / Uso de la tecnología en matemáticas

Abstract

In this paper, we describe engineering undergraduate students attitude trends about using technology for teaching, learning and practice of mathematics, by analyzing students' opinion expressed in an open question on a survey. The analysis was performed using a set of established categories following a content analysis methodology, where a simple word or a common idea in the students' comment in the survey represents a key term. The obtained results were useful in order to design and develop a teaching experiment about the modeling process with a CAS (Computer Algebra System).

Keywords: Attitudes / Undergraduate engineering students / Content analysis / Applied technology in mathematics

En el ámbito educativo cada vez con más frecuencia se habla de la notable influencia que ejercen las variables afectivas sobre el rendimiento académico. Estas variables constituyen una vasta categoría de sentimientos y estados de ánimo que incluyen elementos como las actitudes, las creencias y las emociones (McLeod y Adams, 1989). Una de las áreas del conocimiento dentro de la que se han analizado de forma más sistemática las actitudes es la de las Matemáticas (Gil, Blanco y Guerrero, 2005; Mato y De la Torre, 2009; Pérez-Tyteca, Castro, Segovia, Castro, y Fernández, 2007). Las actitudes han sido consideradas un elemento clave para ser tomado en cuenta en el estudio del proceso de aprendizaje (Fennema y Sherman, 1976) y han sido estudiadas en relación a una amplia variedad de aspectos. Algunos estudios muestran que una actitud positiva tiende a correlacionarse positivamente con un incremento de esfuerzo para aprender y con el logro de dicho aprendizaje (Kloosterman, 1990; Minato, 1983; Minato

López, R. Castro, E., y Molina, M. (2012). Actitudes de estudiantes de ingeniería hacia el uso de la tecnología en las matemáticas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 181-190). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

& Yanase, 1984) y que la confianza es un buen predictor de éxito en matemáticas (Randhawa, Beamer y Lundberg, 1993). Otros autores, tales como Ursini y Sánchez (2008), destacan la influencia de factores sociales y culturales como condicionante de dichas correlaciones.

En el trabajo que aquí presentamos centramos nuestra atención en las actitudes de los estudiantes hacia la incorporación de la tecnología en el aula de matemáticas. Obtener información a este respecto es un paso fundamental en la comprensión de cómo el entorno de aprendizaje para las matemáticas es afectado por la introducción de ordenadores y otras tecnologías (Galbraith y Haines, 1998). El empleo de los ordenadores en tareas con un alto nivel de exigencias intelectuales puede representar una barrera para el aprendizaje, sobre todo en aquellas personas que tienen poca confianza y experiencia en el uso de la tecnología. La confianza en los ordenadores o en el uso de los mismos, puede mediar en el buen rendimiento de los estudiantes en ambientes de aprendizaje que requieren interacción con el ordenador (Cretchley, 2007).

El estudio de las actitudes de los estudiantes ante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con tecnología, es un tema que ha despertado el interés de diversos investigadores en Educación Matemática desde diferentes perspectivas (Cretchley, 2007; Cretchley y Harman, 2001; Fogarty, Cretchley, Ellerton y Konki, 2001; Galbraith y Haines, 1998; Gómez-Chacón y Haines, 2008; Pierce, Stacey y Barkatsas, 2007). En las últimas décadas numerosos investigadores (Hoyles y Sutherland, 1989; Balachef y Kaput, 1996; Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Mariotti, 2005, citados por Ursini, Sánchez y Orendain, 2004) han explorado posibilidades para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos mediante el uso de la tecnología. La gran mayoría de estas investigaciones reportan que al trabajar temas de matemáticas con el apoyo de la tecnología aumenta notablemente la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas, registrándose además un cambio positivo en las actitudes hacia esta materia (Ursini, Sánchez y Orendain, 2004).

Partiendo de estas consideraciones y reconociendo la influencia de las actitudes de los estudiantes en el empleo de la tecnología en la actividad matemática y en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, presentamos aquí parte de un trabajo en el que hemos elaborado y aplicado un cuestionario dirigido a medir dichas actitudes y lo hemos aplicado a un grupo de estudiantes de ingeniería. Los resultados procedentes de la aplicación de dicho cuestionario nos serán de utilidad para diseñar experiencias docentes que hagan uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas en la formación de ingenieros, en particular para el diseño y desarrollo de un experimento de enseñanza que busca indagar en el uso del proceso de modelización con un CAS (Computer Algebra System), como metodología de enseñanza.

