COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA, EL CASO DE UN ALUMNO UNIVERSITARIO

Eliécer Aldana Bermúdez
Universidad del Quindío-Armenia. Colombia
Mª Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca. España

Resumen

En esta comunicación se presenta un estudio sobre la comprensión del concepto de Integral Definida en el marco teórico APOE de un alumno de tercer curso de Licenciatura de Matemáticas de una universidad colombiana que estudia por primera vez este concepto. Para realizar este estudio, inicialmente se estableció una descomposición genética del concepto de Integral Definida lo que permitió identificar los elementos matemáticos que configuran el concepto. Posteriormente, se recogió información utilizando tres instrumentos distintos: un cuestionario, una entrevista y un mapa conceptual. El análisis de los datos se llevó a cabo identificando los elementos matemáticos que utiliza el alumno para resolver las diferentes tareas propuestas, las relaciones lógicas que establece entre ellos y el uso que hace de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. Esto nos ha permitido caracterizar el esquema conceptual relativo al concepto de Integral Definida de este alumno.

Palabras clave: Integral Definida, marco teórico APOE, abstracción reflexiva, desarrollo del esquema, descomposición genética.

Abstract

In this communication is presented a study within the theoretical framework APOS about the understanding of the concept of definite integral of a third-year student of Bachelor of Mathematics, in a Colombian university, the first time he studied the concept. Initially a genetic decomposition of the concept is established in order to identify the mathematical elements that make up the concept. Then the data were collected through three different instruments: a questionnaire, an interview and a concept map, it is to characterize the development of the outline of one of these students. The data analysis was conducted based on the identification of the mathematical elements used by the students when he solved the mathematical problems, logical relationships he established between them and the use he did of graphic, algebraic and analytic systems of representations. This has allow to characterize the conceptual scheme that has this student related to the concept of definite integral.

Key words: Defined integral, theoretical frame APOS, reflective abstraction, development of the scheme, genetic decomposition.

Aldana, E; González, M. T. (2009). Comprensión del concepto de Integral Definida, el caso de un alumno universitario. En González, M. J; González, M. T; Murillo, J (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM*. Santander.

Antecedentes y marco teórico

El concepto de Integral Definida es uno de los conceptos esenciales dentro del Análisis Matemático pero, en general, los resultados que se han obtenido en diversas investigaciones acerca de este concepto reflejan una ausencia de comprensión por parte de los alumnos. Así, en una de las investigaciones pioneras en torno a este concepto Orton (1983) comprueba que los alumnos son capaces de realizar cálculos algebraicos en los que intervienen las integrales pero no son capaces de comprender el papel que juega el límite en la definición de este concepto y no son capaces de dotar de significado a los símbolos que se utilizan en estos cálculos. Mundy (1984) por otro lado presenta el análisis de un cuestionario en el los alumnos debían evaluar diferentes integrales como $\int_{-3}^{3} |x+2|\,dx.$ seleccionando la respuesta correcta entre varias opciones, pero obtuvo un número muy reducido de respuestas correctas. Por su parte Calvo (1997) en un cuestionario pasado a estudiantes de primer curso de Cálculo observa que los alumnos identifican la Integral Definida con el cálculo de áreas por lo que si la integral es negativa tienden a cambiar el signo. Rasslan y Tall (2002), exploran la imagen del concepto (Vinner, 1991) de Integral Definida que tienen los estudiantes de bachillerato a través de un cuestionario, concluyendo que muy pocos alumnos responden correctamente a las preguntas por lo que sugieren introducir este concepto a partir de experiencias previas de los alumnos. Para otros investigadores Czarnocha et al. (2001) es esencial la coordinación entre el esquema visual de la suma de Riemann y el esquema de los límites de la secuencia numérica para el desarrollo de una comprensión del concepto de Integral Definida. Para decidir y distinguir si los estudiantes llegan a una verdadera comprensión de la definición del concepto de Integral Definida en lugar de tener sólo una percepción empírica de la integración Paschos et al. (2006) desarrollaron un estudio de caso sobre la abstracción reflexiva en la construcción del concepto de Integral Definida, con una estudiante universitaria.

