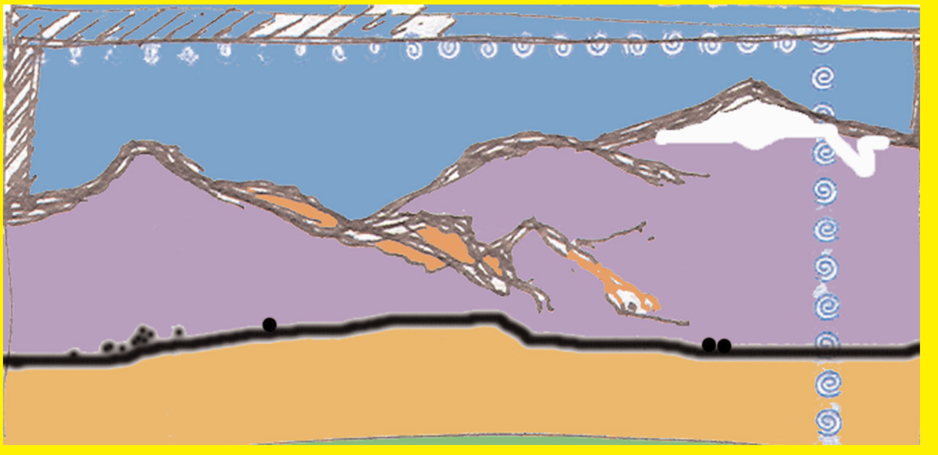


UNIVERSIDAD
DE ZARAGOZA

## GRUPOS DE INVESTIGACIÓN

# X SIMPOSIO DE LA SEIEM

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISBN. 978-84-96214-91-0.

# ÍNDICE

# PRESENTACIÓN

En el X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebrado en la sede de Huesca de la Universidad de Zaragoza, se presentó un amplio número de comunicaciones arbitradas que mostraron el marco general de los avances del campo de la Didáctica de la Matemática en España, así como una muestra de las de las diferentes líneas de investigación que se encuentran en pleno desarrollo. Todo ello ha sido recogido en las correspondientes Actas, publicadas el pasado año.

Además, al igual que en ocasiones anteriores, en el X Simposio se dispuso como viene siendo habitual, de un espacio de discusión que se repartió lo largo de los tres días en dos sesiones de hora y media, donde los Grupos de Investigación se reunieron para exponer y debatir sobre las comunicaciones que presentamos ahora en soporte informático. Es sabido que la discusión de estos trabajos, resulta útil por el debate constructivo que se fomenta en estos grupos tanto para los estudiantes de doctorado como para sus directores.

Los Grupos de Investigación son los siguientes: Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor; Investigación en Historia de la Matemática y de la Educación Matemática; Aprendizaje de la Geometría; Didáctica del Análisis; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria y Pensamiento Numérico y Algebraico.

En esta nueva publicación en formato CD se recogen las diferentes comunicaciones presentadas en los Grupos de Investigación, las cuales no han sido sometidas a arbitraje pero en las que se han incorporado algunas de las sugerencias y aportaciones de los asistentes a las exposiciones de las mismas durante su presentación en el Simposio.

Huesca julio de 2007.

Los editores.

# CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS EN TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL[1]

José A. Cajaraville
Universidad de Santiago de Compostela

Teresa Fernández Blanco
Universidad de Santiago de Compostela

Juan D. Rodino
Universidad de Granada

**Resumen**

En el marco de una investigación sobre evaluación y desarrollo de capacidades de visualización y razonamiento espacial con estudiantes de magisterio, en este trabajo presentamos el análisis a priori de una de las tareas incluidas en el cuestionario de evaluación utilizado. Aplicando herramientas conceptuales del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático identificamos las redes de objetos intervinientes y emergentes en la realización de la tarea, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales que pueden encontrar los sujetos. Algunas de estas hipótesis son comprobadas analizando las configuraciones cognitivas manifestadas por un estudiante en la realización de la tarea. Se concluye resaltando las posibilidades analíticas ofrecidas por las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico respecto de las nociones cognitivas usadas en las investigaciones sobre visualización y razonamiento espacial.

[1] Contribución al Grupo de Investigación, "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM. Huesca, 7-9 Septiembre 2006.

Cajaraville, J.A.; Fernández Blanco, T.; Rodino, J.D. (2007): Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 7-26.

## Nociones teóricas usadas en los estudios sobre visualización y razonamiento espacial

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996; ...). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

La mayor parte de las investigaciones se orientan a describir estilos y estrategias cognitivas, así como la evolución de las capacidades mentales de los sujetos ante tareas que requieren visualización espacial; se trata, por tanto, de trabajos con una orientación básicamente cognitiva, usando nociones como imagen visual, imagen conceptual, representaciones internas y externas, etc.

La noción de *imagen* juega un papel central en el estudio de la habilidad espacial. Clements y Battista (1992, p. 446) definen las imágenes como "representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y transformadas". Bishop[1] sugiere considerar dos habilidades diferentes relacionadas con la visualización: 'la habilidad de interpretar información figural', y 'la habilidad de procesamiento visual', las cuales considera como "un asunto muy individual" (Bishop, 1989, p. 8).

Pressmeg (1986) define la noción de "imagen visual" como un esquema mental que representa (depicting) información visual o espacial (p. 42). Sostiene la posición de que tales imágenes visuales se pueden tener tanto en presencia del objeto perceptible o en su ausencia. Su definición también permite la posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos se puedan disponer espacialmente (por ejemplo, los patrones numéricos).

La distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles y las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas es abordada con nitidez por Fischbein (1993) con la noción de *concepto figural*. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales

[1] Citado por Gorgorió (1998, p. 208).

(las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales. "Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección." (p. 143). Como afirma Fischbein, en las teorías cognitivas actuales, los conceptos y las imágenes se consideran básicamente como dos categorías distintas de entidades mentales.

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructos "imagen conceptual" (concept image) y "definición conceptual" (concept definition), para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual con relación a un concepto matemático. Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Con la expresión "imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Vemos que los autores citados se apoyan básicamente en la dualidad representación interna y externa para describir los conocimientos y habilidades matemáticas de los sujetos enfrentados a tareas matemáticas.

Consideramos que estas nociones son insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial, y de modo más general las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar, al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringida a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones internas o mentales[2].

Clement y Battista (1992) describen la geometría escolar como el "estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para

[2] El trabajo de Gorgorió (1998) centra la atención en identificar estrategias cognitivas, tanto visuales como no visuales, en tareas espaciales que requieren rotaciones de los cuerpos o figuras.

representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales" (p. 420).

En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte están los objetos espaciales, que se deben entender como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

En este trabajo vamos a explorar la variedad de objetos y conocimientos que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización y razonamiento espacial usando las herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años, y que describen como "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Batanero y Font, 2006)[3].

Consideramos que esta aproximación puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas teóricas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales), y las institucionales (sociales o culturales). Además la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intramatemáticos), lenguaje y sistema conceptual socialmente compartido.

El EOS puede aportar un punto de vista complementario para abordar cuestiones tales como:

- ¿Qué diversidad de conocimientos se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento espacial?
- ¿Porqué ciertas tareas que requieren visualización y razonamiento espacial presentan una dificultad elevada para determinados estudiantes?

[3] Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/

- ¿Cómo diseñar procesos de estudio de tareas de visualización que ayuden al desarrollo del razonamiento espacial?

En las secciones 3 y 4 de este trabajo vamos a tratar de avanzar algunas respuestas a estas cuestiones usando datos experimentales de un proyecto de investigación en curso, completando el análisis realizado en trabajos previos (Fernández, 2005). Comenzamos presentando una síntesis de las principales nociones teóricas introducidas en el Enfoque Ontosemiótico.

**El modelo epistémico – cognitivo del EOS**

Los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, "sistema de prácticas operativas y discursivas" y "configuración onto-semiótica", ambas en la doble versión personal e institucional. A continuación describimos brevemente estas nociones, además de la noción de función semiótica y los atributos contextuales[4], los cuales usaremos en el análisis de una tarea geométrica espacial.

[4] Remitimos al lector al trabajo de Godino, Batanero y Font (2006) para una síntesis más completa del EOS y ejemplos de aplicación.

### Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

En los trabajos sobre "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Godino y Batanero (1994; 1998) han introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal como las herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución I, y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De estas nociones se derivan las de "significado de un objeto personal" y "significado de un objeto institucional", que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente. Estas nociones se propusieron con la finalidad de precisar y operativizar las nociones de "relación personal e institucional al objeto" introducidas por Chevallard (1992).

### Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

*En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos en la actividad matemática matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentaciones).*

### Relaciones entre objetos: Función semiótica

Se adopta de Hjemslev (1943) la noción de función de signo[5] como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un *antecedente* (expresión, significante, representante) y un *consecuente* (contenido o significado, representado), establecidas por un *sujeto* (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o *código de correspondencia*. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos,

[5] Descrita por Eco (1979), como *función semiótica.*

convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo *representacional* (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), *instrumental* u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y *estructural* (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce (1996), se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos), pueden ser también signos de otras entidades.

### Configuraciones de objetos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

### Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein 1953) ocupa un lugar importante, junto con la de institución, como elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal- institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002). Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos.

En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos al razonamiento combinatorio.

Una de las expectativas de nuestra investigación es que las herramientas EOS permitirán describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas de visualización desde una nueva perspectiva y, por tanto, ayudará a identificar nuevos fenómenos de carácter ontosemiótico y antropológico.

La visualización y el razonamiento espacial (VRE) serán interpretadas como unas prácticas matemáticas específicas, operativas y discursivas, que se ponen en juego ante determinados tipos de tareas. En tales sistemas de prácticas intervienen y emergen unos objetos matemáticos específicos (lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos) que caracterizan este campo de actividad; las redes formadas por tales objetos y las relaciones entre los mismos constituyen "configuraciones" mediante las cuales se describen los sistemas de prácticas.

Consideramos que la epistemología y ontología que propone el EOS puede ayudar a superar una visión parcial y sesgada hacia el cognitivismo en las investigaciones didácticas, según la cual el conocimiento matemático se reduce básicamente a conceptos y procedimientos, entendidos como entidades mentales. No se distingue el papel específico de las proposiciones y argumentaciones y, sobre todo, no se explicita el papel clave de las situaciones – problemas, como origen y razón de ser de tales entidades, cuya construcción está, además, mediada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles.

## Configuración epistémica asociada a una tarea de visualización y razonamiento espacial

El objetivo de nuestra investigación es la evaluación de las habilidades de visualización y razonamiento espacial de los estudiantes de magisterio y el diseño, en una segunda fase, de trayectorias didácticas idóneas que favorezcan su desarrollo. Esto requiere, por tanto, la selección de tareas apropiadas a fin de construir un instrumento de evaluación y la elaboración de un banco de tareas para posteriores procesos instruccionales.

En esta sección vamos a realizar, a título de ejemplo, el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por un sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales.

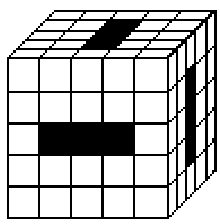
El análisis epistémico debe conducir a formular hipótesis sobre el comportamiento cognitivo de los sujetos, así como al diseño de trayectorias de estudio con alta idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

El análisis se realiza a dos niveles distintos y complementarios. En el primero se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico. A continuación aplicamos los atributos contextuales (nivel pragmático).

**Enunciado de la tarea: volumen de un cubo perforado**

5. Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88  b) 80  c) 70  d) 96  e) 85



**Solución experta**

| |
|---|
| 1) La forma de proceder será calcular el volumen total del cubo grande y restarle el volumen ocupado por los tres túneles.<br>2) Tomando el cubo pequeño como unidad, el volumen del cubo grande es 125 unidades (5 x 5 x 5 = 125) |

3) El volumen de cada túnel (ortoedro) es 15 unidades (3 x 5 x 1 =15).
4) Sin embargo existen intersecciones entre los tres cubos, por lo que si restamos a 125 el volumen de los tres túneles, descontamos varias veces algunos cubos pequeños. Es necesario visualizar cuáles son esas intersecciones.
5) El primer túnel considerado requiere restar 15 unidades; el segundo 15 menos 3 que ya habían sido restados con el primer túnel, o sea, 15 – 3 =12.
6) El tercer túnel requiere restar 15 menos 3 que ya habían sido restados del primer túnel y otros 3 del segundo. Pero con este cálculo restamos dos veces el cubo intersección de los tres; luego para el tercer túnel hay que restar 15 – 3 – 3 + 1 = 10
7) Por tanto, el volumen de los tres túneles será, 15 + 12 + 10 = 37, y el volumen del cubo con los túneles será, 125 – 37 = 88.

**Objetos y relaciones primarias**

En la tabla 3.1 resumimos los objetos y relaciones primarias que intervienen en la solución de la tarea, tanto previa como emergente.

*Tabla 3.1: Objetos y relaciones primarias en el problema del cubo perforado*

<table>
<tr><td rowspan="3">LENGUAJES:<br><u>Ordinario</u><br><u>(Términos y expresiones):</u><br>túneles, atraviesan, cubos, “Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande” , ortoedro, unidades, intersecciones</td><td rowspan="3">Expresan</td><td>SITUACIONES/ PROBLEMAS:<br>- Enunciado del problema y sus generalizaciones</td></tr>
<tr><td>Motivan     Resuelven</td></tr>
<tr><td>CONCEPTOS/ DEFINICIONES:<br><u>Previos:</u><br>- cubo; volumen; unidad de volumen; medida<br><br><u>Emergentes:</u><br>- volumen de un sólido perforado</td></tr>
</table>

Gráfico (Icónico):

Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos y tres túneles que lo atraviesan"

Simbólico (notaciones):

5 x 5 x 5 = 125

3 x 5 x 1 =15

15 – 3 =12

15 – 3 – 3 + 1 = 10

15 + 12 + 10 = 37

125 – 37 = 88

$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$

Ayuda

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:

Previos:

- el volumen de un cubo se determina elevando al cubo la longitud de su arista.
- el volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad.
- aditividad de la medida

-Número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos

Emergentes:

- En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 88

PROCEDIMIENTOS:

Operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación)

Justifican

ARGUMENTOS:

El cubo grande está formado por 125 cubitos

Hay tres túneles, cada túnel ocupa 15 cubitos

Se producen intersecciones de los túneles dos a dos y entre los tres

Deductivo: Teniendo en cuenta el volumen de un cubo y el de un ortoedro, y las intersecciones de los túneles se deduce que el volumen del cubo perforado es de 88 unidades.

**Objetos y relaciones secundarias**

Realizamos a continuación un segundo nivel de análisis de la solución del problema aplicando los atributos contextuales.

**Extensivo – Intensivo (particular – general):**

La tarea se puede generalizar de diversas maneras. Se puede suponer que el cubo tiene una arista de longitud L unidades, dejando los túneles de igual ancho, o cambiándolos a una longitud de A unidades. Se puede pedir encontrar una fórmula general en función de L, conectando esta tarea geométrica con el álgebra. También podemos considerar túneles de anchura variable y no iguales entre sí.

**Ostensivo – no ostensivo:**

El enunciado de la tarea pone en juego un icono del cuerpo geométrico cuyo volumen se pide calcular. El cubo perforado es una entidad mental (si se considera desde el punto de vista de un sujeto individual) e ideal (si se considera desde el punto de vista institucional matemático); en ambos casos es una entidad no ostensiva.

¿Reconoce el sujeto los objetos no ostensivos implicados en la situación (cubo, ortoedros, intersecciones, volúmenes, medida,...)?

La regla general que da la solución es una propiedad característica de ese cuerpo que, en sí misma, no es ostensiva, aunque se expresa de manera ostensiva con la escritura simbólica, $125 - 15 - 12 - 10 = 88$.

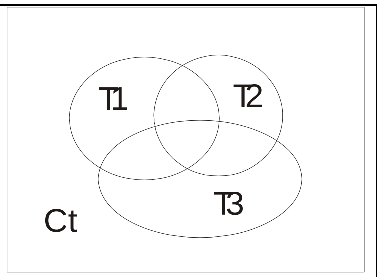
La visualización de las intersecciones de los túneles se puede favorecer mediante representaciones pictográficas. ¿Qué objetos ostensivos movilizan los sujetos enfrentados a esta tarea?

**Unitario – sistémico:**

Las nociones de cubo, ortoedro (túneles), y las fórmulas de cálculo de los volúmenes tienen un carácter unitario; son nociones previas que deben estar disponibles para el sujeto. En cambio el cubo perforado debe ser descompuesto en partes (forman un sistema). Si simbolizamos por Ct (cubo tunelado), C (cubo), T1, T2, T3 los tres túneles, el nuevo objeto emergente de esta situación se puede expresar con la siguiente operación conjuntista:

$$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$$

**Expresión – contenido (significante – significado)**

| | |
|---|---|
| El uso de representaciones conjuntistas y algebraicas puede ayudar a *visualizar* el problema y a generalizarlo.<br>$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$<br>La representación conjuntista refiere metafóricamente a los conjuntos de puntos interiores al cubo y a los túneles, así como a las operaciones realizadas. |  |

**Configuración cognitiva: estudio de un caso**

*Solución de un estudiante a la tarea del cubo perforado*

3- Empiezo contando el nº total de cubos: $5 \times 5 = 25 \times 5 = \boxed{125 \text{ cubos}}$

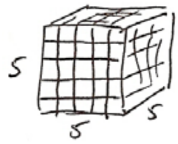
De la cara frontal hay que restar $3 \times 5 = 15$

" lateral " $3 \times 5 = 15$

" superior " $3 \times 5 = 15$

En total $= 125 - 45 = 80$ cubos

La respuesta es la c)




**Objetos y relaciones primarias**

En la tabla 4.2 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego SS en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

*Tabla 4.2: Configuración cognitiva de SS sobre el problema del cubo perforado*

LENGUAJES:

<u>Ordinario (Términos y expresiones):</u>
Contar; número total de cubos, cara lateral, cara frontal, cara superior, túnel

<u>Gráfico (Icónico)</u>:
Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos

<u>Simbólico (notaciones):</u>
Números y operaciones aritméticas
5x5=25x5 = 125
3x5 = 15
125 – 45= 80

Expresa

Ayuda

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
Problema del cubo perforado

Motivan

Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:

<u>Previos:</u>
- cubo; volumen, unidad de medida de volumen

<u>Emergentes:</u>
- Volumen de un sólido perforado

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:

<u>Previos:</u>
Propiedad asociativa de la multiplicación
El volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad.
Aditividad de la medida
Conservación del volumen

<u>Emergentes:</u>
- En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 80

PROCEDIMIENTO:
Operaciones aritméticas elementales
Cálculo mental (15+15+15=45)

Justifican

| | | |
|---|---|---|
| | | ARGUMENTOS:<br>El lado del cubo grande está formado por 5 cubitos.<br>El número total de cubos es 125<br>El número de cubos de cada túnel es 15<br>El número de cubos de los tres túneles es 45<br>El número de cubos que queda es el total menos la suma de los tres túneles<br>Quedan 80 cubos<br>Deductivo (informal): El argumento es incorrecto al no tener en cuenta las condiciones del problema (intersecciones de los túneles) |

**Objetos y relaciones secundarias**

**Extensivo – Intensivo (particular – general):**

La solución dada corresponde al caso en que los túneles no tuvieran intersecciones comunes, lo que podría ocurrir, pero no en el caso propuesto. No se perciben intentos de generalización en la respuesta de este estudiante, aunque tampoco se requieren.

El proceso seguido es deductivo (informal) sobre el caso particular, en este caso calculando el volumen del cubo y descontando los ortoedros sin tener en cuenta sus intersecciones. Por tanto, toda generalización que hipotéticamente pudiera hacer a un cubo de lado $L$ y un túnel de arista $A$ no le llevaría a una respuesta correcta.

El estudiante recuerda las reglas generales (definiciones) del volumen del cubo y los ortoedros y las aplica correctamente al caso particular dado.

La fórmula general para calcular el número total de cubos dada por la fórmula conjuntista que se propone en la configuración epistémica no forma parte de los conocimientos previos de los estudiantes.

**Ostensivo – no ostensivo:**

El estudiante utiliza un dibujo para señalar las dimensiones del cubo, no consiguiendo representar los túneles ni visualizar (lo que resulta esencial) las intersecciones. Su representación no ostensiva (mental) de la situación no tiene en cuenta que hay que descartar los cubos comunes a los tres túneles.

Las intersecciones de los túneles no son directamente visibles; es un caso de un objeto empírico no ostensivo. Hay intersecciones comunes dos a dos y entre los tres; la medida del tamaño de las intersecciones tiene que hacerse de manera indirecta, mediante razonamientos que expresen las relaciones entre las posiciones en que se hacen los túneles y sus dimensiones respectivas. Una justificación ostensiva (con lenguaje ordinario) de este tipo ciertamente es compleja. También se puede hacer una descripción ostensiva de las intersecciones mediante secciones planas del cuerpo realizadas en distintas posiciones, procedimiento que hemos encontrado en algunos estudiantes.

**Unitario – sistémico:**

El estudiante reconoce el cubo y el ortoedro como entidades unitarias a las cuales es capaz de atribuir un volumen, y hallar su medida. También sabe lo que es medir y la noción de unidad de medida. Pero el objeto "cubo perforado" es un sistema que hay que descomponer en sus elementos. No es suficiente con imaginar mentalmente (visualizar) que hay unas intersecciones comunes; hay que cuantificar (medir) el tamaño de un objeto no ostensivo, para lo cual hay que descomponerlo, "verlo" como un sistema formado de partes relacionadas de manera específica. Esta descomposición se puede apoyar mediante las secciones planas o reconociendo las circunstancias de aplicación de un teorema algebraico conjuntista.

**Expresión – contenido (significante – significado)**

La solución de la tarea requiere expresar las intersecciones de los túneles (objetos empíricos que aquí no son visibles) mediante un lenguaje (gráfico, secciones planas), conjuntista (solución experta), o con lenguaje ordinario. Esto permitirá determinar las medidas de tales intersecciones.

En el enunciado de la tarea la expresión "que atraviesan un cubo" tiene que ser interpretada por el lector con el apoyo parcial del dibujo, donde no se han representado "las salidas" de los túneles por las caras opuestas. Algunos sujetos a los que se ha propuesto esta tarea han pedido aclaración sobre si los túneles perforaban todo el cuerpo.

A pesar de que la tarea no ha sido resuelta correctamente el estudiante ha sabido interpretar una buena parte de la misma, atribuyendo significados a expresiones tales como, "túneles que atraviesan el cubo grande", a términos como "cubos pequeños" como unidades de medida, y a la pregunta, ¿Cuántos cubos pequeños quedan?, como indicación de hallar la medida del cubo perforado. El significado atribuido a unidad de medida y a medida por parte del estudiante se encuentra a nivel operatorio y no discursivo como puede observarse en su respuesta.

**Personal-institucional**

Esta tarea ha resultado difícil para este estudiante. La información que tenemos sobre el marco institucional en que realiza sus estudios nos permite afirmar que esta tarea es "atípica" entre las que habitualmente se proponen en las clases de geometría recibidas. Tampoco se han propuesto actividades que requieran hacer secciones planas de sólidos, o intersecciones entre conjuntos, por lo que estos procedimientos no forman parte de su práctica matemática habitual.

En cuanto al uso, a nivel operatorio y no discursivo, del significado de medida y unidad de medida se puede decir que la tarea no lo requiere explícitamente. Es posible que el estudio de la aritmética no se haya conectado de manera explícita con el tema de magnitudes, de manera que el significado personal puede tener limitaciones sobre la noción de volumen y unidad de volumen.

## Reflexiones finales

En este trabajo hemos aplicado dos niveles de análisis a una tarea geométrica, tanto a la solución experta (epistémica o institucional de referencia) como a la solución personal de un estudiante. En el primer nivel, que podemos designar como semántico, se identifican y articulan las entidades primarias (tipo de situación-problema, lenguajes utilizados, procedimientos, definiciones, proposiciones y argumentaciones) y un segundo nivel, de tipo pragmático, donde ponemos en juego los atributos o dualidades contextuales (extensivo – intensivo; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; personal – institucional).

La combinación de estos dos niveles de análisis aporta una herramienta potente para el estudio de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas y su secuenciación en los procesos de instrucción matemática. La tradicional distinción curricular entre conocimientos conceptuales y procedimentales queda ampliada con la introducción explícita de las entidades proposicionales y argumentativas, así como con los elementos lingüísticos y situacionales. Todas estas entidades quedan articuladas mediante la noción de configuración (epistémica y cognitiva) en la que se tiene en cuenta los diferentes roles o relaciones entre las mismas.

Desde el punto de vista cognitivo, la tradicional distinción entre representaciones internas (imágenes conceptuales, concepciones, etc.) y representaciones externas (gráficos, notaciones, símbolos, modelos concretos, etc.) se amplía con las dualidades contextuales. Lo interno y externo es sustituido por dos dualidades: ostensivo – no ostensivo y personal – institucional. Esto quiere decir que el pensamiento no queda constreñido al ámbito de lo mental, sino que las instituciones también “piensan” (faceta no ostensiva de los objetos institucionales); de este modo los conceptos tienen una realidad mental (subjetiva) y también una realidad institucional (objetividad relativa). Tales entidades están apoyadas, de manera constitutiva, en las entidades lingüísticas, que vienen a ser su faceta ostensiva.

La introducción de la dualidad extensivo – intensivo, aplicada a la formulación de una tarea, nos lleva a pensar en sus potenciales generalizaciones y a explorar sus posibilidades generativas de nuevos conocimientos y conexiones matemáticas. Este análisis es de gran interés para el diseño de procesos de instrucción ya que permite tener en cuenta el progresivo crecimiento y articulación de las matemáticas. Desde el punto de vista de los significados personales la distinción entre lo particular y lo general (extensivo – intensivo), aplicado no sólo a las tareas, sino también a las restantes entidades ayuda a explicar los conflictos semióticos que potencialmente surgen con el uso de elementos genéricos en el trabajo matemático.

La dialéctica antiguo – nuevo (Duady, 1986), los procesos de reificación (Sfard, 1991), la disponibilidad de los conocimientos previos necesarios para afrontar una tarea, en definitiva el carácter sistémico y recursivo del conocimiento matemático pueden ser descrito mediante la dualidad contextual que el EOS designa como *unitario – sistémico*, así mismo aplicable a los distintos tipos de entidades primarias.

El EOS asume una semiótica Peirceana de tipo triádico (expresión, contenido, criterio de correspondencia) donde los tipos de objetos que pueden ocupar cada una de las tres posiciones en el signo triádico pueden ser no sólo las entidades lingüísticas ostensivas, sino cualquiera de las restantes. Además, el tipo de relación entre expresión y contenido no se reduce al representacional (semiótico en un sentido estricto), sino el objeto antecedente tiene además una valencia instrumental. Con los gráficos, los modelos concretos no sólo se evocan las entidades conceptuales correspondientes, sino que también permiten la exploración y obtención de nuevos conocimientos.

**Referencias bibliográficas**

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1): 7-16.

Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 161- 2004). NCTM, Macmillan, P. C.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Fernández, T (2005). Incidencia de los conocimientos geométricos en la mejora de la percepción espacial. En B. Gómez, M. J. González, M. Moreno, P. Bolea, P. Flores y M. Camacho (eds.) *IX Simposio de la SEIEM*. Servicio de Publicaciones de Cantabria. Universidad de Cantabria.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J.

Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1): 3-36.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font. V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1): 39-88.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems, *Educational Studies in Mathematics* 35, pp. 207-231

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (1, pp. 3-19), Valencia.

Hershkowithz, R., Parzysz, B. y Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. En, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 161-201). Kluwer A. P.

Lean, G. A., Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics* 12 (1), 1–33.

Peirce, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987

Presmeg, N. C. (1998). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3): 42-46.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22: 1-36.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151-169.

# EL TRABAJO CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA PARA EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA Y LA SEMEJANZA EN LA E.S.O.

Consuelo Castro Vazquez

I.E.S.Terra de Trasancos

Enrique Narón de la Torre Fernández

Universidade da Coruña

Fernando Zacarías Maceiras

IES As Mariñas. Betanzos

**Resumen**

Descripción y explicación de la construcción de figuras para abordar el estudio de la trigonometría y de la semejanza en 4º curso de E.S.O.. Discusión sobre la utilización del Cabri o de los applets de Java en el aula. Valoración de la experiencia.

Castro Vazquez, C.; De la torre Fernández, E.N.; Zacarías Maceiras, F. (2007) El trabajo con Software de Geometría Dinámica para el estudio de la trigonometría y la semejanza en la E.S.O., En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. *27-40* .

## Introducción

El trabajo en las aulas de Educación Secundaria alrededor de los temas geométricos, se enfrenta a muchos problemas. Uno de ellos es la dificultad que se observa en los estudiantes, para que comprendan los enunciados de los teoremas y de las propiedades de los objetos geométricos, su significado y su justificación o demostración.

Fruto de esas preocupación, a inicios del curso 2005/2006, ha surgido dentro de la Asociación Gallega de Profesores de Educación Matemática (AGAPEMA) la idea de reunirnos periódicamente para idear materiales y modos de actuar en el aula de Educación Secundaria, con objeto de conseguir que los estudiantes adquieran una mejor y mayor comprensión de los contenidos geométricos. Necesitábamos un material que permitiera visualizar los contenidos relativos a trigonometría y semejanza y, siendo conscientes de que el mejor material es el 'real', es decir, el que se pueda 'manipular' en el espacio real, nos damos cuenta de las dificultades que ello acarrea para el desarrollo de las sesiones de aula, por lo que optamos por recurrir a los programas llamados de 'geometría dinámica', y entre ellos, el Cabri-Géomètre II Plus. Consideramos que no es mejor ni peor que otros conocidos (como Geometer's Sketchpad, Regla y Compás o Lugares). La última versión tiene una opción interesante, que consiste en poder grabar la sesión completa de lo que se hace para construir una figura, lo que permite al profesor poder analizar los intentos, los errores y las modificaciones que se hicieron durante todo el tiempo de trabajo. Aunque no experimentamos esta opción por falta de tiempo, la consideramos de mucho interés para introducir al alumnado en las herramientas de la geometría dinámica.

De este modo hemos mantenido reuniones quincenales, discutiendo y elaborando los materiales que luego se presentarían a los estudiantes en las aulas de 4º curso de E.S.O. Se buscó el modo de enfrentar a los estudiantes con las cuestiones geométricas que aparecen en el programa de la materia, de manera que lleguen a tener una visión más completa de cual es su significado y también que, visualizando distintas posiciones y movimientos de los objetos, se aproximen de alguna manera a su demostración.

Una posibilidad que utilizamos del Cabri es la opción de convertir las figuras Cabri en applets de Java, que se pueden insertar en una página web, y que permiten el movimiento de las figuras construidas. Esto tiene la ventaja de que el alumnado, al trabajar sobre estos applets, no tiene necesidad de conocer lo manejo del Cabri ni de construir por sí mismo las figuras que le permitirán comprender las propiedades geométricas con las que se pretende trabajar.

## Planteamiento del trabajo

Nuestro trabajo se desarrolló en las aulas de 4º A y 4º B de E.S.O. en el IES Las Marinas y de 4º A de E.S.O. en el I.E.S Tierra de Trasancos, y se centró en la manera de presentar algunos conceptos y procedimientos de semejanza y trigonometría y de apoyar otros presentados del 'manera habitual'.

Para ello realizamos la construcción de varios archivos Cabri con los que pretendemos acercar a los objetivos propuestos y comunicar de la mejor manera a los estudiantes, los conceptos y las propiedades y teoremas correspondientes.

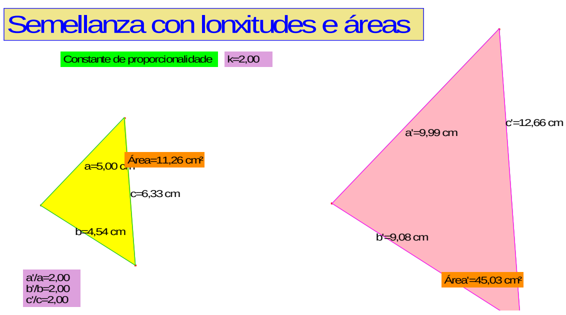
## Desarrollo

A continuación vamos exponer la serie de figuras construidas con Cabri y que proponemos para trabajar en las aulas, especificando para cada una de ellas los objetivos, las actividades propuestas, la manera de utilización y la valoración de lo realizado. Los tipos de archivos empleados son los de las versiones II e II plus de Cabri y los de páginas web:

*.fig (Cabri II plus). *.fig (Cabri II). *.htm (con applet CabriJava)

## SEMEJANZA

1. Ficheros: TS_01_triangulos.* , TS_02_poligonos.*
   a) Objetivos:
      i) Conseguido el objetivo intuitivo del concepto 'ser semejante', se pretende ver cómo evolucionan dos figuras al cambiar de forma manteniendo su semejanza.
      ii) Observar la proporcionalidad existente entre los lados y llegar al concepto de razón de semejanza. Inferir la razón existente entre las áreas. Observar la coincidencia angular.
      iii) Extender a un polígono de más de tres lados a evolución de dos figuras al cambiar de forma manteniendo su semejanza.
      iv) Observar la proporcionalidad existente entre los lados y afianzar el concepto de razón de semejanza.

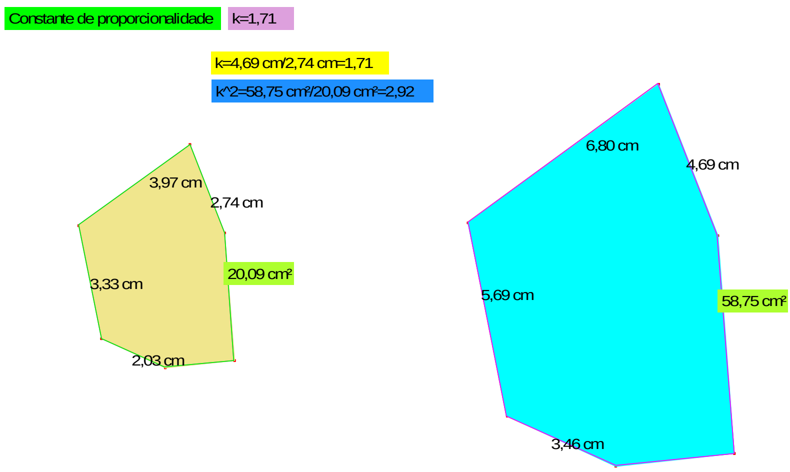


b) Actividades.

i) Mover los vértices del primero triángulo o polígono y ver la evolución del otro.

ii) Comprobar que la proporción que mantienen los lados coincide con el valor de k y que variando k se varía esa proporción.

iii)Efectuar la medición de los ángulos para comprobar que soy iguales.




iv) Comprobar como las áreas responden a la razón $k^2$. Inferir la relación que tendrán volúmenes de cuerpos semejantes. Proponer algún ejercicio de aplicación.

c) Utilización y temporalización:

i) Exposición del profesorado con proyector en el aula intercalado con las actividades de encerado y cuaderno. No incrementa el tiempo, hace de substitutivo.

ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática.

d) Valoración de la experiencia:

i) Atención intensa al comienzo de la actividad que decrece algo después y que se pierde si se alarga demasiado.

ii) Se facilita la utilización de la razón de semejanza.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

i) Si hay que montar y desmontar el equipo de proyección, se pierde mucho tiempo.

ii) La facilidad con la que el alumnado se adapta a las innovaciones requiere brevedad y oportunidad en la utilización de la figura.

iii)Parece más eficaz a percepción de la semejanza mediante un hexágono que con triángulos.

2. Ficheros: TS_03_Thales.*

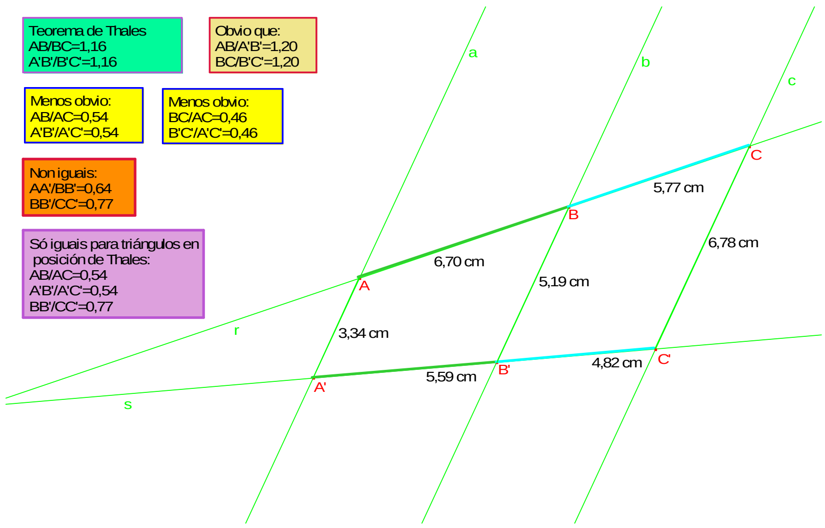
a) Objetivos:

i) Visualizar el cumplimiento del teorema de Thales.

ii) Captar el cumplimiento de otras proporcionalidades derivadas del teorema.

iii) Ver el incumplimiento de alguna supuesta proporcionalidad que no es tal.

iv) Entender lo que significa que dos triángulos estén en posición de Thales y ver sus consecuencias.




b) Actividades.

i) Deducir las conclusiones que se aprecian al cambiar la inclinación de las rectas paralelas, al acercarlas y alejarlas.

ii) Deducir lo que sucede cuando se cambia la inclinación de las rectas transversales.

iii) Conseguir triángulos en posición de Thales (moviendo A sobre A') y deducir las proporcionalidades obtenidas advirtiendo que se cumple alguna que antes no se cumplía.

iv) Analizar si Les Luthiers hicieron su canción ajustada al teorema.

c) Utilización:

i) Exposición del profesor con proyector en el aula.

ii) Manipulación libre por el alumnado en las aulas de informática si se tiene licencia de Cabri.

iii) Manipulación guiada con preguntas previas.

d) Valoración de la experiencia:

i) Atención intensa al comienzo de la actividad que decrece y que se pierde si se alarga mucho.

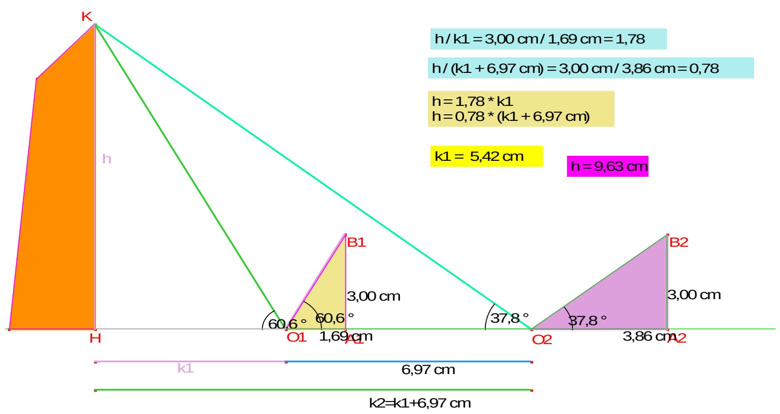
ii) Especial impacto de los triángulos en posición de Thales.

iii) No consume tiempo extra si se trabajan los objetivos propuestos.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

   i) Por lo denso de los contenidos analizados, se hace larga para escucharla sin más, sobre todo si se demuestran en el encerado algunos resultados intermedios.
   ii) No parece útil una utilización libre sin la explicación previa.

3. Ficheros: TS_04_espellos.*
   a) Objetivos:
      i) Transmitir la utilidad de la semejanza en la resolución de un problema de dificultad moderada ligado con un experimento real.
      ii) Recrear la semejanza con herramientas sencillas como unos espejos y la altura de los ojos.
   b) Actividades.
      i) Realizar las actividades propuestas en la propia figura siguiendo las instrucciones del fichero htm asociado (resolver en un caso determinado, estudiar regularidades, comparar mediciones de personas de diferente altura, realizar la experiencia concreta y contrastar resultados)
   c) Utilización y temporalización:
      i) Indicado para ejercicio voluntario o de ampliación.
      ii) Puede incluirse en un taller o en una página con acceso con un navegador cualquiera.




   d) Valoración de la experiencia:
      i) Resultó complicado y costó entender el dibujo.
      ii) Experiencia apasionante para todos, pensando y sacando conclusiones toda una clase.
      iii) Acabada la clase, el alumnado deseaba continuarla abandonando el aula con la discusión del problema viva.
   e) Desventajas, observaciones, problemas:

i) El alumnado no logró resolver el problema que se le planteó.

ii) Puede crear conflicto con el ejercicio clásico de trigonometría del cálculo de la altura con pié no accesible en el alumnado con dificultades.

iii) Sin embargo, puede resultar muy entretenido para lo alumnado con capacidad relacional que interiorice las razones trigonométricas cómo razones de semejanza.

## TRIGONOMETRÍA

4. Ficheros: TS_05_seno.* TS_06_coseno.*

a) Objetivos:

i) Obtener las razones trigonométricas seno y coseno a partir de la semejanza de triángulos.

ii) Captar que las razones trigonométricas sólo dependen del ángulo elegido.

iii) Ver como evolucionan sus valores entre 0º y 90º.

iv) Tener contacto directo con la geometría dinámica y ver la evolución de las figuras con el movimiento.

v) Impulsar la elaboración de conjeturas derivadas de la manipulación de la figuras.

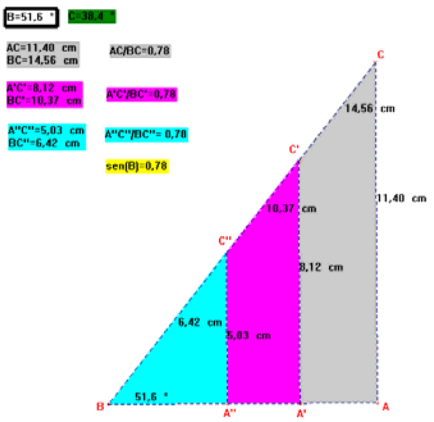
vi) Habituar en el uso de páginas matemáticas interactivas en la red.

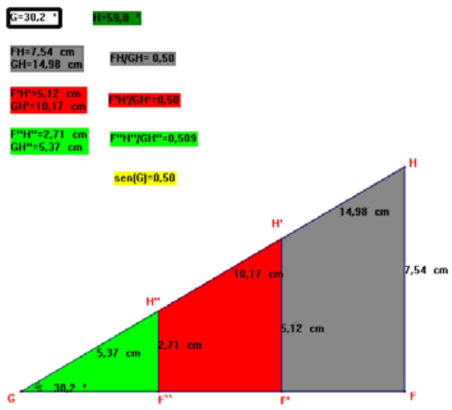
b) Actividades.

i) Realizar las actividades propuestas en la propia figura según el fichero htm asociado.

ii) Incidir en que en todos los triángulos que tengan un ángulo de 30º se obtiene el mismo valor para su seno (coseno).

iii) Tipificar las actividades como ejercicios de cuaderno evaluables.




c) Utilización y temporalización:

i) Exposición del profesor con proyector intercalando con las actividades de encerado y cuaderno.

ii) Utilización interactiva del alumnado en el aula de informática con el uso de un navegador cualquiera. Se necesitan dos sesiones.

iii) Posibilidad de incluirlo en cualquier página web para uso desde cualquiera ordenador con conexión a la red.

d) Valoración de la experiencia:

i) Participación y trabajo de la mayoría en el aula de informática (en el segundo intento).

ii) Conclusión difusa sobre los objetivos conseguidos.

iii) Muy importante el hecho de no tener que disponer más que de un navegador.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

i) Hay demasiadas variaciones en las velocidades de realización de los ejercicios por parte del alumnado. Debe buscarse algo alternativo para los que acaban pronto, como nombrar monitores entre los alumnos de manera que puedan ayudar a los que trabajan más lento.

ii) La página htm debe estar separada de la figura y abierta simultáneamente con esta.

iii) Fue útil la participación simultánea de dos profesores para atender las numerosas preguntas y guardar un orden mínimo.

iv) El tiempo empleado fue significativamente mayor que el habitual en la exposición del concepto de seno y coseno.

5. Ficheros: TS_07_radian.*, TS_08_formulas_basicas.*

a) Objetivos:

i) Entender que el radian es una medida de ángulos íntimamente relacionada con el radio.

ii) Aproximar el valor de un radián en grados sexagesimales a partir de su definición.

iii) Relacionar 180º con π radianes. Pasar de radianes a grados y de grados a radianes.

iv) Entender que una fórmula es una expresión general 'válida para muchos casos'.

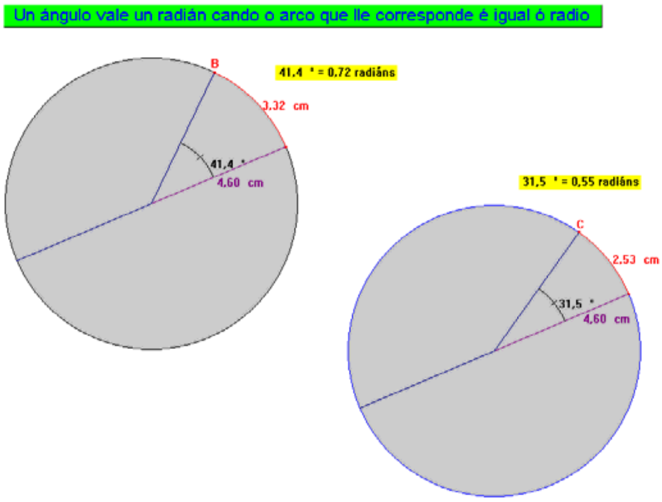
v) Conseguir la asimilación significativa de las primeras fórmulas de la trigonometría.

b) Actividades:

i) Realizar las actividades propuestas en la propia figura.

ii) Proponer migraciones de una medida a otra permitiendo la comprobación posterior.

iii) Mediante la variación del valor del ángulo, observar lo que le sucede a cada miembro de cada fórmula.




iv) Inferir el cumplimiento de las fórmulas por su verificación en innumerables casos.

c) Utilización y temporalización:

i) Utilización del profesor con proyector en el aula para inferir el concepto y realizar los ejercicios que se deseen. El segundo círculo puede servir para efectuar comparaciones.

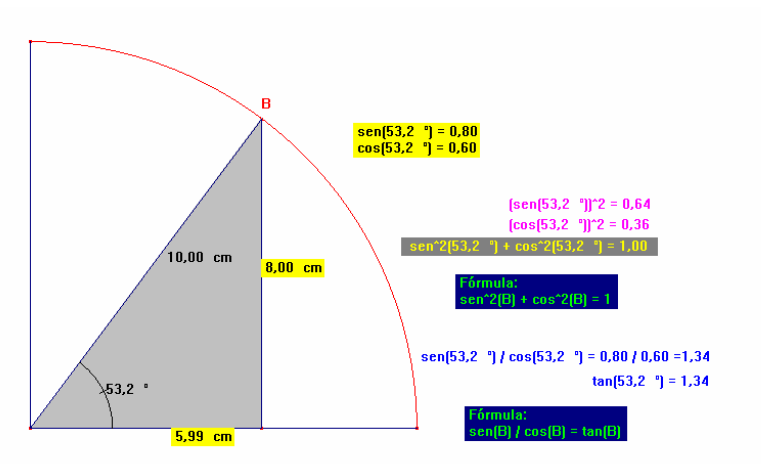
ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática con un navegador.

iii) Puede reducir el tiempo necesario para asimilar el concepto.

iv) Utilización del profesor con proyector en el aula para convencer del cumplimiento de las fórmulas una vez demostradas analíticamente.

d) Valoración de la experiencia:

i) Muy positiva en cuanto a los efectos de la incidencia visual del movimiento en la consecución del concepto y al impacto producido por la colocación de los valores para la verificación.




e) Desventajas , observaciones, problemas:

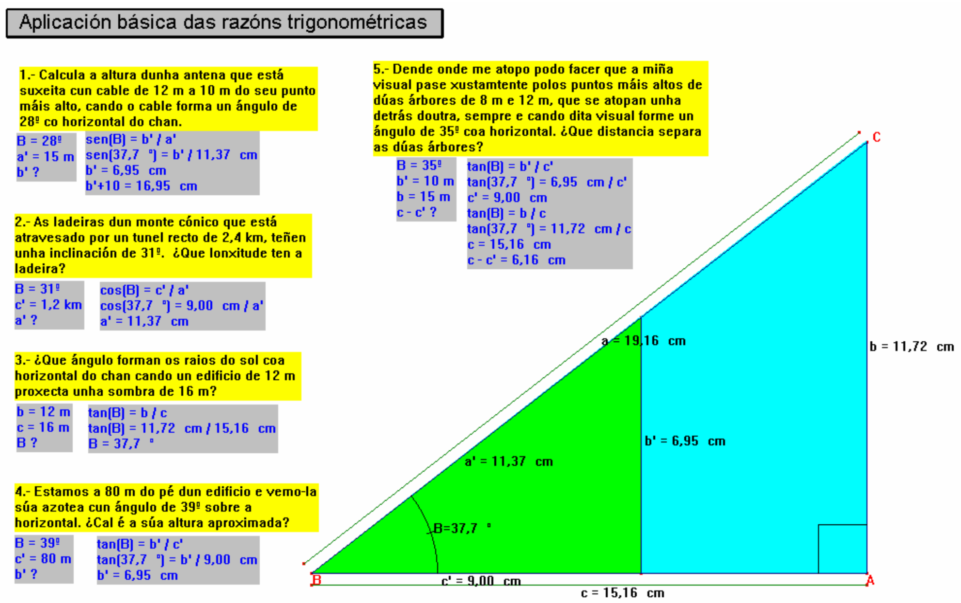
i) Utilizando el aula de informática deben coincidir las dos actividades.

6. Ficheros: TS_09_Aplicacion_basica.*

a) Objetivos:

i) Resolver ejercicios básicos de triángulos rectángulos que abarquen las tres razones trigonométricas fundamentales.

ii) Conseguir el automatismo necesario en la elección adecuada de la razón trigonométrica utilizable en cada caso.




iii) Tener un contacto directo con la geometría dinámica y ver la evolución de las figuras con el movimiento.

iv) Impulsar la elaboración de conjeturas derivadas de la manipulación de la figuras.

v) Habituar en el uso de páginas matemáticas interactivas en la red.

b) Actividades:

i) Resolver las actividades propuestas en la propia figura siguiendo las instrucciones del fichero htm asociado.

ii) Proponer la resolución de problemas similares que sean comprobables mediante el movimiento de la propia figura.

c) Utilización:

i) Exposición del profesor con proyector en el aula, intercalando con las actividades de encerado y cuaderno o uso del alumnado del aula de informática.

ii) Posibilidad de incluirlo en cualquier página web.

d) Valoración de la experiencia:

i) Participación y trabajo mayoritario del alumnado en el aula de informática.

ii) Conclusión difusa sobre los objetivos conseguidos.

iii) Muy importante el hecho de no tener que disponer más que de un navegador.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

i) Por momentos se pierde la atención en el problema trigonométrico ante la abundancia de estímulos geométricos visuales y la utilización conjunta de papel, lápiz y ordenador.

ii) Fue útil a participación simultánea de dos profesores para atender las numerosas preguntas y guardar un orden mínimo.

iii) El tiempo empleado fue significativamente mayor que el habitual en la resolución de estos problemas básicos.

iv) La inclusión de las instrucciones dentro de una misma página en la que sea necesario hacer desplazamiento vertical no es operativa. Resulta más adecuado un enlace con otra página donde estén las instrucciones y que pueda estar abierta simultáneamente con la figura.

7. Ficheros: TS_10_ Altura_1.* TS_11_Altura_2.*

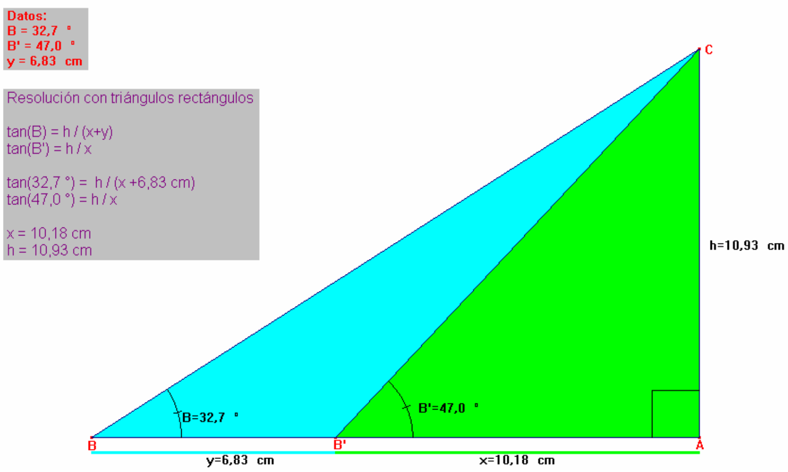
a) Objetivos:

i) Entender y realizar el procedimiento de cálculo de la altura de un objeto con pié no accesible, así como la distancia a dicho pié utilizando la estrategia de la altura.

ii) Entender y realizar el procedimiento de cálculo de la altura de un triángulo no rectángulo utilizando la estrategia de la altura.

b) Actividades:

i) Plantear y resolver el problema analíticamente, o sobre la figura ocultando y mostrando los resultados (solo en Cabri).



ii) Comprobar la resolución realizada traspasando los datos a la figura.

iii) Proponer otros similares que permitan que el alumnado vaya comprobando lo que obtiene.

c) Utilización y temporalización:

i) Utilización del profesor con proyector en el aula para explicar el procedimiento y comprobar los resultados.

ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática con un navegador.

iii) No supone incremento de tiempo apreciable.

d) Valoración de la experiencia:

i) Era muy deseable la interactividad del alumbrando que sólo pudo estar de espectador. Aun así hace de substitutivo eficaz del encerado.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

i) No fue posible el uso en el aula de informática.

ii) El deseo del alumnado de comprobar gráficamente lo que va obteniendo con sus cuentas representa una fuerte motivación que acelera su ritmo de trabajo y lo anima a revisar errores.

iii) La escala no es útil en los archivos *.htm

8. Ficheros: TS_13_Circunferencia_goniometrica.*

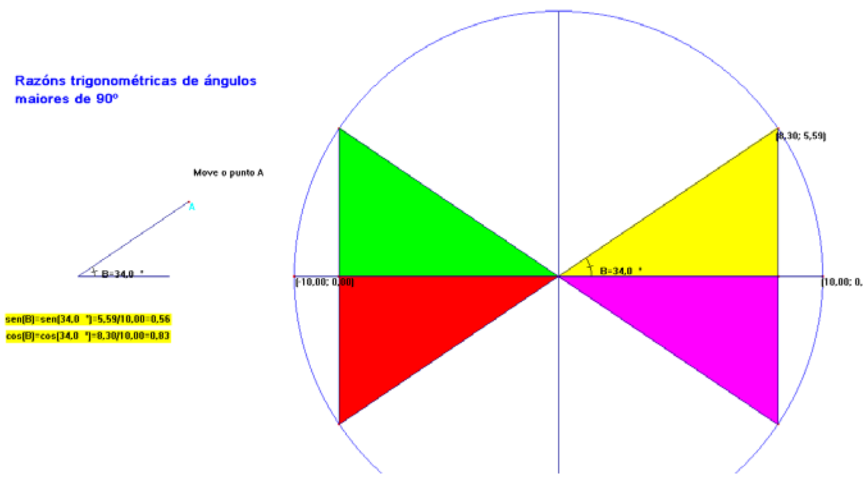
a) Objetivos:

i) Extender la definición de las razones trigonométricas a la ángulos mayores que 90º.

ii) Comprender el signo de las razones trigonométricas básicas en cada cuadrante.

iii) Identificar y establecer relaciones entre ángulos mayores de 90º con ángulos del primero cuadrante.

iv) Establecer relación entre las razones de ángulos complementarios.



b) Actividades:
   i) Recordar que el valor del seno y del coseno coinciden con el del cateto contrario (vertical) y del cateto contiguo (horizontal) cuando trabajamos en una circunferencia de radio a unidad.
   ii) Provocar la generalización la ordenada y abscisa mediante la variación del ángulo de la figura.
   iii) Analizar los valores en ángulos relacionados (60º, 120º, 240º, 300º).
   iv) Comparar con la calculadora, ‘a ver que dice’.
   v) Proponer el cálculo de valores de razones de ángulos mayores de 90º a partir de las de otros menores y comprobar lo obtenido.
   vi) Ocultar y mostrar partes ocultas de la figura a medida que se va concluyendo (no en *.htm).

c) Utilización y temporalización:
   i) Utilización del profesor con proyector en el aula planteando preguntas y comparando respuestas.
   ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática con un navegador.
   iii) No supone incremento de tiempo apreciable.

d) Valoración de la experiencia:
   i) Superó claramente cualquier manera anterior utilizada para esta generalización. Hizo de substitutivo eficaz del encerado.
   ii) La curiosidad del alumnado jugó una baza importante.

e) Desventajas, observaciones, problemas:
   i) No fue posible utilizar una circunferencia más pequeña de radio la unidad.
   ii) No tiene una versión *.htm suficientemente eficaz.

## Conclusiones

- Nuestro desafío era la introducción en el aula del Cabri y de las nuevas tecnologías con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la semejanza y de la trigonometría en 4º ESO. En sí mismo, esto no es nuevo, pues por ejemplo el IES Doña Jimena (Asturias) o el IES Valle de Cidacos (Calahorra), lo pusieron ya en práctica con grupos de 4º de ESO.

- Las clases se hacen más activas con mayor participación y atención del alumnado. Por eso consideramos que mejora substancialmente el proceso de enseñanza y aprendizaje y creemos que también mejora su rendimiento.
- En la parte negativa podemos señalar:
    - El incremento en el tiempo necesario para tratar cada tema y la consiguiente dificultad para completar el temario. Aun así, varias de las figuras representan un substitutivo que no dilata las exposiciones.
    - El montaje en el aula del material necesario (proyector, ordenador) hace deseable disponer de un aula específica.
    - Las dificultades derivadas de ser la primera vez también se advierten (cabos sueltos, prisas,...).
    - La disponibilidad de las aulas de informática no siempre es la deseable, y el montaje y mantenimiento del software necesario implican horas de trabajo extra.
    - Cierta adaptabilidad a la comodidad de algún alumnado ocasiona que lo que es novedad en un principio pueda convertirse en 'rutinario' y, por lo tanto, pierda interés.

## Referencias bibliográficas

Arranz, José Manuel (Sociedade Castellano Leonesa de Educación Matemática) http://roble.cnice.mecd.es/~jarran2/ (Página con numerosas aplicaciones de geometría dinámica con Cabri II)

Cabri-Géomètre http://www.cabri.net/ (página oficial de Cabri-Géomètre)

Cabri Java Projects www.cabri.net/cabrijava/ (página en la que se encuentra el software necesario para convertir los archivos Cabri II en applets de Java)

Cabrilog http://www.cabri.com (página de la sociedad que elabora y comercializa el Cabri-Géomètre)

Carrillo de Albornoz, Agustín – Llamas, Inmaculada. (2005): *Cabri Géomètre II Plus. Una aventura en el mundo de la geometría*. Ed. Ra-Ma. Madrid.