Estudio empírico

Con el propósito de medir las actitudes de estudiantes de ingeniería hacia la actividad matemática y el aprendizaje de las matemáticas utilizando tecnología, elaboramos un cuestionario que consta de tres partes. Describimos aquí dos de ellas que son las que analizamos en esta comunicación. La otra parte consiste en un listado de Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS) donde se les pregunta a los estudiantes si conocen dichos software y si han trabajado con alguno de ellos en clase de matemáticas o de manera particular.

La primera parte es un test de 35 ítems procedentes de escalas previamente validadas en otras investigaciones[1]. Dichos ítems refieren a tres temas:

- la interacción de los estudiantes con el ordenador para hacer y aprender matemáticas (ej., El ítem 1 es "*Las computadoras me ayudan a aprender mejor las Matemáticas proporcionándome al instante muchos ejemplos de manera interactiva*"),
- la experiencia de los estudiantes en el uso de la tecnología en el aprendizaje o en la actividad matemática (ej., El ítem 28 es "*En términos generales, vale la pena aprender a utilizar el software para hacer Matemáticas*") y
- el gusto por la integración de la tecnología en el aprendizaje y la actividad matemática (ej., El ítem 9 es "*Me gusta usar computadoras para Matemáticas*").

Para cada uno de los ítems, los estudiantes debían indicar su grado de acuerdo o desacuerdo por medio de una escala de Likert de 5 valores. La validación de esta parte del cuestionario, por medio de diversas técnicas estadísticas se describe en López, Castro y Molina. (2010).

La otra parte del cuestionario era un apartado para comentarios, a modo de pregunta abierta, donde los estudiantes podían indicar sus opiniones con respecto a la encuesta o su perspectiva general de la práctica, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas utilizando tecnología.

Aplicación del cuestionario

Este cuestionario fue aplicado a 253 estudiantes de un primer curso de ingeniería, de diferentes titulaciones del Campus de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Universidad Autónoma de Yucatán en México (ver Tabla 1). La administración del cuestionario la realizó el propio investigador a cada grupo de estudiantes en su aula habitual, durante una sesión de clase. Antes de entregar el cuestionario, el evaluador proporcionó las instrucciones del llenado y describió la finalidad de la aplicación del mismo. No se limitó el tiempo de respuesta, sin embargo, todos los estudiantes dedicaron menos de 20 minutos a completar el cuestionario.

FACULTAD	GRUPOS	ESPECIALIDAD	GÉNERO		ALUMNOS
			M	F	
Ingeniería	5	Ingeniería Civil	65	11	76
		Ingeniería Física	15	5	20
		Ingeniería Mecatrónica	39	4	43
Matemáticas	3	Ingeniería en Computación	17	3	20
		Ingeniería de Software	32	1	33
Ingeniería Química	2	Ingeniería Química Industrial	26	11	38
		Ingeniería Industrial Logística	17	6	23

Tabla 1. Distribución de la muestra

Las instrucciones emitidas por el investigador con respecto al apartado de "Comentarios" fueron las siguientes:

> *"En este apartado, pueden describir de manera general sus opiniones con respecto, por un lado, al uso de la tecnología en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y por otro, emitir si así lo desean sus opiniones con respecto a la aplicación de la encuesta"*

[1] Ver una descripción más completa y la justificación de su construcción en López, Castro, Molina y Moreno, 2010.

Entre los 253 alumnos encuestados, 143 describieron algún tipo de opinión como respuesta al apartado de “Comentarios”.

Análisis y resultados

Las respuestas de los alumnos universitarios de la muestra a la pregunta abierta están dadas en formato de texto narrativo en el que exponen sus opiniones sobre el uso de la tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para identificar la variedad de opiniones que los estudiantes tienen al respecto, hemos aplicado la técnica del análisis de contenido.

En primera instancia, procedimos a leer las 143 opiniones descritas por los estudiantes, con el propósito de identificar grupos de respuestas, identificando tres tipos de comentarios:

1. Opiniones de los alumnos con respecto al uso de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
2. Opiniones de los alumnos con respecto a la lista de software propuesta en el segundo apartado.
3. Opiniones de los alumnos sin significancia para nuestro estudio.

Consideramos que las respuestas correspondientes al primer grupo son las que tienen significancia para el establecimiento de nuestras categorías. En función de lo anterior, obtuvimos 96 comentarios significativos para proceder al establecimiento de las categorías que inciden en la valoración de las actitudes de los alumnos hacia el uso de la tecnología en la enseñanza, aprendizaje y práctica de las matemáticas.