A partir del conocimiento de estas dificultades y de los mecanismos de construcción del concepto se han realizado diferentes propuestas de enseñanza del concepto de Integral como la de Turégano (1994) que propone como alternativa enseñarla utilizando la génesis histórica del concepto, comenzado con el concepto de integral de forma independiente de la diferenciación y como primera introducción al límite. Partiendo de un análisis epistemológico del concepto de integral y, de las aportaciones de matemáticos tales como Cavalieri, Wallis y Roberval, Dubinsky, et al. (2000) diseñan una instrucción para estudiantes universitarios concluyendo que los estudiantes muestran una visión diferente que la desarrollada por la instrucción habitual. Depool (2004) utiliza las nuevas tecnologías para desarrollar la comprensión del concepto de Integral Definida de estudiantes universitarios y definir un modelo de competencia cognitivo de la Integral Definida. En este mismo sentido, Camacho et al. (2008), utilizan software en un curso de ingeniería para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de partición, refinamiento, aproximación y límite. A partir del diseño de una ingeniería didáctica González-Martín (2006) para los primeros cursos universitarios en torno al concepto de integral impropia trata de mejorar la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes.

En nuestro caso vamos a tratar de comprender cómo se produce el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida en alumnos universitarios que han recibido una instrucción previa.

El marco teórico en el que se ha desarrollado esta investigación es la teoría "APOE", desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores **R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducation **C**ommunity (**RUMEC**), basada en la noción de abstracción reflexiva (Piaget y García, 1982) y modificada para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado. Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000a) y Asiala et al. (1996) consideran que los sujetos realizan ciertas construcciones mentales para comprender los conceptos matemáticos. Estas construcciones mentales se denominan: acciones, procesos, objetos y esquemas y se logran mediante diferentes mecanismos como: interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, **y** tematización (Dubinsky, 1991).

El refuerzo de la teoría APOE con los tres niveles de desarrollo del esquema propuestos por Piaget y García (1982), ha llevado a mejorar la comprensión y explicación del concepto de esquema (Dubinsky y MacDonalds, 2001). DeVries (2001), caracteriza los niveles de desarrollo de un esquema como:

- **i**ntra, cuando sólo se identifican aspectos individuales aislados
- **í**nter, se caracteriza por la construcción de relaciones y
- **t**rans, se adquiere cuando se tiene construida una estructura completa, las relaciones descubiertas en el ínter son comprendidas dando coherencia al esquema.

En opinión de Baker et al. (2000), el uso de estos niveles para analizar el conocimiento de los estudiantes ayuda a los investigadores a considerar la riqueza de las situaciones y de los problemas de investigación. Asimismo, el primer paso para llegar a comprender un concepto matemático tiene que ver con la descomposición genética, descrita en la teoría APOE de Dubinsky (1996) y Asiala et al., (1996).

Metodología

Esta investigación forma parte de un estudio más amplio desarrollado en Colombia en Armenia en la Universidad del Quindío para caracterizar el desarrollo del esquema de Integral Definida de un alumno que cursa tercer año de Licenciatura de Matemáticas y que acaba de estudiar por primera vez el concepto de Integral Definida.

Para diseñar los instrumentos utilizados en la recogida de la información, inicialmente se llevó a cabo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto de Integral Definida lo que permitió determinar los elementos matemáticos que configuran este concepto matemático y establecer una descomposición genética previa de dicho concepto. Posteriormente, se diseñó un precuestionario que fue analizado por expertos en Didáctica del Análisis y aplicado de forma experimental. A partir del informe de los expertos y de los resultados de los alumnos se hizo el cuestionario definitivo que constaba de ocho tareas y que fue contestado por once alumnos.

Posteriormente se diseñó el guión de una entrevista semiestructurada (Ginsburg et al., 1983) con el objetivo de que nos permitiera obtener información para describir y explicar el nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida de cada alumno. Dichas entrevistas fueron audiograbadas. Finalmente, los alumnos realizaron un mapa conceptual, sobre el concepto de Integral Definida.

Análisis y resultados

A continuación describimos y explicamos el proceso seguido para el análisis de los datos que se realizó utilizando conjuntamente los tres instrumentos descritos anteriormente: cuestionario, entrevista y mapa conceptual. Desde el marco teórico APOE, consideramos que el desarrollo del esquema pasa por tres niveles determinados por las relaciones lógicas que un sujeto es capaz de establecer y por el número de elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos que utiliza en la resolución de las tareas. Esto nos ha permitido caracterizar los diferentes niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida en este alumno. Para cada uno de los niveles se describen las características que lo determinan y se muestra cómo el alumno manifiesta dichas características en la resolución de las tareas.