Colera, J. - Gaztelu, I. (2003) *Matemáticas 4º ESO*. Anaya. Madrid.

# UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN AMBIENTE CABRI PARA EL DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DE DEMOSTRACIÓN

Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Ángel Gutiérrez Rodríguez

Universidad de Valencia (España)

## Resumen

Presentamos algunos resultados del trabajo de investigación realizado con estudiantes de 10º grado de bachillerato[1] de tres instituciones de Santander (Colombia), cuyos objetivos apuntaban a: i) Diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración en los estudiantes de 10º grado. ii) Analizar los tipos de demostración que emergen con el uso de Cabri en el proceso de demostración de propiedades trigonométricas de los estudiantes que inician el grado 10º y iii) Analizar los procedimientos, las estrategias de razonamiento y los errores y dificultades detectados en el desarrollo de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza. En general podemos decir que las actividades de la unidad de enseñanza lograron promover procedimientos, estrategias de razonamiento y demostraciones que fueron presentando un continuo progreso desde lo empírico hacia lo deductivo y que contribuyeron al logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación propuestos.

[1] En Colombia el grado 10 corresponden a la educación media no obligatoria o pre-universitaria. La edad promedio de los estudiantes en éste grado es de 15 años.

Fiallo Leal, J.E., Gutiérrez Rodríguez, A. (2007) Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp.*41-62.*

## Introducción

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad si no se brindan las condiciones suficientes para ello. Por esta razón, es importante brindarle al estudiante no sólo una serie de conceptos, si no las herramientas y estrategias necesarias para que explore, analice, relacione, conjeture, demuestre y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricos, que aprenda a utilizar diferentes procedimientos y estrategias de razonamiento, a producir distintos tipos de demostración en la solución de problemas de conjetura y demostración de las propiedades trigonométricas y a relacionar las diferentes representaciones de los conceptos de tal manera que el aprendizaje sea más efectivo y duradero.

Es de amplio conocimiento en la comunidad de investigadores en educación matemática que el tema de la demostración en matemáticas es una de las agendas que reporta un gran número de investigaciones, agrupándose, como lo propone Mariotti (2006), en tres líneas de investigación caracterizadas por tres categorías de asuntos de investigación, a saber: la demostración en el currículo, diferentes aproximaciones a las concepciones de demostración de los estudiantes y propuestas para introducir a los estudiantes a la demostración.

Por otro lado las nuevas tecnologías nos ofrecen herramientas para la enseñanza que contribuyen a que los estudiantes, a través de ellas, pongan en juego sus ideas, exploren, analicen, tomen datos, etc., y pongan a prueba sus conjeturas. En geometría existe una variedad de software de geometría dinámica, como “Cabri Géomètre”, que pone a disposición del estudiante un micromundo geométrico en el cuál los objetos matemáticos pasan de ser simples dibujos a convertirse en “objetos geométricos” que pueden ser construidos a través de acciones de una manera muy similar a las construcciones en lápiz y papel, pero con la posibilidad de tener más de una representación del objeto construido y de la familia de figuras semejantes a la inicial, además de poder manipularlas a través de la opción de arrastre o animación que ofrece el programa.

Tomando como base las ideas anteriores, y siguiendo las líneas de investigación tendentes a obtener una mejor idea de los procesos de demostración y del planteamiento de propuestas para introducir a los estudiantes en el tema de la demostración, se planteó esta investigación basada en el diseño, experimentación y evaluación de una unidad de enseñanza que permitiera acercar a los estudiantes al estudio de la trigonometría y la demostración desde una metodología que sustenta que: (i) A partir de un enfoque geométrico en un ambiente de geometría dinámica se favorece la formación de objetos mentales[1] de los conceptos de las razones trigonométricas. (ii) El uso de Cabri favorece la visualización, generalización y conjetura de propiedades de las razones trigonométricas. (iii) El uso de Cabri contribuye al desarrollo de habilidades de demostraciones empíricas y deductivas en el estudio de las razones trigonométricas.

**La concepción de la demostración en nuestra investigación**

Arzarello y otros (1998) consideran cruciales dos componentes para focalizar el significado de la demostración, a saber, el cognitivo y el histórico-epistemológico (Barbin, 1988; Balacheff, 1988; Harel, 1996; Mariotti et al., 1997). Por supuesto los dos componentes pueden ser separados solamente por razones de análisis teóricos, o por lo contrario pueden entrelazarse con profundidad en la realidad (Hanna, 1996) y ambos pueden considerarse para abordar apropiadamente lo didáctico de la demostración.

Hanna (2000) manifiesta que cuando se intenta caracterizar el rol de la demostración en Educación Matemática se tiende a considerar el rol de ésta en la actividad matemática misma, pues se espera que el rol en las clases refleje todo lo que esperan de ella los matemáticos. Pero estas funciones no siempre son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en el mismo grado y no siempre deberían tener el mismo peso en la instrucción (de Villiers, 1990, Hersh, 1993). Para comenzar el largo trabajo de preparar a los estudiantes para la demostración deberíamos empezar por dos funciones fundamentales: verificación y explicación. En la clase, la pregunta fundamental que la demostración debe dirigir es: ¿Por qué? En el dominio educativo es natural entonces valorar las demostraciones que mejor ayuden a explicar.

Teniendo en cuenta las ideas expuestas y las de otros investigadores (Godino y Recio, 2001; Battista y Clements, 1995), consideramos la ***demostración*** desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para *explicar, verificar o justificar* con miras a convencerse a si mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

[1] Entendido como lo plantea Freudenthal (2001), quien afirma que la constitución de objetos mentales precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos. Siguiendo las ideas de Freudenthal acerca de la fenomenología didáctica, consideramos que desde los fenómenos geométricos se favorece la formación de objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas, y en este caso, el uso de Cabri se constituye en una herramienta potente para favorecer y comprender las relaciones entre las objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas.

**Análisis de conjeturas y demostraciones producidas por los estudiantes**

Marrades y Gutiérrez (2000), apoyados en los trabajos de otros investigadores como Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración. A continuación presentamos de manera resumida las categorías propuestas y una breve descripción de cada una de ellas:

**A) Demostraciones empíricas,** caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- *Empirismo ingenuo:* Cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio y las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (**perceptivo**) o elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo (**inductivo**).

- *Experimento crucial:* Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:
    - *Basado en ejemplo*: Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.
    - *Constructivo:* Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
    - *Analítico:* Cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
    - *Intelectual:* Cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo, pero en la demostración usan propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.

- *Ejemplo genérico:* Cuando en la demostración o la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase, y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos.

Los cuatro tipos de demostración definidos en el párrafo anterior para el experimento crucial se presentan el los ejemplos genéricos.

**B) Demostraciones deductivas,** caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

- *Experimento mental:* Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

    - *Experimento mental transformativo:* Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.

    - *Experimento mental estructural:* Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

- *Deducción formal:* Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.
  Los dos tipos de demostración definidos para el experimento mental, pueden también ser encontrados en la demostración deductiva forma.

También plantean una clase llamada **fallida,** que incluye los casos de estudiante que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve al planteamiento de una conjetura o de una demostración, o aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura, o no se puede inferir nada de sus respuestas.

**Metodología**

En el siguiente diagrama (Fig. 2) se resume la metodología de investigación planteada por fases, en donde se llevaron a cabo acciones investigativas para dar cumplimiento a los objetivos de investigación planteados.

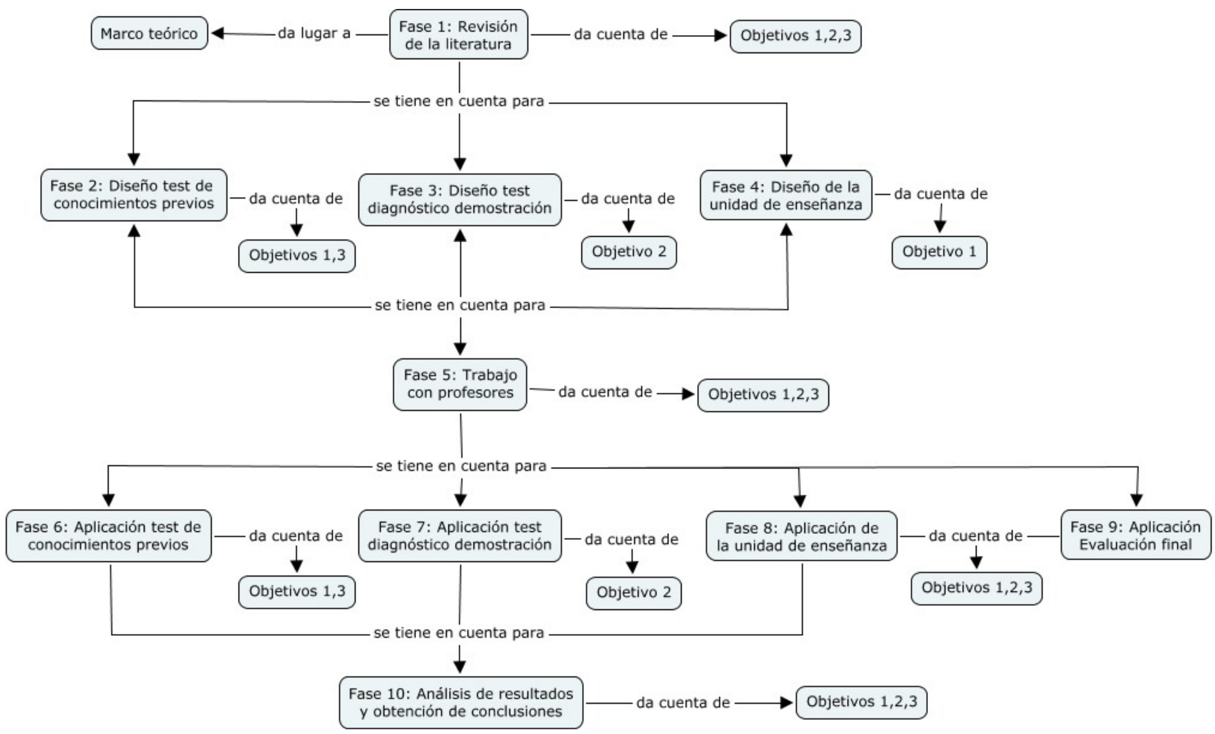



*Figura 2: Secuencia y relación entre las fases y los objetivos de investigación*

Los datos se recogieron a través de las hojas de trabajo de los estudiantes, los mapas conceptuales que debían completar o realizar al finalizar una actividad, las evaluaciones cortas y acumulativas aplicadas durante el desarrollo de la experimentación, los test diagnósticos de los preconceptos y de las habilidades de demostración, vídeos de las discusiones de clase con los compañeros y profesores y de una entrevista final realizada a algunos estudiantes y la profesora de una de las instituciones, registros de sesión de Cabri y cuadernos de apuntes del investigador y de los profesores. Para la determinación de conclusiones se utilizaron todos los análisis cualitativos y cuantitativos realizados sobre todas las actividades, teniendo en cuenta las categorías de análisis de Marrades y Gutiérrez (2000) y las categorías emergentes, así como los datos cuantitativos obtenidos.

Durante dos semanas previas a empezar las clases, el investigador trabajó con los profesores, haciendo énfasis en los objetivos de la investigación y de aprendizaje propuestos en la unidad de enseñanza, en la concepción de demostración de nuestra investigación, en el uso de Cabri y en la revisión y corrección de la unidad y de los test diagnósticos. Este trabajo continuó en el transcurso del desarrollo de la experimentación en donde los profesores eran los encargados de implementar las actividades y orientar la clase según lo planeado y descrito en cada una de las actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación.

El investigador fue el responsable del diseño de las actividades y los correspondientes archivos de Cabri, de participar en el desarrollo de las actividades en las instituciones, adoptando un papel de observador activo y colaborador del profesor en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes, preguntando y registrando las respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas.

**Descripción de la población**

La implementación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo con 100 estudiantes del grado 10º de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), tomando como único criterio para su elección la facilidad de poder establecer contactos con las directivas y profesores, y que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales para trabajar en dos sesiones semanales de 90 minutos cada una durante el periodo de tiempo que se había planeado la experimentación.

Ninguno de los estudiantes había tenido experiencia previa en el uso de Cabri, por lo que las dos primeras semanas de febrero se dedicaron a su aprendizaje. Teniendo en cuenta que los estudiantes partícipes de la experiencia eran noveles en el uso de Cabri y el tiempo disponible para la capacitación en su uso fue de apenas dos semanas, en casi todas las actividades Cabri fue utilizado más como una herramienta para obtener construcciones sencillas y orientada a la visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas que como una herramienta para que ellos manipularan como expertos para la solución de un problema de demostración. Cuando la construcción era compleja se daba a los estudiantes el archivo correspondiente para que ellos la manipularan y exploraran las propiedades estudiadas. Solamente en los casos en que las construcciones eran sencillas se pidió a los estudiantes que intentaran hacerlas y que, de acuerdo a su resultado, plantearan, verificaran y demostraran las propiedades correspondientes.

De los profesores, solamente uno había usado Cabri en la calculadora TI 92 plus y Cabri II en el computador, por lo que se trabajó con ellos durante las dos últimas semanas de enero y las dos primeras semanas de febrero.

Para el análisis de los resultados se tomaron cuatro grupos conformados por dos o tres estudiantes de dos de las instituciones y tres grupos conformados por dos estudiantes de otra de las instituciones

**Planificación de la experimentación**

La experimentación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo durante el periodo comprendido desde la segunda semana de enero hasta la primera semana de mayo de 2006 en el transcurso normal del periodo de clases de las tres instituciones participantes. El siguiente esquema muestra la secuencia cronológica de las acciones de experimentación que ayudará a dar una visión global de lo realizado.

| Acciones de la experimentación | FEB 2006 | | | | MAR 2006 | | | | ABR 2006 | | | | MAY 2006 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aplicación del test de conocimientos previos | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Aplicación del test diagnóstico de los tipos de demostración | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Aplicación de la unidad de enseñanza | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Aplicación de las evaluaciones cortas | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Aplicación de la evaluación acumulativa | | | | | | | | | | | | | | | | |

Se aplicaron cinco actividades que abarcaron los siguientes temas de estudio de las razones trigonométricas[2]:

Actividad 1: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.

Actividad 2: Razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

Actividad 3: Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas.

Actividad 4: Identidades Pitagóricas.

Actividad 5: Seno de la suma de dos ángulos.

Como uno de los objetivos fundamentales de la unidad era el desarrollo de las habilidades de demostración, desde la primera actividad se planteó el análisis y demostración de conjeturas que involucraban las identidades trigonométricas. De esta manera, cada actividad era mucho más extensa de lo que normalmente se plantea en los textos escolares, puesto que se requería de la realización y análisis de construcciones en Cabri, planteamientos y discusión de las ideas en la hoja de trabajo con el grupo y finalmente en la discusión con la clase y el profesor.

[2] Por razones de espacio, presentamos el anexo de una sola de las actividades que el lector se haga una idea del tipo y la forma de actividades propuestas a los estudiantes en la unidad de enseñanza, para mayor información consultar Fiallo (2006).

## Algunos resultados

Las actividades planteadas permitieron el uso de diferentes procedimientos de resolución de actividades caracterizados cada uno de ellos por el tipo de actividad propuesta, viéndose una evolución desde el uso inicial de procedimientos numéricos basados generalmente en los datos observados en Cabri hacia el uso de procedimientos algebraicos, geométricos y analíticos que promovieron el uso de razonamientos más analíticos y deductivos para mejorar las habilidades de demostración en el tema de las razones trigonométricas. Por ejemplo, al realizar los movimientos que hacían variar el ángulo *A* en un solo sentido planteaban que algunas razones aumentaban y otras disminuían. Al solicitarles propiedades matemáticas para justificar se basaban en lo observado en Cabri y volvían a dar ejemplos. Este tipo de procedimiento se clasificaba como <u>Numérico basado en los datos de Cabri</u> (NDC); Para hallar las relaciones entre las razones de los ángulos *A* y *A – 90*, construyeron en Cabri el ángulo *A – 90* por rotación y justificaron que *cos (A - 90) = sen A* porque *"cuando el triángulo rota (A-90) pasa a ser el coseno de A por lo tanto cos (A-90) = sen A los triángulos son semejantes pero diferentes las posiciones de seno y coseno"*. Este tipo de procedimiento se clasificaba <u>Geométrico basado en propiedades geométricas</u> (GP).

Por la insistencia en el uso de propiedades matemáticas para las justificaciones, a medida que los estudiantes avanzaban en las actividades, empezaban a utilizar procedimientos más analíticos que tendían a ser más generales y no tan numéricos. En este caso Cabri les servía como una herramienta exploratoria para analizar los variantes e invariantes e ir deduciendo propiedades geométricas y analíticas.

Se detectaron cinco estrategias de razonamiento muy relacionadas con los procedimientos de resolución de actividades y con los tipos de demostración realizados por los estudiantes; estas estrategias también emergían de alguna manera por el tipo de actividad propuesta. Por ejemplo, la estrategia de razonamiento usada al principio se basó en el análisis empírico de los datos de Cabri al realizar el movimiento del punto P sobre la circunferencia; para hallar las relaciones de las razones entre los ángulos *A* y *–A* hicieron construcciones y analizaron los valores de las coordenadas de los puntos sobre el lado final de cada ángulo, no utilizaron argumentos geométricos para justificar las relaciones. Este tipo de razonamiento se clasificó como <u>Empírico inductivo apoyado en los datos de Cabri</u> (EIC-AD).

A medida que fueron explorando otras relaciones se fue dando una transición desde un razonamiento empírico inductivo hacia un razonamiento deductivo ayudado por una transición entre las representaciones numéricas hacia representaciones algebraicas apoyadas por un enfoque geométrico. Sustentaban sus afirmaciones en deducciones de los datos del problema o propiedades recordadas y utilizaban Cabri para su validación. Por ejemplo, para hallar el rango de variación de la tangente utilizan la identidad $\tan A = \dfrac{senA}{\cos A}$ y explican comparando los valores del cociente cuando seno y coseno varían "*Al acercarse a 90º aumenta más rápidamente, pues la proporción entre senA y el cosA son mayores y el cosA disminuye y el senA aumenta por lo que su división va a ser un número mayor"* Este tipo de razonamiento se clasificó como <u>Deductivo apoyado en el uso de Cabri</u> (D).

Los errores en su mayoría fueron surgiendo en el transcurso del desarrollo de determinada actividad y algunos de ellos muy propios de ésta por el tipo de actividad planteada. Sin embargo un error que fue constante en casi todas las primeras actividades fue el de considerar una variable positiva si no tenía ningún signo y negativa si tenía el signo menos. Por ejemplo, asumían que el ángulo $-\theta$ siempre es negativo y el ángulo $\theta$ siempre es positivo o que la variable real $x$ siempre es positiva y la variable real $-x$ siempre es negativa. Un error que fue característico y cometido por casi todos los grupos en la actividad 2 fue el de considerar el ángulo siempre positivo y en el primer cuadrante que los inducía al análisis de las conjeturas solamente en el primer cuadrante. Por ejemplo, "*sen A = - sen (-A) porque sen A es positivo, sen (-A) es negativo y al multiplicarlo por -1 queda positivo*".

Las mayores dificultades encontradas especialmente al inicio de la experimentación fueron las de establecer las relaciones que se daban entre los diferentes elementos o conceptos involucrados en el estudio de las razones trigonométricas y la incapacidad inicial de justificar matemáticamente, estando muy relacionada con éstas la dificultad de expresar las relaciones y propiedades en un lenguaje y notación adecuadas. Por ejemplo, quienes no escribieron en Cabri las razones en forma de fracción, indicando con los valores de los lados en el numerador y denominador, no veían la relación numérica de estos lados cuando varía el ángulo y no eran capaces de justificar con argumentos basados en las definiciones de las razones dadas, por qué al variar el ángulo varían las razones.

En cuanto a los tipos de demostración, vimos cómo a medida que se fueron desarrollando las actividades, se fue dando una transición de demostraciones de tipo inductivo hacia demostraciones de tipo deductivo (Tabla 1) y desaparecieron las demostraciones fallidas, empíricas fallidas o deductivas fallidas, aunque esto no se puede tomar como un indicador rotundo de éxito e interpretar que en las actividades finales todos los estudiantes tenían habilidades para producir demostraciones deductivas. También se evidenció que, de acuerdo a la actividad propuesta, se promovió determinado tipo de demostración.

| ACT | F | EF | EIP | EII | ACB | ACC | ECA | ECI | EGB | EGC | EGA | EGI | DF | EMT | EME | DFT | DFE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Códigos: **F** = Fallido, **EF** = Empirismo fallido, **EIP** = Empirismo ingenuo perceptivo, **EII** = Empirismo ingenuo inductivo, **ECB** = Experimento crucial basado en ejemplo, **ECC** = Experimento crucial constructivo, **ECA** = Experimento crucial analítico, **ECI** = Experimento crucial intelectual, **EGB** = Ejemplo genérico basado, **EGC** = Ejemplo genérico constructivo, **EGA** = Ejemplo genérico analítico, **EGI** = Ejemplo genérico intelectual, **EMT** = Experimento mental transformativo, **EME** = Experimento mental estructural, **DFT** = Deductivo formal transformativo, **DFE** = Deductivo formal estructural. **DF** = Deductivo fallido.

*Tabla 1: Tipos de demostración producidas por los estudiantes*

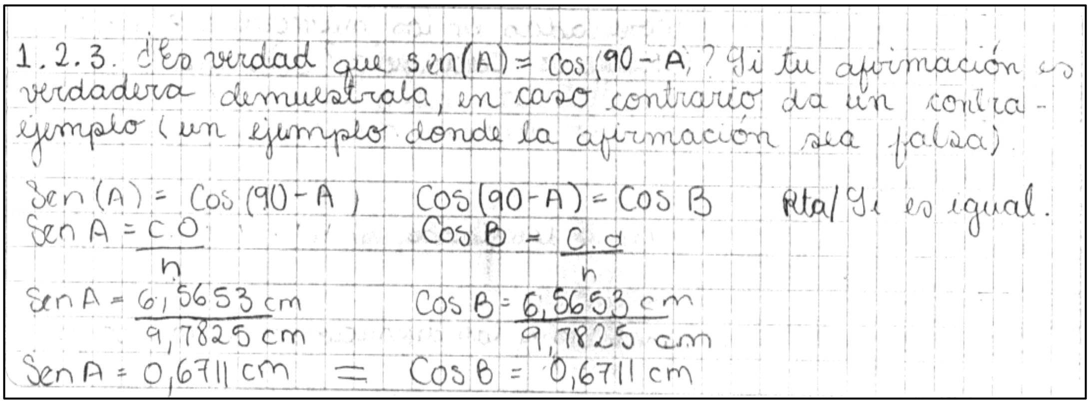
En la primera actividad prevalecieron las demostraciones empíricas, especialmente las cruciales, sobresaliendo el tipo experimento crucial intelectual. No se produjeron demostraciones genéricas porque el tipo de actividades y de problemas de demostración propuestos no lo permitieron. Las demostraciones deductivas fueron producidas por estudiantes que desde un inicio mostraron un tipo de razonamiento deductivo y un buen dominio de conceptos previos. En la segunda actividad se presentó mayor variedad de demostraciones porque, además de la actividad, se aplicó una evaluación individual de cinco problemas de demostración. Destacó la presencia de todos los tipos de demostración a excepción del experimento crucial basado, el experimento crucial constructivo y el ejemplo genérico constructivo, predominando los tipos fallido, experimento crucial intelectual y el empirismo ingenuo inductivo, con una buena cantidad de demostraciones deductivas. En la actividad 3 se destacó de manera considerable las demostraciones tipo deductivo formal transformativo debido al tipo de problema y a la gran ayuda de visualización que se ofreció y que los estudiantes supieron aplicar inclusive en la evaluación de lápiz y papel que se hizo. Las demostraciones empíricas corresponden a uno de los grupos que menos avances alcanzó hacia el logro de habilidades de demostración de tipo deductivo. Las actividades 4 y 5 muestran un avance hacia las demostraciones deductivas basadas en propiedades geométricas y algebraicas generales con la ayuda de las demostraciones visuales propuestas en Cabri.

A continuación presentaremos ejemplos de algunos de los tipos de demostración más frecuentes analizadas en las actuaciones de los estudiantes de los siete grupos, incluyendo las evaluaciones cortas y acumulativas que se practicaron en el periodo transcurrido en el desarrollo de la unidad.

Ejemplo 1:

*Actividad 1.2.3*: Se pregunta sobre la verdad de la relación *sen(A) = cos (90 - A)*.

Respuesta de G27:


1.2.3. ¿Es verdad que sen(A) = Cos (90 - A, ? Si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contra-ejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa)

Sen (A) = Cos (90 - A)    Cos (90 - A) = Cos B    Rta/ Si es igual.

Sen A = $\frac{C.O}{h}$    Cos B = $\frac{C.a}{h}$

Sen A = $\frac{6,5653 \text{ cm}}{9,7825 \text{ cm}}$    Cos B = $\frac{6,5653 \text{ cm}}{9,7825 \text{ cm}}$

Sen A = 0,6711 cm = Cos B = 0,6711 cm

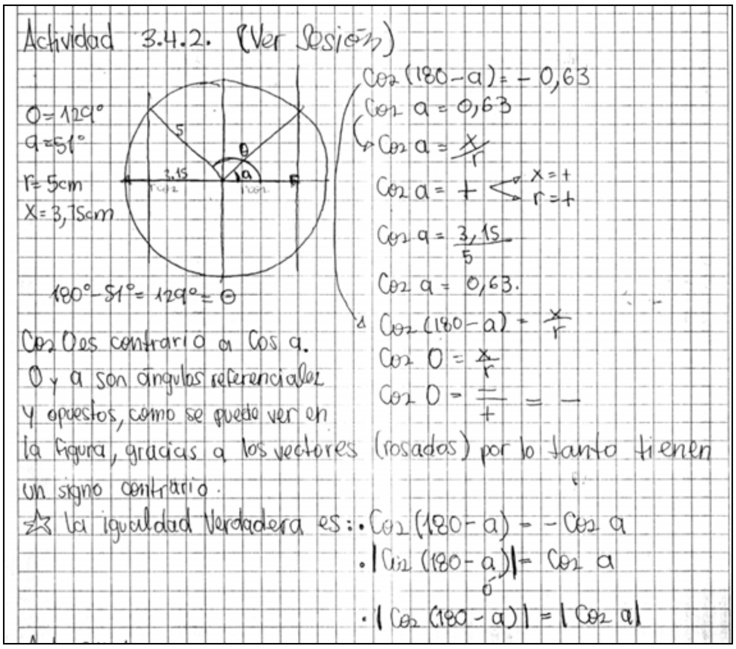
Usa las definiciones de seno y coseno estudiadas para reemplazar por los valores de los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo que en esos momentos tenía en la pantalla del computador y se basa en este único ejemplo, escogido sin ningún criterio, para justificar que la conjetura es verdadera. Por el uso exclusivo de un ejemplo escogido sin ningún criterio y basándose en esta percepción (los cocientes son iguales), y su afirmación de que la conjetura es verdadera porque éste es igual, decimos que este tipo de demostración corresponde a un Empirismo ingenuo inductivo (EII).

Ejemplo 2:

*Actividad 3.4.2 Explorando y demostrando*

¿Es verdad que *cos (180 - $\alpha$) = cos $\alpha$* ? Si la igualdad es cierta demuéstrala, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrala.

Respuesta de C23:




Después de haber representado en Cabri los ángulos $\alpha$ y $180$ - $\alpha$ (teniendo en cuenta que $\alpha$ es agudo y por lo tanto sólo toma valores entre 0º y 90º), el estudiante toma el ejemplo que está en ese momento sobre la pantalla del computador y observa que los valores absolutos de las razones son iguales, pero los signos son diferentes, a partir de esto, utiliza la formula de seno y coseno para reemplazar por los valores de esas coordenadas y justificar el signo positivo del ángulo $\alpha$, pero, para el ángulo $\theta$ (el estudiante lo representa con un símbolo parecido a un cero o a la vocal mayúscula o) simplemente se refiere a los signos en la razón determinando que es negativo; esto y lo que está viendo en el computador le permiten concluir que las razones son opuestas; luego se refiere a otra propiedad observada en la representación de los lados trigonométricos en la figura (los vectores rosados que dibujó en la hoja y nombró como *rcos*) para reafirmar que los signos son contrarios y decir cuales serían las conjeturas verdaderas, pero sin demostrarla como se había pedido en la actividad. Por el uso exclusivo de un ejemplo y las demostraciones basadas en propiedades observadas en el ejemplo se concluye que este tipo de demostración corresponde a un <u>Experimento crucial analítico</u>.

<u>Ejemplo 3:</u>

*Actividad 2.3.1: Explorando, conjeturando y aprendiendo*

Usa Cabri como ayuda para encontrar relaciones entre: *cos (A)* y *cos (-A)*

Respuesta del grupo G2C:

(1) I: *¿Cómo son coseno de A y coseno de –A?*

(2) G2C: *Iguales.*

(3) I: *Iguales, ¿cómo argumentaría matemáticamente eso?, ¿por qué?*

(4) G2C: *Porque el coseno de A es x sobre el radio, entonces, al depender de x, las dos tienen el mismo valor de x, y x siempre va a ser positivo, x positivo para este* [señala la coordenada *x* del ángulo *A* en el primer cuadrante], *como para este* [señala la coordenada *x* del ángulo -*A* en el cuarto cuadrante], *y como el radio siempre va ser positivo, tienen la misma distancia y el mismo ángulo* [señala los lados de los triángulos que forman los ángulo *A* y -*A*]

(5) I: *Sí, pero ahí está mirando un ángulo particular A en el primer cuadrante, ¿sucede lo mismo si el ángulo está en cualquier otro cuadrante?*

(6) G2C: *Sí* [mueve el punto *P* hacia el segundo cuadrante]

(7) I: *¿qué pasa ahí, por ejemplo?*

(8) G2C: *son negativos.*

(9) I: *¿y entonces?*

(10) G2C: *porque…es que están dependiendo de la misma x.*

(11) I: *ah*

(12) G2C: *Como dependen de la misma x, como dependen sólo de x y no de y, entonces las dos x, como el triángulo se pinta hacia x* [señala los triángulos congruentes que se forman entre las semirrectas de los ángulos *A* y *–A*, el eje *x* y la perpendicular por *P* al eje *x*], *siempre la x de A y –A va a ser la misma.*

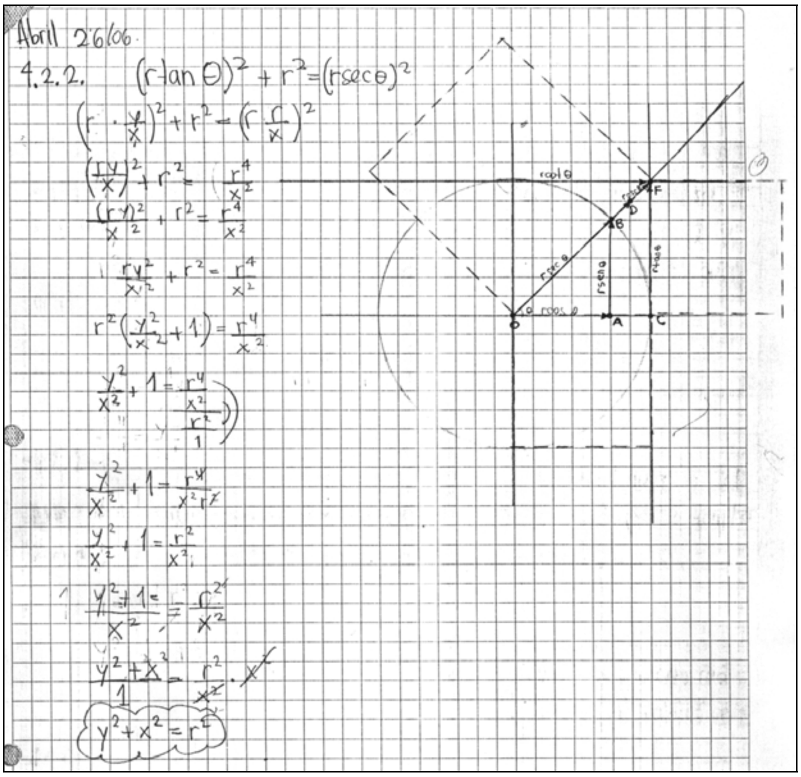
El grupo G2C utiliza un ejemplo de un ángulo *A* cualesquiera sin tener en cuenta el valor del ángulo si no las propiedades observadas en él, al ubicarlo inicialmente en el primer cuadrante. Con esta primera exploración del ejemplo aseguran que *cos (A)* y *cos (-A)* son iguales porque en ese caso la *x* es positiva y el radio siempre es positivo (no utilizan el valor específico de *x*), por lo tanto las distancias son positivas. Posteriormente ante la intervención de investigador analizan la relación en otro cuadrante y verifican que la relación sigue siendo verdadera y utilizan propiedades generales para su justificación. Este ejemplo se diferencia de un experimento crucial porque no utilizan valores específicos si no se refieren a generalidades observadas en los ejemplos explorados en Cabri, por lo tanto se considera un <u>Ejemplo genérico analítico</u>.

Ejemplo 4:

*Actividad 4.2.2 Demostrando*

Utiliza lo que acabas de aprender para demostrar, visualmente (en Cabri), geométricamente (con propiedades geométricas) y analíticamente (utilizando las definiciones de las razones para un ángulo en posición normal, las propiedades encontradas en esta actividad y en las anteriores) que: $(r\tan\theta)^2 + r^2 = (r\sec\theta)^2$.

Respuesta de C23:




C23 representa el "lado tangente" y el "lado secante" de un ángulo cualquiera. Esto le recuerda el Teorema de Pitágoras, según lo visto en la actividad 4.1.1 y le da confianza para ver que la conjetura es válida, luego reemplaza en la identidad planteada por las definiciones de tangente y secante en la circunferencia de radio *r*, utiliza las propiedades de las operaciones de los números reales (producto, cociente, potenciación, simplificación, factor común) y propiedades de una igualdad para llegar a otra igualdad conocida y aceptada en el punto 4.1.1 que identificaban con el Teorema de Pitágoras (los estudiantes cuando llegaban a esta igualdad manifestaban que la igualdad $x^2 + y^2 = r^2$ era válida porque ése esa el Teorema de Pitágoras). Vale la pena aclarar que se está aceptando esta respuesta como una <u>Demostración deductiva estructural formal</u>, de acuerdo al tema y a la secuencia de actividades que se desarrollaron y al tiempo que duró la experiencia, en donde fue bastante notorio el paso que se dio de un tratamiento geométrico con la ayuda de Cabri a un tratamiento analítico y algebraico que de una u otra manera son indispensables en la demostraciones trigonométricas.

**Algunas conclusiones**

El análisis hecho a los procedimientos de resolución de las actividades, de las estrategias de razonamiento, de los errores y dificultades y de los tipos de demostraciones producidas por los grupos de estudiantes desde el inicio de la experimentación nos permiten afirmar que la unidad de enseñanza contribuyó a mejorar el nivel de las habilidades de demostración de los estudiantes, destacándose una tendencia de transición hacia la producción de demostraciones de un mejor nivel al que se habían ubicado en la evaluación diagnóstica: Los que menos progreso alcanzaron pasaron del empirismo ingenuo a la consideración del experimento crucial intelectual, recurriendo al uso de propiedades generales de las razones trigonométricas estudiadas y aprendidas en el transcurro de la experimentación. Los que mayores avances alcanzaron llegaron a la producción de demostraciones deductivas.

El análisis cualitativo de las producciones de los estudiantes, producto del desarrollo de las actividades propuestas, permitió el planteamiento de categorías emergentes de análisis que nos permitieron detectar doce procedimientos de resolución de actividades, observándose una transición de los procedimientos numéricos hacia los procedimientos analíticos. También se detectaron cinco estrategias de razonamiento, notándose en la mayoría de los grupos analizados, una transición desde un razonamiento empírico inductivo basado en el análisis de los datos de Cabri, hacia el uso de un razonamiento más deductivo apoyado fuertemente en la visualización de propiedades geométricas y analíticas.

Los errores y dificultades en su mayoría fueron surgiendo en el transcurso del desarrollo de determinada actividad y algunos de ellos muy propios de ésta por el tipo de actividad planteada.

Los estudiantes comprendieron la importancia de la demostración en matemáticas y fueron conscientes de sus capacidades y habilidades para la demostración. Igualmente se dieron cuenta de que mediante la exploración y el análisis de variantes e invariantes en Cabri podían producir sus propias conjeturas y demostrarlas. En este sentido, vimos que nuestra experimentación logró conectar la exploración con la demostración como lo expresa Hanna (2000), quien reconoce que lo que debemos hacer no es reemplazar la exploración por la demostración, sino hacer uso de ambas, pues son dos actividades independientes que se complementan y refuerzan la una con la otra: *La exploración conduce al descubrimiento, mientras que la demostración lleva a su confirmación.*

Dentro del diseño e implementación de nuestra unidad de enseñanza se tuvo el propósito de incluir la demostración en la clase de matemáticas para la promoción de la comprensión matemática (Hanna, 2000), por lo que las actividades apuntaban también a unos objetivos de aprendizaje que fueron tenidos en cuenta a la hora de su implementación, de las discusiones y de las evaluaciones realizadas (allí se indagaba acerca de los conceptos y propiedades estudiados, además de los problemas de demostración en donde también los conceptos debían estar aprendidos a la hora de la producción de una demostración correcta). Al revisar la evaluación acumulativa aplicada al final de la segunda actividad se evidenció que la mayoría de estudiantes resolvió bien los problemas de aplicación de los conceptos de las razones trigonométricas.

También se procuró que, en las discusiones con el profesor, los conceptos y propiedades quedaran bien definidos a partir de los descubrimientos que habían realizado los estudiantes en las diferentes exploraciones y análisis de variantes e invariantes en Cabri. Los errores y dificultades detectados se retomaron y se insistió en la necesidad de su corrección. Esto ayudó bastante para la formación de diferentes objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas estudiadas y de su necesidad de comprensión para la demostración.

También se aprovecharon los momentos de discusión para insistir en las diferentes funciones de la demostración y en la necesidad de la comprensión de los conceptos y propiedades para la producción de demostraciones más deductivas. En este sentido como lo afirman varios investigadores como Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti (2002), Laborde (2000) y Marrades y Gutiérrez (2000), el profesor jugó un papel muy importante en la insistencia de conectar las diferentes interacciones y relaciones que se dieron entre los procesos de construcción y demostración, entre las actuaciones con el computador y las justificaciones por medio de argumentos teóricos.

En cuanto al uso de Cabri, nuestra experimentación ratificó lo que ya varias investigaciones han comprobado en cuanto a que los ambientes de geometría dinámica favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre actuar con el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos (Laborde, 2000). Vimos que las construcciones en Cabri permitieron conectar las representaciones aritméticas, geométricas, algebraicas y analíticas de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas, en donde se vio una transición de lo numérico hacia lo algebraico y de lo empírico a lo deductivo apoyados en la visualización y análisis de propiedades geométricas y analíticas producto de la exploración.

**Referencias bibliográficas**


Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). *A model for analiysing the transition to formal proofs in geometry.* Proceedings of the 22th PME Conference 2, 24-31.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri enviroments. *Zentralblatt dur Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher, 88*(1), 48-54.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23-40.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-29.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.,* Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (2001). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados) (2ª edición). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7 - 10.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mahtematics., 44*, 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies.

En Schoenfeld, A.H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU: American Mathematical Society.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151-161.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mahtematics., 44*, 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Roterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

# Anexo 1

## 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

**Actividad 2.1**

2.1.1 ***Construyendo***

- Muestra los ejes de coordenadas (último botón: Mostrar los ejes).
- Nombra como $A$ al origen del plano cartesiano.
- Ubica un punto $C$ sobre el eje positivo de las $x$.
- Traza una circunferencia de radio $r = AC$ y centro en el origen $A$ del sistema de coordenadas.
- Traza una semirrecta desde el origen $A$ **sobre un punto** de la circunferencia.
- "Nombra" como $P$ al punto de intersección de la semirrecta y la circunferencia.
- Desde el punto $P$ traza una perpendicular al eje $x$.
- Desde el punto $P$ traza una perpendicular al eje $y$.
- Dale estilo punteado (último botón: Punteado…) a las dos perpendiculares.
- Halla las coordenadas del punto $P(x, y)$ (antepenúltimo botón: Coord. o Ecuación), utiliza cuatro cifras decimales.

2.1.2 ***Midiendo***

- Mide la longitud del radio $r = AP$ de la circunferencia.
- Marca el ángulo $CAP$ (de ahora en adelante nos referiremos a él como el ángulo $A$).
- Mide la amplitud del ángulo $A$.

2.1.3 ***Aprendiendo***

| |
|---|
| Observa que el ángulo $A$ está determinado por el eje positivo de las $x$ que llamaremos lado inicial del ángulo y la semirrecta $AP$ que llamaremos lado terminal del ángulo. Estos ángulos los llamaremos ***ángulos en posición normal***. Por convenio, si la semirrecta que determina el lado terminal del ángulo $A$ gira desde el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que el ángulo es positivo y si gira desde el lado inicial en sentido de las manecillas del reloj, decimos que es negativo. |

2.1.4 ***Calculando***

- Calcula las siguientes razones para el ángulo $A$ (utiliza cuatro cifras decimales). Toma los valores $x$ e $y$ de las coordenadas del punto $P$:

$$sen\ A = \frac{y}{r}, \quad \cos A = \frac{x}{r}, \quad \tan A = \frac{y}{x}$$

$$\csc A = \frac{r}{y}, \quad \sec A = \frac{r}{x}, \quad \cot A = \frac{x}{y}$$

- Nombra cada razón con su respectivo nombre (*sen A, cos A, tan A, csc A, sec A, cot A*).

**Actividad 2.2**

2.2.1 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve la semirrecta $AP$ de tal manera que el valor del ángulo $A$ sea cercano a 0º.
- Mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj (sentido positivo) la semirrecta $AP$ alrededor de la circunferencia, hasta completar una vuelta.

¿Qué sucede con los valores de las seis razones a medida que varía el ángulo $A$?**; Escribe una conjetura de lo encontrado.**
**¿Esta conjetura es verdadera para cualquier ángulo $A$?, ¿Por qué?**

2.2.2 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve la semirrecta $AP$ de tal manera que el valor del ángulo $A$ sea cercano a 0º.
- Mueve en sentido positivo la semirrecta $AP$ alrededor de la circunferencia, hasta completar una vuelta.

Analiza los signos de las seis razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. **Plantea un conjetura al respecto y explica *por qué* es verdadera**

2.2.3 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve el punto *C* y observa los valores de las razones.

¿Qué sucede con los valores de las seis razones a medida que varía el radio *r*?**; Escribe una conjetura de lo encontrado.**
**¿Esta conjetura es verdadera para cualquier ángulo *A*?, ¿Por qué?**

2.2.4 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve el punto *C* hasta el número 1 del eje *x*.

**Compara las razones *sen A* y *cos A* con las coordenadas del punto *P*, escribe una conjetura y explica** *por qué* **es verdadera.**

2.2.5 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve la semirrecta *AP* de tal manera que el valor del ángulo *A* sea cercano a 0º.
- Mueve en sentido positivo la semirrecta *AP* alrededor de la circunferencia, hasta completar una vuelta.

**Plantea una conjetura que determine todos los posibles valores que toma cada una de las razones y justifícala matemáticamente teniendo en cuenta las propiedades de los números reales y de la división o cociente entre dos cantidades.**

2.2.6 ***Conjeturando y demostrando***

**¿Qué ocurre cuando el ángulo *A* es igual a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º?,** Explica lo que ocurre justificando con argumentos matemáticos.

2.2.7 ***Discutiendo y comunicando***

Discute lo encontrado en las actividades con tus compañeros(as) de clase y el (la) profesor(a).

**Actividad 2.3**

2.3.1 ***Explorando, conjeturando y aprendiendo***

- Usa Cabri como ayuda para encontrar relaciones entre:

a) *sen (A)* y *sen (-A)*
b) *cos (A)* y *cos (-A)*
c) *tan (A )* y *tan(-A)*
d) *cot (A)* y *cot(-A)*
e) *sec (A)* y *sec (-A)*
f) *csc (A)* y *csc(-A)*

¿Las relaciones encontradas son válidas para todo ángulo *A*?

2.3.2 ***Explorando, conjeturando y demostrando***

**Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos *A, A-90, 90-A* y demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.** Utiliza Cabri para realizar construcciones auxiliares que te permitan "ver" las relaciones y propiedades matemáticas.

2.3.3 ***Conjeturando y demostrando***

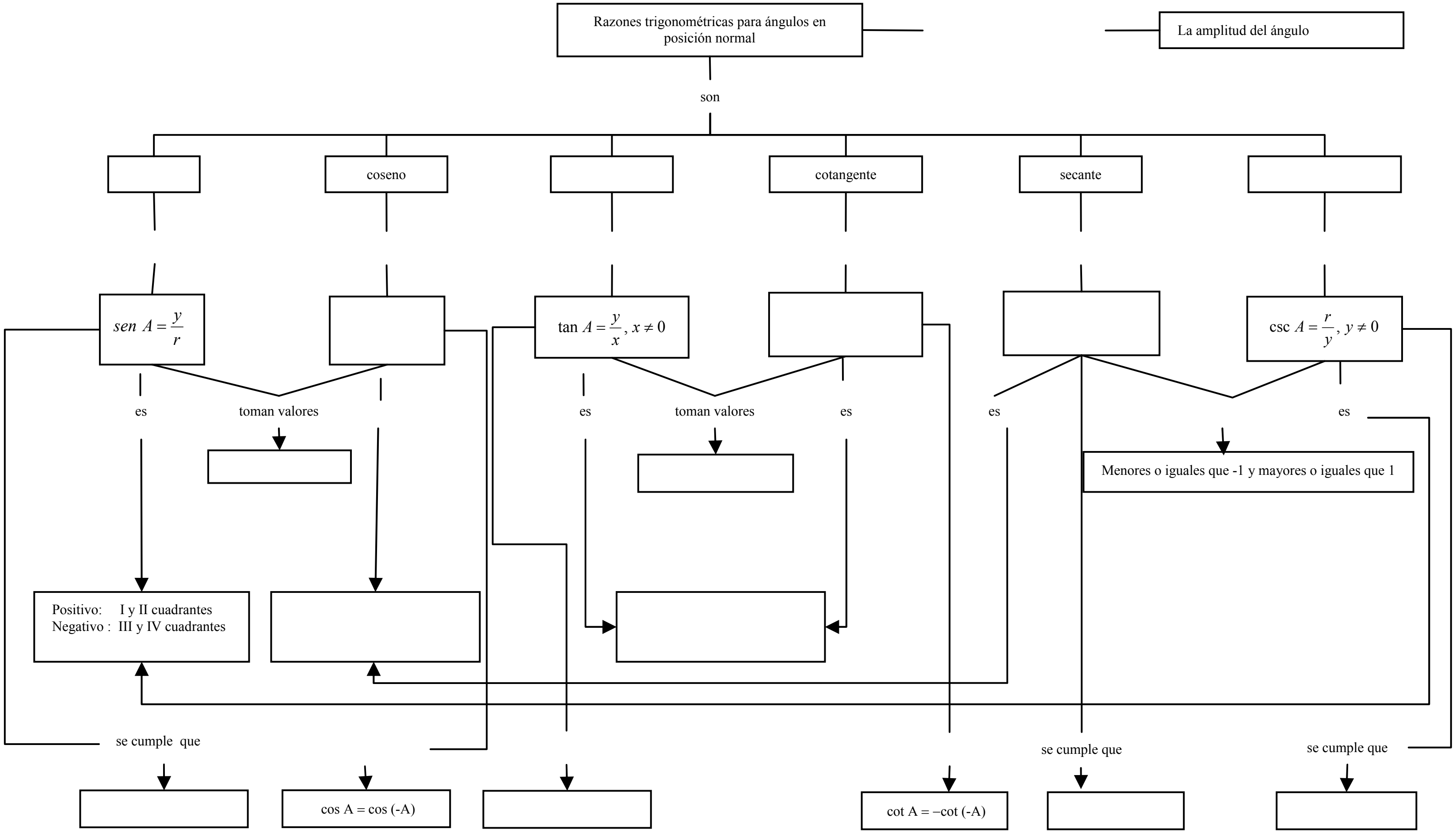
**¿Las propiedades encontradas para las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo se cumplen para los ángulos en posición normal?,** ¿por qué?.

2.3.4 ***Discutiendo y comunicando***

Discute lo encontrado en las actividades con tus compañeros(as) de clase y el (la) profesor(a).

**Actividad 2.4**

Completa el siguiente mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas de las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros(as) entiendan todo lo que has aprendido a través de él.



# ESTRATEGIAS CORRECTAS Y ERRÓNEAS EN TAREAS RELACIONADAS CON LA SEMEJANZA

Élgar Gualdrón Pinto

Universidad de Pamplona (Colombia)

Ángel Gutiérrez Rodríguez

Universidad de Valencia (España)

**Resumen**

En este trabajo presentamos algunos de los resultados obtenidos después de experimentar y evaluar una unidad de enseñanza de la semejanza de figuras planas dirigida a estudiantes colombianos de noveno grado (14-15 años), teniendo en cuenta el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, aspectos de la Fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad y semejanza. Las conclusiones que se mostrarán aquí son las referentes a este último aspecto. La investigación tenía también el objetivo de estudiar las ideas previas, en cuanto a conocimiento y razonamiento, que poseen dichos estudiantes y constatar éstas con las que poseen después de experimentar, con ellos, la unidad de enseñanza, para lo cual diseñamos un pretest y un postest. Los resultados muestran evidencias de que los estudiantes ven que la estrategia aditiva es incorrecta.

El trabajo se desarrolló con 34 estudiantes de dos instituciones (17 en cada una) de enseñanza secundaria de Colombia, a los cuales se les aplicó un test escrito antes y después de experimentar con ellos la unidad de enseñanza. El postest se aplicó una ves terminada la experimentación. La experimentación se realizó en 9 sesiones de 100 minutos cada una, en las dos instituciones.

Gualdrón Pinto, E.; Gutiérrez Rodríguez, A. (2007) Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza (2007). En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 63-82.

## Presentación

Por varios años, el estudio de la geometría en la enseñanza secundaria de Colombia fue poco o nada desarrollado en las aulas. En los últimos años, por diferentes razones, nuevamente se ha hecho hincapié en la necesidad de que los estudiantes reciban formación en esta área. La experiencia de los autores, uno, como profesor de matemáticas en secundaria, otro, como investigador, nos han permitido percatarnos de las diversas dificultades de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y particularmente en el tema de la semejanza. Es por esta razón que hemos decidido plantear este trabajo con miras a contribuir con el estudio del proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de semejanza.

## Antecedentes

Después de realizar una revisión bibliográfica, se puede constatar que es poco lo que se ha hecho respecto al tema de estudio. Algunos de los trabajos encontrados, que incluyen el concepto de semejanza, utilizando diferentes marcos teóricos y persiguiendo diferentes objetivos son por ejemplo, Fernández (2001) quien trabajó con estudiantes. Hart y otros (1981, 1984, 1989) quienes trabajaron con estudiantes y profesores, al igual que Margarit y otros (2001). A nivel de propuestas curriculares (propuestas orientadoras) para profesores desde diferentes corrientes conceptuales encontramos las del Grupo Beta (1997), Lappan y otros (1986), O`Daffer y Clemens (1977), Almató y otros (1986).

Friedlander y otros (1985) realizaron un estudio en el que perseguían tres objetivos bien definidos: determinar patrones de mejoramiento en el desarrollo de los estudiantes (de 6º, 7º y 8º grados) en el concepto de semejanza, determinar los efectos de una intervención de enseñanza (en 6 clases, con una unidad de enseñanza sobre semejanza) en los tres grados, y determinar si la enseñanza de la semejanza tiene algún efecto en la habilidad general de los estudiantes para el razonamiento proporcional. A los estudiantes se les aplicó un test escrito antes y después de enseñarles el tema.

## Marco teórico

Para el diseño y posterior análisis de los tests y de la unidad de enseñanza de la semejanza tuvimos en cuenta el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, algunos aspectos de la Fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad y semejanza.

En Hart y otros (1981) se presentan las estrategias de resolución, dificultades más frecuentes y tipos de errores que fueron detectados cuando los estudiantes resuelven tareas relacionadas con razón y proporción y que tienen que ver con nuestro tema de estudio. A continuación aparecen dichas estrategias ejemplificadas por nosotros:

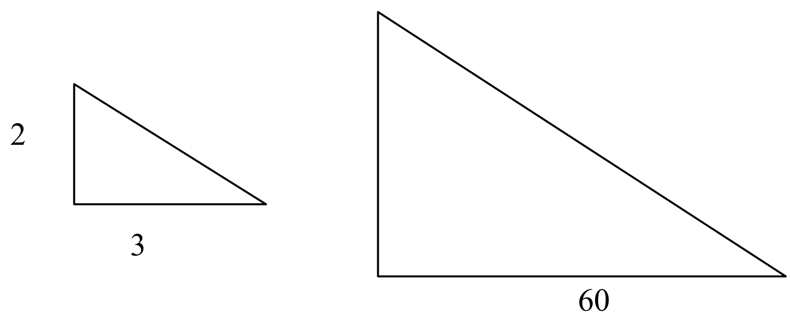
- **Doble y mitad (*Doubling and halving*):**

Este es el procedimiento más fácil para los estudiantes cuando se les enfrenta a tareas en forma de problema o de dibujo. Por ejemplo, cuando se les da un segmento de recta y su ampliación y se les pide que completen la figura rectilínea abierta:


Sin embargo, los investigadores plantean que el éxito que pueda tener este método no es un indicador de lo que pueda suceder cuando la razón no es 2:1. De hecho, algunos estudiantes cuando se les pedía ampliar, duplicaban, y de forma similar cuando se les pedía reducir, partían en dos.

- **Construcción progresiva (*Build up*):**

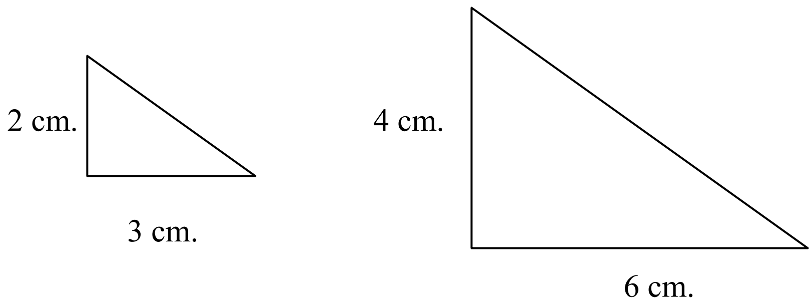
En algunas tareas los estudiantes evitan multiplicar por una fracción y tienden a hacer una construcción progresiva de la respuesta a partir de una relación que establecen entre elementos de la situación. Por ejemplo, cuando se les pide a los estudiantes que determinen la altura del triángulo grande:



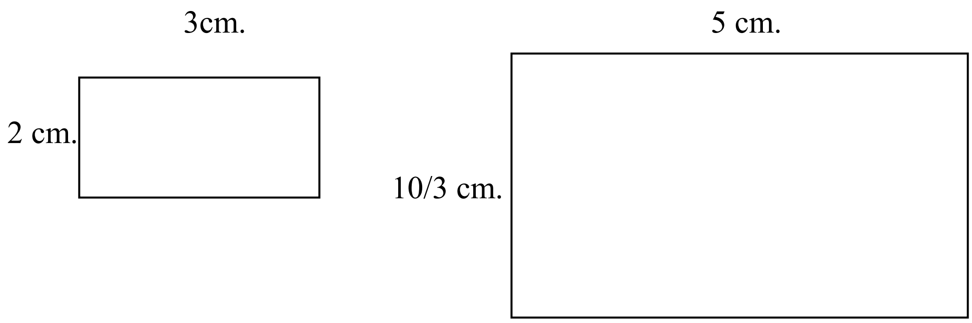

Establecen la relación 3 a 2 y luego 6 a 4, 9 a 6, 12 a 8 y así sucesivamente hasta 60 a 40, para concluir que la respuesta es 40.

**- Estrategia multiplicativa:**

En tareas en las cuales los estudiantes deben decidir la semejanza de figuras presentes en un problema o en un dibujo, ellos plantean que sí lo son si las medidas de los lados en una ellas son múltiplo en la otra. Por ejemplo, al decidir la semejanza de las figuras:




Los estudiantes plantean que son semejantes puesto que las medidas de los lados del triángulo grande son el doble de las medidas de los lados del triángulo pequeño. Este método causa confusión en los estudiantes ya que cuando las medidas de los lados en una de las figuras no son múltiplo entero de las medidas de los lados en la otra, ellos tienden a creer que las figuras no son semejantes, por lo que se convierte en una estrategia errónea. Por ejemplo, cuando se le pide a los estudiantes que decidan la semejanza de las figuras dadas:




Ellos responden que las figuras no son semejantes porque la medida del largo del rectángulo grande (5 cm.) no es un múltiplo de la medida del largo del pequeño (3 cm.).

**- Métodos ingenuos *(Naive)*:**

Hace referencia a la más sencilla e ingenua respuesta encontrada. Por ejemplo, cuando se le pide a un estudiante que amplíe una figura según una razón, aún sabiendo de lo que ello implica, no utiliza los datos ni la medida de la figura, sino que dibuja otra figura parecida más grande.

> Así al pedirle a un estudiante que amplíe un rectángulo, él dibuja cualquier rectángulo o amplia el largo pero no el ancho. La idea de que la nueva figura debería ser semejante a la original les extrañó. (Hart et al, 1984; pág. 93).

**- Estrategia aditiva o de la diferencia constante:**

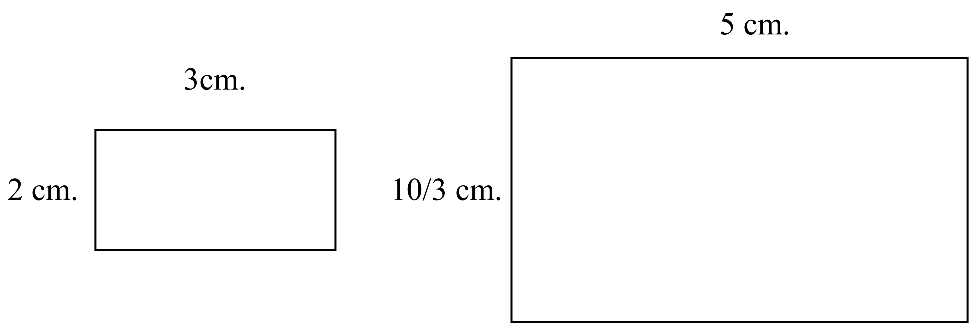
Es otra estrategia errónea, aunque más elaborada, que fue utilizada por los estudiantes en tareas relacionadas con ampliación, en la cual, ellos se concentran en la diferencia a-b y no en la razón a/b. Por ejemplo, cuando se le pide a los estudiantes que amplíen el rectángulo:


de tal forma que la nueva base sea 12cm., ellos dan como respuesta que la altura es 10 cm. Por un lado, porque dicen 12-5=7 y este valor se lo adicionan a la altura 3, para obtener así 7+3=10. Por otro lado, porque dicen 5-3=2 y este valor se lo restan a 12, para así obtener 12-2=10.

