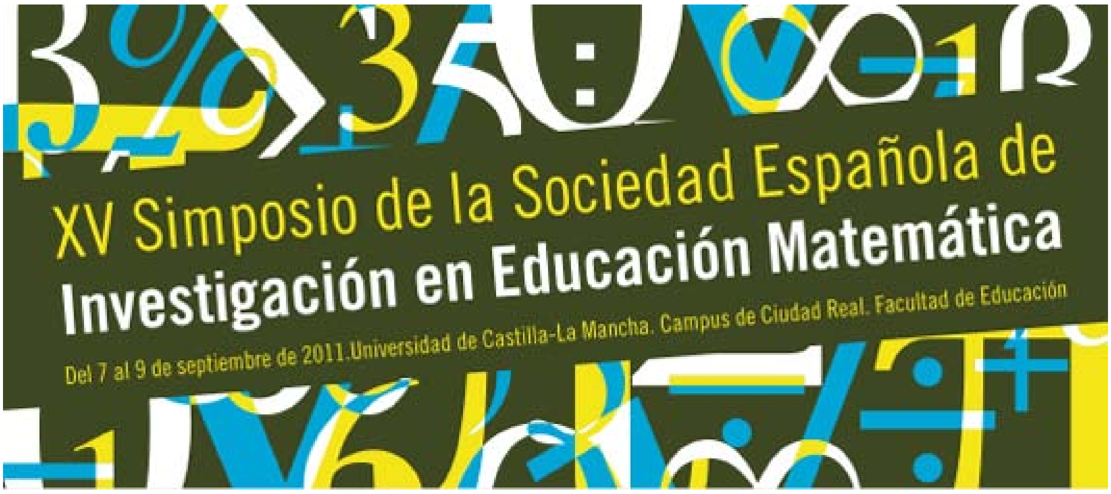


Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM

XV Simposio de la SEIEM

Margarita Marín Rodríguez
Nuria Climent Rodríguez (Eds.)

Ciudad Real 2012

Edita:

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)
© Margarita Marín Rodríguez y Nuria Climent Rodríguez

ISBN: 978-84-695-3413-7

Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica (DMDC)

Pensamiento numérico y algebraico (PNA)

Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor (DFP)

Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI)

PRESENTACIÓN

Una vez celebrado el décimo quinto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (XV SEIEM), en el campus de Ciudad Real de la Universidad de Castilla-La Mancha y entregado el libro de actas, con las ponencias y comunicaciones mostradas a lo largo del mismo, tenemos el privilegio como editoras de realizar y presentar a la comunidad educativa matemática este CDROM con las comunicaciones realizadas en los Grupos de Investigación de la SEIEM a lo largo de dicho Simposio.

Como es sabido, los integrantes de estos Grupos de Investigación se reunieron a lo largo del XV Simposio para exponer y debatir sobre las ideas expresadas en forma de comunicación oral, recogidas ahora en soporte escrito en este CD. Las discusiones surgidas de estos trabajos resultan beneficiosas y de utilidad para los investigadores, tanto noveles como expertos, debido al debate constructivo que se fomenta en estos grupos en el que participan estudiantes de doctorado, directores de Tesis Doctorales, etc.

Unos Grupos han estado más nutridos en cantidad de exposiciones que otros, pero todos coinciden en la calidad de las mismas.

Estos Grupos de Investigación y sus coordinadores han sido:

Pensamiento Numérico y Algebraico

Coordinador: José Luis Lupiáñez Gómez

Historia de la Educación Matemática

Coordinador: Alexander Maz Machado

Didáctica del Análisis

Coordinador: Ángel Contreras de la Fuente

Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor

Coordinador: Lourdes Figueiras Ocaña

Aprendizaje de la Geometría

Coordinador: Enrique de la Torre Fernández

Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria

Coordinador: José Mª Cardeñoso Domingo

Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica

Coordinador: Pilar Bolea Catalán

Investigación Matemática en Educación Infantil

Coordinadores: Carlos de Castro Hernández y Mequè Edo Baste

No queremos terminar esta pequeña presentación sin agradecer a Noelia Vállez Enano de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla La-Mancha campus de Ciudad Real, la ayuda prestada en la confección de este CDROM.

Margarita Marín Rodríguez

Nuria Climent Rodríguez

Editoras

GRUPO:

APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA (AG)

Coordinador: Enrique de la Torre, Universidade A Coruña

AG1- Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas. Rafael Ramírez Uclés, Pablo Flores Martínez y Enrique Castro Martínez. Universidad de Granada (España)

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN MANIFESTADAS POR LOS ALUMNOS CON TALENTO MATEMÁTICO EN TAREAS GEOMÉTRICAS

Rafael Ramírez Uclés
Pablo Flores Martínez
Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada. España

Resumen

En este trabajo presentamos un procedimiento para operativizar el registro de las habilidades de visualización puestas en juego por alumnos con talento matemático en tres sesiones de enriquecimiento curricular de contenidos geométricos. Este método permite determinar variables e indicadores para comprobar si el diseño de la intervención y la selección de actividades han motivado la manifestación de las habilidades de visualización y el análisis de los errores y las dificultades de su uso.

Palabras clave: habilidades de visualización, talento matemático, experimento de enseñanza

Abstract

In this paper we describe the procedure that we used to record at operational spatial visualization abilities that mathematical talent students use in three curricular enrichment sessions on geometrical aspects. This approach allowed us to determine variables and indicators to test the visualization abilities, mistakes and difficulties that have been revealed during the research.

Key words: visualization abilities, mathematical talent, visualization test, teaching experiment

Ramírez, R.; Flores, P.; Castro, E. (2012*)*. Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 11-26). Ciudad Real: SEIEM.

Marco conceptual y antecedentes

La importancia de atender a los alumnos con talento ha sido reclamada desde distintas organizaciones implicadas en la educación (MEC, 2000, 2006; NCTM, 2000; National Mathematics Advisory Panel, 2008). La OCDE y UNESCO inciden en la necesidad de atender a la diversidad y la National Council of Teachers of Mathematics en los Estándares (NCTM, 2000) considera a los alumnos con interés especial en matemáticas dentro del conjunto de alumnos a los que afecta su principio de equidad.

En la literatura especializada sobre el talento se manifiesta la diversidad existente en terminología y teorías que caracterizan a estos alumnos (Benavides, 2008). Passow (1993) resalta que los alumnos con talento poseen unas habilidades sobresalientes, en virtud de las cuales son capaces de un alto rendimiento. En el ámbito específico del talento matemático, a pesar de la variedad encontrada, se recogen listados de características idóneas para afrontar tareas matemáticas que no difieren esencialmente.

El enfoque que hemos elegido para atender a estos alumnos es determinar aquellos aspectos factibles de mejorar y relevantes en su desarrollo matemático. En un estudio clásico, Krutetskii (1976) concluye que la habilidad para visualizar relaciones matemáticas abstractas y conceptos espaciales geométricos no es necesariamente una componente en la estructura de las habilidades matemáticas. En estudios posteriores, se ha mostrado la escasa influencia de la visualización en el rendimiento matemático (Lean y Clements, 1981) y la preferencia de los alumnos con talento matemático por los estrategias no visuales en resolución de problemas de matemáticas (Presmeg, 1986). Para entender esta relación entre talento matemático y visualización, es necesario especificar qué elementos del talento matemático y de la visualización son los que se estudian, ya que la utilización de definiciones e instrumentos de medida diferentes puede conducir a distintos resultados (Bishop, 1980, 1983; Lean y Clements, 1981).

La importancia del papel de la visualización en las tareas de matematización ha sido señalada por numerosos autores (Arcavi, 2003; Clements y Battista, 1992; Guillén, 2010; Gutiérrez, 1996; Presmeg, 2006). Nuestra investigación se centra en detectar la visualización espacial en un entorno geométrico, por lo que utilizaremos el modelo presentado por Gutiérrez (1996) en el que unifica muchos de los desarrollos teóricos elaborados hasta el momento y consigue establecer un marco integrador. Gutiérrez (2006) entiende la visualización como *el conjunto de tipos de imágenes, procesos y* *habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos.*

En este modelo cada uno de los elementos señalados en la definición ocupa un determinado papel en la resolución de una tarea matemática (Gutiérrez, 1996). Las habilidades de visualización intervienen en todos los procesos que se llevan a cabo: transformación de la representación externa en imagen mental, formación de nuevas imágenes mentales y representaciones y comunicación de la respuesta. Centraremos nuestro interés en los procesos y habilidades de visualización, cuya importancia en la educación matemática ha sido reconocida por numerosos autores (Bishop 1983; Gutiérrez, 1996; McGee, 1979).

Del Grande (1987, 1990) realiza una recopilación de habilidades psicológicas necesarias para los procesos de visualización y selecciona siete de las habilidades físico-psicológicas relevantes al aprendizaje en matemáticas destacadas por Hoffer (1977) por su relevancia en el estudio de las matemáticas y la geometría en particular: 1) coordinación ojo-motor, 2) percepción figura-contexto, 3) conservación de la percepción, 4) percepción de la posición en el espacio, 5) percepción de las relaciones espaciales, 6) discriminación visual y 7) memoria visual.

Por habilidad entendemos los rasgos psicológicos individuales de una persona, que favorecen la rapidez y demuestran dominio en una actividad concreta, mientras que por destreza se consideran las acciones específicas en un campo concreto. Para analizar tanto habilidades como hábitos, o destrezas, hay que estudiar la forma en que se realiza una actividad, pues se juzgan ambos constructos usando los hechos y la forma en que las personas ejecutan la actividad. Al analizar la actividad desde el punto de vista de los rasgos psicológicos que son favorables a este dominio se realiza un análisis de la habilidad (Castro, 1995).

Ubicar actividades dentro de una actuación de enriquecimiento curricular en aspectos visualizadores puede favorecer que los alumnos con talento manifiesten sus habilidades de visualización, aborden con más éxito la resolución de tareas y superen sus errores y dificultades. Para aportar información más general que el estudio de casos particulares, consideramos necesario determinar elementos que nos permitan estudiar la puesta en juego de las habilidades de visualización cuando un grupo de alumnos con talento matemático se enfrentan a procesos de resolución de tareas que impliquen un alto componente visual. En esta comunicación describimos el procedimiento utilizado para operativizar el registro de las habilidades de visualización puestas en juego por estos alumnos.

Contexto

Los participantes en nuestro estudio forman parte del programa de Estímulo del Talento Matemático (ESTALMAT) en Andalucía Oriental (De Guzmán, 2002). El grupo con talento matemático estudiado está compuesto por 25 alumnos del segundo curso del proyecto ESTALMAT (20 niños y 5 niñas) con una edad media de 14,52 años y desviación típica 0,71 (rango 13-16). Cursaban en ese momento 2º de ESO (1 alumno), 3º de ESO (9 alumnos), 4º de ESO (14 alumnos) y 1º de Bachillerato (1 alumno).

Experimento de enseñanza

La investigación que estamos realizando se enmarca dentro de la metodología propia de un experimento de enseñanza transformativo y dirigido por una conjetura (Molina, Castro, Molina, Castro, 2011), que se ha llevado a cabo en tres fases: prueba piloto, tres sesiones de enriquecimiento y entrevistas personales.

En el análisis de las respuestas escritas de la prueba piloto, se ha realizado una primera operativización de las habilidades de visualización puestas en juego (Ramírez, Flores, Castro, 2010). A lo largo de la intervención se pretende estudiar el uso que hacen los alumnos de la visualización al trabajar sobre problemas geométricos en el plano y en el espacio, y aportarles elementos de razonamiento matemático para definir, argumentar y resolver (Ramírez, Flores, 2011). En la primera de las tres sesiones (titulada *Visualización: movimientos en el plano. Igualdad de figuras, unicidad*) los alumnos tienen que reconocer y definir los movimientos en el plano y utilizarlos en la resolución de un problema de identificación de estructuras equivalentes. Este trabajo previo en el plano podría aportarles conocimiento para resolver los problemas de rellenar el espacio y reconocer las propiedades de los poliedros, previstos para la segunda sesión (*Visualización: Poliedros que rellenan el espacio*). Finalmente, en la tercera (*Un viaje de ida y vuelta del plano al espacio*) se estudian analogías y diferencias entre tareas que relacionan el plano y el espacio.

A modo de ejemplo del análisis de estas actividades, ilustraremos el trabajo realizado con una de las actividades de la primera sesión:

El juego Constelaciones consta de unas piezas formadas por tres círculos coloreados unidos por dos segmentos, que se pueden fijar sobre una plantilla, ocupando cada círculo un punto de la plantilla. Se pueden colocar las fichas de manera que coincidan los círculos del mismo color, pero no pueden tocarse los segmentos. La finalidad del juego es obtener la estructura mínima (con el menor número de círculos visibles) que se puede obtener colocando todas las piezas distintas posibles. Existen dos modalidades de tablero, cuadriculado y hexagonal.

Actividad 1: Determina una estructura con el mínimo número de círculos utilizando 18 fichas y dibújala. Justifica que es una estructura mínima

Diseño de la recogida de datos

Para la recogida de datos disponemos de cuatro instrumentos: respuestas entregadas en las actividades escritas, grabaciones de audio de cada sesión y sus transcripciones, grabaciones de audio y vídeo de las entrevistas y sus transcripciones y observaciones de los profesores investigadores.

Se va a llevar a cabo un análisis de contenido de la información recogida en los textos. En el análisis de contenido se determinan las unidades de análisis en el texto a analizar y se establecen las categorías de análisis (Krippendorf, 1990). Como unidad de análisis de la recogida de información, se seleccionan fragmentos de texto escrito a partir de las intervenciones de los alumnos (respuestas escritas, transcripciones y observaciones). Para establecer las categorías de análisis hemos procedido de manera sistemática:

1) Prueba piloto
2) Identificación y formulación a priori de actuaciones relacionadas con las habilidades requeridas para resolver cada actividad (*categorías a priori por actividad*)
3) Análisis de las respuestas individuales

4) Revisión de las actuaciones relacionadas con las habilidades formuladas a priori y reformulación a posteriori (*categorías a posteriori para cada habilidad por sesiones*)

5) Elaboración de una formulación general de las actuaciones para todas las habilidades en las tres sesiones (*categorías para cada habilidad*)

6) Obtención de unos criterios de corrección para cada categoría en cada sesión.

Inicialmente, para cada una de las habilidades se realiza un estudio de las actividades que favorecen su manifestación. Por ejemplo, la habilidad Percepción figura-contexto (*reconocer una figura asilándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos*) se favorece a través de las actividades que comprendan: intersecar líneas o figuras, encontrar figuras escondidas o figuras solapadas, completar figuras, montar figuras ensambladas (tangram), identificar similitudes y diferencias e invertir figuras y contexto (Del Grande, 1987). Así, se establecen a priori las posibles manifestaciones de las habilidades para cada actividad, dando lugar a una determinación inicial de categorías que vienen determinadas por destrezas concretas, de lo que vemos un ejemplo en la Tabla 1.

Actividades	**Percepción Figura-Contexto**
Sesión 1 Actividad 1.- Encontrar la mínima estructura con 18 piezas	Comentar el proceso de formación a partir de una estructura menor.

Tabla 1: Ejemplo de categorías a priori que detectan la manifestación de la habilidad Percepción de la Figura-Contexto en la actividad 1 de la primera sesión

A continuación se ha comprobado si las manifestaciones concretas observadas en las respuestas de los alumnos se corresponden con las establecidas a priori y, cuando es necesario, se completan las categorías con las aparecidas a posteriori. A modo de ejemplo, véase como el alumno MC muestra en su respuesta la categoría planteada a priori, en la que busca una estructura formada por piezas, justificando cómo se obtiene a partir de la obtenida por menos piezas:

MC: *Suponemos que la de seis [piezas] es el cuadrado tres por tres, que era la más pequeña. Al colocar la de siete se puede solapar sólo un círculo y sobran dos. Si* *intentamos modificarla, se podría mover una de las fichas, sacaríamos un punto fuera de la estructura*

En su argumentación el alumno comenta el proceso de formación a partir de una estructura menor que era la manifestación esperada, pero también identifica elementos (en este caso círculos) dentro de la propia estructura, por lo que se añade un nueva categoría: *"Identificación de elementos (círculos) dentro de una estructura mayor"*

Tras el análisis de las tres sesiones con el procedimiento anterior, se determinan las manifestaciones correspondientes para cada habilidad, lo que nos da un sistema de *categorías a posteriori*, como se muestra en la tabla 2.

FC	Percepción figura-contexto
Sesión 1	Comentar el proceso de formación de una estructura a partir de una estructura menor Identificar elementos (círculos, segmentos) dentro de una estructura mayor
Sesión 2	Identificar elementos dentro de una estructura mayor Identificar lados, vértices y caras de una figura.
Sesión 3	Identificar elementos dentro de una estructura mayor Identificar lados, vértices y caras de una figura. Identificar tipos de caras (cantidad, distribución…)

Tabla 2: Definición a posteriori de las categorías correspondientes a la habilidad Percepción Figura-Contexto en las tres sesiones

Toda la información anterior se sintetiza en una tabla final de categorías (tabla 3) correspondientes a cada una de las habilidades y generalizables a las tres sesiones en la que no hemos considerado las habilidades coordinación ojo-motor y memoria visual, al ir asociadas a técnicas de dibujo y de recuerdo.

Habilidad	Categorías
Percepción figura-contexto	FC1: Utilización del proceso de formación de una estructura a partir de una menor FC2: Identificación de elementos (círculos, segmentos, vértices, lados, caras, ángulos) dentro de una estructura mayor

Conservación de la percepción	CP1: Utilización de criterios de igualdad: haciendo referencia a la forma o al tamaño, a los movimientos (giros, traslaciones, volteos) o a las distintas perspectivas. CP2: Identificación de elementos ocultos (círculos superpuestos, segmentos solapados, caras, vértices y lados que no se ven…)
Percepción de la posición en el espacio	PE1: Utilización de elementos de posición respecto al objeto o a uno mismo (sistema de referencia, coordenadas, atrás, adelante, arriba, cerca…) PE2: Identificación de movimientos (traslaciones, giros, volteos) entre dos figuras.
Percepción de las relaciones espaciales	RE1: Utilización de elementos de posición relativa entre dos objetos (dirección, orientación, paralelismo, secantes, coincidentes, perpendiculares, simétricos) RE2: Identificación de elementos entre el desarrollo plano y el poliedro.
Discriminación visual	DV1: Utilización de criterios de clasificación mediante semejanzas o diferencias. DV2: Identificación de semejanzas o diferencias entre figuras.

Tabla 3: Categorías correspondientes a las habilidades

La tabla 3 permite establecer una correspondencia entre las respuestas del alumno y la habilidad de visualización correspondiente. Esta relación nos determina un procedimiento para codificar las habilidades puestas en juego. Gracias a ello podemos expresar si se aprecia su empleo para obtener una solución correcta de la actividad, lo que codificamos indicando (0) ausencia, (1) uso incompleto y (2) uso correcto. En el uso incompleto de la codificación anterior también se considera el uso de la habilidad de visualización de una manera incorrecta. Para cada actividad se establecen los criterios de corrección en cada una de las categorías. Esta concreción permite una asignación homogénea de la puntuación para todos los alumnos, ya que se codifican las respuestas según la habilidad manifestada y su calificación. En la tabla 4, a modo de ejemplo, presentamos los criterios de corrección para la categoría FC1 en las tres sesiones (estos criterios hacen referencia a actividades concretas).

FC1	Criterios de corrección
Sesión 1	1: Proceso a partir de la estructura de seis fichas incompleto 1: Distinguir cuadrados más pequeños dentro de cuadrados mayores (incompleto) 2: Proceso de construcción a partir de una ficha 2: Proceso de construcción a partir de dos fichas (1 si incompleto)
Sesión 2	2: Afirmar que el cuadrado rellena el plano 2: Ocho cubos forman otro cubo 2: Unir esas partes lo rellenaría (1 si incompleto) 2: Lo mismo que en el plano añadiéndole altura (volumen) 2: Un poliedro de base un triángulo 2: Proceso de construcción (1 si es imprecisa la descripción) 2: Combinaciones correctas de piezas para dar otras. 2: Construir correctamente las figuras requeridas
Sesión 3	2: Sucesión de planos con polígonos que teselan 2: Rellena un cubo y el cubo rellena el espacio 2: Las partes rellenarían 2: Formar un hexágono a partir de un cuadrado

Tabla 4: Criterios de corrección para la categoría FC1

Utilizando los criterios anteriores, se completa una ficha individual en la que cada intervención del alumno se identifica con la categoría correspondiente, se codifica con 0, 1 o 2 y se registran los errores cometidos en el uso de la visualización. Aparece un ejemplo en la tabla 5.

	FC1	**FC2**	**CP1**	**CP2**	**PE1**	**PE2**	**RE1**	**RE2**	**DV1**	**DV2**
TP_3_1_1		2					2			
E_3_1_d	1									

Tabla 5: Fragmento de ficha del alumno para la recogida de información en una actividad

Al final de cada sesión, se realiza el recuento de unos y doses que el alumno ha obtenido en cada categoría, registrando el número y tipo de intervenciones. A partir de esta información es posible determinar indicadores individuales y del grupo para analizar el uso que se ha manifestado de cada habilidad, tanto de manera incompleta como correcta.

<u>Indicadores</u>

Como el número total de unos y doses de cada alumno es diferente según el número de intervenciones que realiza, hemos construido indicadores que permiten comparar entre alumnos y entre sesiones. Con este fin, para cada sesión, se divide el número de unos y de doses conseguidos entre el total de intervenciones que se han registrado del alumno (tanto en E: actividades escritas, como en TP: transcripción de la participación en clase, TD: transcripción del debate en grupo y O: observaciones de los investigadores). El resultado se multiplica por 100 para utilizar el valor en tanto por ciento del número de registros que tenemos del alumno redondeando el resultado con dos decimales. A modo de ejemplo, mostramos el cálculo para los porcentajes de las categorías FC1 y FC2 (Tabla 6).

Alumno	Intervenciones				Porcentaje unos y doses			
	E	TP	TD	O	FC1		FC2	
Sesión 1	10	0	0	1	27,27	9,09	0	63,64
Sesión 2	16	0	3	1	10	15	0	25
Sesión 3	17	0	4	0	0	0	4,76	23,81

Tabla 6: Ejemplo de cálculo de indicadores de porcentajes para FC1 y FC2 para un alumno

En el ejemplo, en la sesión 1, el alumno ha manifestado de manera incompleta la categoría FC1 en el 27,27 por ciento de las intervenciones que ha realizado. En cambio, en esta misma sesión, ha manifestado FC1 de manera correcta en el 9,09 por ciento de sus intervenciones. Como FC1 y FC2 son categorías relativas a la misma habilidad FC, se define el indicador *FCI* (FC Incompleto) como la media aritmética de los porcentajes relativos a las manifestaciones incompletas de FC1 y FC2 obtenidos anteriormente. De manera análoga se define *FCC* (FC Correcto) como la media aritmética de los indicadores relativos a las manifestaciones correctas de FC1 y FC2 (tabla 7).

Alumno	FCI	FCC
Sesión 1	13,6	36,36
Sesión 2	5	20
Sesión 3	2,38	11,9

Tabla 7: Ejemplo de cálculo del indicador FCI y FCC para un alumno

Los indicadores FCI y FCC nos aportan información sobre el comportamiento del alumno respecto a la habilidad Figura Contexto, cuantificando tanto el uso que hace de ella como la corrección con la que la utiliza. Análogamente se procede para los indicadores relativos a las otras habilidades. De esta forma tenemos un registro cuantificado de las habilidades visualizadoras que se han observado en cada alumno.

Para realizar apreciaciones globales de las habilidades de visualización de cada alumno del grupo, tanto de manera incompleta como correcta, se definen indicadores que las agrupan:

Indicador de Visualización Incompleta (V1): Se define como la media aritmética de los indicadores relativos a las manifestaciones incompletas de las habilidades (FCI, CPI, PEI, REI y DVI)

Indicador de Visualización Correcta (V2): Se define como la media aritmética de los indicadores relativos a las manifestaciones correctas de las habilidades (FCC, CPC, PEC, REC y DVC).

Indicador de Visualización (V): Se define como la suma de V1 y V2 y representa la media de los porcentajes en los que el alumno ha manifestado cada habilidad (independientemente de si lo ha hecho de manera correcta o incompleta).