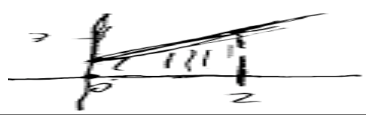
a) Nivel Intra

Este nivel se caracteriza porque el estudiante no establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que utiliza, menciona elementos matemáticos de memoria como resultado de la instrucción previa, pero cuando intenta utilizarlos lo hace de forma aislada o comete errores. Por ejemplo para resolver la tarea 4:

Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \lvert 2x-1 \rvert$, en el intervalo $[0, 2]$ y el eje x. Justificar la respuesta.

El alumno debería establecer una conjunción lógica entre los elementos matemáticos "el área como aproximación", "la Integral Definida" y "las propiedades de la Integral Definida", concretamente la propiedad relativa a la unión de intervalos. Cuando resuelve el cuestionario afirma "con valor absoluto no ha trabajado mucho" y esto lo pone de manifiesto al representar gráficamente la función pues utiliza conjuntamente la definición de valor absoluto con los conocimientos que tiene de la representación gráfica de funciones lineales, resultando la siguiente gráfica y el comentario posterior:

GRÁFICO



A1: La función siempre va a ser positiva.
I: ¿Por qué positiva?
A1: Porque el valor absoluto de un número es positivo.
I: ¿Cuál es la región que va a considerar, cómo la grafica?
A1: Le di dos valores y la trace, sin embargo a través de la integral no es necesario conocer la gráfica. **(A1E4).**

Esta gráfica va a condicionar su razonamiento posterior puesto que va a tratar la integral como si se tratara de una función lineal olvidando que hay un valor absoluto.

I: ¿Por qué al utilizar la integral no es necesario conocer la gráfica?
A1: Porque, sabemos que la integral geométricamente es el área de esa región y la curva es continua en ese intervalo.
I: ¿Cuántas integrales necesitaría?
A1: Una Integral Definida, de 2x-1 con respecto a x entre 0 y 2 y a esa integral le aplicamos las propiedades.
I: ¿Qué propiedades aplicaría?
A1: La propiedad de la suma, que dice que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales definidas, esta es la propiedad aditiva con respecto al integrando. Qué viene siendo de 0 a 2 de 2x, menos la integral de 0 a 2 de 1 con respecto a x, y ahí podemos efectuar la integración. **(A1E4)**

ALGEBRAICO

$$\int_0^2 2x-1dx = \int_0^2 2x - \int_0^2 1dx =$$

Considera que como la función es continua es integrable pero no tiene en cuenta la función valor absoluto que debe integrar planteándola como si se tratara de una función lineal, utiliza la propiedad de la integral de una suma erróneamente que no corresponde a la que se plantea en la tarea, no utiliza paréntesis en el integrando y olvida puntualmente el diferencial. Esto demuestra que el estudiante recuerda elementos matemáticos de forma aislada pero no sabe utilizarlos correctamente y por esta razón no es capaz de resolver la tarea ni de forma gráfica, ni de forma algebraica.

Cuando trata de resolver la tarea 7c:

Considerar el valor de verdad o de falsedad de la afirmación $\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = (-1) - 1 = -2$ y caso de ser falsa, explicar por qué o dar un contraejemplo.

En el cuestionario utiliza cómo único argumento para justificar el valor de falsedad de la afirmación el signo negativo de la respuesta.

F ya que el valo debe ser positivo

En la entrevista manifiesta que el valor de verdad de la proposición está determinado por el signo de la respuesta, señalando que es incorrecta si se considera la Integral Definida como un área puesto que el resultado es negativo y correcta si se trata de la Integral Definida simplemente como un cálculo algebraico. Además, durante la entrevista realiza incorrectamente el cálculo de la integral cuando quiere comprobar la veracidad de la afirmación planteada en la tarea y no es capaz de dar un resultado.

A1: Acá, la puse falsa.
I: ¿Está de acuerdo con ese valor?
A1: La integral como le decía esta bien hecha pero…
I: ¿Está seguro que esta bien hecha?
A1: Integrando si está bien hecha, pero el valor no (calcula en la hoja)
I: ¿Quiere decir que el problema está es en el signo de la respuesta?
A1: Si me piden hallar un área está mal, pero si me piden hallar la integral está bien.
I: ¿Qué le plantean en este ejercicio?
A1: La integral, entonces está bien hecha y contesté que es falsa.
I: Entonces, no esta de acuerdo hoy con la respuesta.
A1: No, no estoy de acuerdo.
I: ¿Por qué?
A1: Porque esta bien hecha la integral. **(A1E7c)**

$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = -2x^{-1}\Big|_{-1}^{1} = -\left[1-(-1)\right] = -$

Por la forma como intenta resolver la tarea está utilizando el elemento matemático "la Integral Definida" como un cálculo algebraico mediante la aplicación de la regla de Barrow, mostrando en este caso una <u>concepción errónea</u>, porque no tiene en cuenta la discontinuidad de la función.

