EVALUACIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL EN FUTUROS MAESTROS: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Walter F. Castro. Universidad de Antioquia. Colombia

Juan D. Godino. Universidad de Granada. España

Resumen. *En este trabajo se reportan los resultados de un estudio exploratorio sobre las competencias iniciales en razonamiento algebraico elemental de una muestra de estudiantes de magisterio para plantear y resolver problemas de palabras que involucran la multiplicación de fracciones. A partir del análisis cualitativo realizado con las herramientas provistas por el Enfoque Onto-semiótico mostramos los objetos y significados puestos en juego con motivo de la solución de un problema, e identificamos conflictos potenciales de significado que podrían surgir durante la actividad de solución.*

Abstract. *We report the results of an exploratory study on the initial competences in elementary algebraic reasoning of a sample of teacher students while solving word problems that involve the multiplication of fractions. Starting from the qualitative analysis carried out with the tools provided by the Onto-semiotic approach we show the objects and meanings put at stake to solve the problem and identify semiotic conflicts that could emerge during the solution process.*

Introducción

El NCTM (1989) recomendó la introducción del álgebra en los últimos cursos de la escuela primaria; así mismo, en los Principios y Estándares del año 2000 se recomienda la introducción del razonamiento algebraico elemental desde los primeros niveles de la escuela primaria, lo que ha atraído mucha atención sobre el razonamiento algebraico en los escolares y sobre la formación de profesores.

En este trabajo presentamos una metodología de análisis de la resolución de un problema algebraico aplicando herramientas provistas por el "enfoque onto-semiótico de la cognición matemática" (Godino, Batanero y Font, 2007), el cual permite identificar los objetos y significados puestos en juego, así como potenciales conflictos de significado. El problema ha sido propuesto a una muestra de estudiantes de magisterio como una primera aproximación a la evaluación de sus competencias de razonamiento algebraico elemental, relacionando nuestros hallazgos con investigaciones sobre razonamiento algebraico elemental y formación de profesores.

Problema y antecedentes

La implantación del razonamiento algebraico elemental en la escuela, requiere que los maestros exhiban conocimiento disciplinar; el NCTM (2000), establece que "los maestros deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y deben ser capaces de usar este conocimiento con flexibilidad en sus funciones docentes" (p. 17). Diversas investigaciones han mostrado que los maestros no poseen un conocimiento matemático estructurado (Ball 1990).

La introducción de los estudiantes al pensamiento algebraico es un proceso largo y complejo (Van Dooren et al., 2003), además que los maestros de primaria deben tener la capacidad de reconocer y estimular el razonamiento algebraico manifestado espontáneamente por sus alumnos (Carraher y Schliemann, 2006) y por tanto la investigación acerca de la formación de profesores que promueva el pensamiento algebraico es tema de interés (Borko et al., 2005)

En el contexto investigativo del razonamiento algebraico elemental hay dos preguntas que se formulan (Carraher y Schliemann, 2006): ¿Pueden los escolares realmente tratar con el álgebra?, y ¿Pueden los maestros de primaria enseñar álgebra?

Algunas investigaciones han abordado la segunda pregunta, Van Dooren et al (2003) muestran que las estrategias usadas por los maestros en formación para resolver problemas verbales, se ubican en dos grupos: las que se adaptan a la naturaleza aritmética o algebraica del problema y las de tipo numérico que se muestran insuficientes para abordar los problemas de naturaleza eminentemente algebraica.

McGowen et al (2001) abordaron las implicaciones que para la formación de profesores tiene la propuesta del razonamiento algebraico elemental. Blanton y Kaput (2005) efectuaron un estudio en el marco de un proyecto de desarrollo profesional, y exploraron de qué maneras y en qué medida los profesores eran capaces de promover y apoyar el desarrollo de competencias de razonamiento algebraico elemental en sus estudiantes.

Marco teórico y metodología

En el "enfoque onto-semiótico" (EOS) del conocimiento matemático se ha introducido la noción de configuración de objetos y significados como recurso para describir las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de una situación problema.