Niveles de análisis

En un primer nivel de análisis decidimos utilizar la técnica de análisis de contenido de las opiniones emitidas por los alumnos en respuesta a la sección de comentarios, estableciendo las unidades de análisis. Siguiendo a Krippendorff (1997) se distinguen tres tipos de unidades de análisis: unidades de muestreo, unidades de contexto y unidades de registro.

Las unidades de muestreo son aquellas porciones del universo observado que serán analizadas. En nuestro caso, se analizarán las opiniones emitidas por los alumnos inscritos a un primer curso de ingeniería en el cuestionario de actitudes.

La unidad de contexto es la porción de la unidad de muestreo que tiene que ser examinada para poder caracterizar una unidad de registro. En nuestro caso la unidad de contexto es el tercer apartado del cuestionario, es decir, la sección de opiniones descritas por los estudiantes como respuesta a la pregunta abierta.

La unidad de registro puede considerarse como la parte de la unidad de muestreo que es posible analizar de forma aislada. Hostil (1969, p. 116) define una unidad de registro “como el segmento específico de contenido que se caracteriza al situarlo en una categoría dada”. Para otros autores las unidades de registro en un texto pueden ser palabras, temas (frases, conjunto de palabras), caracteres (personas o personajes), párrafos, conceptos (ideas o conjunto de ideas), símbolos semánticos (metáforas, figuras literarias), etc. La palabra común encontrada en cada uno de los comentarios, o bien, la idea involucrada, la identificamos como la unidad de registro. Para nuestro estudio esta unidad de registro la nombramos como “término clave”.

Procedimos entonces a leer de nuevo, analizar con mayor detalle y codificar cada uno de los comentarios significativos descritos por los estudiantes en el cuestionario. La codificación consiste en una transformación mediante reglas precisas de los datos brutos del texto. Esta transformación o descomposición del texto permite su representación en índices numéricos o alfabéticos. Como dice Hostil (1969) la codificación es el proceso por el que los datos brutos se transforman sistemáticamente en unidades que permiten una descripción precisa de las características de su contenido. Siguiendo a Bardin (1996), en la enumeración y reglas de recuento se encuentran: la presencia y la frecuencia. La presencia o ausencia de los elementos de un texto puede ser importante. La frecuencia es la medida generalmente más utilizada, válida en unos casos y en otros no. La importancia de una unidad de registro crece con su frecuencia de aparición.

Nuestra unidad de registro que definimos como "término clave" tuvo una variación de quince elementos y en la Tabla 2 se muestran dichos elementos con su frecuencia de aparición. Cabe señalar que hubo opiniones codificadas hasta con dos términos clave.

N°	Término clave	Frecuencia
1	Bondades	38
2	Condición	30
3	Justificación	21
4	Interés	20
5	Ayuda	14
6	Importancia	7
7	Gustaría	6
8	Dificultades	4
9	Método tradicional	4
11	No uso	3
10	Poco uso	3
13	Agrado	1
14	Estaría bien	1
12	Gusto	1
15	No necesidad	1

Tabla 2. Términos clave

Para ejemplificar la asignación de términos clave, situamos en la Tabla 3 algunas de las opiniones descritas por los estudiantes en su cuestionario como respuesta al apartado de comentarios.

Comentario	Términos clave
"El uso de la computadoras es muy ***importante*** *para mejorar el aprendizaje de las matemáticas"*	Importancia
"Considero ***útil*** *el uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas,* ***facilita el trabajo del profesor y del alumno***"	Bondades / Justificación
"*Las computadoras y software* ***ayudan*** *en el uso de las matemáticas* ***pero hacen que no entiendas lo que haces y para qué sirve****"*	Ayuda / Condición
"Es ***interesante*** *e* ***importante*** *la aplicación de software en matemáticas"*	Interés / Importancia

Tabla 3. Ejemplos de comentarios y sus términos clave asignados

Por ejemplo, en el comentario que le asignamos los términos clave "bondades" y "justificación", el alumno está expresando la idea de bondad del uso de la tecnología al describir que es "*útil*" y al mismo tiempo la está justificando al comentar que "*facilita el* *trabajo del profesor y del alumno*”. En el comentario donde le asignamos como términos clave “ayuda” y “condición”, el alumno utiliza la palabra común “*ayudan*” y está condicionando la ayuda que proporciona el uso de la tecnología en las matemáticas al agregar en su opinión la condición “*pero hacen que no entiendas lo que haces y para qué sirve*”

En un segundo nivel de análisis, se establecieron las categorías en función de los términos clave asignados a cada uno de los comentarios, obteniendo categorías mutuamente excluyentes, es decir, que un mismo comentario solamente se codificó dentro de una categoría.