Este nivel de desarrollo del esquema se caracteriza, además, porque los <u>intentos por establecer relaciones lógicas</u> entre elementos matemáticos mediante la conjunción lógica no son correctos, o no son concluyentes. Este alumno intenta en diversas ocasiones utilizar conjunción lógica entre los elementos matemáticos representados de forma gráfica y algebraica y aunque algunas veces recuerda algún elemento matemático de manera analítica comete muchos errores. Así en la tarea 3:

Sea **R**, la región entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el eje x, en el intervalo $[0, 4]$. Utilizar particiones para aproximar el valor del área de la región **R** y justificar la respuesta.

En el cuestionario menciona los siguientes elementos matemáticos de forma analítica: "el área como aproximación" realizando una partición del intervalo y planteando una suma de Riemann, "el área como límite de una suma" describiendo el límite de una suma Riemann y "la Integral Definida" para calcular el valor exacto del área de una región, pero no establece conexión entre estos elementos porque no es capaz de utilizarlos conjuntamente en la resolución de la tarea:

Particionamos a $[0,4]$ regularmente $\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$

$AR \cong \sum_{k=1}^{4} (x_k)^2 \Delta x =$

Justificación Por medio de la partición haciendo que la $\|P\| \to 0$ $(n \to \infty)$ Norma tienda a cero la integral definida es el valor exacto del Área de la región

de una suma de Riemann que es igual

En la entrevista se evidencia un intento de establecer la "conjunción lógica" entre los elementos matemáticos "el área como aproximación", "el área como límite de una suma" y "la Integral Definida", utilizando el sistema de representación gráfico puesto que menciona la construcción de rectángulos, el sistema algebraico al utilizar la fórmula del área del rectángulo y el analítico nombrando las particiones y el límite de las sumas de Riemann; pero los intentos por establecer una relación lógica vienen acompañados de errores como cuando afirma que el límite le permite aproximar, y no logra concluir la tarea.

A1: Partí el intervalo [a, b] en varios subintervalos en este caso lo dividí regularmente, para hallar la altura de los rectángulos evaluando la función.
I: ¿Cómo obtendría las áreas de los rectángulos?
A1: De base la longitud del subintervalo que en este caso viene siendo 1, por la altura que seria la función evaluada en el extremo derecho de cada uno de los subintervalos.
I: ¿Cuántos rectángulos debe trazar para aproximar el área?
A1: ¿Para aproximar el área? A través de un proceso del límite, puedo hallar la aproximación.
I: ¿Cómo es un proceso de límite, qué quiere decir con esto?
A1: A través de la integral, como proceso limite de una sumatoria de Riemann, cuando la norma tienda a cero.
I: ¿Qué quiere decir con esto, cómo lo haría con el proceso del limite de la sumatoria, qué tal si pasa de la gráfica a lo analítico?
A1: Del límite cuando la norma tienda a cero, sabemos que la norma es la medida que tiene el subintervalo mayor, entonces haciendo que la norma tienda a cero, a través del proceso de límite de esa sumatoria. **(A1E3).**

b) Nivel ínter

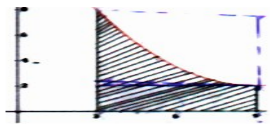
En este nivel se comienza a establecer relaciones lógicas entre elementos matemáticos en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico. El alumno es capaz de establecer la conjunción lógica entre elementos matemáticos cambiando generalmente de sistema de representación. El protocolo siguiente corresponde a la tarea 1:

El área de la región rayada es mayor que **12** y menor que **48**. ¿Por qué? ¿Puede dar valores más ajustados? ¿Cuáles? ¿Cómo los obtiene?

Durante la entrevista se pone de manifiesto que el estudiante utiliza el elemento matemático "el área como aproximación" de forma gráfica y algebraica usando dos rectángulos, uno circunscrito de base 6 unidades (9-3) y de altura 8 unidades para justificar la cota superior, y un segundo rectángulo inscrito también de base 6 unidades y de altura 2 unidades para justificar la cota inferior.