Esta estrategia por lo regular también es resultado de que los estudiantes evitan multiplicar por una fracción. Por ejemplo, en la situación anterior, multiplicar el factor de ampliación 12/5 por la altura a ampliar que es 3cm.

**- Estrategia multiplicativa con ajuste:**

Es una estrategia que, según como se use, puede ser una estrategia errónea o correcta. En el contexto geométrico, consiste en multiplicar las medidas de los lados de una figura por un valor entero y sumar o restar otro (incluso el mismo), resultando una estrategia errónea. O multiplicar las medidas de los lados de una figura por un valor entero y sumar o restar una fracción de la medida del lado, resultando una estrategia correcta. Por ejemplo, para justificar la semejanza de los rectángulos:



plantean erróneamente que 5 resulta de operar 3*2-1 y como 10/3 no resulta de operar 2*2-1, las figuras no son semejantes. O plantean de manera correcta que 5 resulta de operar 3*2-(1/3)*3 y de forma similar que 10/3 resulta de operar 2*2-(1/3)*2, lo que les permite decir que los rectángulos son semejantes.

- **Omisión de parte de los datos del problema:**

Es una estrategia errónea frecuente en la resolución de problemas de razón y proporción y consiste en que los estudiantes ignoran parte de los datos del problema. Por ejemplo, si el problema es de comparación de razones entonces intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes (o los consecuentes) de las dos razones. En la situación en que se pide a los estudiantes que digan en qué terreno juegan más apretados los niños: en uno de 12 metros cuadrados de área con 6 niños jugando o en uno de 16 metros cuadrados y 8 niños jugando. [1] Ellos responden que en el segundo, puesto que hay más niños en el terreno.

- **Estrategia de valor unitario:**

Es una estrategia correcta usada por los estudiantes cuando resuelven problemas de razón y proporción, aunque poco usual según Hart y otros. Consiste en calcular el valor unitario y utilizar éste para hallar el valor desconocido. Por ejemplo, cuando se plantea a los estudiantes: Dado que 7 metros de cuerda cuestan $ 630, encontrar el precio de 24 metros de la misma cuerda. Ellos plantean:

7 mts de cuerda cuestan……..$ 630
1 mt de cuerda cuesta………$ 630/7

24 mts de cuerda cuestan…..$ $\dfrac{630*24}{7}$

Estas dos últimas estrategias de resolución son usuales en contextos diferentes al puramente geométrico.

En Freudenthal (2001) se plantea algunos pasos que según él deben tenerse en cuenta en el recorrido para lograr el objeto mental de semejanza[2]:

[1] Situación equivalente a una planteada por Fernández (2001).
[2] En Gualdrón (2006), se puede encontrar el sentido que, para esta investigación, hemos asumido para cada uno de estos pasos.

> Reconocer la conservación o no conservación de la razón bajo aplicaciones.
> Construir aplicaciones que conservan la razón.
> Resolver conflictos en la construcción de aplicaciones que conservan la razón.
> Manejar operativamente,
> formular,
> relacionar unos con otros:
>
> criterios para la conservación de la razón, tales como
>
> conservación de la igualdad de longitudes,
> conservación de la congruencia,
> conservación de las razones internas,
> constancia de la razón externa,
> conservación de los ángulos,
> y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios. (Freudenthal, 2001; pág. 121-122).

El caso de los criterios para conservación de la igualdad de longitudes no lo tendremos en cuenta como tal, ya que lo consideraremos como incluido en el caso de criterios para la conservación de la congruencia.

Esta secuencia permitirá llevar al estudiante desde las nociones preliminares que ellos tienen, hasta el objeto mental. Además, Freudenthal plantea que la fuerte visualización es una ventaja del contexto geométrico de la razón, en comparación con otros contextos, y que lo que realmente importa es la verbalización gradual del razonamiento visual.

El grado de comprensión que los estudiantes posean de la semejanza estará íntimamente ligado con la riqueza de la concepción que posean, debiendo así la enseñanza proporcionar el mayor número de posibles contextos diferentes con el fin de enriquecer y completar su formación en la semejanza.

Van Hiele (1957) y Van Hiele-Geldof (1957), en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría y una aplicación concreta del modelo en algunos cursos de geometría. La constitución del modelo está basada en la idea central de que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento que son secuenciales, ordenados y de tal manera que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y realizar demostraciones (Jaime, 1993); todo esto como resultado de la instrucción que puede organizarse en fases de aprendizaje.

Las principales propiedades del modelo de Van Hiele que son imprescindibles en la comprensión y utilización del modelo se pueden encontrar, por ejemplo, en Gualdrón (2006). Sólo nos referiremos a la "continuidad de los niveles" en vista de que difiere de la propuesta inicial hecha por los Van Hiele.

Esta propiedad hace referencia a la manera como se produce el paso de un nivel a otro. En la formulación inicial del modelo hecha por los Van Hiele plantearon que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto. Sin embargo, posteriores investigaciones, por ejemplo Burger y Shaughnessy (1990) y Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) han puesto en evidencia la presencia de estudiantes que muestran características propias de dos niveles consecutivos, lo que significa que esos estudiantes se encuentran en transición de un nivel de razonamiento al siguiente. En esta investigación consideramos el carácter continuo de la transición entre niveles.

En sus trabajos originales los Van Hiele plantearon cinco niveles (numerados de cero a cuatro). Teniendo en cuenta que no ha habido unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues algunos hablan de los niveles 0 al 4 y otros de los niveles 1 al 5, hemos optado para esta investigación por usar la numeración del 1 al 5 (es mas cómoda su utilización). Además hemos optado por no mencionar el quinto nivel, debido a que hace referencia a la capacidad de los estudiantes de utilizar y comparar diferentes sistemas axiomáticos y que los estudiantes de secundaria colombianos están muy lejos de lograr esta clase de razonamiento.

Los indicadores generales de nivel se pueden encontrar en diferentes publicaciones, por ejemplo Usiskin (1982), Burger y Shaughnessy (1986), Gutiérrez y Jaime (1998).

Cuando se habla de niveles de razonamiento de Van Hiele es importante hablar también de los procesos de razonamiento que tienen lugar en cada uno de ellos. Por ejemplo, Gutiérrez y Jaime (1998) plantean que un nivel de razonamiento no debe ser considerado como un proceso simple el cual debe ser alcanzado o no por los estudiantes, sino que debe ser considerado como un conjunto de procesos. Además plantean que un estudiante debe ser considerado como que ha alcanzado un nivel de razonamiento sólo cuando este muestra dominio en los procesos que integran tal nivel.

Gutiérrez y Jaime (1998) analizan las propuestas de De Villiers (1987) y Hoffer (1981), entre otros, respecto a la consideración de los niveles de razonamiento de Van Hiele como un conjunto de procesos de razonamiento matemático y adoptan una postura intermedia respecto a dichos procesos de razonamiento característicos de varios (pero no todos) los niveles de Van Hiele:

1. **Reconocimiento** de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.
2. **Definición** de un concepto geométrico. Este proceso puede ser visto en dos vías: Como que el estudiante *formula* definiciones del concepto que ellos aprenden, y como que el estudiante *usa* una definición dada, leída en un libro de texto, o escuchada del profesor u otro estudiante.
3. **Clasificación** de figuras geométricas o conceptos en diferentes familias o clases.
4. **Demostración** de propiedades o afirmaciones, esto es, explicar en una forma convincente porqué tal propiedad o afirmación es verdadera o falsa. (Gutiérrez y Jaime, 1998; pág. 29).

## Metodología

### Diseño del pretest y el postest:

Con el fin de determinar los conocimientos y el nivel de razonamiento previos que poseen los estudiantes sobre semejanza de figuras planas, consideramos oportuno recabar información, mediante la administración de un test, acerca de:

- sus conocimientos en cuanto a contenidos relacionados con el tema,
- sus estrategias de resolución (ejercicios y problemas),
- las dificultades más frecuentes sobre diferentes aspectos de la semejanza de figuras planas,
- los tipos de errores más frecuentes.

En lo que respecta al contenido de los tests, fueron la propia experiencia y resultados obtenidos en las diferentes investigaciones consultadas, los que permitieron la consolidación del diseño de los tests.

En el diseño del pretest se tuvo en cuenta no utilizar el término “semejante”. Éste fue reemplazado por “la misma forma”, como sugieren Hart y otros (1981).

Además, en la elaboración del postest se tuvo en cuenta que el contenido de éste mantuviera correspondencia con las temáticas del pretest y las desarrolladas en la experimentación de la unidad de enseñanza.

En los tests aparecen situaciones en las cuales el estudiante debe justificar el procedimiento que le permitió obtener la respuesta de manera verbal, numérica o gráfica.

Con el fin de contrastar las ideas previas en cuanto a conocimiento y razonamiento que poseen los estudiantes después de experimentar con ellos una unidad de enseñanza del tema semejanza de figuras planas, se diseñó un postest.

**Diseño de la unidad de enseñanza:**

Después de haber realizado un análisis de los temas incluidos en los actuales lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) y de los resultados obtenidos en la etapa diagnóstica (pretest administrado a los grupos seleccionados), además de tener en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele (niveles y fases), aspectos de la fenomenología de Freudenthal y los trabajos de Kathleen Hart, realizamos el diseño de una unidad de enseñanza que abordara los siguientes aspectos:

- Manipulación y observación de formas semejantes.
- Deducción de las propiedades básicas de la semejanza.
- Ampliación y reducción de figuras.
- Aplicación de la semejanza (determinación de longitudes desconocidas).
- Introducción del esquema "*por cada* x *unidades en … hay* y *unidades en …*"
- Perímetro y área entre figuras semejantes.
- Semejanza de rectángulos.
- Semejanza de n-ágonos regulares.
- Semejanza de circunferencias.
- Criterios para la semejanza de triángulos y polígonos.

Con el objeto de:

- Fortalecer la adquisición de los niveles de reconocimiento y análisis de Van Hiele (niveles 1 y 2) en el tema propuesto.
- Realizar una enseñanza correctiva de las ideas erróneas más frecuentes que se presentan cuando los estudiantes se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza y en particular con la proporcionalidad geométrica.
- Presentar los aspectos más relevantes relacionados con la semejanza de tal forma que los estudiantes se familiaricen con ellos y así intentar que adquieran el objeto mental semejanza.

En el diseño de las actividades hubo dos aspectos que se tuvieron presentes: uno fue el tipo de papel sobre el cual se presentarían las tareas a los alumnos, y otro, el tipo de figura sobre la que los alumnos deberían trabajar. De esta forma, las tareas fueron escogidas de manera conveniente o diseñadas de modo que los estudiantes por un lado trabajaran sobre hojas de papel blanco o cuadriculado y manipularan diversas superficies poligonales (entre otras, figuras no estándar), tanto cóncavas como convexas, además de ser cuidadosos con las medidas de las longitudes de dichas superficies y posición en la que ellas se presentan en la hoja y con respecto a las demás de la misma actividad (figuras en posición no estándar). En este sentido Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), teniendo en cuenta las teorías de Van Hiele y Vinner plantean que un estudiante comienza a construir su imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales. Además plantean que un método adecuado de introducción de nuevos conceptos sería la inclusión de ejemplos y contraejemplos. De esta manera pretendíamos eliminar estereotipos, que son muy habituales en la enseñanza de la geometría, que limitan la adquisición de conocimiento de los estudiantes y que, como algunos investigadores lo han comprobado, por ejemplo Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), en algunos casos inducen a determinados errores, como es el uso generalizado de formas típicas como el cuadrado, el rectángulo o el triángulo, además de las posiciones estándar de ellas mismas.

Cada actividad fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales el estudiante debía justificar cada uno de los procesos que lo conducían hacia la respuesta (numérica y/o gráfica y/o verbal). Para el desarrollo de cada una de las actividades el estudiante podía utilizar reglas, escuadras o cartabones, compás, transportador, tijeras y calculadora, entre otros elementos auxiliares.

**Elección y descripción de la muestra:**

La unidad de enseñanza fue experimentada en dos instituciones de enseñanza secundaria de las ciudades de Floridablanca y Bucaramanga (ambas ubicadas en el departamento de Santander - Colombia) durante los meses de agosto y septiembre del curso académico 2005.

El grado escogido para participar en este estudio fue noveno (14-15 años), último año de la educación básica secundaria, debido a que el tema de estudio se encuentra ubicado en este grado, de acuerdo con lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional. En cada institución se tomó un grupo, cada uno con 42 estudiantes. Las edades de los estudiantes en ambos centros oscilaban entre los 13 y los 15 años.

**Metodología de trabajo en clase:**

En las dos instituciones, la experimentación comenzó con la aplicación del pretest a los dos grupos.

En uno de los colegios estuvieron presentes la profesora titular y el investigador. Éste asistió a todas las clases en calidad de observador participativo, observando la actividad de los alumnos y, al mismo tiempo, colaborando con la profesora en las tareas de asesoramiento y orientación a los alumnos durante las sesiones de clase. En la otra institución, fue el investigador quien hizo las veces de profesor.

El medio escolar en el que se llevaron a cabo las experimentaciones de la unidad de enseñanza fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de los estudiantes. Luego de desarrollar las primeras actividades se decidió (por comodidad en la toma de datos) sólo trabajar con 17 estudiantes (por institución) distribuidos en 5 grupos. Todas las actividades fueron realizadas dentro de la jornada escolar.

En total la experimentación se compuso de nueve sesiones de 100 minutos cada una.

Al finalizar la experimentación, se aplicó de manera simultánea el postest a los estudiantes que participaron en la experimentación (34 en total) en una jornada de clase, supervisada por el investigador y la profesora titular, los cuales sólo intervenían para clarificar palabras o frases; no intervinieron para guiar las respuestas de los estudiantes.

Las actividades de la unidad de enseñanza se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. Algunas tareas planteadas requerían para su realización de un material didáctico adecuado, material que les fue proporcionado en cada caso a los grupos y que se detalla junto a la exposición de las tareas. Además del material al que nos hemos referido, durante toda la experimentación, los estudiantes llevaban tijeras, regla, escuadras, transportador, compás, calculadora, para su uso en el momento que se creyera necesario.

En lo que respecta a la organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que plantea el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.

**Recogida de información:**

Los medios utilizados para la recogida de información en los grupos experimentales fueron:

- Material desarrollado por los estudiantes en el pretest y el postest.
- Material desarrollado por los estudiantes en cada una de las actividades.
- Grabaciones en video tomadas de cada una de las actividades desarrolladas.
- Las notas tomadas por el investigador durante el desarrollo de las actividades.

En cuanto a la toma de información por medio de las grabaciones, éstas se realizaron haciendo seguimiento básicamente a dos subgrupos (en cada institución), los cuales fueron formados por las profesoras titulares teniendo en cuenta la empatía que existía entre los miembros del grupo hacia el trabajo en estas condiciones. También se grabaron las intervenciones de la docente titular en un caso y del investigador en el otro.

## Resultados

Con el fin de presentar un análisis de actuaciones de los estudiantes de las instituciones que participaron en la experimentación, a continuación presentamos los aspectos que nos han parecido más relevantes. En este análisis, se tendrá en cuenta lo planteado en el marco teórico sólo en lo referente a los estudios de Hart. Con respecto a los estudios de Hart, nuestro interés es evaluar la adquisición de estrategias correctas y la eliminación de estrategias erróneas en los estudiantes después de la experimentación.

Recordemos primero las diferentes estrategias correctas y erróneas ya comentadas y las que resultaron de la experimentación de la unidad de enseñanza.

Estrategias correctas:

(CP): Construcción progresiva

(EM): Estrategia multiplicativa

(EMA): Estrategia multiplicativa con ajuste

Estrategias erróneas o que pueden conducir a error:

(MI): Método ingenuo

(EA): Estrategia aditiva

(DM): Doble y mitad

(EME): Estrategia multiplicativa errónea

(EMAE): Estrategia multiplicativa con ajuste errónea

(ODP): Omisión de parte de los datos del problema

Otras respuestas:

(VI): Respuestas que no incluyen operaciones aritméticas sino argumentos de tipo visual.

(NC): No contestan o respuestas incoherentes e inclasificables.

| **Los 10 grupos** | **Estrategias correctas** | | | **Estrategias erróneas** | | | | | | **Otras respuestas** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | CP | EM | EMA | MI | EA | DM | EME | EMAE | ODP | VI | NC |
| Actividad Nº 1 | | | | | | | | | | 10 | |
| Actividad Nº 2 | | | | | | | | | | 10 | |
| Actividad Nº 3 | | 1 | | | | | | | | 9 | |
| Actividad Nº 4 | | 1 | | | | | | | | 9 | |
| Actividad Nº 5 | | 2 | | | | | | | | 8 | |
| Actividad Nº 6 | | 6 | | | | | | | | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Actividad Nº 7 | | 10 | | | | | | | | | |
| Actividad Nº 8 | | 9(8a-d)<br>1(8a-c) | | | | | | | | 1(8d) | |
| Actividad Nº 9 | | 10 | | | | | | | | | |
| Actividad Nº 10 | 1 | 8 | | | | | | | | | 1 |
| Actividad Nº 11 | | 10 | | | | | | | | | |
| Actividad Nº 12 | | 10 | | | | | | | | | |
| Actividad Nº 13 | 2 | 8 | | | | | | | | | |
| Actividad Nº 14 | | 9 | | | | | | | | | 1 |
| Actividad Nº 15 | | 8 | | | | | | | | | 2 |
| Actividad Nº 16 | | 8 | | | | | | | | | 2 |
| Actividad Nº 17 | | 6(17a-b) | | | | | | | | 7(17c)<br>1(17a-c) | 2(17a-b)<br>1(17c)<br>1(17a-c) |
| Actividad Nº 18 | | 8(18a) | | | | | 2(18a) | | | 10(18b) | |
| Actividad Nº 19 | | 5(19a-b)<br>2(19b)<br>1(19a) | | | | | | | | 2(19a-b)<br>1(19b)<br>2(19a) | |
| Actividad Nº 20 | | 7 | | | | | | | | 3 | |
| Actividad Nº 21 | | 7(21a-b) | | | | | | | | 7(21c-d) | 3(21a-d) |
| Actividad Nº 22 | | 9 | | | | | | | | | 1 |

*Tabla 1. Estrategias de cálculo utilizadas por los 10 grupos.*

En la tabla 1 mostrada arriba, se resumen las actuaciones de los 10 grupos. Aquí podemos observar que:

Los datos reflejan un claro uso por parte de los estudiantes de estrategias correctas y un casi nulo uso de estrategias erróneas durante el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad de enseñanza.

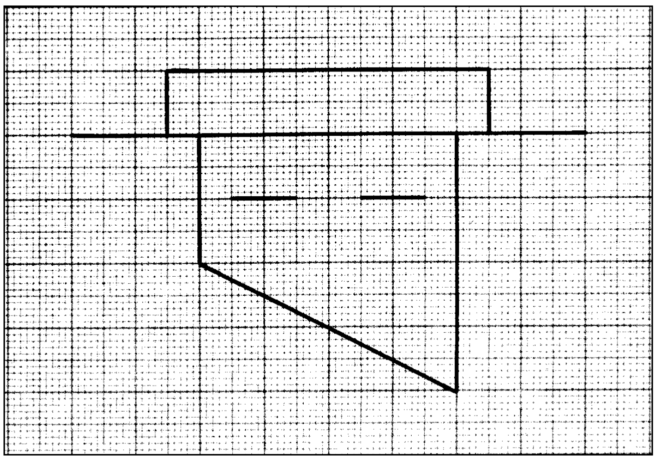
Los estudiantes prefieren el uso de la estrategia multiplicativa (EM) en la resolución de tareas que tienen que ver con la semejanza. Esto parece indicar que los estudiantes comprenden que la operación implicada en dichas tareas no es la adición. Algo que también confirma el hecho de evitar el uso de estrategia aditiva es que apenas hubo estudiantes que usaron la estrategia "construcción progresiva", que está relacionada con la adición.

Los estudiantes aprovecharon positivamente la posibilidad que se les presentó de tener un acercamiento a la mayoría de estrategias erróneas, como lo confirma el uso casi nulo por parte de ellos de estrategias erróneas.

Algunos ejemplos que complementan la información de la tabla se muestran a continuación.

Veamos la justificación dada por uno de los grupos respecto de la actividad 7 [3] de la unidad de enseñanza:

**Actividad Nº 7**



a) Utilizando papel cuadriculado, amplía esta figura al doble.

b) ¿Qué dificultades has tenido? ¿Cómo las has resuelto?

c) Prueba ahora a ampliarla al triple.

d) Redúcela a la mitad.

e) Explica el procedimiento utilizado.

se multiplican las medidas de los lados por 2, y así
obtenemos la figura ampliada al doble.
después, se multiplican las medidas de los lados (de la fig. inicial)
por 3 para ampliarla al triple.
por último, dividimos en 2 las medidas de la figura inicial,
para reducirla a la mitad.

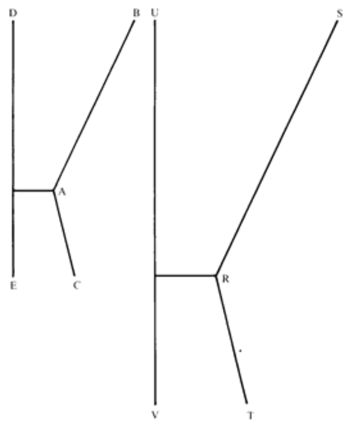
[3] Dibujo tomado de Hart (1984)

Esta respuesta nos muestra claramente el uso de la EM ("estrategia multiplicativa") por parte de los estudiantes. Una respuesta errónea hubiera ocurrido si, por ejemplo, los estudiantes hubiesen dibujado cualquier ampliación sin tener en cuenta el factor de ampliación.

A continuación presentamos la actividad 10 [4] y un ejemplo de respuesta de uno de los grupos.

**Actividad Nº 10**

Estas dos letras tienen la misma forma (son semejantes), una es más grande que la otra. AC mide 4 unidades. RT mide 6 unidades.




a) AB mide 7 unidades. ¿Cuál es la longitud de RS?

b) UV mide 15 unidades. ¿Cuál es la longitud de DE?

c) Escriba el procedimiento utilizado para dar cada una de sus respuestas.

la figura mas grande es el 1½ de la original entonces para Hallar las medidas q^ no nos dieron dividimos la medida correspondiente. y a este valor se le suma la medida original.

En esta ocasión, el grupo seleccionado hace uso de la CP ("construcción progresiva"). El grupo identifica el factor de ampliación y deduce las longitudes desconocidas construyéndolas

[4] Actividad tomada de Hart (1984)

progresivamente, es decir, divide la longitud dada entre 2 y a este valor le adiciona su valor correspondiente en la otra figura.

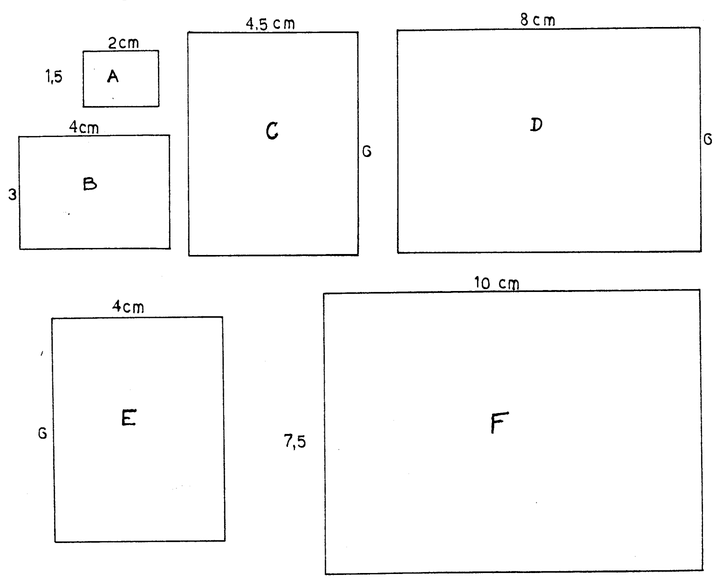
Por último, un ejemplo de respuesta de uno de los grupos, a la actividad 17, en el apartado c, en donde se nota claramente que los estudiantes, únicamente, usan argumentos de tipo visual. Por esto la respuesta fue clasificada como VI ("respuestas que no incluyen operaciones aritméticas sino argumentos de tipo visual").

**Actividad Nº 17**

a) Complete el cuadro con la información solicitada.

b) Determine cuáles de los rectángulos son semejantes (tienen la misma forma).

c) Escriba el procedimiento utilizado para dar la respuesta.




| Rectángulo | Lado menor | Lado mayor | Long. mayor<br>---------------<br>Long. Menor |
|---|---|---|---|
| A | | | |
| B | | | |
| C | | | |
| D | | | |
| E | | | |
| F | | | |

c) Recorte todos los rectángulos, trace a cada uno sus dos diagonales y superpóngalo (de mayor a menor área), haciéndolos coincidir todos por el vértice inferior izquierdo.

¿Qué observa en esta superposición respecto de las diagonales de los rectángulos que son semejantes? Explica tus observaciones.

- En todos los rectángulos que son semejantes, sus diagonales coinciden.
- Pero la diagonal del rectángulo que no es semejante no coincide con las otras.
- las otras diagonales de los rectángulos semejantes son paralelas entre sí a excepción de la diagonal del rectángulo que no es semejante a los otros.

## Conclusiones

Los grupos de estudiantes, en su gran mayoría, prefieren usar la estrategia multiplicativa. Esto, según los estudios de Hart, muestra que los estudiantes son conscientes de que la operación necesaria cuando se enfrentan a tareas relacionadas con razón y proporción, es la multiplicación y no la adición. Es decir, hemos logrado que los estudiantes vean que la estrategia aditiva es incorrecta.

Los datos reflejan que la práctica totalidad de los estudiantes usaron estrategias correctas. Este es un indicio del efecto positivo de la unidad de enseñanza experimentada. Por ejemplo, en los resultados del pretest se aprecia que hubo un buen número de respuestas aditivas y de respuestas incorrectas (de otro tipo) que ahora no se aprecian[5].

Los datos reflejan un claro uso por parte de los estudiantes de estrategias correctas y un casi nulo uso de estrategias erróneas durante el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad de enseñanza.

## Referencias bibliográficas

Almató, A., Fiol, M. L., Fortuny, J. M., Hosta, I., y Valldaura, J. (1986). *Proposta didàctica per treballar la proporcionalitat* (vol. 2). Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya.

[5] Los resultados completos se pueden encontrar en Gualdrón (2006).

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17, 1*, 31-48.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry* (Reporte final). Corvallis, USA: Oregon State University.

De Villiers, M. D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele theory: some critical comments*. Stellenbosch, R. South Africa: RUMEUS: Facultad de Educación. Universidad de Stellenbosch.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (2001). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados)* (2ª edición). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Friedlander, A., Lappan, G., y Fitzgerald, W. M. (1985). The Growth of similarity concepts over the middle grades (6, 7, 8). *Proceedings of the 7th Annual Meeting of the PME-NA.*, 86-92.

Grupo-Beta. (1997). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gualdrón, É. (2006). Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado. Valencia, Universidad de Valencia**:** 191.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20, 2 y 3*, 27-46.

Gutiérrez, Á., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3*, 237-251.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children`s strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.

Hart, K., y otros (1981). *Children`s understanding of mathematics: 11-16* (1 ed.). Londres, Inglaterra: John Murray.

Hart, K., y otros (1989). *Children`s mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. .* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon, 23*, 49-62.

Lappan, G., Fitzgerald, W., Winter, M. J., y Phillips, E. (1986). *Similarity and Equivalent Fractions*. Michigan: Addison-Wesley.

Margarit, J., Gómez, B., y Figueras, O. (2001). Ratio comparison: Performance on ratio in similarity tasks. *Proceedings of the 25th PME Conference, 1*, 340.

M.E.N. (2003). *Estándares básicos de matemáticas y lenguaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

O`Daffer, P. G., y Clemens, S. R. (1977). *Geometry: An Investigative Approach*. Illinois, USA: Addison-Wesley.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, USA: ERIC.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984, pp.1-206).

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

## LOS EJEMPLOS UTILIZADOS POR LOS PROFESORES EN LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Lorenzo J. Blanco

Universidad de Extremadura

Luis C. Contreras

Universidad de Huelva

Carlos A. Figueiredo

Escuela de Secundaria D. Sancho II de Elvas

### Resumen

La comunicación presenta una investigación enmarcada en los trabajos del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura y desarrollada en la Escola Secundária de D. Sancho II em Elvas, Portugal, durante el año lectivo 2004/2005. El objetivo es analizar los ejemplos utilizados para introducir el concepto de función, por cuatro estudiantes para profesores de la Licenciatura de Enseñanza de las Matemáticas, que se imparte en Portugal, durante el periodo de sus prácticas docentesAsumimos que cuando los estudiantes para profesores desarrollan sus primeras prácticas docentes lo hacen influidos por su historia personal: la materia aprendida en su fase introductoria y, también, su experiencia discente desarrollada durante su etapa escolar lo que lleva implícito sus creencias y actitudes sobre la matemática y sobre su enseñanza/aprendizaje.

Blanco, L.; Figueiredo, C.; Contreras, L. (2007) Los ejemplos utilizados por los profesores en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 83-96.

## Introducción

El trabajo que presentamos tiene su origen en la línea de investigación que sobre "*El Profesorado de Matemáticas: formación inicial y desarrollo profesional*" se viene desarrollando simultáneamente y en colaboración en los Departamento de Didáctica de las Ciencias de la Universidad de Huelva y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura.

La colaboración entre estos dos departamentos provocó que un trabajo de investigación que se estaba desarrollando para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados dentro del Programa de Doctorado ofrecido por el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura (Bienio 2003-2005), se convirtiera en un proyecto más ambicioso para analizar la utilización de los ejemplos en la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas.

Teníamos dos ideas marco:

- Analizar cuál era el papel de los ejemplos en la E/A de las matemáticas en diferentes usos y contextos (niveles y tópicos).
- Comprobar si el análisis del uso de los ejemplos de los profesores, en formación o en activo, podría aportarnos elementos para describir /conocer su conocimiento profesional.

Estas dos ideas fueron inicialmente desarrolladas en un contexto concreto que fue el que nos proporcionó la investigación desarrollada por Figueiredo (2005) [1] sobre la ejemplificación utilizada por los profesores en prácticas y su aplicación durante el año de prácticas, cómo estos profesores escogen sus ejemplos y el origen, la situación y el modo como los aplican.

En esta investigación señalamos como referencia marco tres coordenadas de carácter general y una específica al tópico matemático elegido:

i) el Conocimiento Didáctico del Contenido.

ii) los esquemas conceptuales.

iii) la Ejemplificación presentada por los profesores en prácticas.

iv) el concepto de Función.

## Marco de la investigación

[1] Esta investigación se desarrollo dentro del Programa de Doctorado ofrecido por el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura (Bienio 2003-2005), para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados. En este programa se desarrolla una una línea de investigación sobre "*El Profesorado de Matemáticas: formación inicial y desarrollo profesional*" durante el segundo año del programa. http://carlosfigueiredo.home.sapo.pt/index.html

- **Conocimiento y desarrollo profesional del los profesores se Matemáticas.**

Los trabajos desarrollados en ambos Departamentos y por otros grupos que se coordinan en el Grupo de Trabajo de la la SEIEM 'Conocimiento y desarrollo profesional', (Universidades de Sevilla, Extremadura, Huelva, Cádiz,, Lisboa y recientemente en la Universidad de Alicante) constituyen la referencia básica desde la que iniciamos la revisión para enmarcar la investigación.

Estos trabajos son fáciles de encontrar en las revistas y actas en castellano, (en publicaciones de carácter local o internacional) y existen cada vez referencias a ellos en otras publicaciones internacionales.

Dentro de este marco general, queremos señalar que las matemáticas se aprenden, también, a través del contacto con ejemplos. A través de ellos, las definiciones pueden encontrar algún sentido (Watson y Mason, 2002). Por tanto, consideramos la ejemplificación como elemento de conocimiento didáctico del contenido que hace de puente entre la forma como el profesor enseña y la forma como los alumnos aprenden, esto es, algo que une a los dos polos de este proceso de enseñar a alguien que aprende conceptos matemáticos. Igualmente, ayuda a crear nexos y relaciones entre conceptos matemáticos.

- **Esquemas conceptuales.**

El sentido que hemos de dar al término **concepto** no es fácil de apuntar. La necesidad de dar un sentido preciso a estos y otros términos ya se muestra evidente en los trabajos de Skemp (1971) donde el autor se encarga de definir y aclarar ambigüedades en el sentido de los términos por él utilizados cuando explica cómo los individuos construyen conceptos en general y, en particular, cómo construyen conceptos matemáticos. Siguiendo al autor, un concepto es un objeto puramente mental y requiere, para su formación, un cierto número de experiencias que tienen algo en común y que, por abstracción, tomamos conciencia de sus semejanzas (Skemp, 1971).

La adquisición de un esquema conceptual requiere que se unan ciertos significados a la palabra que designa el concepto: definición, imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfico, etc), propiedades, procedimientos y experiencias desarrolladas asociadas al concepto, ejemplos válidos, (Azcárate, 1995; 1997; Calvo y Azcárate, 2001).

Los términos *imagen de un concepto* y *definición del concepto* son términos introducidos por Tall y Vinner (1981).

- **Ejemplificación presentada por los profesores en prácticas.**

"Por ejemplo" es una expresión que encierra mucho del espíritu de la investigación que desarrollamos. Es una expresión que todo profesor de matemáticas usa innumerables veces todos los días. Lo que atrae en esta expresión es, realmente, lo que viene a continuación de ella y en qué contextos son pronunciadas estas dos palabras.

Para orientar la investigación que desarrollamos sobre los ejemplos utilizados por los profesores en prácticas consideramos las dos formulaciones siguientes:

- A través de la ejemplificación (ejemplos y contra ejemplos) se promueve en el alumno la construcción de la estructura mental del concepto.
- Por los ejemplos utilizados y lugar dentro del proceso metodológico seguido puede observarse el conocimiento didáctico del contenido en los profesores.

Usamos el término "ejemplo" para referirnos a un amplio espectro de géneros matemáticos tales como ilustraciones de conceptos, técnicas de demostración, problemas, objetos matemáticos que satisfacen una condición dada, etc. (Watson y Mason, 2002). Podemos distinguir entre dos grandes clases de ejemplos: los esencialmente inductivos, aquellos que apuntan para algo más general, y los que son particularidades de una generalidad. Usamos estos ejemplos para:

*personificar*, o *materializar*, conceptos abstractos y mostrar procedimientos generales, su uso es una práctica pedagógica muy común que facilita la abstracción por parte del alumno;

después tenemos otros ejemplos, aquellos a que llamamos ejercicios, no son inductivos, antes cumplen un papel ilustrativo y están orientados para la actividad práctica del alumno (Rowland, Thwaites y Huckstep, 2003).

Usando las dos clases de ejemplos descritos, la selección de los ejemplos por parte de los profesores no es trivial ni arbitraria, la forma de dificultad gradual y creciente es generalmente bien comprendida, de esta manera, el éxito experimentado por los alumnos a través de ejemplos rutinarios los prepara para enfrentar otros más desafiantes (Rowland, Thwaites y Huckstep, 2003). Además de esto, la utilización de ejemplos puede ser o no acertada, promover o no buenos aprendizajes. Por tanto, estamos interesados en crear buenas relaciones, entre el lenguaje y la comprensión activa, efectivas para dirigir a los alumnos hacia formas útiles de comprender las matemáticas (Watson y Mason, 2002) a través de los ejemplos que el profesor utiliza.

Existen varios trabajos de Mason y Watson (2001, 2004) que abordan la tipificación de ejemplos y donde analizan el caso en que se presentan a los alumnos colecciones de ejemplos de dificultad y complejidad creciente de forma que se integren más profundamente con estructuras matemáticas. Michener (1978) identifica cuatro clases de ejemplos: 1) ejemplos de iniciación; 2) ejemplos de referencia; 3) ejemplos modelo o genéricos y 4) contra ejemplos. Los primeros funcionan como motivación; los segundos forman, de alguna manera, un inventario, donde el concepto aparece repetidas veces; los terceros generalizan lo que se asume por defecto, esto es, a partir de ese punto un ejemplo modelo se vuelve un ejemplo de referencia; y los cuartos demuestran que determinadas afirmaciones son falsas.

Para estudiar el papel que los ejemplos juegan en la didáctica de las matemáticas Rowland, Thwaites y Huckstep (2003) crearon un sistema de 18 códigos que son atribuidos a 18 aspectos presentados por los ejemplos de estudiantes para profesores de enseñanza primaria. El objetivo era clasificar a los estudiantes por el estudio de los ejemplos buenos o de los ejemplos pobres que ellos presentaron. Aunque no hayan encontrado relaciones directas entre conocimiento matemático y competencias pedagógicas, pudieron, eso sí, aclarar ciertas ligaciones entre estos dos conocimientos por la observación de determinados momentos y episodios.

## Los ejemplos utilizados por los profesores en prácticas cuando enseñan el concepto de Función.

- **Dos nuevas referencias**

Como hemos señalado este trabajo surge de una investigación para la obtención del DEA desarrollada por Figueiredo (2005) que añade a las tres referencias anteriores dos aspectos concretos: el concepto de función y los profesores en formación como informantes claves.

a) *El concepto de función* ha sido, en las últimas décadas, considerado fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La revisión bibliográfica nos muestra la variedad de formas de tratar este tema y el número de investigaciones orientadas a aclarar puntos y pormenores relacionados con aspectos del concepto de función. Tomamos como referencia a DeMarois y Tall (1996) que presentaron su visión de la construcción del concepto de función en el alumno, así como el modo de describir la forma en que el concepto va siendo comprendido. Se indica cómo la imagen del concepto puede ser descrita según dos dimensiones: en profundidad y en amplitud (DeMarois y Tall, 1996).

El modelo presentado se basa en los términos ***Facetas y Camadas***:

* El término *facetas* se destina a describir la dimensión relativa a la amplitud del concepto de función y las relaciones entre estas dimensiones. Las Facetas estudiadas por DeMarois y Tall, (1999) incluyen la ***notación*** de la función (algebraica), el uso ***coloquial*** de la máquina de funciones como caja de input y output, ***numérica*** (tablas) y ***geométrica*** (gráficos) e incluyen también la ***verbal*** y la ***escrita***.

* El término *camada* se refiere a "una de las varias capas o estratos" y se destina a describir la dimensión relativa a la profundidad con que el concepto de función es comprendido por el alumno (DeMarois y Tall 1996, 1999). El término Procepto es una simbiosis entre tres cosas: un proceso, un concepto y un símbolo (Gray e Tall, 1994).

El modelo podrá ser representado como un disco dividido en trozos, las facetas, y en sectores circulares concéntricos, las camadas, conforme a la figura 1.

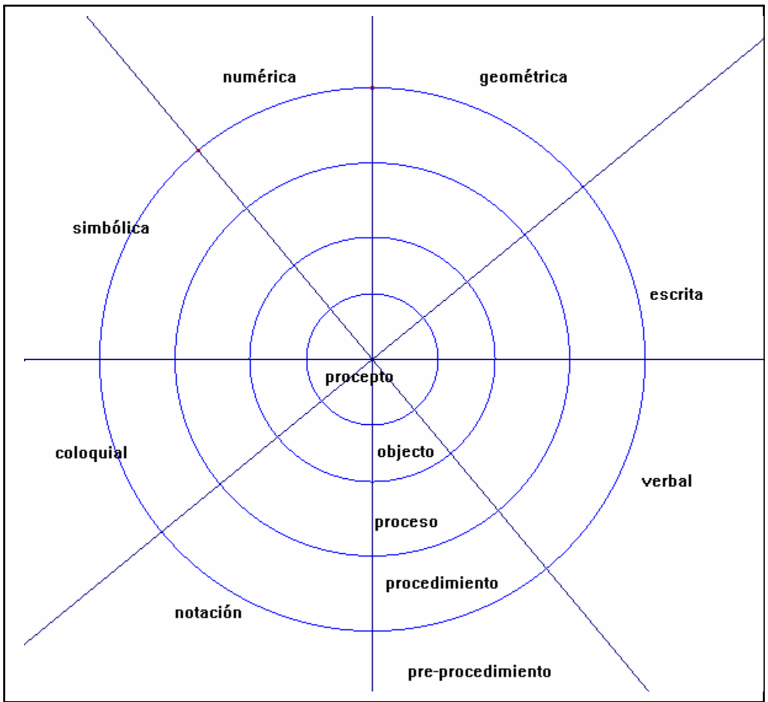



*Figura 1*

Nos interesó este tipo de modelo porque se adecuaba a nuestro estudio de forma muy particular pues cumplía las perspectivas necesarias para la observación y el análisis de cualquier proceso de ejemplificación que se presentase en un contexto de concepto de función.

b) *Los profesores en formación*

La Licenciatura para la Enseñanza de las Matemáticas que se desarrolla en la Universidad de Évora (Portugal), incluye durante el 5º curso las Prácticas Pedagógicas que se desarrollan durante un curso escolar en un aula de secundaria[2]. Los protagonistas del estudio fueron cuatro estudiantes para profesores durante las prácticas destinados a la Escuela Secundaria D. Sancho II de Elvas (Portugal). El investigador es el profesor Tutor del centro, profesor de Matemáticas, quien los acompaña diariamente en el año de prácticas.

En todo momento, los informantes, manifestaron su disponibilidad para integrar el equipo de trabajo que iba a ser constituido, y participar en la investigación.

- **Definición del problema en estudio**

La necesidad del uso de ejemplos nos parece obvia pues resulta difícil que los alumnos puedan aprender sobre la base exclusiva de las definiciones. Los ejemplos y contra-ejemplos ayudan a entender y matizar las definiciones de los conceptos (Orton, 1990). Por otra parte, la necesidad de introducir, modificar y desarrollar una estructura conceptual en el alumno obliga a que se modifique nuestra propia estructura del concepto. A medida que controlamos las perspectivas del concepto, más capacitados estamos para poder transmitir el concepto en cuestión. En el fondo, es este proceso enseñanza/reflexión/enseñanza que nos permite nuestro desarrollo profesional ayudándonos a mejorar nuestra práctica. Cada concepto puede ser definido de diferentes maneras. Disponer de una gran variedad de definiciones equivalentes colabora en la resolución de problemas donde el concepto está inserto (Calvo y Azcárate, 2001). De esta manera, también la ejemplificación será tanto más eficaz cuanto más variada sea la forma de enfocar y abordar el concepto.

La ejemplificación encierra en sí mismo las dos caras de la misma moneda. Por un lado tiene un papel esclarecedor, pero, si es deficiente, puede crear problemas graves de errores de concepto, concepciones alternativas, obstáculos cognitivos, etc. Siendo así, no es extraño que la forma de transmisión de conocimientos sea, por parte del profesor, un proceso que requiere todo el cuidado.

[2] Los alumnos tiene 15-16 años por lo que se correspondería a nuestro Bachillerato.

Lo que se pretendió fue observar situaciones específicas del proceso de enseñanza/aprendizaje por vía indirecta, ver lo que nos dicen los ejemplos, las situaciones en que fueron utilizados y con qué función y objetivo, para que, a partir de esos aspectos, podamos hacer una lectura de otros aspectos más difícilmente caracterizables. Los ejemplos fueron la forma, y el concepto de función fue el vehículo para poder mirar los conocimientos iniciales que cuatro jóvenes profesores pusieron de relieve y reflexionar de forma que puedan mejorar su *saber hacer* como jóvenes profesores.

En consecuencia, en nuestro trabajo nos propusimos los siguientes objetivos:

- Estudiar las especificaciones de los ejemplos para establecer relaciones con la variable del esquema conceptual.
- Observar el papel de los ejemplos en el proceso de enseñanza/aprendizaje del concepto de Función durante el año de Prácticas Pedagógicas de cuatro profesores en prácticas.
- Estudiar, con la ejemplificación utilizada, la existencia de patrones en le el Conocimiento Didáctico del Contenido de cuatro profesores durante el tiempo de Prácticas Pedagógicas.
- Aportar algunas sugerencias a la Formación Inicial de Profesores por el estudio de la ejemplificación de estos cuatro Profesores en prácticas.

- **Metodología**

Nuestra pretensión era estudiar a los sujetos integrados en su medio, observándolos directamente en las aulas mientras desarrollaban su trabajo docente. Consecuentemente, este estudio se integró en el ámbito de un estudio etnográfico y se orientó en una metodología encuadrada en un paradigma cualitativo.

El análisis y reflexión sobre la práctica es lo que nos permite mejorar y ayudar a mejorar, con base en los tres momentos identificados, a saber: una primera entrevista en setiembre de 2004 en el inicio de las prácticas, la selección de la información sobre los ejemplos durante la práctica de enseñanza de los contenidos en mayo de 2005 y la segunda entrevista en junio de 2005 al final de las prácticas. El análisis y reflexión entre todos los informantes, a lo largo de todo el proceso fue una constante, permitió disipar dudas y aclarar pormenores desde el momento en que surgieron.

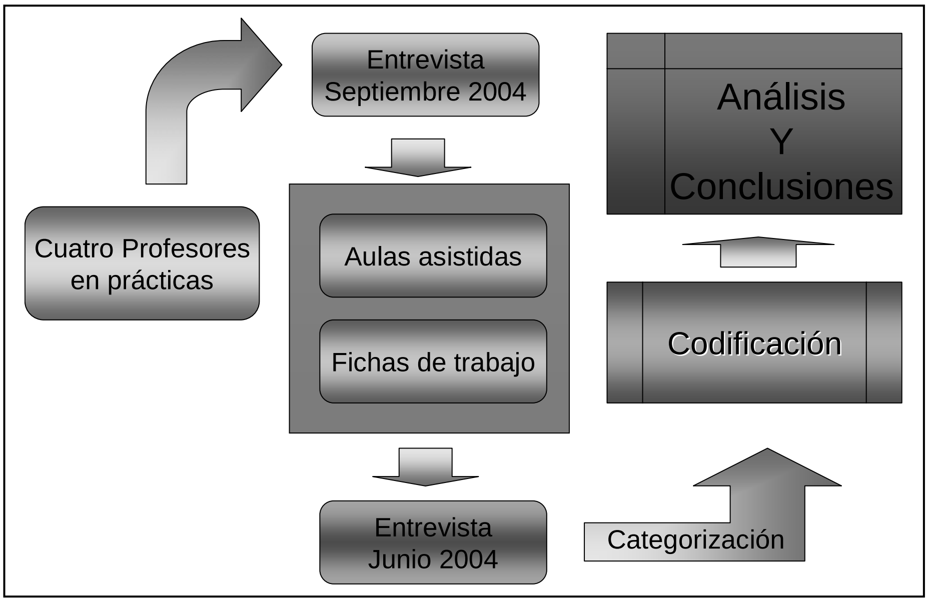



*Figura 2. Esquema que representa los pasos seguidos*

Los materiales para análisis son de dos tipos: referencias obtenidas en las entrevistas y ejemplos que fueron conseguidos en las aulas y en las fichas de trabajo.

Las sesiones de trabajo estaban constituidas por todo el núcleo de prácticas. La frecuencia de las sesiones no obedeció a un calendario rígido, las sesiones se celebraron diariamente en algunos periodos y semanalmente en otros. Tenían como objetivo la preparación de los trabajos, así como la reflexión sobre asuntos de interés para la investigación y para las prácticas en sí. Los profesores en prácticas fueron asistidos semanalmente y, normalmente, el profesor observado era asistido por todos los elementos del núcleo: el orientador de la escuela y los otros tres profesores en prácticas. En todas las aulas asistidas fueron recogidos todos los ejemplos propuestos y, posteriormente, fueron utilizados en las sesiones dando origen a las notas de campo.

El sistema de categorías de la investigación fue orientada por un imperativo de simplicidad y por el propio proceso de adquisición de los conceptos de funciones. Para este estudio se optó por un sistema simple y sin subcategorías:

La 1ª Categoría es **Definición**: Los ejemplos considerados en esta categoría son aquellos que se presentan a los alumnos inmediatamente después de la definición del concepto, pasando de una situación general, que es la definición, a situaciones concretas de ese concepto. De cualquier manera, como alternativa, si fuese esa la selección del profesor, estos primeros ejemplos pueden surgir antes de presentarse la definición. Esto es, en primer lugar el profesor presenta una serie de ejemplos que manifiestan características comunes; posteriormente, sobre la base de esas características, la definición del concepto surge naturalmente escrita por los alumnos. Al contrario, esta alternativa configura una transición de lo particular para lo general, de situaciones concretas del concepto, los primeros ejemplos, hacia otra situación de carácter más amplio, la definición de ese concepto.

La 2ª Categoría es **Representación**: Una vez introducido el concepto, después de que los alumnos hayan tomado un contacto inicial con él y de haber entendido sus características básicas, surge un segundo momento con los ejercicios típicos o con las primeras situaciones problemáticas del concepto en cuestión. Tanto los ejercicios como las situaciones problemáticas surgen preferentemente cuando el alumno ya se situó en el concepto en el que va a profundizar, es decir, después de la presentación del concepto y son escogidos sobre la base de criterios personales y de acuerdo con las opciones del profesor.

Una de las diferencias entre estos ejemplos y los de la categoría anterior tienen que ver con el hecho de que la autonomía del alumno en relación al ejemplo deberá ser mayor, el papel del profesor deberá ser menos participante en aras a promover una mayor integración del alumno con el ejercicio o con el problema.

La 3ª Categoría es **Características**: Cuando el alumno emprende la tarea de profundizar el concepto en sus diferentes facetas, al mismo tiempo que descubre sus particularidades, es natural que surjan dificultades, confusiones y dudas. Construir una estructura o un esquema conceptual es un proceso compuesto por etapas consecutivas soportando cada una de ellas las que seguirán y, según evoluciona el proceso, cada etapa determina en el alumno dificultades que son inherentes a esa etapa. El esclarecimiento de esas dudas es el elemento que establece la calidad y la solidez con la cual se desarrolla el proceso de construcción de los esquemas conceptuales. Los ejemplos utilizados en estas situaciones, procurando esclarecer, son la respuesta del profesor a las dificultades presentadas por el alumno y tienen un carácter muy específico y muy focalizado. Puede que estos ejemplos sean presentados antes que surjan las dificultades pero su presentación, calidad y profusión dependen de la capacidad de previsión, experiencia y originalidad del profesor.

La 4ª Categoría es **Aplicaciones Internas**: Las aplicaciones internas son una forma de ejemplificación que aparece ya en las fases de mayor profundidad del concepto de función. Estas aplicaciones pueden incluir contenidos o conceptos enseñados anteriormente o relacionarse con otros que serán enseñados posteriormente. Las situaciones que envuelven este tipo de ejemplos requieren un mayor grado de formación del concepto, una estructura del concepto más compleja por parte de los alumnos, permitiendo la interpretación y el tratamiento de la situación o, en el caso del ejemplo ser una situación problema, su resolución.

Los ejemplos de esta categoría surgen como el fin de un trayecto, es el finalizar de una estructura que deberá poseer todas las herramientas necesarias para la aplicación del concepto en cualquier situación estrictamente matemática en que éste figure. Son ejemplos que no integran apenas el concepto en estudio, ya que el edificio matemático no es una suma de conceptos independientes, más bien una red de conceptos relacionados que se deben articular de forma coherente.

Las situaciones propicias para la presentación de estos ejemplos son los ejercicios que contemplen situaciones nuevas para el alumno o la resolución de problemas estrictamente matemáticos. Son ejemplos que, por su complejidad, no pueden ser presentados oralmente, son presentados en forma escrita para que su análisis se pueda hacer repetidamente si es necesario. El abordaje y tratamiento de los ejemplos incluidos en esta categoría podrán ser a título individual o en grupo, podrán asumir un papel importante en la dinámica que se quiera inculcar en la clase.

La 5ª Categoría es **Aplicaciones Externas**: Estos ejemplos son aplicaciones de la vida real y de otras ciencias. El tipo de ejemplos de esta categoría es semejante a la categoría anterior, apenas difieren en su naturaleza. Son ejemplos que pueden configurar ejercicios o problemas pero se incluyen en esta categoría por manifestar un cierto grado de dificultad. Es exactamente este grado de dificultad lo que los distingue de los ejemplos del mismo género que figuran en las otras categorías. No estamos ante situaciones simples, más bien ante situaciones que exigen al alumno un empeño basado en la profundidad y flexibilidad con que se trabajan las diferentes facetas del concepto, lo que implica una estructura conceptual más compleja.

- **Análisis y algunos resultados**

Los datos fueron analizados por profesor y por categorías y los resultados pueden consultarse en la página de Carlos de Figueiredo http://carlosfigueiredo.home.sapo.pt/index.html

o en la de Luis C. Contreras

http://www2.uhu.es/luis.contreras/investigacion/documentos_en_formato_electronic.htm

Los resultados hacen referencia a la cantidad y tipo de ejemplos usados, por los profesores en formación, en cada categoría, a la importancia que le daban, su inserción en el proceso de enseñanza (antes o después de las definiciones).

Igualmente, el análisis de los ejemplos pone de manifiesto algunas dificultades de estos profesores en relación a los buenos y malos ejemplos (abuso de los números enteros)

Un aspecto importante es la falta de análisis del papel que los ejemplos juegan en la construcción de los conceptos. Así, consideran que los alumnos profundizan en los diferentes conceptos sobre funciones sobre la base de muchos ejemplos simples que implican una representación de cada vez.

Probablemente, también, porque no conciben el concepto de función como un todo integrado, lo ven más como la suma de varias partes, esperando que el alumno sobreponga la información y que la aprenda sólo por el hecho de que el profesor le transmitió esa información. Lo que revela, según Contreras (1998), una fuerte tendencia tradicional.

**Por fin:**

De todas las conclusiones e implicaciones anteriores consideramos que la ejemplificación presentada por el profesor es un instrumento que puede ser usado para observar y estudiar el conocimiento del profesor de forma alternativa o, en su caso, complementar a los instrumentos que están hoy disponibles.

## Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Uno*, 4, 53-61.

Azcárate, C. (1997). Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma,* 25, 23-30.

Calvo, C. y Azcárate, C. (2001). Usos alternativos de las pruebas visuales en los cursos de cálculo diferencial e integral. *Reporte de investigación presentado en la 15ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. (RI-044, RELME 15) Buenos Aires, Argentina.

Carrillo, J. y Contreras, L.C. (1993). La identificación de las concepciones del profesor sobre la matemática y la educación matemática como claves para el diseño de estrategias de formación del profesorado. *VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*. Sevilla.

Carrillo, J. y Contreras, L.C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. *18 th PME Conference*,II, 152-159.

Carrillo, J. y Contreras, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*,7(3), 79-92.

Contreras, L.C. (1998). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis Doctoral. Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Climent, N. (2002). *El desarrollo Profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

DeMarois, P. y Tall, D. O. (1996). Facets and layers of the function concept. In Puig, L & Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*2. Valencia, Spain, 297–304.

DeMarois, P. y Tall, D. O. (1999), Functions: Organizing principle or cognitive root, *Proceedings of PME 23(*2), Haifa, 257–264.

Figueiredo, C. A. (2005). Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de Função. Memoria de Proyecto de investigación de Doctorado. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura.

Gray, E. M. y Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “Proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*,25(2), 116–140.

Mason, J.H. y Watson, A. (2001) Getting Students To Create Boundary Examples. *MSOR Connections*, 1(1), 9-11.

Michener, E. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science 2,* 361-381.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata/MEC.

Rowland, T., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2003). Elementary Teachers' Mathematics Content Knowledge and Choice Of Examples. CERME 3: *Third Conference of the*

*European Society for Research in Mathematics Education*, March 2003, Bellaria, Italy.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Middlesex, England: Penguin.

Tall D., y Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12,151-169.

Watson, A. y Mason, J. (2002) Extending example spaces as a teaching/learning strategy in mathematics. In A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4. Norwich: University of East Anglia, 378-386.

Watson, A y Mason, J. (2004) The exercise as mathematical object: Dimensions of possible variation in practice. McNamara, O. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 24(2) June 2004)

Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus in Learning Problems in Mathematics,* 12(3-4), 31-47

# REDESCUBRIMIENTO DE IDENTIDADES COMBINATORIAS MEDIANTE EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Miguel Andériz López
Eduardo Lacasta Zabalza
Miguel Rodríguez Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra (Pamplona)

Carlos Romero Ibarra
Hospital Virgen del Camino (Pamplona)

J. Lafita Tejedor
Hospital de Navarra (Pamplona)

Gregorio Tiberio López
Universidad Pública de Navarra
Hospital Virgen del Camino (Pamplona)

**Resumen**

Este artículo incluye una parte de la labor desarrollada en dos seminarios de educación estadística, protagonizados por médicos de los centros sanitarios de Navarra y tienen como objetivo demostrar que el cálculo de probabilidades elemental está al alcance de muchos de estos profesionales, hecho que creemos es extensible a otro tipo de graduados no matemáticos ni estadísticos, de donde su interés en didáctica de la estadística.

Se presentan dos casos, comentados en sendas sesiones participativas, con motivo de un curso de estadística a licenciados sanitarios. En ellos se prueba que el proceso de razonamiento seguido, dicho sea de paso sumamente sencillo, ha conducido al "redescubrimiento" de identidades del cálculo combinatorio no estudiadas por lo común en la enseñanza preuniversitaria.

El primero de ellos se refiere a números combinatorios; el segundo trata del tema de las variaciones con repetición. En los dos casos la generalización de la solución al problema planteado da lugar, prácticamente sin esfuerzo, a los resultados expresados.

Andériz López, M.; Lacasta Zabalza, E.; Rodríguez Wilhelmi, M., Romero Ibarra, C.; Lafita Tejedor, J.; Tiberio López, G. (2007) Redescubrimiento de identidades combinatorias mediante el cálculo de probabilidades. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 97-103.

## Introducción

En los cursos de iniciación a la estadística, impartidos en los centros sanitarios de Pamplona para profesionales de ciencias de la salud, ordinariamente médicos, se han intercalado con frecuencia sesiones participativas, lo que en nuestro ámbito denominamos *Seminarios*, con el objetivo de consolidar conocimientos y estimular el razonamiento de los asistentes, si bien se tiene en cuenta en estos casos que la titulación universitaria de los mismos es bastante diferente de la matemática.

Este razonamiento se fundamenta en los tres pasos que señala Brousseau (1998): *el buen saber, el buen pensar y el buen hacer.* Con la orientación didáctica de la persona que dirige el coloquio y el interés responsable de los asistentes, es posible llegar bastante lejos en el análisis de los conocimientos estadísticos, siempre dentro del plano de lo elemental. Aunque los temas tratados en estos seminarios han sido muy variados, comentaremos aquí dos casos de aplicaciones del cálculo combinatorio.