La noción se concreta en una herramienta que comprende la identificación de los tipos de objetos o entidades primarias, puestas en juego en la solución del problema, agrupadas en los siguientes tipos: elementos lingüísticos, conceptos (entidades que tienen una definición), procedimientos, propiedades y argumentos; y la identificación de conflictos de significado que podrían surgir durante la actividad de solución del problema. La herramienta usada, a la que denominamos de manera genérica como "análisis epistémico", permite ampliar el foco de atención desde las representaciones hacia el conglomerado de entidades referidas por las mismas y los roles que desempeñan en la actividad matemática (Font, Godino y D'Amore, 2007).

La herramienta se pone en juego en el contexto del análisis de los objetos, significados y conflictos de significado que surgen con motivo de problemas verbales que involucran fracciones, para valorar las competencias de razonamiento algebraico elemental manifestada por los maestros en formación.

Somos conscientes de que la caracterización de las competencias de razonamiento algebraico elemental de los maestros en formación no se puede realizar con un único problema como el que analizamos. Será necesario realizar una reconstrucción de un "significado de referencia" para dicha competencia, concretado en un campo de problemas y las prácticas operativas y discursivas correspondientes. Por razones de espacio, en este trabajo, centramos la atención en presentar una metodología de análisis de la resolución de un problema, la cual informa del campo de validez (representatividad) del problema y aporta información útil para su uso en el proceso formativo correspondiente.

Contexto de la investigación. Población y muestra

La indagación la realizamos con un grupo de 65 estudiantes en un ciclo formativo sobre las matemáticas y su didáctica para estudiantes de magisterio; la experiencia que reportamos en este documento, corresponde al análisis realizado sobre la solución, en situación de examen, de un problema verbales que involucra multiplicaciones sucesivas de una fracción.

Previa a la aplicación de la evaluación, se realizó un análisis epistémico del problema propuesto; este análisis tuvo tres objetivos: el primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de un problema, desde la perspectiva de un experto; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes brindarían al problema, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias favorece predecir e identificar conflictos potenciales.

A continuación transcribimos el problema propuesto; posteriormente brindamos las soluciones expertas algebraica y numérica.

> "Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es de 6 cm, ¿a qué altura inicial se lanzo la pelota? 1) Resuelve el problema; 2) Explica la solución utilizando alguna representación gráfica; 3) Explica la solución usando notación algebraica".

Soluciones expertas algebraica y numérica

Es claro que existen muchas otras soluciones al problema, diferentes a las que se brindan aquí, pero el análisis epistémico se ha de basar en una de tales soluciones para identificar los objetos, significados y conflictos que podrían surgir en las soluciones de los estudiantes. Nuestra experiencia muestra que si bien, algunos estudiantes ofrecen soluciones correctas y novedosas, así como soluciones incorrectas que no habían sido previstas durante el análisis epistémico experto, éste se ajusta a la variedad de soluciones dadas por los estudiantes.

Solución algebraica: Sea x la altura desconocida, como en cada rebote la altura a la que rebota es un quinto de la altura inicial, entonces la altura del primer rebote será $(1/5)x$; por tanto en dos rebotes más, la altura alcanzada será: $\frac{1}{5}(\frac{1}{5}(\frac{1}{5}x))$; y como 6 cm corresponden a la altura del último rebote, entonces tenemos la relación: $\frac{1}{5}(\frac{1}{5}(\frac{1}{5}x)) = 6$; de donde el valor buscado será: $x = 5.5.5.6$ cm.

Solución numérica: Se sabe que la altura a la cual rebota la pelota es un quinto de la altura a la cual fue soltada, como 6 es la última altura, entonces la altura previa es: 6x5; y la altura previa en el segundo rebote es: 6x5x5; finalmente la altura inicial es: 6x5x5x5 cm.

Configuración de objetos y significados

En esta sección realizamos el análisis a priori de los objetos y significados matemáticos que se ponen en juego durante la actividad de solución del problema presentado en la sección anterior, e identificamos los potenciales conflictos de significado[10].