Las opiniones codificadas con los términos clave “importancia”, “bondades” y “ayuda” se situaron en primer lugar dentro de la categoría de “Utilidad”, identificando los comentarios que además incluían por un lado el término clave “condición” y por el otro el término clave “justificación”, definiendo entonces tres tipos de categorías relacionadas con la consideración de la utilidad de la tecnología para hacer y aprender matemáticas (Figura 1).

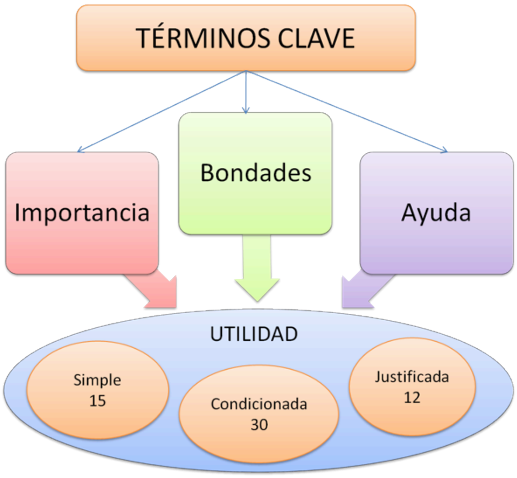


Figura 1. Categorías de utilidad

Simple. Cuando las opiniones expresadas no condicionan o justifican la utilidad de la tecnología en las matemáticas, como por ejemplo: “*Me parece muy bueno el uso de software en Matemáticas*”. Este tipo de opiniones las situamos en la categoría simple llamada “utilidad”

Condicionada. Cuando el alumno expresa que la tecnología es importante, útil o ayuda a su aprendizaje de las matemáticas, pero estableciendo una condición para dicha consideración, como por ejemplo: “*El uso de las computadoras es una buena herramienta para el entendimiento de las matemáticas, sin embargo no debe caer en el rango de "necesario" para este fin pues en vez de ayudar empeoraría o perjudicaría al alumno*”. Esta categoría la nombramos “utilidad condicionada”

Justificada. Cuando el alumno comenta las bondades, importancia o ayuda de la tecnología en su aprendizaje de las matemáticas, pero justificando dicha utilidad, como por ejemplo: “*Creo que es importante el uso de la tecnología en las matemáticas, ya que las hace un poco más interesante y evita los errores. Aparte de que los software pueden mostrarnos las gráficas exactas*”. Esta categorización la titulamos “utilidad justificada”.

La Figura 2 muestra el esquema de las categorías involucradas con la percepción de los alumnos de que la tecnología es de utilidad para su aprendizaje de las matemáticas, con la frecuencia de la unidad de registro, en nuestro caso, los términos clave.

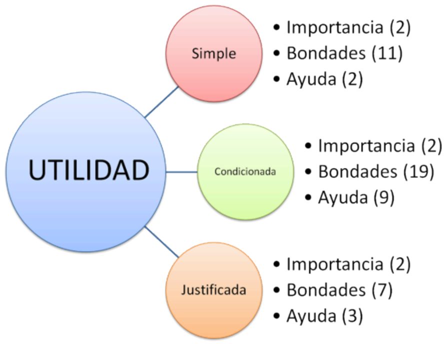


Figura 2. Frecuencia de las categorías de utilidad

Los comentarios codificados con los términos clave "gusto" y "agrado" se categorizaron dentro de la categoría de "Gusto". Asimismo, todas las opiniones que incluyeron los términos clave "interés", "gustaría" y "estaría bien", independientemente de algún otro término clave codificado se establecieron dentro de la categoría de "Motivación". En esta categoría incluimos la excepción de la opinión: "*Es interesante e importante la aplicación de software en matemáticas*" que podría no considerarse dentro de una categoría mutuamente excluyente al incluir al mismo tiempo las palabras "interesante" e "importante"; sin embargo, en función de la primera idea lo situamos dentro de la categoría de "Motivación".