Coeficiente de Visualización Correcta (CV): Se define como V2/(V1+V2) e indica el peso que tiene el Indicador de Visualización Correcta respecto al Indicador de Visualización, medido en porcentaje. Es un indicador de la corrección con que el alumno utiliza la visualización respecto al uso que hace de ella.

V1 y V2 aportan información sobre el uso de las habilidades de visualización que han manifestado los alumnos, tanto de manera incompleta como correcta, permitiendo comparar tanto el comportamiento individual en las diferentes sesiones como el uso manifestado por los diferentes alumnos. V y CV nos dan información del uso que han manifestado de la visualización y la corrección con que lo han hecho.

De forma análoga a la determinación de indicadores individuales, esta operativización permite establecer indicadores de visualización del total de los alumnos para valorar el comportamiento visual del grupo total de alumnos respecto a cada una de las habilidades.

Resultados

Esta codificación ha permitido registrar de modo operativo las habilidades visualizadoras que ha manifestado cada alumno en cada sesión, distinguiendo si lo ha hecho de manera correcta o incompleta. Además, ha permitido analizar las habilidades de visualización.

Disponemos de registros individuales para observar la evolución de cada alumno a lo largo de las tres sesiones y comparar el uso que hace de las habilidades de visualización en cada una de ellas. Esto nos permite establecer comparaciones entre su comportamiento visual en el plano y en el espacio, tanto de manera aislada como en actividades que los relacionan. Los indicadores V1, V2, V y CV establecen categorías para determinar el grado en que los alumnos utilizan las habilidades de visualización y la corrección con que lo hacen. Podemos clasificar a los sujetos según la variable bidimensional (V, CV), lo que nos permite diferenciar a los alumnos según el uso que han hecho de la visualización y la corrección que han manifestado.

Los indicadores del comportamiento del grupo nos permiten evaluar qué tipo de actividades han motivado el uso de determinadas habilidades de visualización y los errores y dificultades que se han cometido, obteniendo una información precisa para valorar el enriquecimiento curricular, por lo que se convierten en un elemento útil para poner en marcha el experimento de enseñanza. A partir de los indicadores de las tres sesiones se puede determinar la evolución de la conjetura que guía el experimento de enseñanza.

La cuantificación de los datos mediante variables e indicadores que toman valores entre 0 y 100 facilita la interpretación de los datos y su tratamiento estadístico para la obtención de resultados. Podemos determinar relaciones entre las variables dentro de una misma sesión: *en la sesión 1, V2 (porcentaje de manifestaciones correctas) es significativamente superior a V1 (porcentaje de manifestaciones incompletas). El 100 % de los alumnos ha manifestado las habilidades FC, CP, PE.* Y se pueden realizar comparaciones entre sesiones: *Los análisis indican que no existe correlación en V1 entre S1 y S2. FCI (puntúan más en FCI en S1 que en S2). El rendimiento de la sesión 2 correlaciona negativamente con V1, E y CPI.*

Conclusión

La operativización que hemos presentado ha permitido evaluar la evolución de la visualización, tanto individualmente como en grupo, a lo largo de las tres sesiones que conforman el experimento de enseñanza, ha facilitado determinar indicadores para las dimensiones relativas al qué y cómo debe enseñarse (Molina, 2006). Nos proporciona elementos para determinar qué tipo de actividades motivan la manifestación de las habilidades y la persistencia de los errores y dificultades en tareas concretas, y establece un diagnóstico para diseñar y evaluar el enriquecimiento curricular.

Las variables e indicadores que hemos definido determinan diagnósticos del uso de la visualización tanto a nivel individual como del grupo de alumnos con talento analizado, y el método utilizado facilita la comparación entre sujetos y entre sesiones. Además es posible determinar clasificaciones de los sujetos según el uso de la visualización, estableciendo tipologías que pueden ser analizadas en las entrevistas personales.

Este procedimiento nos ha aportado instrumentos de medición de las habilidades de visualización cuando se enfrentan a procesos de resolución de tareas matemáticas. Esto permite compararlos con otros instrumentos de medida de la capacidad visual, como los test visuales, y otros relacionados con la identificación del talento matemático, como test de inteligencia general y pruebas de rendimiento de resolución de problemas matemáticos. La información obtenida a partir de diferentes instrumentos de medida podría explicar los resultados aparentemente contradictorios en la relación entre talento matemático y visualización que son señalados por varios autores (Bishop, 1980; Lean y Clements, 1981). Consideramos que esta investigación podría aportar información interesante en el debate abierto para clarificar el papel que desempeña la visualización en la caracterización y atención del talento matemático ya que establece indicadores para relacionar aspectos relativos al talento matemático y la visualización, como son la diferencia entre capacidad y uso de la visualización, la relación entre talento matemático y rendimiento en tareas específicas y la clasificación de los sujetos según su grado de visualización (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1986)

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto del Plan Nacional de I+D+I con número EDU2009-11337 titulado "Modelización y representaciones en educación matemática".

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Bishop, A. (1980) Spatial Abilities and Mathematics Education: A Review. *Educational Studies in Mathematics 11*(3), 257–269.

Bishop, A. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.175-203). New York: Academic Press.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Editorial Comares.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.*), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 420-464). New York: MacMillan.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial Perception and Primary Geometry. En M. M. Lindquist (Ed.) *Learning and Teaching Geometry, K-12*, (pp. 127-135). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37*(6), 14-20.

De Guzmán, M. (2002). Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid. *La Gaceta de la RSME, 5*(1), 131–144.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?. En M.M. Moreno, A. Estrada, J.

Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference*, *1*, (pp. 3-19). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez. A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P., Ruíz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp.13-58). Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization.* Palo Alto, Calif.: Creative Publications.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Paidós Comunicación.

Krutetskii, V. A. (1976), *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, University of Chicago Press, Chicago.

Lean, G. y Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 267-299.

McGee, M. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin*, *86*(5), 889-918.

Ministerio de Educación y Cultura (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades.* Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Cultura.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Enseñanzas mínimas. Real Decreto 1631/2006. *BOE, 293*, 43053-43102.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 29* (1), 75-88.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*, U.S. Department of Education: Washington, D.C.

Passow, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En K. Séller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *Internacional Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftened. *Educational Studies in Mathematics 17*(3), 297-311.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205–235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Ramírez, R. Flores, P. (2011). Actividades que favorecen el uso de la visualización. En A. Pérez y M. Sánchez (coords.), *Matemáticas para estimular el talento* (pp. 241-256). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Ramírez, R., Flores, P., Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.

GRUPO:

DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS (DA)

Coordinador: Ángel Contreras de la Fuente, Universidad de Jaén

DA1- Significados del concepto de límite finito de una función en un punto puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato. Análisis conceptual de términos clave. (José Antonio Fernández Plaza, Juan Francisco Ruiz Hidalgo y Luis Rico Romero)

DA2- Procesos infinitos inherentes a la integral definida. (Astrid Cuida y Tomás Ortega)

DA3- Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. (Josefa Perdomo Díaz, Matías Camacho Machín y Manuel Santos Trigo)

SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO PUESTOS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE TÉRMINOS CLAVE

José Antonio Fernández Plaza
Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Luis Rico Romero
Universidad de Granada. España

Resumen

En este trabajo exponemos algunos de los resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con estudiantes de bachillerato, referido a los distintos usos que dichos estudiantes realizan de los términos con los que describen ciertas propiedades del concepto de límite finito de una función en un punto y que son sinónimos de “aproximar”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”. Se ha realizado, además, un análisis conceptual de dichos términos, el cual ha proporcionado un marco interpretativo para inferir qué significados asocian a los términos clave utilizados en sus respuestas.

Palabras clave: límite finito de una función en un punto, análisis conceptual, significados y argumentos verbales, estudiantes de bachillerato.

Abstract

In this paper we present some results of an exploratory study carried out with 16-17 aged students referring to the different uses students make of terms such as “to approach”, “to tend”, “to reach”, “to exceed” and “limit” which describe some properties of the finite limit of a function at a point concept. A conceptual analysis of such terms has provided an interpretive framework to infer the meanings that students associate with the main terms used in their answers.

Keywords: finite limit of a function at a point, conceptual analysis, meanings and verbal arguments 16-17 years old students.

Fernández-Plaza, J.A.; Ruiz-Hidalgo, J.F.; Rico, L. (2012*)*. Significados del concepto de límite finito de una función en un punto puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato. Análisis conceptual de términos clave. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 29-45). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

En este informe presentamos parte de un trabajo exploratorio y descriptivo (Fernández-Plaza, 2011) centrado en los significados que los estudiantes de bachillerato (16-17 años) asocian al concepto de límite finito de una función en un punto, estableciendo su conexión con una propuesta de innovación curricular sobre este campo de la matemática escolar, llevada a cabo durante el periodo de investigación tutelada del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato consistente en una unidad didáctica sobre este concepto matemático (Fernández-Plaza, 2010).

Como antecedentes hemos revisado investigaciones que han profundizado en la caracterización de los conflictos cognitivos ligados a los conceptos de número real, límite, la noción de infinito y la de continuidad de una función (Tall y Vinner, 1981; Davis y Vinner, 1986; Monaghan, 1991; Cornu, 1991; Tall, 1992) así como de su tratamiento dentro del campo de la innovación curricular (Romero, 1995; Blázquez, 2000).

Consideramos elementos fundamentales de este informe el análisis conceptual de términos clave, que delimita el significado y uso matemático en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001) y es útil para interpretar la concepción de los sujetos. Un segundo elemento fundamental es el análisis específico ejemplificado para un ítem del instrumento utilizado en esta investigación.

Problema de investigación

Como hemos mencionado, este estudio se ubica en otro más amplio (Fernández-Plaza, 2011) en el que nos proponemos describir:

- cómo los estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite finito de una función en un punto, y
- cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dicho concepto, analizando el significado de determinados términos claves que expresan diferentes facetas vinculadas al concepto de límite.

Estas expectativas quedan resumidas en el siguiente objetivo general:

"Explorar y describir los significados de la noción de límite finito de una función en un punto que los estudiantes (de bachillerato) muestran cuando realizan tareas de enunciado verbal, gráfico y simbólico"

Desglosamos el objetivo general en tres objetivos específicos:

O.1. Diseñar un instrumento para recoger información en registro verbal y simbólico referente al concepto de límite finito de una función en un punto.

O.2. Identificar los términos claves que emergen de los registros verbales de los estudiantes al abordar tareas de enunciado verbal y gráfico, realizar su análisis conceptual y establecer categorías para interpretar las respuestas obtenidas.

O.3. Inferir los significados que ponen de manifiesto los estudiantes cuando identifican propiedades simbólicas de gráficas de funciones de distinto nivel de complejidad referentes a límite finito de una función en un punto, límites laterales e imagen.

Marco teórico y antecedentes

Este estudio se sitúa en la agenda de investigación conocida como "Pensamiento Matemático Avanzado" (PMA) o *Advanced Mathematical Thinking*, tal como se presenta y considera en las publicaciones del grupo internacional Psychology of Mathematics Education (Gutiérrez y Boero, 2006, pp. 147-172). Algunos investigadores ponen de manifiesto la amplitud y ambigüedad de la expresión inglesa, que da lugar a diferentes interpretaciones o modos de abordar su estudio (Zaskis y Applebaum, 2007; Harel y Sowder, 2005; Selden y Selden, 2005). A su vez, existe un amplio acuerdo en cuanto a la dificultad de delimitar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1992, Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Zaskis y Applebaum, 2007, Edwards, Dubinsky y Mc Donald, 2005).

Azcárate y Camacho (2003) señalan cómo determinados procesos cognitivos caracterizan el PMA, aun no siendo exclusivos de él. Entre ellos destacan y adquieren mayor importancia en los cursos superiores *representar* y *abstraer* como procesos cognitivos psicológicos, y *definir, demostrar* o *formalizar* como procesos matemáticos.

Para establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas, estos autores, subrayan la importancia de las definiciones que son propias de las matemáticas avanzadas, mientras que en las elementales los objetos se describen apoyándose en la experiencia. Por tanto, la etapa educativa de bachillerato supone un periodo de transición en el que los estudiantes abordan con técnicas elementales contenidos matemáticos cuyo desarrollo histórico, epistemológico y didáctico merecen el estatus de avanzados.

Como en cualquier investigación sobre aprendizaje, es necesario un marco explicativo que describa e interprete cómo los estudiantes entienden, definen y utilizan determinados conceptos y procedimientos. Asumimos que la noción de significado de un concepto matemático según viene desarrollada por los trabajos de Rico (2007), proporciona un modelo interpretativo para dicha noción con un planteamiento más elaborado que el modelo cognitivo basado en la dualidad *imagen conceptual /definición conceptual* de Vinner (1983). El modelo que seguimos considera los sistemas de representación, los aspectos formales o referencias del concepto y los fenómenos que le dan sentido. De este modo nuestro análisis se desplaza, desde la consideración del simple manejo eficiente de una definición formal mediante representaciones adecuadas, hacia el estudio del conocimiento y uso de un concepto a través de los fenómenos que le dan sentido, que no se restringen a un dominio puramente matemático, sino que profundiza en otras áreas del mundo físico, cultural y social, De esta manera el modelo contempla el estudio de las capacidades de modelización y resolución de problemas.

Aportaciones relevantes de investigaciones previas

Tall (1980) enfatiza la riqueza y diversidad de procesos de paso al límite (*limiting processes)* clasificada en dos tipos, *procesos de paso al límite continuos*, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad, en los que subyace una idea de continuo, y *procesos de paso al límite discretos*, como ocurre con los límites de sucesiones o secuencias y series, las expansiones decimales, o aproximación de áreas de formas geométricas.

Tall identifica que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y, posteriormente, la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición conceptual dada. Los estudiantes conciben en su mayoría el límite como un proceso dinámico en vez de una cantidad numérica (Tall, 1980).

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) no consideran que el pensamiento sobre límites sea avanzado en su totalidad, dado que las técnicas particulares de cálculo de límites para ciertas funciones son actividades rutinarias que los estudiantes pueden dominar sin relativa dificultad, aunque realmente no comprendan su trasfondo formal, si bien Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) pone de manifiesto el conflicto existente entre las intuiciones de los estudiantes, cuya experiencia previa con los algoritmos aritméticos y algebraicos es explícita, y el proceso de cálculo del límite que carece de dicha cualidad.

En un trabajo más cercano al que se presenta aquí, Monaghan (1991) estudia la influencia del lenguaje sobre las ideas de los estudiantes acerca de los términos "tender a", "aproximarse a", "converger a" y "límite" , en cuanto a su uso referido a diferentes gráficas de funciones y los ejemplos con los que los escolares explican dichos términos, siendo una limitación el hecho de acotar a priori los términos claves que han de utilizar los escolares, en vez de posibilitar su uso libre y espontáneo e inferir los matices oportunos a posteriori, que es el enfoque que hemos adoptado para este caso.

Romero (1995) y Blázquez (2000) recogen los avances y limitaciones de los estudiantes frente a los conceptos de número real y límite, respectivamente. La definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega (2009).

Claros (2010), por último, avanza en la caracterización de fenómenos matemáticos relacionados con el límite finito de una sucesión, que se extraen de las definiciones intuitiva y formal a partir del análisis de libros de texto y producciones de los escolares.

Diseño del estudio

Desarrollamos en las siguientes líneas un estudio empírico en el curso 2010/2011 con estudiantes de bachillerato del I.E.S "La Sagra" de Huéscar (Granada).

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo. Es exploratorio ya que se ha planificado con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes con el fin de planificar una propuesta de innovación curricular sobre este campo de la matemática escolar, basada en datos y evidencias empíricas. El estudio es descriptivo puesto que pretendemos describir el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. La muestra es intencional y por disponibilidad; no pretende generalizar resultados en contextos más amplios, sino particularizarlos para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

Análisis conceptual de términos clave

Para el logro del objetivo de este estudio realizamos un análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”. La selección de estos términos es debida a los motivos siguientes:

7) Son términos que tienen un significado técnico y formal en matemáticas, pero también usos convencionales y coloquiales no vinculados con las matemáticas.
8) Aparecen de manera frecuente en la literatura revisada, tanto en la definición del concepto de límite como en la caracterización de las dificultades y errores asociados, poniendo de manifiesto conflictos que surgen entre los usos formales y coloquiales.
9) Han sido utilizados en los enunciados verbales de algunas de las actividades incluidas en el instrumento de recogida de datos de este estudio.
10) Los sujetos del estudio los emplean, junto con sinónimos, para expresar distintas interpretaciones del concepto de límite, ya sea de manera técnica (terminología adquirida por la instrucción mediada por el profesor, el libro de texto o el propio instrumento de recogida de datos) o informal (sus propias interpretaciones personales).
11) De acuerdo a la noción de significado que adoptamos, cada uno de los términos se refiere parcialmente a propiedades y modos de uso asociados al concepto de límite y, junto con otras nociones, contribuyen a delimitar su significado.
12) Por último, la conveniencia de fijar un marco interpretativo para analizar los usos y significados de dichos términos puestos de manifiesto por los sujetos de nuestro estudio.

En definitiva, este análisis conceptual previo permite ubicar el uso matemático de estos términos en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001), y es necesario para interpretar la concepción de los sujetos, si bien, en ocasiones sea necesaria información adicional.

Una revisión de los diccionarios de la Real Academia Española (RAE) (2001), el María Moliner (1998), el *Vocabulario Científico y Técnico* de la Real Academia de las Ciencias

(1990) y el Oxford Dictionary (2011), proporcionan las acepciones comunes y, en ocasiones, matemáticas que tienen cada uno de los términos: “aproximar”, “tender”, “rebasar”, “alcanzar” y “límite”; la revisión de algunas investigaciones permiten refinar las acepciones de manera apropiada para esta investigación.

“Tender” es “aproximarse progresivamente sin llegar nunca al valor” (RAE, 2001; Moliner, 1998), por tanto, expresa una forma peculiar de aproximación. Blázquez, Gatica y Ortega (2009) consideran que una sucesión de números se aproxima a un número si el error disminuye progresivamente, así, la sucesión $(\frac{1}{n})$ se aproxima a -1, pero consideran que una sucesión “tiende a un límite”, si cualquier aproximación al límite es mejorable por términos de la sucesión, luego la sucesión $(\frac{1}{n})$ se aproxima a 0 y tiende a 0, pero no tiende a -1. Así establecemos una diferencia entre estos dos términos.

Monaghan (1991) confirma tras la realización de su estudio que muchos estudiantes no distinguen entre “tender a” y “aproximarse” dentro de un contexto matemático.

Detectamos en la expresión “$f(x)$ tiende a *L*, cuando x tiende a a ” un conflicto a nivel de definición, dado que si x tiende a a, la variable x nunca puede ser igual a a, en consecuencia, $f(x)$ tiende a *L*, $f(x)$ nunca puede ser igual a *L* y la función constante $f(x) = L$ no tendría límite, lo cual contradice la definición formal de límite. Así la expresión correcta sería “$f(x)$ tiene por límite *L* cuando x tiende a a si…” o bien, “$f(x)$ tiene límite L en el punto a si…”. Este conflicto puede inducirse en la imagen conceptual de los estudiantes tal como relatan Tall y Vinner (1981).

“Alcanzar” es intuitivamente “llegar a” o “llegar a tocar” (RAE, 2001, Moliner, 1998, Oxford, 2011). Fernández-Plaza (2011) define “alcanzar” en el sentido en que una función *alcanza el límite* si el valor límite es la imagen del punto en el que se estudia el límite (continuidad); extendiendo su significado a que el límite sea el valor de cualquier otro punto del dominio

(no necesariamente la función ha de ser continua). Aunque inferimos que algunos escolares no consideran el valor de la función en el punto cuando afirman que el límite es inalcanzable, es decir, no esperamos que la continuidad desemboque necesariamente en la alcanzabilidad del límite.

Observamos que “rebasar” tiene un sentido coloquial de “quedar por encima de una cota superior” (RAE, 2001), excluyéndose la acepción “quedar por debajo de una cota inferior”. En este trabajo ampliaremos el rango de sentidos del término “rebasar”, de tal manera que diremos que *el límite de una función es rebasable* si podemos construir dos sucesiones monótonas de imágenes convergentes al límite, una creciente y otra decreciente, para convenientes sucesiones de valores de x convergentes al punto donde se lleva a cabo el estudio del límite (Fernández-Plaza, 2011). Es preciso notar que la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite finito de una función en un punto no tienen carácter general, sino particular y son independientes lógicamente dado que no existe ninguna implicación lógica entre ellas.

El término “límite” tiene acepciones coloquiales que interfieren en las concepciones de los escolares sobre dicho término, tales como la idea de fin, frontera y de irrebasable (RAE, Moliner, Oxford, op. cit.), mientras que en cuanto a su uso científico-técnico se refiere, en algunas disciplinas está relacionado con la resistencia de un material o el estado extremo en el que el comportamiento de determinados sistemas cambia bruscamente (Real Academia de las Ciencias, 1990).

Instrumento

El instrumento es un cuestionario con tres actividades de respuesta abierta y una actividad de respuesta cerrada, del cual se realizaron dos versiones distintas A y B que se pueden visualizar en Anexo I de Fernández-Plaza (2011).

Cada ítem abierto planteaba la opción de calificar como verdadero (V) o falso (F) el enunciado de una propiedad relativa al límite de una función en un punto y, a continuación, se pedía una justificación de la opción elegida.

A continuación, como ejemplo, se muestra uno de esos ítems, incluido en la versión A del cuestionario.

1. Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección: (Adapt. y trad., Lauten et al., 1994, p.229)

b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

La Tabla 1 resume los datos de los seis ítems de respuesta abierta de tipo verdadero/falso propuestos:

Cuestionario/tarea	Código ítem	Término(s) clave en el enunciado
A, tarea a)	A1.1.a	Movimiento de la función
A, tarea b)	A1.1.b	No rebasar
A, tarea c)	A1.1.c	Probar valores y alcanzar
B, tarea a)	B1.1.a	Acercarse pero no alcanzar
B, tarea b)	B1.1.b	Aproximación tan precisa como se quiera
B, tarea c)	B1.1.c	Acercarse arbitrariamente

Tabla 1: Términos clave de los ítems de tipo verdadero/falso del cuestionario.

Muestra

La muestra la forman 36 estudiantes de primer curso de Bachillerato (16-17 años) matriculados en la asignatura Matemáticas I. Según la información suministrada por el profesor titular responsable de la asignatura, quien autorizó la implementación del cuestionario al grupo, los estudiantes han recibido instrucción previa sobre los conceptos de límite de una función en un punto y de límite de una sucesión durante el curso 2009/2010 antes de la aplicación del cuestionario. Consideramos esta circunstancia favorable para nuestra investigación ya que, según el modelo cognitivo *imagen conceptual/definición conceptual* (Vinner, 1983), dará lugar a distintas alternativas según que los sujetos hagan un uso técnico más o menos elaborado de la terminología, definiciones y ejemplificaciones del concepto de límite introducidas en el aula, al menos de manera temporal, o bien describan con una terminología informal y personal sus interpretaciones del conocimiento recibido en la instrucción, pudiendo en algún caso hacer prevalecer sus concepciones originales.

Durante el trabajo de campo 18 sujetos respondieron a la versión A y otros 18 sujetos a la versión B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas.

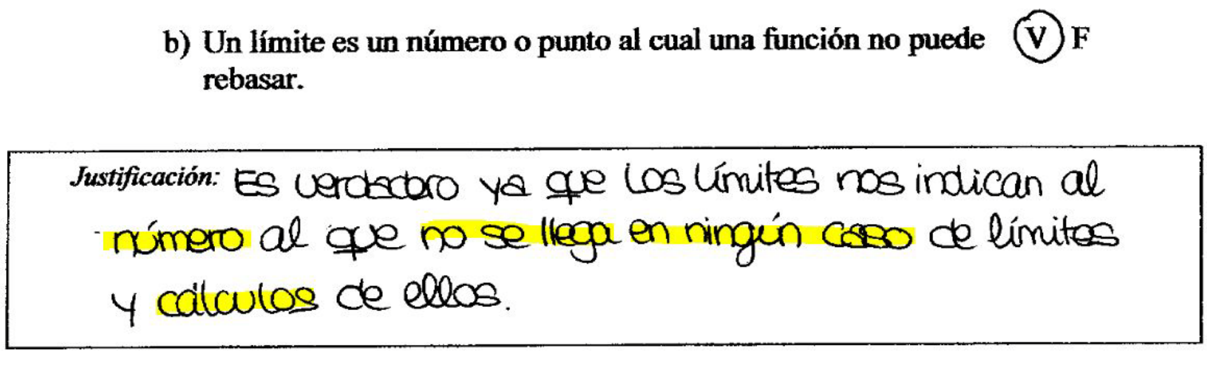
Resultados

El análisis de los datos se ejemplifica para la Tarea 2 (ítem A1.1.b), antes enunciada. Dicho análisis se llevó a cabo en dos fases:

Primera: uso y recuento de términos clave en los registros escritos.