Pretendemos aquí mostrar un aspecto particular de la didáctica del cálculo de probabilidades y de la estadística cuando la enseñanza no va dirigida a personas con sólidos fundamentos matemáticos.

### Caso 1

Se presentó el siguiente problema, clásico del cálculo de probabilidades y de fácil resolución: *"Con una baraja española de 40 cartas, ¿qué probabilidad hay de obtener exactamente dos copas en una extracción de cinco cartas (sin reposición)?*

Cuando las extracciones son sin reposición, cual es el caso de extraer una mano de cinco cartas, el *buen saber* nos dice que hay que recurrir a la regla de Laplace. Llamando $k$ al suceso "obtener copa" y haciendo uso de los números combinatorios, podemos escribir:

$$p(k=2)=\frac{\textit{Número de sucesos favorables}}{\textit{Número de sucesos posibles}}=\frac{\binom{10}{2}\times\binom{30}{3}}{\binom{40}{5}}=\frac{45\times 4060}{658008}=0.2777$$

Ya que al existir 10 copas, el número de combinaciones posibles (y equiprobables) tomándolas de 2 en 2 es el primero de los dos números combinatorios del numerador de la expresión. Ahora bien, estas 45 formas de combinarse las copas de dos en dos han de multiplicarse por las 4060 formas de combinarse de tres en tres las 30 cartas restantes de la baraja española, suponiendo siempre aleatoriedad y equiprobabilidad. El denominador es el número de combinaciones posibles de las 40 cartas tomándolas de 5 en 5. (Obsérvese que no se dice “al menos dos copas”, sino “exactamente dos copas”).

Una vez que hemos caído en la cuenta de que esas $\binom{10}{2}$ maneras posibles de obtener 2 copas han de combinarse con cada una de las $\binom{30}{3}$ maneras posibles de obtener 3 cartas que no sean copas, comienza la construcción de nuestro proceso con la ayuda del *buen pensar*. Una persona que *se responsabilizase* de los resultados **continuaría** *discurriendo* de la siguiente manera: limitándonos al caso de las extracciones sin reposición, es evidente que la suma de las 6 probabilidades siguientes: obtener 0 copas, 1 copa, 2 copas, 3 copas, 4 copas y 5 copas es igual a uno, ya que estos seis sucesos abarcan todas las posibilidades que ofrece el ejemplo. Comprobémoslo, aplicando el mismo razonamiento que hemos utilizado para calcular la probabilidad de obtener 2 copas.

$$P(0\ copas)=\frac{\binom{10}{0}\binom{30}{5}}{\binom{40}{5}}=\frac{142506}{658008}=0.2166 \qquad P(1\ copa)=\frac{\binom{10}{1}\binom{30}{4}}{\binom{40}{5}}=\frac{274050}{658008}=0.4165$$

$$P(2\ copas)=\frac{\binom{10}{2}\binom{30}{3}}{\binom{40}{5}}=\frac{182700}{658008}=0.2777 \qquad P(3\ copas)=\frac{\binom{10}{3}\binom{30}{2}}{\binom{40}{5}}=\frac{52200}{658008}=0.0793$$

$$P(4\ copas)=\frac{\binom{10}{4}\binom{30}{1}}{\binom{40}{5}}=\frac{6300}{658008}=0.0096 \qquad P(5\ copas)=\frac{\binom{10}{5}\binom{30}{0}}{\binom{40}{5}}=\frac{252}{658008}=0.0004$$

La suma de los seis numeradores obtenidos es ciertamente 658008, o sea igual al denominador, común en todos los casos, por lo que la suma de probabilidades tiene que ser igual a 1. De hecho, debido al redondeo en la cuarta cifra decimal, esta última suma es 1.0001, lo cual no quita valor a lo señalado.

Para rematar el tema, el *buen hacer* nos va a permitir dar un último paso, que sería tratar de **generalizar** esta situación. Designando al número combinatorio $\binom{40}{5}$ por $\binom{m}{n}$ y considerando que el denominador común es la suma de los numeradores, es muy fácil deducir, o mejor dicho intuir, una identidad del cálculo combinatorio, ciertamente conocida pero tal vez *redescubierta* para alguno de nuestros profesionales:

$$\binom{m}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{p}{i} \binom{m-p}{n-i}$$

Donde, para el caso particular del ejemplo, $m = 40$, $n = 5$, $p = 10$. No es necesario aclarar que lo expuesto no constituye una demostración formal de la identidad que hemos comentado.

**Caso 2**

Ahora el problema presentado, tomado de Roa et al (1997), fue el siguiente: *Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.*

Prescindiendo de técnicas descriptivas y de extensiones a sumas y productos, encontramos un exacto parecido de este problema con otro "clásico" dentro de las "bolas y urnas": ¿Qué maneras diferentes hay de colocar cuatro bolas distintas, numeradas del 1 al 4, en tres urnas A, B y C.? Este problema puede generalizarse a $n$ bolas y $m$ urnas (coches y hermanos, respectivamente). Efectivamente, no se trata de un caso de variaciones con repetición, aunque puede equipararse (aquí serían *tres* elementos tomados de *cuatro en cuatro*), o sea

$$V_{m,n} = m^n = 3^4 = 81$$

en el problema propuesto. No obstante, podemos discurrir de una manera más elemental no carente de lógica: la primera bola la podemos colocar de $m$ maneras diferentes (la podemos introducir en cada una de las $m$ urnas). Por cada una de las maneras anteriores, la segunda bola la podemos a su vez colocar igualmente de $m$ maneras distintas, o sea, hasta aquí las dos bolas las podemos introducir de $m^2$ formas distintas, y así sucesivamente, obtenemos la fórmula anterior.

Aún existe una generalización "más amplia": supongamos que el niño donante de los coches puede optar por quedarse alguno o algunos de ellos (incluso todos ellos). Entonces la fórmula que proporciona la solución, o sea las maneras diferentes de repartir los coches, podría parecer un sumatorio:

$$\sum_{i=0}^{n} m^i = \sum_{i=0}^{4} 3^i = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$$

en el caso del problema. (El exponente indica, en cada supuesto, el número de coches que regala a sus hermanos.) A primera vista parece ser así, pero en este razonamiento se encierra una falacia, aunque no una pérdida de tiempo como vamos a ver.

En efecto, si decide quedarse todos los coches, al igual que si decide repartirlos todos, sólo hay una manera de realizar la primera decisión, esto es: $3^0 = 1$, mientras que el repartir todos los coches tiene 81 maneras diferentes de hacerlo, según hemos visto. Pero al repartir 1, 2 ó 3 coches las cosas cambian. Si decide repartir un coche determinado, por ejemplo el azul, está claro que lo puede dar a cualquiera de sus tres hermanos, por lo que hay $3^1$ formas diferentes de repartirlo, pero si entran en juego los cuatro coches entregando sólo uno de ellos, habrá $C_{4,1} = 4$ combinaciones posibles de los coches tomados de uno en uno, por lo que en realidad serían $4 \times 3^1 = 12$ maneras diferentes de repartir un solo coche. Razonando de esta forma, habría $C_{4,2} \times 3^2 = 54$ maneras diferentes de repartir 2 coches entre sus tres hermanos; y habría $C_{4,3} \times 3^3 = 108$ maneras diferentes de repartir 3 coches. Ahora sí que tenemos todos los datos para contestar a la última cuestión que hemos planteado, ya que basta sumar $1 + 12 + 54 + 108 + 81 = 256$, que son las maneras diferentes de repartir los cuatro coches, incluyéndose él mismo en el reparto.

Esta respuesta no satisface a todos los docentes del cálculo de probabilidades. Se ha seguido un camino que, si bien conduce a un resultado correcto, es demasiado largo y elaborado. Hay un razonamiento mucho más sencillo que lleva al mismo resultado. En efecto, se trata de repartir 4 coches entre 4 personas, caso de que el donante se incluya en el reparto. El primero de los coches puede adjudicarse de 4 maneras diferentes (a cada una de las personas). Para cada una de estas 4 maneras de reparto del primer coche, el segundo puede repartirse igualmente de otras 4 maneras diferentes (dárselo a cada una de las 4 personas), con lo que tenemos que las maneras diferentes de repartir 2 coches son $4 \times 4 = 16$. Siguiendo el razonamiento, los 4 coches pueden repartirse de $4^4 = 256$ formas diferentes. Aquí sí que se comprende mejor lo de "variaciones con repetición" de 4 elementos, tomados de 4 en 4, igual a $4^4$, como hemos dicho antes.

De paso, hemos "descubierto" otra identidad del cálculo combinatorio:

$$VR_{n,n} = \sum_{i=0}^{n} \left[ (n-1)^i \times C_{n,i} \right] = n^n$$ ,

por lo que, como hemos dicho arriba, no hemos perdido el tiempo.

**Comentario obligado**

Viene ahora una pregunta como colofón a los casos comentados. ¿Se puede exigir este nivel de "saber, pensar y hacer" a los profesionales del ciencias de la salud? La respuesta parece ser que es negativa. En todo caso, el último paso que hemos dado, el de generalizar, puede que no tenga mucho interés para ellos. Aun así, si la demostración de estas identidades queda fuera del alcance de nuestra área de conocimiento, no así la comprobación o verificación de las mismas, sobre todo si se tienen en cuenta los recursos que ofrece hoy la informática para el cálculo.

Sin embargo, sustituyamos la pregunta: ¿Está lo que hemos dicho fuera del alcance intelectual del profesional mencionado? Ahora la contestación es que no lo está, y menos aún a poco que recuerde sus estudios medios. ¿Qué es, pues, lo que le falta a nuestro profesional para recorrer el camino aparentemente complejo que hemos seguido en el comentario de los casos presentados?

Ya no es tan sencillo responder a esta última pregunta. Unos contestarían que el médico no tiene desarrollado el sentido matemático, otros que no lo necesita para saber estadística o cálculo de probabilidades, otros que los ordenadores le suministran respuestas a la mayoría de sus problemas sin necesidad de este tipo de razonamientos, no faltando quienes dirían que estamos complicando demasiado las cosas sin necesidad.

En todo caso, parece claro que al profesional de ciencias de la salud "le falta algo" para que su cultura estadística sea aceptablemente admisible. Sin ese *algo*, que consideramos alcanzable, su actuación en este terreno se limitará al manejo de ordenadores en los que como mucho adquirirá la destreza suficiente para creerse que resuelve sus cuestiones estadísticas. Como es de suponer, y como indicaron con notable insistencia Joliffe (2001) y Shimada

(2001) en la Reunión en Tokio de la IASE (International Association for Statistical Education), cometerá errores de los que no será consciente. Uno de los temas básicos, señalado en Batanero, (Ed 2001), es precisamente éste, el de los errores que se cometen con el uso de los ordenadores.

Ahí está, a nuestro juicio, una de las principales dificultades de la didáctica de la estadística a los profesionales de ciencias de la salud: alcanzar ese equilibrio entre conocimientos matemáticos fundamentales y utilización de los recursos informáticos estadísticos. Nuestro tipo particular de alumno ha de poner de su parte un nivel de motivación nada despreciable; el profesor ha de tener un dominio de la didáctica muy poco frecuente. Ése es el reto al que nos estamos enfrentando.

**Referencias bibliográficas**

Batanero, C. (2001). Training Researchers in the use of Statistics. IASE Round Table Conference. Tokyo, 2000. Ed. Granada. 2001.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Joliffe, F. (2001). *Learning from experience.* IASE Round Table Conference. Tokyo, 2000.

Roa, R; Batanero, C; Godino, J.D; Cañizares, M.J. (1997). *Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada.* Epsilon, 36, 433 – 446.

Shimada, T. (2001). *Precautions against errors in using statistic software.* IASE Round Table Conference. Tokyo, 2000.

# NOTAS HISTÓRICAS SOBRE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Eusebio Olivo

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey

(México )

Juan Jesús Ortiz

Universidad de Granada

Carmen Batanero

Universidad de Granada

**Resumen**

En este trabajo analizamos el origen histórico del intervalo de confianza, con la finalidad de identificar algunos de sus campos de problemas, así como dificultades de tipo epistemológico que puedan repetirse en el aprendizaje de los alumnos. Finalizamos con unas conclusiones para mejorar la enseñanza del tema.

Olivo, E.; Ortiz, J.J.; Batanero, C. (2007) Notas históricas sobre los intervalos de confianza e implicaciones didácticas. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de trabajo. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 105-114.

## Introducción

El intervalo de confianza es un tema estudiado en todos los cursos de estadística universitarios e incluso en la educación secundaria. Por ejemplo en M.E.C. (2004), se introduce dentro del tema de *estimación* en el Bachillerado de Ciencias Sociales.

Por otro lado, las investigaciones psicológicas y las didácticas, han avisado acerca de errores en la inferencia estadística, sobre todo en la interpretación del contraste de hipótesis (Morrison y Henkel, 1970; Vallecillos, 1994, 1999; Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Batanero, 2000; Díaz y de la Fuente, 2004). Al mismo tiempo, investigadores de prestigio en la comunidad científica, sugieren el uso de los intervalos de confianza para complementar los contrastes de hipótesis y mejorar de este modo los errores denunciados en la práctica de la inferencia estadística (Kish, 1970; Cohen, 1994; Hunter, 1997; Davies, 1998; Wilkinson, 1999; Cumming y Finch, 2001; Clark, 2004; Wolfe y Cumming, 2004).

Este cambio metodológico, requiere asegurar que las dificultades sobre los tests de hipótesis no se repiten –o al menos no con tanta intensidad- en los intervalos de confianza, tema donde la investigación didáctica es todavía incipiente. Algunos trabajos vinculados son los de Cumming, William y Fidler (2004); Belia, Fidler y Cumming (2005) y Schenker y Gentleman (2001) todos ellos relacionados con errores que comenten los investigadores. Behar (2001) y Terán (2006) inician el estudio de los errores de los estudiantes, relacionados sobre todo con la interpretación del coeficiente de confianza y de los extremos del intervalo.

En lo que sigue presentamos el análisis del significado actual del intervalo de confianza, y un estudio histórico de la evolución del concepto, como primer paso para continuar las investigaciones anteriores y analizar los posibles errores de aprendizaje de los estudiantes.

## Complejidad del significado del intervalo de confianza

El intervalo de confianza se puede considerar como un concepto y como un procedimiento. Considerado como concepto, y en el contexto de estimar un parámetro poblacional, un intervalo de confianza es un rango de valores (calculado a partir de los datos de una muestra) en el cual podría encontrarse el verdadero valor del parámetro, junto con un coeficiente de confianza que indica el porcentaje de muestras tomadas en las mismas condiciones, en las cuales el intervalo cubriría el verdadero valor del parámetro. Como procedimiento, da una regla general de construcción de dicho rango de valores a partir de un estadístico calculado en los datos de la muestra, para el parámetro correspondiente. La idea general de intervalo de confianza se particulariza dependiendo del parámetro a estimar (media, proporción, varianza, etc.) y según las condiciones (tipo de distribución, qué se conoce de la misma, etc.).

La descripción resumida e intuitiva anterior se desarrolla en el mapa conceptual representado en la figura 1, donde observamos la complejidad del concepto, que se apoya en muchos otros y donde los mismos conceptos asociados aparecen a diferentes niveles. Por ejemplo, la idea de distribución aparece relacionada con la variable aleatoria (distribución de la población), con la muestra (distribución estadística de datos) y con el muestreo (distribución muestral del estadístico).

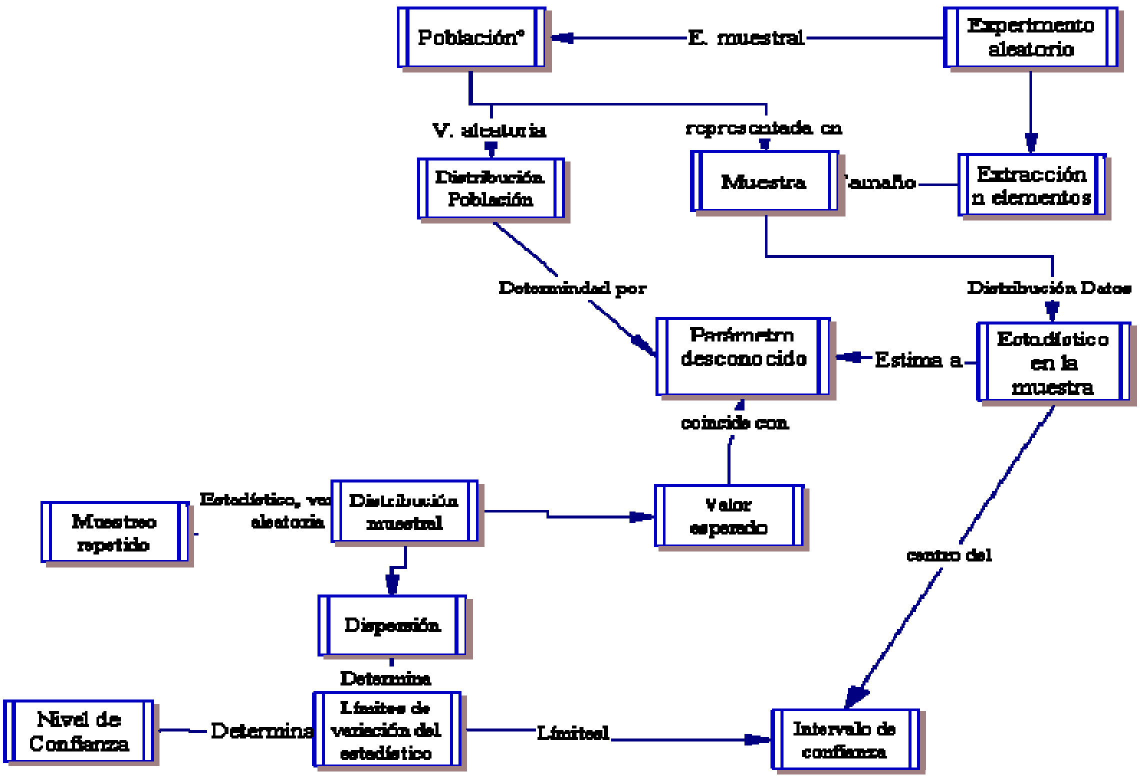



*Figura 1. Mapa conceptual del Intervalo de Confianza*

## Origen histórico

Hasta el siglo XX, la estimación estadística se basaba fundamentalmente en el método de mínimos cuadrados debido a Gauss y el método de desviación mínima absoluta ideado por Laplace, que eran usados generalmente para estimar parámetros en modelos lineales (Rao, 1992, p.36). Desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia, el problema de la estimación se relaciona con la inferencia inductiva, es decir aquella forma de razonamiento según la cual la verdad de las premisas no comporta necesariamente la de la conclusión, y en términos estadísticos, como las argumentaciones de la muestra hacia la población de la cual, se extrajo dicha muestra (Vallecillos, 1994).

Matemáticamente, el problema de la estimación, podemos plantearlo de distintas maneras. Una de ellas es asumir un fenómeno aleatorio que viene caracterizado por una distribución de probabilidad, que depende de uno o varios parámetros, supuestos *constantes*. Al no ser posible recolectar los datos de toda la población, hemos de conformarnos con una muestra aleatoria, de la misma población. El problema formulado es dar un valor aproximado del parámetro (o parámetros) a partir de los datos observados del estadístico (o estadísticos) en la muestra.

Es decir, siendo $X_1, X_2, ..., X_n$ un sistema de *n* variables aleatorias, cuyos valores particulares pueden ser obtenidos a través de muestras aleatorias. Como la ley de probabilidad de estas variables

$$P(x_1, x_2, ..., x_n | \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$$

para $x_1, x_2, ..., x_n$ valores de las *n* variables respectivamente, dependen de *k* parámetros desconocidos, se trata de estimar estos parámetros haciendo uso en este proceso de los valores observados $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ del sistema de *n* variables aleatorias.

**Probabilidades inversas**

Thomas Bayes (1763), en un ensayo póstumo, propone una respuesta al problema de encontrar la probabilidad de que un efecto ocurrido sea debido a una causa dada, tomando como punto de partida las probabilidades a priori, de las posibles causas,

De este modo, plantea el uso de la probabilidad matemática para justificar la inferencia inductiva. Como veremos, el Teorema de Bayes constituye el primer esfuerzo de solución del problema de la estimación por intervalos, aunque considerando que los parámetros $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ son *variables aleatorias,* caracterizados por una distribución a priori de probabilidad que se actualiza mediante el producto por las verosimilitudes. (Rivadulla 1991). El desarrollo es como sigue

Si en una serie de experimentos un suceso ha aparecido $p$ veces y $q$ veces el suceso contrario, la posibilidad $w$ de que la probabilidad buscada para el suceso se encuentre entre $x$ y $X$ viene dada por la siguiente expresión:

$$W = \frac{\int_{x}^{X} x^{P}(1-x)^{q}\,dx}{\int_{0}^{1} x^{P}(1-x)^{q}\,dx}$$

Puesto que Bayes considera el parámetro como variable aleatoria (al igual que hace hoy día la escuela Bayesiana), al dar la probabilidad de que el parámetro se encuentre entre ciertos valores, en realidad está dando un avance hacia la construcción de *intervalos de credibilidad*. Estos intervalos se utilizan en inferencia bayesiana y en ellos se consideran los extremos como fijos y el parámetro como aleatorio. Los *intervalos bayesianos de credibilidad* serían entonces anteriores históricamente a los *intervalos de confianza.*

Laplace rescata el teorema de Bayes y desarrolla él mismo algunas de sus consecuencias. En "*Mémoire sur la Probabilité des Causes par les événements"* publicado por Laplance en 1774 encontramos también un análisis Bayesiano, donde se ocupa de la inferencia, con la finalidad de determinar la proporción desconocida (parámetro de una distribución binomial) (Hald, 1998, pp. 23-4). Asimismo, en la sección V del "Mémoire sur la Probabilité des Causes par les événements", Laplace se enfoca en la estimación del valor medio a partir de tres observaciones. Motivado por una nota publicada por J. Bernoulli III que indicaba que el problema de estimación de la media era de considerable interés para los astrónomos. La importancia que guarda el artículo citado de Laplace radica en que sienta las bases de la teoría de la decisión moderna y de la inferencia bayesiana (Stigler 1986). En 1818 Laplace establece la primera formulación del problema de *estimación puntual.*

Tanto Laplace como, posteriormente Gauss (hacia 1887) contemplan un valor desconocido del parámetro $\theta$ y un cierto número de sus mediciones $x_i$ todas sujetas a un error aleatorio. También los dos contemplan la formulación de lo que se llama la "función pérdida" $L(\hat{\theta},\theta)$.Esta función representa el error que el estadístico asumirá por adoptar a $\hat{\theta}$ como estimador de $\theta$. Laplace usó el valor absoluto de la diferencia $L_L(\hat{\theta},\theta)=\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ , mientras que Gauss prefirió su cuadrado $L_G(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$. De ahí resultó la teoría de mínimos cuadrados. (Neyman, 1976).

## Probabilidad fiducial

Fisher (1930) introduce la idea de *intervalos fiduciarios,* para tratar de salvar las dificultades que surgen al intentar usar el Teorema de Bayes cuando no existe información a priori sobre los parámetros. Fisher, que siempre se preocupó por mantener una visión frecuencial de la probabilidad desarrolló el método llamado "fiducial" basado en la función de verosimilitud (Rouanet, 1998). La probabilidad fiducial trata de expresar la frecuencia con que el valor verdadero de un parámetro toma un valor determinado; a partir de los datos observados, por ejemplo que la probabilidad de que cierto parámetro poblacional sea menor que un valor dado es del 5%.

Por ejemplo, para una población normal con $\sigma$ conocida, tomemos el valor dado $\mu_1 = \overline{X} - 1.64\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Lo que el enunciado de probabilidad fiducial afirma es que $P(\mu < \mu_1) = 0.05$, lo cual se interpreta como que en el 5 % de todas las posibles muestras, $\mu$ no alcanzarán el valor $\mu_1$.

En el caso general, si $\hat{\theta}$ es un estadístico y $P$ la probabilidad de que $\hat{\theta}$ sea menor que un valor específico, entonces tenemos una relación de la forma

$$P = F(\hat{\theta}, \theta)$$

Si ahora damos a $P$ cualquier valor particular tal como 0.95, tenemos una relación entre el estadístico $\hat{\theta}$ y el parámetro $\theta$, tal que $\hat{\theta}$ es el valor en el percentil 95 % correspondiente a un $\theta$ dado, esta relación implica que en el 5% de las muestras $\hat{\theta}$ excederá al percentil 95% correspondiente al valor real de $\theta$ de la población de la cual fue extraída. Fisher (1930) llama a esa relación el *"5% fiducial del valor de $\theta$"* correspondiente a un valor dado de $\hat{\theta}$. Si $\hat{\theta}$ se incrementa con $\theta$ para todos los valores posibles, debemos expresar la relación diciendo que "*el verdadero valor de $\theta$ será menor que el 5% fiducial del valor correspondiente al valor observado de $\hat{\theta}$ en exactamente 5 intentos de 100*" (Fisher, 1930).

Este método trata de evitar el uso de probabilidades a priori para el parámetro (como la estadística frecuencial), pero produce probabilidades a posteriori del parámetro, dados los datos (como la inferencia bayesiana). Rouanet (1998) indica que en algunos casos las distribuciones fiduciales de Fisher coinciden con las distribuciones bayesianas a posteriori, de modo que se podría considerar que Fisher fue un bayesiano, sin saberlo. Sería el caso de distribución inicial no informativa, es decir, cuando se suponen equiprobables a priori todos los valores de los parámetros.

Para Fisher uno de los objetivos de la investigación empírica debe ser la búsqueda de la máxima verosimilitud. Esta idea da lugar a los métodos de estimación de máxima verosimilitud. (Rivadulla, 1991). Fisher con sus constructos de verosimilitud y probabilidad fiducial trata de sustituir la probabilidad subjetiva, aportada por el método bayesiano, por una medida de creencia racional, basada únicamente en los datos observados, pero continúa argumentando sobre una población tomando como punto de partida los datos recolectados en el muestreo.

Las teorías de la probabilidad fiducial de Fisher permiten calcular valores de verosimilitud sobre los parámetros, pero no proporcionan una distribución de probabilidad acerca de parámetros desconocidos, por lo que no resultaron exitosos. Aún así, hoy día la idea de verosimilitud y máxima verosimilitud es una de las principales en estimación. Por otro lado los métodos bayesianos no informativos se apoyan en el método fiducial de Fisher (Lecoutre, 1999).

**Experimentos repetidos e intervalo de confianza**

Jerzy Neyman (1894-1981) inicia la teoría moderna de *intervalos de confianza* e introduce el término en 1934 con su artículo, "On the two different aspects of the representative method", arrancando con ello la teoría estadística de la estimación del programa Neyman- Pearson. Pero su trabajo más importante sobre el problema de la estimación estadística es "Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability " de 1937.

Neyman (1934) muestra que el problema de la estimación puede ser resuelto con base en la teoría frecuentista de probabilidades y sin requerir algún conocimiento de probabilidades a priori. Para ello sugiere que la solución del problema de estimación consiste en determinar ciertos intervalos, que denomina intervalos de confianza, en los cuales debemos asumir están contenidos los valores de los parámetros; la probabilidad de un error será igual o menor que $1-\varepsilon$ donde $\varepsilon$ es cualquier número $0<\varepsilon<1$, escogido anticipadamente.

El número $\varepsilon$ lo llama coeficiente de confianza. La forma de interpretar esta probabilidad es la siguiente: al estimar el valor del parámetro $\theta$, el experimentador o estadístico tendrá éxito, en *aproximadamente un porcentaje de muestras tomadas de la misma población* a la larga. Es decir, en el intervalo de confianza el parámetro se considera constante, pero los extremos son variables aleatorias que cambian de muestra a muestra. Su método, busca la máxima exactitud posible del resultado al determinar las estimaciones inferior y superior, obtenidas al sumar y restar al estimador la desviación respecto al estimador.

Neyman (1941) intenta probar que no hay relación entre la teoría fiducial y la teoría de los intervalos de confianza, aunque pasa por serias dudas provocadas, entre otras cosas, por la identidad numérica de los límites fiduciales de Fisher con los límites de sus intervalos de confianza. También, para el caso de distribución a priori no informativa los intervalos de credibilidad y confianza coinciden (sus límites) en muchos casos, aunque la interpretación, como hemos visto es muy diferente (Lecoutre, 1999).

**Algunas conclusiones**

El problema de estimación por intervalos se resolvió históricamente por tres métodos diferentes: los intervalos de credibilidad (solución bayesiana), los intervalos fiduciales de Fisher y los intervalos de confianza de Neyman. Actualmente los intervalos fiduciales apenas se usan pues las probabilidades obtenidas no siempre suman la unidad, aunque las ideas de Fisher sobre este punto se usaron en el método de máxima verosimilitud.

Respecto a la diferencia entre intervalos de credibilidad y de confianza, incluso aunque en algunos casos coincida numéricamente el valor de sus extremos, la historia nos revela que tienen una interpretación muy diferentes:

- En el intervalo de confianza el parámetro es constante y los extremos del intervalo son aleatorios. El nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$ significa para la teoría Neyman- Pearson que a la larga el $(1-\alpha)100\%$ de los intervalos (calculados en muestras sucesivas de la misma población) incluyen el valor verdadero del parámetro $\theta$ que se desea estimar. La probabilidad $(1-\alpha)100\%$ es una probabilidad frecuencial y se refiere al experimento supuesto de repetir indefinidamente la toma de muestras de la misma población y calcular los intervalos.
- La teoría Bayesiana considera $\theta$ como una variable aleatoria, con una distribución inicial de probabilidad. El teorema de Bayes actualiza esta distribución inicial pasando a una distribución final de probabilidades para el parámetro. No se plantea el contexto de repetición. Los límites de un intervalo de credibilidad de $(1-\alpha)100\%$ se consideran fijos y la probabilidad es una probabilidad subjetiva y epistémica, porque se refiere sólo al experimento concreto.

De hecho (Cumming, William y Fidler, 2004; Belia, Fidler y Cumming, 2005; Schenker y Gentleman, 2001), muchos investigadores dan una interpretación bayesiana a los intervalos de confianza, es decir, piensan que el intervalo de confianza da la probabilidad de que el verdadero valor del parámetro $\theta$ está contenido dentro de los límites de confianza (esta probabilidad la daría el intervalo de credibilidad).

Puesto que el estudio histórico muestra que el desarrollo de las ideas bayesianas sobre estimación fue bastante anterior al de las ideas frecuenciales (aunque no se llegaron a imponer en la práctica por la dificultad filosófica de tener que trabajar con probabilidades subjetivas), una hipótesis es que el método Bayesiano podría ser más intuitivo que el frecuencial. Esto es también sugerido por algunos investigadores (Lecoutre, 1999) aunque habría que analizarlo con más detalle en nuevas investigaciones.

**Nota:** Agradecimiento al proyecto SEJ2004-00789 M.E.C. (Madrid).

**Referencias bibliográficas**

Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning,* 2(1-2), 75-98.

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística.* Ph. D. Universidad Politécnica de Cataluña.

Clark, M. L. (2004). Los valores p y los intervalos de confianza, ¿en qué confiar?. *Revista Panamericana de Salud Pública,* 15(5), 295-296.

Cumming, G. y Fidler, F. (2005). Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions. IASE/ISI Satellite

Cumming, G. y Finch, S. (2005). Inference by eye: Confidence intervals, and how to read pictures of data. *American Psychologist, 60,170-180*

Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers` understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 3, 299-311

Davies, H. (1998). What are confidence intervals? On line:
[http://www.evidence-based-medicine.co.uk]

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento*. Volumen especial 2004, 161-167.

Fisher, R. A. (1930). Inverse Probability. *Proceedings of the Cambridge Philosofical Society,* 26, 528-535.

Harlow, L. L.; Mulaik, S. A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930*. New York: John Wiley.

Lecoutre, B. (1999). Beyond the significance test controversy: Prime time for Bayes? *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 205 – 208). Helsinki, Finland: International Statistical Institute.

Morrison, D.E. y Henkel, R.E. (1970). *The significance test controversy*. Chicago: Aldine.

Neyman, J. (1937). Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. Philos. Trans. Royal Society of London, series A, 767.

Neyman, J. (1941). Fiducial argument and the theory of confidence intervals. *Biométrica* 32, 2, 128-150.

Neyman, J. (1976). The emergence of mathematical statistics En D. B. Owen (Ed.), *On the history of statistics and probability* (pp. 149-189). New York: Marcel Dekker, Inc.

Rao, C. R. (1992). R. A. Fisher: The founder of modern statistics. *Statistical Science*, 7, 1, 34-48

Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e Inferencia científica.* (Barcelona: Anthropos).

Rouanet, H. (1998a). Statistics for researchers. En H. Rouanet et al. (Eds.), *New ways in statistical methodology* (pp. 1 – 28). Berna: Peter Lang.

Stigler, S. M. (1986). *The history of statistics the measurement of uncertainty before 1900*. Prensa de Belknap: Universidad de Harvard.

Terán, T. (2005). Elements of meaning and its role in the interaction with a computacional program. Trabajo contribuido en *ICOTS7 2006.*

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hyphoteses. Ponencia invitada. *Proceedings of the 52nd Session of the ISI*, Vol.2, 2001-204. The Netherland:ISI.

# MODELIZACIÓN Y SIMULACIÓN DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Juan J. Ortiz
Universidad de Granada

Carmen Batanero
Universidad de Granada

Luis Serrano
Universidad de Granada

## Resumen

Los libros de texto constituyen un recurso didáctico fundamental en todos los niveles educativos. Las investigaciones recientes sobre el aprendizaje de la probabilidad conceden un papel esencial a la simulación. En este trabajo presentamos un análisis del uso de este recurso en nueve libros de texto y deducimos algunos criterios a tener en cuenta en la elaboración de libros de texto para la enseñanza de la probabilidad en la educación secundaria.

Ortiz, J.J.; Batanero, C.; Serrano, L. (2007) Modelización y simulación de la estadística y la probabilidad en los libros de texto en Educación Secundaria. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp.115-129.

## Introducción

La importancia de la simulación es resaltada, tanto en las directrices curriculares, como en las publicaciones sobre didáctica de la estadística y de la probabilidad. Por otro lado, el libro de texto sigue siendo el principal recurso utilizado en las clases de matemática.

En este trabajo, nos hemos interesado por el uso de la simulación, que en torno al azar y la probabilidad, se presenta en los libros de texto, realizando un estudio empírico de las actividades dedicadas a estos temas en una muestra de once libros de texto, de tercer y cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, de cuatro editoriales muy importantes del país, que son las más utilizadas por los profesores, y que han sido publicados recientemente. Continuamos con ello nuestros estudios previos sobre el tratamiento de la probabilidad en los libros de texto (Ortiz, 2001) y la comprensión de la idea de aleatoriedad por parte de los alumnos (Batanero y Serrano, 1999).

Una preocupación fundamental del profesor es facilitar el aprendizaje de los alumnos, contando para ello con diversos recursos y materiales didácticos, entre los que destaca el libro de texto. Como se afirma en el informe Cockcroft (1985) "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula" (p. 114). Por su parte Romberg y Carpenter (1986) indican que "el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro."(p. 867).

Cuando queremos plasmar en un texto la probabilidad y la estadística que están en continuo desarrollo y expansión, los imperativos didácticos nos obligan a realizar una transposición didáctica (Chevallard, 1985), para transformar el saber sabio en saber escolar, asequible a los alumnos, reduciendo el contenido, simplificando su presentación y tratando de buscar ejemplos que motiven a los alumnos y sean comprensibles por ellos. Es preciso seleccionar y secuenciar una materia que, en general, no tiene una estructura lineal, ya que las relaciones entre los conceptos son múltiples. Este delicado proceso introduce a veces sesgos o carencias en el significado que de los conceptos se presenta a los alumnos, que pueden tener una influencia en el aprendizaje de los alumnos. Todo ello implica que el uso de la simulación en los libros de texto es un aspecto relevante en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por lo que creemos suficientemente justificado muestro estudio.

Para fundamentar nuestro estudio, hacemos un breve resumen de las implicaciones que la utilización de la simulación tiene en el estudio de las matemáticas.

## Fundamentos

- **Importancia de la simulación en la enseñanza de la probabilidad**

Dado que en ocasiones el tiempo del que disponen los profesores para enseñar probabilidad es escaso, lo mejor que podemos hacer es usar el tiempo de enseñanza para hacer a los alumnos conscientes de sus concepciones probabilísticas, ayudarles a superar algunas de ellas e incrementar su interés hacia la probabilidad y su enseñanza. Afortunadamente, contamos con la simulación, donde nosotros podemos operar y observar los resultados en un experimento simulado para obtener información sobre la situación real. Por ejemplo, podemos encontrar una estimación de la probabilidad de que haya más del 60 % de mujeres entre los 100 bebés recién nacidos por repetición de un gran número de veces del experimento de lanzar 100 monedas al mismo tiempo. Incluso en este simple ejemplo, la simulación condensa tiempo y espacio en el experimento. Esto es también un modelo concreto y algorítmico de la realidad, además permite un trabajo intuitivo en el modelo sin recurrir a la formalización matemática.

Batanero, Henry y Parzysz (2005), indican que aunque un verdadero conocimiento de la probabilidad solo puede ser conseguido a través del estudio de alguna teoría formal, la adquisición por los estudiantes de dicha teoría debería ser gradual y apoyada por su experiencia práctica. Dantal (1997) sugiere las siguientes etapas en la enseñanza de la probabilidad mediante la simulación: 1) Observación de la realidad, 2) descripción simplificada de la realidad, 3) construcción de un modelo, 4) trabajo matemático con el modelo, y 5) interpretación de los resultados en la realidad. También sugiere que los profesores están demasiado interesados en las etapas 3 y 4, las “matemáticas reales”, porque son más fáciles de enseñar, aunque las diferentes etapas son igual de relevantes en el aprendizaje de los estudiantes. Entre el dominio de la realidad, donde las situaciones aleatorias están localizadas, y el dominio teórico donde construimos un modelo probabilístico Coutinho (2001) localiza el dominio pseudo-concreto donde nosotros trabajamos con la simulación. En el mundo real nosotros llevamos a cabo acciones y experiencias concretas, en el dominio teórico nosotros usamos representaciones simbólicas y en el dominio pseudo-concreto llevamos a cabo operaciones mentales y físicas. Ahí, el estudiante está fuera de la realidad y trabaja con una situación ideal. El rol didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir de forma implícita el modelo teórico al estudiante, cuando la formalización matemática no es posible. (Henry, 1997)

- **Tratamiento en los currículos vigentes**

Decreto del Ministerio de Educación

El currículo actualmente vigente en la Educación Secundaria Obligatoria es el Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, (Ministerio de Educación, 2001), por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria. Entre los objetivos generales que los alumnos han de alcanzar a lo largo de la educación secundaria obligatoria, aparece uno en el que se hace referencia a la importancia de las nuevas tecnologías de la información:

*k) Conocer el desarrollo científico y tecnológico valorando su incidencia en el medio físico y social, y utilizar las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de enseñanza-aprendizaje.*

En la introducción al área de matemáticas, del mismo decreto, se destaca el conocimiento que en el siglo XXI los ciudadanos han de tener de recursos como la calculadora o el ordenador:

*En los últimos años hemos presenciado un vertiginoso desarrollo tecnológico. El ciudadano del siglo XXI no podrá ignorar el funcionamiento de una calculadora o de un ordenador, con el fin de poder servirse de ellos, pero debe darles un trato racional que evite su indefensión ante la necesidad, por ejemplo, de realizar un cálculo sencillo cuando no tiene a mano su calculadora. ... Por otra parte, la calculadora y ciertos programas informáticos, resultan ser recursos investigadores de primer orden en el análisis de propiedades y relaciones numéricas y gráficas y en este sentido debe potenciarse su empleo.*

Entre los objetivos del área de matemáticas aparece el número 4 donde se recomienda la utilización de la calculadora y programas informáticos:

*4. Utilizar con soltura y sentido crítico los distintos recursos tecnológicos (calculadoras, programas informáticos) de forma que supongan una ayuda en el aprendizaje y en las aplicaciones instrumentales de las Matemáticas.*

En el mismo decreto, dentro del apartado dedicado a los criterios de evaluación de tercero y cuarto cursos de Educación Secundaria Obligatoria, se vuelve a proponer el uso de la calculadora cuando sea necesario:

Tercer curso ESO

*11. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos (diagramas de barras o de sectores, histogramas, etc.) así como los parámetros estadísticos más usuales (moda, mediana, media aritmética y desviación típica), correspondientes a distribuciones*

*sencillas y utilizar, si es necesario, una calculadora científica.*
*12. Determinar e interpretar el espacio muestral y los sucesos asociados a un experimento aleatorio sencillo y asignar probabilidades en situaciones experimentales o equiprobables, utilizando adecuadamente la Ley de Laplace y los diagramas de árbol, o cualquier otra estrategia de conteo personal.*

Cuarto curso ESO

*11. Elaborar e interpretar tablas y gráficos estadísticos, así como los parámetros estadísticos más usuales, correspondientes a distribuciones discretas y continuas, con ayuda de la calculadora.*
*12. Determinar e interpretar el espacio muestral y los sucesos asociados a un experimento aleatorio, simple o compuesto sencillo, y utilizar la Ley de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias para calcular probabilidades simples o compuestas.*

Aunque no menciona explícitamente la utilización de la simulación para el estudio de experimentos aleatorios, creemos que implícitamente se puede considerar así por la importancia que da a la utilización de la calculadora, el ordenador y otras tecnologías.

Principios y Estándares para la Educación Matemática 2000 del NCTM

Donde si se destaca explícitamente la importancia de la simulación en la estadística y la probabilidad es en los Principios y Estándares 2000, que en el apartado Estándares para las matemáticas escolares, indica que para el nivel de Educación Secundaria:

*“Los estudiantes deberían poder avanzar desde situaciones en las que la probabilidad de un suceso se puede determinar fácilmente, a situaciones en las que la toma de muestras y las simulaciones les ayudan a cuantificar la probabilidad de un resultado incierto”*

Más adelante en los Estándares para la Etapa 9-12, que se corresponde con la Educación Secundaria en España, en el apartado de Expectativas, indica que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para *Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad*, citando entre ellas: *“Utilizar la simulación para construir distribuciones de probabilidad empíricas.”*

## Objetivo y método

Nuestro objetivo es estudiar el tratamiento que se hace, en los libros de texto escogidos, de la simulación en el tema de estadística y probabilidad. Esperamos encontrar diferencias significativas entre ellos, en cuanto al tipo de ejemplos y ejercicios donde se plantea la utilización de la simulación para el estudio de los experimentos aleatorios. En los capítulos de probabilidad se sigue observando la influencia del período llamado de las Matemáticas Modernas, ya que aparece un tratamiento muy centrado en los aspectos formales del álgebra de sucesos.

Para llevarlo a cabo hemos seleccionado once libros de texto, que designaremos como [A], [B], [C], [D], [E], [F], [G], [H], [I], [J] y [K] en el resto del trabajo y que aparecen referenciados en un anexo. Estos libros fueron elegidos entre los más utilizados por los 25 profesores de secundaria a los que se realizó una entrevista y por ser de los más completos en cuanto al tema de probabilidad. Corresponden, además, a cuatro editoriales distintas de gran prestigio en nuestro país, publicados recientemente.

La metodología empleada ha sido la del análisis de contenidos. En primer lugar, hemos seleccionado los capítulos dedicados al tema de estadística y de probabilidad. Dentro de cada uno de ellos hemos analizado tanto los aspectos teóricos como actividades de carácter práctico donde proponen el uso de la simulación para el estudio de los conceptos probabilísticos. A partir del análisis, hemos realizado una clasificación que ha sido recogida en una tabla, donde aparecen los libros de texto analizados y los conceptos probabilísticos implicados, distinguiendo si la simulación ha sido realizada con calculadora, ordenador o materiales.

## La simulación en los libros de texto

En el libro [A], se explica en un ejercicio que con la calculadora se pueden realizar simulaciones y se propone realizar de este modo el lanzamiento de una moneda:

> *"23. Con tu calculadora puedes simular el lanzamiento de una moneda. Pulsando la tecla RAN≠, la calculadora da un número al azar entre 0 y 1. Asigna cara si te sale entre 0 y 0,5, y cruz si te sale entre 0,5 y 1. Lanza con tu calculadora 50 veces la <<moneda>> y anota los resultados. ¿Qué observas?" (Texto [A], p. 263).*

Un ejercicio similar es el número 24 donde se pide simular con una calculadora la extracción de una bola de una bolsa que contiene bolas numeradas del 1 al 10 y también si las bolas fueran numeradas del 1 al 5.

Entre las actividades, encontramos la número 46 (p.267) donde se trata de simular con una calculadora el experimento aleatorio de lanzar un dado cúbico 50 veces. En la actividad 48 (p.268), que aparece en la figura 1, se propone un juego mediante una tabla donde podemos organizar una carrera para los números del 1 al 12, y que consiste en lanzar dos dados y sumar las caras superiores, haciendo avanzar una casilla el número obtenido.


*Figura 1*

Se puede considerar un modelo para el estudio de los resultados del experimento consistente en el lanzamiento de dos dados y sumar sus caras superiores.

En el libro [B], en el capítulo 11 "*Estadística unidimensional*", después de introducir los conceptos de población y muestra explica en qué consiste el muestreo aleatorio simple y qué procedimientos se pueden utilizar. Aunque no lo explícita, podemos considerar que los procedimientos propuestos para la elección de una muestra son una simulación mediante sorteo, tablas de números aleatorios o con calculadora:

> *"Otro procedimiento consiste en utilizar una tabla de números aleatorios que contiene series de números obtenidos al azar. Aquí tienes parte de una tabla de números aleatorios:*

| | |
|---|---|
| *6265 5977 0655 5710 9052* | *1601 4105 2607 8120 5843* |
| *6650 6550 4105 1207 5718* | *8984 2302 3180 7601 7852* |
| *8900 3990 1392 7630 2461* | *5199 2545 6265 7968 8900* |
| *3431 6850 4436 4475 3010* | *0812 6666 7989 5887 3724* |
| *0146 5408 6692 1903 8462* | *6999 3756 5590 8460 2873* |

*Para elegir los diez elementos de la muestra tomamos los tres primeros dígitos de cada columna, empezando por ejemplo, por la primera: 626, 665, 890, 343, 014, 597, 655, 399, 685 y 540. Si aparece un número dos veces, sólo se considera una vez y se continúa el proceso*" (Texto [B], p. 198).

Ejercicios similares son el ejercicio resuelto 1 y los ejercicios propuestos 1 y 2 en la misma página.

La única referencia a la simulación que hemos encontrado en el libro de texto [D], es una nota aclaratoria *"La función del azar",* con un dibujo de la tecla RAN de las calculadoras y que dice lo siguiente:

*"Hoy día es posible realizar simulaciones de experimentos aleatorios con una calculadora o un ordenador, debido a que tienen incorporada una función llamada RANDOM que permite generar números aleatorios.*
*Por ejemplo, se pueden obtener simulaciones de lanzamientos de monedas, dados, extracciones de cartas de una baraja, etcétera, con la misma exactitud que si efectuáramos las pruebas y en muy poco tiempo" (Texto [D], p. 271).*

En [G], en la introducción del capítulo *"Azar y probabilidad"* propone una actividad (figura 2) donde explica qué se entiende por experimentar en probabilidad, y que podemos considerar como un modelo para el estudio de las probabilidades, en este caso de cómo se distribuyen un montón de bolas en unos depósitos después de pasar por varios caminos (p. 283).

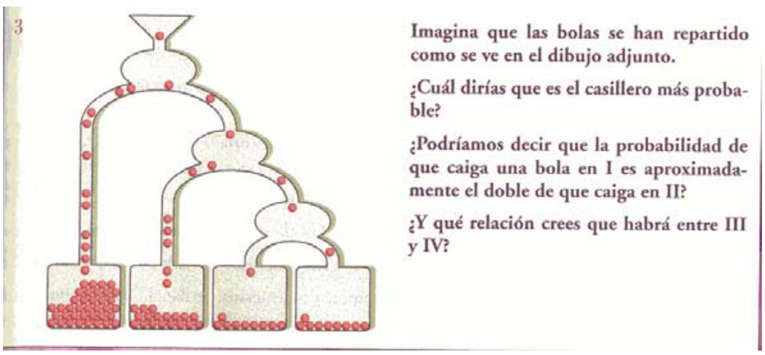



*Figura 2*

En [H], en la introducción del *"Cálculo de probabilidades",* propone una actividad (p.206), similar a la vista en el texto [A], mediante una tabla donde podemos organizar una carrera de coches marcados con los números del 2 al 12 y que consiste en lanzar dos dados. Avanza un casillero el coche cuyo número coincida con la suma de los puntos. Se puede considerar un modelo para el estudio de los resultados del experimento consistente en el lanzamiento de dos dados y sumar sus caras superiores.

En las actividades finales propone un problema de estrategia, donde hace referencia al aparato de Galton, como un artilugio que permite el estudio de las probabilidades:

> *"El aparato de Galton*
> *En este curioso artilugio, llamado aparato de Galton, las bolitas se distribuyen aleatoriamente en los casilleros. A la vista de los resultados, parece que cuanto más alejado del centro está el casillero, menos probable es que una bola caiga en él. ¿Te atreves a explicar por qué?"* (Texto [H], p. 217).

En [I], en el capítulo *"Estadística"*, al explicar los procedimientos para realizar un muestreo aleatorio simple propone como el método más seguro el sorteo:

> *"Muestreo aleatorio simple. Se procede como si tuviéramos en una bolsa una bola con el nombre de cada individuo y eligiéramos las n bolas que forman la muestra"* (Texto [I], p. 212).

Aunque no lo explícita, el sorteo se puede considerar como una simulación de la elección de los sujetos de la muestra.

En el libro de texto [J], en el Bloque 5 Estadística y Azar, en la introducción indica que este tema está pensado para que el alumno construya, entre otros, el siguiente conocimiento:

> *"- Interpretes y simules diferentes fenómenos aleatorios"* (Texto J, p. 323).

Más adelante, en un apartado para recordar algunos conceptos de cursos anteriores, propone la siguiente actividad a los alumnos:

> *"Escribe varios métodos para obtener números aleatorios y obtén un número aleatorio entre 1 y 49?: a) utilizando la calculadora b) utilizando el ordenador"* (Texto J, p. 325).

A diferencia de otros libros de texto, en el avance del tema sobre azar y estadística, éste sí explica cómo se puede realizar una simulación del lanzamiento de un dado, con 6 caras numeradas del 1 al 6, con la calculadora, mediante la tecla de generación de números aleatorios:

> *"Esta simulación se puede realizar de diferentes formas:*
> - *multiplicando por 6 el número obtenido y sumando 1 a la parte entera: por ejemplo, si obtenemos el número 0.3024, la cara obtenida por este procedimiento es 1+1=2, ya que 6 x 0.3024 = 1.8144, cuya parte entera es 1;*
> - *-considerando, de cada serie de decimales obtenida, el primer dígito entre 1 y 6 obtenido, en nuestro caso, el 3"* (Texto J, p. 329).

Ejercicios similares sobre técnicas de generación de números aleatorios y de utilización de la simulación para estudiar diversos experimentos aleatorios son los ejercicios número 3 (p.338) y el ejercicio 2 (p. 339).

Una variante es el siguiente ejercicio, donde propone la siguiente cuestión:

*"¿Funciona bien la calculadora, es decir, genera, verdaderamente, números aleatorios? Si no tienes una respuesta clara y te interesa el problema planteado, te damos a continuación una serie de cuestiones orientativas que debes trabajar y debatir en tu grupo de trabajo y en clase.*

*- Genera al azar 50 números aleatorios de 10 decimales cada uno.*

*- Construye la tabla de frecuencias absolutas del número de apariciones de cada uno de los dígitos entre los decimales.*

*¿Tienes ya respuesta al problema planteado?*

*En caso negativo, realiza las siguientes actividades.*

*- Construye una tabla en la que se presenten las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas de aparición de cada uno de los dígitos decimales.*

*- Construye la tabla de frecuencias absolutas del número de apariciones de cada uno de los dígitos entre los decimales.*

*Analiza esta tabla y escribe un informe con las conclusiones que has obtenido tras este análisis"* (Texto J, p. 339).

Este tipo de ejercicios lo consideramos muy importante, ya que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria tienen dificultades cuando se les plantean actividades donde deben decidir si los resultados presentados de un experimento son realmente aleatorios o están trucados.

Para finalizar el tema en un apartado denominado *Taller de Matemáticas,* explica cómo determinadas actividades que en principio no podrían desarrollarse en el taller por diversas razones, "*pero que, mediante las técnicas de simulación, pueden ser sustituidas por otras fácilmente experimentables con los materiales usuales*" (Texto J, p.342).

A continuación, en el mismo libro de texto, proponen dos problemas: El primero, sobre tres personas que practican el lanzamiento de tiro al plato, donde nos indican que podemos simular dicho experimento con un dado y tres ruletas, donde cada uno de los sectores representa la proporción de aciertos y fallos de cada uno de los jugadores (Texto J, p.342).

El segundo, trata de un juego con dos ruletas divididas en seis sectores, donde aparecen tres lápices, dos cuadernos y un cómic en cada una de ellas, para sufragar los gastos de la fiesta fin de curso. El juego consiste en que se hagan girar las dos ruletas y, si coincide un mismo dibujo en las mismas, el jugador gana ese premio.Sabiendo que el precio de un lápiz es de 25 pts, el de un cuaderno 100 pts y el del cómic 300 pts. ¿A cuánto deberán cobrar la partida para ganar aproximadamente la mitad del dinero que se recaude? Para resolver este problema nos enseña que podemos realizar una simulación del experimento con dos dados, asignando a cada uno de los sectores de la ruleta uno de los dígitos de las caras de un dado (Texto J, p.344).

En el libro de texto [K], el Bloque 5 Estadística y Azar, tiene dos unidades didácticas, una sobre Estadística descriptiva y otra sobre probabilidad y Azar donde profundiza en los conceptos tratados en el curso anterior. En este texto solo hemos encontrado un ejemplo sobre elección de una muestra mediante un método aleatorio, donde propone que se utilice una tabla de números aleatorios.

Otro ejercicio propuesto es sobre métodos para obtener números aleatorios:

> *"3. Escribe varios métodos para obtener números aleatorios y obtén un número aleatorio entre 1 y 36. a) utilizando la calculadora b) utilizando el ordenador c) utilizando la tabla de números aleatorios que aparece al final del tema anterior. ¿Para qué podrías emplear este experimento?"* (Texto K, p. 557).

Un ejercicio similar aparece en la página 575.

Como resumen presentamos la tabla 1, en la que aparece la presentación que de la simulación hace cada uno de los libros de texto analizados en el tema de azar y probabilidad. La sigla MAS, significa muestreo aleatorio simple y entre paréntesis indicamos cuando una actividad se explica. En ella, observamos que la mayoría de actividades propuestas son ejercicios o ejemplos sobre experimentos aleatorios relacionados con el juego (lanzamiento de monedas o dados y extracción de cartas de una baraja). Es en el texto [J] donde aparecen un mayor número de actividades y más variadas.

*Tabla 1. Simulación en los libros de texto*

| | Simulación calculadora | Simulación ordenador | Simulación material |
|---|---|---|---|
| [A] | Lanzamiento moneda<br>Extracción bola bolsa<br>Lanzamiento dado | | Lanzamiento dos dados y suma caras superiores mediante juego carrera |
| [B] | MAS: Generación nº aleatorios | | Lanzamiento dos dados y suma caras superiores mediante juego carrera<br>M.A.S: Sorteo con papelitos 0 al 9<br>Tabla nº aleatorios (explica) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| [D] | Lanzamiento moneda<br>Extracción carta baraja<br>Lanzamiento dado | Lanzamiento moneda<br>Extracción carta baraja<br>Lanzamiento dado | |
| [G] | | | Distribuidor bolas |
| [H] | | | Lanzamiento dos dados y suma caras superiores mediante juego carrera<br>Aparato Galton |
| [I] | | | MAS: Bolsa con bolas |
| [J] | MAS: Generación nº aleatorios (explica)<br>Lanzamiento moneda<br>Lanzamiento dado (explica)<br>Ruleta<br>Estudio aleatoriedad | MAS: Generación nº aleatorios<br>Lanzamiento moneda | Generación nº aleatorios (Tabla)<br>Ruleta: Tabla nº aleatorios<br>Juego tiro plato tres personas (Simulación dado y ruleta)<br>Juego con dos ruletas (Simulación con dos dados) |
| [K] | MAS: Generación nº aleatorios | Generación nº aleatorios | Generación nº aleatorios (Tabla) |

En los libros de texto [B], [I], [J] y [K] presentan actividades que explican distintos procedimientos para escoger una muestra mediante muestreo aleatorio simple. El libro de texto [B] propone realizar la simulación mediante un sorteo, tablas de números aleatorios o calculadora, mientras que el texto [I] sólo menciona el sorteo mediante bolas introducidas en una bolsa. Los libros de texto [J] y [K], además de ejercicios relacionados con la elección de una muestra mediante métodos aleatorios proponen otros donde hay que generar números aleatorios con unas determinadas condiciones.

En los libros de texto [A], [B], [G], [H], [I], [J] y [K] se proponen experimentos que se pueden estudiar mediante la simulación con materiales manipulativos, como el lanzamiento de dos dados y sumar caras superiores en los textos [A], [B] y [H], o mediante distribuidores de bolas en [G] o el aparato de Galton en [H]. En [J], propone dos ejercicios guiados donde los alumnos han de realizar la simulación del juego de tres personas al lanzamiento de tiro al plato y de otro juego con dos ruletas donde han de estudiar la forma de obtener beneficios para una fiesta final de curso. Estos ejercicios creemos que son más innovadores y permiten que el alumno comprenda mejor la utilidad de la simulación para el estudio de la probabilidad.

Los libros de texto que no aparecen en la tabla es porque no contienen ninguna actividad relacionada con la simulación.

## Conclusiones

Dada la importancia que las nuevas directrices curriculares y las publicaciones sobre didáctica de la estadística y de la probabilidad otorgan a la simulación y al uso de las nuevas tecnologías de la comunicación y la información, consideramos que siendo el libro de texto el recurso más utilizado en la enseñanza de las matemáticas en nuestras aulas, deberían aparecer un mayor número de actividades relacionadas con la simulación .

En resumen, en la muestra de libros de textos analizados, la propuesta de simulación mediante la calculadora es escasa, solo aparece en cinco libros [A], [B], [D], [J] y [K]. La simulación con ordenador solo es mencionada en los libros de texto [D], [J] y [K]. La simulación mediante la utilización de material aparece en un mayor número de textos. De todas formas, consideramos que el libro de texto [J] es el que presenta una mayor variedad de ejemplos y ejercicios relacionados con la simulación y sus técnicas, siendo el único, junto con el texto [B], que explica con algún ejemplo o mediante ejercicios guiados cómo podemos realizarla.

La posibilidad de utilización de software para la simulación de experimentos aleatorios en Internet no es mencionada en ninguno de los textos analizados. Por tanto, creemos que se debe aumentar el número de actividades relacionadas con la simulación en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria, con el objetivo de poder tratar los conceptos probabilísticos, bastante complejos, de forma más intuitiva y sin excesiva formalización, sobre todo tratándose de alumnos de este nivel educativo.