Por otro lado, las opiniones codificadas con los términos clave: "dificultades", por ejemplo: "*No le veo mucho sentido a aprender matemáticas con computadoras, si de por sí te revuelves manualmente peor tecleando fórmulas* "; "no necesidad", como por ejemplo: "*Creo que el uso de la computadora en las matemáticas no es necesario porque no importa si tenemos el resultado sino el procedimiento ya que no siempre se tendrá una computadora a mano*" y "método tradicional", como por ejemplo: "*Realizar los cálculos en lápiz hace que se te quede tu aprendizaje porque lo estás practicando, en cambio realizarlo por computadora no sé que tanto me puede ayudar a retener la información*" se categorizaron como "rechazo justificado" . En este caso no son palabras comunes las que involucra el comentario para la correcta codificación, sino más bien la idea general que encierra la opinión del estudiante.

Por último, los comentarios tales como: "*Casi no usamos programas para realizar trabajos de matemáticas"* y "*Nunca he usado software para el aprendizaje de las matemáticas*" que incluyen la idea de "poco uso" o "no uso" de la tecnología en las matemáticas los situamos en la categoría que nombramos como "desconocimiento".

Si analizamos el establecimiento de las primeras seis categorías definidas: utilidad, gusto, motivación, utilidad condicionada, utilidad justificada y rechazo justificado en función de los tipos de opiniones situadas en cada caso, consideramos que todas estas opiniones con significancia para nuestro estudio expresaron sentimientos de afecto de los estudiantes hacia el uso de la tecnología en las matemáticas, por lo tanto las agrupamos como "categorías afectivas". La séptima y última categoría la agrupamos dentro del contexto de "otras categorías".

Un tercer nivel de análisis fue el establecimiento de núcleos, debido a que si consideramos las seis categorías afectivas podríamos situarlas en dos tipos de núcleo, por un lado, las categorías afectivas sin argumentación como lo son: utilidad, gusto y motivación y por otro lado, las categorías afectivas con argumentación, tales como: utilidad condicionada, utilidad justificada y rechazo justificado, cuando el alumno emite una respuesta a favor del uso de la tecnología en las matemáticas, pero de manera condicionada o justificando su acuerdo. De manera independiente surge el núcleo del grupo de "otras" para el último tipo de categoría: desconocimiento.

La Tabla 4 muestra las categorías establecidas, su descripción y su frecuencia.

Categoría	**Descripción**	**Frecuencia**
	AFECTIVAS SIN ARGUMENTACIÓN	
Utilidad	Importancia del uso de la tecnología en la realización de actividades para hacer o aprender matemáticas	15
Gusto	Disfrute del alumno en el uso la tecnología en hacer o aprender de las matemáticas	2
Motivación	Interés de los estudiantes y deseo por utilizar la tecnología en hacer o aprender matemáticas	22
	AFECTIVAS CON ARGUMENTACIÓN	
Utilidad Condicionada	Importancia del uso de la tecnología poniendo de manifiesto la condición bajo todas las circunstancias	30
Utilidad Justificada	Importancia del uso de la tecnología argumentando el porqué de su utilidad	12
Rechazo Justificado	El rechazo, resistencia o la no aceptación justificada del uso de la tecnología	9
	OTRAS	
Desconocimiento	Falta de conocimiento de las bondades de la tecnología para hacer o aprender matemáticas	6

Tabla 4. Descripción y frecuencia de categorías

Conclusiones

Nuestro principal propósito en este trabajo consistió en analizar las tendencias de las actitudes de estudiantes de ingeniería hacia el uso de la tecnología en las matemáticas. Consideramos que el establecimiento de las siete categorías mediante la metodología de análisis de contenido para la determinación de las tendencias de las actitudes de los estudiantes de ingeniería del Campus de Ingeniería y Ciencias Exactas de la Universidad Autónoma de Yucatán podría servir de referencia base para futuras clasificaciones con respecto al tema de actitudes de alumnos hacia el uso de la tecnología en las aulas de clase.

Pierce, Stacey y Barkatsas (2007) mencionan que administrar este tipo de instrumentos a los estudiantes permite determinar las variables que contribuyen y las que no a la evaluación de la efectividad del aprendizaje de las matemáticas con tecnología. En nuestro caso, podemos concluir que un 84% de las opiniones con significancia para nuestro estudio expresó sentimientos de afecto que podemos considerar con una tendencia hacia una actitud positiva con respecto al uso de la tecnología en la enseñanza, aprendizaje y práctica de las matemáticas. Es decir, en función de las siete categorías establecidas, podemos concluir que cinco de ellas reflejan una actitud en sentido positivo hacia el uso de dicho recurso material para hacer y aprender matemáticas, como puede verse en la Figura 3.