En la primera fase identificamos y contabilizamos los usos de los distintos términos clave en los registros escritos proporcionados por los estudiantes, sin hacer inferencias de significado. Las agrupaciones por términos clave las realizamos según la revisión de términos antes descrita. No se ha requerido a los estudiantes que definan los términos clave sino que los utilicen para justificar un juicio sobre una propiedad del límite de una función, sin explicar cuáles significados atribuyen a dichos términos. De ahí que nos centremos, en primer lugar, en su presencia y en el uso que les dan en tales juicios; con la información disponible no es posible inferir si los estudiantes distinguen entre “aproximarse”, “acercarse” y “tender”.

La Figura 1 ejemplifica el uso de los términos clave “rebasar” y “alcanzar” hecho por un alumno al responder a la cuestión. La siguiente tabla muestra el recuento de los usos que se realizaron de términos que estaban relacionados con los términos “rebasar” y “alcanzar” en el ítem seleccionado para este informe y que dieron lugar a tres grupos de respuestas, según se refirieran únicamente a rebasar, alcanzar (véase Figura 2), o a ambos caracteres (Grupo mixto).


b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Es verdadero ya que los límites nos indican al número al que no se llega en ningún caso de límites y cálculos de ellos.

Figura 1. Respuesta al ítem A1.1.b con término clave “no llegar” incluida en el grupo Alcanzabilidad.

La Tabla 2 muestra las frecuencias con que los alumnos han utilizado los términos clave, alcanzabilidad y/o rebasabilidad, para caracterizar el valor del límite, junto con las descripciones del proceso de convergencia por términos como *llegar* o *aproximarse.*

Grupos	Términos clave	Nº de respuestas
Alcanzabilidad	Llegar	1(Afirm.) / 2 (Neg.)
	Aproximarse/no llegar	2
Rebasabilidad	Rebasar	1
	Sobrepasar	1
Mixto	Aproximarse/no tocar/no rebasar	1
Otras/NSNC		10
Total		18

Tabla 2: Grupos de respuestas y frecuencias alcanzadas en el uso de términos clave en el ítem A1.1.b

Se ha detectado una frecuencia alta de referencias a la alcanzabilidad (6 de 8 válidas) cuando se requería a los sujetos que solamente argumentaran sobre rebasabilidad (2 de 8 válidas), esto nos permite conjeturar que para estos alumnos la (no) rebasabilidad del límite se debe, principalmente, a su no alcanzabilidad.

Un análisis completo y detallado sobre el uso de los distintos términos clave para los diferentes ítems se recoge en Fernández-Plaza (2011, pp. 35-41).

Segunda fase: discusión del uso de los términos clave.

Descripción de las categorías de respuesta. El análisis de términos clave permite clasificar las diferentes respuestas en varias categorías. En Fernández-Plaza (2011) se seleccionan unas respuestas representativas sin precisar las categorías. En esta comunicación refinamos ese análisis ejemplificándolo con el ítem A1.1.b.

Detectamos dos ideas clave en el enunciado:

1ª Objeto; se identifica que tipo de objeto es un límite:

Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar

2ª Propiedad; se destaca una característica asociada a uno de los significados de la noción de límite:

Un límite es un número o punto al cual una función **no [se] puede rebasar**

La cuestión se plantea en términos de aceptar o rechazar la propiedad de no rebasabilidad del límite de una función en un punto. Las ideas de fin, de frontera y de irrebasable, son propiedades establecidas en el uso común y coloquial del término límite, recogidas en los diccionarios (Fernández-Plaza, 2011, pp. 19 y 20). Se trata aceptar o rechazar esta propiedad para el límite de una función en un punto, junto con el tipo de argumentos que la justifican.

Este ítem pone el énfasis en una propiedad del objeto; es decir, trata de discriminar si los estudiantes consideran el límite como una cota superior (o inferior, según el caso) de la función. No existe restricción en el dominio, por lo cual la variedad de argumentos puede ser más amplia de lo esperado. Excluimos aquellos argumentos que se refieren al valor infinito del límite, que no es objeto de nuestro estudio.

Contemplamos dos perfiles opuestos y, dentro de cada perfil, destacamos distintos matices, algunos de los cuales establecen una subordinación de la no rebasabilidad del límite a su no alcanzabilidad, no contemplada en el enunciado ya que se trata de propiedades independientes puesto que no existe implicación lógica entre ellas. La cuestión de la rebasabilidad introduce en algunos casos la cuestión de la continuidad debido a que el valor del límite de la función se considera no alcanzable, aunque este aspecto no esté planteado en la pregunta.

En general los argumentos propuestos por los escolares se ajustan a dos opciones o perfiles:

(I) Argumentos que afirman que el valor del límite no es rebasable; en este caso la mayoría de los alumnos destacan el valor del límite como inalcanzable. La afirmación sobre el carácter rebasable e inalcanzable es general (I.1);

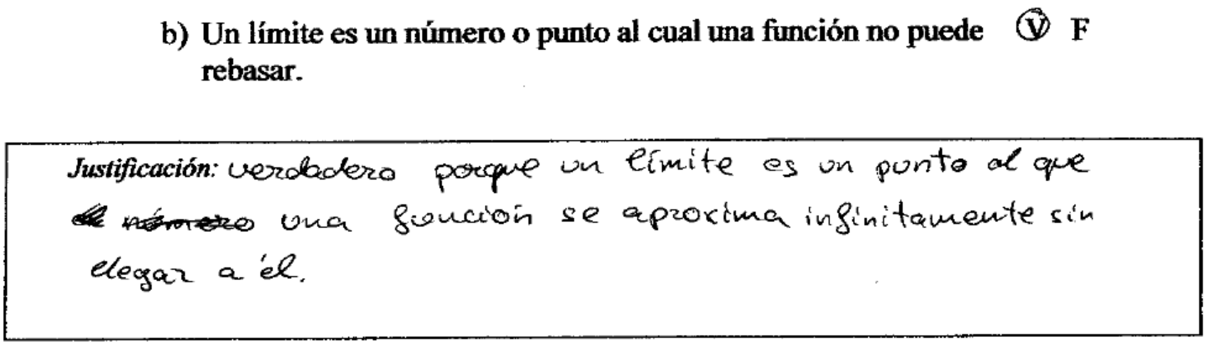
(II) Argumentos que justifican que el valor del límite es rebasable en casos particulares, de hecho, se proponen ejemplos donde el límite es rebasable. Dentro de este perfil encontramos un sujeto que considera el límite alcanzable en determinadas ocasiones (II.1).

Nuestra interpretación de las respuestas aportadas por los alumnos del cuestionario A al ítem A1.1b y recogidas en el Anexo II de Fernández-Plaza (2011), según los dos perfiles antes mencionados relativos a la rebasabilidad del límite, queda como sigue:

- **Perfil (I) (Valor del límite no rebasable en caso general)**: 9

  - **Subperfil (I.1) (Valor del límite inalcanzable en caso general):** 6 de 9

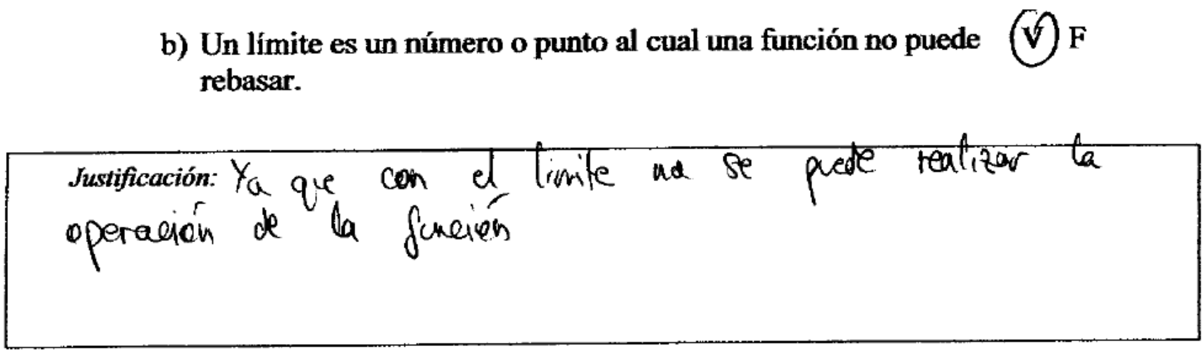
Podemos reconocer dos motivos por los que estos sujetos sostienen la inalcanzabilidad del límite: Proceso numérico infinito (5 casos, figura 2) y posible exclusión del punto donde se estudia el límite (A14) (1 caso, figura 3). Además, inferimos de las respuestas que la convergencia al límite ha de ser estrictamente monótona, necesariamente.



b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: verdadero porque un límite es un punto al que ~~el número~~ una función se aproxima infinitamente sin llegar a él.

Figura 2. Respuesta de tipo I.1 debido a proceso numérico infinito



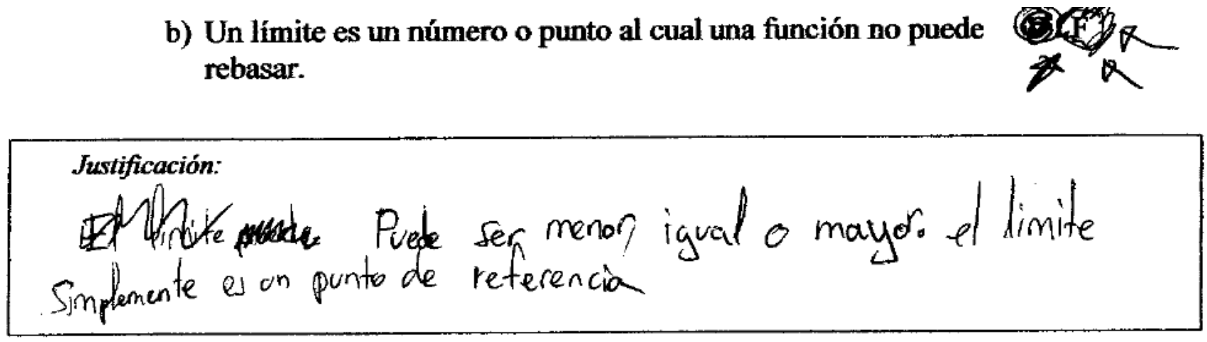
b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Ya que con el límite no se puede realizar la operación de la función

Figura 3. Respuesta de tipo I.1 debido, posiblemente, a la exclusión del punto donde se toma el límite.

- **Perfil (II) (Valor del límite rebasable en casos particulares)**: 5

  - **Subperfil (II.1) (Valor del límite alcanzable en casos particulares):** 1 de 5 (Figura 4)


b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

Justificación:

~~El límite puede~~ Puede ser menor igual o mayor. el límite Simplemente es un punto de referencia

Figura 4. Respuesta de tipo II.2 que considera el límite alcanzable y rebasable en casos particulares, a juzgar por la expresión “puede”.

- **Excluidos:** 2 (No argumentan), 1 (referencia a límite infinito)

En síntesis, lo que discrimina los distintos tipos de perfiles es el carácter general o particular de la rebasabilidad del límite. La no alcanzabilidad del límite se considera causa principal de su no rebasabilidad, y el carácter particular de la rebasabilidad y la alcanzabilidad se deduce por el uso de ejemplos. Conjeturamos con vistas a una futura planificación de una experiencia de aula que las respuestas del primer perfil pueden venir inducidas por un uso inadecuado de ejemplos donde la convergencia es estrictamente monótona y el valor del límite es, de hecho, una cota superior y, por tanto, inalcanzable, con lo cual es de esperar que excluyan de su razonamiento la imagen del punto donde se está haciendo el estudio, incluso si ésta coincide con el límite.

Conclusiones

El análisis conceptual ha permitido, por un lado, reconocer posibles concepciones debidas al uso coloquial y cotidiano de los términos clave que inducen errores en la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Por otro lado, el análisis conceptual también ha servido para describir los perfiles empleados para interpretar las respuestas de los estudiantes.

De los resultados obtenidos del análisis del uso de términos clave concluimos que los estudiantes han utilizado un lenguaje poco elaborado y preciso, caracterizado por un uso amplio de la terminología proporcionada por los ítems del cuestionario, aunque mezclado con algunos términos sinónimos proporcionados que son originales. El análisis detallado de las categorías de respuesta para el ítem A1.1.b, con el que hemos ejemplificado el estudio, pone de manifiesto la persistencia del carácter no rebasable y no alcanzable del límite, confirmando la fuerte influencia que tiene el uso coloquial e informal del término límite en las concepciones de los escolares reconocida por Cornu (1991), Esto contribuye al cumplimiento de parte del objetivo específico O.2.

El instrumento diseñado ha permitido recoger información y realizar un análisis satisfactorio, aunque con algunas limitaciones que una adecuada revisión y secuenciación de las tareas puede subsanar; se satisface así la consecución del objetivo O.1.

El objetivo O.3 vinculado a la descripción del modo en que los estudiantes relacionan expresiones simbólicas con la gráfica de funciones con distinto nivel de complejidad, se aleja de la finalidad de este informe y está relacionado con otra actividad (Pregunta 2 Cuestionario B) cuyo análisis desarrollamos en Fernández-Plaza, (2011, pp. 52-55), destacando como conclusión principal, que salvo la existencia de contradicciones lógicas, que consideramos como indicadores de complejidad de las gráficas, en general hacen buen uso de las expresiones simbólicas a las que están cotidianamente acostumbrados.

Referencias Bibliográficas

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, pp. 135- 149.

Azcárate, C., Camacho M. y Sierra M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En Ortega del Rincón, T. (Coord.) *Actas del III Simposio de la SEIEM*. Valladolid.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), 12*(1), 145-168.

Claros, F.J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.*(pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconceptiones Stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de Funciones.* Memoria final del Máster universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas (especialidad de matemáticas). Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Ant_Fernandez.pdf

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio.* Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf

Gray E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115-141.

Gutiérrez, A. & Boero, P. (eds.) (2006): *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Sense Publishers: Rotterdam, Holanda.

Harel, G. & Sowder L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical thinking and learning*, *7*(1), 27-50

Lauten,A.D., Graham,K. & Ferrini-Mundy,J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(2), 225-237.

Moliner, M. (1998). *Diccionario del uso del español.* (2ª Ed, Vol. 2). Madrid: Editorial Gredos.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Oxford (2011). *Oxford Dictionaries.* Oxford: Oxford University Press. Disponible en: http://oxforddictionaries.com. Consultado [24-06-2011].

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española*.(22ª Ed). Madrid. Disponible en http://www.rae.es/rae.html.Consultado [24-06-2011].

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.).*Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*.(pp. 179-193). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L. (2007). *Sistema de Significados de un Concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Selden A. & Selden J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

Tall D.O (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170-176.

Tall, D.O & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*,*12*, 151- 169.

Tall, D.O (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In Grouws D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, New York, 495-511.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *14*(3), 293-305.

Zaskis, R. & Applebaum M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME).* Working group 14, 2389-2397

PROCESOS INFINITOS INHERENTES A LA INTEGRAL DEFINIDA

Astrid Cuida
Tomás Ortega
Universidad de Valladolid. España

Resumen

Presentamos un estudio exploratorio realizado con estudiantes de primer año de las Licenciaturas en Matemáticas y Físicas de la Universidad de Valladolid que cursan la asignatura de Análisis Matemático, examinando la comprensión de procesos infinitos subyacentes al concepto de Integral Definida a través de un cuestionario para determinar errores relacionados con el razonamiento de estos procesos. Así mismo analizamos una entrevista realizada a las profesoras de la asignatura para contextualizar la eficacia académica de los estudiantes frente al concepto de integral. Finalizamos este documento señalando las líneas de investigación en curso.

Palabras clave: proceso infinito, integral definida, comprensión.

Abstract

We presented an exploratory study conducted with first year students of on Mathematical and Physics Grade at the University of Valladolid enrolled in the course of mathematical analysis. We reviewed the understanding of infinite processes behind the concept of Integral via a questionnaire to determine errors related to the reasoning of these processes. We analyzed too an interview made to the teachers of the subject to contextualize the academic effectiveness of students beside the concept of integral. We finished this paper pointing out the lines of research in progress.

Keywords: infinite process, definite integral, understanding.

Cuida, A.; Ortega, T. (2012). Procesos infinitos inherentes a la integral definida. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 47-64). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

La motivación que nos ha impulsado a desarrollar este estudio surge de un problema que nos encontramos en las aulas de las instituciones de educación superior: la dificultad que tienen los estudiantes para comprender el concepto de integral definida. En realidad, la mayoría de los estudiantes no llegan a adquirir una comprensión real del concepto de integral definida, y, en el mejor de los casos, se conforman con desarrollar habilidades y técnicas formales para solucionar los problemas de esta materia que se les plantea resolver, y nosotros pensamos que puede ser debido a la incomprensión de los procesos infinitos asociados. Éste es el primer trabajo de investigación que presentamos y nuestro propósito es indagar las dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de los procesos infinitos y, por ende, en el concepto de Integral Definida. Para tal fin, se hace necesario determinar el significado del concepto *proceso infinito* en el contexto de la integral definida, investigar la relación entre los procesos infinitos y el concepto de integral definida, determinar el grado de dificultad que suscita en los estudiantes la aplicación de los procesos infinitos en el desarrollo del concepto de integral y determinar el tipo de problemas que se relacionan con el manejo de los procesos infinitos.

Nuestra hipótesis inicial es que la idea matemática que permite entender de una manera profunda el concepto de integral definida, que a su vez justifica y permite un mejor desarrollo de las habilidades formales, es la introducción de la integral definida de Darboux a partir de los procesos infinitos inherentes a su construcción. Justamente los teoremas, propiedades y reglas asociadas a la Integral Definida (al igual que en la derivada) permiten aplicar resultados sin tener que recurrir al concepto propiamente dicho, que pasaría por tener en cuenta los procesos infinitos.

En el presente trabajo se da cuenta y se hace referencia a los diferentes tipos de integral surgidos en la historia. El trabajo continúa y el análisis de los datos nos ha permitido rediseñar los cuestionarios de los alumnos atendiendo a las reflexiones derivadas del estudio de los documentos. Este mismo año se ha experimentado con alumnos de la Universidad de Salamanca y se va a ampliar el estudio a Universidades Colombianas.

Antecedentes y metodología

Desde hace más de tres décadas se han venido realizando diversos estudios relacionados con la comprensión que tienen los estudiantes del concepto de integral definida. Turégano (1998) ha localizado las causas subyacentes a tales dificultades en los terrenos epistemológico, didáctico y psicológico. En un estudio reciente, Mahir presenta una investigación que realizó con un grupo de estudiantes, relacionada con el funcionamiento conceptual y procedimental de la teoría de la integración (Mahir, 2009); en ella concluye que los alumnos no tienen un entendimiento conceptual satisfactorio del concepto de integral, y señala además que aquellos que poseen un entendimiento conceptual adecuado también tienen éxito en las acciones procedimentales. Muchos investigadores han considerado el tópico de la integración, y han informado sobre la falta de flexibilidad de sus estudiantes y su inhabilidad para realizar las conexiones necesarias entre los conceptos/ideas y su falta de entendimiento de los procesos cognitivos subyacentes. Por ejemplo Orton (1983) estudió el conocimiento de la integración en 110 estudiantes, la mayoría de matemáticas y explicó cómo los estudiantes tenían problemas con el razonamiento que había detrás de los métodos de integración, particularmente cuando calculaban áreas acotadas por curvas. Ferrini-Mundy & Graham (1994) hallaron un contraste bien marcado entre la habilidad para utilizar las aproximaciones algorítmicas en problemas rutinarios y el entendimiento subyacente al concepto de integral. Estos autores determinaron además que esas concepciones conflictivas permanecían dentro del desarrollo del cálculo de manera rutinaria, sin que algo llegase a alterarlas, al parecer conviviendo separadas en dos contextos diferentes: el geométrico y el algebraico. Por su parte, Norman & Prichard (1994) sugieren que las intuiciones geométricas acerca de la integración podrían llegar a constituirse en obstáculos cognitivos para la comprensión del concepto. Selden, Selden & Mason (1994) manifestaron que inclusive los buenos estudiantes de cálculo en muchas ocasiones no logran solucionar problemas no rutinarios. Su estudio mostró que los alumnos exhibieron una tendencia a no hacer uso del cálculo, preferían utilizar técnicas aritméticas y algebraicas para resolver los problemas de cálculo, inclusive al utilizar métodos de cálculo elemental que podrían ser inadecuadas. Bezuidenhout y Olivier (2000) revelan en su estudio cómo algunas concepciones inapropiadas del concepto de integral, formaban parte de los esquemas conceptuales de algunos estudiantes universitarios. Por ejemplo percibían la 'integral' como el área entre la gráfica de la función y el eje horizontal (un obstáculo que ya había sido localizado por (Turégano, 1998) y posteriormente ratificado por (González-Martín, 2006)). Se puede observar que son ya muchos los estudios que evidencian las dificultades, obstáculos y errores que giran en torno a la comprensión del concepto de integral. En Czarnocha (2001) y Orton (1983) se identifica a la falta de comprensión del concepto de límite de una sucesión (aunque desde dos perspectivas distintas) como un obstáculo para el aprendizaje del concepto de integral. Otras de las dificultades observadas (González, 2006, pp. 113) es que se aprecian concepciones meramente operativas de la integral definida. En su estudio Orton (1983) al realizar el análisis de los cuestionarios detectó muchos errores relacionados con el manejo del símbolo ∞ y afirma que, en general, no se dedica tiempo al aprendizaje de los límites. Distintos autores han señalado un conjunto de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático como son el límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos de derivada e integral (Azcárate, 2003). Estudios profusos relacionados con la caracterización y causalidad de las dificultades, obstáculos y errores inherentes en la comprensión del concepto de límite y la determinación de propuestas didácticas para solventarlas (Sierpinska, 1987; ; Tall, 1992; Cornú, 1992; Blázquez y Ortega, 2001; Claros, 2007) han arrojado importantes resultados que optimizan el entendimiento del estudiante, el conocimiento establecido por la comunidad matemática y los valores pedagógicos que el profesor incorpora en su quehacer como docente a la hora de trabajar la noción de límite. Se han desarrollado estudios relacionados con el concepto de proceso infinito. Tall (1980) trabajó con el proceso infinito de 'paso al límite', Tirosh (1998) con el proceso de subdivisión, Tirosh (1999) y Tsamir (1999) la comparación, (Ely, 2007) procesos de iteración, Garbin (2007) procesos geométricos, y también procesos de aproximación, de paso al límite, de recursión, de división, autosemejanza, Sacristán (1998) sucesiones y series infinitas, Mamona-Down (2001) sucesión de objetos geométricos (curvas zigzagueantes) y la medición de estos objetos; Dubinsky et. Al. (2008) procesos iterativos, y (Gardiner, 2003) en su libro presenta un examen detallado de algunos procesos infinitos, y realiza un análisis minucioso de algunos procesos específicos. En Tall (1992, ya se ofrecen algunas perspectivas para la realización de investigaciones relacionadas con algunas dificultades de los estudiantes en la comprensión de los procesos infinitos y, por su parte, (Scaglia & Coriat, 2003) caracterizaban obstáculos epistemológicos relacionados con el proceso infinito sugerido por las infinitas cifras decimales de la escritura posicional de algunos números construibles.