**Nota:** Agradecimiento al proyecto SEJ2004-00789 M.E.C. (Madrid).

## Referencias bibliográficas

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 15-37. Dordrecht: Kluwer.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Statistics Education*, 30(5), 558-567.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grénoble: La Pensée sauvage.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Countinho, C. (2001): *Introduction aux situations aléatoires dés le Collége: de la modélisation à la simulation d'experiences de Bernoulli dans l'environment informatique Cabri-géomètre-II*, Tesis Doctoral, Universidad de Grénoble.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. En *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM, Reims, 57-59.

Henry, M. (1997): Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM, Reims, 77-84.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2001). Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto 1007/1991 de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado* nº 14. Madrid: B.O.E.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; N.C.T.M. http://standards.nctm.org/

Ortiz, J. J. (2001). *La probabilidad en los libros de texto*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Romberg, T. A. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, (pp. 850-869). New York: Mac Millan.

**Anexo**

[A]: Álvarez, M., Miranda, A. Redondo, R. y Santos, T. (2004). *Matemáticas 3 ESO*. Madrid: Santillana.

[B]: Haza, C. de la, Marqués, M. y Nortes, A. (2003). *Matemáticas 4 ESO, opción A.* Madrid: Santillana.

[C]: Haza, C. de la, Marqués, M. y Nortes, A. (2003). *Matemáticas 4 ESO, opción B.* Madrid: Santillana.

[D]: Vizmanos, J. y Anzola, M. (2003). *Matemáticas 3 ESO*. Madrid: Ediciones SM.

[E]: Vizmanos, J. y Anzola, M. (2002). *Matemáticas 4 ESO, opción A*. Madrid: Ediciones SM.

[F]: Vizmanos, J. y Anzola, M. (2002). *Matemáticas 4 ESO, opción B*. Madrid: Ediciones SM.

[G]: Colera, J., García, R., Gaztelu, I. y Oliveira, M. (2002). *Educación Secundaria. Matemáticas 3*. Madrid: Anaya.

[H]: Colera, J., Gaztelu, I., García, R., Oliveira, M. y Martínez, M. (2004). *Educación Secundaria. Matemáticas 4, opción A*. Madrid: Anaya.

[I]: Colera, J., Gaztelu, I., García, R., Oliveira, M. y Martínez, M. (2003). *Educación Secundaria. Matemáticas 4, opción B*. Madrid: Anaya.

[J]: Berenguer, L. y cols. (1998). *Construir las matemáticas 3º ESO*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

[K]: Berenguer, L. y cols. (1999). *Construir las matemáticas 4º ESO*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

# ¿QUÉ RECUERDAN MEJOR LOS ALUMNOS?

Sonsoles Blázquez
Tomás Ortega
Universidades de Valladolid (España)

Stella Nora Gatica
Universidad Nacional de San Luis (Argentina)

**Resumen**

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación sobre el concepto de límite funcional en el que se viene trabajando desde hace varios años. Se hace un resumen de la investigación realizada y se contrasta si la noción de límite ligada a la definición métrica perdura en la memoria de los alumnos más que la definición como aproximación óptima (AO) dada por Blázquez y Ortega en 2002. Es una investigación empírica realizada con alumnos de las Universidades de Valladolid y Nacional de San Luis (Argentina).

Blázquez, S.; Gatica, S.N.; Ortega, T. (2007), ¿Qué recuerdan mejor los alumnos? En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 131-143.

**Investigaciones sobre el concepto en los últimos 25 años**

La principal referencia para este Trabajo de Investigación es la tesis elaborada por Blázquez (2000), bajo la dirección del Ortega, ya que es una continuidad de la misma y, como allí, se ha realizado un análisis muy exhaustivo de las publicaciones más relevantes relacionadas con el tema. Aquí sólo son citados los autores más importantes que se han tenido en consideración, pero no se hace, una descripción exhaustiva de los mismos, porque ya está plasmada en la tesis doctoral de Blázquez. Los relacionamos en cuatro grandes grupos:

- **Trabajos que tratan las concepciones del concepto**

Entre los trabajos que tratan las concepciones del concepto se destacan los siguientes: Tall y Vinner (1981) describen las imágenes conceptuales de los alumnos; Cornu (1983) señala las concepciones y los obstáculos; Tall y Schwarzenberger (1978) estudian los conflictos que se producen en el aprendizaje del concepto de límite; Sánchez (1997) hace un estudio basado en la génesis histórica del concepto; Sierra, M., González y López (1998) describen las concepciones límite desde un punto de vista histórico.

- **Investigaciones que se centran en errores y dificultades**

De las investigaciones que se centran en errores y dificultades destaca nuevamente Cornu (1983), que partiendo de los obstáculos epistemológicos construye una secuencia didáctica; en Sierpinska (1985) se describe un estudio similar al de Cornu; Sierpinska (1987) trata de desarrollar el concepto a partir de situaciones didácticas que favorezcan la superación de los obstáculos detectados en el trabajo anterior y en Sierpinska (1990) se describe su teoría de los actos de comprensión; Artigue et al (1995) explicitan una serie de dificultades asociadas a la conceptualización y a la formalización del concepto; Cornu (1991) resalta la transmisión didáctica de los obstáculos epistemológicos; Sánchez (1997) vuelve a retomar el análisis de los obstáculos epistemológicos y didácticos.

- **Análisis de los manuales**

El tratamiento de los manuales también ha sido analizado por varios autores, entre ellos, Sánchez (1997), que analiza manuales universitarios y no universitarios, y Espinoza (1998), que analiza manuales desde la perspectiva de los momentos didácticos.

- **Investigación de los procesos de enseñanza del concepto**

También se han investigado los procesos de enseñanza del concepto, destacando los siguientes trabajos: Robinet (1983), que se sitúa en el marco de la ingeniería didáctica; Cornu (1993), que destaca las actividades en un contexto de resolución de problemas; Berthelot y Berthelot (1983) que propone la creación de una situación fundamental; Delgado (1995) describe la evolución de los esquemas de los alumnos universitarios en la adquisición de este concepto; Blázquez y Ortega (1997 y 1999) describen la importancia de las sucesiones como instrumento de aproximación didáctica al concepto de límite funcional; Blázquez y Ortega (1999 y 2000) presentan un planteamiento didáctico para la docencia del concepto de límite en la educación secundaria. Ya en este siglo, Blázquez y Ortega (2001a y 2001b) realizan un estudio sobre sistemas de representación en la enseñanza del límite y analizan las rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato; estos mismos autores en 2002 publican una nueva definición de límite funcional con la que venían trabajando años atrás; Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006) realizan un estudio comparativo de la definición métrica y la dada ellos para establecer cuál de las dos es más sencilla y más apropiada para la docencia-aprendizaje del concepto

**Marco teórico**

En el estudio que presentamos se considera la teoría de las representaciones mentales de Duval (1998) y la teoría sobre aprendizaje y memoria. La primera es sobradamente conocida y aquí solo indicaremos que, en esta teoría, se considera que la comprensión integral de un concepto está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. En cuanto a la segunda, de la multitud sistemas de memoria que en la actualidad se consideran que coexisten, M.F. Calleja (2005), cada una con una función específica, nos interesan particularmente la memoria semántica y la memoria de trabajo. La primera, según A. Winfgfield y D.L. Byrnes (1988, pág. 166) es la que *organiza los segmentos de información y la manera en que las relaciones semánticas podrían estar representadas en un sistema de este tipo* y, por tanto, en nuestro caso se basa en la significación de los conceptos y en las relaciones que el alumno establece entre ellos. Un apunte más práctico es el que hace Baddeley (2003, pág. 124) al indicar *que esta memoria* contiene el tipo de información que constituye el grueso de lo que aprenden los estudiantes. Esta información no es la que aprenden los alumnos para hacer un examen, y las teorías de red semántica sobre organización de la memoria asumen que los conceptos son almacenados en la memoria a largo plazo, dentro de redes de asociación significativa, organizadas de manera jerárquica, y los conceptos, que son parte de la misma red, comparten algún grado de vinculación.

La memoria de trabajo se concibe como sistema para atender y manipular la información temporalmente de una amplia serie de etapas cognitivas esenciales (como el aprendizaje, el razonamiento y la comprensión), y es la que permite manipular, calcular, generar estrategias de solución. Esta memoria es la que permite realizar las tareas que se proponen a los alumnos en matemáticas y, aunque se produzca el olvido (que es una característica de memoria semántica y que es necesaria debido a la limitación física de nuestro cerebro) junto con la memoria semántica, la memoria de trabajo es la que permite realizar pruebas como la que se analiza aquí sobre aprendizajes lejanos, y cuyo análisis va a indicar el grado de aprendizaje significativo alcanzado por los alumnos en relación con cada una de las conceptualizaciones.

## Marco metodológico

Se considera el marco metodológico de la investigación acción en el que son fundamentales las cuatro fases describe McTaggart (1988, pp. 16-20), y que atribuye a Lewin. Son éstas:

- **Planificación** (elaboración de un plan) debe anticipar y prever tanto la acción como las formas de observación, aunque debe ser lo suficientemente flexible como para adaptarse a las limitaciones y situaciones imprevistas que se producen en la realidad.

- **Acción** es deliberada y controlada por la planificación, pero debe estar abierta a los cambios que se producen pues se desarrolla en una realidad sujeta a una serie de limitaciones. La acción debe ser observada en el contexto en que tiene lugar para posteriormente poder ser evaluada.

- **Observación** o recogida de datos durante la acción, tiene la función de documentar ésta y proporcionar una base para la siguiente fase.

- **Reflexión**. Ésta tiene como finalidad describir y analizar los procesos, problemas y restricciones que se han puesto de manifiesto en la acción, y debe ser fruto de la discusión e intercambio de puntos de vista de un grupo de investigadores.

La reflexión sirve de base para una nueva planificación, constituyendo otro ciclo de investigación. Los ciclos constituyen un feedback y el proceso debe terminar cuando el análisis esté completo.

- En esta metodología se deben hacer grabaciones de todas las actividades y que deben ser transcritas para su análisis y se tienen que tener en cuenta las producciones escritas de los alumnos.
- Además, para indagar completamente el pensamiento de los alumnos hay que hacer entrevistas (semiestructuradas a dos parejas de alumnos, escogidos en base a sus producciones escritas) y debates (entre los alumnos que hayan destacado por su participación)

La validez de esta metodología según Elliot (1990) reside en la triangulación, lo que requeriría la presencia en las aulas de un observador externo. Hopkins (1989), sin embargo, describe un caso donde el investigador es el propio profesor sin esta figura. En las investigaciones realizadas en la Universidad de Valladolid, el director de la investigación asume el papel del observador externo a través de las grabaciones. Otra forma de validación es la saturación. Esta se produce cuando en el último ciclo experimental no se producen nuevos resultados.

**Hipótesis de trabajo**

Como ya se ha indicado en el resumen, esta investigación forma parte de una mucha más amplia que se viene desarrollando desde hace unos años en la Universidad de Valladolid y que se basa en la conceptualización de límite funcional publicada por Blázquez y Ortega y tiene su origen en la discriminación entre los conceptos de aproximación y tendencia. Para estos autores cualquier número es una aproximación a otro y, mientras que, por ejemplo, 1, 1'1, 1'11, 1'111,… es una sucesión que se aproxima a 100, resulta evidente que no tiende a 100, que su límite no es 100. Sin embargo, es claro que tiende a 4/3, que su límite es 4/3, y esto se puede enunciar en términos de aproximaciones diciendo que fijada cualquier aproximación de 4/3 existe un término de la sucesión tal, que a partir de él todos los que le siguen mejoran a la aproximación fijada.

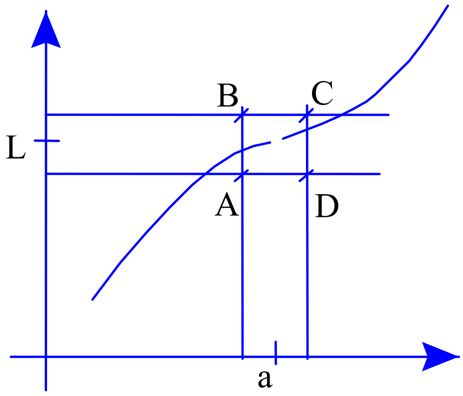
Esta observación permite a Blázquez y Ortega a formular la siguiente definición:

El límite de la función $f$ en $x=a$ es $L$ si para cualquier aproximación $K$ de $L$ ($K\neq L$), existe una aproximación $H$ de $a$ ($H\neq a$), tal que las imágenes de todos los puntos, que están más cerca de $a$ que $H$, están más próximas a $L$ que $K$.

Otra definición equivalente a la anterior es la siguiente:

El límite de la función *f* en el punto *x=a* es *L* si para cualquier aproximación *K* de *L* (K≠L) existe un entorno reducido de *a*, de manera que las imágenes de todos los puntos de dicho entorno mejoran dicha aproximación.

Gráficamente, lo que quiere decir es que considerando una banda horizontal que contiene a *L*, existe una banda vertical que contiene al punto *a*, tales que, como indica la figura adjunta, la gráfica de la función, independientemente de lo que ocurra en *a,* tiene que entrar en el rectángulo ADCB por el segmento AB y salir exclusivamente por CD.




La gráfica de la función se dibuja después y se obliga a que cumpla la condición señalada, y que no influye si la función está definida en *a* o no.

En el curso 2002-2003 se desarrolló el primer ciclo de exploración en el que se planificó y se ejecutó una metodología constructivista basada en tareas de cambios de registros y en interpretaciones de tipo conceptual.

En primer lugar, se desarrollaron los contenidos relativos a sucesiones y se introdujeron los conceptos de aproximación y tendencia como pasos previos a la conceptualización de límite funcional. Se trabajó con la conceptualización métrica tradicional y con la conceptualización de Blázquez y Ortega basada en la aproximación óptima. Se analizaron los datos aportados por los cuestionarios de los alumnos y por las entrevistas que se realizaron a parejas de alumnos. Se hicieron las correspondientes reflexiones de ciclo y se delimitaron las hipótesis de investigación, que se enuncian a continuación:

1. Las definiciones que utilizan los textos son muy diferentes en orientación y forma, e incluso tienen diferencias notables en el contenido.

2. Buena parte de los alumnos que cursan Análisis Matemático en el primer curso de la Facultad no han adquirido la formación matemática suficiente para abordar con éxito el estudio del concepto de límite funcional.

3. El paso de las conceptualizaciones ingenuas en cualquier registro a cualquiera de las conceptualizaciones rigurosas (métrica o como AO) es muy problemático para estos alumnos.

4. La conceptualización basada en la AO tiene mayor significación para los alumnos que la conceptualización métrica.

5. Los alumnos aprenden mejor la conceptualización basada en la AO que la conceptualización métrica.

6. Los alumnos aplican preferentemente la definición basada en la AO que la conceptualización métrica.

En las entrevistas que se hicieron a los alumnos en el primer ciclo de la investigación de la Universidad Nacional de San Luis y en las respuestas que emitieron los alumnos egresados del CAP de la Universidad de Valladolid, surge de manera natural la séptima hipótesis de trabajo, ya que, a la mayor sencillez que atribuyen la conceptualización basada en la idea de aproximación, algunos de los alumnos la asocian con la mayor memorización. Así, Rosario (Ingeniera de Telecomunicaciones) afirma:

- *La definición métrica se aprende de memoria y se olvida fácilmente*.

La declaración de esta alumna nos obligo a incluir la siguiente hipótesis y confirmarla o rechazarla en un nuevo ciclo de experimentación.

7. De las posibles conceptualizaciones, las ingenuas son más perdurables en la memoria que las rigurosas y, de éstas, la métrica es más difícil de recordar

**Experimentación**

Con el propósito de poder constatar la hipótesis formulada, a los 35 alumnos que en ese momento cursaban la asignatura Probabilidad y Estadística (segundo año de la carrera, segundo cuatrimestre) se les pidió que respondieran a una cuestión sobre límite funcional. Se seleccionó este grupo de alumnos teniendo en cuenta que la mayor parte de ellos habían aprendido (estudiado) este concepto un año y medio atrás (primer cuatrimestre curso lectivo 2004 del curso anterior), pero también, dentro del grupo, se encontraban estudiantes que cursaron la asignatura en el primer cuatrimestre de 2001, otros en el primer cuatrimestre de 2002, y otros en el primer cuatrimestre de 2003. Todos estos alumnos habían aprobado la asignatura, Análisis Matemático I, donde se desarrolla el concepto de límite funcional. La profesora investigadora fue quien se encargó de impartir el concepto de límite de una función en los años anteriores en el primer curso de carrera de los alumnos de Ingeniería, y también esta profesora es responsable de la asignatura Probabilidad y Estadística del segundo año de los mismos alumnos, durante una de las clases en esta última materia solicitó a los alumnos que respondieran a la siguiente pregunta.

Cuestión única: *Escribe la definición de límite de una función* f(x) *cuando* x *tiende a* $x_0$.

Los alumnos debían escribir la respuesta utilizando la definición métrica y la definición como aproximación óptima y, como ya se ha indicado, el objetivo de la cuestión consistía en averiguar si los alumnos recordaban tales definiciones y, de las dos modalidades en las que fueron instruidos, determinar cuál era la que ocupaba un lugar preferente en sus evocaciones.

Los alumnos se sintieron sorprendidos, por lo que en un primer momento manifestaron su desconcierto, y muchos pensaron que se trataba de un concepto fundamental que debían recordar y que influiría en el desarrollo de la nueva asignatura. La profesora, entonces, les explicó que la respuesta no se tendría en cuenta en esta asignatura, que se les hacía esa pregunta con el propósito de continuar una investigación que ella venía realizando sobre la conceptualización de límite. Muy brevemente les hizo recordar que cuando se desarrolló el tema de límites funcionales, les habían enseñado distintas definiciones del concepto, y que debían escribir aquellas que recordaran y comprendieran mejor.

Se considera que los alumnos respondieron a la cuestión planteada con interés, ya que mientras que estuvieron elaborando la respuesta, alrededor de quince minutos, mantuvieron un silencio absoluto y, tratando de evocar las definiciones, hicieron esquemas en borrador antes de hacer la redacción final.

**Análisis de las respuestas**

De los 35 alumnos que respondieron a esta cuestión, 1 de ellos había cursado Análisis Matemático I durante el primer cuatrimestre del año 2001, 3 alumnos lo habían hecho durante el primer cuatrimestre del año 2002, 13 en el primer cuatrimestre 2003 y los restantes, 18 alumnos, durante el primer cuatrimestre del año 2004.

Por otra parte, para el análisis de las respuestas, también se tuvieron en cuenta los registros de representación (Duval, 1998), en los que los estudiantes se expresaron para explicar este concepto, y el tiempo transcurrido desde que tuvo lugar la docencia de estos conceptos en la Facultad.

A pesar de que Duval establece que para la comprensión integradora de un concepto es necesario que el alumno sea capaz de realizar conversiones entre registros, en esta parte de nuestra investigación no consideraremos este aspecto del aprendizaje como una cuestión principal, que ya ha sido analizado y ha dado lugar al artículo de Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006). Nuestra atención principalmente se centrará en lo que los alumnos recuerdan, qué conceptualización tuvo mayor peso o cuál perduró más en la memoria de los alumnos.

Como ya se ha indicado, el interés de nuestra investigación se centra en dilucidar las preferencias de los alumnos entre las definiciones métrica y como aproximación óptima, y aunque hay alumnos que responden de forma ingenua y, en consecuencia son difíciles de clasificar, diremos que el alumno utiliza una conceptualización u otra si la terminología que emplea está más próxima a la que en su día describió el profesor en cada uno de los casos. La puntuación alcanzada en cada caso va a determinar lo niveles de evocación de cada uno.

Se confeccionó una tabla con las respuestas de los alumnos y en ella, además del año en el que cursaron sus estudios, se plasmaron los siguientes aspectos: tipo de conceptualización, el registro verbal y los registros gráfico y algebraico en relación con la definición que utilizaron.

Dentro de cada una de estas definiciones se consideraron dos subcolumnas con la separación de registros en las que pueden ser explicadas (registros verbal y gráfico para aproximación óptima y registros algebraico y gráfico para la conceptualización métrica). Cada alumno fue calificado en una escala que va desde el 0 al 10.

La pregunta fue formulada para que la contestaran por escrito los 35 alumnos presentes en el aula; todos siguieron las instrucciones de la profesora y escribieron la respuesta, excepto dos de ellos que la dejaron en blanco, alegando que no recordaban el concepto y, aunque estas alegaciones habría que considerarlas como indicadores de las dificultades de evocación del concepto, no figuran en la tabla, ya que no van a influir en la predilección de ninguna de las concepciones.

Lo primero que llama la atención es la cantidad de alumnos que tratan de responder utilizando la definición basada en la aproximación óptima exclusivamente y, sobre todo, que ningún alumno responde exclusivamete en los términos de la conceptualización métrica. Para ser más precisos, se construye la siguiente tabla que explicita los resultados de los registros asociados a ambas definiciones.

| Tabla de resultados | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 alumnos | Aproximación óptima (AO) | | | Métrica (M) | | | AO y M |
| Registros | Verbal | Gráfico | Única | Algebraico | Gráfico | Única | Ambas |
| Nº de respuestas | 32 | 21 | 25 | 3 | 7 | 0 | 8 |

TABLA IX.1: RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS SEGÚN LOS DISTINTOS REGISTROS

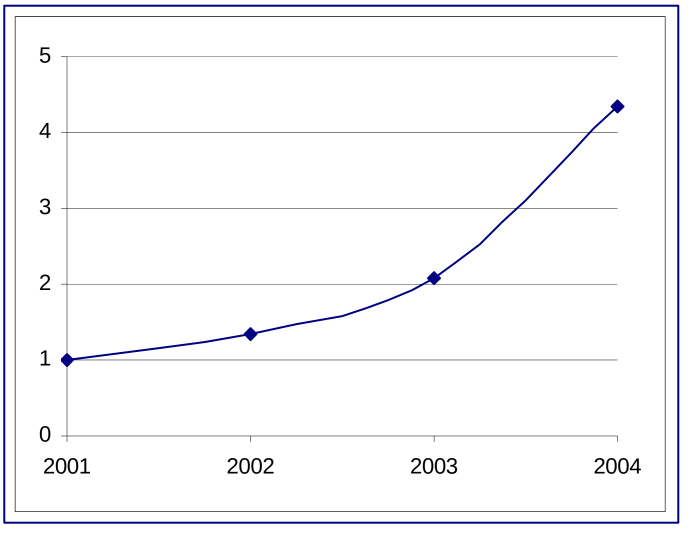



*Figura 5: representación del olvido.*

En relación con el período transcurrido desde que realizaron estos estudios, las puntuaciones medias de las respuestas de los alumnos fueron las siguientes: año 2001, media 1,00; año 2002, media 1,33; año 2003, media 2,08; año 2004, media 4,33. Estos datos hacen referencia a la memoria a largo plazo, y se observa un olvido progresivo de las definiciones, de tal manera que con el paso de un par de años el olvido, en la mayor parte de los alumnos, es casi total; de hecho, en el período 2001-2003 la moda es 1. Como muestra la figura 5, se podría afirmar que el olvido de estos conceptos es una función exponencial del tiempo.

**Reflexiones**

Lo primero que llama la atención es la cantidad de respuestas tan diversas que emiten los alumnos y las dificultades que tienen para escribir la definición de límite funcional.

La mayoría de los alumnos que respondieron a la cuestión utilizaron la definición basada en la aproximación óptima exclusivamente, mientras que los alumnos que responden con la definición métrica también lo hacen utilizando la definición como aproximación óptima.

La mayor parte de todas las respuestas están formuladas en los términos de las definiciones ingenuas, lo que corrobora la primera parte de la hipótesis.

En general comenten muchos errores con ambas definiciones, pero hay una diferencia sustancial entre una y otra, siendo menores cuando utilizan la definición como aproximación óptima, posiblemente porque ésta última tiene una representación verbal directa, mientras que la definición métrica precisa de un registro simbólico. Por otra parte, son más correctas las respuestas que se basan en la definición como aproximación óptima, lo que pone de manifiesto que esta definición se almacena en la memoria de trabajo mejor que la definición métrica y, por esta razón, aquella es evocada con mayor facilidad y, por tanto, a la larga aporta una mayor formación, lo que confirma la segunda parte de la hipótesis.

El paso del tiempo influye en el olvido del los aprendizajes sobre concepto de límite de forma decisiva y se puede afirmar que el olvido depende exponencialmente del paso del tiempo.

Desde otra perspectiva, teniendo en cuenta la teoría de Duval, los alumnos que responden utilizando tres registros obtienen puntuaciones más altas, lo que corrobora su hipótesis sobre la comprensión integradora de un concepto.

## Referencias bibliográficas

Baddeley A. (2003). *Memoria Humana: Teoría y Practica. Ed. McGraw-Hill/Interamericana de España. Madrid.*

Berthelot, R y Berthelot, C. (1983): *Études en Didactique des Mathématiques. Quelques apports de la théorie des situations á l'etude de l'introduction de la notion de limite en classe première A*. Bordeaux: Université de Bourdeaux I.

Bláquez, S. (1999): *Noción de Límite en Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1997): *Las sucesiones como instrumento de aproximación didáctica a los conceptos de función y límite funcional*. Actas de las VIII JAEM. Salamanca: 277-281.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1999): *Didáctica del Análisis en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Concepto de límite.* En, T. Ortega (ed.): Temas controvertidos en Educación Matemática. Valladolid: SAE de la Universidad de Valladolid, 121-154.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000): *El concepto de límite en la educación secundaria. En El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. pp. 331-354. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001a): *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite.* Vol 4. Nº3, 219-236. RELIME. ISSN: 1665-2436. México DF.

Blázquez., S. y Ortega, T. (2001b): *Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato.* AULA, Vol. 10, pp. 117-133. ISSN: 0214-3401. Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002): *Nueva definición de límite funcional.* UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 30, pp. 67-82. Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006): *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad.* RELIME. ISSN: 1665-2436. México DF.

Calleja, M.F. (2005): Mapas conceptuales: Escuelas y Procesos Psicológicos. Maxtor. Valladolid.

Cornu, B. (1983): *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991): Limits. En D. Tall (ed.): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, 153-166

Delgado, C. (1995): *Estudio de la evolución de los esquemas conceptuasles de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad.* Tesina del Dpto de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 173-201.

Elliot J. (1990): *La* investigación-*acción en Educación.* Madrid. Morata.

Espinoza, L. (1998): *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de* función*. Del pensamiento del profesor a la gestión de los* momentos *del estudio.* Tesis doctoral. Dpto. de didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Hopkins, D. (1989): *Investigación en el aula.* Barcelona. PPU

Kemmis y McTaggart (1988): *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona. Ed. Alertes.

Robinet, J. (1983): Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches *en* Didactique *des Mathématiques*, vol 4.3, 223-292.

Sánchez, C. (1997): *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendiaje de la noción de límite de una función*. Tesis doctoral. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada.

Sierpinska (1985): *Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 6.1 Pg. 5-67.

Sierpinska (1990): *Some remarks on understanding in mathematics.* For de learning of Mathematics, vol 10.3. Pg. 24-36.

Sierra, M, González, Mª T. y López, Mª C. (1998): Límite funcional y continuidad: desarrollo histórico y *concepciones* de los alumnos. *Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*. Toro: SCLPM (en prensa)

Tall, D. y Vinner, S. (1981): Concept *image* and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math,* vol 12, 151-169.

Wingfield A. y Byrnes D. (1988). *Psicología y Memoria Humana.* Ed. Trillas. México,

# LA TEORIA FUZZY COMO ELEMENTO PARA MEDIR EL GRADO DE DESARROLLO EN LA COMPRENSIÓN DE LA INTEGRAL

Francisco José Boigues Planes

José Pastor Gimeno

Escuela Politécnica Superior de Gandia (Valencia)

## Resumen

Parte de la investigación reciente en el campo de la educación matemática se ha centrado en el análisis de la comprensión de nociones básicas del Cálculo y en la búsqueda de los mecanismos que puedan favorecer dicha comprensión. Además, varias teorías de tinte constructivista, han aportado con el desarrollo de la comprensión como algo dinámico nuevos elementos que ayudan a entender el proceso de construcción del conocimiento matemático. La comunicación que presentamos, muestra a través de la teoría denominada fuzzy, parte básica de la matemática difusa, un procedimiento que complementa los métodos cualitativos de análisis de datos y que nos permite además de conocer la etapa de desarrollo en la comprensión de una determinada noción matemática, el poder establece una medida del grado de aproximación a dicha comprensión.

Boigues Planes, J., Pastor Gimeno, J. (2007) La teoría Fuzzy como elemento para medir el grado de desarrollo en la comprensión de la integral. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp.145-155.

## Introducción

En el campo de la educación matemática ha habido un esfuerzo enorme por conceptuar la noción de *comprensión,* buscándole un significado específico para la comunidad educativa matemática. El primer trabajo, que supuso diferenciar comprensión de conocimiento, lo encontramos en *"comprensión instrumental y relacional"* de Skemp (1976). Hasta ese momento, comprensión estaba identificada con conocimiento, a lo sumo, la palabra comprensión estaba vinculada a la de manipulación algorítmica o resolución de problemas. Y de acuerdo con  Polya (1962), la comprensión no puede clasificarse como presente o no presente debido a que es más un problema de extensión que de presencia (Meel, 2003).A partir de mediados de los años 70, con el trabajo de Skemp (1976), se da un salto cualitativo en la definición de  la comprensión, diferenciando comprensión relacional como un saber hacer y por qué se debe hacer, con la comprensión instrumental como un tener reglas sin una razón, la tendencia a proporcionar respuestas rápidas a las cuestiones que se le plantea a un individuo. A partir de ese momento aparecen varios trabajos tendentes a describir y clasificar con más detalle esa distinción en la comprensión (Byers,1977).

Recientemente, enfoques constructivistas han aportado nuevos elementos a la noción de comprensión. Entre las múltiples aportaciones, cabe destacar la superación de obstáculos cognitivos (Sierpinska, 1990). Los actos de comprensión correspondían a un acto de superación del obstáculo epistemológico. Para ello, el estudiante debe experimentar un cierto conflicto mental que pongan en duda sus convicciones, aunque en ocasiones la comprensión puede desembocar en un resultado de aprendizaje que sea ajeno a la dirección deseada. Otra aportación de los enfoques constructivistas sería la visión de la comprensión como generadora de imágenes del concepto. De acuerdo con Vinner, el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del concepto, que incluye todas las imágenes mentales junto con sus propiedades y sus procesos asociados (Tall y Vinner, 1981). Resulta, por tanto, evidente que una imagen del concepto difiere de su definición formal y contiene muchos más elementos.

Por último, resaltar cómo varios marcos han contribuido a caracterizar las etapas en la construcción de nuevos conceptos matemáticos. La teoría APOS de Dubinsky (1991) o la teoría de reificación de Sfard (1991) o el modelo de Pirie y Kirien (1991), basándose en la epistemología de Piaget, han establecido que el aprendizaje es un actividad constuctivista, donde nuevos estructuras conceptuales  son abstraídas vía  la transformación y coordinación de otras ya existentes, y que experimentan un desarrollo siguiendo unas determinadas pautas.

**Comprensión y teoría APOS**

La teoría APOS surge en un intento por aplicar los mecanismos de la abstracción reflexiva, introducida por Piaget al describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extender esa idea a conceptos matemáticos más avanzados El modelo está claramente vinculado con raíces constructivistas, en las que el individuo construye su propio conocimiento a partir de las situaciones que le plantean los problemas matemáticos. Para APOS la comprensión de un concepto equivale a construir un conjunto de objetos cognitivos (Acciones-Procesos-Objetos) y de relaciones entre dichos objetos, formando los que denomina esquemas. Los esquemas pueden ser tematizados (interiorizados) formando objetos que a su vez pueden ser elementos de otro esquema (Asiala,1996).

Además, la comprensión no es una situación estática sino que admite un grado de desarrollo que se clasifica en tres niveles (intra, inter y trans). Un esquema no es algo estático, sino admite un desarrollo, por lo que nos movemos en un contexto dinámico, cambiante. Piaget y García (1983) plantearon que el conocimiento crece según ciertos mecanismos, que se desarrolla en tres etapas, denominadas tríada, y que se suceden de una manera determinada. Además Piaget y García formularon la hipótesis de que esos niveles se pueden encontrar cuando se analiza cualquier desarrollo de un esquema de cualquier noción matemática. Este mecanismo define tres etapas particulares en el desarrollo de un concepto: Intra, Inter y Trans, siendo el principal rasgo que las va a distinguir la capacidad para establecer relaciones entre sus elementos.

La etapa *Intra* se caracteriza por que los elementos del esquema se utilizan de manera aislada, y de manera muy general en función de sus propiedades. Las transformaciones se centran en repetir las acciones pero se carece de la capacidad de relacionar unas acciones con otras, y por tanto un objeto se identificaría como una simple generalización sin acabar de reconocer su globalidad. Por ejemplo, Clark(1997) al estudiar el esquema de la regla de Cadena, advirtió como algunos estudiantes eran capaces de hallar la derivada de funciones compuestas aplicando la regla de la cadena pero no eran capaces de ver que todas estaban relacionadas con la fórmula de la derivada de función compuesta.

En cambio, la etapa *Inter* se caracteriza por el reconocimiento de relaciones entre los elementos del esquema, y por tanto hay una mayor posibilidad de potenciar la capacidad deductiva. Además, varios elementos diferentes pueden ser englobados en una conceptualización más general. El paso de una etapa a otra suele darse como consecuencia de la reflexión en torno a las relaciones entre elementos del esquema. Algunos han llamada a esta etapa de desarrollo “preesquema”. Asi, en el trabajo de Clark se podría explicar el comportamiento de algunos estudiantes que empezaban a asociar las reglas de derivación que estaban usando a un mismo modelo.

Finalmente la etapa *Trans* está caracterizada por tener construida una estructura subyacente y de manera completa, en la que las relaciones descubiertas en las etapas anteriores son comprendidas y dotan al esquema de la propiedad de la coherencia. Hay una conciencia por parte del estudiante de la complejidad del esquema, y algunas de las propiedades globales que no eran percibidas antes, ahora ya se perciben.

**Conjuntos y métricas fuzzy**

Zadeh (1965) introdujo el concepto de conjunto fuzzy, que transformo la mayoría de las ramas de la ciencia y de la ingeniería, incluida la Matemática. Un conjunto fuzzy se define matemáticamente mediante la asignación a cada elemento de un conjunto un valor posible en el intervalo [0,1] que representa su grado de pertenencia al conjunto. Esta noción  introduce la noción de “borrosidad” a la pertenencia de un conjunto. De esta manera, se modelizan muchos fenómenos reales en los que sus objetos no tienen un criterio totalmente definido de pertenencia. La unión e intersección de una familia de conjuntos fuzzy, se define como el supremo e ínfimo, respectivamente de la familia de funciones.

Uno de los primeros campos fuzzy que aparece en Matemática fue el de la topología fuzzy (Chang, 1967). Chang define  conjunto fuzzy a toda aplicación definida sobre un conjunto X no vacío y cuyo rango este en [0,1]; y una topología T en X a toda familia de conjuntos fuzzy que es cerrada para uniones cualesquiera, y para intersecciones finitas, y conteniendo a las funciones constantes 0 y 1. Entre los problemas más interesantes que ha suscitado la topología Fuzzy es la de obtener una noción adecuada de espacio métrico fuzzy. Recordemos que el estudio de los espacios métricos se basa en la noción de distancia entre puntos, que en muchas ocasiones reales dicha distancia no puede determinarse con exactitud.

El problema de las distancias difusas había sido abordado por Menger (1942) al introducir los espacios métricos probabilísticos. Los trabajos de Kramosil y Michalek (1975) abordan la noción de fuzzy a la distancia entre objetos. En esta articulo usaremos la noción de espacio métrico fuzzy de George y Veernani (1994) que constituye una modificación mas completa de la anterior.

La terna (X,M,*) es un espacio métrico fuzzy si X es un conjunto arbitrario, * es una operación binaria continua en [0,1], conmutativa, asociativa, con elemento neutro y compatible con el orden [0,1], y M un conjunto fuzzy en XxXx]0,+∞[ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$, $t, s > 0$

*A.1 M(x, y, t)>0.*

*A.2 M(x,y,t)= 1 si y solo si x=y*

*A.3 M(x,y,t)= M(y,x,t).*

*A.4 M(x,y,t) * M(y,z,s) < M(x,z,t+s)*

*A.5 M(x,y,.):]0, +∞[ → ]0,1[ es continua*

Si (X,d) es un espacio métrico, entonces la siguiente función es una métrica fuzzy en X.

$$M_d = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

Se podría interpretar a M(x,y,t) como el grado de cercanía entre x e y en un contexto caracterizado por t.

### Objetivo de la experiencia

Esta comunicación forma parte de una investigación cuyo objetivo es caracterizar el desarrollo de la comprensión de la integral definida en universitarios. Generalmente se suele utilizar métodos cualitatitativos para describir las diferentes etapas en el desarrollo de la comprensión, y esto da lugar a muchas imprecisiones a la hora de caracterizar a un determinado estudiante. En este artículo pretendemos mostrar, usando una métrica fuzzy, un modo de caracterizar la etapa de desarrollo de un estudiante en su comprensión de la integral y obtener además un grado de pertenencia a la etapa.

## Diseño de la investigación

- **Descomposición genética de la integral definida**

La primera fase de la investigación fue determinar los elementos cognitivos que se espera que un estudiante construya en su comprensión de la integral, es lo que en APOS se denomina descomposición genética de la integral.Teniendo en cuenta el análisis del significado institucional de la integral, determinado a través del análisis de una serie de libros de texto, así como las diversas propuesta de descomposición genética sobre la integral realizadas en otras investigaciones, proponemos descomposición genética preliminar:

A. Partición de un intervalo [a, b]:

El conjunto de elementos cognitivos EA= {A0, A1, A2, A3}

A.0 Esquema tematizado de intervalo en la recta real.

A.1 Gráficamente se tendría la acción de dividir un segmento en varias partes.

A.2 Analíticamente tendríamos la acción de mostrar un conjunto de valores ordenados, cuyo primer elemento coincidiría con a y el último con b.

A.3 Interiorización en un proceso de la noción de partición.

Y la relación de equivalencia RA (suponemos las propiedades reflexiva y simétrica y la transitiva) cuyos elementos más destacables serían: RA2:= {A1 R A2} vía identidad de nociones

B. Sumas de Riemann para una función continua *f(x)* en un intervalo real [*a, b*] y con una partición dada.

El conjunto de elementos cognitivos EB={B01, B02, B03, B1, B2, B3}

B.01 Esquema tematizado de area de una superficie.
B.02 Esquema tematizado de función de variable real.
B.03 Esquema tematizado de partición.
B.1 Gráficamente se tendría la acción de construir los rectángulos cuyas bases serían los subintervalos definidos por la partición y cuyas alturas serían las imágenes de un punto según un criterio (el máximo, el mínimo, etc.) y delimitar sus áreas
B.2 Analíticamente, se tendría la acción de hallar un número que coincide con la suma de las áreas de los rectángulos.
B.3 La interiorización de las acciones llevará a una comprensión de la noción de suma de Riemann a nivel de proceso.

y la relación de equivalencia RB (suponemos las propiedades reflexiva y simétrica y la transitiva) cuyos elementos más destacables serían: RB:= {B1RB2} via identidad de nociones

C. Definir la integral definida como la aplicación del esquema límite a una sucesión de Sumas de Riemann.

El conjunto de elementos cognitivos EC:={C1,C 2, C3}
C1 Esquema tematizado de sucesión.
C2 Esquema tematizado de limite de una sucesión.
C3 Esquema tematizado de suma de Riemann

y la relación RC cuyos subconjuntos mas destacables serían
RC1:= {C1 R C3} vía construcción de una sucesión de sumas de Riemann y
RC2:={C2 R C3} vía limite de una sucesión de sumas de Riemann

- **Participantes**

En la experiencia participaron 87 universitarios de primer curso relacionados con la licenciatura de medio ambiente, ingeniería técnica forestal e ingeniería técnica agrícola.

- **El cuestionario**

Se pasó a todos los participantes en una sesión de 45' un cuestionario con 8 ítems. El cuestionario constaba de dos partes claramente diferenciadas. En la primera (desde q1 a q5) se buscaba detectar los elementos que usaban en el esquema. En cambio en la segunda parte (desde q6 a la q8) se pretendía analizar la coherencia de su esquema. La puntuación que se daba fue un 1 para respuestas correctas y un 0 para respuestas erróneas.

Con el objeto de realizar un muestreo representativo de los diferentes niveles de respuesta se creo una tabla de contingencia. Una de las variables de la tabla describía tres niveles de acierto en las cuestiones de la primera parte: Nivel bajo (2 puntos o menos), nivel intermedio (3 ´0 4 puntos) y nivel alto (5 puntos). Siguiendo el criterio anterior, definimos otra variable que describiera el nivel de acierto de las cuestiones de la segunda parte y también determinamos tres niveles: Nivel I (1punto), nivel II (2 puntos) y nivel III (tres puntos).

| | | Coherencia del esquema | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| Elementos del esquema | Bajo | 45 | 3 | 0 |
| | Medio | 18 | 8 | 0 |
| | Alto | 5 | 3 | 5 |

- **La entrevista**

Se eligió una muestra representativa y se les entrevistó con el objeto de determinar con más exactitud los elementos de la descomposición que ponían en juego. Previamente durante el diseño de los ítems se fijo una conducta prevista en las respuestas de los alumnos. Se hicieron transcripciones de las entrevistas y dos investigadores determinaron un grado de adquisición de los elementos, siguiendo las siguientes pautas:

- Asignar el valor 0 si no usa el elemento previsto.
- Asignar el valor 0'25 si usa dicho elemento pero de manera incorrecta.

- Asignar el valor 0’5 si usa bien el elemento pero después de alguna observación
- Asignar el valor 0’75 si usa bien pero no acaba de justificar su utilización.
- Asignar un 1 si responde y justifica según lo previsto.

- **Método de análisis**

En la teoría APOS un esquema es una situación dinámica en el estudiante y que admite un grado de desarrollo que se clasifica en tres niveles: intra, inter y trans.

- En el nivel INTRA, se van construyendo elementos de manera aislada, incluso se puede completar los elementos del esquema de partición pero el esquema de suma de Riemann (elemento B de la descomposición genética) estaría incompleto.
- En el nivel INTER, se tienen todos los elementos del esquema de la integral pero falta establecer alguna de las relaciones previstas para definir la integral definida (elemento C de la descomposición genética).
- Nivel TRANS, se ha completado el conjunto de las construcciones cognitivas y las relaciones.

Luego la clave estaría en la comprensión del esquema de sumas de Riemann. Supongamos un alumno P que tendrá definida para cada elemento del un valor entre 0 y 1 que indica cierto grado de adquisición del elemento, y por tanto disponemos de un vector de $R^7$. Podemos definir la métrica clásica (Euclideana)

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

y a partir de la métrica clásica podemos definir una métrica fuzzy:

$$M(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

La valoración que hemos dado al grado de adquisición de un estudiante ha sido calcular mediante la métrica fuzzy la distancia del estudiante al estudiante ideal que sería aquel que hubiera contestado a todo según lo previsto, es decir el vector I=(1,1,…,1). Luego sí un estudiante coincidiera con la puntuación ideal ( P= I), entonces *d(P,I)= 0,* y por tanto el grado de pertenencia sería *M(P,I,t)= t /(t+0)= 1*, es decir, el 100%..

En cambio si O fuese un estudiante con todo 1 salvo algún elemento que no sea los elementos previo con un 0'25 diríamos que no tiene completo su esquema de suma de Riemann y por tanto no puede usarlo correctamente según el esquema previsto, que sabe utilizarlo correctamente, es decir, O=(1,1,1,1,1,1,0'25), tendríamos que *d(O,I)= 0'75* y por tanto su grado de pertenencia sería *M(O,I,t)= t/(t+0'75),* dado que queremos ser consecuentes con la valoración dada a los ítems debería cumplirse que

$$t/(t+0'75)< 0'55 \rightarrow t<0'75.$$

Con el objetivo de simplificar cálculo tomamos *t=0'75.*

Con el esquema de partición haríamos lo mismo pero ajustando a las cinco componentes que posee su esquema.

- **Resultados**

A continuación mostramos algunas fichas que recogen los cálculos realizados

| ELEMENTOS Y RELACIONES | Nº DE LA CUESTIÓN | ALUMNO 1 | ALUMNO 2 | ALUMNO 3 |
|---|---|---|---|---|
| A0 | Q1 | 1 | 1 | 1 |
| A1 | Q1 | 1 | 1 | 1 |
| A2 | Q1 | 0.75 | 0.75 | 0.5 |
| A3 | Q2 | 0.75 | 0.5 | 1 |
| A1RA2 | Q1 | 0.5 | 1 | 0.5 |
| Grado de desarrollo esquema A | Q1/Q2 | 0.567 | 0.589 | 0.531 |
| B01 | Q3 | 1 | 1 | 0.75 |
| B02 | Q3 | 1 | 1 | 0.75 |
| B03 (A) | Q3 | 0.567 | 0.589 | 0.531 |
| B1 | Q3 | 0.5 | 1 | 0.25 |
| B2 | Q3 | 0.25 | 0.5 | 0.25 |
| B3 | Q4 | 0.75 | 0.75 | 0.25 |
| B1RB2 | Q3 | 1 | 0.25 | 0.25 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Grado de desarrollo esquema B | Q3/Q4 | 0.436 | 0.439 | 0.33 |
| C1 | Q5/Q6 | 0.5 | 0.75 | 0.5 |
| C2 | Q5/Q6 | 0 | 0.75 | 0 |
| C3 (B) | Q5/Q6 | 0.436 | 0.436 | 0.33 |
| C1RB | Q5 | 0 | 0.75 | 0 |
| C2RB | Q6 | 0 | 0 | 0 |
| Grado de desarrollo esquema C | Q5/Q6 | 0'21 | 0.29 | 0.20 |
| Nivel de comprensión[1] | | II | II | II |

Los tres estudiantes analizados estarían en el nivel inter ya que en su desarrollo de la comprensión de la suma de Riemann alcanza un grado de pertenencia superior a 0'25.

Pero su grado de desarrollo global respecto al esquema de integral definida sería muy bajo.

**Referencias bibliográficas**

Asiala, M., Brown A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in collegiate Mathmeatics Education. CBMS issues in mathematics Education, 6, pp.1-32

Byers, V., Herscovics, N. (1977). Understandings school mathematics. Mathematics Teaching, 81, 24-27.

Chang, C.L. Fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl. 24, 182-190.

[1] Nivel intra= I, nivel inter= II y nivel trans= III

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

George, A., Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. Fuzzy sets and systems 64, 395-399.

Kramosil, J. AND Michalek, J. (1975). Fuzzy metric and statistical metric spaces. Kybernetika 11 (1976). 621-633

Menger, K. (1942). Statistical metrics. Academis Sciences, USA, 28, 535-537.

Meel, D. E. (2003).Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos Pirie y Kirien sobre evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa, vol. 6 (3), pp.221-271

Piaget, J; Garcia (1982). Psicogénesis e historia de la ciencia.. México: siglo XXI editores

Pirie, S. E. B. AND Kieren, T. E. (1989). A recursive theory for the mathematical understandings. For the learnings of mathematics 9 (3), 7-11.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational studies in Mathematics, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the learnings of mathematics 10(3), 24-41.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 88, 44-49.

Tall, D. AND Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mthematics, 12 , 151-169.

Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy sets. Inform. Control 8, 338-353.

# FENÓMEMOS QUE ORGANIZAN EL LÍMITE

Francisco Javier Claros Mellado

María Teresa Sánchez Compaña

Moisés Coriat Benarroch

Universidad de Granada

**Resumen**

En este trabajo se pone de manifiesto la presencia de los fenómenos de aproximación organizados por una definición de límite en el caso de las sucesiones de números reales y de las funciones reales de una variable real. La exposición incluye la caracterización de tales fenómenos, una descripción del análisis comparativo desarrollado en base a ellos entre dos definiciones formales de límite de sucesión y función y una síntesis del estudio llevado a cabo sobre una muestra intencional de libros de texto de matemáticas.

**Abstract**

In this work the presence of the phenomena of approximation organized by the limit is shown in the successions of real numbers and the real functions of an only real variable. The exposition includes the characterization of such phenomena, a description of the comparative analysis developed in base to them between two formal definitions of limit of succession and function and a synthesis of the study carried out on an intentional sample of textbooks of math.

Claros Mellado, F.J.; Sánchez Compaña, M.T.; Coriat Benarroch, M. (2007) Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp.157-171.

## Introducción

El concepto de límite es reconocido en Educación Matemática como una de las nociones clave en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado de los alumnos. Tal como se ha venido subrayando recientemente (Azcárate y Camacho, 2003), las investigaciones desarrolladas en este ámbito han experimentado en los últimos años una evolución significativa en sus enfoques y propósitos, transitando de los estudios centrados en caracterizar las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión del límite (Cornu, 1991; Tall, 1992) a las investigaciones preocupadas por analizar las razones que subyacen a tales dificultades y por proporcionar, en base al nuevo conocimiento generado, soluciones efectivas en forma de propuestas didácticas sustentadas en marcos teóricos operativos (Espinoza y Azcárate, 2000; Mamona-Downs, 2001). Otros autores teniendo en cuenta las dificultades que plantea la definición formal de limite de una función en secundaria, han optado por dar una nueva definición de límite como "aproximación optima" (Blázquez y Ortega, 2002). En general, desde la perspectiva de estos nuevos planteamientos suele admitirse la relevancia que posee el análisis de los fenómenos que organiza o dan sentido al límite para el estudio de su comprensión. De hecho, la preocupación por esta cuestión llega a reflejarse en procedimientos específicos, como la descomposición genética planteada por Dubinsky (1991), empleada en la actualidad con éxito en modelos tan influyentes como la teoría APOS (Moreno, 2005).

Por nuestra parte, venimos realizando esfuerzos con el propósito general de profundizar en la naturaleza de los distintos fenómenos organizados por el límite, estudiar su presencia en la enseñanza y el currículo y analizar su influencia en la comprensión de los sujetos. En términos más precisos, nuestra investigación transcurre en torno a los problemas didácticos generados por el uso de las distintas nociones, ideas y definiciones que configuran el campo semántico vinculado al concepto de límite.

Como contribución específica, en el presente trabajo caracterizamos algunos de estos fenómenos concretos y establecemos las diferencias estructurales existentes entre dos definiciones formales de límite enunciadas en términos equivalentes: una, en el caso del límite finito de una sucesión de números reales, y la otra, en el límite finito de una función real de variable real en un punto. Con objeto de delimitar y especificar, en los currículos, la presencia de tales fenómenos, describimos algunos resultados obtenidos al estudiar una muestra de libros de texto de matemáticas. Tales resultados permiten centrar la atención, en la parte final del trabajo, sobre algunas cuestiones de interés, de las que se derivan consecuencias relevantes para la construcción y la organización didáctica del concepto de límite en la sucesión y la función.

**Fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimetación**

Nuestro análisis fenomenológico (en el sentido de Freudenthal (1983); véase también Puig (1997)) del concepto de límite pone al descubierto la presencia de dos fenómenos específicos de diferente naturaleza, a los que hemos denominado genéricamente *aproximación intuitiva* y *retroalimentación, y* cuyas características pasamos a describir a continuación.

- **Fenómenos de Aproximación Intuitiva**

Los fenómenos de aproximación que se manifiestan al contemplar, de forma no rigurosa, el límite en su faceta dinámica admiten una clasificación básica con dos tipos diferenciados, presentes en el caso de las sucesiones de números reales y de las funciones reales de variable real.

Con objeto de reducir en lo posible la complejidad de la exposición y lograr un mayor grado de precisión en el análisis, en el estudio que se presenta tan sólo se considerarán sucesiones simples monótonas y funciones continuas.

La aproximación intuitiva remite bien al progreso experimentado por los términos de una sucesión de números reales con límite real o bien, en funciones reales de variable real con límite finito en un punto, a la evolución de las variables dependiente e independiente.

Empleamos la expresión *parecen acercarse* para capturar, al usarla, cualquier intuición para el limite finito (de la sucesión o de la función en un punto); por ejemplo, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explicita o no) en los valores inspeccionados.

***Aproximación simple intuitiva (ASI)***

Dados $k$ términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k,a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cuando “parecen acercarse” a otro valor fijo.

***Modelo***: En la sucesión $(1,1), (1,1/2), (1,1/3),\ldots,$ los términos $1/n$, parecen acercarse a 0 a medida que $n$ crece.

***Aproximación doble intuitiva (ADI)***

Dados $k$ pares de valores de una función real $f$ de variable real $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)),\ldots, (x_k, f(x_k))$, identificamos la aproximación doble intuitiva como el fenómeno que acontece cuando, de forma relacionada, los valores $x_1, x_2,\ldots, x_k$ y sus respectivas imágenes $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_k)$ parecen acercarse a sendos valores fijos distintos. El que está aprendiendo cree que hay dos aproximaciones, la de la sucesión de valores de la variable independiente hacia un valor y la de la sucesión de valores de la variable dependiente hacia el límite; es consciente, o no, de la conexión que la función f establece entre ambas sucesiones. Esta observación nos conduce a designar el fenómeno con la expresión *aproximación doble intuitiva*, o ADI.

***Modelo***: Dada la función $f(x) = 2x$, en los pares de valores $(0.9\ ,1.8), (0.99,\ 1.98), (0.999,\ 1.998), \ldots,$ se observa que cuando la variable independiente parece acercarse a 1 la dependiente parece acercarse a 2.

- **Fenómenos de Retroalimentación**

La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función (ε-n para sucesiones; ε-δ para funciones). Dicho en términos coloquiales y gráficos, cada retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el ε dado "vamos" desde el eje de ordenadas al de abscisas para determinar el correspondiente **n** o δ asociado, según sea el caso, y "volvemos" al entorno del límite en el eje de ordenadas para comprobar que las imágenes de valores correspondientes al eje de abscisas, pertenecen al entorno considerado.

Estos dos fenómenos de retroalimentación, describen procesos matemáticos presentes en determinadas definiciones formales de límite (tanto en el caso de las sucesiones como en el de las funciones), y organizan, a su vez, los fenómenos de aproximación simple y doble intuitiva. En este sentido, afirmamos que:

*La definición de límite enunciada en términos formales organiza los fenómenos ASI y ADI mediante un fenómeno de retroalimentación en sucesiones y funciones.*

En la retroalimentación se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión o a la función. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión o función de referencia, la definición formal de límite induce, en ambos casos, la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión o función dada.

Esta nueva función emergente adopta un aspecto básicamente diferente en ambos casos (el de la sucesión y el de la función), llegándose a manifestar dos fenómenos de "ida y vuelta" no equivalentes desde un punto de vista práctico. En el caso de las sucesiones, al resultar una función natural de variable real ***(ε, n(ε))***, hablamos del fenómeno de *idea y vuelta en sucesiones (IVS)*. En el caso de las funciones, resulta una función real de variable real, ***(ε, δ(ε))***; por ello, hablamos del fenómeno de *idea y vuelta en funciones (IVF).*

***Modelo ivs***: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera.

***Modelo ivf***: Partiendo la función f(x)=2x, se construye la función (ε, δ) , donde δ< ε/2.

La figura 1 resume la relación que establecemos entre los distintos fenómenos presentados en torno al límite.

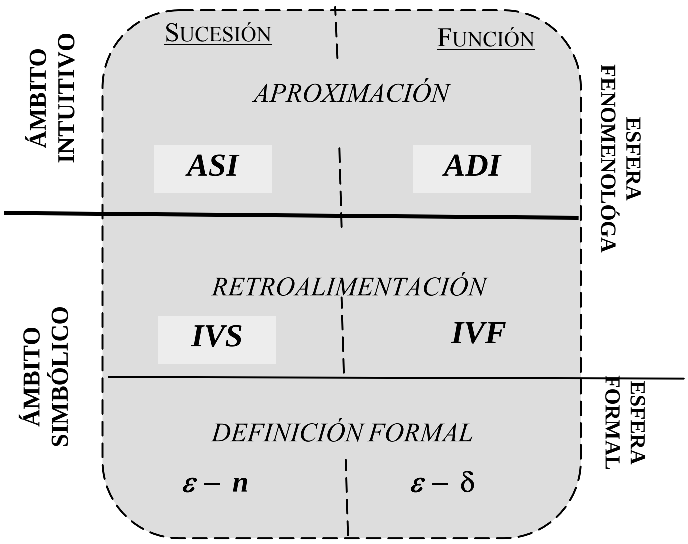



*Figura 1. Fenómenos de aproximación y retroalimentación en el límite finito*

- **Diferencias estructurales en la definición de límite de una sucesión y una función**

Las definiciones formales de límite admiten análisis desde un punto de vista simbólico y fenomenológico. En el presente apartado, exponemos desde ambas perspectivas las principales diferencias identificadas en dos definiciones formales específicas para el límite de una sucesión y una función en un punto.

- **Las definiciones formales**

Con el propósito de garantizar la representatividad de las definiciones objeto de estudio, inicialmente llevamos a cabo una consulta a expertos[1] en la que se concluyó la elección de la siguiente definición de límite finito para una sucesión de números reales:

| |
|---|
| *Sea $x_n$ una sucesión en $\Re$, decimos que $x_n$ converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim $x_n = x$) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ se cumple que $\lvert x_n - x \rvert < \varepsilon$* |

Por su paralelismo formal con la anterior, consideramos también la correspondiente definición de límite finito de una función real de variable real en un punto:

| |
|---|
| *Una función f(x) tiene límite L en el punto $x = x_0$, en el que la función puede tomar un valor cualquiera o incluso no estar definida, si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe otro número real $\delta > 0$ tal que si $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ se cumple que $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$* |

- **Diferencias simbólicas**

El estudio comparativo realizado desde el enfoque simbólico centra su atención en los aspectos de orden, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito. Entendemos por *proceso infinito* cada una de las formas posibles de aproximación experimentadas por las variables, independiente y dependiente, presentes en las definiciones formales consideradas y, para el análisis de los tipos de infinitos, se tomará como referencia a Tall (1991).La figura 2 muestra las diferencias más significativas que hemos apreciado entre ambas definiciones.[2]

---

[1] Se trata de una consulta a expertos realizada en el curso 2001-2002 a profesores de la facultad de Ciencias Matemáticas y del departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S.I de Informática de la Universidad de Málaga, en la que se solicitó qiue valoraran la pertinencia y la preferencia en el empleo de siete definiciones para el límite de una sucesión extraídas de manuales de Cálculo de uso frecuente en los primeros cursos de universidad.