Figura 3. Categorías afectivas con tendencia positiva

También es posible concluir que gran parte de dichas opiniones se inclinó hacia la consideración de la utilidad de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, aunque en algunos casos se expresaba un condicionamiento.

La literatura presenta amplia evidencia de correlaciones positivas entre actitudes y rendimiento académico y que los educadores inevitablemente buscan oportunidades para aprovechar esas correlaciones en buen sentido para mejorar ambas características (Cretchley y Harman, 2001). Llama la atención que el segundo mayor porcentaje de las opiniones de los alumnos de ingeniería tuvo una tendencia de interés hacia el uso de la tecnología en beneficio de mejora de su aprendizaje de las matemáticas. Entre los menores porcentajes se encuentran las opiniones de rechazo hacia el uso de la tecnología como herramienta de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas.

Por último, consideramos que la buena actitud que muestran los alumnos de ingeniería redundará en beneficio de la implementación de clases que involucren la tecnología como recurso material.

Referencias

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido.* Madrid: Akal Ediciones.

Cretchley, P. (2007). Does computer confidence relate to levels of achievement in ICT-Enriched learning models? *Education and Information Technologies*, *12*(1), 29-39.

Cretchley, P. y Harman, C. (2001). Balancing the scales of confidence: Computers in early undergraduate mathematics learning. *USQ ePrints*, *Quaestiones Mathematicae*, 17-25. Descargado el 10 de Julio de 2009 de http://eprints.usq.edu.au/1770/1/Delta'01_Cretchley%26Harman_Pre-print.pdf

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes towards the learning of mathematics by females and males.

Fogarty, G., Cretchley, P., Harman, C., Ellerton, N., y Konki, N. (2001). Validation of a questionnaire to measure mathematics confidence, computer confidence, and attitudes to the use of technology for learning mathematics. *Attitudes to Technology in Mathematics Learning Questionnaire*. Descargado el 20 de Mayo de 2009 de http://eprints.usq.edu.au/953/1/Fogarty_Fogarty-Cretchley-Harman-Ellerton-Konki_Valid._of_questionnaire_maths.pdf

Galbraith, P. y Haines, C. (1998). Disentangling the nexus: Attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(3), 275-290.

Gil, N., Blanco, J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Gómez-Chacón, I. y Haines, C. (2008). Students' attitudes to mathematics and technology. Comparative study between the United Kingdom and Spain. Presentado en ICME-11, *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey: México. Descargado el 7 de Julio de 2009 de http://tsg.icme11.org/document/get/924.

Hostil O.R. (1969). *Content analysis for the social sciences and humanities.* Addison Wesley.

Kloosterman, P. (1990). Attributions, performance following failure, and motivation in mathematics. En E. Fennema y G. C. Leder (Eds.), Mathematics and gender (pp. 96-127). New York: Teachers College Press.

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y Práctica.* Barcelona: Paidós Ibérica

López, R., Castro, E., Molina, M. y Moreno, L. (2010). Elaboración y validación de un cuestionario de actitudes hacia el uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. *Primer Encuentro Internacional TIC en Educación* (pp. 243-248). Lisboa, Portugal.

Mato, M. D. y De la Torre E. (2009). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 285-300). Santander: SEIEM.

McLeod, D. y Adams, V. (Eds) (1989). Affect and mathematical problem solving: A new perspective. New York: Springer Verlag.

Minato, S. (1983). Some mathematical attitudinal data on eighth grade students in Japan measured by a semantic differential. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 19-38.

Minato, S., y Yanase, S. (1984). On the relationship between students' attitudes towards school mathematics and their levels of intelligence. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 313-320.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E. y Fernández, F. (2007). Ansiedad matemática de los alumnos que ingresan en la Universidad de Granada. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 171-180). Tenerife: SEIEM.

Pierce, R., Stacey, K. y Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computers & Education, 48*(2), 285-300.

Randhawa, B. S., Beamer, J. E., y Lundberg, I. (1993). Role of the mathematics self-efficacy in the structural model of mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology, 85*, 41-48.

Ursini, S., Sánchez, G. y Orendain, M. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñadas con computadora. *Educación Matemática, 16*(3), 59-78.

Ursini, S. y Sánchez, G. (2008). Gender, technology and attitude towards mathematics: A comparative longitudinal study with Mexican students. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 559–577.