Como mencionamos anteriormente ésta es una primera etapa exploratoria en la consecución de un estudio más amplio en la cual hemos realizado un análisis cualitativo dentro de una metodología de Investigación-Acción. Consideramos una muestra por disponibilidad. Uno de los objetivos fijados en este trabajo de investigación consiste en indagar sobre el conocimiento que tienen los alumnos sobre los procesos infinitos que subyacen al concepto de Integral Definida y dado que estos procesos están supeditados a otros conceptos matemáticos fuertemente relacionados con la definición de la integral, se impone trabajar cuanto sea posible con estudiantes que tengan un “buen nivel matemático”. Tuvimos en cuenta la forma de aproximación al concepto de integral definida, en el sentido de contar con la asignatura que estudiara con más profusión los conceptos previos a su estudio (sucesiones, límites, continuidad, derivación, convergencia, series), y, en esta dirección, los alumnos de las Licenciaturas de Física y Matemáticas son quienes trabajan de una manera más seria (teóricamente hablando) estos temas. Igualmente, la viabilidad de realizar en condiciones más cómodas y asequibles el trabajo en estas licenciaturas resultaba más favorable y, por último, la disposición y buena actitud colaborativa de las profesoras encargadas de las asignaturas, dio por sentada la decisión de iniciar este estudio. En la experiencia participó un promedio de 25 estudiantes que son aquellos que siguieron asistiendo de manera habitual a las clases teóricas pasado el primer cuatrimestre.

Previo conocimiento de las ventajas que ofrece un análisis cualitativo en una primera etapa de investigación como la que estamos adelantando, decidimos realizar algunas entrevistas en el desarrollo de nuestro estudio, una de ellas dirigida a las profesoras que impartían la asignatura de Análisis, que incluía 12 preguntas relacionadas con la dialéctica de trabajo de los estudiantes dentro y fuera del aula, y, sus puntos de vista acerca de los razonamientos que suelen seguir sus alumnos frente a los problemas relacionados con los procesos infinitos inherentes al concepto de integral Definida. La otra encuesta, dirigida a los estudiantes de manera escrita, constaba de 6 preguntas, que indagaban sobre la comprensión que tenían los alumnos de algunos procesos infinitos subyacentes al concepto de integral de Definida, y, además permitía examinar el contexto escolar propio de cada estudiante. Interesados en recoger la mayor cantidad de información, la investigadora asistió como observadora, a todas las clases que se impartieron en el desarrollo del tema de la integral definida; y se complementó el trabajo con los apuntes de clase y los contenidos relacionados que las profesoras presentaron en el aula. Por otra parte, tuvimos en cuenta la manera en que se presentan los procesos infinitos relacionados con la integral definida, en los libros de texto referenciados en la bibliografía del programa de Análisis, y otros adicionales.

Teoría de la Integración

Uno de los tópicos principales en la teoría de funciones es la teoría de la integración con sus numerosas interconexiones. El desarrollo de las ideas matemáticas clásicas y modernas de la noción de integral está íntimamente ligadas con los problemas de áreas o la determinación de funciones primitivas.

Los griegos utilizaron la geometría para calcular diversas áreas "simples" dando lugar al método de exhausción de Eudoxo (~408 a.C.-~355 a.C.) y Arquímedes (~287 a.C.-~212 a.C.), un proceso de límite poco refinado que ajusta el área mediante unas sucesión de triángulos no superpuestos por exhausción. De esta manera calcularon por ejemplo las áreas del círculo y de secciones de la parábola. Sin embargo, como desconocían la notación algebraica ni se planteaban el cómo se podía calcular el área bajo una curva de una función elemental.

Habría que dar un salto hasta Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) no obstante, la integración moderna entra en escena con la definición integral dada por Cauchy (Boyer, 1969, pp. 648) en 1823 y se ha considerado como la primera definición[1] de una integral que satisface las exigencias del rigor. Posteriormente Riemann en 1967 da una definición igual a la de Cauchy, excepto que el valor de la función se escoge arbitrariamente en cada intervalo de la partición y no en el extremo izquierdo de cada uno de ellos. Por otra parte, a diferencia de los argumentos de Cauchy, Riemann considera el conjunto de todas las funciones "*integrables*" (funciones a las que se les puede aplicar el proceso de integración) y estudia las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea integrable. De aquí, ya se podía pensar en el conjunto de funciones integrables en el sentido de Riemann (digamos R-integrables) y en las no R-integrables. En 1875 Darboux dio una definición de integrabilidad equivalente a la de Riemann, a partir de lo que se conoce como "*sumas superiores e inferiores*" y, en este mismo año, pero de manera independiente el matemático inglés H. J. S. Smith obtuvo un resultado similar al de Darboux. En 1892 Camille Jordan dio una definición geométrica de la integral de Riemann (Pesin, 1970 pp. 37) mediante la introducción explícita del concepto de conjunto medible. La integral de Riemann no era del todo satisfactoria[2], por ejemplo muchas funciones importantes no eran R-integrables[3] y, aún, para funciones integrables se tornaba complicado demostrar algunos teoremas de convergencia con

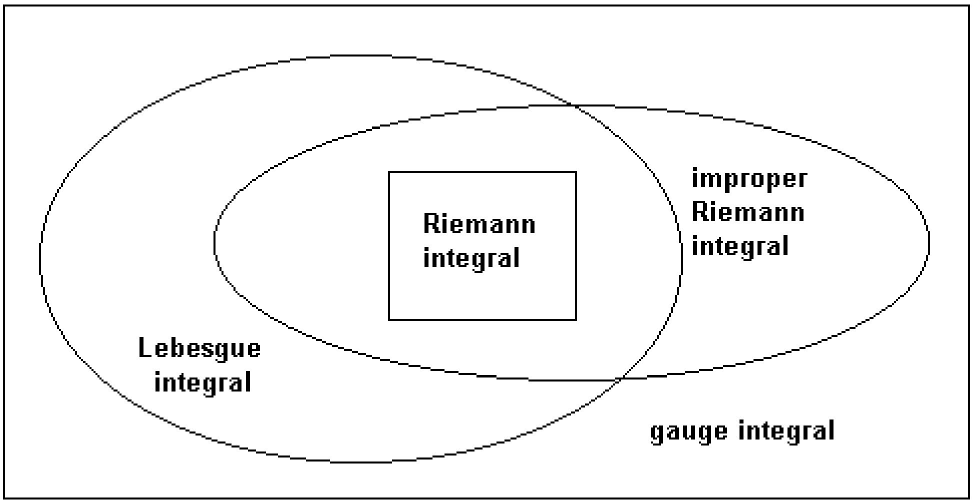
[1] Definida para funciones continuas en un intervalo cerrado.
[2] en lo que se relacionaba con los teoremas de convergencia y el conjunto de funciones integrables.
[3] Un ejemplo es la conocida función de Dirichlet.

herramientas asociadas a la integral de Riemann. A comienzos del siglo XX, nace la primera teoría de la integración genuina a manos del matemático francés Henri Lebesgue quien con su tesis doctoral en 1902, logró superar algunas de las limitaciones que presentaba la integral de Riemann. La integral de Lebesgue, más general que la integral de Riemann, se formula con base en la teoría de la medida y reconoce en la nueva definición de integral una potente herramienta que logra superar algunos de los problemas generados en las definiciones precedentes. La teoría de la integración de Lebesgue, vendría a convertirse en el modelo de todas las teorías modernas de la integración; los cimientos conceptuales de la integral definida yacían en la medida de los objetos geométricos, y así lo expresa[4] el propio autor en su tesis doctoral (Lebesgue, 1902, pp. 232). Posteriormente Denjoy (1912) y Perron (1914) ofrecieron unas nociones de integral equivalentes entre sí, pero más generales, sólo que demasiado complicadas. Cuatro décadas más tarde, Henstock (1955) y Kurzweil (1957) encontraron de manera independiente una formulación mucho más simple que la de Denjoy-Perron, conocida como la integral de Henstock-Kurzweil o la Gauge-integral, con una idea significativamente más simple que la de Lebesgue y que se acerca mucho más a una generalización de la integral de Riemann, por eso recibe también el nombre de integral generalizada de Riemann.

Aquí vista esta evolución, es fácil aventurar que el proceso teórico no está aún cerrado.

En el diagrama que se presenta a continuación, mostramos las relaciones existentes entre los tipos más básicos de integrales, considerando únicamente integrales de funciones de valor real sobre un intervalo [a, b].

[4] "*… no hay inconveniente para definir la integral de una función continua como el área de un domino plano; igualmente este método tiene la ventaja de conducir a una definición de integral de una función discontinua y acotada como medida de un cierto conjunto de puntos*". Esta es la definición geométrica, que adopto en el capítulo II; se la puede incluso reemplazar por una definición analítica. La integral se presenta, como el límite de una sucesión de sumas muy análogas a aquellas que se considera en la definición de Riemann.



Objetivo de la investigación

Esta investigación, en realidad, pretende dar un primer paso hacia la búsqueda de significación de una base teórica encaminada al estudio de la comprensión de los procesos infinitos inherentes al concepto de integral definida en estudiantes universitarios. Como punto de partida, indagamos acerca de la conceptualización y manejo que tienen los alumnos de los procesos infinitos que subyacen al concepto de integral definida, conceptualización que a tenor de la evolución de las teorías de la integral definida, presumimos que no es nada sencilla. Son muchos los interrogantes que han motivado la consecución de este trabajo y, aunque nuestro estudio dará respuesta apenas a un par de ellos, hemos querido compartir algunos de los que más adelante conducirán hacia una investigación que ampliará nuestros resultados.

- ¿Qué nivel de comprensión tienen los estudiantes de los procesos infinitos?
- ¿Cuáles dificultades, obstáculos y errores, relacionados con los procesos infinitos, emergen en los alumnos al estudiar la integral definida?
- ¿Qué elementos intuitivos manejan los estudiantes cuando estudian los procesos infinitos?
- ¿Existen conflictos entre los criterios intuitivos que usan los estudiantes en el uso de los procesos infinitos relacionados con el concepto de integral definida y las definiciones formales de la teoría?

- ¿Los estudiantes identifican adecuadamente la transición de los procesos infinitos a la algebrización de los mismos?
- ¿Qué niveles de comprensión del concepto de integral definida poseen los estudiantes, y cuál es la relación de estos niveles con la comprensión de los procesos infinitos?

Resultados y Discusión

La entrevista que se llevó a cabo con las profesoras de la asignatura de análisis I se desarrolló de manera conjunta en un ambiente bastante informal. La encuesta que se les entregó con al menos una semana previa a la entrevista, constaba de 12 preguntas que, por una parte, pretendían caracterizar a sus estudiantes para tener referencias respecto del nivel de los estudiantes y, por otra, obtener información sobre el tiempo (y la calidad) de la dedicación al estudio de la asignatura.

El interés en los dos aspectos que hemos mencionado, está marcado por el objetivo que se tiene de contar con estudiantes que nos permitan evidenciar de una manera más puntual el conocimiento y trabajo que han realizado en lo que re refiere a los procesos infinitos relacionados con la integral definida, y, evidentemente, el poder determinar estos aspectos depende del nivel del estudiante y el desempeño que muestra en la asignatura. La entrevista, como ya lo hemos mencionado anteriormente, se trascribió íntegramente y, a manera de notas de pie de página, se puntualizó el contenido de valor significativo de las respuestas, con la descripción de las consideraciones pertinentes. Un fragmento de una aparte de la entrevista es la que mostramos en la imagen del anexo A. en donde se denotan con [D] y [N] las intervenciones de las dos profesoras entrevistadas y, de la cual mencionamos algunas de las apreciaciones que se establecieron luego de un análisis exhaustivo:

- Se ha podido evidenciar que la propia definición de proceso infinito ha supuesto una dificultad. En general se pueden apreciar nociones, o creencias que se dan de manera inductiva a través del diálogo pedagógico, pero, en ningún caso una definición formal. De hecho las profesoras mostraron un alto nivel de abstracción a la hora de hablar de procesos infinitos, sin embargo, no se aprecia claridad respecto de su definición; un ejemplo de ello se percibe en esta afirmación que hizo la Dra., [D]:

…por ejemplo para mí el caso quizás, el ejemplo mejor es el de las series, en la que tú pasas de la sucesión de sumas parciales (cada suma parcial es una suma de un número finito de términos) a lo que es la serie...que es, por un lado la sucesión de sumas parciales, pero por otra parte también se estudia si esa sucesión tiene límite o no, cuando dices si la serie converge o no converge. En este sentido podría hablarse de suma infinita, entonces este podría ser el ejemplo mejor para este curso.

en donde a través de un ejemplo trata de definir de forma inductiva lo que es un proceso infinito.

- El diálogo pedagógico que se suscitó en torno al interrogante relacionado con la definición de proceso infinito, permitió observar cómo las profesoras trataron de definir el concepto no sólo con distintas estrategias, sino también desde distintas perspectivas. Así hubo momentos en que las profesoras interpretaban los procesos pensando en los alumnos y no en el concepto, y esto se ve reflejado en la última respuesta de la entrevista, en la que se afirma:

… Pero es la forma intuitiva...como cuando tú les das una sucesión para la cual parece que es el límite de esta sucesión, aunque no les hayas dado la definición de límite. Claro, en el concepto de integral lo primero que manejan es el concepto de superior e inferior de un conjunto. Porque tú les hablas de las sumas de Darboux, sumas finita, y, luego, consideras el conjunto de todas las sumas inferiores y consideras el superior de ese conjunto; y el conjunto de sumas superiores y el inferior de ese conjunto. Entonces, bueno, yo creo que ahí no se ve tan claro el proceso infinito, si claro es un conjunto de infinitos elementos.

El total de estudiantes que respondió a la encuesta fue de cinco. Lo que supone un 20% del total aproximadamente. El cuestionario se entregó a todos los estudiantes con la especificación de ser totalmente voluntario el que la respondieran. Se les dejó un margen de siete días para la entrega de la encuesta ya cumplimentada. El número total de preguntas fue de seis. Las respuestas que dieron los alumnos se transcribieron en su totalidad, escribiendo las posibles interpretaciones en notas de pie de página, se realizó un análisis de las mismas. Cabe anotar que a la entrega de las entrevistas, las Doctoras D. y N. comentaron que los cinco estudiantes que cumplimentaron las encuestas, son los alumnos más regulares de las clases, y que, además, son los que 'más rinden', así pues, es obligatorio considerar que, la de los estudiantes selección (en principio, no planeada) coincide con aquellos que mantienen constancia y compromiso con el trabajo del curso, y que, en general, tienen buen desempeño académico (que corresponde a la quinta parte del total de estudiantes). En las dos imágenes de los Anexos B. y C., mostramos algunas de las respuestas de dos estudiantes, Alberto y Beatriz. Se han transcrito con el fin de ganar en claridad y para explicitar el proceso de análisis utilizando las notas a pie de página. Sin embargo, se reproduce otro escaneo de las respuestas de los alumnos para que se pueda apreciar el rigor de las mismas (véase, Anexo D.). Del análisis del cuestionario escrito cumplimentado por los alumnos, se desprenden ciertas evidencias de algunas deficiencias significativas que tienen los estudiantes en la comprensión del concepto de integral definida. Para precisar señalaremos las siguientes cuestiones:

- Los alumnos muestran poco uso de razonamientos intuitivos, y tendencia a generalizar un proceso que se adecua a un problema y, evidencian la falta de comprensión de conceptos que interactúan en la solución del mismo.
- Los alumnos tienden a utilizar la tesis para solucionar el problema, al efectuar sustituciones obvian en los desarrollos que efectúan, las condiciones e implicaciones sobre el dominio de la función.
- El manejo de las propiedades de los números reales como cuerpo completo, ordenado totalmente y que satisface el axioma del extremo superior (o extremo inferior), refleja las lagunas conceptuales que los estudiantes tienen sobre estos conceptos.
- Los estudiantes desconocen lo que es un proceso infinito. La idea intuitiva que pueden tener tampoco es clara, y en ocasiones contrasta con el propio significado.
- Hay una ausencia manifiesta de significado (y manejo) de los procesos infinitos inherentes a los conceptos de partición, sucesión, serie, límite y convergencia, entre otros, que son herramientas fundamentales para entender el concepto de integral.

- Se observa que ninguno de los estudiantes sugirió el uso de la definición del concepto de proceso infinito para la realización de la encuesta[5], pese a la generosidad en el tiempo que se ofreció para que lo cumplimentaran. De acuerdo con las respuestas, se manifiesta un desconocimiento total de su definición, o una noción intuitiva del concepto, en el mejor de los casos.
- No determinan la forma en que se relacionan los conjuntos infinitos que tratan, ni los procesos infinitos que subyacen a estas relaciones.
- Se habla de infinito potencial cuando en realidad se está trabajando con el infinito actual.

El Futuro de nuestra investigación

Como hemos mencionado anteriormente, este es una primera etapa de exploración en la consecución de respuestas a los interrogantes que nos han surgido a la hora de plantear los objetivos de la investigación que está en curso. Nuestras primeras observaciones han evidenciado la necesidad de estudiar con profusión la relación existente entre la comprensión de los procesos infinitos y la comprensión del concepto integral definida. Por otra parte determinar si existen conflictos entre los criterios intuitivos que poseen los estudiantes en el uso de los procesos infinitos. Igualmente esperamos que en el desarrollo de nuestra investigación podamos determinar si los estudiantes identifican adecuadamente la transición de los procesos infinitos a la algebrización de los mismos.

Referencias bibliográficas

Bezuidenhout, J.; Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME24)*, vol. 2, 73-80, Japón.

Azcárate, C.; Camacho, M. (2003). Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. 10(2), 135-149.

Blázquez, S.; Ortega, T. (2001). Rupturas en la Comprensión del concepto de Límite en Alumnos de Bachillerato. *Aula*, Vol.10, 117-133.

[5] Acción natural en la consecución de una respuesta a cualquier problema matemático.

Boigues, F. (2010). Una propuesta de descomposición genética para la integral definida en estudiantes de ingeniería., En A. Contreras de la Fuente y L. Ordóñez (Eds.), *Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático***,** pp. 42-61. Universidad de Jaén.

Boyer, C. (1969). *Historia de la Matemática*. Madrid : Alianza. Versión de Mariano Martínez Pérez.

Camacho, M.; Depool R.; Socas, M. (2010). La integral de Riemann. Interpretación de los errores de aproximación utilizando un CAS1. En A. Contreras de la Fuente y L. Ordóñez (Eds.), *Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático***,** pp. 62-74. Universidad de Jaén.

Claros, F. J.; Sánchez, M. T.; Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. PNA, 1(3), 125-137.

Cornù, B. (1992). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, 153-166. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Dubinsky, E.; Weller, K.; Stenger, C.; Vidakovic, D. (2008). Infinite Iterative Processes: The Tennis Ball Problem. **Honorary Invited Paper** in *European Journal of Pure and Applied Mathematics.* http://www.ejpam.com/?q=vol-1-no-2

Ely, R. (2007). Nonstandard models of arithmetic found in student conceptions of infinite processes. In Lamberg, T., & Weist, L. R. (Eds.) *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.

Ferrini-Mundi, J.; Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding of limits, Derivatives, and Integrals. In J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning.* MAA Notes 33, 31-45. Washington DC: MAA.

Gardiner, A. (2003). *Understanding Infinity: The Mathematics of Infinite Processes*. Courier Dover Publications, 2003.

González-Martín, A. S. (2006). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. . *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*. 40, No. 2, 201-211.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear down on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Norman, F. A.; Prichard, M. K. (1994). Cognitive obstacles to the learning of calculus: a Krutetskiian perspective. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results*, Mathematical Association of America Notes 33, 63–78.

Orton, A. (1983) Students' understanding integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Pesin, I. (1970) *Classical and modern integration theories.* Academic Press. New York

Sacristán, A. (1998). Espirales y fractales: visualización y estudio de sucesiones infinitas. *Memorias del Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática*, México DF.

Scaglia, S.; Coriat, M. (2003). Dos conflictos al representar números reales en la recta**.** *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, (6)1, 132-150.

Selden, J., Selden, A.; Mason A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, Mathematical Association of America Notes 33, 19-26.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Souto, B.; Gómez, I. (2010). Comprensión visual y concepto de integral en la enseñanza universitaria. En A. Contreras de la Fuente y L. Ordóñez (Eds.), *Jornadas de investigación en Didáctica del Análisis Matemático***,** pp. 80-94. Universidad de Jaén.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias* 16(2), 233-249.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170–176 (1980). Recuperado Noviembre 2008 de http://www.davidtall.com/.

Tall, D. (1992). *Students' Difficulties in Calculus*, Presentación plenaria en el *Working Group 3*, *7th International Congress on Mathematics Education* (ICME7), Québec (Canadá).

Anexo A.

Fragmento de la entrevista a las profesoras

- ¿Dado que los estudiantes tienen con antelación los apuntes de clase, suelen prepararla?[1]

  [*N*] Pues, No[2].

  [*D*] Yo pienso que lo de preparar la clase con antelación no creo que lo haga ninguno. Los ejercicios que a lo mejor les planteamos en clase, a lo mejor se les da una indicación para que no digan de entrada[3]...no me pongo con ello, y bueno, algunos parece que sí que se lo han mirado un poco, luego ya que les haya salido o no...,pero muchos yo creo que, la verdad, no. Luego por las preguntas que no hacen, yo diría que no la preparan con antelación[4].

- ¿ Qué entienden por un proceso infinito[5]?

  [*N*] Yo, para mí un proceso infinito es el número real, cuando empieza[6]. El número natural ya es un proceso infinito[7], el primero de todos[8].

  [*D*] Yo para mí, bueno, pues un proceso que te permite pasar de una situación con un número finito de elementos[9] a un conjunto o a un algoritmo en el cual no es así[10]...

  [*N*] Claro, o sea que tú ya el principio de inducción pues ya para él[11] es un proceso infinito[12].

[1]Por los detalles de la dialéctica de la clase y los niveles de participación se puede determinar si los estudiantes han preparado su clase; *'toda lección bien preparada es una lección bien adaptada'* Jacoulet, M.

[2]Respuesta categórica que niega cualquier tipo de manifestación que revele algún indicio de que los alumnos tienen por lo menos la intención de preparar la clase.

[3]Esta es una buena estrategia para fomentar el interés por el trabajo en y fuera de la clase.

[4]Una buena estrategia para determinar el grado de preparación de una clase por parte de los alumnos.

[5]El concepto de Proceso Infinito no es fácil de establecer, de hecho Gardiner (Gardiner, 2003, pp. 4) afirma que: *de los procesos infinitos apenas se tiene nociones 'intuitivas'*.

[6]Se puede evidenciar el alto nivel de abstracción subyacente a la definición de la profesora Nieto, pues víendo el número real como el límite de una sucesión de racionales el proceso infinito que está relacionando es el proceso de paso al límite de una sucesión .

[7]El número natural visto como elemento de una sucesión.

[8]Identifica a los naturales como el cimiento de la construcción de los números reales.

[9]Una partición con un número finito de elementos, por ejemplo.

[10]El de las posibles particiones del intervalo $[a, b]$, o el algoritmo de sumar 'infinitamente'

[11]El expresarse en tercera persona es un indicio de que está pensando en los alumnos y su entendimiento más que el proceso en sí; su tarea docente se ve caracterizada por un entusiasmo que se deja ver apasionante.

[12]De hecho, con este principio, a través de procesos (sumar, medir, comparar, iterar, reemplazar, etc...) se demuestra que un resultado se cumple para un número contable e infinito de números.

Anexo B.

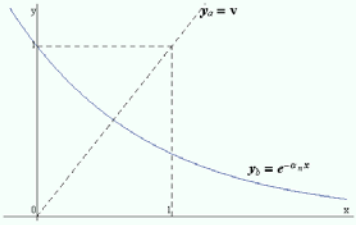


Figura 1: Gráfica complementaria a la respuesta de Alberto

Algunas respuestas de Alberto

Ver Gráfica (**??**)[1]. Derivamos ambas funciones para ver que en $(0,1)$ sus derivadas son constantes. $y_a{}' = 1$ (creciente);$y_b{}' = \frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}}$(decreciente para$\alpha_n x \geq 1$)[2]
$\frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_n x}(-\alpha_n) = 0$[3]$\Leftrightarrow \alpha_n = 0$ ó $e^{-\alpha_n x} = 0$ (Imposible)[4]

Si $\alpha_n = 0$[5] no se considera un proceso infinito[6], ya que α_n sería una constante. Evaluamos las funciones en 0 y 1:

$$y_a(0) = 0 \qquad y_a(1) = 1,$$
$$y_b(0) = e^0 = 1 \qquad y_b(1) = e^{-\alpha_n} = \frac{1}{e_n^{\alpha}} < 1 \quad \text{si} \quad \alpha_n > 0.$$

$\Rightarrow \exists P \in [0,1]$. Aplicando la propiedad de Darboux sabemos que entre 0 y 1 la función y_a toma todos los valores de entre $[0,1]$ e y_b toma en ese mismo intervalo todos entre 1 y c, siendo $c < 1$, por tanto como la derivada primera no cambia de signo en algún punto entre $(0,1)$ habrán de cortarse[7].