[2] Esta figura constituye una síntesis de un estudio pormenorizado que incluimos en nuestro trabajo de investigación doctoral.

| | | ***LÍMITE DE UNA SUCESIÓN*** | ***LIMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO*** |
|---|---|---|---|
| DIFERENCIAS SIMBÓLICAS | ***Acotación*** | variable independiente **no acotada** | variable independiente **acotada** |
| | ***Procesos Infinitos*** | - aproximación **unilateral** (izqda.) en variable independiente<br>__________<br>- aproximación al límite mediante **valores superiores o inferiores**<br>__________<br>- procesos infinitos **discretos** | - aproximación **bilateral** en variable independiente<br>__________<br>- aproximación al límite mediante **valores superiores e inferiores**<br>__________<br>- procesos infinitos **continuos** |
| | ***Tipos de Infinito*** | - infinito potencial **presente**<br>__________<br>- infinito actual (cardinal) **numerable** | - infinito potencial **ausente**<br>__________<br>- infinito actual (cardinal) **no numerable** |

*Figura 2. Comparación entre límite de una sucesión y límite de una función en un punto: punto de vista simbólico*

- **Diferencias fenomenológicas**

El enfoque fenomenológico pone de manifiesto nuevas diferencias entre ambas definiciones, atendiendo a los fenómenos de aproximación y de retroalimentación que hemos caracterizado. (Ver Figura 3.)

| | | LÍMITE | |
|---|---|---|---|
| | | ***Sucesión*** | ***Función*** |
| FENÓMENOS | ***Aproximación*** | ASI | ADI |
| | ***Retroalimentación*** | IVS | IVF |

*Figura 3. Fenómenos que organizan el concepto de límite.*

**Presencia en los libros de texto**

El siguiente paso del estudio fue la observación en los libros de texto de los fenómenos descritos en el apartado 2. El análisis global se dividió en dos partes:

1) Estudio dedicado a la observación de los fenómenos presentes en el concepto de límite de sucesiones, para el que se contempló 24 libros.

2) Estudio dedicado a la observación de los fenómenos presentes en el concepto de límite de funciones, en el que se consideró una muestra de 26 libros.

Ambas muestras han de considerarse intencionales y no representativas dado que solamente contemplamos aquellos libros a los que tuvimos acceso en los diferentes institutos en los que trabajamos como docentes. El periodo de estudio abarcado para cada una de las partes descritas fue: 1933-2005.[3]

- **Ejemplos paradigmáticos de los fenómenos en los libros de texto**

A continuación presentamos cuatro ejemplos de los fenómenos que hemos definido anteriormente: los fenómenos de aproximación intuitiva (simple o doble), y los fenómenos de retroalimentación, en sucesiones y en funciones.

[3] Este estudio no está publicado, forma parte de nuestro trabajo de tesis.

Al estudiar la presencia de estos fenómenos en los libros de texto, hay que considerar los sistemas de representación que, en opinión de sus autores, mejor se adaptan a las ideas que quieren transmitir; también eligen la presentación de ideas usando ejemplos o definiciones. Sin profundizar aquí en esta cuestión, anotamos que hemos considerado cuatro sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico.

Análogamente, cada autor decide presentar sus ideas a través de definiciones o ejemplos.

En la figura 4 se presentan ejemplos paradigmáticos o "modelos" extraídos de libros de texto. Esta figura no pretende abarcar todas las situaciones propuestas por los autores consultados, sino ofrecer textos ajenos que sustituyen sin dificultad a los modelos que hemos presentado en el Apartado 2.

**a.s.i. (Modo de presentación: verbal-definición)**

*"Diremos que el numero a es el limite de la sucesión ($a_n$) cuando a medida que n toma valores cada vez mayores entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real a".*

(Vizmanos, J.R., Anzola, M. y Primo, A. (1981) *Funciones-2. Matemáticas 2º B.U.P.* Madrid: SM)

**i.v.s (Modo de presentación: verbal-definición)**

"*Sea $a_n$ una sucesión de números reales y l un número, también real. Se dice que la sucesión $a_n$ tiende a l, o tiene por límite l cuando para todo número $\varepsilon>0$ es posible encontrar un término $a_p$ de la sucesión tal que él y todos los términos que le siguen difieren de l, en valor absoluto, en menos que $\varepsilon$".*

(Segura, D.(1973) *Matemáticas*. Valencia: Ecir)

**a.d.i (Modo de presentación: verbal-definición)**

*"Intuitivamente se puede pensar en el límite de una función y=f(x) en el punto x=a como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a."*

(Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M., y Poncela, M. (1996) *Matemáticas 1.CCNN*. Madrid: Santillana)

**i.v.f (Modo de presentación: verbal-definición)**

*"L es el límite de f (x) en el punto x = a si y sólo si para cualquier distancia $\varepsilon$ que se tome, por pequeña que sea, existe otra distancia $\delta$, tal que si la distancia entre x y a es menor que $\delta$ entonces la distancia entre f(x) y L se mantiene menor que $\varepsilon$."*

(Bescos, E. y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Madrid: Oxford Educación )

*Figura 4. Modelos de fenómenos de aproximación y retroalimentación en sucesiones y en funciones. (Varios autores.)*

**Presencia de los fenómenos de aproximación simple y doble intuitiva en los libros de texto (Período LOGSE)**

Denominamos *período LOGSE* al intervalo comprendido entre 1990 y 2005. En este período, para el estudio del límite de una sucesión se analizaron 5 libros de texto, y para el estudio del límite de una función, 6 libros. Las frecuencias de las tablas que siguen representan el número de veces que hemos observado los fenómenos que se indican; debe tenerse en cuenta que un mismo fenómeno puede observarse varias veces en un mismo libro.

(A) En sucesiones:

**R$_1$**. *Los fenómenos con mayor frecuencia absoluta son la aproximación simple intuitiva gráfica (g) y tabular (t) en ejemplo (e), con una frecuencia absoluta de 9*

**R$_2$**. *En los libros de texto no hemos observado la presencia de los siguientes fenómenos:*
- *aproximación simple intuitiva tabular en definición (d).*
- *aproximación simple intuitiva gráfica en definición.*
- *aproximación simple intuitiva simbólica (s) en definición.*
- *aproximación simple intuitiva simbólica en ejemplo.*

Los datos numéricos correspondientes a R1 y R2 se indican en la tabla 1

| Fenómenos | a.s.i v-e | a.s.i v-d | a.s.i t-e | a.s.i t-d | a.s.i g-e | a.s.i g-d | a.s.i s-e | a.s.i s-d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 5 | 3 | 9 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 |

*Tabla 1: Fenómenos de aproximación simple intuitiva, frecuencias*

(B) En funciones

El estudio relativo al límite de funciones en los libros de texto, arrojó los siguientes resultados destacados:

**R$_3$**. *El fenómeno con mayor frecuencia absoluta es la aproximación doble intuitiva tabular en ejemplo, con una frecuencia absoluta de 10.*

**R$_4$**. *En los libros de texto no hemos detectado la presencia de los siguientes fenómenos:*
- *aproximación doble intuitiva tabular en definición.*
- *aproximación doble intuitiva simbólica en ejemplo*

Los datos numéricos correspondientes a R3 y R4 se indican en la tabla 2

| **Fenómenos** | **a.d.i v-e** | **a.d.i v-d** | **a.d.i t-e** | **a.d.i t-d** | **a.d.i g-e** | **a.d.i g-d** | **a.d.i s-e** | **a.d.i s-d** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 9 | 7 | 10 | 0 | 4 | 2 | 0 | 1 |

*Tabla 2: Fenómenos de aproximación doble intuitiva, frecuencias*

**Presencia de los fenómenos de retroalimentación en sucesiones y en funciones, en los libros de texto.**

(A) En sucesiones:

**$R_5$**. *El fenómeno con mayor frecuencia absoluta es la ida-vuelta en sucesiones verbal (v) en definición con una frecuencia absoluta de 4.*

**$R_6$**. *No hemos observado los siguientes fenómenos:*
- *ida-vuelta en sucesiones tabular en definición.*
- *ida-vuelta en sucesiones tabular en ejemplo.*
- *ida-vuelta en sucesiones gráfico en definición.*
- *ida-vuelta en sucesiones simbólico en definición.*

Los datos numéricos correspondientes a R5 y R6 se indican en la tabla 3

| Fenómenos | i.v.s v-e | i.v.s v-d | i.v.s t-e | i.v.s t-d | i.v.s g-e | i.v.s g-d | i.v.s i s-e | i.v.s s-d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 2 | 4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

*Tabla 3: Fenómenos de ida-vuelta en sucesiones, frecuencias*

(B) En funciones

$R_7$. *El fenómeno con mayor frecuencia absoluta es la ida-vuelta en funciones verbal en definición con una frecuencia absoluta de 4.*

$R_8$. N*o hemos detectado la presencia de los siguientes fenómenos:*
- *la ida-vuelta en funciones tabular en ejemplo.*
- *la ida-vuelta en funciones tabular en definición.*

Los datos numéricos correspondientes a R7 y R8 se indican en la tabla 4

| Fenómenos | i.v.f v-e | i.v.f v-d | i.v.f t-e | i.v.f t-d | i.v.f g-e | i.v.f g-d | i.v.f i s-e | i.v.f s-d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 2 | 4 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 3 |

*Tabla 4: Fenómenos de ida-vuelta en funciones, frecuencias*

- **Resultados referentes a los sistemas de representación**

Recogemos las relaciones observadas entre los fenómenos encontrados en los libros de texto y los sistemas de representación (verbal, gráfico, tabular y simbólico).

**R$_9$.** *En los fenómenos de aproximación simple intuitiva los sistemas de representación más empleados son el gráfico y el tabular.*

**R$_{10}$**. *En los fenómenos de ida-vuelta en sucesiones el sistema de representación más empleado es el verbal.*

**R$_{11}$.** *En los fenómenos de aproximación doble intuitiva el sistema de representación más empleado es el verbal.*

**R$_{12}$**. *En los fenómenos de ida-vuelta en funciones el sistema de representación más empleado es el verbal.*

- **Comparación entre fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación**

La comparación de resultados entre los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación arrojó lo siguiente:

R$_{13}$. Los fenómenos de aproximación intuitiva superan en frecuencia absoluta a los fenómenos de retroalimentación

$R_{14}$. Los fenómenos de aproximación simple intuitiva en sucesiones superan en frecuencia absoluta a los fenómenos de ida-vuelta en sucesiones.

$R_{15}$. Los fenómenos de aproximación doble intuitiva en funciones superan en frecuencia absoluta a los fenómenos de ida-vuelta en funciones.

La tabla siguiente recoge las frecuencias totales de aparición de los diferentes fenómenos en los libros de texto del período LOGSE

| | Fenómenos de aproximación intuitiva | | Fenómenos de retroalimentación | |
|---|---|---|---|---|
| Fenómenos | a.s.i | a.d.i | i.v.s | i.v.f |
| Frecuencia | 26 | 33 | 10 | 12 |
| Frecuencia Total | 59 | | 22 | |

*Tabla 5: Frecuencias de los fenómenos en los libros del período LOGSE analizados*

De manera cualitativa, en los libros de texto del período LOGSE, nuestros resultados muestran un desequilibrio entre los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación, favorable a los primeros. La razón aproximada 13/5 parece asociada a todas las comparaciones entre ambos fenómenos:

$$\text{FREC (asi) / FREC (ivs)} \approx \text{FREC (adi) / FREC (ivf)}.$$

En cambio, la importancia asignada por los autores estudiados del período LOGSE al límite de sucesiones y al límite de una función en un punto parece aproximadamente la misma. (Razón aproximada, 5:6)

**Conclusiones**

En los libros de texto estudiados, y en la inmensa mayoría de los currículos, el concepto de límite de una sucesión precede al concepto de límite de una función. Este supuesto orden en la enseñanza del límite ya había sido propuesto por Tall (1981).

Los estudios didácticos raramente han distinguido entre el estudio del límite de una sucesión y el límite de una función. Se han ocupado en la mayoría de los casos del estudio del límite en general.

Con este estudio, aportamos evidencias fenomenológicas de que el concepto de límite finito de una sucesión está organizado por los fenómenos que hemos denominado asi e ivs, mientras que el concepto de límite finito de una función en un punto está organizado por los fenómenos que hemos denominado adi e ivf. Se sigue que cada uno de ellos tiene interés y entidad propios, y que el paso de un concepto a otro no consiste en una simple generalización.

Las razones que justifican la importancia de cada concepto son los diferentes fenómenos que involucran cada uno de ellos y las expresiones de cada concepto en los diferentes sistemas de representación.

Los fenómenos asociados al concepto de límite, han sufrido, en los libros de texto, una evolución con el paso del tiempo, aunque en este trabajo solamente aportamos resultados del estudio de de libros de texto producidos en el marco de la LOGSE. Tras la entrada en vigor y extensión generalizada de esta ley, observamos un auge de los fenómenos de aproximación intuitiva; como hemos explicado en la tabla 5, las frecuencias de estos fenómenos prevalecen sobre los fenómenos de retroalimentación. El desequilibrio observado en el período LOGSE otorga mucho más peso a la intuición del concepto de límite que a los enfoques más precisos, que exigen manejar los fenómenos de retroalimentación.

Por otro lado echamos de menos en los libros de texto el desarrollo del concepto de límite tanto de sucesión como de función en los diferentes sistemas de representación. En la mayoría de los libros revisados se realiza una exposición del concepto de límite solamente en alguno de ellos, perdiendo de esta manera la posibilidad de pasar de un sistema de representación a otro y de reconocer los fenómenos de aproximación intuitiva y los fenómenos de ida-vuelta en los diferentes sistemas de representación.

Expresamos nuestro agradecimiento a los comentaristas anónimos que, con sus sugerencias, han permitido mejorar el aspecto final de esta comunicación.

## Referencias bibliográficas


Azcarate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X, 2, 135-149.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002): Nueva definición de límite funcional. Uno. Revista de didáctica de las matemáticas. vol. 30, pp. 67-82. Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking ( pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En Tall, D.(Ed), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123.). Dordrecht: Kluwer.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. Enseñanza de las Ciencias, 18.3, 355-368.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. Educational Studies in Mathematics, 48, 259-288.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 81-96). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Tall, D. (1991) (Ed.). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. Plenary presentation in working Group 3 (pp. 1-8). Québec: ICME

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.

# UNA PRIMERA APROXIMACIÓN AL ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DE ALUMNOS DE PRIMERO DE LA ESCUELA DE INFORMÁTICA DE LA UPSA SOBRE LA NOCIÓN MATEMÁTICA DEL CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA

Myriam Codes Valcarce
Universidad Pontificia de Salamanca

Dr. Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca

## Resumen

Durante cinco semanas del segundo cuatrimestre del curso 2005-2006, se realizó la recogida de datos para analizar la compresión de los estudiantes de primer curso de ingeniería informática, del concepto de serie numérica. Bajo el marco teórico del enfoque APOE, y partiendo de una propuesta de una descomposición genética del concepto matemático serie numérica, se han caracterizado los niveles de desarrollo de este concepto (intra, inter y trans) y se han definido subniveles dentro de los niveles de desarrollo intra e inter. Estos subniveles marcan la transición de un nivel de comprensión a otro superior, que se manifiesta a través de las acciones que se llevan a cabo sobre los elementos del modelo propuestos en la descomposición genética: sucesión y sucesión de sumas parciales. Presentamos los primeros resultados parciales de un análisis piloto, de la primera actividad que realizaron los estudiantes, referente al tópico de serie numérica.

Codes Valcarce, M.; Sierra Vázquez, M. (2007) Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 173-186.

## Introducción

Este trabajo es un paso más en la labor de investigación que la autora comenzó hace algo más de tres años motivada por la inquietud de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de sus alumnos de primer curso de Universidad. La elección del tópico matemático, el entorno de trabajo y el marco teórico se han analizado en otros trabajos similares a este, [Codes, 2005], [Codes, 2004]

Durante 5 semanas del segundo cuatrimestre del curso 2005-2006 se realizó la recogida de datos que se han comenzado a analizar y cuyos primeros resultados se muestran en esta investigación.

Para formar la muestra, se pidió voluntarios entre los alumnos de la asignatura Fundamentos Matemáticos I del grupo de sistemas y de gestión de la Escuela de Informática de la Universidad Pontificia de Salamanca. Además, se grabaron íntegramente todas las clases en las que se impartió docencia sobre el tópico sucesiones y series numéricas. La recogida de datos fue un trabajo duro debido a que la labor de preparación técnica diaria de los equipos de grabación recayó sobre la profesora que impartía la materia que, además de atender a las necesidades de los alumnos que formaron la muestra, tenía que impartir la docencia.

Todas las grabaciones se han almacenado en unas 93 GB, de las cuales se han elegido algo más de 5,5 GB para este trabajo.

## Marco teórico

El trabajo de Piaget es el punto de partida de las investigaciones bajo el paradigma constructivista. Según esta escuela, el conocimiento de un individuo se construye con la encapsulación de procesos y acciones en objetos matemáticos.

La teoría APOE, (**A**cción, **P**roceso, **O**bjeto, **E**squema) se basa en la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento. Ed Dubinsky y su grupo de investigación RUMEC, han desarrollado numerosos trabajos en este marco teórico, con la pretensión de analizar cómo aprenden los estudiantes ciertos tópicos de matemáticas avanzadas. En las múltiples experiencias que han llevado a cabo con esta metodología, han trabajado distintos tópicos matemáticos, desde la matemática discreta hasta el cálculo.

**Teoría APOE**

El texto de Asiala, [Asiala, 1996] describe claramente esta metodología para la investigación en el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del currículum. Propone un ciclo que comienza con el análisis teórico, seguido del diseño e implementación de una instrucción y finaliza con el análisis de la recogida de datos. Con los resultados de este análisis, se modifica la instrucción y se completa otro ciclo.

El análisis teórico del concepto que se pretende investigar, concluye en una descomposición genética de dicho concepto, que según Asiala es 'una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante puede desarrollar para la comprensión del concepto'. La descomposición genética no es única, depende de la formación y la experiencia del investigador y es susceptible de ser modificada tras un primer análisis.

Esto lleva al diseño de una unidad didáctica cuyo principal objetivo es que el alumno construya el modelo cognitivo propuesto por el investigador. La instrucción se lleva a cabo con una muestra que, tras su análisis, hace que el investigador se cuestione el planteamiento teórico inicial y corrija la instrucción para llevarla de nuevo al aula y analizar su impacto. Este ciclo continúa hasta que el investigador considere que ha depurado la teoría y el proceso de instrucción.

Para facilitar el análisis de los datos, se introdujo el mecanismo de la triada que consiste en definir tres estados en el '*desarrollo de las conexiones que el individuo puede realizar entre constructos particulares dentro del esquema, así como la coherencia de esas conexiones*' [Dubinsky, 2001] Los tres nivel de desarrollo son el nivel intra, inter y trans. El nivel intra, se caracteriza por la falta de conexión entre acciones, procesos u objetos de la misma naturaleza. En el nivel inter, el individuo establece relaciones entre los elementos cognitivos y en el nivel trans el esquema adquiere coherencia, de modo que el individuo puede decidir qué está dentro y fuera del esquema.

- **Descomposición genética**

Tras el análisis del desarrollo histórico del concepto de serie numérica, se plantean las series como un modelo matemático de una realidad. Este modelo consta de dos elementos principales: sucesión y sucesión de sumas parciales, que se denotarán respectivamente $a_n$ y

$$\sum_{k=0}^{n} a_k .$$

***Problema contextualizado.***

I. Visualización del problema.

a) Punto de vista geométrico: dibujo, esquema,…

b) Punto de vista gráfico.

II. Reconocimiento de la sucesión de las sumas parciales.

a) Identificación de dos partes en el modelo matemático que representa el problema, una general (sucesión) y otra creada añadiendo sucesivos términos de la anterior (sucesión de sumas parciales).

III. Obtención del modelo matemático:

a) Acción de obtener el término general de una sucesión.

b) Acción de obtener el término general de una serie.

c) Acción de representar en un eje cartesiano los términos de una sucesión cualquiera, por ejemplo, $\mathrm{a_n}$ y $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{a_k}$ .

IV. Interiorización de las dos partes del modelo en un proceso que diferencia las dos partes del modelo, $\mathrm{a_n}$ y $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{a_k}$ .

a) La parte general se modela con una sucesión, expresada como una función. ($\mathrm{a_n}$)

b) La otra, con una sucesión cuyo término general es la suma de los n primeros términos de la anterior. ($\sum_{k=0}^{n} \mathrm{a_k}$)

V. Intuición acerca del comportamiento.

a) El comportamiento de la sucesión $a_n$ condiciona el comportamiento de la sucesión $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{a_k}$ .

b) la sucesión $a_n$ puede ser convergente y no serlo la sucesión $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{a_k}$ .

VI. Acciones sobre el comportamiento:

a) Acción de aproximar un valor utilizando la sucesión de sumas parciales.

b) Acción de calcular $\lim a_n$ y $\lim \sum_{k=0}^{n} a_k$ sin utilizar los algoritmos habituales de cálculo de límites, es decir, con gráficas, representaciones geométricas, etc.

VII. Interiorización de las acciones anteriores en un proceso que consiste en el cálculo formal del límite $\lim \sum_{k=0}^{n} a_k$ .

VIII. Encapsulación de los procesos IV y VII en el objeto serie numérica, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

- **Niveles de desarrollo**

Las acciones que el alumno lleve a cabo con y entre los elementos del modelo $a_n$ y $\sum_{k=0}^{n} a_k$ definirán su nivel de comprensión del esquema. Un primer análisis de las grabaciones llevadas a cabo en la clase y las observaciones de la profesora, indujeron a definir subniveles dentro del nivel de desarrollo intra e inter. Sánchez-Matamoros, [Sánchez-Matamoros, 2004] plantea algo similar '*debido a que la construcción del esquema tiene carácter progresivo*' (pp. 173) y a la observación de que alumnos en un mismo nivel de desarrollo mostraban '*más riquezas en las relaciones (...) aunque no podemos considerarlos en*' (pp. 174) un nivel más avanzado de comprensión.

La primera aproximación a la caracterización de los niveles de desarrollo es como sigue:

- ***Nivel intra:***

En el nivel intra de desarrollo del esquema, el alumno:

- Se desenvuelve a nivel de acciones aisladas, es decir, realiza cálculos algebraicos, representaciones gráficas y aproximaciones sin relacionar los resultados de unas con otras. (NIntra 1)
- No es capaz de obtener el término general de una sucesión de sumas parciales. (NIntra 2)
- Utiliza las mismas reglas del álgebra finita (operaciones con reales) en las sumas infinitas. (NIntra 3)
- Responde con afirmaciones del tipo: "una suma infinita vale ∞ porque siempre se suma algo. (NIntra 4)

➢ ***Nivel intra avanzado:***

En el nivel intra avanzado de desarrollo del esquema, el alumno:

- Puede inferir el comportamiento de la gráfica de una sucesión a partir de unos cuantos términos de la misma y viceversa. (NIntra 5)
- Establece relaciones entre las representaciones gráficas y las algebraicas, de un mismo problema. (NIntra 6)
- Obtiene el término general de una sucesión. (NIntra 7)
- Obtiene con dificultad el término general de una sucesión de sumas parciales. (NIntra 8)
- Conoce algunos criterios de convergencia, pero tiene dificultades para aplicarlos. Lo hace de forma mecánica. (NIntra 9)
- Confunde $a_n$ con $\sum a_k$ o $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. (NIntra 10)
- Es capaz de aplicar el criterio del término n-ésimo para concluir la no convergencia. (NIntra 11)
- Modela con dificultad una suma infinita. (NIntra 12)
- Acepta que una suma infinita pueda valer un valor finito. (NIntra 13)

➢ ***Nivel inter:***

En el nivel inter de desarrollo del esquema, el alumno:

- Establece relaciones entre las representaciones gráficas o geométricas y las algebraicas, de un mismo problema. A través de estas representaciones, o del cálculo o estimación de un límite, puede predecir el comportamiento de una sucesión (de la forma $a_n$ o $\sum_{k=0}^{n} a_k$). (NInter 1)
- Obtiene sin dificultad el término general de una sucesión de sumas parciales. (NInter 2).

- Comienza a distinguir los dos elementos del modelos, $a_n$ y $\sum_{k=0}^{n} a_k$. (NInter 3)
- Conoce y aplica criterios de convergencia sin dificultad. (NInter 4)
- Utiliza una suma parcial para aproximar. (NInter 5)
- Es capaz de modelar sin dificultad una suma infinita. (NInter 6)
- Acepta que una suma infinita pueda valer un valor finito. (NInter 7)

➢ ***Nivel inter avanzado:***

En el nivel inter avanzado de desarrollo del esquema, el alumno:

- Es capaz de estudiar la existencia de una suma infinita aplicando criterios de convergencia y cuando es posible, calcular su suma. (NInter 8)
- Reconoce el efecto del comportamiento de $a_n$ sobre $\sum_{k=0}^{n} a_k$. (NInter 9)
- Entiende el valor de una serie como un límite. (NInter 10)
- Distingue los dos elementos del modelos, $a_n$ y $\sum_{k=0}^{n} a_k$. (NInter 11)

➢ ***Nivel trans:***

En el nivel trans de desarrollo del esquema, el alumno:

- Asume una suma numérica infinita como un límite, con lo que ello implica en cuanto a existencia y en su caso, valor del mismo. (NTrans)

**Diseño de la investigación**

- **Sujetos**

Los participantes fueron catorce alumnos de la Escuela de Informática de la Universidad Pontificia de Salamanca, repartidos en seis grupos (cuatro parejas y dos tríos).

Los alumnos voluntarios aceptaron que les grabara durante las clases y firmaron la correspondiente autorización. De los seis grupos, la mitad pertenecen a la titulación de Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y la otra mitad a la de Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas.

| | | |
|---|---|---|
| Ingeniero Técnico en Informática de Gestión | G1 | Dos alumnos |
| | G2 | Dos alumnos |
| | G3 | Dos alumnos |
| Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas | S1 | Dos alumnos |
| | S2 | Tres alumnos |
| | S3 | Tres alumnos |

Las grabaciones tuvieron lugar a lo largo de los diecisiete días que duraron las clases en las que se impartía el tópico de series numéricas. Las clases se desarrollaron en el aula habitual durante diez días y el resto, siete días, en el aula de ordenadores en el que disponían del software de cálculo simbólico Maple.

- **Datos**

Se han elegido los grupos de sistemas S1 y S3 considerando dos criterios: la participación de los miembros del grupo durante las grabaciones y la diferencia en el nivel de compresión.

Puesto que el grupo trabaja conjuntamente y entre ellos se corrigen y se explican, se analiza el nivel de comprensión del grupo, ya que es difícil asignar un resultado a uno de los miembros de manera aislada.

Se analiza el trabajo desarrollado por los alumnos en relación con la Actividad Rectángulos que se llevó a cabo los días 14 y 20 de Marzo (S3 necesitó de una tercera sesión el día 21) Este es el primer contacto que tienen con el concepto de serie numérica. Antes del día 14 de marzo, se trabajó en clase el tópico de sucesión numérica durante cinco sesiones de cincuenta minutos. En los ejemplos de clase aparecieron algunas sucesiones cuyo término general era del tipo de las sucesiones de sumas parciales, si bien no se nombraron las series numéricas. Durante esos días, se les dio a conocer las instrucciones de Maple necesarias para dibujar gráficas en el plano cartesiano de términos de una sucesión y listar unos cuantos términos de la misma y se dedicaron tres sesiones a su práctica.

- **Contenido**

La Actividad Rectángulos está diseñada para introducir al alumno en el concepto de serie numérica. Este concepto emerge de un problema geométrico que permite visualizar algunas propiedades de las series como monotonía, acotación y condiciones para la convergencia. Además de inducir a la generalización, relaciona el concepto de serie con el de aproximación e introduce elementos formales de la definición de convergencia.

La Actividad Rectángulos, establece el primer acercamiento con una serie geométrica, la de razón ½. En la obra de Arquímedes aparece la primera serie geométrica de razón ¼, en el proceso de cálculo de la cuadratura de la región comprendida entre un arco de parábola y una recta perpendicular al eje de la parábola. La representación geométrica de los sucesivos rectángulos que se crean con la mitad del área que el anterior, permite al alumno visualizar una suma infinita que está acotada, y por tanto no vale 'infinito'. La experiencia 4 y la conjetura 2 introducen al alumno en el uso de una serie para aproximar un valor y la conjetura 3 incide en la definición $\varepsilon$-$\delta$ de límite de una sucesión, definición que aparece en el Cours d´Analyse de Cauchy.

En esta actividad se recrean las distintas etapas de la evolución del concepto de serie analizadas en [Codes, 2004].

La siguiente tabla muestra los días del mes de marzo que en los que cada grupo realizó las distintas secciones de la actividad:

| | **S1** | **S3** |
|---|---|---|
| **Introducción** | 14 | 14 |
| **Enfoque geométrico** | 14 | 14 |
| **Calcula** | 14 | 14 |
| **Enfoque gráfico** | 14 | 14 |
| **Reflexiona** | 14 | 14 |
| **Experimenta** | 14 | 20 |
| **Conjeturas** | 20 | 21 |
| **Demuestra** | --- | --- |

## Resultados

- **Nivel de desarrollo**

Los resultados están sujetos a las limitaciones que impone el análisis de una sola actividad que además tiene la peculiaridad de ser el primer contacto de los alumnos con el tópico que se analiza, ya que antes de realizarla los alumnos aún no han recibido instrucción sobre las series numéricas.

En líneas generales, se observa un mayor nivel de desarrollo del esquema de serie numérica en el grupo S1 que en el S3. Este hecho no influye notablemente en la calificación final de la asignatura.

A continuación, se muestra una tabla en la que se asigna a cada característica de los niveles intra e inter el grupo que manifestó dicha característica en algún momento en la realización de la Actividad Rectángulos. No se muestra el nivel trans porque ninguno de los dos grupos lo ha alcanzado.

| | Nivel de desarrollo | Grupo |
|---|---|---|
| Nivel intra | NIntra 1 | |
| | NIntra 2 | |
| | NIntra 3 | |
| | NIntra 4 | |
| | NIntra 5 | |
| | NIntra 6 | S3 |
| | NIntra 7 | S3 |
| | NIntra 8 | S3 |
| | NIntra 9 | S3 |
| | NIntra 10 | |
| | NIntra 11 | |
| | NIntra 12 | S3 |
| | NIntra 13 | |

| | Nivel de desarrollo | Grupo |
|---|---|---|
| Nivel inter | NInter 1 | S1 |
| | NInter 2 | S1 |
| | NInter 3 | S1 |
| | NInter 4 | |
| | NInter 5 | S1 |
| | NInter 6 | S1 |
| | NInter 7 | S1,S3 |
| | NInter 8 | |
| | NInter 9 | S1 |
| | NInter 10 | S1 |
| | NInter 11 | S1 |

Como puede apreciarse en estas tablas, el grupo S1 se encuentra en un nivel de desarrollo inter avanzado, mientras que el grupo S3 sólo manifiesta una característica del nivel inter, situándose en el nivel intra avanzado. Los subniveles avanzados señalan la transición de un nivel a otro superior que se manifiesta a través de las acciones que se llevan a cabo sobre los elementos del modelo sucesión y sucesión de sumas parciales.

- **Maple**

El modo en que han manejado los dos grupos la herramienta de cálculo simbólico Maple durante la Actividad Rectángulos tiene ciertas similitudes y algunas diferencias.

La principal diferencia es la actitud reflexiva que nuestra S1 sobre el problema que han de resolver antes utilizar Maple, frente a una intervención de S3 sin previo análisis que conduce generalmente a errores en las instrucciones.

Si bien los errores de sintaxis se dan en los dos grupos, S3 comete más errores por desconocimiento previo de lo que esperan obtener de Maple que por confundir una mayúscula con una minúscula o escribir mal el nombre de una expresión.

S1 se muestra más crítico con las salidas que ejecuta Maple frente a un S3 que en varias ocasiones copia el resultado que devuelve Maple sin entenderlo del todo, pero sin plantearse una reflexión. Aún así, los dos grupos se han apoyado en la salida de Maple para reconocer un error y corregirlo. En muchas de estas ocasiones, la salida ha sido una representación gráfica de los términos de una sucesión.

A la hora de las representaciones gráficas, el grupo S3 muestra una mayor dependencia de Maple, ya que enseguida se lanza a utilizarla para dibujar sin plantearse la sencillez de la tarea.

Otra gran diferencia entre los dos grupos que está asociada con el nivel de comprensión que revelan, es la utilización, por parte de S3, de instrucciones que ejecutan la suma exacta que han de calcular, frente a la técnica de aproximación sobre la gráfica sobre la que apoya S1 gran parte de los resultados.

Los dos grupos han utilizado Maple para realizar tareas repetitivas de cálculo y también los dos han sobrevalorado las posibilidades de cálculo con Maple cuando han pretendido que despejara "n" de la ecuación $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1,999$.

- **Otros resultados**

***'nunca llega a dos'***

Así se manifiesta S1 en la sección Enfoque Geométrico, dejando entrever la concepción aristotélica del infinito actual inalcanzable. Sin duda, la visión de los rectángulos potencia esta concepción que provoca controversia.

Mientras JM mantiene esta visión de infinito potencial, D distingue dos escenarios: el mundo real, en el que un proceso infinito no puede completarse, y el mundo de las matemáticas, en el que "teóricamente" se puede alcanzar lo que en la práctica es inalcanzable. De ahí, que en la experiencia 1, mientras JM afirma que la suma $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3^r}$ tiende a $\frac{3}{2}$, D justifica la igualdad de estas dos cantidades argumentando que '*no te pregunta por cuánto tu vas a conseguir hacer, sino te pregunta por cuando el sumatorio sea desde cero hasta infinito*'. Estas posturas se reproducen en la experiencia 2 y en la conjetura 2.

***Los números negativos: obstáculo epistemológico y didáctico***

En la experiencia tres, se pide calcular las sumas de varias series geométricas de razón negativa. Como en otras ocasiones, los números negativos han provocado tres tipos de errores en el grupo S1:

- El carácter oscilante provoca la no unicidad del límite y por tanto su no existencia. D no lo percibe.
- En ocasiones, las operaciones entre enteros originan un resultado nulo. JM pone de manifiesto el obstáculo epistemológico del álgebra de las "sumas infinitas" al generalizar lo que ocurre con una suma finita en el caso de una suma infinita.
- También los negativos tienen asociado un obstáculo didáctico por la tendencia de los docentes a trabajar con números positivos en el aula. Esto provoca que se produzcan más errores de cálculo al operar números acompañados del signo. Esto se pone de manifiesto en la conjetura 1.

## Conclusión

Este trabajo es un análisis piloto que se deberá retocar cuando se estudie la Actividad Rectángulos en el resto de grupos de la muestra y que se verá ampliado cuando se analice todo el trabajo desarrollado por los grupos en el aula durante la instrucción del tópico serie numérica. Entonces, se podrá describir con más detalle el nivel de comprensión de los alumnos de la muestra.

Para volver a utilizar esta actividad en próximos cursos, se ha de revisar el modo en que está redactada para evitar errores como el que se produjo en el grupo S3, que confundió la cantidad 1.999 (uno coma nueve, nueve, nueve) con mil novecientos noventa y nueve. Esto les produjo una gran confusión porque descontextualizó la pregunta y les supuso una pérdida de tiempo considerable. Como este, se produjeron otros tropiezos que se podrían evitar redactando con más cuidado los enunciados de las distintas secciones.

## Referencias bibliográficas

[Asiala, 1996] Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.J. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education.* 6, pp. 1-32.

[Codes, 2004] Codes, M.; Sierra, M. (2004). Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto. En E. de la Torre (ed.). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones en los grupos de investigación. VIII Simposio de la SEIEM*. Universidade da Coruña (edición en CD).

[Codes, 2005] Codes, M.; Sierra, M. (2005). Entorno computacional y educación matemática: una revisión del estado actual. En B. Gómez y otros (eds.). *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la SEIEM*. Santander: Servicio de Publicaciones. Universidad de Cantabria (edición en CD).

[Dubinsky, 2001] Dubinsky, E.; McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research. En D. Holton et. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280. (disponible en http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf)

[Powell, 2003] Powell, A.; Francisco, J.; Maher, C. (2003). An analytical model for stuying the development of learners'mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*. 22, pp. 405-435.

[Sánchez-Matamoros, 2004] Sánchez-Matamoros, G. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada.

(Desarrollo del concepto). Sevilla: Departamento de Didáctica de las Matemáticas (Tesis doctoral).

# UN ESTUDIO SOBRE EL CCD DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE UNIVERSIDAD Y LA EBP COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA DE ENSEÑANZA Y DE RECOLECCIÓN DE DATOS[1]

*REFLEXIONES Y COMENTARIOS*


Luis García

Universidad de Los Andes (Venezuela)

Mar Moreno

Universidad de Lleida

Carmen Azcárate

Universidad Autónoma de Barcelona



## Resumen

En el siguiente trabajo presentamos parte de la experiencia vivida con un grupo de profesores de matemáticas pertenecientes a una universidad venezolana, con estos profesores se llevaron a cabo cuatro sesiones de discusión, las cuales formaron parte de un seminario de reflexión, esta actividad estuvo relacionada en su totalidad con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial y temas afines como el dominio de definición de una función en una sola variable real, puntos críticos, puntos de inflexión, valores extremos, entre otros. Destacamos además, que estos profesores enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas y administrativas y, por otra parte, el material que se discutió durante las sesiones del seminario estuvo enmarcado en la enseñanza basada en problemas (EBP). Finalmente, advertimos al lector que en este trabajo sólo se contempla una de las sesiones del seminario, es decir, en la que se discutió la regla de la cadena.



[1] Trabajo parcialmente financiado por el por el Proyecto de la DGI del Ministerio de Educación y Ciencia SEJ 2005 -08499 y por el CDCHT-ULA: NURR-H-343-06-04-C.



García, L.; Moreno, M.; Azcárate, C. (2007) Un estudio sobre el CCD del profesor de matemáticas de universidad y la EBP como estrategia metodológica de enseñanza y de recolección de datos. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación.. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 187-200.

## Marco Teórico

Este trabajo está enmarcado en tres constructor principales y que a continuación presentamos; estos son, Enseñanza universitaria, Conocimiento del Contenido Didáctico (CCD) y Enseñanza Basada en Problemas (EBP).

1. **Enseñanza Universitaria**: Planificación Docente, Protagonismo del estudiante y Formación del profesor en didáctica.

El profesor de universidad y en particular el profesor de matemáticas, no ha recibido una formación en didáctica, la cual por lo general es consecuencia de su experiencia personal, de lo visto en los libros de texto, del intercambio de opiniones con otros colegas o, como suele ocurrir en la mayoría de los casos, la docencia que éste imparte está influenciada por sus creencias y concepciones, y sobre todo, por la manera como se le enseñó determinada asignatura.

Tomaremos en cuenta la estructura que señala Marcelo (2001) sobre el proyecto docente universitario, en el que señala que la enseñanza universitaria se fundamenta en cuatro contextos: institucional, curricular, profesional y personal. En nuestro caso, nos centraremos en los tres últimos, puesto que el contexto curricular se refiere a *los conocimientos y habilidades que se han de enseñar en la universidad*. El contexto profesional, *lo constituyen los profesores como profesionales de un campo científico, que desempeñan funciones docentes dentro de la Universidad*. El contexto personal, lo forman aquellos individuos que se están formando en la Universidad, es decir, los estudiantes.

Bien es cierto que debido al proceso de cambio que está viviendo la Universidad hoy en día, los planes de estudio están sufriendo cambios significativos en cuanto a materia curricular se refiere, por lo que resulta especialmente atractivo estudiar e investigar la evolución de esta situación.

Por otra parte, la Universidad como institución formadora de conocimiento y, a su vez, como generadora de profesionales capacitados para desempeñar una función social, tiene su principal protagonista en el profesor universitario. En nuestro caso concreto, nos referimos a la formación profesional del profesor de matemáticas, y centraremos mucho más nuestra atención en el profesor de matemáticas en carreras como economía y empresariales, donde las matemáticas vienen a ser un instrumento imprescindible para el profesional de estas carreras.

No obstante, la formación de éste y del profesor universitario en general *es una actividad asistemática, con escaso rigor* (García-Valcárcel, 2001).

Ahora bien, resulta curioso hablar de enseñanza y hablar del estudiante al mismo tiempo; pero en el actual proyecto docente universitario el estudiante tiene cada vez mayor participación a la hora de su elaboración. El profesor debe atender y considerar diferentes aspectos que provienen del estudiante a la hora de la planificación del proyecto docente y que Marcelo (2001) resume en tres puntos: *la procedencia y antecedentes de los alumnos que acceden a las asignaturas que impartimos; sus expectativas y aspiraciones profesionales y los procesos de aprendizaje del alumno universitario*.

2. **Conocimiento del Contenido Didáctico (CCD)**: Contenido Disciplinar, Currículo, Enseñanza-Aprendizaje.

En los últimos años, la investigación en didáctica de las matemáticas ha cobrado un especial interés en el estudio enfocado hacia el Pensamiento del Profesor y dentro de éste, en el Conocimiento del Contenido Didáctico desarrollado por Shulman (1986), Broome (1988) y Llinares (1998), etc. Esto implica estudiar la interacción entre los tres pilares señalados por An *et al*. (2004) y que presentaremos más adelante.

Estudiar el CCD supone, en nuestro caso, estudiar también el conocimiento del contenido matemático ya que en éste se destacan: (a) *un fundamento profundo en el conocimiento de hecho*, (b) *un entendimiento de los hechos e ideas en el contexto de un marco contextual*, y (c) *una organización del conocimiento en el sentido de facilitar la aplicación y el poder solventar algún inconveniente* (Kahan *et al*. 2003).

Por otra parte, si nos centramos nuevamente en el CCD y partimos de la definición de Shulman (1986), quien dice que *es una amalgama especial de contenido y pedagogía que únicamente pueden aportar los profesores, por su manera especial y profesional de entender la enseñanza*, esto nos permitirá analizar y entender muchos aspectos de los profesores en cuanto a la enseñanza se refiere; puesto que cuando se estudia al profesor de matemática y su CCD éste *va más allá de un conocimiento simple de matemáticas que no necesariamente un matemático pueda poseer* (Kahan *et al.*, 2003).

Por todo lo anterior, basaremos nuestro estudio en la definición de CCD que aportan An *et al*. (2004) quienes lo definen como el conocimiento de una enseñanza efectiva que incluye tres componentes: (a) conocimiento del contenido matemático, (b) conocimiento del currículo y (c) conocimiento de la enseñanza.

3. **Enseñanza Basada en Problemas (EBP)**: Estrategia de Enseñanza y de recolección de datos.

**¿Qué es la EBP?**

Antes de responder a la pregunta del subtítulo conviene aclarar que en la literatura, la mayoría de los investigadores en didáctica de la matemática utilizan indistintamente el término resolución de problemas para referirse a la actividad en sí misma o mejor dicho sobre todo el *proceso* que supone la resolución de problemas (Puig, 1996); también podemos encontrar que el término resolución de problemas se lo adjudican al conjunto de técnicas o habilidades que el resolutor de problemas debe lograr para enfrentar problemas similares en un futuro; o bien, para fortalecer los conocimientos adquiridos: o de un curso anterior, o de uno que contemple esta actividad como herramienta de refuerzo, o ambos. Otra connotación que se le suele dar al término es la de enseñar matemáticas a partir del planteamiento de problemas; esta última acepción es la que, a grosso modo, llamaremos enseñanza basada en problemas o EBP.

La EBP, en sus distintas variantes, es una de las estrategias de enseñanza que ha ganado, y sigue ganando prestigio en la educación superior, como metodología alternativa a la clase magistral. Aun cuando la EBP, como modelo general de enseñanza, tiene sus orígenes en el campo de la salud hacia mediados de los años 1950's (Savery and Duffy, 1995), es en las escuelas de medicina de las Universidades de Case Western Reserve y de McMaster en Estados Unidos y Canadá, respectivamente, en la década de los años 1960's (Sonmez and Lee; 2003), donde se consolida como estrategia de enseñanza; posteriormente la comunidad científica, a lo largo de los últimos 30 años, ha sabido reconocer y aceptar la efectividad que tiene esta metodología dentro de la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas en sus distintos niveles de formación académica.

Partiendo de Sonmez and Lee (2003) y Benito *et al*. (2005), la EBP es una estrategia metodológica activa que desafía a los estudiantes a generar un conocimiento a partir de la búsqueda de soluciones a través de problemas cuidadosamente planteados, los cuales están relacionados con su entorno profesional, académico o ambos, bien sea entre ellos o en grupos, en contraposición con la enseñanza centrada en lecturas y libros de texto; pero siempre orientados por el profesor o tutor. Por lo tanto, consideramos que es una actividad multidisciplinar que permite la interacción, siempre que se pueda, con diversas materias o asignaturas que conforman el currículo.

No obstante, existen opiniones encontradas sobre la utilización de esta metodología. White (2004b) manifiesta que hay profesores de matemáticas que no están de acuerdo con el uso de esta metodología como estrategia didáctica para la enseñanza de la matemática. Ellos consideran que las matemáticas se logran dominar a través del esfuerzo individual y que el trabajo en grupo distrae al estudiante de la adquisición de los objetivos de enseñanza. Así mismo, "…*consideran las matemáticas como una abstracción hermosa que de algún modo es corrompida por las aplicaciones*"; ello justifica que algunos profesores de matemáticas mantengan fuertes reservas sobre la implementación de la EBP. Sin embargo, White, profesor de bioquímica, afirma que: "*viniendo de una disciplina donde las matemáticas son aplicadas, me resulta difícil pensar en las matemáticas sin asociarlas a problemas de la vida real*" (White, 2004b).

**Algunas características de la EBP**

Como hemos señalado anteriormente, la EBP es considerada una *estrategia didáctica activa*, donde el estudiante se ve involucrado desde un inicio o mejor dicho, donde el profesor debe saber involucrar al estudiante desde el mismo planteamiento del problema, ya que el segundo pasa a ser la pieza fundamental de su propio aprendizaje, de la construcción de su conocimiento (Benito *et al*., 2005). Por lo general, los cursos de matemáticas básicas en la universidad, como el cálculo diferencial e integral, son presentados por el profesor como una actividad cuyo protagonista principal es la asignatura en sí misma (García *et al*., 2006) y quien le sigue en ese rol protagónico es el mismo profesor; el profesor relega a los estudiantes a un papel secundario, lo que conduce a estos últimos a ver los cursos como algo rutinario, en este sentido, la resolución de problemas es vista como una tarea superficial, la cual se centra en el uso de fórmulas pero no como constructora de conocimiento.

Entonces, si nos acogemos a los orígenes y fundamentos de la EBP podemos destacar algunas características que resultan propias de esta actividad que, insistimos, tiene como objetivo principal la construcción del aprendizaje a partir de problemas que involucren uno o varios conceptos interrelacionados; bien sean, como en nuestro caso, matemáticos (cálculo diferencial) o bien matemáticos y económicos (cálculo diferencial - análisis marginal). Así mismo, refiriéndonos a los orígenes, mientras que hay autores como Savery and Duffy (1995), apoyándose en H. S. Barrows, quienes consideran la EBP como un buen ejemplo de metodología constructivista, otros como White (2004a) piensan que no hay conexión entre la teoría constructivista y la EBP.

En este sentido, la EBP también se caracteriza porque tiene especial incidencia en el estudiante, al ser una metodología activa de trabajo (Benito *et al*., 2005) que permite el desarrollo de habilidades del pensamiento, desde el punto de vista crítico y analítico, que se consolidan y perduran en el tiempo y que se abren a otras disciplinas (McCarthy, 2005); algo que desde nuestro punto de vista consideramos muy interesante por la relación existente entre las matemáticas y las ciencias económicas, un buen referente para destacar esta relación es el libro de González y Gil (2000).

En resumen y centrándonos en nuestra área de interés, la didáctica de la matemática a nivel universitario, la EBP es una metodología que se caracteriza por buscar un desarrollo integral y plural en los estudiantes, que permite enlazar de manera particular la construcción de conocimiento matemático partiendo de la propia matemática o de otras áreas afines.

**Consideraciones previas del profesor de matemáticas en la EBP en carreras de ciencias económicas**

Coincidimos con Lewis (2003), quien afirma que la EBP permite conjugar el aprendizaje de diferentes áreas del conocimiento, en nuestro caso, es claro que tal conjugación es obvia cuando hablamos de las matemáticas y las ciencias económicas. En este orden de ideas, aprovechamos este enlace entre una ciencia y otra para apostar por una enseñanza basada en problemas, pero esta claro que no es suficiente esta relación y como la EBP forma parte del *conocimiento de la enseñanza*, destacamos algunos aspectos que el profesor de matemáticas debe tener presente a la hora de considerar esta metodología.

En líneas generales, los profesores que utilizan la EBP como metodología de enseñanza en sus cursos o asignaturas deben tomar en cuenta algunos aspectos dentro del conocimiento del contenido didáctico; en particular, destacamos aquellos relacionados directamente con el estudiante y con el contenido de la asignatura. En el caso del estudiante, porque éste se está convirtiendo en el protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje; en el caso del contenido de la asignatura, por la fuerte y ya mencionada relación existente entre las matemáticas y las ciencias económicas.

- **Conocimiento sobre el estudiante**. Con el firme propósito de saber cuáles serán los problemas a utilizar; es decir, el nivel, en cuanto al contenido, de los mismos, el profesor está obligado a conocer al grupo de estudiantes con los que trabajará y desarrollará un determinado tema. En la situación que nos ocupa, la de las ciencias económicas, el docente tiene que estar al tanto del conocimiento tanto matemático como de contenido económico que posee el estudiante para ese momento. De modo que el estudiante, ante el problema planteado, despierte interés, se sienta motivado y dispuesto a generar su propio aprendizaje; evitando así, bloquear al alumno y apartarlo del objetivo planteado.
- **La elección del problema**. Las ciencias económicas por su estrecho vínculo con las matemáticas permiten el uso de la EBP para la enseñanza de estas últimas. El profesor universitario de matemáticas debe tener presente, a la hora de elegir el problema que servirá de base para generar conocimiento en el estudiante, la distribución adecuada de contenidos matemático y económico, ya que la proporción adecuada entre éstos es clave no sólo para estimular al aprendizaje de las matemáticas en el estudiante, sino la utilidad de esta ciencia como herramienta dentro de las ciencias económicas. Un problema con excesivo contenido matemático podría catalogarse como uno más de los problemas clásicos o tradicionales; por otra parte, un problema con un fuerte peso en el contenido económico puede distraer al estudiante y hacerle ver al estudiante que los conceptos matemáticos tratados forman parte o son derivados de las ciencias económicas.
- **La inversión en el proceso de enseñanza-aprendizaje**. El uso de la EBP obliga al profesor a ceder el papel protagónico, que éste ocupa en la enseñanza tradicional, al estudiante. El profesor debe tomar en cuenta que ahora pasa a ser un orientador, un director de debate en este proceso. El profesor debe saber cuándo y cómo intervenir,

para que el alumno conserve su dinámica participativa y reflexiva y no adopte la actitud pasiva de la clase tradicional.

- **La relación entre contenidos**. Partir del contenido económico para enseñar matemáticas no es tarea fácil y esto lo debe tener presente el profesor de matemáticas, aun cuando la relación entre ambos contenidos favorece a la implementación de la EBP y que Beed and Kane (1991) señalan como desventajas del uso de las matemáticas en economía y que adaptamos a nuestro trabajo:
    - El lenguaje matemático no es el habitual entre los estudiantes.
    - Los resultados matemáticos, por lo general, son aproximados y no exactos en relación con la realidad, algo que al estudiante hay que advertirle en todo momento.

La adopción de supuestos económicos inadecuados o falsos para abordar una situación matemática podría resultar contraproducente y generar conflictos en el estudiante. Por ejemplo, el uso de una función trigonométrica en un modelo económico.

**La recogida de datos (El Seminario de Discusión y reflexión)**

Para la recogida de datos se diseñó un material enmarcado en la EBP y utilizamos la derivada como concepto matemático para estudiar el CCD del profesor de universidad, es decir, la EBP tuvo un doble rol protagónico en nuestro trabajo; por una parte, vista como estrategia activa de enseñanza para estudiar el CCD del profesor de matemáticas de universidad y, por otra, como estrategia para abordar al profesional de la enseñanza y de manera indirecta recoger sus diversas opiniones y puntos de vista sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este material estuvo conformado por una serie de problemas relacionados con el concepto o el tema de nuestro interés; estos temas son:

1. Introducción a la derivada e interpretación
2. Análisis matemáticos (Dominio de función, puntos críticos, valores extremos, puntos de inflexión, etc.)
3. Regla de la Cadena
4. Análisis Matemático-Económico

Tal como señalamos anteriormente, en este trabajo presentamos el material discutido durante la tercera sesión del seminario, esto es, el tema vinculado a la regla de la cadena, en este orden de ideas mostramos dos de los tres problemas discutidos en esta actividad y la preguntas relacionadas a estos problemas.

***Problema 1***

Una empresa tiene como función de costo $C(x)=25+2x-1/20\ x^2$ (en cientos de miles de dólares), donde x es el nivel de producción de la empresa y éste depende del tiempo t. Si el nivel de producción es de $x=5$ (millones de artículos por año) y está creciendo a una tasa de 0,7 millones de artículos por año, tomando en cuenta que la capacidad de producción de la empresa no puede superar los 15 millones de artículos por

**Pregunta 1**: Determine el dominio de la función de costo C(x) en un contexto matemático general y en el económico en particular. ¿Qué diferencia observa entre uno y otro?

**Pregunta 2**: Calcule la tasa para la cual el costo de producción se está elevando en la actualidad.

***Problema 2***

Un determinado artículo puede fabricarse y venderse con una utilidad o beneficio de $10 cada uno. Si el fabricante gasta x dólares en la publicidad del artículo, el número de artículos que pueden venderse será igual a $1000(1-e^{-kx})$, en donde $k=0,001$. Si U denota la utilidad neta por las ventas y tomando en cuenta que el fabricante no está dispuesto a gastar más de $8500 en publicidad.

**Pregunta 1**: Calcule *U'(x)* e interprete esta derivada

**Pregunta 2**: ¿Será cierto que mientras más se invierta en publicidad, mayor será la utilidad? Como respuesta parcial a esta pregunta, avalúe *U'(x)* en $x = 1000$ y en $x = 3000$. Interprete estos resultados. ¿Y si se invierte *$2000* en publicidad, o *$2100*?

**Cuestionario relacionado con la actividad**

Los problemas presentados anteriormente se discutieron con los profesores y cada una de las preguntas tenía sus respectivas respuestas, por otra parte cabe destacar que el primer problema se desarrolló utilizando la notación "diferencial" (*df*), mientras que para el segundo se utilizó la notación "prima" (*f'(x)*). A partir de las preguntas anteriores se discutieron las siguientes interrogantes:

1. Respecto a la forma actual que sigues en tus cursos de cálculo para enseñar la regla de la cadena, ¿podrías destacar algún aspecto relevante que incida en el aprendizaje del estudiante al implementar una actividad como ésta?
2. De los dos problemas presentados anteriormente, ¿cuál supone para ti de mayor relevancia didáctica?, es decir, ¿cuál de éstos te permitiría lograr los objetivos propuestos para tus estudiantes? ¿Por qué?
3. De las dos notaciones que se usaron para la derivada en los dos problemas anteriores, ¿cuál de las dos utilizas en tus clases? ¿Por qué?
4. Hay investigadores en didáctica que consideran que el relacionar una actividad que vincule contenidos matemáticos con otras áreas sólo tiene un valor motivador. ¿Tú concibes una actividad como ésta de igual forma o te parece sugerente como generadora de conocimiento en ambas direcciones? ¿Por qué?
5. ¿Este tipo de actividad, te obliga a romper con los esquemas que actualmente mantienes en tus clases? ¿Por que?
6. Para introducir y desarrollar la regla de la cadena, ¿cuál es esquema que sigues actualmente?

**Resultados parciales**

A continuación presentamos un resumen de los resultados y conclusiones obtenidos en esta investigación y que los agrupamos en función de los objetivos señalados al principio de esta comunicación.

**Resultados**

Dentro de los resultados podemos destacar:

- A los profesores les inquieta seguir una enseñanza de la matemática basada en problemas, puesto que consideran que la mayoría de los estudiantes no están preparados para seguir esta metodología, ellos proponen que sea la institución la que implemente, desde el primer semestre, una estrategia como esta, a través de una experiencia piloto.
- Sobre el problema que mostramos en esta comunicación para introducir la regla de la cadena, todos están de acuerdo en que la función exponencial es clave dentro del contexto económico; no obstante, dos profesores sugieren que sea a través de una función polinómica, por conseguirla más manejable por parte de los estudiantes. Aún

así y tal como está estructurado el problema, éstos consideran que es un planteamiento adecuado como generador de conocimiento en el estudiante.

- Cuando se les pidió que compararan el problema mostrado arriba con la metodología que siguen en sus clases, dos de los profesores manifestaron que dado que ellos siguen una estrategia de enseñanza tradicional, éstos observan aspectos innovadores por la forma como se llega a la regla de la cadena a partir de una necesidad planteada. Por su parte, los otros tres participantes manifiestan que no hay mucha diferencia entre el problema planteado y la manera como ellos enseñan la regla de la cadena; no obstante, dos de estos últimos dicen que "*no entramos en tantos detalles como los que tú planteas…creo que se pierde mucho tiempo…* "
- En lo relacionado a la interpretación de la derivada y al tema de monotonía de una función, los cinco profesores muestran un amplio conocimiento en el contenido matemático, pero sólo dos muestran solidez en el conocimiento del contenido económico y en este sentido, ellos concuerdan que la pregunta 2 del problema 2 es sugerente para estudiar la monotonía de una función.

## Conclusiones

En consecuencia de lo desarrollado y discutido durante la investigación, concluimos que:

- Era la primera vez que todos los profesores participaban en un espacio como el llevado a cabo durante el seminario. Se acordó generar un espacio interdisciplinario (matemáticas y economía) de discusión con profesores de ambas áreas, donde se afinen las necesidades de los estudiantes y además redefinir los objetivos específicos de los cursos de cálculo para las carreras en cuestión, tomando en cuenta el perfil del profesional actual.
    - Algunos de los profesores sugirieron que se discutiera sobre nuevas metodologías de enseñanza, con el fin de compararlas con la discutida en el seminario.
- La necesidad de talleres de formación para el profesorado de matemáticas es una realidad latente, no sólo por el contenido económico en particular. sino en materia de diseño y gestión del trabajo en el aula a través de la EBP.
    - Algunos profesores consideran que este tipo de actividad le supone un mayor trabajo con el estudiante y que además, una propuesta como la discutida supone un cambio en el sistema de evaluación y que manifiestan no saber cómo abordarlo.

- Con la implementación del seminario, destacamos dos elemento de carácter innovador en el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas a nivel universitario:
    - En primer lugar, la creación de un espacio de discusión sobre una propuesta curricular como instrumento de investigación en didáctica de la matemática y la participación, *in situ*, del profesor para modificar o complementar el material discutido.
    - Por otra parte, la reflexión que el profesor realiza sobre su formación profesional y práctica docente de un determinado tema matemático, pero que se puede hacer extensiva a todo el contenido de la asignatura. En este sentido, consideramos que el espacio fue propicio para que los participantes reconstruyeran su propio conocimiento sobre un tema que se supone ampliamente conocido por ellos como es el cálculo diferencial aplicado a la economía.