A1: Acá preguntan que si el área de la región rayada es mayor que 12 y menor que 48, conteste que si, porque el área del rectángulo donde la función alcanza su valor máximo absoluto es igual a 48 unidades de medidas cuadradas y el área del rectángulo donde la función tiene su valor mínimo absoluto es igual a 12 unidades cuadradas y como el área de la región rayada está entre el área del rectángulo grande y el valor del área del rectángulo pequeño, por eso es que es mayor que 12 y menor que 48.
I: ¿Qué más haría para ajustar las cotas?
A1: Aquí ya tengo las dos áreas.
I: ¿Cuáles son las dos áreas?

A1: El área del rectángulo mayor que es 6 *por* 8 *igual a* 48 *unidades cuadradas y el área del rectángulo menor que viene siendo 12, seis por dos doce, porque es el mismo y tiene la misma base.*
I: ¿Qué podría hacer, me podría explicar sus argumentos?
A1: Si señor, tendría el rectángulo mayor que viene siendo hasta el valor 8 que tiene la función f *evaluada en* x *que es igual a 8, entonces la altura viene siendo la del rectángulo mayor que es 8, y la base viene siendo 9 menos 3* (se refiere a la gráfica del cuestionario). **(A1E1).**



Pero, además utiliza el elemento matemático "el teorema del valor medio" gráfica y algebraicamente, cuando usa el punto medio de la altura y lo multiplica por la diferencia de los extremos de la longitud de la base; relaciona mediante la conjunción lógica los elementos matemáticos "el área como aproximación" y "el teorema del valor medio", tanto en el sistema de representación gráfico como el algebraico.

I: ¿Qué quiere decir esta expresión que tiene aquí $AR = 4(9-3) = 24$ *?*
A1: $AR = 4$ *, el área del rectángulo.*
I: ¿De dónde obtiene el valor de 4?
A1: Cuando la función toma el valor de $f(4)$*, aplicando el valor medio para integrales.*
I: ¿Cómo toma ese valor medio?
A1: Porque la función está entre $0\,y\,8$*, entonces saqué el valor promedio.*
I: ¿Para qué le sirve ese valor?
A1: Con base en ese valor promedio y la longitud de la medida del segmento del intervalo puedo aplicarle el valor medio para integrales y así puedo hallar el área de la región.
(A1E1).

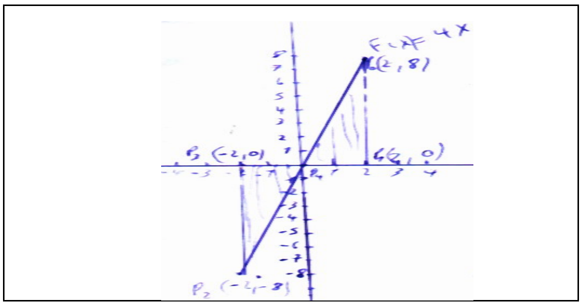
$$AR = 4(9-3) = 24$$

También es capaz de aplicar algunas <u>relaciones lógicas entre elementos matemáticos dentro de ciertos sistemas de representación</u>. Por ejemplo, en la tarea 2 es capaz de utilizar la conjunción lógica los elementos matemáticos "el área como aproximación" y "la Integral Definida" en los sistemas de representación gráfico y algebraico:

Sea **R**, la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = 4x$ y el eje x, en el intervalo $[-2, 2]$. Dibujar la gráfica, calcular gráficamente el área de la región, calcular la $\int_{-2}^{2} 4x\, dx$ ¿Son iguales los dos resultados anteriores? Justificar cada paso.

En el protocolo se evidencia que utilizó correctamente el elemento matemático "el área como aproximación" gráficamente, porque realizó correctamente la gráfica de la función, formó triángulos bajo la gráfica, aplicó la fórmula del triángulo y utilizó los criterios de congruencia de triángulos para determinar el valor del área total bajo la gráfica.

I: ¿Podría explicarme cómo ha resuelto la tarea?
A1: Si señor, grafiqué hallando puntos, dándole valores a la función $f(x) = 4x$.
I: ¿Qué figura obtuvo?
A1: Una recta.
I: ¿Qué figura geométrica se formó bajo la recta?
A1: Entre el eje x *y la recta que va del origen hacia arriba, resulto un triángulo e igualmente de la recta hacia abajo, otro triángulo.*
I: ¿Cómo calcula el área geométricamente?
A1: Sé que el área del triángulo es igual a base por altura sobre 2, entonces me dio 8, como los triángulos $p_0 \ \ p_1$ *y* p_4, *y el triángulo* $p_4 \ \ p_3 \ \ p_2$ *son congruentes y equivalentes, el valor del área de la región es igual a 16.*
I: ¿Por qué son congruentes?
A1: Por ángulos opuestos, por el teorema lado, ángulo, lado, porque tienen igual lado e igual ángulo, entonces el área me dio 16 unidades cuadradas.
(A1E2).