---

[1] El planteamiento visual del problema es correcto..

[2] En realidad es decreciente para todo α_n puesto que $e^{\alpha_n x} > 0$ siempre. Parece que además relaciona el decrecimiento con el valor del cociente y no con el signo.

[3] Parece que desconoce el concepto de cociente de funciones (o razón) y la definición de nulidad: $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ y por otra parte, $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. En síntesis, hay desconocimiento de los elementos lógicos de la aritmética de funciones.

[4] Si la idea es hallar los ceros de la ecuación $\frac{-\alpha_n}{e^{\alpha_n x}} = 0$, entonces para determinar el signo de la derivada (que es totalmente innecesario ya que esto se deduce de las propiedades de cuerpo y orden de los reales y de las características de la dunión exponenecial) vemos que al respecto no concluye nada.

[5] Es evidente que el alumno no tiene claro que α_n es un elemento 'dado' de una sucesión no negativa de números reales y no un elemento del dominio de la función. Parece que no comprende el enunciado en toda su extensión.

[6] Aquí se observa cómo el estudiante relaciona los procesos infinitos con un conjunto que no puede tener tan solo un elemento.

[7] La justificación carece de claridad. Falta explicitar por qué el hecho de que o cambie el signo de la primera derivada implica la existencia del punto y por otra parte, qué evidencia la unicidad del punto.

Anexo C.

Algunas respuestas de Beatriz

- No he hallado otra solución. Se podría haber resuelto[1] $e^{-\alpha_n \beta_n} - \beta_n = 0$ para todo $\alpha_n > 0$, y observar que siempre $\beta_n \in (0,1)$, pero no he podido resolver la ecuación.

- En el problema se define una sucesión infinita cualquiera de términos positivos, después se define una sucesión de funciones, donde cada función queda definida por cada término de la sucesión anterior, además cada función relaciona los infinitos números reales con otros números reales[2].

  En la solución se aplica Bolzano para las infinitas funciones en 0 y $x \to \infty$ y se observa cambio de signo, luego se ve que $\frac{d(f_n - id)}{dx} < 0$, $\forall n$ y $\forall x$, así se ve que sólo hay una solución para β_n en cada función de la sucesión; además como todas las funciones están acotadas en $[0,1]$, la β_n[3] también lo está. Se utiliza el concepto de infinito constantemente.

- La Integral Definida entre a y b, entendida como[4]

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)$$

  [5] sólo requiere de un proceso infinito[6] ya que se trata de una sucesión infinita[7] de números reales; si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no se requieren más procesos infinitos.

[1] Parece que el alumno considera a β_n como incógnita de una ecuación y trata de resloverla aplicando la tesis. Sin embargo, como dicha ecuación es trascendente, no se puede resolver por cuadraturas y, por tanto tendría que probar que se cumplen las hipótesis del teorema para tener la seguridad de que existe un punto fijo.

[2] Directamente está clarificando los conjuntos infinitos y los que se relacionan entre sí. Lo que no detalla es la forma en que se relacionan, o los procesos infinitos que subyacen a estas relaciones.

[3] ¿En qué sentido se puede hablar del acotación de un número real? El conjunto de los β_n también es un conjunto infinito, y lo que se debe entender en cada caso es si se habla de un elemento del conjunto (que es lo que parece) o se clarifica que es el conjunto. El texto no es explicativo, faltan las justificaciones; tiene que relacionar la acotación de β_n con la de las f_n cuando éstas tienen sus imágenes en $(0,1)$, es decir, cuando $x \in (0, \infty)$ puesto que hay lugar a confusiones dado que f_n que no están acotadas superiormente.

[4] El alumno tiene claridad en que existe más de una forma de definir la integral, aunque esta no sea una de ellas, de hecho utiliza el Teorema del Valor Medio.

[5] Recordemos que éste es un caso particular, en el cual se toman intervalos homogéneos y tomando como etiquetas los extremos derechos del intervalo.

[6] No hay claridad en la definición de proceso infinito, y en la determinación de cada uno de ellos. Hay un proceso infinito para cada α_n, otro para f_n, y otro para $f_n(\beta_n) = \beta_n$.

[7] No se tiene claridad acerca de cuál es la sucesión a la que se refiere.

Anexo D.

2.

No he hallado otra solución. Se podía haber resuelto la ecuación: $e^{-a_n \beta_n} - \beta_n = 0 \quad \forall a_n > 0$ y observar que siempre $\beta_n \in (0,1)$, pero no he podido resolver la ecuación.

En el problema se define una sucesión infinita cualquiera de términos ~~positivos~~, después se define una sucesión de funciones, donde cada función queda definida por cada ~~término~~ término de la sucesión anterior, además cada función relaciona los infinitos números reales con otro número reales.

En la solución se aplica Bolzano para las infinitas funciones en 0 y $x \to \infty$ y se observa cambio de signo. luego se ve que $\frac{d(f_n - id)}{dx} < 0 \ \forall n$ y $\forall x$, así se ve que solo hay una solución para β_n en cada función de la sucesión, además, como todas las funciones están acotadas en $(0,1)$, la β_n también lo está. Se utiliza el concepto de infinito constantemente.

La Integral Definida entre a y b, entendida como ~~sea~~ $\cancel{\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)}$ $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{b-a}{m} f\left(\frac{n(b-a)}{m}\right)$ solo requiere de un proceso infinito, ya que se trata de una sucesión infinita de números ~~reales~~ reales si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no se requieren más procesos infinitos.

PROCESOS COGNITIVOS INVOLUCRADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[6]

Josefa Perdomo Díaz
Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna. Islas Canarias. España
Manuel Santos Trigo
CINVESTAV-IPN, México

Resumen

Los procesos cognitivos que los estudiantes utilizan durante la resolución de problemas matemáticos dependen del tipo de problemas planteado y del ambiente en que se resuelvan. En este sentido, existen evidencias de que los estudiantes reaccionan de manera diferente frente a problemas enunciados en un contexto puramente matemático y ante la resolución de problemas enunciados en un contexto no matemático (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2007; 2009). Por otra parte, el proceso de resolución presentará características diferentes dependiendo del ambiente en que se desarrolle: con uso o no de tecnología, de forma individual o en grupos, etc. En este trabajo se presenta un análisis del proceso de resolución utilizado por un grupo de estudiantes de primer curso de la Licenciatura en Química frente a un problema planteado como parte de un módulo de enseñanza diseñado para la introducción del concepto de ecuación diferencial ordinaria, compuesto por tres problemas enunciados en un contexto no matemático que debían resolverse en parejas y en los que se podía hacer uso de la herramienta tecnológica Voyage™200.

Palabras clave: resolución de problemas, tecnología, procesos cognitivos, ecuaciones diferenciales ordinarias, competencia matemática.

Abstract

Cognitive processes that students exhibit while dealing with mathematical problems depend on statement's contexts and teaching conditions where those problems are addressed and discussed. There are evidences that students behave differently when problems they face are situated in a non-mathematical context (Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2007; 2009). In this study, we analyze problem solving processes showed by a group of first-year university students while solving a problem that was stated as a part of a teaching module designed to introduce the concept of ordinary differential equation, stated in a non-mathematical context. We focus on the work shown by students working the task in pairs and with the use of a Voyage™200 calculator.

Keywords: problem solving, technology, cognitive processes, ordinary differential equations, mathematical proficiency.

[6] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional I+D+i del Ministerio de Ciencia e Innovación número EDU2008-05254.

Perdomo-Díaz, J.; Camacho, M.; Santos-Trigo, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas no se restringe al conocimiento de una serie de conceptos y procedimientos, comprende además el desarrollo de habilidades y capacidades que permitan reconocer y establecer relaciones entre diferentes significados de un mismo concepto o entre distintos conceptos matemáticos y acceder y seleccionar aquellos conocimientos útiles para abordar y resolver distintas situaciones que se puedan plantear. Nos preguntamos entonces ¿los estudiantes universitarios muestran este tipo de habilidades y capacidades? Cabe suponer que, puesto que ya han pasado toda la etapa correspondiente a la enseñanza obligatoria, estos alumnos presentarán cierto nivel de desarrollo de estas habilidades. Sin embargo, los resultados de una investigación realizada con estudiantes de las licenciaturas en Física y Matemáticas, acerca de la forma en que acceden y utilizan sus conocimientos matemáticos para abordar cuestiones y problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) reflejaron que los participantes, en general, tenían dificultades para establecer relaciones entre diferentes conceptos (por ejemplo, relacionar el concepto de EDO con el de derivada de una función) (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz y Santos-Trigo, 2012a; 2012b) y para reconocerlos como herramientas en la resolución de problemas (Camacho, Perdomo, Santos-Trigo, 2007; 2009).

Tratando de dar respuesta a este problema de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se propuso un modelo de enseñanza alternativo para la introducción del concepto de EDO cuyo elemento principal consistió en la creación de un ambiente de trabajo en el aula que promoviera la discusión y la reflexión entre los estudiantes. Para ello se elaboró un Módulo de Enseñanza compuesto por tres problemas y diseñado para que los alumnos trabajaran en pequeños grupos en su resolución, apoyándose en el uso de una herramienta tecnológica, la calculadora Voyage™200. Este modelo de enseñanza se implementó con un grupo de 15 estudiantes de primer curso de la licenciatura en Química. La pregunta que nos formulamos entonces fue: ¿qué habilidades y capacidades mostraron los estudiantes inmersos en este nuevo modelo de enseñanza?

En este artículo se describe el modelo de enseñanza propuesto así como el proceso de recopilación y análisis de datos que se llevó a cabo para identificar aquellos aspectos que caracterizaban el proceso de resolución de los estudiantes que participaron en la investigación.

Marco conceptual

Kilpatrick et al. (2009) proponen cinco componentes para caracterizar los aspectos que se deben desarrollar como parte del aprendizaje de las matemáticas y que por tanto la enseñanza debería promover[7]: (i) *comprensión conceptual*: comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones; (ii) *fluidez con los procedimientos*: habilidad en la ejecución de procedimientos de forma flexible, precisa, eficiente y correcta; (iii) *competencia estratégica*: habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos; (iv) *razonamiento adaptativo*: capacidad para pensar de forma lógica, reflexionar, explicar y justificar; (v) *predisposición productiva*: inclinación habitual para ver las matemáticas como prácticas, útiles y valiosas, acompañado de confianza en la propia eficacia y diligencia.

En esta investigación se han considerado estos cinco componentes para la elaboración de la propuesta de enseñanza y también como un referente para analizar el conocimiento y la competencia matemática de los estudiantes.

Con el fin de que el modelo de enseñanza propuesto promoviera el desarrollo de estas capacidades y habilidades ligadas a la competencia matemática, optamos por la creación de un ambiente de resolución de problemas y uso de tecnología, en el que se diera un mayor protagonismo y responsabilidad a los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje. La elección de estos elementos responde, por un lado, al hecho de que la resolución de problemas promueve que las matemáticas sean consideradas como una disciplina activa, a cuyos conocimientos se puede acceder, ya que:

- Ofrece oportunidades para el establecimiento de conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos.
- Favorece el desarrollo de habilidades como examinar, representar, transformar, resolver y aplicar.
- Permite el ejercicio en el uso de procesos asociados al pensamiento matemático avanzado como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar o sintetizar. (NCTM, 2000)

Además, el uso de tecnología facilita el acceso, por parte de los estudiantes, a una gran variedad de recursos, el desarrollo de estrategias para explorar ideas matemáticas y probar

[7] En el original: *the strands of mathematical proficiency*

conjeturas (Santos, 2007). El NCTM (2000) añade que, con el uso de una herramienta tecnológica, los estudiantes pueden centrarse en el análisis de fenómenos, la reflexión, la toma de decisiones, la exposición de razonamientos y la resolución de problemas.

Diseño del Módulo de Enseñanza

Como ya se ha mencionado, el Módulo de Enseñanza fue diseñado para introducir el concepto de EDO en un primer curso de la licenciatura en Química. Está compuesto por tres problemas cuyos enunciados hacen referencia a situaciones que tradicionalmente se presentan como ejemplo de aplicaciones de las EDO: descomposición de elementos químicos, mezcla de sustancias y dinámica de poblaciones. El diseño general de cada problema responde al siguiente esquema: se comienza exponiendo la situación y se continúa con una serie de cuestiones que guían a los estudiantes en el proceso de resolución (Figura 1). Dichas cuestiones responden a una serie de objetivos:

- Que los alumnos revisen y reorganicen sus conocimientos en relación con el concepto de derivada de una función,
- Que construyan el concepto de EDO a partir de su concepción de la derivada,
- Que identifiquen diferentes etapas en el proceso de resolución de problemas y analicen la importancia de las mismas.

	Desintegración del uranio (1 sesión)	*Contaminación de mercurio* (5 sesiones)	*Dinámica de poblaciones* (4 sesiones)
Contexto	Descomposición de elementos químicos	Mezcla de sustancias	Población de peces
Estructura	Planteamiento de la situación. Diferentes cuestiones relacionadas con los procesos de representación, interpretación e interrelación entre el contexto matemático y un contexto no matemático.	Planteamiento de la situación. Seis etapas de resolución en las que se incluyen diferentes cuestiones y actividades.	Planteamiento de la situación Cinco etapas de resolución en las que se incluyen diferentes cuestiones y actividades.
Descripción	Se analizan diferentes situaciones de variación y sus representaciones en lenguaje matemático. Finaliza con la introducción del concepto de EDO, orden y solución de la misma.	Se obtiene la expresión de una EDO partiendo de una situación de variación. Se analizan las representaciones gráfica y algebraica de la función solución. Se generaliza la situación.	Se obtiene la expresión de una EDO partiendo de una situación de variación. Se analiza el comportamiento de la función solución utilizando la EDO. Se generaliza la situación.

Figura 1: Descripción del Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO

En este artículo se tomará el primero de los problemas (*Desintegración del uranio*) como referencia para la presentación del proceso de recogida y análisis de datos, por lo que a continuación será descrito con más detalle. Se puede obtener más información sobre los problemas del Módulo en Camacho et al. (por aparecer).

El problema *Desintegración del uranio* comienza a partir de una situación general en la que se explica el proceso de desintegración de elementos químicos (Figura 2) y que se va concretando a partir del planteamiento de una serie de preguntas. El objetivo principal de esta actividad es promover que los estudiantes establezcan relaciones entre distintas situaciones reales y diferentes expresiones matemáticas, relacionadas con el concepto de derivada de una función.

Muchos minerales contienen uranio 238 en su composición. El uranio es una sustancia radiactiva lo que significa que emite una cierta energía que hace que se vaya transformando en otras sustancias a medida que pasa el tiempo. Por ejemplo, el uranio 238 se va modificando hasta convertirse en plomo 206.

Figura 2: Comienzo del problema 1

La actividad finaliza con una parte centrada en el contexto matemático, no relacionada de forma explícita con la situación planteada inicialmente, utilizada para introducir los conceptos de ecuación diferencial ordinaria, orden y solución de la misma.

Las preguntas que se plantean a lo largo de este problema responden a los siguientes objetivos[8]:

- Expresar situaciones en términos matemáticos.

Ejemplos: *Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?¿Se te ocurre alguna otra posibilidad? Ayuda: Puede expresarse en términos de la función o en términos de su derivada.*

- Reflexionar sobre la situación real particular y sus posibles expresiones matemáticas.

Ejemplos: *¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta. ¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t2? Indica al menos otras dos posibilidades para la expresión de u'(t).*

[8] Junto con cada objetivo se incluyen algunos ejemplos de las cuestiones formuladas a los estudiantes.

- Relacionar diferentes enunciados con distintas expresiones algebraicas.

Ejemplos: *¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando* $u'(t) = -1$ y $u'(t) = -2$ *?, ¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando* $u'(t) = -1$ *y* $u'(t) = -t$ *?*

- Introducir los conceptos de ecuación diferencial ordinaria, orden de una EDO y solución de una EDO.

Ejemplos: *Completa la siguiente tabla escribiendo una función cuya derivada satisfaga lo indicado en cada fila; ¿Hay alguna otra función que cumpla que su derivada es la que aparece en cada fila de la tabla?*

u'(t)	**u(t)**	**u'(t)**	**u(t)**
-1		-t	
-2		$-t^2$	
-3		$\frac{-t}{2}$	

Este primer problema del Módulo de Enseñanza se centra, principalmente, en cuestiones sobre cómo expresar matemáticamente situaciones correspondientes a un contexto no matemático y acerca de los significados que tendrían diferentes expresiones matemáticas en ese contexto. Con el fin de que estas acciones lleguen a simultanearse, en el sentido de promover que los estudiantes no las vean como entes disjuntos, se plantean una serie de preguntas acerca de la posibilidad de que una misma situación real pudiera estar representada por diferentes expresiones matemáticas (*¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?, ¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t^2?*).

Pasamos a continuación a describir cómo se planteó y desarrolló el trabajo en el aula.

Dinámica de aula

El modelo de enseñanza incluye, además del diseño del Módulo, una modificación en cuanto a la dinámica de trabajo en el aula. Se optó porque los 15 alumnos con los que se realizó la experimentación se dividieran formando seis parejas y un trío. Tal y como señalan Cobo y Fortuny (2000), el trabajo en parejas mejora el proceso de argumentación, las habilidades heurísticas, las formas de enfocar un problema y de generar nuevas ideas dentro del proceso de resolución.

Cada sesión comenzaba con un breve resumen de las actividades realizadas en la sesión anterior. A continuación, cada grupo de estudiantes trabajaba en la resolución de las actividades programadas, siendo el papel del profesor el de resolver las dudas que se iban presentando, dinamizar el trabajo de aquellas parejas que se mostraban menos productivas y formalizar los contenidos matemáticos que iban surgiendo durante el desarrollo del Módulo.

El proceso de recopilación de datos consistió en video-grabar a cada uno de los grupos de estudiantes durante el proceso de resolución de los problemas del Módulo y realizar una copia del trabajo que habían realizado en papel y con la calculadora, al finalizar cada sesión. Una vez recogido todo el material, se procedió a la transcripción de las grabaciones y el análisis de los datos.

Análisis de datos

En esta sección se trata de identificar aquellos elementos de la competencia matemática que se hicieron visibles durante el proceso de resolución de los problemas del Módulo. Para ello se toma como ejemplo el trabajo realizado por una de las parejas de estudiantes (Nicanor y Mar) para resolver el primer problema (Desintegración del uranio). Para realizar el análisis se tomó todo el material recopilado correspondiente a la primera sesión de clase (en la que se trabajó dicho problema) y se utilizaron una serie de descriptores para hacer referencia a las acciones, comportamientos y afirmaciones que caracterizaban las actuaciones de la pareja (Anexo 1). Dichos descriptores se corresponden con la descripción de los elementos establecidos por Kilpatrick et al. (2009): *comprensión conceptual, fluidez con los procedimientos, competencia estratégica, razonamiento adaptativo* y *predisposición productiva*. De esta forma, el anexo 1 ilustra el proceso de análisis que se realizó del trabajo de los siete grupos de estudiantes que participaron en la investigación.

De la revisión del anexo 1 se puede deducir que el nuevo modelo de enseñanza, donde la resolución de problemas y la interacción fueron los elementos principales, permitió que los estudiantes pusieran de manifiesto distintos factores que describen su competencia matemática, tales como la comprensión conceptual, la capacidad de reflexionar y justificar sus argumentos, la habilidad para representar en términos matemáticos información procedente de un contexto no matemático o para interpretar el significado de distintas expresiones matemáticas y la confianza en la propia eficacia.

En relación con la *comprensión conceptual*, Nicanor y Mar, reconocen la utilidad de los conceptos de función y derivada de una función para indicar dependencia del tiempo [intervenciones (1)-(4)], relacionan la derivada de una función con diferentes fenómenos de variación (aumento, disminución o variación nula), con la monotonía de funciones [(5), (9)], con la velocidad de cambio y la pendiente de una recta [(31)-(32)] y establecen relaciones entre las expresiones de una función y su derivada [(23)-(24)].

El diseño de la actividad y la interacción entre los estudiantes promovieron que esta pareja discutiera distintas opciones de respuesta, reflexionando acerca de la situación planteada y su relación con los conocimientos matemáticos de que disponían, así como que explicaran y justificaran sus respuestas, mostrando así que habían desarrollado la capacidad de adaptar sus razonamientos a la situación planteada. En otras palabras, los estudiantes mostraron un *razonamiento adaptativo*. Esta capacidad para reflexionar y explicar sus razonamientos, unido al hecho de que Nicanor y Mar recurren al profesor en una única ocasión (para corroborar que han entendido correctamente la pregunta) da muestra de la confianza que estos alumnos tienen en su propia eficacia, aspecto que también influye en la competencia matemática de los estudiantes (*predisposición productiva*).

Finalmente, el diseño del problema facilitó que los alumnos mostraran su habilidad en el proceso de representar, en términos matemáticos, cierta información correspondiente a un contexto no matemático y de interpretar qué significarían distintas expresiones matemáticas en el contexto de la situación planteada. Estos procesos forman parte de los elementos que describen la *competencia estratégica* de los estudiantes.

Consideraciones finales

El análisis del trabajo realizado por cada uno de los grupos de estudiantes, durante las diez sesiones de clase que se dedicaron a la introducción de las ecuaciones diferenciales, refleja que el Módulo de Enseñanza promovió el uso de diferentes significados asociados a un mismo concepto matemático (la derivada de una función) y que se establecieran conexiones entre ellos. Se puede considerar que, para estos alumnos, la imagen de la derivada pasó de ser un conjunto de procedimientos o el resultado de un proceso (reglas de derivación) a convertirse en un concepto que aporta información (por ejemplo, sobre el tipo de variación que se está produciendo en un fenómeno). Esto es, este concepto pasó a ser considerado por los estudiantes como un recurso para la resolución de problemas. Igualmente, las cuestiones y actividades propuestas en el Módulo ayudaron a establecer relaciones entre diferentes conceptos como, por ejemplo, entre el de derivada de una función y el de ecuación diferencial ordinaria.

Por otra parte, tanto el diseño del Módulo como la dinámica de aula favorecieron que los estudiantes mostraran algunos procesos del pensamiento matemático avanzado característicos de la competencia matemática, tales como la reflexión, la justificación de respuestas y razonamientos o la representación e interpretación de información entre el contexto matemático y otros contextos. Se observó también que los alumnos adquirieron una mayor autonomía en su proceso de aprendizaje, creándose un ambiente de trabajo entre iguales, que permitió que mostraran sus razonamientos y fueran críticos con los de sus compañeros, lo que, en numerosos casos, les llevó a la reconsideración de ciertas ideas y concepciones matemáticas.

Referencias bibliográficas

Camacho, M.; Perdomo, J.; Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*, 87-106. Tenerife.

Camacho, M.; Perdomo, J.; Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions, *PNA* 3(3), 23-133.

Camacho, M.; Perdomo-Díaz, J.; Santos-Trigo, M. (por aparecer). La resolución de problemas en la construcción y comprensión del concepto de ecuación diferencial. *Enseñanza de las Ciencias.*

Camacho-Machín, M.; Perdomo-Díaz, J.; Santos-Trigo, M. (2012a). An Exploration of Students´ Conceptual Knowledge Built in a First Ordinary Differential Equations Course (Part I), *The Teaching of Mathematics*, 15 (1).

Camacho-Machín, M.; Perdomo-Díaz, J.; Santos-Trigo, M. (2012b). An Exploration of Students´ Conceptual Knowledge Built in a First Ordinary Differential Equations Course (Part II), *The Teaching of Mathematics*, 15 (2).

Cobo, P. & Fortuny, J. (2000). Social Interactions and Cognitive Effects in Contexts of Area-Comparison Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 115-140.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (7th ed.) (pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* (T. Fernández-Reyes, M.). Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Sevilla, España.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* México D.F.: Trillas.