Tipos de objetos	**Significados**
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Lanzamos una pelota desde una cierta altura	Refiere una experiencia física y el valor desconocido (incógnita) de una cantidad
Rebota hasta un quinto de la altura a la que se lanzó	Establece la relación numérica entre la altura desde la que cae y la altura a la cual rebota; fracción 1/5
Si después de tres rebotes la altura alcanzada es 6 cm	La relación numérica se compone tres veces consigo misma, fracción de fracción, asigna una medida a la altura final alcanzada
$\frac{1}{5}(\frac{1}{5}(\frac{1}{5}x)) = 6$	Uso de la letra x para indicar la incógnita, expresión de la relación entre los datos, las condiciones y la incógnita

Conflictos potenciales:

- La fracción (1/5) actúa como operador (reducción) sobre una cantidad desconocida, se puede pensar que no es posible resolver el problema, dado que la altura desde la cual cae no se conoce.
- No se obtiene una equivalencia procedimental para la expresión “rebote” que en este caso equivale a “1/5”.
- No se interpreta la expresión “si después de tres rebotes” como una composición multiplicativa del operador consigo mismo.
- “La altura alcanzada es de 6 cm” no se interpreta como la última altura después de tres rebotes.
- La solución algebraica, expresada mediante la ecuación, presupone la puesta en acto de conceptos, propiedades y procedimientos, enmarcados en un juego de lenguaje y articulados para hallar el valor de la incógnita. Lo cual es un reto para los estudiantes por la coordinación entre las diferentes entidades primarias.

[10] Por razones de espacio, sólo se proponen algunos de los objetos, significados y conflictos potenciales asociados al problema propuesto.

Tipos de objetos	Significados
CONCEPTOS	
Fracción	Modo de expresar una parte de un todo dividido en partes iguales
Incógnita	Letra que se le asigna a un valor desconocido
Igualdad	Expresión matemática que relaciona dos números

Conflictos potenciales:

- No se utiliza la fracción como un todo dividido en partes iguales dado que no se conoce el "todo" inicial.

- Se identifica una cantidad desconocida pero no se opera sobre ella.

- No se identifican las dos cantidades que son iguales y no se plantea una relación entre ellas.

Tipos de objetos	Significados
PROPIEDADES	
Dada una cantidad que es el resultado de una reducción (a/b) de un número desconocido, podemos conocer el número	La suma de las partes da el total
La multiplicación de un número, diferente de cero, por su inverso multiplicativo da uno. Ponerlos en correspondencia con los conflictos potenciales	Despejar la incógnita

Conflictos potenciales:

- No se identifican las dos cantidades que son iguales.
- La fracción como operador no se usa cuando no se conoce el número sobre el cual se aplica el operador.

Tipos de objetos	Significados
PROCEDIMIENTOS	
Hallar la fracción de una cantidad	Dada la altura a la cual rebota, encontrar la altura desde donde se lanzó
Multiplicar el valor 6 por 5x5x5	Procedimiento numérico que permite encontrar la altura inicial a partir de la última altura, después de tres rebotes

Conflictos potenciales:

- No se identifica que 6 cm es el último rebote, que corresponde a un quinto de una cantidad puede encontrarse, al multiplicar por cinco, revertiendo la operación inicialmente aplicada de fraccionar entre cinco. Tensión entre dos enfoques del número racional: duplicador/partición y el amplificador/reductor (Behr et al, 1997).

Tipos de objetos	**Significados**
ARGUMENTOS	
Si 6 es la quinta parte de una cantidad desconocida, entonces podemos encontrar la cantidad desconocida	Relación entre el antecedente y el consecuente de la fracción, interpretada como operador
Si x es la altura inicial desconocida y cada vez que la pelota rebota, la altura se reduce en un quinto, y si rebota tres veces, entonces la altura final alcanzada será: $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right)$	Se relaciona la altura desconocida con el procedimiento que la transforma al reducir la altura cada vez en un quinto de la altura previa
Si la altura final alcanzada es de 6 cm y la altura final corresponde a la expresión algebraica del renglón anterior, entonces tenemos la relación: $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}x\right)\right)=6$	Se vinculan dos cantidades, que de acuerdo con el enunciado del problema, son iguales

Conflictos potenciales:

- No proponer la argumentación: si la pelota rebotó un quinto cada vez y si la altura alcanzada es de 6 cm entonces la altura desde la cual rebotó fue 6x5.