Finalmente, destacamos lo valioso que resultó la EBP en sus dos facetas: primero, porque como estrategia de enseñanza que es, ésta forma parte del CCD centro del conocimiento del contenido curricular; pero tal vez el mayor valor de la EBP dentro de esta investigación es la herramienta que nos permitió llegar de forma indirecta al profesor de matemática para estudiar su CCD.

**Referencias bibliográficas**

An, S., Kulm, G. y Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 7. pp. 145-172.

Arnal, J., Del Rincón, D. y Latorre, A. (1994). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Editorial Labor, S. A. Barcelona.

Beed, C. and Kane, O. (1991). What is the critique of the Mathematization of Economics. Kyklos, 44 (4). pp. 581-612.

Benito, A., Bonson, M. e Icarán, E. (2005). Metodologías Activas. En Benito, A. y Cruz, A. (coords.), *Nuevas claves para la Docencia Universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superio*r. Narcea. Madrid. pp. 21-64.

Broome, R. (1988). Conocimiento profesional de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 6(1). pp. 19-29.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Universidad de Huelva. Huelva.

Contreras, L. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Universidad de Huelva Publicaciones. Huelva.

Del Rincón, D., Arnal, J., Latorre, A. y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME). 9, (1). pp. 85-116.

García-Valcárcel, A. (2001). La función docente del profesor universitario, su formación y desarrollo profesional. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. La Muralla, S. A. Madrid. pp. 9-44.

González, C. y Gil, M. (2000). El lenguaje de la Ciencia Económica. ¿Por qué la Economía no prescinde de las Matemáticas? Editorial Ra-Ma. Madrid.

Kahan, J., Cooper, D. y Bethea, K. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: a framework for research applied to study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 6. pp. 223-252.

Lewis, S. (2003). *Issue-Based Teaching in Science Education*. Recuperado el 10 de abril de 2005 de http://www.actionbioscience.org/education/lewis.html#Primer

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO*. 17. pp. 51-63.

Marcelo, C. (2001). El proyecto docente: una ocasión para aprender. En García-Valcárcel (Coord.) *Didáctica universitaria*. La Muralla, S. A. Madrid. pp. 45-78.

McCarthy, M. (2005). Can Problem-Based Learning Address Content and Process? *Biochestry and Molecular Biology Education*. 33 (5). pp. 363-368. Recuperado el 15 de abril de 2006 de http://www.bambed.org/cgi/reprint/33/5/363.pdf

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Editorial COMARES. Granada.

Savery, J. and Duffy, T. (1995). Problem Based Learning: An Instructional Model and its Constructivist Framework. *Educational Technology*. 35. pp. 31-37.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. 15, (2). pp. 4-14.

Sonmez, D. and Lee, H. (2003). Problem-Based Learning in Science. *Digest of Educational Resources Information Center*. EDO-SE-03-04. Recuperado el 04 de febrero de 2006 de http://www.stemworks.org/digests/EDO-SE-03-04.pdf

White, H. (2004a). Constructivist Pedagogy. *Biochestry and Molecular Biology Education*. 32 (1). pp. 120. Recuperado el 15 de abril de 2006 de http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/2/120.pdf

White, H. (2004b). Math Literacy. *Biochestry and Molecular Biology Education*. 32 (6). pp. 410-411. Recuperado el 15 de abril de 2006 de http://www.bambed.org/cgi/reprint/32/6/410.pdf

# IDENTIFICACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LOS ENFOQUES DIDÁCTICOS PARA LA EDUCACIÓN POR COMPETENCIAS EN ALGUNOS LIBROS DE CÁLCULO DIFERENCIAL.[1]

Germán Mesa Jaramillo

Universidad EAFIT Medellín (Colombia)

Carmen Azcárate Giménez

Universidad Autónoma de Barcelona

Mar Moreno Moreno

Universidad de Lleida

## Resumen

Con el último cambio curricular de la educación obligatoria, se ha consolidado la evaluación por competencias, las cuales han sido estudiadas desde hace algunos años por PISA en las áreas instrumentales. En este nuevo marco se están desarrollando estrategias para tal fin. Este estudio muestra un instrumento de análisis que caracteriza las actividades matemáticas propuestas por los libros de texto en el tema de derivadas, específicamente en el concepto de derivada (CD), sobre competencias. En este trabajo se ha validado el instrumento en las ocho competencias desarrolladas por Niss, especificando algunos indicadores para cada competencia, en tres libros de cálculo diferencial, con el propósito dual de caracterizar las matemáticas allí expuestas, en relación con las competencias que desarrollan, y a su vez como un instrumento de evaluación para los profesores.

[1] Trabajo financiado parcialmente por el Proyecto de la DGI del Ministerio de Educación y Ciencia SEJ 2005 - 08499

Mesa, G.; Azcárate, C.; Moreno, M. (2007) Identificación y clasificación de los enfoques didácticos para la educación por competencias en algunos libros de cálculo diferencial. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 201-216.

## Introducción

El rendimiento escolar en matemáticas, por lo negativo, viene siendo uno de los temas mas estudiados en Educación Matemática, aunque ha sido más tradicional analizar las relaciones entre rendimiento y aspectos cognoscitivos. Esto ha obligado a académicos y pedagogos, a repensar la educación, reflexionar sobre el currículo orientado bajo un modelo de formación por competencias.

El concepto de formación por competencias no es nuevo, es conocido desde hace varios años en gran variedad de centros educativos y organizaciones de Europa y Estados Unidos denominado bajo distintas connotaciones. Esta forma de concebir la educación y el aprendizaje creó una nueva corriente, y generó la implementación de una evaluación para medir la calidad de la educación en los distintos países, esta *PISA* (Programme for Internacional Student Assesment) en la UE, en Colombia los exámenes de estado *ICFES* (Instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior) en educación media y bachillerato, y los *ECAES* (Exámenes De Calidad De La Educación Superior) en la educación Universitaria.

En la Universidad EAFIT, Medellín-Colombia (donde trabajo) existe la preocupación no solo por la "mortalidad" académica de los estudiantes, sino también en la calidad del aprendizaje en el área de matemáticas, sobretodo en el curso inicial cálculo diferencial, es por esto que busco con mis trabajos investigar sobre las causas, efectos en el aprendizaje actual y posibles correcciones

En España, recientemente comenzó un debate curricular con el propósito de tomar una decisión sobre las reformas que se necesitan en la educación, el cual se ha reflejado, en diciembre del 2006, en la publicación del REAL DECRETO que establece que las enseñanzas mínimas, tanto en primaria como en secundaria, contribuyan a garantizar el desarrollo de las *competencias básicas*. Para dicho objetivo en las áreas instrumentales se ha consolidado el programa *PISA* (Programme for Internacional Student Assesment), instrumento de evaluación curricular que se sustenta en las ocho competencias acuñadas por Niss y sus colegas daneses (1999) y adaptadas por el equipo OCDE[2].

[2] Organización para la Cooperación y el desarrollo Económico

Las ocho competencias identificadas por Niss enmarcadas en dos categorías son:

**Las que son de *procesos***

1. **Pensar y razonar**. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas ("¿Cuántas … hay?", "¿Cómo encontrar …?"); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
2. **Argumentar**. Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
3. **Modelizar**. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
4. **Plantear y resolver problemas**. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.

**En la categoría del *lenguaje***

1. **Representar**. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
2. **Comunicar**. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
3. **Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas**. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular

proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.

4. **Utilizar ayudas y herramientas**. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

La formación por competencias es nueva para muchos pedagogos, para unos pocos es solo la organización de sus ideas y formalizar y poner en limpio la forma de entender cómo debe ser el tipo de formación.

**Objetivo**

Con el ánimo de respondernos a preguntas como:

- ¿Qué competencias matemáticas necesitan ser desarrolladas por los estudiantes de cálculo diferencial?
- ¿Cómo aseguramos crecimiento y coherencia en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial?
- ¿Cómo medimos la competencia matemática, en el cálculo diferencial?
- ¿Cuál debe ser el contenido de los planes de estudios para el tema de cálculo diferencial?
- ¿Cómo se debe organizar la enseñanza del concepto de derivada?
- ¿Cómo los libros de texto de cálculo, estimulan para el aprendizaje por competencias?

Pretendemos hacer una contribución para responder algunas de éstas inquietudes u otros interrogantes que pueden aparecer cuando nos ocupamos en ésta problemática común para muchas naciones e instituciones educativas y que investigadores sobre el tema tratan de responder.

Nuestra mayor preocupación son los currículos, que en su mayoría están orientados a los, y las “ordenes” que “dan” los libros. Es por esto que nos acometemos a analizar tres libros de cálculo, Uno que es usado casi en toda América Latina, otro que es común en América y Europa, y uno que se usa principalmente en España.

Nuestro análisis es meramente empírico y cualitativo, trata de clasificar y detectar que tanto proponen los libros de texto el aprendizaje por competencias y cuáles de ellas son más o menos desarrolladas.

> "Estas aplicaciones de las matemáticas se basan en las habilidades desarrolladas a partir de los tipos de problemas que aparecen en los libros de texto escolares y los que se plantean en los salones de clase. […] donde el estudiante debe tomar decisiones sobre cuáles conocimientos son relevantes y cómo se pueden aplicar de manera eficaz". (OCDE / PISA 2003)

En esta investigación pretendemos entonces ver cómo los textos analizados utilizan lo que se enseña en ellos para desarrollar las competencias matemáticas, esto con el fin de tomar correctivos generando materiales con actividades para los estudiantes o diseñando currículos acordes a las necesidades.

**Metodología**

Nuestro trabajo Consiste inicialmente en adaptar las competencias definidas en forma genérica para las matemáticas, desarrollas por Mogens Niss en su documento COMPETENCIAS MATEMÁTICAS Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: PROYECTO KOM DANES, y redefinirlas e ilustrarlas en términos particulares para al concepto de Derivada.

(Ver anexo 1)

Hemos analizado los siguientes textos:

- JAMES STEWART. Cálculo de una variable. Thomson Editores. 4ª Edición 1995.
- LARSON, HOSTETLER Y EDWARDS. Cálculo. Ed. McGraw-Hill, 95.
- SALAS, S., & HILLE, E. Calculus. Ed. Reverté.

Escogimos los temas iniciales del concepto de derivada, y los separamos por ítems. . Se hizo una clasificación inicial, según nuestra clasificación, comprobando en cada tema las competencias allí involucradas. (Ver ejemplo en el anexo 2)

Se justificó en cada caso la escogencia de una competencia para cada ítem estudiado, con el fin de clarificar más la caracterización de cada competencia. Ver anexo 2 en apartado descripción específica para este tema.

Dentro de las investigaciones hechas en Didáctica de las Matemáticas, sobre la evaluación de libros de texto, no se encontró metodología que se acomodara al propósito de nuestra evaluación, por lo que nos toco apropiarnos de esta.

Como manifestamos antes la evaluación es meramente cualitativa y así tener una visión panorámica de la situación actual de los libros de texto, y validar el instrumento y poder tomar correctivos, como efectivamente tratamos de hacerlo actualmente.

**Análisis de resultados**

El análisis cualitativo refleja cuáles son las características más relevantes, así como también las carencias que, con respecto a las unidades de análisis mencionadas, se observan en el contenido de los textos.

Se observa que la mayoría de las actividades se enfocan hacia las cuatro competencias identificadas como *procesos,* mientras existe una marcada ausencia de actividades enfocadas hacia las competencias caracterizadas como de *lenguaje.*

De las competencias esenciales de las matemáticas exigidas para el nuevo milenio, está la comunicación de pensamientos, ideas, argumentos, etc., está ausente en la mayoría, por no decir todas, de las actividades valoradas.

También se evidencia que hay diferencia sustancial, en los libros de texto en cuanto a la utilización de las TICs, en el libro de de Cálculo de Sales Hille no existe ninguna actividad para la adquisición de esta competencia, mientras en el libro de Stewart se le da alguna importancia.

Las demás competencias están presentes, pero se manifiestan poco o de manera aislada. Los temas allí expuestos se limitan a la simple acumulación de conocimientos, datos, fórmulas y experiencias aisladas; donde conocemos que lo importante no es informar sino instruir y desarrollar competencias.

## Conclusiones

Nuestro problema todavía esta abierto y se esta reorientando actualmente a valorar solo las tareas, (ejercicios propuestos por los textos al final de cada unidad) porque es así como es utilizado en PISA, para clasificar las evaluaciones.

Falta afinar más los indicadores para cada competencia, estamos en el trabajo en modificar los indicadores y adecuar los niveles de cobertura y acción prepuestos en PISA y trabajados por RICO (2007).

Creemos que este instrumento de evaluación será muy útil para los profesores (Bachillerato y primeros años de universidad) para moderar y equilibrar mejor sus evaluaciones y programar las actividades a ser desarrolladas por los estudiantes dentro y fuera del salón de clase.

Consideramos que esta implementación también será útil en otras áreas pues se podrán adecuar a otros temas como: funciones, aplicaciones de la derivada, integración, entre otros.

En vista del hallazgo de la poca utilidad de las TICs en las actividades escolares, opinamos que los textos deberían apoyar al docente en el buen uso de las tecnologías, ya que no pueden mantenerse al margen del empleo de la calculadora y el computador, que han contribuido a modificar las habilidades matemáticas (léase competencias).

En líneas generales, se sugiere que el contenido de los libros de matemática, en nuestro caso cálculo, sustituya los esquemas tradicionales por los lineamientos de la acción constructivita, que le permitan su actualización y adecuación acordes con la necesidad del medio.

## Referencias bibliográficas

OCDE (2005B): Informe PISA 2003. *Aprender para el mundo de mañana*. Madrid, Santillana.

*Competencias en Matemáticas*. Documento "The PISA 2003 Asssessment Framework" publicado (en inglés, en formato PDF, 1.7MB) por OECD/PISA. http://www.pisa.oecd.org/

Gray, E. M. & Tall, D. O.(1993): Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept, *Mathematics Teaching*. 142, 6–10.

James Stewart. Cálculo de una variable. Thomson Editores. 4ª Edición 1995.

Larson, Hostetler y Edwards. Cálculo. Ed. McGraw-Hill, 95.

Rico, L. (2006): Marco Teórico De Evaluación En Pisa Sobre Matemáticas Y Resolución De Problemas, *Revista de Educación, extraordinario,* 2006, pp. 275-294.

Rico, L. (2007): « La Competencia Matemàtica en PISA », *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, Número 2, Volumen 1 (Enero, 2007).

Niss, M. (1999): Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 1-24.

Niss, M. (1999), Competencies and Subject Description, Uddanneise, 9, pp. 21-29

Salas, S., & Hille, E. Calculus. Ed. Reverté.1998.

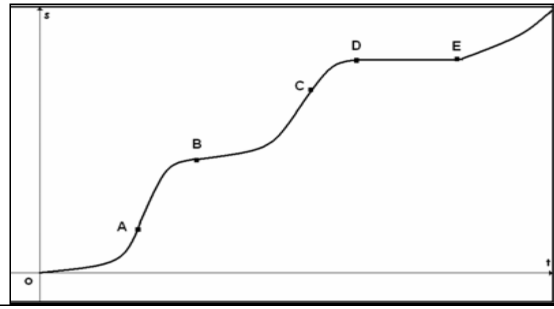
**Anexo 1**

A continuación presentamos los indicadores propuestos (redefiniciones, adecuaciones) para el concepto de derivada, sobre las definiciones genéricas de las competencias hechas por N. Niss, como parte central de este trabajo, así como también un ejemplo sacado del texto Conceptos y Contextos JAMES STEWART, para ilustrar cada indicador.

| **Pensar y Razonar.** | |
|---|---|
| ➢ Plantear (hacer, diseñar) preguntas referentes al CD.<br>➢ Reconocer el tipo de respuestas que el CD ofrece para estas preguntas.<br>➢ Distinguir entre diferentes tipos de proposiciones:<br>▪ Definición del CD.<br>▪ Hipótesis, teoremas, conjeturas y condicionales que involucran el CD<br>▪ Ejemplos del CD.<br>➢ Comprender la noción de Derivada y trabajar con ella en forma intuitiva, geométrica y formal.<br>➢ Reconocer la forma en que las ideas en otras áreas se conectan o se relacionan con el CD<br>➢ Entender que el CD es un todo coherente, no destrezas aisladas o reglas arbitrarias<br>➢ Entender y manipular el alcance y los límites del CD.<br>▪ El CD herramienta muy útil para la vida cotidiana.<br>➢ Encontrar formas de relacionar el CD en sus actividades diarias.<br>➢ Saber cuándo, dónde y cómo usar el CD.(Reconocer situaciones donde de aplica el CD)<br>➢ Entender que los distintos conceptos y técnicas matemáticas que se han aprendido están relacionados con el CD<br>➢ Conocer epistemológicamente el CD.(Origen y desarrollo) | Este limite representa una derivada de alguna función f, en algún número a, Establezca f y a.<br>$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$ |

Pensar y Razonar, Argumentar, Modelizar, Plantear y Resolver problemas.

Comunicar, Representar, Usar lenguajes, Usar las TIC´s

| **Argumentar** | |
|---|---|
| ➢ Saber qué es una prueba matemática<br>➢ Diferenciar el CD de otros tipos de razonamiento matemático;<br>➢ Seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos que incluyen el CD.<br>➢ Desarrollar procedimientos intuitivos, construir y expresar argumentos con el CD.<br>➢ Explicar y justificar con el CD lo que se piensa sobre el problema o tema que se les ha planteado<br>➢ Deducir, conjeturar y obtener conclusiones que generalizan el CD | La gráfica muestra la función de posición de un automóvil.<br>Use la forma de la gráfica para explicar las respuestas que dé de las siguientes preguntas.<br>- ¿Cuál es la velocidad inicial del automóvil?<br>- ¿El automóvil viaja más rápido en B o en C?<br>- ¿El automóvil desacelera o acelera en A, B y C?<br>- ¿Qué sucedió entre D y E?<br> |

| **Modelizar** | |
|---|---|
| ➢ Estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura que involucra el CD.<br>➢ Trabajar con un modelo que incluye el CD.<br>▪ validar el modelo.<br>▪ reflexionar<br>▪ analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados;<br>▪ comunicar eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos);<br>▪ monitorear y controlar el proceso de modelado. | Aplique las diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm. de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50m. |

| **Plantear y resolver problemas:** | |
|---|---|
| ➢ Identificar problemas cuya solución requiere el CD como herramienta.<br><br>➢ Definir<br>➢ Plantear<br>➢ Formular<br>➢ Encontrar<br>➢ Investigar<br>o problemas que involucran el CD.<br>o (Puros o aplicados, abiertos o cerrados)<br><br>➢ Planificar la resolución de un problema en función del CD.<br>➢ Explorar soluciones a problemas de la vida cotidiana con el CD.<br>➢ Resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.<br>➢ Aplicar el CD para resolver problemas.<br>➢ Recurrir a destrezas para analizar situaciones en términos del CD.<br>➢ Contemplar y ajustar las estrategias para resolver los problemas con el CD | Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener volumen de 32.000 $cm^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado. |

| **Representar** | |
|---|---|
| ➢ Representar las entidades matemáticas en diferentes medios<br>➢ Codificar y decodificar.<br>➢ Traducir, interpretar<br>➢ Distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones.<br>➢ Escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares. | Si usamos la notación tradicional y=f(x) para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:<br>$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f$<br>Los símbolos $D_x$ y $\frac{d}{dx}$ se llaman operadores de derivación, que es el proceso de calcular una derivada. |

| **Comunicar** | |
|---|---|
| ➢ Expresar, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos que involucran el CD<br>➢ Entender y usar argumentos inductivos y deductivos<br>➢ Representar sus propias ideas sobre el CD de manera que tengan sentido y puedan comunicarse con claridad a los demás<br>➢ Entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre el CD.<br>➢ Analizar y evaluar con habilidad el pensamiento y las estrategias a los demás<br>➢ Argumentar y defender una postura en términos del CD. | La Cantidad (en yardas) de cierta tela que vende un fabricante a precio de p dólares por yarda es Q = f (p).<br>¿Cuál es el significado de la derivada f ´ (16)?<br>¿Cuáles son sus unidades?<br>¿f ´ (16) es positiva o negativa?<br>Explique. |

| Usar lenguajes | |
|---|---|
| ➢ Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas del CD<br>➢ Decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico del CD.<br>➢ Entender la relación del CD con el lenguaje natural.<br>➢ Traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal del CD<br>➢ Manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas referentes al CD<br>➢ Usar formas convencionales de la simbología del CD<br>➢ Apreciar el CD como una herramienta muy importante de estudio<br>➢ Aplicar el CD y las habilidades para resolver problemas.<br>➢ Formar conceptos adecuados y desarrollar las habilidades necesarias para aprender y disfrutar el CD<br>➢ Utilizar variables.<br>➢ Resolver ecuaciones.<br>➢ Realizar cálculos | Aplique la definición de derivada para probar la regla del recíproco: Si g es diferenciable, entonces<br>$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$ |

| Utilizar las TICs. | |
|---|---|
| ➢ Conocer la existencia y sus propiedades.<br>➢ Utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan las tareas propias del CD.<br>➢ Comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.<br>➢ Diseñar en ambientes computacionalas que promuevan el aprendizaje del CD.<br>➢ Visualizar en el comportamiento de la gráfica de una función el CD<br>➢ Utilizar aplicaciones informáticas, de cálculo numérico y simbólico, de visualización gráfica para experimentar el CD y resolver problemas referentes al CD | Acérquese a los puntos (1,0),(0,1),(-1,0) en la gráfica de la función<br>$g(x)=(x^2-1)^{2/3}$<br>¿Qué advierte? Explique lo que ve en términos de la diferenciabilidad de g. |

**Anexo 2**

En cada libro escogimos lo concerniente al capitulo que se refiere a la definición de la derivada. Solo expondremos un ejemplo de cada libro, aplicando la metodología de la identificación por competencias según los indicadores establecidos en el anexo 1
Del libro de Cálculo, conceptos y contextos de James Stewart. En el capitulo de Derivadas (definición)

| |
|---|
| **Definición** La recta tangente a la curva y=f(x) en el punto P(a,f(a)) es la reta que pasa por P cuya pendiente $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$<br>Indica la existencia de este límite |

| Competencias | Descripción general | Descripción específica para este tema |
|---|---|---|
| **Pensar y razonar**. | **Entender** que los distintos conceptos y técnicas matemáticas que se han aprendido están relacionados con el CD<br><br>**Distinguir** entre diferentes tipos de proposiciones: Definición del CD. | **Utilizar** los límites para encontrar la pendiente de las rectas tangentes a las gráficas. Es decir el CD.<br><br>**Inferir** que el concepto de pendiente de una recta tangente es razón de cambio (cociente incremental) Instantánea. |
| **Argumentar**. | **Deducir, conjeturar** y **obtener** conclusiones que generalizan el CD | **Teorizar** la definición de la derivada en un punto |
| **Utilizar lenguaje** | **Utilizar** lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas del CD | **Utilizar** la herramienta del límite y los conceptos de cociente incremental, para deducir la pendiente de una recta tangente |
| **Comunicar** | **Entender** las aseveraciones**,** orales y escritas, de los demás | **Comprender** la definición matemática de pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. |
| **Representar**. | **Traducir, interpretar** entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas. | **Proyectar** el cociente incremental, con las aproximaciones sucesivas llevado la herramienta del límite. |

Libro de Cálculo, de Larson. En el capitulo de Derivadas (definición)

| |
|---|
| Definición de la recta tangente con pendiente m<br><br>Si *f* está definida en un intervalo abierto que contiene a *c* y además existe el límite $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=m$<br>entonces, la recta que pasa por (c, f(c)) y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto (c, f(c)).<br><br>La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (c, f(c)) se le llama también **pendiente de la gráfica de *f*** en $x = c$ |

| Competencias | Descripción general | Descripción específica para este tema |
|---|---|---|
| **Pensar y Razonar**. | **Entender** que los distintos conceptos y técnicas matemáticas que se han aprendido están relacionados con el CD<br><br>**Distinguir** entre diferentes tipos de proposiciones: Definición del CD. | **Utilizar** los límites para encontrar la pendiente de las rectas tangentes a las gráficas. Es decir el CD.<br><br>**Inferir** que el concepto de pendiente de una recta tangente es razón de cambio (cociente incremental) Instantánea. |
| **Argumentar**. | **Deducir, conjeturar** y **obtener** conclusiones que generalizan el CD | **Teorizar** la definición de la derivada en un punto |
| **Utilizar lenguaje** | **Utilizar** lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas del CD | **Utilizar** la herramienta del límite y los conceptos de cociente incremental, para deducir la pendiente de una recta tangente |
| **Comunicar** | **Entender** las aseveraciones**,** orales y escritas, de los demás sobre el CD.<br><br>**Analizar y evaluar** con habilidad el pensamiento y las estrategias a los demás. | **Comprender** la definición matemática de pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. |
| **Representar**. | **Traducir, interpretar** entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas. | **Proyectar** el cociente incremental, con las aproximaciones sucesivas llevado a la herramienta del límite. |

Libro de Cálculo, Calculus 3ª ed Sales Hille. . En el capitulo de Derivadas (definición).

| |
|---|
| El número $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ puede interpretarse como la *pendiente de la gráfica en el punto (x, f(x)).* La recta que pasa por el punto *(x,f(x))* con pendiente *f'(x)* se denomina *recta tangente en (x, f(x)).* Es la recta que mejor se aproxima a la gráfica de f en la proximidad del punto . |

| Competencias | Descripción general | Descripción específica para este tema |
|---|---|---|
| **Pensar y Razonar**. | **Distinguir** entre diferentes tipos de proposiciones: Definición del CD. | **Utilizar** los límites para encontrar la pendiente de las rectas tangentes a las gráficas. Es decir el CD.<br><br>**Inferir** que el concepto de pendiente de una recta tangente es razón de cambio (cociente incremental) Instantánea. |
| **Argumentar**. | **Deducir, conjeturar** y **obtener** conclusiones que generalizan el CD | **Teorizar** la definición de la derivada (*pendiente de la gráfica)* en un punto |
| **Utilizar lenguaje** | **Utilizar** lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas del CD | **Utilizar** la herramienta del límite y los conceptos de cociente incremental, para deducir la pendiente de la recta tangente |
| **Comunicar** | **Entender** las aseveraciones**,** orales y escritas, de los demás sobre el CD.<br><br>**Analizar y evaluar** con habilidad el pensamiento y las estrategias a los demás. | **Comprender** la definición matemática de pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. |
| **Representar**. | **Traducir, interpretar** entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas. | **Proyectar** el cociente incremental, con las aproximaciones sucesivas llevado a la herramienta del límite. |

# ANÁLISIS DE LAS CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LA MODELIZACIÓN ALGEBRAICO-FUNCIONAL EN SECUNDARIA. EL PAPEL DE LAS CALCULADORAS SIMBÓLICAS

Marianna Bosch
Universidad Ramón Llull

Josep Gascón
Universidad Autónoma de Barcelona

Noemí Ruiz
Universidad Autónoma de Barcelona

**Resumen**

Una vez constatado el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la ESO[1], nos planteamos el problema didáctico de cómo modificar la ecología del sistema de enseñanza de las matemáticas para que sea posible llevar a cabo una verdadera actividad de modelización algebraico–funcional entre la ESO y el Bachillerato. Para ello se utilizan dos dispositivos didácticos: (a) Proponer el estudio de una situación problemática definida inicialmente mediante unos datos fijos, pero cuyo estudio requiere que éstos se transformen progresivamente en parámetros para responder a cuestiones formuladas en términos de relaciones funcionales. (b) Utilizar la calculadora simbólica Wiris[2] (CSW) para instrumentalizar las técnicas matemáticas (que pueden requerir el dispositivo mixto CSW+"lápiz y papel") necesarias para abordar los tipos de problemas que surgen en esta actividad. Postulamos que la realización de este tipo de modelización algebraica en el tránsito ESO Bachillerato provocará un cambio en la naturaleza de la propia actividad matemática y constituirá la "razón de ser" del cálculo del Bachillerato, esto es, de la modelización de relaciones funcionales con ayuda del cálculo diferencial.

[1] Bolea, P. (2002): El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares, Tesis doctoral publicada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en el número 29 de las Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" (2003).
[2] Disponible de forma gratuita en la red http://calculadora.edu365.com.

Bosch, M.; Gascón, J.; Ruiz, N. (2007) Análisis de las condiciones de existencia de la modelización algebraico-funcional en Secundaria. El papel de las calculadoras simbólicas. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de . X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp.217-234.

## Introducción

En trabajos anteriores (Gascón 1993, 1993–94 y 1999) en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se ha analizado el fenómeno de la aritmetización escolar del álgebra elemental, mostrando que dicho fenómeno responde a la interpretación–dominante en la institución escolar– del álgebra elemental como aritmética generalizada.

Recientes investigaciones en esta línea han mostrado que una de las consecuencias del fenómeno anterior es el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en Secundaria (Bolea 2002). Una de las principales características de este carácter prealgebraico es la ausencia del juego entre parámetros y variables. De hecho, en la enseñanza obligatoria (12-16 años) las letras juegan únicamente el papel de incógnitas (en las ecuaciones) o de variables (en el lenguaje funcional) y los parámetros están prácticamente ausentes. Resulta, en efecto, que las fórmulas que aparecen en geometría, en matemática comercial, en combinatoria, en estadística, etc., hacen exclusivamente el papel de reglas para realizar ciertos cálculos numéricos. No aparecen nunca como el resultado de un trabajo algebraico ni juegan ningún papel de "modelos algebraicos" en los que las variables y los parámetros sean intercambiables.

En este trabajo consideraremos, apoyándonos en la Tesis Doctoral de Pilar Bolea (2002), que el álgebra elemental debe interpretarse, inicialmente, como un instrumento genérico de modelización de las praxeologías matemáticas escolares y no como una praxeologia u Organización Matemática (OM) que deba ser enseñada. Postulamos que el álgebra elemental, antes de ser tematizada como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para:

(a) Manipular la estructura común de ciertos tipos de problemas.

(b) Empezar a plantear y abordar problemas relativos a la existencia y unicidad de la solución de ciertos tipos de problemas y, en su caso, para estudiar la estructura del conjunto de las soluciones de dichos tipos de problemas.

(c) Generalizar los métodos utilizados y los resultados obtenidos en el estudio de un problema concreto o un tipo particular de problemas.

En definitiva, proponemos introducir inicialmente el álgebra elemental en el currículum, no tanto como un objeto de estudio en si mismo, sino como un instrumento que, al permitir ampliar las OM escolares (con nuevos tipos de tareas, técnicas y tecnologías) y profundizar así en su estudio, debe ser considerada como un instrumento de matematización progresiva.

De hecho, las múltiples restricciones transpositivas que dificultan el proceso de algebrización e impiden que se lleve a cabo una actividad matemática de modelización algebraica (Bolea, Bosch & Gascón 2004), pueden considerarse como restricciones al proceso de matematización del currículum escolar.

**El desarrollo del instrumento algebraico: la modelización algebraico-funcional**

A pesar del carácter fuertemente prealgebraico de la matemática escolar cabe destacar que la actividad matemática aparece, a partir de cierto nivel educativo, plenamente algebrizada. El desarrollo de la actividad matemática requiere la completa funcionalidad del instrumento algebraico (aunque éste puede quedar implícito). Por tanto, debemos postular la existencia de un proceso de algebrización de las matemáticas escolares que se inicia en la enseñanza Primaria, continua a lo largo de la Secundaria Obligatoria y el Bachillerato y culmina en la Universidad.

En la Tesis Doctoral de F. Javier García (2005) se analiza el fenómeno del aislamiento escolar actual de la relación de proporcionalidad respecto del resto de relaciones funcionales entre magnitudes y se lleva a cabo una reinterpretación de dicho fenómeno dentro del gran problema didáctico de la articulación de la matemática escolar. Se trata de un ejemplo paradigmático del papel hipotético que podría jugar la modelización algebraico-funcional en la articulación de la matemática de secundaria.

En este trabajo definiremos explícitamente el concepto de modelización algebraico funcional y analizaremos la importancia potencial de este tipo de actividades matemáticas en el paso de la Secundaria Obligatoria al Bachillerato y, en particular, en las relaciones entre el álgebra elemental y el cálculo diferencial escolar.

Consideraremos la modelización algebraico-funcional como un desarrollo del instrumento algebraico, esto es, como un desarrollo del instrumento que permite ampliar las OM que aparecen a lo largo de la enseñanza secundaria y profundizar en su estudio. Veremos, en efecto, que la modelización algebraico-funcional, sin tomarla como objeto de estudio en sí misma, permitirá:

(a) Unificar ciertos tipos de problemas gracias a los modelos que se materializan mediante familias de funciones.

(b) Utilizar nuevas técnicas matemáticas (gráfico-funcionales) para responder a cuestiones que van más allá del mero cálculo de una solución particular de un problema.

(c) Plantear nuevos tipos de problemas que involucren la tasa de variación instantánea de las diferentes funciones que definen el sistema, dando sentido así al cálculo diferencial[1].

---

[1] La caracterización intrínseca de las funciones hay que buscarla en su "tipo de variabilidad" respecto a la variable independiente y es por eso que son tan importantes los modelos que utilizan ecuaciones diferenciales, esto es,

Recordemos que el instrumento algebraico tiene su origen en el análisis clásico de Pappus que, según Descartes, consiste en el método de buscar la dependencia entre cada una de las variables que intervienen en un problema (haciendo abstracción de si toman un valor conocido o desconocido). El desarrollo de este instrumento llevará en primera instancia a establecer una relación íntima entre los problemas "geométricos" y los "algebraicos" con la creación de una nueva disciplina matemática: la geometría analítica[2]. El principio fundamental de esta nueva disciplina consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones (en principio, algebraicas) indeterminadas con dos incógnitas:

$$f(x, y) = 0$$

se corresponden con los lugares geométricos determinados por los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación en cuestión. Esta interpretación introduce no sólo la geometría analítica sino también la idea fundamental de variable algebraica, básica para el desarrollo del Cálculo tal y como tuvo lugar a lo largo del siglo XVII (Urbaneja 1992).

Consideraremos este tipo de modelización (donde las variables algebraicas x e y miden magnitudes cualesquiera) como el germen de la modelización que denominaremos algebraico-funcional. El juego progresivo entre parámetros y variables, es decir, la inclusión del instrumento analítico con toda su potencia, hará desarrollar este tipo de modelización que se constituirá en la "razón de ser" del cálculo diferencial.

Para explicitar la noción general de "modelización algebraico-funcional" consideraremos tres niveles de la misma que se corresponden con tres grados progresivos de matematización.

### *Primer nivel de modelización "algebraico-funcional" de una OM*

Uno de los indicadores del carácter prealgebraico de la matemática escolar viene dado por la separación curricular entre los lenguajes "algebraico" y "funcional" que se pone especialmente de manifiesto en el papel que juegan las fórmulas. Éstas no se interpretan nunca como a modelos "funcionales" para estudiar propiedades de los objetos modelizados. De hecho, la separación rígida entre el "lenguaje algebraico" escolar (que queda encerrado en las

---

ecuaciones en las que aparece la derivada de la función. Una forma natural de entender las funciones como modelos es entenderlas como primitivas en el sentido general del término, es decir, como soluciones de ecuaciones diferenciales (F. J. García, 2005).

[2] "[…] mediante el concurso del Álgebra simbólica, Vieta dirige el Análisis antiguo hacia un Análisis algebraico o Doctrina de las ecuaciones que, actuando sobre el Análisis geométrico clásico, preparará el camino hacia las Geometrías analíticas de Fermat y Descartes y, en particular, determinará toda la producción matemática de ambos" (P. M. G. Urbaneja 1992, p. 56).

fórmulas) y el "lenguaje funcional", tiene relación con el fenómeno didáctico el autismo temático[3] que dificulta enormemente integrar, en la práctica matemática escolar, objetos matemáticos provenientes de "temas" diferentes.

Llamaremos primer nivel de modelización "algebraico-funcional" de una OM al que se materializa en modelos que se expresan mediante funciones aisladas de una sola variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) asociadas. Por ejemplo si el precio unitario de un producto es de 6 €, el coste unitario es de 2,5 € y tenemos un coste de producción fijo de 150 €, en este primer nivel los beneficios de la situación económica planteada pueden ser modelizados por la función:

$$B(x) = 6\,x - (2{,}5x + 150)$$

El tipo de tareas matemáticas que se incluyen en estos modelos, considerados como praxeologías matemáticas, son las que requieren para su estudio el análisis de las relaciones internas entre los elementos de una función aislada y el estudio del comportamiento global de la misma. Permiten responder a cuestiones tales como: ¿Qué valores de x dan un B > 1000 €? ¿Cómo interpretar el término constante –150? Etc.

***Segundo nivel de modelización "algebraico-funcional" de una OM***

Hemos mencionado ya que en la enseñanza secundaria las "letras" que forman parte de una expresión algebraica juegan únicamente el papel de incógnitas (en las ecuaciones) o únicamente el papel de variables (en el lenguaje funcional), pero los parámetros están prácticamente ausentes. En cualquier caso, el juego sistemático entre las diferentes funciones de las "letras" está completamente ignorado.

Además, la actividad de nominación y redenominación de las variables, es decir, la introducción de nuevas letras, que es esencial a lo largo de las diferentes etapas del trabajo algebraico, sólo aparece en algunas actividades completamente estereotipadas de "cambio de variable" (como, por ejemplo, en la resolución de ecuaciones bicuadradas o en la fórmula de integración por partes).

Esta situación se prolonga a lo largo de todo el Bachillerato y dificulta enormemente el paso del trabajo con las expresiones algebraicas de funciones elementales al estudio de familias

[3] El "encierro en los temas" constituyen un fenómeno didáctico que Chevallard llama "autismo temático" del profesor. El profesor sólo puede expresar sus preocupaciones en referencia a aspectos referentes al nivel disciplinar y a los niveles escolar y social, como puras "opiniones" personales o, como mucho, en una reivindicación política o sindical. En particular, la consecuencia más impresionante de este aislamiento del profesor en los "temas" (dentro la jerarquía de los niveles de codeterminación didáctica) se encuentra en la desaparición de las razones de ser de las OM enseñadas en el nivel temático (Chevallard 2001).

de funciones y al uso de estas familias como modelos de sistemas en los cuales aparecen relaciones entre magnitudes. Postulamos que estas dificultades para estudiar sistemáticamente familias de funciones constituyen una de las primeras causas de la desaparición de la "razón de ser" del cálculo diferencial escolar del Bachillerato y, en consecuencia, del Análisis que se estudia a nivel universitario.

Llamamos segundo nivel de modelización "algebraico-funcional" de una OM al que se materializa en modelos que se expresan precisamente mediante familias de funciones de una variable y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) paramétricas asociadas.

En este segundo nivel de modelización aún se distingue entre "parámetros" y "variables", de tal forma que sus papeles no se consideran todavía intercambiables. Se estudian familias de funciones de una variable pero no funciones de dos variables. Algunos ejemplos de este tipo de modelos son los siguientes[4]:

$$B_c(x) = 6\,x - (c \cdot x + 150) \qquad\qquad B_L(x) = 6\,x - (2{,}5\,x + L)$$

Este tipo de modelos, considerados como praxeologías matemáticas, incluyen todas las tareas y las técnicas necesarias para estudiar familias de funciones reales de una variable y para resolver ecuaciones e inecuaciones con un parámetro. En el caso, más general, de considerar familias de curvas planas cualesquiera $f_p(x, y) = 0$, entonces la escasez de técnicas para tratar estos modelos es todavía más evidente en la enseñanza secundaria.

### *Tercer nivel de modelización "algebraico-funcional" de una OM*

También hemos mencionado el hecho que las fórmulas en secundaria no se construyen nunca como el resultado de un trabajo algebraico ni juegan propiamente el papel de verdaderos "modelos algebraicos" en los cuales las variables (sean parámetros o incógnitas) sean intercambiables.

Llamaremos tercer nivel de modelización "algebraico-funcional" de una OM al que se materializa en modelos que se expresan mediante familias de funciones de dos o más variables y las correspondientes fórmulas asociadas. Es en este tercer nivel de modelización en el que los papeles de los "parámetros" y las "variables" son completamente intercambiables e indiferenciados. Se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función. Algunos ejemplos de este tipo de modelos son los siguientes:

[4] En general, podríamos considerar modelos del tipo fp(x, y) = 0, donde fp es una familia de funciones de dos variables con un parámetro p y, en primera instancia, una de las variables puede aislarse. Se trata, en definitiva, de una familia de curvas planas que, localmente, son gráficas de funciones.

$$B(c,L,x) = 6x - (c \cdot x + L) \qquad\qquad p(x,c,L) = \frac{2000+L}{x} + c$$

Este tipo de modelos, considerados como praxeologías matemáticas, incluyen todas las tareas y técnicas matemáticas necesarias para estudiar (familias de) funciones reales de dos o más variables[5].

Dado que las funciones de dos o más variables han estado explícitamente apartadas de la educación secundaria, podemos afirmar sin ninguna reserva que la actividad matemática que debe llevarse a cabo para construir, utilizar, estudiar e interpretar este tipo de modelos matemáticos está completamente ausente en la Secundaria actual.

En resumen, en la enseñanza secundaria obligatoria española hay muy pocas técnicas para llevar a cabo la actividad matemática que hemos llamado de modelización algebraico-funcional.

Sólo se dispone de la manipulación algebraica de fórmulas elementales y de algunas técnicas para resolver ecuaciones e inecuaciones (si estas son sencillas), técnicas muy estereotipadas y limitadas para representar gráficas de funciones y aun más limitadas para interpretar las fórmulas y para relacionar las gráficas con la expresión de las funciones y con los sistemas modelizados. Resulta, en definitiva, que la modelización algebraico-funcional está prácticamente ausente en la educación secundaria y que, en las condiciones actuales, no parece factible ir mucho más allá de una actividad situada en el primer nivel de modelización algebraico-funcional.

## El problema didáctico planteado

Nos planteamos el problema didáctico de cómo modificar la ecología del sistema de enseñanza de las matemáticas para que sea posible llevar a cabo una verdadera actividad de modelización algebraico-funcional a lo largo de la Secundaria post-obligatoria o Bachillerato (16-18 años). Es importante insistir en que no pretendemos tomar la modelización algebraico-funcional como objeto de enseñanza en sí misma (al menos en Secundaria). Nos proponemos únicamente crear las condiciones que permitan utilizar los modelos algebraicos-funcionales como técnica didáctica, de ayuda al estudio, para ampliar el cuestionamiento y profundizar en el estudio de las OM escolares.

Para avanzar en esta dirección, el trabajo que presentamos propone el diseño y describe las conclusiones extraídas de su posterior experimentación en diferentes cursos de Bachillerato,

[5] En general estos modelos se representan mediante familias de superficies (o hipersuperficies) que localmente son gráficas de funciones de dos (o más) variables y, por lo tanto, requieren técnicas de cálculo en varias variables.

de un proceso de estudio de modelización algebraico-funcional que se apoya principalmente en la combinación de dos estrategias didácticas:

(a) Proponer el estudio en sentido fuerte[6] de una cuestión problemática, que surge en un sistema económico, definida inicialmente mediante unos datos fijos pero cuyo estudio requiere que éstos se transformen progresivamente en parámetros y que sea necesario considerar las relaciones funcionales entre cuatro variables del sistema: ventas, costes, ingresos y beneficios.

(b) Utilizar la calculadora simbólica Wiris[7] (CSW) para instrumentalizar las técnicas matemáticas necesarias para abordar los tipos de problemas que surgen en esta actividad.

Pretendemos aprovechar los recursos de la CSW para facilitar a los alumnos el trabajo de creación, representación gráfica y manipulación de las expresiones algebraicas de familias de funciones dependientes de uno o más parámetros, sin olvidar la interpretación de todas estas manipulaciones en el contexto del sistema.

La experimentación fue organizada como un "Taller de Matemáticas" en 5 institutos del área metropolitana de Barcelona, cuatro cursos de 1ero de Bachillerato y uno de 2ndo de Bachillerato. La experimentación se realizó durante el segundo trimestre del curso 2005/06 y tuvo una duración entre 10 y 11 sesiones de 50' cada una. El profesor del "Taller" fue el profesor habitual. Un miembro de nuestro equipo de investigación llevó a cabo las observaciones de las diferentes experimentaciones que fueron registradas en vídeo. En todas las experimentaciones, la mayoría de sesiones se desarrollaron en la "clase de ordenadores" de cada centro, excepto las primeras y últimas sesiones que se realizaron en la clase habitual. Presentamos a continuación un esbozo de los sucesivos modelos matemáticos que están involucrados en el diseño de la experimentación.

### Análisis a priori de los modelos matemáticos

Partiremos de un sistema económico (la producción y venta de camisetas), en el que se plantea la cuestión de cómo conseguir un determinado beneficio. El estudio de esta cuestión da lugar a un proceso de modelización algebraico-funcional en el que el juego entre parámetros y variables adquiere una importancia esencial.

Inicialmente, el sistema puede caracterizarse por la consideración de 4 magnitudes variables: el número de productos fabricados y vendidos (x), el ingreso por la venta de estos productos (I), los costes derivados de la producción (C) y los beneficios (B).

[6] El estudio en sentido fuerte de una cuestión requiere como respuesta la construcción de una praxeología.

[7] Disponible de forma gratuita en la red http://calculadora.edu365.com.

Podemos definir así tres funciones: *I = I(x), C = C(x) i B = B(x)* relacionadas entre sí Por la igualdad: *B(x) = I(x) – C(x)*.

Si consideramos las ventas x de un único producto, la función de ingresos viene dada por la relación I(x) = p·x, siendo p el precio de venta unitario del producto.

En lo que concierne a la función de costes, hay varias modelizaciones posibles. La hipótesis más simple es que los costes dependan linealmente de x, *C(x) = c·x + L* siendo c el coste unitario del producto y L otros posibles costes fijos (alquiler del local en el caso aquí considerado). Pero también tiene sentido considerar otro tipo de funciones. Podemos suponer, por ejemplo, que el coste unitario no es fijo sino que crece linealmente con x, lo que da lugar a una función cuadrática del tipo:

$$C(x) = (c + \_x)x + L$$

El coeficiente _ es un valor "pequeño" del tipo 1/K con K > 0 de tal modo que, para valores de x muy inferiores a K, _x es despreciable y los costes son casi lineales, apareciendo el crecimiento cuadrático para ventas "grandes".

El Taller se dividió en dos partes. La primera se inició con la petición por parte de una asociación juvenil acerca de cómo conseguir 3000 € de beneficio vendiendo camisetas (función de coste lineal). La segunda se inició con una petición similar de una fábrica de ropa de deporte (función de coste cuadrática). Sólo detallaremos a continuación la sucesión progresiva de praxeologías, que hacen el papel de modelos donde cada modelo completa y incluye al anterior, para el caso de la función de costes lineal a partir de los datos concretos de un negocio que desea conseguir 3000 € de beneficio[8].

**Una asociación juvenil. Compra y venta de camisetas**

Supongamos que disponemos de los costes e ingresos por la venta de camisetas que obtuvieron en meses anteriores una asociación juvenil:

| MES | Mayo | Junio | Julio | Agosto |
|---|---|---|---|---|
| Camisetas vendidas | 100 | 329 | 264 | |
| Costos totales (en €) | 550 | 1122,5 | 960 | |
| Ingresos totales (en €) | 520 | 1710,8 | 1372,8 | |
| Beneficios (en €) | -30 | 588,3 | 412,8 | |

[8] Para el caso de la función de costes cuadrática la sucesión de praxeologías es análoga (Bosch, Gascón & Ruiz 2005).

El objetivo del trabajo es elaborar un informe donde se exponga algún tipo de estrategia a seguir por la asociación juvenil para conseguir el beneficio deseado de 3000 €.
Apuntaremos a continuación, de forma sucinta, un posible recorrido de estudio a través de las cuestiones que podrían surgir a partir de la situación considerada y de las respuestas provisionales que se van aportando.

Del análisis de los datos proporcionados se obtienen las condiciones iniciales del negocio: coste unitario constante $c$ = 2,5 €, precio unitario constante $p$ = 5,2 € y coste fijo (alquiler del local) $L$ = 300 €. Y se plantea como cuestión a estudiar:

***Q₀***: En las condiciones iniciales ¿es posible obtener en el mes de agosto un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas?

**$R_0$**: La situación es modelizada por una función de una variable $B(x)=5{,}2\cdot x-(2{,}5\cdot x+300)$ y usando la técnica $\tau_{eq}$[9] es posible obtener una respuesta inicial al problema planteado (reformulación del problema en $OM_{eq}$).
Utilizando las técnicas $\tau'_{eq}$[10] y $\tau_{num}$[11] se obtiene

$$3000=(5{,}2-2{,}5)\cdot x-300\,; \qquad x=\frac{3000+300}{5{,}2-2{,}5}=\frac{3300}{2.7}$$

**Solución:** En estas condiciones será necesario vender más de x = 1223 camisetas. La solución obtenida como respuesta a $Q_0$ no es aceptable y plantea la necesidad de modificar algunos de los datos de la situación inicial, que pasarán así a hacer el papel de parámetros de la situación. Surgiendo entonces la cuestión $Q_1$ siguiente:

**$Q_1$**: ¿Es posible obtener los beneficios deseados modificando alguna de las condiciones iniciales de la situación: precio unitario, coste unitario o coste fijo (alquiler)?[12]
Que se descompone y precia en las cuestiones:

**$Q_{11}$** (p como único parámetro libre): Si suponemos que los costes son inamovibles (c = 2,5 y L = 300), ¿cuánto deberíamos aumentar el precio inicial de venta (p = 5,2) para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 450)?

[9] Resolución de inecuaciones algebraicamente.

[10] Resolución de la ecuación asociada.

[11] Redondeo de la solución a un valor entero.

[12] En adelante consideraremos como valores “razonables” p < 8, c > 1 y L > 100.

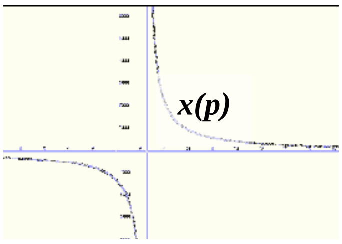
**$Q_{12}$** (c como único parámetro libre): Si suponemos que, por cuestiones de competencia comercial, el precio de venta no puede superar el valor inicial de p = 5,2 € y que no podemos conseguir un alquiler más barato de L = 300, ¿cuánto deberíamos disminuir el coste inicial de una camiseta (c = 2,5) para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 450)?

**$Q_{13}$** (L como único parámetro libre): Si suponemos que, por cuestiones de competencia comercial, es imposible disminuir el precio de compra (c = 2,5) y aumentar el precio de venta (p = 5,2), ¿cuánto deberíamos disminuir el coste inicial del alquiler del local (L =300) para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x< 450)?

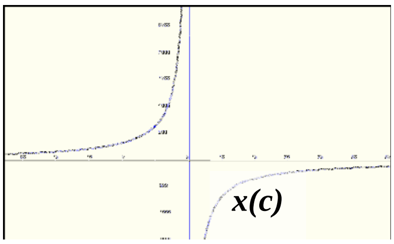
**$R_1$**: La situación es modelizada por una función de una variable Bp(x), Bc(x) y BL(x).

Usando la técnica $\tau_{al\text{-}fu}$ y es posible obtener una respuesta inicial al problema planteado (reformulación del problema en $OM_{f(x)}$).

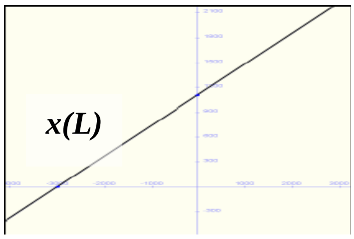
Utilizando las técnicas $\tau'_{eq}$ y $\tau_{num}$ se obtiene, respectivamente para cada subcuestión:




$$3000 = (P - 2{,}5)\cdot x - 300$$
$$x = \frac{3000 + 300}{p - 2{,}5}$$




$$3000 = (5{,}2 - c)\cdot x - 300$$
$$x = \frac{3000 + 300}{5{,}2 - c}$$




$$3000 = (5{,}2 - 2{,}5)\cdot x - L$$
$$x = \frac{3000 + L}{5{,}2 - 2{,}5}$$

Para tener más de 3000 € de beneficio con la modificación de un único parámetro se obtiene la siguiente respuesta (si se consideran los "casos límite" de cada parámetro): si $p = 8$ entonces x > 600; Si $c = 1$ entonces x > 786; Si $L = 100$ entonces x > 1149.

Las respuestas a las tres cuestiones anteriores requieren el trabajo en una praxeologia más amplia que $OM_{eq}$, y muestran que mediante la modificación de un solo parámetro no se obtiene el beneficio deseado con un número razonable de ventas. Surge así una nueva cuestión **$Q_2$** que plantea la necesidad de considerar la variación conjunta de dos parámetros:

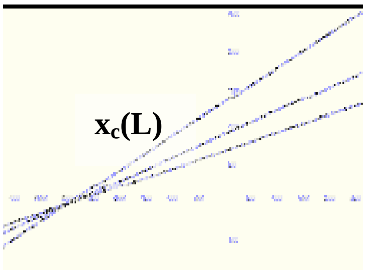
**$Q_{21}$** (c y L como parámetros libres): Si decidimos no modificar el precio de venta p = 5,2, ¿qué relación debería darse entre los valores de c y L para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 450)? ¿Existen pares de valores “razonables” de c y L que cumplan esas condiciones?

**$Q_{22}$** (p y L como parámetros libres): Si fijamos el precio de coste c = 2,5 €, ¿qué relación debería darse entre los valores de p y L para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 450)? ¿Existen pares de valores “razonables” de p y L que cumplen esas condiciones?

**$Q_{23}$** (c y p como parámetros libres): Supongamos que el precio del alquiler L = 300 es inamovible, ¿qué relación debería darse entre los valores de p y c para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 450)? ¿Existen pares de valores “razonables” de c y p que cumplen esas condiciones?

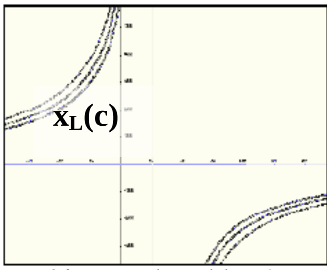
**$R_2$**: Uso de la técnica $\tau_{al\text{-}fu}$ y reformulación de $OM_{fp(x)}$ como respuesta.

Utilizando la técnica $\tau_{eq}$ se obtiene, respectivamente para cada subcuestión,



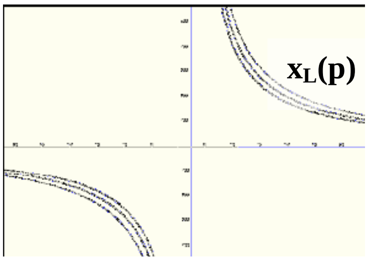

$$3000 \le (5,2 - c)\cdot x - L$$

$$x \le \frac{3000 + L}{5,2 - c}$$



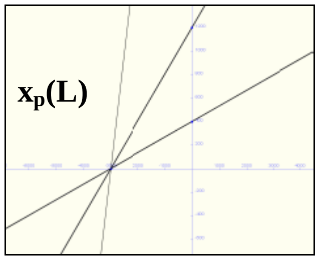

*Curvas de nivel para diferentes valores del parámetro c.*

*Curvas de nivel para diferentes valores del parámetro L.*



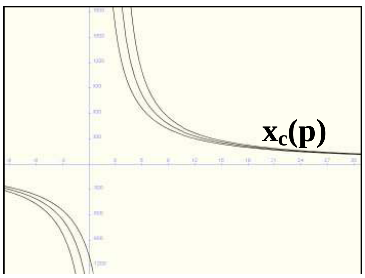

$$3000 \le (p - 2,5)\cdot x - L$$

$$x \le \frac{3000 + L}{p - 2,5}$$



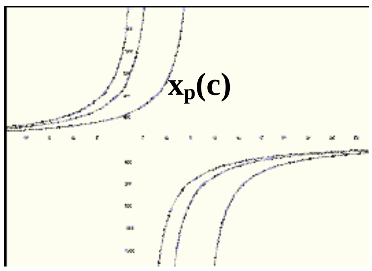

*Curvas de nivel para diferentes valores del parámetro L.*

*Curvas de nivel para diferentes valores del parámetro p.*




$$3000 \le (p - 2,5)\cdot x - L$$

$$x \le \frac{3000 + L}{p - 2,5}$$




*Curvas de nivel para diferentes valores del parámetro c.*

*Curvas de nivel para diferentes valores del parámetro p.*

Sólo en el caso en que p y c se toman como parámetros libres es posible obtener soluciones admisibles. Aparece así la diferencia p – c como el parámetro interesante a considerar.

Finalmente podemos reformular la cuestión general en los términos siguientes:

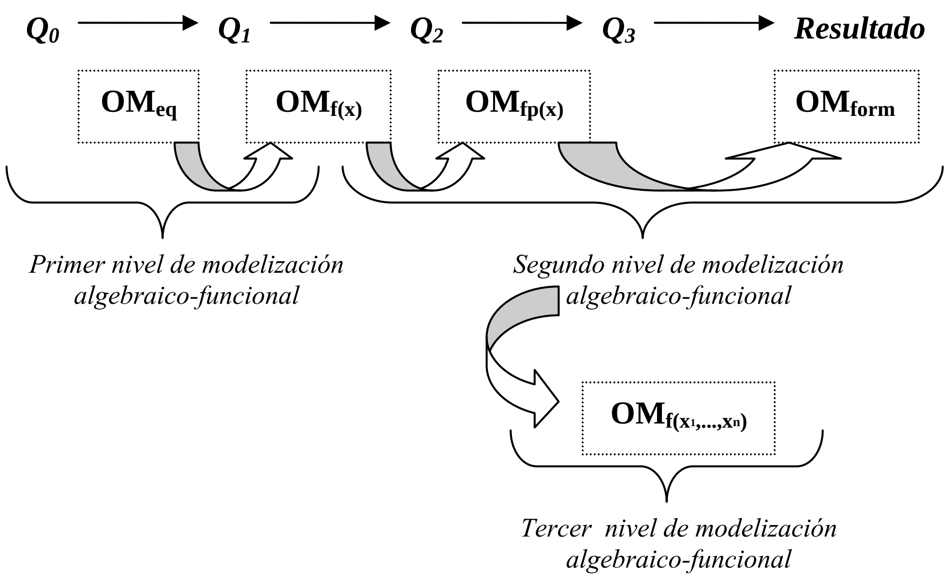
**$Q_3$** (Los tres parámetros libres): ¿Qué cambios habría que realizar en las condiciones iniciales (c = 2,5, p = 5,2 y L = 300), dentro de los valores razonables de los parámetros, para obtener un beneficio de 3000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 450)?

**$R_3$**: Se puede llevar a cabo un estudio exploratorio con la CSW, ya sea variando las gráficas (estudio aproximado) o realizando cálculos algebraicos (con valores exactos).