Anexo 1: Resolución del problema 1 del Módulo por parte de Nicanor y Mar

<table>
<tr><td colspan="3">¿Cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio 238 que hay en un material depende del tiempo que haya pasado?</td></tr>
<tr><td>(1)

(2)

(3)
(4)</td><td>N: Simplemente u(t) o que… la derivada de u con respecto del tiempo es distinto de cero, a medida que va variando.
M: La derivada de u, con respecto al tiempo… es distinto de cero [Habla en voz alta mientras escribe]
N: Sería que va variando con el tiempo.
M: Sí, es verdad.</td><td>• Proceso de representación
• Comprensión conceptual: uso del concepto de función y de derivada para indicar dependencia con respecto al tiempo
• Reflexión
• Confianza</td></tr>
<tr><td colspan="3">Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>N: Pues que la derivada de u sería cero, exacto, que la derivada de u con respecto al tiempo sería cero.</td><td>• Proceso de representación
• Comprensión conceptual: relación de la derivada con fenómenos de variación.</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Se te ocurre alguna otra posibilidad?
Ayuda: Puede expresarse en términos de la función o en términos de su derivada.</td></tr>
<tr><td>(6)
(7)</td><td>M: Pues que esto sea un valor constante
N: Sí. Que no dependa del tiempo sino de… que u sea igual a una constante.
[Escriben “u es una constante”]</td><td>• Proceso de representación
• Comprensión conceptual: identificación de tipos de funciones según el fenómeno</td></tr>
<tr><td colspan="3">Volvamos ahora a la situación real, donde el número de átomos de uranio 238 que hay en un mineral va disminuyendo.
¿Cómo expresarías esta información en términos matemáticos?</td></tr>
<tr><td>(8)
(9)

(10)
(11)
(12)

(13)

(14)

(15)

(16)
(17)
(18)

(19)</td><td>M: Esto depende del tiempo
N:¿Pero qué cosa? Ah. Disminuyendo, disminuyendo, vale, vale, vale. Sería… la derivada sería menor que cero si va disminuyendo. Sería una función decreciente.
M: Claro
N: Pues…
M: Sería… 238, o sea, algo que tuviese que ver con la inicial…
N: Sí, sería u(t) igual a u inicial menos u(t), menos la velocidad de descomposición…
[Están buscando una expresión para la función $u(t)$, cuando se les pregunta por los posibles valores de la derivada.]
M: Bien, pues el uranio en un tiempo menos el uranio en otro tiempo...
N: Um…bueno, sí, el uranio en t menos el uranio en t’ sería… mayor que cero…porque va disminuyendo
M: Va disminuyendo…O no, espérate, no.
N: ¿Qué, qué, qué…? Espérate ¿Qué…?
M: En lugar de la t’ se supone que lo que vamos a poner es el valor en el tiempo inicial, sería u_0.
N: Sí. Vale, vale. [Escriben $u(t)=u_0-u(t')$]</td><td>• Reflexión
• Comprensión conceptual: relaciona el signo de la derivada con fenómenos de aumento y disminución y éstos con la monotonía de funciones.

• Conjetura
• Reflexión

• Proceso de representación en términos matemáticos

• Comprobación</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué valores puede tomar u’(t)?</td></tr>
<tr><td></td><td>[Para responder a esta pregunta escriben: “valores negativos porque a medida que pasa el tiempo va disminuyendo el número de átomos.]</td><td>• Comprensión conceptual: relaciona el signo de la derivada con fenómenos de variación</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Puede ser que u’(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta.
Ayuda: Recuerda el significado de la variable t en la situación planteada.</td></tr>
</table>

(20) (21) (22) (23) (24) (25)	N: Puede ser que u' sea igual a t… o no. [...] Recuerda el significado de la variable t. M: t se supone que es el tiempo trascurrido. N: Sí M: Y no creo que vaya a depender del cuadrado del tiempo. [*Se refiere a la función* $u(t)$] N: No, tendría que ser $u = t^2/2$ M: Y supongo que debe ser una dependencia simple… [*Leen las preguntas posteriores.*]	• Proceso de interpretación • Reflexión • Comprensión conceptual: relacionan la expresión de $u'(t)$ con la de $u(t)$. • Conjetura
¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?		
¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t²?		
(26) (27) (28) (29) (30)	N: O -t, -t². Indica otras dos posibilidades. M: ¿Dos posibilidades para $u'(t)$? [*Después de un tiempo reflexionando en silencio*] M: Hombre, igual a t no. Si tenemos en cuenta que es una dependencia simple... […] Supongo que es un valor negativo, pero después… No entiendo por qué pone aquí -t y aquí -t². N: No, yo tampoco. M: Y después aquí te pone números. [S*e refiere a la siguiente pregunta*]	• Heurística: analizar las siguientes preguntas del problema
¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-2? *Ayuda: Piensa en cuál de los casos el uranio disminuye más rápidamente.*		
(31) (32)	N: Hombre, esto es sencillo, porque si tienes derivada -1 sería que… que es una recta de una pendiente… -1; y si es -2, es una recta que disminuye más rápido. N: La pendiente es mayor.	• Comprensión conceptual: relaciona la derivada con la velocidad de cambio y con la pendiente de una recta.
¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-t?		
(33) (34)	M: Hay que preguntarlo N: Sí, porque no me entero…espera un poco [*Leen la siguiente pregunta*]	• Reflexión
En este contexto, ¿qué significaría que u'(t) sea positiva?		
(35) (36)	M: Esto sí … Que aumentaría N: Sí, que aumentaría. Aumentaría la concentración de uranio.	• Comprensión conceptual: relaciona el signo de la derivada con fenómenos de aumento y disminución.
[*Después de un tiempo de reflexión en silencio, Nicolai encuentra la respuesta a una pregunta anterior*]		
¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta. *Ayuda: Recuerda el significado de la variable t en la situación planteada.*		
(37) (38) (39) (40)	N: Ya le encontré solución a la primera. [...] Esto no puede ser porque no existen tiempos negativos, y entonces sería... [...] Negativo si puede ser, lo que no puede ser es positiva, pero como no existen tiempos negativos, pues sería la derivada positiva que no tiene sentido. M: ¿Cómo, cómo…? Repite N: A ver, si la derivada de esto es t y t se supone que es un número positivo porque no existen tiempos negativos M: Y nosotros hablábamos de que tenía que ser la derivada negativa.	• Reflexión • Interpreta el significado de la expresión $u'(t) = t$ en la situación planteada. • Justificación • Explicación • Reflexión

GRUPO:

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA (DEPC)

Coordinador: José María Cardeñoso Domingo, Universidad de Cádiz

DEPC1- Trabajando la estadística cooperativamente. ¿Qué piensan los estudiantes? (Paloma Gavilán)

DEPC2- Las nociones de correlación y regresión en la investigación educativa. (María Magdalena Gea Serrano y Antonio Estepa Castro)

DEPC3- Formación de profesores para enseñar probabilidad: un estudio comparativo entre Colombia y España. (Emilse Gómez, Carmen Batanero, José Miguel Contreras y José AntonioFernández)

DEPC4- Actitudes de los profesores portugueses hacia la estadística: un primer análisis cualitativo. (José Alexandre Martins, Maria Manuel Nascimento y Assumpta Estrada)

DEPC5- Las dificultades detectadas en un grupo de estudiantes del profesorado de educación primaria, cuando afrontan la asignación de probabilidades. (Amable Moreno, José María Cardeñoso y Francisco González García)

TRABAJANDO LA ESTADÍSTICA COOPERATIVAMENTE. ¿QUÉ PIENSAN LOS ESTUDIANTES?

Paloma Gavilán
Universidad de Alcalá de Henares. España

Resumen

En este trabajo tratamos las estrategias que emplean los estudiantes cuando trabajan la estadística cooperativamente. Para ello, en primer lugar veremos las características del método de trabajo cooperativo empleado y, a continuación, resaltamos el papel del lenguaje y la comunicación en la resolución de problemas. Consideramos la grabación de las clases como una interesante fuente de información sobre el pensamiento de los estudiantes y finalmente exponemos las conclusiones del análisis de estas grabaciones.

Palabras clave: trabajo cooperativo, estadística obligatoria, opinión del aprendiz

Abstract

In this paper we address the strategies used by students when they work cooperatively in statistics. To do this, first we see the characteristics of the cooperative working method used and then highlight the role of language and communication in solving problems. We consider the recording of the classes as an interesting source of information about students' thinking and finally we present the conclusions of the analysis of these recordings.

Keywords: cooperative work, statistical mandatory, learner's view

Gavilán, P. (2012*).* Trabajando la estadística cooperativamente. ¿Qué piensan los estudiantes? En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 79-106). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

Una forma de conocer cómo piensan nuestros estudiantes cuando trabajan la estadística es ponerles en la situación de tener que pensar en voz alta. Consideramos que el trabajo cooperativo es una buena opción para ello, entre otras cosas, porque hace que los estudiantes verbalicen ante los compañeros sus propios procesos de pensamiento. La grabación de estas clases y su posterior análisis es una interesante forma de acercarnos al pensamiento de los estudiantes. Esto es lo que hemos hecho con un grupo de 3º ESO.

En primer lugar vemos las características del método de trabajo cooperativo empleado; a continuación resaltamos el papel del lenguaje y la comunicación en la resolución de la tarea, para finalizar con el análisis de las grabaciones en que los estudiantes están resolviendo tareas de estadística en grupos cooperativos.

Método de trabajo cooperativo empleado

Entre las competencias que tenemos como profesores está la de decidir cómo queremos estructurar nuestras clases. Ésta es una cuestión a la que, generalmente, no se le da importancia a pesar de las numerosas investigaciones que confirman la repercusión que tiene tanto en los aspectos académicos como personales y sociales de nuestros estudiantes (Johnson, 1980; Johnson, Johnson y Maruyama, 1983; Johnson y Johnson 1989).

Morton Deutch, discípulo de Kurt Lewn, formuló en 1949 la teoría de la interdependencia social dentro del aula. Posteriormente los hermanos Johnson desarrollaron esta teoría concluyendo con sus investigaciones que el modo en que se estructura la interdependencia determina en parte los resultados que se van a conseguir en clase (Johnson, 1980; Johnson, Johnson y Maruyama, 1983; Johnson y Johnson 1989). Morton Deutch propuso estas tres estructuras:

a) Estructura competitiva: cada persona trabaja separadamente para alcanzar su meta, sabiendo que ello supone que las demás personas no alcanzarán la suya. Sólo hay un primer puesto; es decir, sólo una persona podrá conseguir el éxito. Las comparaciones se hacen inevitables: cada estudiante obtiene información de sí mismo en relación con lo que hacen los demás. Se establece una interdependencia negativa entre los estudiantes: si gano yo, no ganas tú. Con el agravante de que suelen ser los mismos estudiantes los que no ganan nunca, acumulando así sucesivas experiencias de fracaso.

b) Estructura individualista: cada persona trata de alcanzar su meta separadamente de los demás, sin que ello influya para nada en las metas de las otras personas de la clase. Cada uno trabaja únicamente en beneficio propio y recibirá su recompensa en base a su trabajo personal con independencia de los resultados de las demás personas. Se evitan las interacciones entre los estudiantes y hay ausencia de interdependencia: cada estudiante tiene su material, su espacio y nada es compartido. Sólo se permiten las interacciones de los estudiantes con el profesor.

c) Estructura cooperativa: los estudiantes trabajan en grupos pequeños y cada persona alcanza su meta si y sólo si el resto de las personas con las que trabaja alcanzan la suya. Es decir, cada uno se hace responsable de su propio aprendizaje y del aprendizaje de las personas de su equipo. Se establece una interdependencia positiva entre las personas de las clase: "Yo consigo mi meta si y sólo si todos conseguimos la meta". La meta es obtener los mejores resultados en el aprendizaje de todos los miembros.

Entre las tres formas de estructurar la interdependencia social en el aula, vamos a centrarnos en esta última. La estructura cooperativa se caracteriza por la particular interdependencia que se establece entre los participantes, de modo que un estudiante logra su objetivo cuando lo logran los demás compañeros de su grupo cooperativo. En un grupo cooperativo los componentes trabajan conjuntamente, asumiendo una doble responsabilidad: sobre su aprendizaje y sobre el aprendizaje de sus compañeros. La interacción que caracteriza este método de trabajo es aquella en que los estudiantes se prestan ayuda y apoyo con la finalidad de promocionar en su aprendizaje. Es además necesario que los estudiantes pongan en práctica ciertas habilidades sociales que les permitan resolver constructivamente los conflictos en los que, inevitablemente, se verán involucrados. Y por último, el profesor debe facilitar periódicamente a los estudiantes la posibilidad de reflexionar sobre su comportamiento dentro del grupo.

Estos son los cinco elementos básicos que, según los hermanos Johnson (1994) es preciso estructurar correctamente para poder trabajar cooperativamente:

1. Interdependencia positiva.

2. Interacción cara a cara.

3. Doble responsabilidad.

4. Aprendizaje de habilidades sociales.

5. Revisión del proceso del grupo.

Nos vamos a detener en la primera de ellas por ser la más característica de los grupos cooperativos.

La interdependencia positiva está establecida cuando los estudiantes son conscientes de que el éxito del grupo depende de su éxito personal y viceversa. Es decir, no pueden alcanzar el objetivo a menos que lo alcancen todos sus compañeros de grupo. Y el grupo no alcanza la meta a no ser que la consiga cada estudiante. En este sentido hay que recordar que un buen trabajo de grupo no garantiza el aprendizaje de sus miembros (Slavin, 1985); y lo que se pretende con esta forma de trabajar es mejorar el aprendizaje de todos los estudiantes. Para establecer adecuadamente la interdependencia positiva hay que proponer una tarea interdependiente, una meta interdependiente y una recompensa interdependiente. Para ello, es necesario:

a) Asignar al grupo una tarea clara y concreta que debe ser realizada entre todos sus componentes: tarea interdependiente. Es decir, una tarea en la que tengan que llegar a acuerdos, consensuar resultados o completar su información con la que tienen otros compañeros. Las tareas rutinarias que se hacen de manera independiente no son las más adecuadas.

b) Asegurar que nadie puede alcanzar la meta a menos que todos los componentes la alcancen: meta interdependiente. El que una persona haya resuelto correctamente la tarea no significa que haya terminado su trabajo. El objetivo es que todos los estudiantes del grupo sepan resolver correctamente la tarea.

c) Garantizar una recompensa interdependiente: la calificación de cada estudiante se verá afectada en mayor o menor medida por la calidad de los esfuerzos individuales de sus compañeros. Esto les lleva a darse cuenta que la calificación de sus compañeros va a depender en algún aspecto de lo que ellos se esfuercen y aprendan.

Cuanto mejor esté establecida la interdependencia positiva con más facilidad se producirá el conflicto cognitivo. Al conflicto se llega cuando las personas del grupo se involucran en una discusión en la que vierten distintos puntos de vista, diferentes posturas y opiniones, teniendo que llegar a acuerdos. Esta situación provoca la búsqueda activa de información, la necesidad de razonar y justificar sus posturas, el cuestionamiento de lo ya sabido y, en definitiva, la reconceptualización del conocimiento. Como consecuencia, emplean estrategias de razonamiento de nivel superior y aumenta su dominio y retención de la materia discutida.

Se han desarrollado distintas técnicas para implementar el Aprendizaje Cooperativo en el aula. En nuestro caso, hemos diseñado un método de trabajo que, teniendo en cuenta todos los elementos básicos propios de esta forma de trabajar en el aula, se apoye en los estudios realizados sobre la eficacia de los métodos cooperativos ya experimentados (Gavilán y Alario, 2010). Así nos parece fundamental enfatizar los siguientes elementos: la responsabilidad individual dentro del grupo, la importancia de las aportaciones de cada componente del grupo y la igualdad de oportunidades.

Ello nos ha llevado a la formación de dos tipos diferentes de grupos a los que llamamos grupos base y grupos de trabajo. Tanto unos como otros están integrados por cuatro o cinco miembros y cada estudiante pertenece a un grupo base y a un grupo de trabajo.

Los grupos base son los auténticos grupos cooperativos. Su finalidad es que los estudiantes aprendan, den y reciban apoyo y ayuda. El grupo base es el grupo de referencia para cada estudiante; en él resuelve sus dudas, plantea sus interrogantes y discute sus puntos de vista contrastándolos con los de sus compañeros. En el seno de estos grupos es donde se producen y resuelven los conflictos sociocognitivos y donde los estudiantes se esfuerzan por hacer que ellos mismos y sus compañeros avancen y promocionen.

Los grupos base se caracterizan por:

a. Su composición es heterogénea en cuanto al nivel, sexo y actitud hacia las Matemáticas, dándose una heterogeneidad moderada dentro de ellos.

b. Todos los integrantes de un grupo base y todos los grupos base tienen la misma tarea, que realizan conjuntamente, de modo que ésta no se da por finalizada hasta que haya sido comprendida y completada por todos sus miembros.

c. En cuanto a la calificación, todos los componentes del mismo grupo base reciben la misma calificación por el trabajo realizado en el seno del grupo.

Los grupos de trabajo tienen como finalidad que los estudiantes pongan en práctica lo que han aprendido en los grupos base. Cada grupo de trabajo realiza una tarea diferente en función del nivel de sus integrantes. En ellos se enfatiza la responsabilidad individual y se promueve la igualdad de oportunidades a todos los componentes del grupo, al enfrentar a cada estudiante con una tarea adecuada a su nivel de comprensión y conocimientos. De este modo, todos los estudiantes pueden alcanzar el éxito en la tarea siempre y cuando hayan aprendido lo necesario en su grupo base y estén dispuestos a esforzarse.

Formación de los grupos

Grupos Base

- Heterogéneos en nivel.
- Todos hacen el mismo trabajo.
- Los estudiantes de un mismo grupo base obtienen la misma nota.

A_1	B_1	C_1	D_1
A_2	B_2	C_2	D_2
A_3	B_3	C_3	D_3
A_4	B_4	C_4	D_4

Los grupos de trabajo se caracterizan por:

a. Su composición es homogénea en cuanto al nivel en Matemáticas.

b. Trabajan individualmente, aunque está permitido consultarse dudas y darse apoyo.

c. Todos los componentes de cada grupo de trabajo tienen la misma tarea; pero ésta difiere de unos grupos a otros. Las tareas de cada grupo dependen del nivel de sus componentes.

d. En cuanto a la calificación, cada estudiante recibe una calificación individual por su trabajo personal, que aportará a su grupo base.

Formación de los grupos

Grupos de Trabajo

- Homogéneos en nivel.
- Trabajan individualmente.
- Cada estudiante obtiene su nota.
- Cada grupo tiene una tarea en función de su nivel.

A_1	B_1	C_1	D_1
A_2	B_2	C_2	D_2
A_3	B_3	C_3	D_3
A_4	B_4	C_4	D_4

Resumiendo, las señas de identidad del método quedan así expresadas:

1.- Cada estudiante aprende en su grupo base y posteriormente pone en práctica individualmente en su grupo de trabajo lo que previamente ha aprendido. Se enfatiza así en el grupo base la responsabilidad grupal y en el grupo de trabajo la responsabilidad individual.

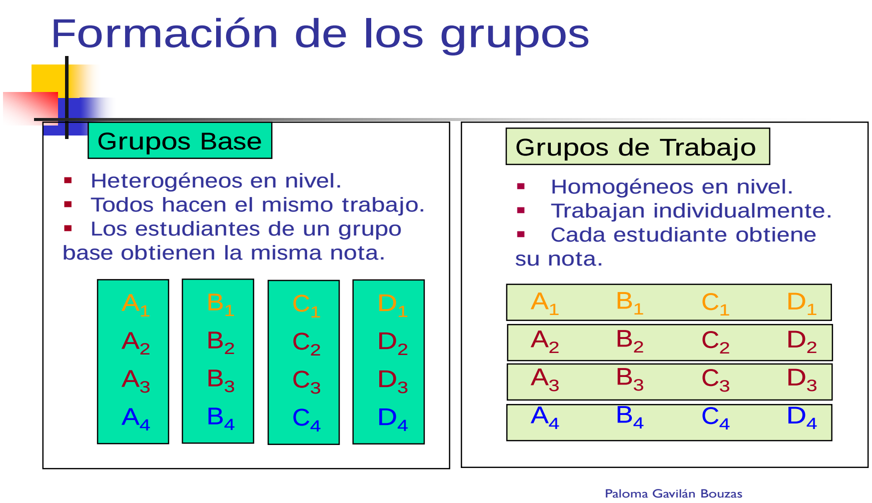
2.- Es evaluado en ambas situaciones, siendo su nota grupal la que obtenga su grupo base de referencia; y su nota individual, la que obtenga por la realización de su tarea en su grupo de trabajo.

3.- Todos los componentes de los grupos base y todos los grupos base realizan la misma tarea, por la que cada grupo obtiene su calificación grupal, común para todos sus integrantes.

4. Cada grupo de trabajo realiza unas actividades de un nivel acorde con el grado de competencia de sus miembros. Así el grupo de trabajo constituido por los estudiantes que van mejor en matemáticas tendrán que resolver tareas más difíciles. De este modo se respeta el ritmo de aprendizaje y se da igualdad de oportunidades a todos los integrantes, ya que todos pueden obtener buenas calificaciones, si se esfuerzan, al tener una tarea adaptada a su nivel. Por esta tarea cada estudiante recibe una calificación individual que aporta a su grupo base, estando la recompensa del grupo influenciada por las aportaciones individuales de sus miembros.

5.- Cada estudiante pasa individualmente los exámenes previstos. Cada prueba da lugar a una calificación que se añade a su calificación individual.

6.- Los estudiantes hacen revisiones periódicas sobre el funcionamiento de los grupos y su trabajo y esfuerzo personal.



Los estudiantes que trabajan cooperativamente se ven involucrados frecuentemente en conflictos cognitivos a la hora de contrastar sus procedimientos con los de sus compañeros y tener que llegar a un acuerdo. Esta situación les lleva necesariamente a verbalizar su pensamiento. Ahí es donde aparece el papel decisivo que juega el lenguaje y la comunicación en el desarrollo de la inteligencia.

El papel del lenguaje y la comunicación

Precisamente un aspecto interesante en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas es el papel que juega la comunicación verbal del pensamiento matemático. Conocer el funcionamiento de la mente de los compañeros es una forma de mejorar las habilidades para resolver problemas porque ayuda a descubrir nuevas formas de enfrentarse a esta tarea y porque permite confirmar que las demás personas también tienen bloqueos y dificultades, lo que ahuyenta el miedo a ser el único. El hecho de tratar de convencer a los demás de que una estrategia está bien elegida o una conjetura es cierta lleva a los estudiantes a experimentar la necesidad de actuar y demostrar lo que defienden. En este sentido afirma Pimm (1990: 81): “Decir las cosas en voz alta tiene una fuerza especial y, con frecuencia, las ideas sólo pueden examinarse de forma adecuada cuando se exteriorizan en cierta medida”.

La relación entre lenguaje y pensamiento fue tratada con profundidad por Vygotsky (1977) y expuesta en su obra "Pensamiento y lenguaje"; en ella trata de esclarecer el papel del lenguaje en los procesos mentales. Está clara la importancia que tiene el lenguaje en la comprensión que el ser humano logra del mundo en que vive y en su capacidad de asimilar y aprender. Para Levina (1981), discípulo de Vygotsky, el intento de formular verbalmente las propias ideas con el fin de comunicárselas a los demás, ya obliga a reconsiderar y reorganizar lo que se pretende decir. Levina (o. c., p. 296) afirma que "Vygotsky decía que el habla no incluye en sí misma el poder mágico de crear funcionamiento intelectual. Sólo adquiere esta capacidad al utilizarse en su capacidad instrumental".

La recomendación de verbalizar el pensamiento en clase de matemáticas está muy reconocida: "La capacidad para expresar con claridad lo que se piensa debe ser uno de los resultados de una buena enseñanza de las matemáticas. Para que se desarrolle, hay que animar a pensar en voz alta durante la realización de trabajos prácticos, debatir y explicar las razones para elegir una u otra manera de resolver un problema, valorar más la expresión de los *intentos titubeantes y los procedimientos incorrectos en lugar de acallarlos en favor de las caminos seguros y las respuestas correctas*" (Aportaciones al debate sobre las Matemáticas en los 90. Simposio de Valencia, 1987: 33).

En este sentido, el citado "Informe Cockcroft", en el párrafo 246, refiriéndose a la práctica en el aula, reconoce que "la capacidad de expresar con claridad lo que se piensa debe ser uno de los resultados de una buena enseñanza de las matemáticas, y sólo se desarrolla cuando se ha contado con la posibilidad de hablar sobre la materia, de explicar y debatir los resultados obtenidos y de verificar las hipótesis" (o.c.: 89).