- No vincular las dos cantidades que se relacionan y que son iguales, la altura inicial que se reduce en un quinto cada vez que rebota y el valor final de la altura alcanzada en el tercer rebote.

Análisis de las respuestas al problema

Mostramos a continuación una tabla que resume las estrategias algebraicas y numéricas que usaron los estudiantes; posteriormente relacionamos los hallazgos sobre las estrategias con los objetos, significados y conflictos semióticos identificados en el análisis semiótico.

Dadas las limitaciones de espacio, discutiremos sólo algunos hallazgos relacionados con ciertas estrategias algebraicas y numéricas.

Tabla: Soluciones algebraicas y numéricas, frecuencia y porcentaje (n=65)

Soluciones algebraicas	Frecuencia	%	**Soluciones numéricas**	Frecuencia	%

(42 estudiantes de 65)		
Incógnita-ecuación-correcta	13	20
Incógnita-números-incorrecta	9	13,8
Expresión algebraica no involucra igualdad-correcta	18	27,7
Incógnita-ecuación-incorrecta	2	3
TOTAL parcial	**42**	**64.4**

(17 estudiantes de 65)		
Numérico multiplican por 5x5x5	6	9,2
Numérico sólo operan con los números 3,6 y 5	11	16,9
TOTAL parcial	**17**	**26.1**

No responden: **6** estudiantes de 65 **(9,2%)**

Soluciones algebraicas

Los estudiantes recurren mayoritariamente a procedimientos que involucran incógnitas y ecuaciones, pero tan sólo el 20% emplean un procedimiento que podría calificarse de algebraico (incógnita, ecuación, uso de propiedades para despejar la incógnita), el resto de los estudiantes de este grupo (44%) utilizan expresiones que pueden ser calificadas de algebraicas en cuanto al uso de una incógnita, pero no en cuanto al uso formal de una ecuación y al uso de propiedades para encontrar el valor buscado.

En las soluciones de este último grupo se evidencian conflictos de significados en las entidades primarias de elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos, respectivamente: "traducción", en términos numéricos de las expresiones "un rebote" y "si después de tres rebotes"; ecuación y hallar fracción de una cantidad.

Si consideramos que la comprensión algebraica se manifiesta mediante la manipulación de símbolos algebraicos, ecuaciones y estructura (Slavit, 1999), bien podríamos afirmar que cierto grupo de estos estudiantes, quienes usan la estrategia incógnita-números-incorrecta (13,8 %) no exhibe un razonamiento algebraico en el sentido referido por Slavit.

Soluciones numéricas

En relación con las respuestas de tipo numérico, encontramos que la estrategia correcta mayoritariamente usada fue: 6x5x5x5, exhibida por el 9,2 % de los estudiantes, quienes consideran implícitamente una ecuación aritmética en la que el procedimiento de solución consiste en invertir la operación; muestran habilidad para usar la operación en el contexto de cantidades desconocidas, que es una de las características que Slavit (1999) enumera para caracterizar el "sentido numérico".

Identificamos que el foco de atención de algunos estudiantes (16,9 % del total) fue el conjunto de datos numéricos: 6, 3 y 5, y la respuesta que brindaron fue una combinación de operaciones entre estos tres números, pero sin prestar atención a las condiciones sobre los números ni a las relaciones entre ellos.

En las soluciones de este grupo se evidencian conflictos de significado en las entidades primarias de elementos lingüísticos, conceptos, propiedades y argumentos, respectivamente: la traducción de las condiciones en operaciones; el concepto de igualdad en su aspecto relacional; dada una cantidad que es el resultado de una reducción (a/b) de un número desconocido, podemos conocer el número; relacionar dos cantidades que son iguales, una de las cuales se ha transformado.

De acuerdo con Garolafo (1992) estos estudiantes no exhiben un "enfoque numérico", en tanto que no usan estrategias ni para decidir cuales operaciones usar para resolver el problema ni para valorar el plan de solución del mismo.