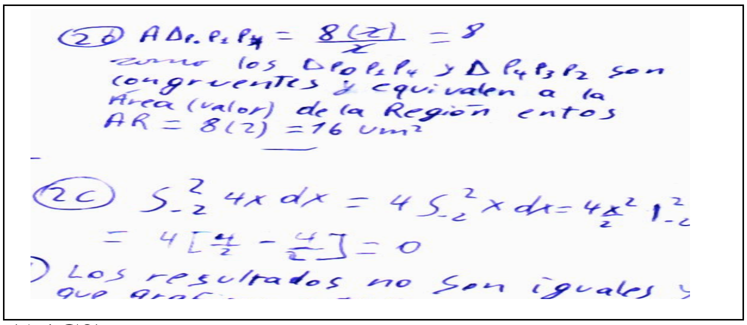


(A1C2)

Desde el punto de vista algebraico utiliza la conjunción lógica entre los elementos matemáticos "el área como aproximación", "la Integral Definida" y "las propiedades de la integral" porque mediante la fórmula del área del triángulo calcula el valor de la Integral Definida. Además distingue entre la integral como área y la integral como cálculo algebraico usando los sistemas de representación gráfico y algebraico.

I: ¿Cómo calculó la integral?
A1: Aplicando primero la propiedad de la Integral Definida de una constante por una función que es igual a la constante por la Integral Definida de la función.
I: ¿Qué valor obtuvo?
A1: Acá me dio cero.
I: ¿Significan lo mismo el área y la Integral Definida?
A1: No.
I: ¿Por qué?

A1: La Integral Definida viene siendo el proceso del límite de una sumatoria de Riemann y geométricamente es el área de una figura plana. **(A1E2).**



(A1C2)

Otra de las relaciones que aplica en la resolución de la tarea 2, es la condicional cuando relaciona el elemento matemático "la Integral Definida" con las propiedades de las funciones positivas y negativas:

I: ¿Qué le piden aquí, calcular el área o calcular la integral?
A1: Calcular la integral, pero el área debía dar 16.
I: ¿Por qué le debe dar 16, qué le piden calcular el área o calcular la integral?
A1: Porque aplicándole la propiedad de las funciones cuando están debajo del eje x le cambiamos el signo para que sea el área de la función.
I: ¿Por qué al calcular el área le dio un valor y cuando calculó la integral dicho valor dio cero?
A1: Porque, no le apliqué la propiedad cuando la función esta por debajo del eje x y cuando la función esta por encima del eje x que viene siendo desde -2 hasta 0, más la integral desde 0 hasta 2.
I: ¿Cuál es la diferencia entre calcular el área y calcular una Integral Definida, podría explicármelo?
A1: Es cuando vamos a aplicarle las propiedades de la integral.
I: ¿Cuáles propiedades?
A1: La propiedad de la suma con respeto a los limites de integración, en este caso hasta cero, debemos tener en cuenta lo que hacemos, porque entonces integrando no vamos a obtener un resultado acorde a lo que nos plantea el gráfico o hallar el área aplicando la integral.
(A1E2).

Aquí, de nuevo pone de manifiesto que si desea calcular un área hay que distinguir si las funciones son positivas o negativas y en otro caso utilizar la propiedad de la unión de intervalos. El alumno utiliza los elementos matemáticos "el área como aproximación" y "la Integral Definida" en forma gráfica y algebraica, establece la condicional cuando menciona las propiedades que debe aplicar a la integral para considerarla como área, puesto que está haciendo uso implícitamente de la propiedad que nos permite calcular el área determinada por una función cuando no es estrictamente positiva.

También demuestra un comienzo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico**.** Esto sucede cuando el estudiante además de establecer relaciones lógicas entre elementos matemáticos, también trata de utilizarlos desde los sistemas de representación gráfico, usando figuras geométricas planas, algebraico aplicando fórmulas del área de figuras planas, y analítico planteando particiones del intervalo, sumas de Riemann y el límite de las sumas.