Y en la misma línea se encuentran los resultados expuestos por Webb (1984), en los que confirma que el mero hecho de dar y recibir explicaciones verbales de los compañeros en el transcurso de la interacción es en sí mismo un mecanismo que proporciona efectos cognitivos favorables tanto a quien proporciona la explicación como a quien la recibe. Las verbalizaciones actúan como mecanismos que median y sirven de puente entre las interacciones sociales y los resultados que de ellas se derivan. El hecho de expresar verbalmente ante los demás el propio punto de vista provoca una reorganización de las ideas y facilita su recuerdo. Y no sólo esto: Webb también cita otros estudios en los que se demuestra que la vocalización, durante la práctica de una tarea de solución de problemas, produce mejores resultados que la no vocalización; y que los estímulos vocalizados se recuerdan mejor que los no vocalizados. En sus experimentos trata de averiguar cómo influye la vocalización ante un compañero que también está aprendiendo, ante lo que llama un aliado, y ante el experimentador, que ya domina el contenido; y afirma:

"Los estudiantes que vocalizaron a un compañero o a un aliado lo hicieron mejor que los estudiantes que vocalizaron al experimentador. Este resultado sugiere que el motivo de la verbalización es más importante para el aprendizaje que el mero acto de dicha verbalización... Los estudiantes en la condición de profesores mostraron una puntuación más elevada que quienes se encontraban en una situación de no enseñantes" (Webb, 1984: 167).

Por todo ello deduce que el hecho de aprender para enseñar a alguien puede producir una estructura mejor organizada que el hecho de aprender para uno mismo. Y además, durante el propio acto de enseñar a otros compañeros, el material se reestructura y clarifica sobre la marcha. Los estudiantes, para explicar cómo han llegado a una conclusión u obtenido una respuesta, necesitan primero examinar su propio proceso de pensamiento. La cooperación les lleva a compartir cómo piensan, actuando de mediadores en el pensamiento de los demás (Presseisen, 1992). Por su parte, Palincsar y Brown (1988) afirman que el diálogo entre los estudiantes les lleva a comprender los aspectos estratégicos de la metacognición, apreciando sus propios pensamientos como herramientas para enfrentarse a la tarea, de modo que, en un intercambio dinámico entre ellos, aprenden poderosas dimensiones del pensamiento.

Así pues, creemos que queda destacado el papel del lenguaje en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas en virtud de las siguientes conclusiones:

a) La verbalización de las propias ideas ayuda a su comprensión.

b) El debate supone una negociación de significados y la puesta en común de diversos puntos de vista.

c) La comunicación verbal permite al profesor conocer el pensamiento y creencias de sus alumnos.

d) La expresión de las ideas permite a los estudiantes comprobar si han comprendido lo que se ha discutido.

e) En el transcurso de un debate los estudiantes se ven impulsados a encontrar expresiones más precisas y sucintas con las que comunicar sus ideas.

Por todo ello, consideramos que la metodología cooperativa es un poderoso método entre otras razones por la posibilidad que ofrece de compartir ideas, verbalizar y justificar razonamientos.

¿Qué piensan los estudiantes?

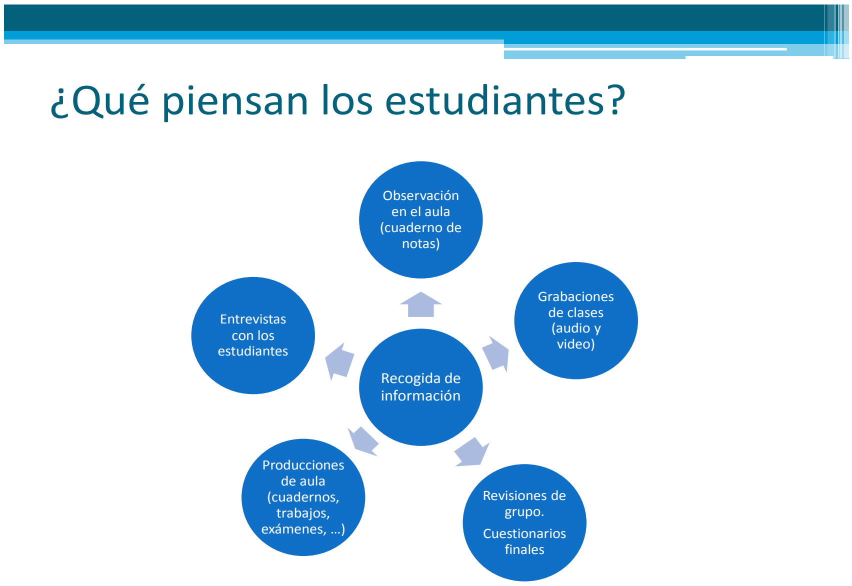
Para averiguar qué piensan los estudiantes cuando están trabajando la estadística en grupos cooperativos tenemos diferentes fuentes de información. Una de ellas, la más directa, consiste en preguntárselo claramente a ellos. Una forma de preguntárselo y dejar constancia de sus respuestas es hacerles una entrevista personal al finalizar el periodo de trabajo cooperativo en estadística y grabar cada entrevista, para analizar posteriormente su contenido. En nuestro caso, realizamos entrevistas semiestructuradas, con preguntas abiertas, de modo que, aunque se han prefijado las preguntas, es el propio ritmo de la entrevista el que va a marcar su orden.

Otra forma de averiguar lo que piensan los estudiantes es observarles y escucharles en clase cuando están trabajando cooperativamente. La escucha atenta de sus razonamientos es un viaje al interior de su pensamiento. De este modo podemos conocer sus conceptos erróneos, su manera de aproximarse a la solución de un problema, sus argumentaciones, etc. Es preciso tomar notas en el momento, salvo que las intervenciones queden grabadas.

La grabación en audio y/o vídeo del trabajo de un grupo cooperativo es otra manera de acercarnos a su pensamiento. Cada sesión ponemos la grabadora en un grupo diferente y, posteriormente, tras varias audiciones, hacemos una trascripción textual del contenido. Ello nos posibilita analizarlo, delimitando previamente las unidades de análisis y determinando las diferentes categorías relativas a las estrategias de aprendizaje relacionadas con la resolución de la tarea.

Las producciones de aula constituyen otra fuente interesante de información. Sus cuadernos, trabajos, hojas de problemas, exámenes, nos acercan a su pensamiento. Son la información más habitual, por no decir casi exclusiva, de gran parte de nuestro mundo educativo.

Por último, las revisiones de clase y los cuestionarios finales son otra importante y necesaria fuente de información cuando los estudiantes trabajan cooperativamente. Uno de los elementos básicos del Aprendizaje cooperativo es la revisión periódica del comportamiento de los grupos. Esto quiere decir que los grupos, periódicamente, se paran a pensar sobre su funcionamiento, a través de las revisión de grupo que les facilitamos en distintos formatos. Cada diez o quince días dedicamos los cinco minutos finales de la clase a revisar de manera individual el funcionamiento del grupo.



La información que de esas revisiones se obtiene permite conocer cuáles son los puntos fuertes y débiles de cada grupo y cómo se siente cada uno de sus integrantes. De este modo tenemos pistas para ayudar a los grupos a reconducir su comportamiento y subsanar las dificultades. Las conclusiones de las investigaciones llevadas a cabo por Stuart Yager sobre los resultados académicos y no académicos de grupos cooperativos en los que se discute su funcionamiento y se trata de mejorar su efectividad, grupos cooperativos en los que no se hacen revisiones de grupos, y grupos de aprendizaje individual, indican que tanto los estudiantes de alto, medio y bajo nivel, en el primer caso puntuaron más alto en el rendimiento y retención que los estudiantes en las otras dos situaciones (Johnson y Johnson, 1994).

De todas estas fuentes de información, vamos a centrarnos en las grabaciones de clases.

Los cuestionarios finales permiten a los estudiantes hacer una reflexión global de su proceso de aprendizaje en los grupos cooperativos. En ellos tiene que responder preguntas relacionadas con el método de aprendizaje y con las estrategias empleadas. Tienen una doble finalidad: hacer que los estudiantes reflexionen sobre su propio proceso y el de sus compañeros de grupo y facilitar información necesaria para poder subsanar las dificultades en cursos sucesivos.

Grabaciones de clases

Hemos grabado a los distintos grupos cooperativos mientras trabajaban en clase. Posteriormente hemos hecho la transcripción de las grabaciones. Ello nos ha posibilitado analizar su contenido, delimitando previamente las unidades de análisis y determinando las diferentes categorías relativas a las estrategias de aprendizaje utilizadas por los estudiantes.

Schoenfeld (1985), profundizando en la investigación para conocer los procesos cognitivos que actúan cuando los estudiantes resuelven problemas, propuso un esquema de análisis basado en la división del protocolo de resolución (transcripción del registro efectuado en vídeo o audio, de los fenómenos que tienen lugar en la sesión) en episodios, definiendo éstos como secuencias de conducta que son todas de la misma naturaleza. Para ello es necesario aclarar qué tipos de conducta se van a contemplar con el fin de poder calificar y segmentar el proceso en las distintas unidades de análisis.

Análisis de contenido

El análisis de contenido nos permite investigar sobre la naturaleza del discurso, analizando y cuantificando los materiales de la comunicación. Las notas definitorias del análisis de contenido son básicamente cuatro: objetividad, sistematicidad, contenido manifiesto y posibilidad de extraer conclusiones.

La objetividad se refiere al empleo de métodos de análisis que puedan ser reproducidos por otros investigadores, a fin de verificar los resultados obtenidos.

La sistematicidad implica respetar los criterios establecidos para realizar el análisis a lo largo de todo el proceso, evitando cualquier selección arbitraria que altere la veracidad de las conclusiones.

El contenido manifiesto se refiere a la transcripción directa del contenido tal cual fue producido, para secuenciarlo posteriormente en unidades que puedan ser distribuidas en distintas categorías. El contenido manifiesto es el que se puede observar directamente, a diferencia del contenido latente, que subyace o puede leerse entre líneas.

Método seguido en el análisis

1.- Obtención de protocolos: la obtención de los protocolos a partir de las grabaciones de clases supone una minuciosa tarea, toda vez que en numerosas ocasiones se producen al tiempo varias conversaciones entremezcladas, que resultan difíciles de discernir; situación que ocurre, sobre todo, en el grupo cooperativo. La tarea realizada en el propio proceso de transcripción ya pertenece al campo del análisis de contenido, por cuanto supone la toma de ciertas decisiones.

2.- Delimitación de las unidades de análisis: cada uno de los episodios, entendidos como secuencias de conducta de la misma naturaleza, constituye una unidad de análisis.

3.- Para determinar las categorías, siguiendo a Beltrán (1996), hemos agrupado las estrategias de aprendizaje en cuatro bloques: ambientales, personales (relacionadas con la motivación, actitud y afectos), grupales y de tarea. A continuación presentamos un listado de las estrategias incluidas en cada uno de los bloques.

Ambientales:	**Crear un ambiente apropiado para el trabajo.**
Personales:	**Relacionadas con la motivación, actitud y afecto.**
	Concentrarse.
	Estudiar en casa y dedicar tiempo a hacer los deberes.
	Esforzarse desarrollar la responsabilidad.
	Aprovechar el tiempo en clase.
	Mantener un buen estado de ánimo y controlar las emociones.
	Tener una actitud positiva ante el trabajo.
	Estar motivado/a.
	Ser constante.
Grupales:	**Relacionadas con el grupo al que pertenecen**
	Respetar a los demás.
	Facilitar la comunicación.
	Relacionarse positivamente.
	Adquirir una responsabilidad grupal.
	Resolver conflictos y llegar a acuerdos.
	Dar ánimos, apoyo y ayuda personal y ante el trabajo.

Comportarse correctamente

Tarea: Relacionadas directamente con la resolución de la tarea propuesta.

Metacognitivas:

Ordenar ideas

Organizar el trabajo

Planear qué hacer y desarrollar el plan

Comprobar que se entiende lo que se hace

Revisar lo hecho y valorar si va bien

Detectar fallos o errores y reconducir el proceso.

Retroceder y repasar dónde te atascaste y cómo saliste del atasco.

Cognitivas

Adquisición: Leer, atender, escuchar, entender, comprender, razonar, relacionar

Recuperación: Acudir al libro o apuntes; buscar ejemplos parecidos y compararlos.

Indagación: Preguntar y resolver dudas, pedir ayuda - recibir ayuda, explicar, dar ayuda, dar ideas y opiniones - pedir ideas y opiniones, discutir y contrastar ideas, resumir aportaciones, hacer un dibujo, esquema, cuadro, tabla, gráfico...

Transfer y evaluación: Comparar y comprobar resultados, buscar otras formas de hacer los ejercicios, buscar otras alternativas y otras soluciones.

Hecha esta clasificación y tras varias audiciones de las clases y lectura de su trascripción, nos hemos centrado en las estrategias relacionadas con la tarea, determinando las siguientes categorías:

- *Adquisición*: dentro de la adquisición incluiremos todos los aspectos relacionados con la lectura de la tarea, su comprensión, los intentos de expresarla con palabras propias, la anotación de datos, la atención, la escucha a las explicaciones, tanto de la profesora como de otros estudiantes. En general, los episodios que corresponden a interacciones en las que se dan y reciben explicaciones están dentro de esta categoría.

- *Petición de ayuda:* se refiere a cualquier forma de solicitar ayuda bien sea de modo directo, formulando preguntas concretas, o indirecto, mediante cualquier manifestación de incomprensión.

- *Recuperación y transferencia (transfer):* en la recuperación incluimos la búsqueda de problemas similares, la comparación con otras situaciones de la misma naturaleza, la recuperación de información proveniente de otras fuentes -como el libro de texto, los apuntes, etc.- El transfer se refiere al aprendizaje que es adquirido en una situación concreta y aplicado posteriormente a otra situación diferente.

- *Exploración:* tiene que ver con la búsqueda de información relevante (aunque sea desordenada o poco estructurada) para incorporarla a la secuencia de análisis-plan-ejecución.

- *Análisis:* incluye las estrategias encaminadas a la búsqueda de relaciones entre los elementos que intervienen, la reformulación del problema incluyendo nuevos elementos, la búsqueda de enfoques orientados a la elaboración de un plan de actuación y la aportación de nuevas ideas.

- *Planificación:* incluye lo relacionado con los intentos de elaborar un plan, bien sea de forma explícita o implícita.

- *Ejecución:* abarca las actuaciones encaminadas a poner en práctica un plan, como puede ser la resolución de una ecuación, la aplicación de fórmulas, etc.

- *Evaluación*: comprende los aspectos relacionados con la verificación del resultado, la comprobación de soluciones, el contraste y comparación con otros resultados; todo ello referido al contenido que se está trabajando.

- *Evaluación de la comprensión:* incluye las distintas formas de averiguar si cualquiera de los estudiantes está comprendiendo lo que hace. Puede producirse a iniciativa de la profesora o de otro estudiante y en cualquier momento del proceso. La evaluación de la comprensión puede producirse de modo explícito, preguntando directamente si hay dudas, o implícito, observando las actitudes y expresiones de los estudiantes.

- *Control:* referido a las actuaciones encaminadas a orientar el desarrollo de la sesión de clase, guiar el trabajo de los grupos, las actuaciones dentro de un grupo concreto, el ritmo de avance, etc. Los episodios de control pueden estar iniciados por la profesora, con actuaciones encaminadas a mantener la atención de los estudiantes, animar al trabajo y, en definitiva, gestionar la clase. O por los estudiantes, cuando son ellos los que marcan el ritmo, controlan el tiempo u orientan la tarea, asumiendo el papel protagonista.

Hemos considerado también dos categorías que pertenecen al campo de la metacognición, a las que hemos llamado evaluaciones locales y evaluaciones globales:

- *Evaluaciones locales:* se refieren a la valoración de los resultados parciales dentro de su contexto, a la revisión del estado actual del proceso y a la evaluación de análisis realizados, planes y ejecuciones.

- *Evaluaciones globales:* referidas al tanto al proceso completo de resolución, como a la revisión de los momentos cruciales.

Fragmento de la transcripción de una clase 3º ESO

Tema: Parámetros de centralización y dispersión, Forma de trabajo: Grupos base.

A continuación presentamos la hoja de trabajo que se entrega a cada estudiante para que sea resuelta en el seno del grupo base, en el transcurso de la semana, (Anexo 1).

Están resolviendo el ejercicio 5. Ya han comprobado que la media de las calificaciones de las chicas y de los chicos es la misma; sin embargo su comportamiento no es igual. Los ejercicios siguientes van encaminados a que comprueben que las medidas de centralización no son suficientes; y por ello se hace necesario conocer además la dispersión de los datos.

Transcribimos un fragmento de la clase en que los estudiantes están trabajando en su grupo base y van a calcular el rango. Resuelven el punto 5.1 en la última parte de la clase. En el comienzo del discurso parece que la respuesta al punto 5.1 es inmediata; sin embargo, en el transcurso de la resolución podemos comprobar que aparecen algunos conceptos erróneos, y que hay estudiantes del grupo no entienden el concepto de diferencia y eso les lleva a confusión. Unos minutos antes de terminar la clase, empiezan el punto 5.2; pero no les da tiempo.

Comienzan el ejercicio 5

Adquisición (A)

(76) M: Calcula la diferencia entre la nota más alta y más baja de cada grupo. Esa diferencia recibe el nombre de rango. Pues rango igual a mayor menos menor.

Recuperación

(77) I: A ver… dónde está?
(78) M: En la hoja. El 5.1. No. No. Antes… un poco antes. Pone… calcula la diferencia entre la nota más alta… la ves?

Planificación

(79) M: Hay que restar, no? Hay que restar.
(80) P: Mayor menos menor… hay que poner. A ver…

Recuperación

(81) P: ¿Cuál es la fórmula tú?
(82) M: Pues está ahí.
(83) B: Pues para calcular la nota más baja…

Planificación

(84) B: Pues para calcular la nota más baja…pues hay que sumar las …las personas que tienen las notas más bajas y… y dividirla entre dos.
(85) P: Pues eso será…

Exploración

(86) B: O hay que sumar todas y dividirlas entre la nota más baja.
(87) P: ¿La mayor…?
(88) I: ¿La mayor entre la menor?

Planificación (A)

(89) M: Bueno, a ver. En uno de los grupos de chicos o chicas, hay notas muy altas y muy bajas. Ya.
(90) P: Bueno, a ver…

Adquisición

(91) P: En uno de los grupos hay chicos o chicas hay notas muy altas y muy bajas. Personas cuya calificación difiere mucho de la media del grupo, mientras que en otro las notas son similares y no difieren mucho de la media. Calcula la diferencia entre la nota más alta y la más baja del cada grupo. Esa diferencia recibe el nombre de rango.
(92) I: Recorrido es el mayor menos el menor.
(93) B: Eh?
(94) I: Recorrido es el mayor menos el menor.

Petición de ayuda

(95) B: Pero… ¿y para calcular la nota más alta y más baja?
(96) P: Eh?
(97) I: Tú coges la nota más alta y la más baja.
(98) P: ¿De dónde?
(99) B:Te pone… calcula la diferencia entre …
(186) B: Calcula la diferencia entre…
(187) I: La nota más alta y la más baja.

Ejecución

(188) P: Pues la más alta de 3º de chicas es 9 y la más baja, 3. La resta es 6
(189) M: De chicas… 10 menos 0. Chicas…
(190) B: Joroba, pues ya está… restas la más alta y la más baja y ya está.

Evaluación local

(191) I: Sí, claro. Ya está.

Petición de ayuda

(192) M: Sí... tú ¿Y los demás?
(193) B: Pues 10 es la más alta, no?

Exploración

(194) P: Es que te pone que calcules la diferencia. No la nota más alta menos la más baja.
(195) I: Eh? Eh?
(196) B: Que te pone que calcules la diferencia…
(197) P: Pues ya está…
(198) I: Ya? Ya lo has encontrado

Ejecución guiada

(199) B: La resta de la nota más alta y la resta de la nota más baja y ya tienes la diferencia entre la nota más alta y la más baja, claro.

Petición de ayuda

(200) I: Repite, repite…
(201) B: Calculas la nota más alta menos la nota más baja.
(202) I: Ya está. ¿Y cuál es la nota más alta?
(203) B: Pues si lo tienes aquí.
(204) I: ¿Cuál es la más alta?

Exploración y ejecución

(205) B: Un 9. La nota más alta es un 9
(206) P: Pues ya está; un 9 y la más baja un 3; 9 menos 3, 6
(207) B: ¿Y la más baja?
(208) I: 3.
(209) B: Pero… ¿son de los dos grupos?
(210) I: No. Es de las alumnas. De alumnas son 10…
(211) P: Y los chicos es menos 9 menos 3 y las chicas 10 menos 0.
(212) B: A ver…: En el 3º A vamos a poner…
(213) P: Yo he puesto: alumnas de 3º A; he puesto.
(214) B: Las chicas… la nota más alta es 9
(215) P: Es 10 de las chicas.
(216) B: En el 3º A no.
(217) P: En el 3º A las chicas son 10 y los chicos son 9
(218) B: Ah! Sí. Y las chicas: la nota más alta es 10 y la más baja es 0.
(219) P: La más baja 0; O sea, 10.
(220) B: Menos cero, pues…
(221) P: 10
(222) B: Y los chicos…
(223) P: Y los chicos. La más alta… 9 menos 3, 6.
(224) M: En 3º B: Los chicos, 10 menos 5, 5
(225) P: Y las chicas, 10 menos….?
(226) M: Las chicas 10 menos 3; 7
(227) I: Y los chicos… los chicos
(228) P: 10 menos 3; 7
(229) B: ¿Y los chicos?
(230) M: 10 menos 5

Evaluación local

(231) B: Pues ya está. El 5.1
(232) P: Ya está. ¿No había que hallar la diferencia?

Petición de ayuda

(233) B: ¿Qué fórmula expresa el cálculo del rango?
(234) M: El mayor menos el menor, no?
(235) B: ¿Pero cómo se llamaba?

(Ahora dos estudiantes empiezan el 5.2; pero otros dos aún dan algunas vueltas al 5.1 hasta que encuentran la fórmula).

Adquisición

(236) P: ¿Crees que la media y el rango es suficiente para determinar el comportamiento de una serie de datos?

Planificación y ejecución

(237) B: Ene sub i (n_i), pero vamos a pones la n_i mayor. Digo, no. La x_i mayor. Vamos a poner la x_i mayor y la…
(238) P: ¿Crees que la media y el rango es suficiente para determinar el comportamiento de una serie de datos?
(239) B: x_i mayor menos x_i menor, no?
(240) M: A ver… ¿qué fórmula expresa…?
(241) B: El mayor menos el menor.
(242) M: Pero te dice…
(243) B: x; no; se supone que de la x_i
(244) M: ¿Por qué? ¿Por qué?
(245) B: Porque es la que tú estás viendo, no?
(246) P: ¿Tú crees que con la media y el rango son suficientes para determinar el comportamiento de una serie de datos? Pues sí, no? Ya está. Sí.
(247) B: Yo creo que sí.
(248) P: ¿Tú crees que con la media y el rango son suficientes para determinar el comportamiento de una serie de datos? Sí.
(249) B: xi menos xi. Por que mira…
(250) M: Eh?
(251) B: x_i menos x_i.
(252) M: Pero x_i habrá que poner una con mayúscula y otra con minúscula.
(253) B: El 5.2 ¿Tú crees que con la media y el rango son suficientes para determinar el comportamiento de una serie de datos?

Evaluación local

(254) M: Yo he puesto… eso; igual a mayor menos menor. He puesto… Yo sí que he hecho una fórmula.

Exploración

(255) B: No. Eh? No.
(256) M: No que no.
(257) B: No; porque puede haber notas buenas pero con un número mayor de clase… entonces ya no sería la misma nota.
(258) P: Dice: ¿Tú crees que con la media y el rango son suficientes para determinar el comportamiento de una serie de datos?
(259) B: Pero hay que expresarlo de otra forma….
(260) M: No porque…
(261) B: No porque puede haber una serie de datos…
(262) M: Buena y otras mala

(263) B: Una serie de datos compensables…
(264) P: Una serie de cifras altas
(265) M: Una serie de… aceptable, no?
(266) P: Datos superiores a 5…
(267) B: Es que… no todos son…
(268) P: Pero es la nota media
(269) B: Pero no es de todo… es que puede haber… no sé
(270) M: Puff

Se acaba la clase y tienen que traer para el próximo día el punto 5.2 y 5.3.

Resultados del análisis

En los grupos base, cuando los estudiantes inician una nueva tarea se producen numerosos episodios de adquisición y evaluación de la comprensión, dirigidos por uno de los componentes del grupo, el que asume el papel de líder de la gestión del grupo. A medida que avanzan, se van produciendo episodios de petición de ayuda, seguidos de otros de adquisición. Ante una petición de ayuda bien formulada, sigue una respuesta –episodio de adquisición- donde se facilita la información solicitada.