Resulta, en definitiva, que una solución razonable a la cuestión $Q_0$ requiere que los parámetros cumplan[13]

$$p - c \geq \frac{3000 + L}{x}$$

Debido al hecho que, en el nivel considerado, los estudiantes no disponen de técnicas analíticas para abordar la cuestión $Q_3$, el estudio no puede ir más allá de la manipulación y de la interpretación de esta fórmula.  A modo de resumen mostramos a continuación un esquema de la sucesión de cuestiones y praxeologías que pueden aparecer en el transcurso del estudio:




En el diseño y la experimentación del taller, consideramos la CSW como un instrumento capaz de disminuir la dificultad de ciertas tareas problemáticas o demasiado costosas para los alumnos como, por ejemplo, dibujar gráficas con precisión, resolver algunos

[13] Debido a la ausencia de técnicas analítico-funcionales para afrontar Q3 se plantea solamente la manipulación algebraica de la fórmula obtenida y la interpretación de esta junto a toda la información anterior.

tipos de ecuaciones o realizar determinadas manipulaciones algebraicas. Esta "desproblematización" de algunas tareas debía facilitar el trabajo exploratorio y experimental, al proporcionar a los alumnos medios para representar rápidamente diferentes gráficas de funciones en un mismo sistema de referencia, para calcular rápidamente imágenes y anti-imágenes de dichas funciones y para resolver fácilmente las ecuaciones e inecuaciones asociadas. Suponíamos además que la calculadora fomentaría el planteo de preguntas sobre los modelos utilizados, la interpretación de los resultados, las justificaciones y evaluaciones de los procedimientos y, en definitiva, el trabajo de interpretación y "retorno" al sistema inicial considerado.

## Conclusiones y cuestiones abiertas

*(A) La necesidad de llevar a cabo estudios con objetivos a largo plazo*

Una característica básica de la actividad matemática algebrizada y, en particular, de la actividad de modelización algebraico-funcional es la necesidad de plantear objetivos a largo plazo que sólo se pueden alcanzar mediante un trabajo sistemático y prolongado en el tiempo. Esta fue una de las características de nuestra experimentación: planteaba una cuestión que no era resoluble inmediatamente sino que requería una aproximación progresiva a la respuesta que se materializaba en forma de modelos de amplitud y generalidad crecientes.

Este requisito para llevar a cabo un proceso de modelización algebraico-funcional constituyó un importante obstáculo en el desarrollo de la experimentación y puede explicarse, al menos parcialmente, como una consecuencia de la manera como se interpreta en la enseñanza secundaria el estudio de las matemáticas, es decir, en términos de la noción cultural de estudio, predominante en la enseñanza secundaria. Se trata de una concepción cultural que es coherente con el carácter puntual, rígido y aislado de las organizaciones matemáticas que se estudia en dicha institución (Fonseca 2004) y que se refleja en el hecho que los estudiantes realizan tareas puntuales y cambian de actividad constantemente incluso a lo largo de una misma sesión de clase. Por el contrario, nuestra propuesta pretendía iniciar a los alumnos en una actividad en la que era imprescindible integrar de manera funcional un gran número de objetos matemáticos y, en definitiva, requería trabajar en una colección de OM que habitualmente aparecen incompletas y aisladas.

El tipo de estudio diseñado con objetivos a largo plazo y respuestas que nunca son definitivas y que generan nuevas cuestiones, choca frontalmente con el modelo epistemológico y didáctico dominante en la enseñanza secundaria y, en consecuencia, hace necesarias nuevas estrategias didácticas.

*(B) Articulación entre el lenguaje numérico y el lenguaje funcional*

Para llevar a cabo una actividad matemática genuinamente "algebraica" (y, especialmente, si incluye la modelización algebraico-funcional) es necesario pasar de las cuestiones puramente "numéricas" a cuestiones cuya respuestas involucran relaciones entre "magnitudes variables". El carácter prealgebraico de la matemática de Secundaria obligatoria se manifestó al principio de la experimentación y provocó que la responsabilidad del paso del lenguaje numérico al lenguaje funcional recayese completamente sobre el profesor. Este hecho sugiere la necesidad de un proceso progresivo de algebrización de la matemática escolar que debería recorrer toda la ESO y desembocar en el Bachillerato.

*(C) Dirección del proceso de estudio y grado de autonomía de los estudiantes*

El desarrollo de una actividad de modelización algebraico-funcional requiere un grado de autonomía por parte del estudiante mucho más grande del que asigna el contrato didáctico vigente actualmente en la educación secundaria. En efecto, este tipo de actividad (incluso en los primeros niveles) requiere que el estudiante tome iniciativas relativas al tipo de cuestiones que hay que resolver, al tipo de herramientas que pude utilizar e, incluso, sobre la dirección que debe tomar el estudio en un momento determinado.

Surgen así cuestiones abiertas relativas a la reestructuración del reparto de responsabilidades entre el profesor y los alumnos que sería necesaria para llevar a cabo una actividad de modelización algebraico-funcional. ¿Como determinar el grado óptimo de autonomía y de responsabilidad matemática que se debe asignar a los alumnos en cada uno de los niveles educativos? ¿Qué tipo de dirección del proceso de estudio debe realizar el profesor?

*(D) El papel de la CSW como un instrumento potencial para la modelización algebraico-funcional*

La calculadora simbólica Wiris (CSW) fue utilizada en todo momento para llevar a cabo técnicas matemáticas de una forma menos problemática de lo que hubiese supuesto el uso de lápiz y papel. Se utilizó, por ejemplo, para realizar muchas pruebas rápidamente y para realizar una actividad exploratoria bastante rica. Pero, en general, no se consiguió que los alumnos cuestionaran el alcance, la economía o eficacia de las técnicas que empleaban. Este es un punto esencial ya que toda actividad de modelización matemática requiere que los sujetos de dicha actividad interpreten de manera sistemática los resultados intermedios de su trabajo y cuestionen a nivel tecnológico la práctica que desarrollan. Sí que se consiguió, con ayuda de la CSW, un cierto grado de articulación entre el trabajo algebraico con fórmulas y el trabajo con la gráfica de las diversas funciones que se obtienen al considerar como variables independiente una cualquiera de las "letras" que aparecen en dichas fórmulas.

Resulta, en definitiva, que la modelización algebraico-funcional se propone en Secundaria como un desarrollo de la modelización algebraica y, al igual que ésta, debe ser interpretada como una técnica didáctica que modifica, ampliando y profundizando, el tipo de estudio de las diversas OM. El principal obstáculo para hacer vivir este tipo de actividad matemática proviene precisamente del carácter prealgebraico de las OM de Secundaria.

Hemos mostrado que organizando el estudio en torno a una cuestión cuya respuesta requiere la construcción de modelos algebraico-funcionales de amplitud creciente y utilizando adecuadamente la CSW es posible superar algunos de dichos obstáculos. Pero nuestra experimentación también ha dejado claro que, a partir de lo que hemos denominado "segundo nivel de modelización algebraico-funcional", se requiere un cambio del contrato didáctico vigente en Secundaria. Este cambio es imprescindible si queremos dar sentido al cálculo diferencial del Bachillerato y al Análisis que se estudia en la Universidad.

**Referencias bibliográficas**

Bolea, P. (2002): El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares, Tesis doctoral publicada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en el número 29 de las Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" (2003).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004): Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? Quaderni di Ricerca in Didattica, 14; 125-133.

Bosch, M.; Gascon, J. & Ruiz, N. (2005): La modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. 1r Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo didáctico. Baeza (España). 27-30 Octubre.

Chevallard, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, nº 11. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

Fonseca, C. (2004): Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad, Tesis Doctoral, Dto. de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005): La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1993), Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. Recherches en didactique des mathématiques. 13(3) 295-332.

Gascón, J. (1993-1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». Petit x. 37 43-63.

Gascón, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1, 7-34.

Gascón, J. (1999), La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. Educación matemática. 11(1) 77-88.

Urbaneja, P.M.G. (1992): Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Alianza Universidad, Madrid.

# ANÁLISIS DE UNA EXPERIMENTACIÓN CONSTRUCTIVISTA CON TIC EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

José R. Galo Sánchez

Universidad de Córdoba

IES Alhajen II (Córdoba)

Juan J. Cañas Escamilla

I.E.S. Alhaken II (Córdoba)

**Resumen**

En este trabajo se detalla y analiza una experimentación de aprendizaje de las Matemáticas, en la enseñanza secundaria, realizada con recursos TIC y una metodología constructivista. Esta experiencia se ha realizado dentro de un proyecto promovido por el Ministerio de Educación de España. El análisis estadístico de la información muestra que los alumnos participantes en la experimentación obtuvieron una mejora en su aprendizaje que es estadísticamente significativa en relación a los incluidos en grupos de control. Esta mejora se manifiesta no sólo entre los alumnos con un rendimiento global aceptable y bueno, sino que también se alcanza en aquellos situados en el denominado fracaso escolar. El alumnado manifestó que la experiencia fue positiva y que su aprendizaje fue óptimo, así como su deseo de continuar con ella.

**Abstract**

This paper details and analyses a mathematics education experiment carried out in secondary schools using ICT resources and a constructivist methodology. This experiment was conducted as part of a project promoted by the Spanish Ministry of Education. Statistical analysis of the results shows that the students who took part in the experiment experienced a statistically significant improvement in their learning in comparison to students in the control groups. This improvement was not only observed among students with a previously acceptable and good academic performance, but also in students who had been failing at school. The students felt that this was a positive experience and that their learning had been optimised. They expressed a desire to continue with such methods.

Galo, J.R.; Cañas, J.J. (2007) Análisis de una experimentación constructivista con TIC en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 235-245.

El rápido y acelerado avance de la técnica y la tecnología en el ámbito de la Informática y las Comunicaciones, ha introducido en nuestro mundo un significativo cambio en las posibilidades de acceso a la información, facilitando un contraste ágil de la misma y por consiguiente permitiendo un mejor acceso a una formación de calidad. Las "Tecnologías de la Información y Comunicación" (TIC), permiten que la inconmensurable información que está físicamente distribuida en un amplio, extenso y diverso mundo, quede virtualmente sintetizada y al alcance de nuestra mano, y a su vez, nos facilitan su adecuado tratamiento conduciéndonos al conocimiento. Las TIC se constituyen en catalizadores de la "Sociedad del Conocimiento", permiten interactuar con el conocimiento para generar conocimiento.

Las TIC penetran rápidamente en toda la Sociedad, pero en la Escuela, siendo parte básica de ella, la inmersión es más lenta. Múltiples son las causas, entre otras posibles se pueden citar la no disponibilidad en el aula de suficientes medios y recursos tecnológicos o la necesaria y adecuada preparación docente. Pero incluso en los centros que cuentan con esos medios y con un profesorado formado en ellos se observa cierta reticencia a su uso, esencialmente, porque hay una falta de experiencia que fundamente y explique si se alcanzan los fines educativos con una calidad, al menos, similar a la obtenida sin TIC. Por tanto, se manifiesta necesaria la obtención de esa experiencia mediante la experimentación, evaluación y análisis comparativo entre un aprendizaje con recursos TIC y sin ellos.

En la búsqueda señalada, Marchesi *et al.* (2003) fueron pioneros con su trabajo de investigación realizado en 16 centros de enseñanza secundaria, en el curso escolar 2002/03. En él optaron por un diseño que contemplara unas condiciones que fueran representativas de la acción pedagógica, esencialmente transmisiva, de la mayoría de los docentes y que permitieran la comparación entre el uso del ordenador y el libro de texto.

Con análogo fin, el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) de España junto a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, por iniciativa del Proyecto Descartes (1999) —proyecto colaborativo adscrito al Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE)—, promovió la "Experimentación Descartes en Andalucía" (EDA). Ésta se centró en la detección de las necesidades para la implementación del aprendizaje de las Matemáticas usando los recursos TIC de *Descartes* y de sus efectos en el aprendizaje. Participaron en total 26 centros de todas las provincias andaluzas y se desarrolló desde septiembre de 2005 a enero de 2006. En Tiana (2006) puede consultarse la cita a la EDA realizada por el Secretario de Estado de Educación del MEC.

Como objetivo complementario a la EDA, los autores, se plantearon realizar un análisis comparativo, cuantitativo, de esta experimentación en uno de los centros participantes. Se buscaba la valoración de la influencia que produce el uso de las TIC en el proceso formativo del alumnado, pero no sólo con una perspectiva global, sino también contemplando la diversidad de alumnado y situaciones que conviven en las aulas. En particular, un análisis de la incidencia que aconteciera en los alumnos con un elevado número de asignaturas pendientes, es decir, aquellos en los que se manifiesta una mayor dificultad de aprendizaje y que suelen incorporarse en el denominado fracaso escolar. Adicionalmente, a diferencia del estudio de Marchesi *et al.* (2003), se consideró que la experimentación no debería reducirse a la introducción de nuevos recursos y medios en modelos pedagógicos establecidos, sino que las características intrínsecas de los recursos tecnológicos, entre ellas la interactividad hombre-máquina, deberían ir parejas con una metodología que las potenciara. Una metodología que contemplara la atención a la diversidad, el diferente ritmo de aprendizaje, las diversas vivencias, el entorno y la formación previa de cada persona. Y todo ello, junto al potencial interactivo de los recursos de *Descartes* que se iban a utilizar, donde mejor se enmarcaba era en el constructivismo (ver por ejemplo Coll *et al.*, 2000; Coll *et al.,* 2002).

Consecuentemente se buscó contrastar la hipótesis de que la conjunción metodológica y de recursos planteada podría ser una alternativa válida para la consecución del fin educativo con una calidad superior a la tradicional. Y en particular que podría ser un medio para aminorar el fracaso escolar.

## Método

La experimentación se realizó en un Instituto de Enseñanza Secundaria de Córdoba (España) ubicado en una zona de crecimiento de la ciudad que engloba a un sector poblacional situado en un contexto socio-económico de clase media y constituido por familias cuyos progenitores, en general, son profesionales con estudios al menos secundarios. El centro contaba con 22 grupos de enseñanza secundaria obligatoria (ESO) y 8 de Bachillerato, con 635 y 209 alumnos respectivamente.

La población objeto de estudio estuvo constituida por todos los grupos de segundo y tercero de ESO (cinco y seis respectivamente) con un total de 290 alumnos. De ellos, dos grupos de segundo y otros dos de tercero, 106 alumnos, fueron los que siguieron un proceso de aprendizaje con recursos TIC (en lo sucesivo: grupos EDA) y el resto sin ellos (grupos “no EDA”). La composición y distribución se realizó por el equipo directivo aplicando exclusivamente los criterios organizativos y pedagógicos establecidos, criterios ajenos a la experimentación. Los alumnos EDA fueron informados y mediante una encuesta inicial se recabó su opinión y se cuantificó que el 94% de ellos disponía de ordenador en casa y un 66% de conexión a Internet.

La experiencia se realizó continuadamente durante el primer trimestre del curso. En este periodo se desarrollaron los contenidos aprobados en la programación departamental: Aritmética de los números enteros y racionales para segundo de ESO y de los números racionales y reales en el nivel de tercero. Para su desarrollo en los grupos EDA se efectúo una selección de recursos a partir de los existentes en la web del Proyecto Descartes (1999). En la dirección web http://www.juntadeandalucia.es/averroes/ies_alhaken_ii/webEDA/ se puede acceder a la compilación realizada. En los grupos no EDA el modelo pedagógico considerado fue transmisivo, conductista, sin embargo en los grupos EDA se consideró uno cognitivo, constructivista.

Los alumnos de los grupos EDA realizaron su proceso de aprendizaje en un aula con un ordenador por cada dos alumnos. Todo el tiempo lectivo (112 horas) se dedicó a una labor personal del discente, realizando actividades interactivas secuenciadas. En ellas se planteaban ejercicios y cuestiones en las que los datos numéricos son generados aleatoriamente —por tanto, cada ejercicio se presenta diferente en cada ejecución— permitiendo que el alumno practique tantas veces como desee con distintos datos. La corrección también se realizaba de manera automática y era indicada al alumnado. Los recursos utilizados no contemplaban el seguimiento automatizado del proceso del aprendizaje por lo que, como guía del aprendizaje y registro del mismo, se prepararon unas hojas en papel. Los alumnos tenían autonomía en la temporalización y realización de las actividades, pero se marcaron tres hitos de seguimiento para la orientación individual. La disponibilidad de los recursos en la red permitió que el alumnado, si se consideraba necesario, pudiera acceder a ellos desde casa para repasar o continuar con su aprendizaje. Aquellos alumnos sin acceso a Internet contaron con una copia de los materiales y aquellos que no disponían de ordenador trabajaron en casa de otros compañeros o bien usaron accesos públicos a Internet.

Planificado el trabajo, los recursos, los medios y las actividades, en el aula el profesor desarrolló una actividad de seguimiento individual y diverso, de resolución de dudas, de motivación, de coordinación, con un intervencionismo mínimo. En muy escasas ocasiones fue necesaria alguna breve explicación al gran grupo para clarificar algún concepto. Cada alumno se constituyó en el autor y motor de su aprendizaje, estableciendo su ritmo de trabajo.

Para la evaluación global tanto de los grupos EDA como los no EDA se siguieron los criterios recogidos en la programación departamental relativos a los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, criterios que según establece la normativa vigente conducen a una nota de evaluación trimestral, con un rango numérico de cero a diez. También para cada nivel, entre todos los profesores de Matemáticas implicados, se preparó un examen global común, tradicional, que realizaron todos los alumnos. Adicionalmente los alumnos EDA realizaron otras pruebas, unas con el ordenador y otras sobre papel.

Finalizada la experimentación se realizó una encuesta al alumnado EDA donde se recababa su opinión. Los ítems, relativos al aprendizaje, se recogen en la tabla 1. La respuesta fue numérica eligiendo un valor entero de uno a cinco, donde el uno significa "no, nada o ninguno" y el cinco "sí, mucho o todo".

Para el tratamiento estadístico se registró la información relativa a algunos caracteres descriptivos de cada elemento de la población: curso, sexo, ser participante o no en la EDA, ser repetidor de curso, tener las matemáticas pendientes de cursos anteriores, número de asignaturas pendientes, haber promocionado por imperativo legal (PIL) —alumnos que no han superado los objetivos del curso, pero que según la normativa no pueden repetir—, nota en el ejercicio común, nota en la evaluación trimestral y nota media de todas las asignaturas en dicha evaluación trimestral. Adicionalmente para los alumnos EDA se dispuso de los datos relativos a las pruebas adicionales y de las encuestas realizadas.

El análisis estadístico de la información se realizó tanto globalmente como segmentando por niveles de enseñanza y género, y en especial se contempló lo acaecido en los alumnos con asignaturas pendientes, repetidores y PIL. Para el análisis comparativo de las medidas estadísticas relativas a las muestras de alumnos EDA y no EDA se usó el test paramétrico t de Student para muestras independientes. Para la observancia de la homogeneidad de muestras se utilizó la prueba F de Snedecor. Cuando la segmentación conducía a muestras pequeñas (inferior a treinta) se usaron test no paramétricos (U de Mann-Whitney). La comparación de medias en muestras dependientes se realizó con el test t de Student para datos apareados. Se fijó un nivel de confianza en todo el estudio del 95%.

## Resultados

Los resultados obtenidos en el análisis estadístico se resumen en los siguientes apartados:

- Atendiendo exclusivamente a la nota del ejercicio común se tiene que no hay diferencia significativa entre los alumnos EDA y no EDA, tanto globalmente como segmentando la población.

- Considerando la nota de evaluación se obtiene que globalmente hay una mejora de los alumnos EDA frente al resto que es estadísticamente significativa. Y segmentado la población, en estos alumnos EDA se tiene que: por niveles de enseñanza la mejora es significativa en segundo de ESO; los que tienen matemáticas pendientes mejoran significativamente; la mejora de los alumnos PIL es también significativa; los que no tienen asignaturas pendientes o tienen menos de tres mejoran significativamente tanto globalmente como en segundo y en aquellos con más de dos asignaturas pendientes la mejora es significativa globalmente y por niveles. Ver las notas medias en la tabla 2.

- Realizando una comparativa de la nota de evaluación obtenida en la asignatura de matemáticas y la nota media de todas las asignaturas, se tiene que en los alumnos EDA la primera supera a la segunda de manera significativa, global y segmentando por niveles, y en los no EDA esa nota es significativamente inferior a la nota media globalmente y en segundo.

- No se observó ninguna diferencia significativa para el atributo género.

- En los alumnos EDA, ante un mismo examen, la media obtenida es significativamente mejor cuando se hace con ordenador en lugar de en papel.

**Discusión**

Los resultados estadísticos permiten la discusión y el planteamiento de las siguientes conclusiones:

Si la evaluación se aborda sin considerar el modelo pedagógico, sólo con un examen tradicional en papel, se obtiene que el aprendizaje alcanzado es similar independientemente de la metodología y recursos empleados. Según ello la posible resistencia a cambiar de metodología o de recursos no tendría fundamento.

Atendiendo a la nota de evaluación global se observa que los alumnos EDA obtienen mejores resultados con diferencias que son estadísticamente significativas. En especial, se ha comprobado (como ejemplo puede verse la figura 1) que comparativamente no sólo mejoran los alumnos cuyos resultados académicos anteriores eran buenos o aceptables, sino que esta mejora significativa se ha alcanzado en aquellos que parten con un historial de mayores dificultades académicas, alumnos que se encuadran en el denominado fracaso escolar. Esta mejora cuantitativa puede fundamentarse cualitativamente en el cambio actitudinal observado en esos alumnos que se introducen en un nuevo rol, motivados por la introducción de una nueva metodología y por el tipo de recursos interactivos usados. En este nuevo papel, dichos alumnos, recuperan el protagonismo de su aprendizaje, experimentan inmediatamente su progreso al contar con una corrección individual automática de lo que hacen, lo que les motiva a continuar o a reintentar, recuperan una iniciativa de trabajo —perdida en el aula tradicional— y se marcan un ritmo personal que la atención individualizada, y por tanto diversa, del profesor permite incentivar. Obviamente esto no significa que todos estos alumnos superen cuantitativamente la evaluación, pero la recuperación de la autoestima conduce al abandono de la pasividad —que les impedía la adquisición de nuevas destrezas y conocimientos— y permite la introducción de nuevas acciones a medio y largo plazo que logren su integración escolar y su desarrollo personal. Un hecho que puede contemplarse para ayudar en la elaboración de una respuesta a la pregunta de Marchesi (2004): *"Qué será de nosotros, los malos alumnos"*.

Tradicionalmente se constata que la asignatura de Matemáticas cuenta con unos resultados inferiores a la media, sin embargo aquí se observa un cambio de ubicación.

En los alumnos EDA los resultados de la prueba realizada con ordenador son significativamente mejores que los realizados en papel. Esto refrenda el principio teórico de que la evaluación de un proceso educativo debe de corresponderse con el método seguido en el aprendizaje e incide en que la introducción de las TIC requiere nuevos planteamientos organizativos.

La opinión manifestada por los alumnos EDA es muy favorable a la experimentación realizada, desean continuar con ella y consideran que su aprendizaje fue óptimo. En concreto, en la tabla 1 se observa que hay una importante atracción por el ordenador (E1). Este resultado, que podría ser esperado a priori, no tendría por qué producirse a posteriori si los recursos no hubieran mantenido suficientemente el interés de unos alumnos-usuarios tan críticos y tan expertos en entornos gráficos interactivos. A ello, hay que unir la impresión subjetiva de que el aprendizaje ha sido óptimo (E5). El alumnado experimenta más ventajas que inconvenientes (E3 y E4) y se posiciona favorable a la experiencia en su contraste con la metodología tradicional (E6 y E7). La necesidad de un profesor que apoye, guíe y coordine el proceso educativo queda reflejada en la respuesta a E2. Lo aquí obtenido contrasta con lo indicado por Marchesi *et al*. (2003), donde la opinión inicial favorable al aprendizaje con ordenador gira a un desfavorable 80% de alumnos que después de la experiencia piensa que aprende menos.

Consecuentemente se observa que si la introducción de las TIC no se limita al uso de nuevos recursos en modelos establecidos, sino que se efectúa en conjunción con cambios metodológicos, la mejora alcanzada es estadísticamente significativa, señalando posibles actuaciones para aminorar el fracaso escolar. Ello apoya las hipótesis iniciales de este estudio.

**Referencias bibliográficas**


Area, M. (2005). Las tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Revista ELectrónica de Investigación y Evaluación Educativa, v. 11*, n. 1. Consultado el 1 de septiembre de 2006 desde http://www.uv.es/RELIEVE/v11n1/RELIEVEv11n1_1.htm.

Coll, C. *et al*. (2000). *El constructivismo en la práctica*. Barcelona: Ed. Graó.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I. y Zabala, A. (2002). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Ed. Graó.

Consejería Educación Junta de Andalucía y MEC. (2006). *Experimentación Descartes en Andalucía (EDA). Página del proyecto.* Madrid (España): Ministerio de Educación y Ciencia. http://descartes.cnice.mecd.es/WEB_EDA/web_EDA.htm. Consultado el 1 de septiembre de 2006.

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación. *Actas de IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, IX SEIEM*, 11-16. Consultado el 1 de septiembre de 2006 desde http://www.uco.es/informacion/webs/seiem/ActasSIMP/IXseiem_cordoba.pdf.

Marchesi, Á. (2004). *Qué será de nosotros, los malos alumnos*. Madrid: Ed. Alianza.

Marchesi, Á. y Martín, E. (2003). *Tecnología y aprendizaje. Investigación sobre el impacto del ordenador en el aula*. Ed. SM. Consultado el 1 de septiembre de 2006 desde http://www.piloto.librosvivos.net/.

Proyecto Descartes (1999). *Página del proyecto.* Madrid (España): Ministerio de Educación y Ciencia. Consultado el 1 de septiembre de 2006 desde http://descartes.cnice.mecd.es/.

Tiana, A. (2006). *Discurso acto de clausura.* I Jornadas sobre alfabetización digital. Madrid. Consultado desde http://www.fiap.org.es/webosic/DOC/JAD%20notainfoclausura.pdf el 1 de septiembre de 2006.

**Anexo 1.**

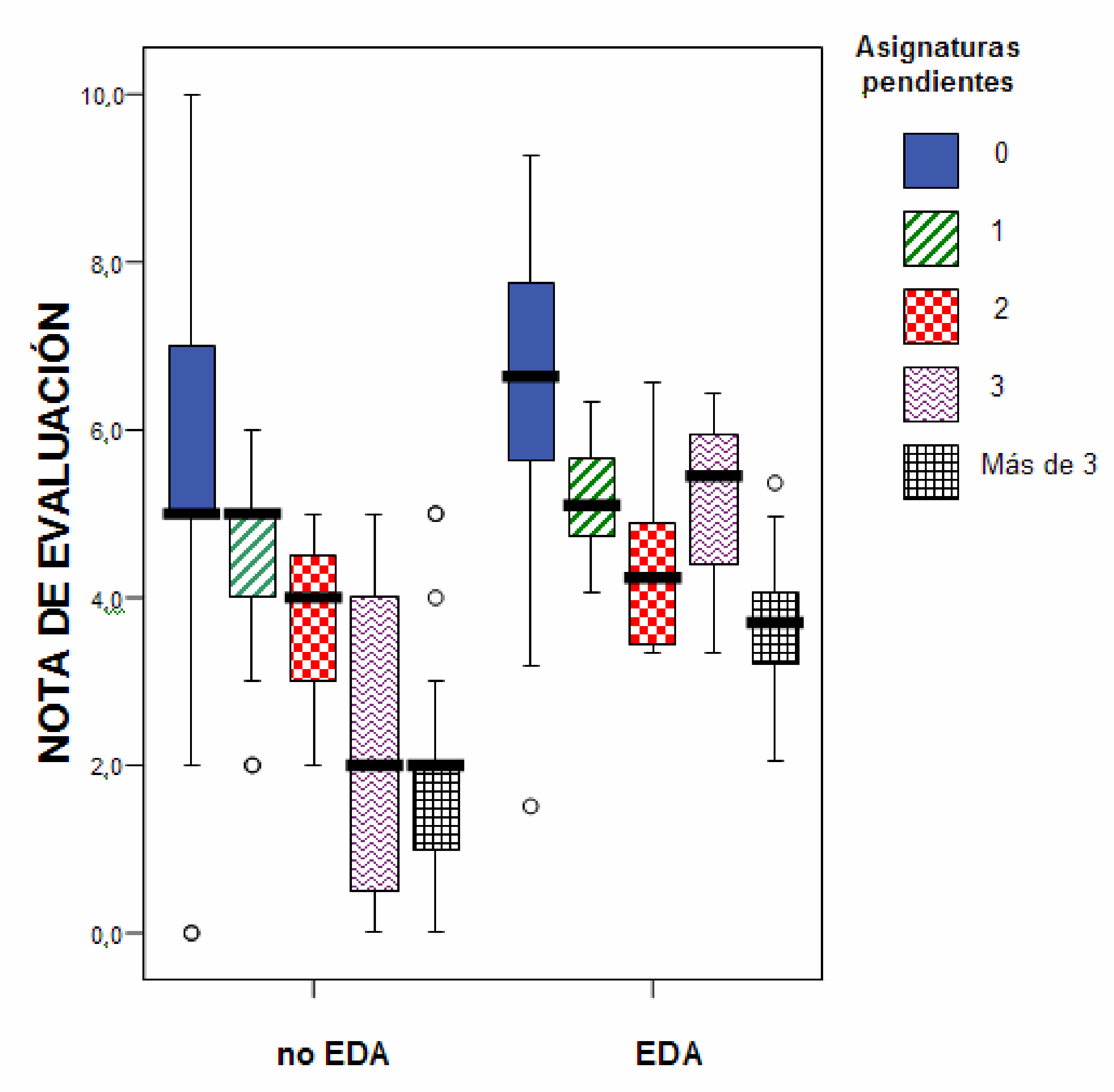
*Tabla 1. Ítems en la encuesta posterior a la experimentación.*

| Pregunta | | Moda | Mediana | Media | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|
| E1 | ¿Te ha gustado trabajar con el ordenador? | 5 | 5 | 4,38 | 1,18 |
| E2 | ¿Has tenido que consultar al profesor? | 5 | 3 | 3,45 | 1,47 |
| E3 | ¿Has visto ventajas en el aprendizaje con el ordenador? | 5 | 4 | 3,53 | 1,60 |
| E4 | ¿Has visto inconvenientes en el aprendizaje con el ordenador? | 1 | 1 | 2,01 | 1,47 |
| E5 | ¿Has aprendido los conceptos que has trabajado? | 5 | 5 | 4,29 | 1,06 |
| E6 | ¿Es mejor que la clase tradicional? | 5 | 5 | 3,60 | 1,66 |
| E7 | ¿Has trabajado mejor que en la clase tradicional? | 5 | 4 | 3,44 | 1,75 |
| E8 | ¿Te gustaría aprender las matemáticas con Descartes? | 5 | 5 | 3,82 | 1,41 |

*Tabla 2. Notas medias en la evaluación global.*

| Nota media evaluación | Asignaturas pendientes | | | | PIL |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ninguna | Menos de tres | Más de dos | Matemáticas | |
| EDA | 6,49 | 6,30 | 4,04 | 4,17 | 4,08 |
| No EDA | 5,08 | 5,40 | 2,14 | 2,67 | 2,10 |

*Figura 1*. Diagrama de cajas relativo a la nota de evaluación global, del alumnado no EDA y EDA, agrupado por número de asignaturas pendientes de años anteriores.



# PROPUESTA DE INGENIERÍA PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA FUNCIÓN AFÍN EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Eduardo Lacasta

Elena G. Madoz

Miguel R. Wilhelmi

Universidad Pública de Navarra

**Resumen**

Proponemos una ingeniería didáctica para la introducción de la función lineal en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. La pertinencia y adecuación de esta ingeniería se argumenta sobre los resultados del análisis didáctico (dimensiones cognitiva, epistemológica, instruccional y curricular) y por la necesidad en la institución secundaria de investigaciones centradas en la enseñanza de la función afín que extiendan la noción de función lineal y el campo de problemas "de proporcionalidad".

*Palabras clave*: aritmética, álgebra, enseñanza secundaria, ingeniería didáctica.

Lacasta, E.; Madoz, E.G.; Wilhelmi, M.R. (2007) Propuesta de ingeniería para la introducción de la función afín en la Educación Secundaria Obligatoria. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 247-261.

## De la función lineal a la función afín

La introducción y el desarrollo de las primeras nociones, procedimientos y significados de objetos algebraicos en los primeros ciclos de la ESO en España son problemáticos. Esto hecho se debe a la especificidad del tipo de situaciones, lenguaje, acciones y argumentaciones del álgebra en relación con el contexto aritmético (saberes previos en los currículos actuales y sobre los cuales se van a estructurar los procesos instruccionales).

En un trabajo anterior (Lacasta, Madoz y Wilhelmi, en prensa), basado en un proyecto de investigación de mayor alcance (Madoz, 2006), hemos analizado las nociones, los métodos y los significados propios del álgebra en el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España, analizando el currículo actual (que puede, en cierto sentido, ser resumido mediante la sentencia "el álgebra es una aritmética generaliza") y las consecuencias más sobresaliente de la aplicación de este currículo. Asimismo, en dicho trabajo justificamos la necesidad de búsqueda de medios más eficaces para la introducción y desarrollo del álgebra escolar. En este contexto, nuestro objetivo principal en este trabajo es mostrar una *ingeniería didáctica* (Artigue et al., 1995) para la introducción de la función afín ($y = ax + b$ con $a, b \in \mathbf{R}$) en la ESO.

La decisión de centrar la atención sobre la función afín se debe a cuestiones tanto *intrínsecas* a la propia investigación como *extrínsecas* a ésta. Por un lado, intrínsecamente, la pertinencia y adecuación de esta ingeniería se argumenta sobre los resultados del análisis didáctico realizado (Madoz, 2006), que ha tenido en cuenta aspectos *cognitivos* (relativos al conocimiento de los estudiantes), *epistemológicos* (relativos a los saberes en juego), *instruccionales* (relativos al papel del profesor) y *curriculares* (relativos a la ESO). En este análisis, un aspecto fundamental es el uso extendido de la *regla de tres* para resolver problemas de proporcionalidad. Este procedimiento es introducido en la enseñanza primaria para abordar problemas "de porcentajes" y "de proporcionalidad".

> *"Los problemas de proporcionalidad se pueden resolver por regla de tres o por reducción a la unidad"* (Hernández y Jiménez, 1999).

El uso constante de la regla de tres en primaria hace que los alumnos la mecanicen, no cuestionen su generalidad y pierdan el control de su ámbito de aplicación. De hecho, la regla de tres (y la idea de proporcionalidad que los alumnos identifican explícita o implícitamente con ella) dificulta la distinción entre la proporcionalidad directa e inversa (y la noción de función lineal asociada), así como la búsqueda de relaciones funcionales no lineales (afines, parabólicas, etc.)

Por otro lado, extrínsecamente, desde la institución secundaria se plantea la necesidad de investigaciones centradas en la enseñanza de la función afín que extiendan la noción de función lineal ($y = ax$ con $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$), ligada a la de proporcionalidad (y a las de razón y de proporción). Van Dooren, De Bock y Verschaffel (en prensa) hacen una revisión de la literatura en educación matemática y científica donde se muestra el uso de modelos lineales en contextos y situaciones donde éstos no son aplicables (*ilusión de linealidad*). Asimismo, dichos autores evidencian que dichos usos obedecen a cuestiones de tipo *cognitivo* (tendencia "natural" a razonar proporcionalmente), *socio-cultural* (uso generalizado de la proporción como una regla del tipo "a más, más; a menos, menos", sin considerar la necesidad de existencia de una "constante de proporcionalidad"), *epistemológico* (enraizadas en desarrollos históricos, por ejemplo, en la teoría aristotélica sobre la caída de los cuerpos) y *didáctico* (relativos a la enseñanza escolarizada). Dichos autores concluyen:

> "[…] Hemos intentado señalar que la aplicación ilícita de la proporcionalidad es un mecanismo que puede explicar gran variedad de errores cometidos por estudiantes de diferentes edades en dominios muy diversos de las matemáticas y la ciencia […] Entender estos mecanismos subyacentes en las ideas equivocadas de los estudiantes es un importante primer paso en su corrección o prevención mediante una enseñanza adecuada. Esperamos que nuestro conocimiento actual sobre el fenómeno pueda agudizar la conciencia de los profesores y diseñadores de currículos. Hay algunos objetivos mínimos, fácilmente alcanzables, que podrían suponer ya un paso importante en la ruptura de la tendencia de los estudiantes de abusar de los modelos lineales."

Nuestra investigación nos ha permitido establecer que un objetivo central en la enseñanza del álgebra escolar es el de determinar el ámbito de aplicabilidad del razonamiento proporcional y, más en concreto, eliminar la reducción de este razonamiento a la "regla de tres". Abordamos este objetivo proponiendo una *situación didáctica* (Brousseau, 1998) donde el saber "función lineal ($y = ax$)" se revela insuficiente, siendo necesaria la determinación del saber "función afín ($y = ax + b$)".

La situación que proponemos no tiene por fin único "la optimización de recursos humanos y materiales con vistas a procesos de instrucción matemática del saber *función* *afín* indicados" (*dimensión normativa o técnica*), sino que busca también contribuir a la determinación de *hechos y fenómenos didácticos* (Wilhelmi, Font y Godino, en prensa) relativos a procesos cognitivos e instruccionales relacionados con dicho saber (*dimensión explicativa*). De hecho, la pregunta profesional "¿cómo podría un docente realizar una enseñanza que facilitara a los estudiantes un cierto aprendizaje?" desde el punto de vista de la didáctica es reformulada, según dos dimensiones:

i) *Dimensión explicativa.* ¿Qué procesos de estudio matemático podrían ser propuestos (en una determinada institución) para identificar y describir de manera más adecuada los hechos y fenómenos didácticos que se "producen" en situaciones de construcción y comunicación de un determinado objeto matemático?

ii) *Dimensión normativa o técnica.* ¿Qué características debe poseer un proceso de estudio para que los estudiantes utilicen sus conocimientos de base y hagan que éstos evolucionen hacia el saber que se desea enseñar?

La ingeniería didáctica permite la articulación de las estas dos dimensiones. Así, en este trabajo, afrontamos un segundo objetivo; a saber, resaltar el papel integrador que la ingeniería didáctica tiene de las dimensiones explicativa y técnica. De esta forma, no nos limitaremos a exponer la propuesta de enseñanza, sino que enmarcaremos ésta dentro una revisión de los contenidos (estructurados en situaciones, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentaciones) y el análisis de la enseñanza actual de las primeras nociones de álgebra en la ESO.

## Análisis de contenidos

El análisis de los contenidos es realizado desde una teoría de la cognición e instrucción matemáticas. En este trabajo hemos utilizado para este análisis el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) (Godino, 2002), que sitúa en el centro de sus investigaciones la noción de *significado* y permite un contraste entre los análisis *a priori* y *a posteriori*[1].

En el EOS se dice que un sujeto o una institución determinan un significado de un objeto cuando establecen una correspondencia entre un *objeto-antecedente* (expresión) y un *objeto-consecuente* (contenido) siguiendo unas *reglas* (explícitas o no,

[1] La articulación entre la Teoría de Situaciones Didácticas y el EOS está justificada (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006; Wilhelmi, Font, Godino, en prensa) y, por lo tanto, no es problemática.

convenidas o no, normadas o arbitrarias, etc.) que restringen el tipo de correspondencia que se puede establecer e informan a los sujetos e instituciones sobre la coherencia de las correspondencias que realizan. De forma genérica, este tipo de correspondencia recibe el nombre de *función semiótica*.

De esta manera, en una primera etapa, es necesario identificar qué tipo de objetos pueden ser antecedente o consecuente en una función semiótica. El EOS propone entonces una ontología matemática basada en las diversas funciones que desempeñan los objetos matemáticos (Godino, 2002, pp. 245–247, 255): *situaciones, acciones, lenguaje, conceptos-reglas, propiedades, argumentaciones*.

A continuación, se muestran los elementos del significado (situaciones, acciones, lenguaje, nociones, propiedades, argumentaciones) que consideramos fundamentales en la transición de la aritmética al álgebra en la ESO.

***Situaciones***

1. *Economía del álgebra respecto a la aritmética en la resolución de problemas.* Los problemas propuestos deben llevar al estudiante a preferir la utilización del álgebra frente a la aritmética, debido a cuestiones de eficacia y economía (de recursos y de tiempo). Para ello se selecciona cuál o cuáles son las variables didácticas tales que, al actuar sobre ellas, en una primera fase sea igual de eficaz usar nociones y procedimientos aritméticos que algebraicos y, en una segunda fase, introducir situaciones en las que la resolución aritmética sea más complicada e incluso imposible.
2. *Paso de lo particular a lo general*. Se puede poner al estudiante en la situación de deducir casos generales (en lenguaje algebraico) a partir de casos particulares (en lenguaje aritmético).
3. *Planteamiento de ecuaciones en contextos diversos.* Las técnicas de resolución de ecuaciones deben desarrollarse tanto de manera aislada como en contextos que las dote de sentido. Esto permite al estudiante utilizar sus recursos de lenguaje oral y escrito.

***Acciones***

4. ***Estrategias de base.*** Cuando el estudiante pasa de casos particulares a generales, en un primer momento, puede utilizar el ensayo-error a partir de sus conocimientos aritméticos.

5. *Regla de tres*.
6. *Formulación*. El estudiante tiene que poder enunciar leyes generales que tendrá que validar más adelante.
7. *Validación*. El estudiante tiene que poder valorar por sí mismo la veracidad de la ley propuesta.

***Lenguaje***

8. *Institucionalización*. En la formulación, los estudiantes utilizan un lenguaje natural, siendo necesario una enseñanza específica cuyo objetivo sea la "traducción" al lenguaje algebraico de las proposiciones formuladas por los estudiantes. El profesor deberá institucionalizar el lenguaje algebraico como expresión simplificada del lenguaje empleado por los estudiantes.
9. *Lenguaje tabular*. Las relaciones funcionales entre variables se pueden expresar mediante tablas numéricas.
10. *Sintaxis de la igualdad*. La igualdad puede utilizarse como: a) una cadena de expresiones que den el mismo resultado o b) una relación entre dos expresiones.

***Nociones***

10. *Igualdad, ecuación e identidad*.
11. *Función lineal y afín*. Diferencias y contextos de uso.
12. *Resolver una ecuación* supone abordar dos cuestiones:
    i) ¿Hay solución o soluciones?; es decir, dada una ecuación $R(x) = Q(x)$, ¿Existe algún $x$ que cumple la ecuación?
    ii) ¿Cuál o cuáles son dichas solución (si existen)?
13. *Proporcionalidad y razón*.

***Propiedades***

14. *Bidireccionalidad de las ecuaciones y de las funciones.* Plantear las ecuaciones y las funciones como expresiones bidireccionales en las que no hay una causa y un efecto inamovibles. Plantear enunciado del tipo: ¿Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica $2x - 3$ para $x = 2$? ¿Cuál es el valor que toma $x$ para que la expresión algebraica $2x - 3$ tenga valor numérico 1?
15. *Variabilidad*. En las funciones y las ecuaciones las incógnitas no representan un único número fijo "que debe ser encontrado", sino que son "variables".

***Argumentaciones***

*16. Apoyándose en casos particulares.*

17. *Relativa a las condiciones de las situaciones propuestas.* Restricciones sobre los recursos materiales (calculadora, báscula…) y de tiempo.

Como hemos dicho anteriormente el análisis que acabamos de mostrar se fundamenta en el análisis previo de la enseñanza actual. En la tabla 1 se muestra la relación entre el análisis de contenidos y el análisis previo.

| *Análisis de contenidos* | *Análisis previo* |
|---|---|
| Economía del álgebra respecto a la aritmética en la resolución de problemas | Problemas en contextos pseudo-aritméticos<br>Se evitan problemas de modelización<br>Disociación Incógnita/datos<br>Tendencia por parte del estudiante a aferrarse a la aritmética como herramienta. |
| Paso de lo particular a lo general | Ausencia de generalización de situaciones |
| Planteamiento de ecuaciones en contextos diversos | Rutinización y atomización de las técnicas<br>Ausencia de generalización de situaciones |
| Estrategias de base | Ausencia de generalización de situaciones |
| Formulación | Rutinización y atomización de las técnicas |
| Validación | Rutinización y atomización de las técnicas |
| Institucionalización del lenguaje algebraico | Problemas en contextos pseudo-aritméticos<br>Se evitan problemas de modelización<br>Disociación Incógnita/datos |
| El lenguaje tabular | Ausencia de generalización de situaciones |
| Sintaxis de la igualdad | Simetría de la igualdad |
| Nociones de igualdad, ecuación e identidad | Escasa distinción entre ecuación e igualdad |
| Nociones de función lineal y afín | Interpretación unidireccional de las funciones<br>Proporcionalidad y regla de tres |
| Resolver una ecuación | Rutinización y atomización de las técnicas |
| Proporcionalidad | Proporcionalidad y regla de tres |
| Bidireccionalidad de las ecuaciones y las funciones | Interpretación unidireccional de las funciones |
| Variabilidad | No se aborda la variabilidad. |
| Argumentación apoyándose en casos particulares | Ausencia de generalización de situaciones |
| Argumentaciones relativas a las condiciones de la situación o situaciones propuestas | Proporcionalidad y regla de tres<br>Interpretación unidireccional de las funciones<br>Problemas en contextos pseudo-aritméticos |

*Tabla 1.* Relación entre el análisis de contenido y el análisis previo.

**Situación y desarrollo**

- **Situación didáctica**

Proponemos al estudiante una cuestión inicial de la que esperamos que, guiado por el profesor, llegue a deducir una ley del tipo $y = ax + b$ con $a$, $b \in \mathbf{R}$. Enmarcamos este problema en el marco de la teoría de situaciones didácticas. Para ello tendremos en cuenta:

*Los conocimientos de base de los alumnos*. Campo numérico de los racionales y las operaciones aritméticas.

Las *estrategias de base*. Los estudiantes usaran como modelo la regla de tres y seguirán el método del ensayo-error mediante comprobaciones aritméticas.

*Interacción con el medio*. El estudiante se enfrenta a la situación a través de transformaciones aritméticas formuladas en lenguaje natural y validadas o falsadas mediante casos particulares la mayoría de las ocasiones.

*Papel del profesor*.

a) Decisiones relativas al *contrato pedagógico.* Formación de grupos según los siguientes criterios:
   - Que el tamaño de los grupos sea adecuado para asegurar que el número de grupos permite mantener el control de clase y el número de alumnos por grupo sea adecuado para que puedan trabajar.
   - Formación heterogénea de los grupos de forma que queden nivelados en lo que a conocimientos, liderazgo, actitud… se refiere.
   - Proponer un reparto de tareas eficiente.

b) Decisiones relativas al *contrato didáctico:*
   1. Plantear la situación y dar la *consigna*.
   2. *Devolver* la responsabilidad de la resolución del problema a los estudiantes cuando acuden al profesor en busca de solución.
   3. Gestión de las *variables didácticas* relacionadas con:
      - Estructura de tablas.
      - Valores (enteros, decimales, fraccionarios…) y forma (diferencia proporcional o no entre datos…) en la que son dadas dichas tablas.
      - Coeficientes $a$ y $b$ a utilizar en la función afín ($y = ax + b$ con $a, b \in \mathbf{R}$).
   4. *Institucionalización* de los saberes.

- **Desarrollo**

*Fase I (15 min.)*

1) Se forman los grupos y se reparten las tareas.
2) Se acuerda usar una calculadora por grupo. Conviene hacer un comentario sobre la jerarquía de las operaciones en las calculadoras científicas y en las que no lo son.
3) El profesor presenta la situación y da la primera consigna

   *Consigna 1*:

   Has viajado con tu nave espacial al planeta de tu amigo Yu-2 para devolverle la visita que te hizo el verano pasado. En el planeta de Yu-2 nadie habla tu idioma y sólo puedes comunicarte con él gracias a la radiación que recibió al llegar a Tierra cuando os conocisteis. A los pocos días de llegar, tu amigo tiene que salir con mucha prisa de viaje y tienes que sustituirle en el trabajo. Yu-2 trabaja en una oficina de correos de su planeta y se dedica a la recepción y cobro de paquetes para enviar. Ha tenido que salir de viaje de forma tan urgente que no ha podido explicarte nada pero como el sistema de numeración y las unidades de medida en el planeta son los mismos que los de la Tierra decides ir a sustituirle sin tener mucha información. Cuando llegas allí sólo tienes una tabla con los siguientes datos:

| Kg. | Yunis (moneda del planeta) |
|---|---|
| 0-0,250 Kg. | 3 yunis |
| 0,5 Kg. | 6 yunis |
| 0,75 Kg. | 7,5 yunis |
| 1 Kg. | 9 yunis |

*Tabla 2.* Tabla de tarifas 1.

Antes de que lleguen los clientes deberías conseguir la manera que te permita saber cuánto debes cobrarles según el peso de los paquetes. Para ello tendrás que responder a preguntas del tipo:

- ¿Cuánto le cobrarías a un cliente que quisiera enviar un paquete de 0,4 Kg.?
- ¿Cuánto pesará un paquete de un cliente al que se le han cobrado 8 yunis?

4) Los alumnos se ponen a trabajar en sus correspondientes grupos para tratar de averiguar cómo el precio se relaciona con el peso. El trabajo de los estudiantes se estructura según las siguientes fases:

   a) *Situación adidáctica de acción*: Los estudiantes relacionan peso y precio por un procedimiento que no formulan ni validan de forma explícita.
   b) *Situación adidáctica de formulación*

c) *Situación adidáctica de validación*: Entre los compañeros se plantean unos a otros posibles soluciones y rebaten los razonamientos según los datos del problema**.**

Esta tarea se desarrolla durante 10 minutos.

5) Durante 5 minutos cada grupo expone el procedimiento que ha seguido y, en su caso, los resultados obtenidos y se debate en clase. El profesor debe evitar la tentación de dar la solución al problema limitándose a devolver la responsabilidad matemática a los estudiantes. El profesor recoge en la pizarra los resultados que sean más relevantes a juicio de los estudiantes.

*Fase II (10 min.)*

1) El profesor presenta la segunda consigna:

*Consigna 2*:

De pronto, entra en la oficina un cliente enfadado y que te entrega una factura con la que no está de acuerdo. Miras la factura y aparecen los siguientes pagos:

| Kg. | Yunis |
|---|---|
| 0,150 Kg. | 3 Yunis |
| 0,350 Kg. | 5,1 Yunis |
| 0,650 Kg. | 8 Yunis |

*Tabla 3.* Tabla de tarifas 2.

¿Tiene el cliente razones para estar enfadado? Si o no. ¿Por qué?

2) Los alumnos se ponen a trabajar en sus correspondientes grupos para tratar de resolver la tarea. El trabajo se estructura en fases similares a la tarea anterior. Los estudiantes no formularán cantidades numéricas sino que razonarán por comparación de precios y pesos en las tablas y validaran los argumentos de la misma forma. Esta tarea se desarrolla durante 5 minutos.

3) Durante 5 minutos cada grupo expone el procedimiento que ha seguido y, en su caso, los resultados obtenidos y se debate en clase. La función del profesor se restringe, de igual manera que antes, a dirigir el debate generado.

*Fase III (15 min.)*

1) El profesor presenta la tercera consigna:

   *Consigna 3*:

   Una vez detectado el error empiezas a preocuparte porque sabes que tienes que devolverle los yunis que le has cobrado de más, pero no sabes cuántos son. Por fortuna en ese momento el cliente saca un listado de precios más completo que el que tú tienes y en el que aparece el precio correcto. Le das los cambios y se marcha. El cliente deja en la oficina la lista que te ha mostrado:

| Kg. | yunis |
|---|---|
| 0-0,250 Kg. | 3 yunis |
| 0,400 Kg. | 5,4 yunis |
| 0,500 Kg. | 6 yunis |
| 0,650 Kg. | 6,9 yunis |
| 0,75 Kg. | 7,5 yunis |
| 0,900 Kg. | 8,4 yunis |
| 1 Kg. | 9 yunis |

*Tabla 4.* Tabla de tarifas 3.

   - ¿Los resultados obtenidos hasta ahora son correctos?
   - ¿La forma de pago que habías usado se ajusta a los datos de la tabla? Si no es así, ¿Puedes encontrar una forma de pago más correcta?

2) Los estudiantes se ponen a trabajar en sus correspondientes grupos para tratar de resolver la tarea. La dinámica de trabajo en grupo sigue las mismas pautas que en las fases anteriores. Esta tarea se desarrolla durante 10 minutos
3) Durante 5 minutos cada grupo expone el procedimiento que ha seguido y, en su caso, los resultados obtenidos y se debate en clase. La función del profesor se restringe, de igual manera que antes, a dirigir el debate generado.

*Fase IV. Juego entre grupos (15 min.)*

1) El profesor presenta la cuarta consigna:

   *Consigna 4:*

   Por fin consigues dar con una forma de cobrar que parece que funciona y la utilizas el resto del día. Casi al finalizar la jornada, te llega un mensaje de tu amigo Yu-2 en el que te explica que al día siguiente cambian las tarifas y que te encontrarás una nueva lista de precios por la mañana en la oficina. Te vas a casa sin preocuparte mucho porque crees que ya le has cogido el truco y encontrarás la forma de cobro correspondiente enseguida. A la mañana siguiente recibes la siguiente lista:

| Kg. | yunis |
|---|---|
| 0-0,250 Kg. | 3,5 yunis |
| 0,400 Kg. | 5,9 yunis |
| 0,500 Kg. | 6,75 yunis |
| 0,600 Kg. | 7,4 yunis |
| 0,700 Kg. | 8,05 yunis |
| 0,900 Kg. | 9,35 yunis |
| 1 Kg. | 10 yunis |

***Tabla 5.*** Tabla de tarifas 4.

¿Puedes encontrar la forma que te ayude a cobrar a los clientes?

2) En este momento cambiamos la dinámica del trabajo y se propone un juego entre equipos. A cada miembro del grupo se le asigna un número y el profesor elige un número al azar y dos grupos. Los estudiantes a los que se les había asignado dicho número salen a competir a la pizarra. Uno de ellos hace de cliente y el otro de empleado de la oficina. El cliente puede proponer mandar un paquete con un determinado peso y aceptar o no lo que le cobren o también decir que tiene un determinado número de yunis y aceptar o no el peso que le permiten enviar. Mientras ellos compiten el resto de los compañeros no pueden hablar y se limitan a observar la situación. Se sacan a miembros de varios equipos durante 15 minutos. El profesor ejerce de árbitro al final de cada competición para asignar 1 punto al equipo ganador (a juicio de los estudiantes). Esta fase es clave y requerirá de intervenciones controladas y eficaces del profesor (generalmente basadas en las variables didácticas).

*Fase V. Institucionalización (20 min.)*

- Relaciona valores numéricos (expresados en forma tabular) con la fórmula de una función afín.
- Formular la noción de *función afín* en forma general, interpretando los coeficientes en términos de la situación propuesta y observando la bidireccionalidad de las mismas.
- Resalta la importancia del lenguaje algebraico para una comunicación más precisa.
- Introducir el concepto de *variabilidad*.

Con esta actividad se introduce al estudiante en el tema álgebra. A partir de este momento se puede continuar el temario teniendo en cuenta las situaciones, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentaciones previstos en el análisis previo. Detallar de forma completa dicho proceso supondría establecer un sistema de prácticas matemáticas que incluyera los distintos objetos matemáticos identificados (situaciones, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentaciones). Este objetivo excede a lo pretendido en este trabajo.

**Comentarios finales**

La noción de función afín puede jugar un papel central en la introducción y desarrollo de nociones, procedimientos y significados de objetos algebraicos en el primer ciclo de la ESO. Este hecho ha sugerido la necesidad de una ingeniería didáctica destinada a la elaboración de una situación de enseñanza que cumpliera una doble función: normativa o técnica y explicativa o científica. Como *instrumento técnico*, utilizada en procesos de instrucción efectivos; como *soporte explicativo*, destinada a la reflexión sobre las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica relativas a dichos procesos efectivos (y a otros que potencialmente pudieran darse) y al contraste del análisis realizado *a priori* (que ha fundamentado su elaboración y aplicación).

Hemos enmarcado la situación de enseñanza en los elementos del significado (situaciones, acciones, lenguaje, nociones, propiedades, argumentaciones) considerados fundamentales en la transición de la aritmética al álgebra en la ESO. Estos elementos nos han permitido establecer los conocimientos y estrategias de base fundamentales que posibilitarán a los alumnos iniciar una situación de acción y que determinarán el tipo de interacción con el medio subsiguiente (en situaciones de formulación y validación), que se supone hará evolucionar los conocimientos de los alumnos hacia el saber que se desea enseñar. Asimismo hemos determinado ciertos criterios de intervención controlada del profesor (de carácter pedagógico y didáctico).

Nuestro objetivo inmediato es realizar una experimentación de la situación que sirva de base para el contraste entre el análisis *a priori* y *a posteriori.* Puesto que en la descripción de los contenidos se ha utilizado el EOS, en el contraste será necesario tener en cuenta también dicho enfoque, que es formulado en términos de *idoneidad* de un proceso de estudio, esto es, de adecuación entre lo pretendido y lo efectivamente puesto en juego y logrado. Wilhelmi, Godino y Bencomo (2004) valoran los procesos de cognición e instrucción matemáticos según tres dimensiones: *epistemológica*, *cognitiva* e *instruccional.*

La valoración de la idoneidad epistemológica supone determinar la adecuación y los desajustes entre el significado institucional de referencia y el efectivamente enseñado. La valoración de la idoneidad cognitiva necesita determinar si las restricciones cognitivas de los alumnos y de recursos humanos, materiales y temporales disponibles permiten salvar la falla existente entre los significados personales iniciales y los significados institucionales que se desean enseñar. Por último, la valoración de la idoneidad institucional precisa de criterios que permitan establecer si las configuraciones y trayectorias didácticas que han tenido lugar permiten identificar conflictos semióticos y resolverlos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos disponibles, que determinan restricciones institucionales de carácter matemático y didáctico).

## Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3), 237-284.

Godino, J. D.; Font, V.; Contreras, A.; Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *RELIME, vol. 9(1)*, pp. 117–150.

Hernández Pérez-Muñoz, Mª L.; Jiménez García, E. (1999). *Matemáticas, 6º primaria*. Zaragoza: Luis Vives.

Madoz, E. G. (2006). *El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. Memoria del DEA*. Pamplona: Universidad Pública Navarra.

Lacasta, E; Madoz, E. G.; Wilhelmi, M. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *INDIVISA, boletín de estudios e investigación, Monografía IV*, pp. 79–90.

Van Dooren, W.; De Bock, D.; Verschaffel, L. (en prensa). Searching for the Roots of the Illusion of Linearity. *INDIVISA, boletín de estudios e investigación, Monografía IV*, pp. 115–135.

Wilhemi, M. R.; Font, V.; Godino, J. D. (en prensa). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques : réflexions sur la théorie de situations didactiques et l'approche ontologique et sémiotique. *Colloque international "Didactique: quelles références épistemologiques?"*. Bordeaux, France: AFIRSE et IUFM d´Aquitane.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D.; Bencomo D. (2004 septiembre). Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática*. Castellón: Universitat Jaume I y Real Sociedad Matemática Española.