El siguiente protocolo corresponde a la tarea 8, en que se le dice:

¿Cuál es el significado matemático de Integral Definida de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$?

En el protocolo se manifiesta que el estudiante describe una imagen del concepto de Integral Definida asociando diferentes elementos matemáticos y utilizando las relaciones lógicas, desde los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico, aunque no logra integrar o establecer una síntesis de estos sistemas de representación, porque utiliza los elementos matemáticos generalmente de forma algebraica, algunos los usa de forma gráfica y otros tan sólo los menciona de forma analítica.

> *I: ¿Cuál es su propia definición de Integral Definida?*
> *A1: Es hallar el área, geométricamente o es hallar el área que hay entre una curva y una recta o entre varias curvas en un intervalo.*
> *I: ¿Entonces una Integral Definida es un área?*
> *A1: Geométricamente es un área, pero en si es un proceso limite de una suma Riemann.*
> *I: ¿Si tuviera que explicar el concepto de Integral Definida cómo lo haría?*
> *A1: Comenzaría explicándole qué es una partición, luego construiríamos los rectángulos que tienen como longitud la partición del subintervalo y de altura la función evaluada en el extremo derecho de cada subintervalo, así hallaríamos una aproximación del área de esa curva y luego hallamos la suma de todas las áreas de cada uno de los rectángulos y obtendremos la aproximación de esa área, luego a través de un proceso del límite de esa suma Riemanniana* (hace referencia al paso del límite a la definición analítica de Integral Definida).
> **(A1E8).**

Conclusiones

De manera global, por la forma como resolvió las tareas a lo largo de todo el cuestionario, el modo de justificar las respuestas en la entrevista y la comprensión del concepto de Integral Definida que refleja en el mapa conceptual, podemos afirmar que el alumno utiliza los elementos matemáticos que constituyen el concepto de Integral Definida desde un pensamiento algebraico y operativo, presenta algunas dificultades con las representaciones gráficas y recuerda de memoria algunos elementos matemáticos dados de modo analítico pero no es capaz de utilizarlos o tiene concepciones erróneas. Establece algunas relaciones lógicas (conjunción y condicional) entre elementos matemáticos dados generalmente de modo gráfico y algebraico y no hay evidencias en este nivel de desarrollo del esquema de Integral Definida que utilice la relación del contrarrecíproco y demuestra los primeros comienzos de síntesis entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico por la forma cómo justifica la resolución de algunas tareas

La tabla siguiente representa los diferentes niveles de desarrollo del esquema, las características identificadas en cada nivel de desarrollo, los elementos matemáticos que utiliza en cada categoría y los sistemas de representación que coordina en los procedimientos de resolución de las tareas, lo que nos permitió caracterizar el desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida de este alumno.

NIVEL	**RELACIONES LÓGICAS**	**ELEMENTOS MATEMÁTICOS**	**SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN**
INTRA	**Recordar elementos matemáticos de forma aislada.**	**El área como aproximación** -Aproximación del área de una región plana, -fórmula del área del rectángulo, -partición del intervalo. **La Integral Definida** -La Integral Definida como cálculo algebraico, -la Integral Definida como área de una región, -continuidad de una función. **Las propiedades de la Integral Definida** -Integrales especiales, -unión de intervalos, -regla de linealidad. -de la constante, **Los teorema fundamentales y del valor medio** -La regla de Barrow.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
	Mostrar concepciones erróneas de algunos elementos matemáticos.	**El área como límite de una suma** -El estudiante tiene una concepción de límite como aproximación, -Asocia el límite con la discontinuidad y lo define como “un valor donde la función presenta un problema o no está definida”. **La Integral Definida** -Utiliza la integral como cálculo algebraico sin tener en cuenta las condiciones necesarias para poder aplicar la regla de Barrow. -Utiliza el reciproco de la condición suficiente: **Si f *es continua en* $[a, b]$, *entonces* f *es integrable en* $[a, b]$. Algo que no es cierto.**	
	Utilizar un “intento de conjunción lógica” entre elementos matemáticos asociados a uno o más sistemas de representación, generalmente gráfico y algebraico.	**El área como aproximación** -Aproximación del área de una región plana, -fórmula del área del rectángulo, -partición del intervalo, -sumas de Riemann. **El área como límite de una suma** -límite de las sumas. **La Integral Definida** -la Integral Definida como área de una región.	
	Establecer la conjunción lógica entre elementos matemáticos cambiando generalmente de sistema de representación.	**El área como aproximación** -Aproximación del área de una región plana, -fórmula del área del rectángulo. **El teorema del valor medio** -El valor medio de una función.	