Implicaciones para la formación de profesores

La relación entre el conocimiento del contenido matemático, el rol del maestro y los logros de los estudiantes ha sido motivo de estudio (Ball, 1990; Shulman, 1986).

La pregunta, ¿Cómo integrar el conocimiento de las matemáticas a la enseñanza de las mismas? es compleja y muchos autores han hecho propuestas diversas (Marks, 1990; Ball, 1990; Ponte et al ,1994). Steinbring (1999) afirma que el profesor de matemáticas debe ser consciente del status epistemológico específico del conocimiento matemático de los estudiantes.

En esta línea de pensamiento, consideramos, junto con Steinbring, la pertinencia del análisis epistémico como actividad realizada durante el proceso de planeación de una actividad de estudio por el docente, y que puede concretarse con las herramientas que el EOS ofrece.

Conclusiones

El análisis epistémico, en tanto que actividad adicional de planeación de una situación de estudio, es un instrumento para el formador de maestros para poner en evidencia los objetos y significados que podrían ser puestos en juego por los estudiantes, en el contexto de resolución de problemas.

Este conjunto de objetos y significados, así evidenciado, puede servir al formador de maestros para orientar la discusión grupal y para institucionalizar el conocimiento emergente.

En esta experiencia, se mostró que el uso del análisis epistémico de las soluciones expertas sirvió para prever algunos conflictos de significado que se identificaron posteriormente durante el análisis cognitivo de las respuestas de los estudiantes; algunos de tales conflictos han sido identificados en la literatura.

Sin embargo, se requiere adelantar otras indagaciones para perfeccionar el uso del análisis epistémico no sólo por parte del formador de maestros sino por parte de los maestros en formación. Es posible que el conjunto de objetos y significados emergentes durante la actividad de solución de un problema se manifieste sólo de manera declarativa y que las relaciones entre esos objetos y significados, con arreglo a la solución de un problema, surjan de manera incompleta y por tanto insuficiente para brindar una solución.

No obstante, estimamos que el análisis epistémico, convenientemente implementado, podría constituirse en una vía alternativa para brindar una aproximación a la pregunta: ¿Cómo integrar el conocimiento de las matemáticas a la enseñanza de las mismas? Consideramos que es importante ayudar a los maestros en formación a comprender que las decisiones instruccionales se toman sobre lo que se sabe acerca de la comprensión que los niños tienen, y que para lograr esto se requiere que los maestros sean conscientes de los objetos y significados matemáticos puestos en juego con motivo de una actividad matemática.

El grupo de investigación Teoría de la Educación Matemática de la Universidad de Granada está indagando las posibilidades que ofrece el uso de las herramientas del EOS para configurar una propuesta de un ciclo formativo sobre las matemáticas y su didáctica para estudiantes de magisterio.

REFERENCIAS

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, p. 132-144.

Blanton, M.L. y Kaput J.J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Behr, M.J., Khoury, H.A., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers´ strategies on a rational-number-as operador task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-89.

Borko,H., Frykholm, J., Pittman,M., Eiteljorg, E., Nelson,M., Jacobs, J., Koellner-Clark, K. y Schneider , C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *ZDM . The International Journal on Mathematics Education*, *37*(1), 43-52.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2006). Early algebra and algebraic reasoning. En Frank, K. Lester (Eds.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705, vol. 2). Reston: NCTM.

Font, J. D., Godino, J. D. and D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, *27* (2), 3-9.

Garolafo, J. (1992). Number-considerations strategies students use to solve word problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *14*(2), 37-50.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, *41*(3), 3-11.

McGowen, M. A. y Gary, D. (2001). Changing preservice elementary teachers´ attitudes to algebra. En Chick, Stacey, Vincent, & Vincent (Eds). *Proceedings of the*

12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra (Vol.2, pp.438-446). University of Melbourne, Australia.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Ponte, J.P., Matos, J.F., Guimaraes, H., Leal, L.C. y Canavarro, A.P. (1994). New mathematics curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 347-365.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought*?. Educational Studies in Mathematics, 37*, 251–274.

Steinbring, H. (1999). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*, 157–189.

Van Dooren W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education 6*, 27–52.