INTER	**Establecer la conjunción lógica entre elementos matemáticos cambiando generalmente de sistema de representación.**	**El área como aproximación** -Aproximación del área de una región plana, -fórmula del área del rectángulo. **El teorema del valor medio** -El valor medio de una función.	**Gráfico** **Algebraico** **Analítico**
	Aplicar algunas relaciones lógicas (conjunción y condicional) entre elementos matemáticos, generalmente usando los mismos sistemas de representación.	**El área como aproximación** -Aproximación del área de una región plana, -fórmula del área del triángulo. **La Integral Definida** -la Integral Definida como área de una región, -la definición analítica de la Integral Definida, -condición suficiente de existencia de la integral. **Las propiedades de la Integral Definida** -De la constante, -de las funciones positivas y negativas. **El teorema fundamental** -La regla de Barrow.	
	Demostrar un comienzo de síntesis de los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.	**El área como aproximación** -Aproximación del área de una región plana, -fórmula del área del rectángulo, -partición del intervalo, -sumas de Riemann. **El área como límite de una suma** -límite de las sumas. **La Integral Definida** -la Integral Definida como área de una región, -la definición analítica de la Integral Definida.	

Relaciones lógicas, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan los distintos niveles de desarrollo del esquema de Integral Definida en un alumno de tercer año de Licenciatura de Matemáticas

De acuerdo con el marco teórico y metodológico y teniendo en cuenta cómo utilizó las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos y los sistemas de representación, consideramos que este alumno se encuentra en el nivel ÍNTER de desarrollo del esquema del concepto de Integral Definida**.**

Referencias bibliográficas

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.J.; Dubinsky, E.; Mathews, D ;Thomas, K. (1996). A framework for research and development in ungraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education,* 2, 1 – 32**.**

Baker, B.; Coolí, L.; Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education***,** 31(5), 557 – 578.

Calvo, C. (1997). *Bases para una Propuesta Didáctica sobre Integrales.* Tesis de Maestría. Universitat Autónoma de Barcelona

Camacho, M., R. Depool y G. Sabrina (2008). Integral Definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática,* 20(3), 32-57.

Czarnocha, B.; Loch, S.; Prabhu, V.; Vidakovic, D. (2001). El Concept of definite integral: coordination of two schemas *Proceedings of the XXV Conference of the International Group of Mathematics Education,* 12 – 17.

Depool, R. A. (2004). *La Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo Integral en un Entorno Computacional. Actitudes de los Estudiantes Hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory *Glossary. Georgia Collage & State University. Milledgeville. http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html*. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dubinsky, E.; Czarnocha, B.; Loch, S.; Prabhu, Vrunda.; Vidakovic, D. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. *College Mathematics Journal.* 32 (2), 99-109.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática,* 8(3), 24-41.

Dubinsky, E. (2002a). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa.,* 3 (1), 47 – 70.

Dubinsky, E.; MacDonald, M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduated Mathematics Education Research. En D. Holton (eds.). *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study. 7* Dordrecht: Kluwer Academia Publisher, 273- 280.

González-Martín, A.S. (2006). *La Generalización de la Integral Impropia desde las Perspectivas Numérica, Gráfica y Simbólica Utilizando Entornos Informáticos. Problemas de Enseñanza y Aprendizaje.* Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Ginsburg, H. P.; Kossan, N. E.; Schwartz, R. & Swanson, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking**.** In H. P. Ginsburg (ed.): *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Mundy, J. (1984). Analysis of Errors of First Year Calculus Students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (eds.). *Theory Research and Practice in Mathematics Education. Proceedings, ICME 5. Working group reports and collected papers*, Nottingham: Shell Center, 170-172

Orton, A. (1983). Students` Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics.* 14, 1 – 18.

Paschos, Th. & Faumak, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral. A case study. En J. Novotna; H. Moraova; M. Kretke; N. Stehlikova (eds.) *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 337-344.

Piaget, J; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Rasslan, S.; TalL, D. (2002). Definitions and Images for the Definite Integral Concept. *Proceedings of the 26th PME*. 4, 89-96.

Turégano, P. (1994). *Los Conceptos en Torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal,* Tesis Doctoral. Universitat De València.

Vinner, S. (1991). The Rol of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, p. 65 – 81.