Avanzando más en la tarea, aumenta el número de episodios de planificación, ejecución y evaluación, pero no siguen una trayectoria lineal. El avance hacia la meta en el proceso de resolución de la tarea se ajusta más a un modelo que podríamos llamar espiral, donde recorren varias veces distintas secuencias de estrategias en un avance progresivo. Así, tras una secuencia repetida de episodios de adquisición y evaluación de la comprensión, puede aparecer la reiteración de otra formada por episodios de petición de ayuda y adquisición. A continuación, episodios de planificación, ejecución, evaluación y evaluación local y, de nuevo y más próximos a la meta, se vuelven a repetir las secuencias iniciales. Este modelo espiral se complementa con otro que llamamos de “dientes de sierra” (Gavilán, 2002), donde se producen avances y retrocesos continuos, en una línea de progreso hacia la solución del problema. Los episodios de evaluación global no son frecuentes. Las evaluaciones locales sí ocurren a menudo en esas secuencias espirales, donde se detienen a valorar cada resultado parcial.

Se establecen entre ellos distintos tipos de relaciones en función del momento de aprendizaje en que se encuentren. Así pasan por situaciones de tutoría, donde un estudiante ejerce de tutor de otro, y situaciones más próximas a la cooperación, donde entre todos van avanzando. Los grupos no interactúan siempre entre todos sus miembros; en determinados momentos se dividen en dos parejas o una pareja y un trío, con el fin de poder avanzar más rápidamente. Así, si hay dos personas que manifiestan dificultades de comprensión, se encarga cada uno de los otros miembros de atender a una de ellas, volviendo a coincidir al final del proceso.

Conclusiones

En el análisis de las clases cooperativas hemos comprobado que los estudiantes asumen un papel protagonista, tanto en lo que se refiere a su aprendizaje como a la gestión del trabajo del grupo. La profesora únicamente asume un papel principal en el inicio de la clase, cuando centra la tarea del día; a partir de ahí, su misión consiste en observar cómo trabajan los grupos, orientarlos y encauzar su trabajo. En ocasiones, introduce episodios de control general, donde se dirige a toda la clase. Su finalidad suele ser la de aclarar alguna cuestión sobre la que los grupos han preguntado repetidas veces o, en otros momentos, controlar el ritmo de trabajo.

En el transcurso de la clase, la profesora recorre los grupos, acercándose periódicamente a ellos para evaluar la comprensión y controlar su trabajo. Esta presencia de la profesora es, ocasionalmente, aprovechada por los estudiantes para pedirle ayuda; pero, en general, no la obtienen de manera directa, sino que son remitidos a su propio trabajo. La profesora les orienta y les da pistas, como son repasar lo que han hecho, acudir a algún problema similar, recuperar del cuaderno información valiosa para la tarea, etc.

Los grupos trabajan demostrando un alto grado de participación de sus miembros. Se establece entre ellos una interdependencia positiva que les lleva a desarrollar una doble responsabilidad: sobre su aprendizaje y sobre el de los demás integrantes del grupo. Así vemos cómo se interesan unos por la comprensión de otros, se preguntan por dónde van, se esperan, se animan, se escuchan, se atienden, se interpelan, se llaman la atención unos a otros... Asumen la responsabilidad del aprendizaje de los demás, hasta el punto de que, aun estando la profesora delante, ellos son quienes preguntan si se entiende, si hay dudas, si hay que repetir o si ya se puede avanzar.

En cuanto al liderazgo, destacan dos tipos de líderes diferentes; por un lado, el líder académico, que es la persona que más dominio tiene en la materia y a la que acuden los demás miembros del grupo para contrastar resultados o resolver dudas: su opinión es un punto de referencia para el resto; por otro, el que podríamos llamar líder de gestión, que se encarga de conducir al grupo, marcar el ritmo, controlar el aprovechamiento del tiempo y evaluar la comprensión. Entre ambos guían el progreso del grupo. Cuando uno de ellos no está presente, otra persona del grupo asume su papel.

Los estudiantes desempeñan distintos papeles en el grupo; destacamos, entre ellos, los siguientes: a) iniciar el debate o análisis, rompiendo el hielo, aunque las ideas aportadas no resulten adecuadas; b) aportar distintas ideas, aunque no sean llevadas a la práctica; c) cuestionar o dudar de las ideas aportadas; d) sintetizar las ideas surgidas de los debates; e) poner en práctica y ejecutar las decisiones; f) elogiar al grupo...

En los episodios en los que se da/recibe explicaciones queda patente el hecho de que, prepararse para enseñar algo a alguien, impulsa a reorganizar los propios conocimientos, como afirman Bargh y Schul (1980). Estas peticiones se caracterizan, en general, por ser directas, precisas, específicas y claras; reúnen los requisitos necesarios detectados por Peterson y otros (1984) y Wilkinson (1985). Al tiempo, quien recibe la explicación se beneficia porque recibe la explicación que necesita, en el momento en que la necesita y con un lenguaje familiar. Las explicaciones se refieren a ejemplos concretos y quien las recibe tiene la oportunidad de aplicar de modo inmediato lo recibido, en la tarea que está realizando. Las explicaciones dadas ante una petición de ayuda son aprovechadas por quien las recibe, al estar en una situación caracterizada por un alto grado de motivación de modo que, siguiendo los trabajos de Vedder (1985), se cumplen las condiciones para que sea efectiva la explicación en el aprendizaje de quien la recibe.

Para terminar, expondré las razones que, a juicio de un estudiante de 3º ESO, justifican la eficacia del método (constatada en el cuestionario de final de curso sobre el trabajo realizado).

> *"Te lo explican de manera matemática. Te lo dicen fácil y lo entiendes. Luego lo razonas y dices: "¡ahí va!, si es lo que ha dicho la profesora pero con otras palabras que yo entiendo". Es como si te lo tradujeran. La profesora dice: "Hello" y tus compañeros te dicen "Hola", que es mi idioma y tiene el significado de lo que ha dicho la profe. ¡Eso es mucha ventaja!"* (estudiante de 3º ESO de un grupo cooperativo al finalizar el curso).

Referencias bibliográficas

Alonso, F. et al. *(1987). Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90. Simposio de Valencia. Valencia: Mestral libros.*

Bargh, J. A. y Schul, Y. (1980). On the Cognitive Benefits of Teaching. *Journal of Educational Psychology*, 72, 593-604.

Beltrán, J. (1996). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid (España): Síntesis.

Cockcroft, W. H.(1985). *Informe Cockcroft*. Madrid (España): MEC, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Gavilán, P. (2002). Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa. Una experiencia con estudiantes de 3º de ESO. *Uno*, 31, 34-43.

Gavilán, P. y Alario, R. (2010). *Aprendizaje Cooperativo. Una metodología con futuro. Principios y aplicaciones*. Madrid (España): Ed. C.C.S.

Johnson, D. W. (1980). Constructive Peer Relationships, Social Development and Cooperative Learning Experiences: Implications for the Prevention of Drug Abuse. *Journal of Drug Education*, 10, 7-24.

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1989). *Cooperation and Competition: Theory and Research*. Edina, M. N.: Interaction Book Company.

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1994). *Learning Together and Alone. Cooperative, Competitive and Individualistic Learning*. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, Inc.

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. y Maruyama, G. (1983). Interdependence and Interpersonal Attraction among Heterogeneous and Homogeneous Individuals:

A Theoretical Formulation and a Meta-analysis of the Research. *Review of Educational Research*, 53, 5-54.

Levina, R. E. (1981). L. S. Vygotski´s Ideas about the Planning Function of Speech in Children. En WERTSCH, J. V. (ed.). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. Nueva York: Sharpe.

Palincsar, A. S. y Brown, A. L. (1988). Teaching and Prating Thinking Skills to Promote Comprehension in the Context of Group Problem Solving. *Remedial and Special Education*, 9(1), 35-39.

Peterson, P. L; et al. (1984). Merging the Process-Product and the Sociolinguistic Paradigms: Research on Small-Group Processes. En Peterson, P. L.; Wilkinson, L. C. y Hallinan, M. (eds.). *The Social Context of Instruction*. Orlando: Academic Press.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: MEC, Morata.

Presseisen, B. (1992) A Perspective on the Evolution of Cooperation Thinking. En Davidson, N. y Worsham, T. (eds.). *Enhancing Thinking through Cooperative Learning*. New York: Teachers College Press.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Slavin, R. (1985). *La enseñanz<a y el método cooperativo*. México: Edamex.

Vedder, P. (1985). *Cooperative learning: A study on processes and effects of cooperation between primary school children*. Westerhaven Groningen, (Netherlands): Rijkuniversiteit Groningen.

Vygotsky, L. S. (1977). *Pensamiento y lenguaje*, Buenos Aires: La Pléyade.

Webb, N. (1984). Interacción entre estudiantes y aprendizaje en pequeños grupos. *Infancia y aprendizaje*, 27/28, 159-183.

Wilkinson, L. C. (1985). Communication in all-student Mathematics Groups. *Theory into Practice*, 24(1), .8-13.

Anexo 1

Hoja de trabajo sobre medidas de centralización y dispersión. Grupos base.
Nombre y apellidos:.. Día:.......................

La media aritmética: $\bar{x}$

1.1- ¿Cuál es la nota media en lengua de Marta, María y Juan?
Marta: 3,7,8; María: 9,0,9; Juan: 6,6,6
1.2 - ¿Qué indica la nota media?
1.3 - ¿Cómo sacarías la nota media de la clase en Matemáticas, si las calificaciones del grupo fueron 3,5,8,4,5,6,7,3,7,8,4,5,6,9,3,4,0, 1,5,6,7,8,4,6,6?
1.4 - ¿Lo harías mejor ordenando los datos y anotando sus frecuencias? Inténtalo.
1.5 - Trata de obtener la fórmula de cálculo de la media aritmética.
1.6 - ¿Cómo lo harías si los datos estuvieran agrupados?, ¿te parece razonable tomar como valor del intervalo la marca de clase?
1.7 - Calcula el peso medio de la clase:
A) A partir de los datos que disteis, es decir, de vuestro peso real.
B) A partir de los datos de la tabla, es decir, con los datos agrupados en intervalos.
1.8 - ¿A qué se debe la diferencia?
1.9 - ¿Crees que tiene sentido calcular la media en la serie que representa los colores preferidos? ¿Por qué? ¿En qué series no se puede calcular la media?
1.10 - Escribe la fórmula que empleas para hacer el cálculo de la media de una serie de datos agrupados en una tabla.

La moda, Mo.

2.1 - El color de moda es el color que más se repite. ¿Cuál es en nuestro caso?
La moda se define como el valor de la variable que se repite más veces. (No lo confundas con el número de veces que se repite).
2.2 - ¿Cuál es la moda en las notas de la clase del ejercicio anterior?.¿Cuántas veces se repite esa nota? ¿Y el intervalo modal en los pesos?
2.3 - ¿Siempre tiene sentido hablar de la moda en una serie estadística? ¿Puede que haya más de una moda? Pon un ejemplo.

La mediana, Me.

3.1 - ¿Cuál es el mediano de cinco hermanos cuyas edades son: 12,5,9,7,4?
La mediana se define como el valor de la variable que ocupa el lugar central en una serie ordenada de datos, es decir, hay tantos datos mayores que la mediana, como menores.
Lo primero que tienes que hacer para calcularla es ordenar los datos. Si hay un número par de datos se acepta como mediana la media aritmética de los dos centrales.
3.2 - ¿Cuál es la mediana de la serie: 4,6,3,6,7,2,8,9,5,4?.
3.3 - ¿Cuál es el peso mediano de la clase? Emplea para averiguarlo la columna de las frecuencias absolutas acumuladas.
3.4 - ¿Tiene sentido preguntar cuál es el color mediano con el que vestimos?
3.5 - ¿Se puede calcular la mediana en una serie de variable cualitativa? ¿Por qué?

Necesidad de las medidas de dispersión.

Las notas de un examen de matemáticas en los grupos de 3ºA y 3ºB son las siguientes:
3ºA: alumnos: 7,3,5,5,6,9,4,4,4,8,8,3,6,5
alumnas: 2,9,9,3,3,3,10,7,5,5,10,0

3º B: alumnos: 6,10,10,5,6,7,9,9,8,8,10,8,8

alumnas: 3,10,10,5,7,6,10,10,7,8,10,6,10,7,10,10,7

Responde las siguientes cuestiones:

4.1 - ¿Quién obtiene globalmente las mejores notas en 3ºA: los chicos o las chicas?

4.2 - ¿Quién obtiene globalmente las mejores notas en 3ºB: los chicos o las chicas?

4.3 - Haz una representación gráfica que permita comparar las notas de chicos y chicas en cada uno de los terceros. ¿Qué diferencias encuentras?

4.4.- Calcula la media de las notas de 3ºA y 3ºB.

Puede haber dos series bien distintas y que sin embargo tengan la misma media. La media por sí sola no define el comportamiento de los datos de una serie, por ello necesitamos otros parámetros: las medidas de dispersión.

El rango o recorrido, Re.

En uno de los grupos -de chicos o chicas- del ejercicio anterior hay notas muy altas y muy bajas, (personas cuya calificación difiere mucho de la media del grupo); mientras que en otro las notas son similares, (no difieren mucho de la media). Calcula la diferencia entre la nota más alta y más baja en cada grupo. Esa diferencia recibe el nombre de rango.

5. 1 - ¿Qué fórmula expresa el cálculo del rango?

5.2 - ¿Crees que la media y el rango son suficientes para determinar el comportamiento de una serie de datos? ¿Por qué?

5.3 - Inventa dos series de datos diferentes que tengan la misma media y el mismo rango. ¿En cuál de las dos están los datos más dispersos?

La varianza, s^2 y desviación típica, s.

Ahora vais a calcular cuánto vale la suma de los cuadrados de las desviaciones de las notas de cada grupo respecto de su media. Para ello calculamos lo que cada nota dista de la media, y lo elevamos al cuadrado. En otra columna anotamos la diferencia $(x_i - \overline{x})^2$ y sumamos todos los resultados.

(Recuerda que si hay algún dato que se repite varias veces, en lugar de sumarlo tantas veces como se repita, es más cómodo multiplicar por su frecuencia. Así en la nueva columna pondremos $n_i\,(x_i - \overline{x})^2$).

Si hacemos la media de todas estas desviaciones, tenemos la varianza, s^2.

6.1. - Calcula la varianza de las notas en cada uno de los grupos del ejercicio anterior.

6.2. - Repasa los pasos *que* has dado para lograr la varianza ¿Con qué fórmula indicarías el cálculo de la varianza?

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

6.3. - Calcula la desviación típica de las notas en cada uno de los grupos anteriores. ¿Qué te indican los resultados obtenidos?

6.4. - Repasa los cálculos que has hecho para obtener la desviación típica. ¿Cuál es la fórmula de la desviación típica?

6.5. - Calcula la varianza y la desviación típica de los pesos de la clase. ¿En qué unidades se mide cada una de ellas? ¿Tiene sentido?

El coeficiente de variación, C.V.

El coeficiente de variación es el resultado de dividir la desviación típica entre la media. Se da en tanto por ciento y nos indica la representatividad de la media. Se considera que si el coeficiente de variación supera el 30%, la media no es representativa de la serie.

7.1. - Calcula el coeficiente de variación en las notas de cada uno de los grupos anteriores.

7.2. - Indica la fórmula de cálculo del coeficiente de variación.

Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.

Veamos mediante un ejercicio que, generalmente, en el intervalo ($\bar{x}$-s; $\bar{x}$+s) están aproximadamente el 75% de los datos de la distribución, y en el intervalo (x-2s; x+2s) el 95% de los datos.

8.1. - ¿Cuánto vale en nuestro caso la media en cada grupo? ¿Y la desviación típica? Calcula cuánto vale $\bar{x}$-s y $\bar{x}$+s en cada grupo.

8.2. - ¿Cuántas personas en cada grupo sacan una nota comprendida entre $\bar{x}$-s y $\bar{x}$+s?

8.3. - ¿Y entre $\bar{x}$-2s y $\bar{x}$+2s?

Ejercicio de consolidación.

Las medidas en centímetros del alumnado de un curso son las siguientes:
168,160,168,175,175,160,165,154,163,165,168,168,158,149,160,161,162,166,163,159, 178,
169,158,163,171,170,165,150,167,164,163,165,164,156,174,165,173,172,
168,168.

9.1 - Clasifica la variable.

9.2. - Elaborad dos tablas de distribución de frecuencias, una, agrupando los datos en intervalos de 4cm de amplitud, y otra agrupando los datos en intervalos de 7cm de amplitud. (Podéis repartir el trabajo entre las personas del grupo).

9.3. - Explica qué es lo que representa cada frecuencia de la tabla y cómo se calcula.

9.4. - Representa lo datos de ambas tablas empleando el diagrama que te parezca oportuno.

9.5. - Obtén media, moda y mediana en cada tabla. ¿A qué se deben las diferencias? ¿Cuál de los resultados es más fiable?

9.6. - Calcula los parámetros de dispersión en cada una de las tablas. ¿Cuántas personas miden entre $\bar{x}$-s y $\bar{x}$+s? ¿Y entre $\bar{x}$-2s y $\bar{x}$+2s?

LAS NOCIONES DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

María Magdalena Gea Serrano
Antonio Estepa Castro
Universidad de Jaén. España

Resumen

La presencia de la Estadística en nuestros currícula es cada vez más patente. Un tema fundamental en la formación estadística de nuestros ciudadanos es la asociación estadística, debido a su predominante papel en la toma de decisiones y a que es prerrequisito clave para la formación estadística en las distintas titulaciones universitarias. Presentamos un resumen, muy escueto, de la investigación existente de interés didáctico sobre correlación y regresión, tanto desde el punto de vista del aprendizaje como de la enseñanza. De dicha investigación se desprende que la adquisición por parte de los estudiantes de las nociones de correlación y regresión no es tarea sencilla. El material presentado es importante para la planificación de la enseñanza y para la investigación educativa.

Palabras clave*:* correlación, regresión, investigación educativa, enseñanza, aprendizaje.

Abstract

The presence of statistics in our curricula is increasingly evident. A key issue in the statistical training of our citizens is the statistical association because of its predominant role in decision making as it is key prerequisite for statistical training in various university degrees. We present a summary, very short, of existing research on educational interest about correlation and regression, both from the point of view of learning and teaching. The acquisition by students of the concepts of correlation and regression is not easy, according to presented research. The material presented is important for educational planning and educational research.

Key words: correlation, regression, educational research, teaching and learning.

Gea, M.M.; Estepa, A. (2012*)*. Las nociones de correlación y regresión en la investigación educativa. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 107-117). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

Debido a su aplicabilidad, en la mayoría de ámbitos de la sociedad, la Estadística ha ocupado el estatus que como disciplina merece a finales del s. XX, en consecuencia, ha adquirido presencia curricular en los niveles educativos, lo que ocasiona una necesidad de formación estadística para todos los ciudadanos. El objetivo es fortalecer la comprensión de las estadísticas y el pensamiento estadístico en todos los sectores de nuestra población (Wallman, 1993; Moore, 1990), potenciando de algún modo lo que muchos autores denominan “cultura estadística” para el desempeño de las habilidades de cualquier ciudadano.

La investigación didáctica relativa a nociones estadísticas va poco a poco emergiendo dentro del campo de la Didáctica de la Matemática, y cabe destacar al respecto, entre otros, la implicación y el compromiso manifiesto de los miembros del Grupo de Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la SEIEM en cuanto a la investigación en Didáctica de la Estadística (Cañizares, Estepa, Batanero y Vallecillos, 2006).

Una línea de investigación en desarrollo es la relativa a la asociación estadística y dentro de ella las nociones de correlación y regresión en los distintos niveles educativos en los que se incluye en los currícula, nos centraremos en el actual bachillerato.

Justificación y relevancia de la investigación

El día a día está repleto de ejemplos en los que tomamos decisiones atendiendo, la mayoría de las veces inconscientemente, al grado de asociación (covariación) existente entre las variables que consideramos influyentes. Emitir juicios de asociación efectivos en la toma de decisiones es una actividad cognitiva fundamental del ser humano, e implica en particular, el dominio de las nociones de correlación y asociación (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007). La noción de covariación es una noción difícil, ya que desde el punto de vista epistemológico se distinguen según Barbancho (1973) cinco tipos: dependencia causal unilateral; interdependencia; dependencia indirecta; concordancia y covariación casual.

Las nociones de correlación y regresión no son tratadas como contenidos de enseñanza en la educación obligatoria. Es en el bachillerato donde las nociones de correlación y regresión se incluyen en los contenidos de las asignaturas *Matemáticas I* (bloque 4[9]) y *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* (bloque 3[10]) de las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* respectivamente.

La principal motivación de nuestro estudio proviene de la escasa investigación desarrollada en cuanto a la enseñanza de las nociones estadísticas de correlación y regresión, avalada por los resultados obtenidos hasta el momento como son, entre otros, la existencia de teorías o creencias previas que influyen directamente en la emisión de juicios de asociación; la existencia de concepciones erróneas; el estudio de estrategias utilizadas en la realización de un juicio de asociación; la dificultad de distinguir distribuciones bidimensionales; etc.

La relevancia y el sentido educativo de las nociones de correlación y regresión se desprende de su utilización, tanto en la vida diaria por la frecuencia con que realizamos juicios de asociación, como por ser prerrequisito para la adquisición de otros conceptos estadísticos fundamentales, en consecuencia, se necesita, pues, profundizar en el desarrollo de la investigación didáctica en estos temas, para ofrecer a la comunidad educativa, resultados de interés para la enseñanza del tema. No hemos encontrado investigaciones sobre la enseñanza de la correlación y regresión en bachillerato, en consecuencia pretendemos indagar sobre los fenómenos didácticos que ocurren en el aula cuando se enseña correlación en este nivel de enseñanza.

En el desarrollo de nuestra futura investigación, pretendemos diseñar un estudio empírico mediante una secuencia de enseñanza donde su consecuente implementación nos permita alcanzar el objetivo de investigación anteriormente expuesto. Es por ello que en la actualidad nos encontramos en esta etapa inicial, en que profundizamos en el estado de esta cuestión de investigación, complementada con el estudio y análisis de diversos materiales educativos (libros de texto y recursos didácticos) referidos a estas nociones.

Revisión de la literatura

[9] *REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* (BOE 6/11/07), p. 45449

[10] *REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* (BOE 6/11/07), p. 45475.

La investigación en cuanto a razonamiento covariacional se encuentra ampliamente desarrollada en Psicología, donde se ha evidenciado la presencia de errores y sesgos en la estimación de la covariación al existir en los sujetos expectativas o esquemas referidos a los estímulos presentes en la situación a que se enfrentan (Crocker, 1981; Alloy y Tabachnik, 1984), tal es el caso de la denominada *correlación ilusoria* (Chapman y Chapman, 1967).

Desde el ámbito de la Psicología, Alloy y Tabachnik (1984) reducen a dos las fuentes de información que son relevantes para percibir el grado de covariación entre dos eventos: la información objetiva que ofrece y presenta la situación aleatoria y las expectativas previas o creencias acerca de la covariación de los fenómenos en cuestión. Atendiendo a esta caracterización, McKenzie y Mikkelsen (2007) aportan un punto de vista bayesiano al razonamiento covariacional dado que nuestro sistema cognitivo se aproxima a la tarea de covariación situando la tarea en un marco inferencial más amplio.

A este respecto, la investigación didáctica aporta conocimiento sobre las dificultades que presentan los alumnos ante la adquisición del razonamiento covariacional, siendo desarrollada principalmente con estudiantes universitarios o pre-universitarios, debido en gran parte, al lugar que ha ocupado la enseñanza de la Estadística en la etapa escolar, hasta estos últimos años. Actualmente, la investigación en cuanto al razonamiento covariacional se centra en el estudio del razonamiento covariacional sobre variables cuantitativas, dado la poca investigación desarrollada al respecto, sin menospreciar con ello la importancia de las investigaciones previas sobre variables cualitativas (Zieffler, 2006).

Diversos autores como Crocker (1981) o Moritz (2004) distinguen pasos o subtareas secuenciales en que se puede descomponer un estudio covariacional, partiendo de la necesidad de recoger datos para estudiar la asociación estadística hasta el uso de los resultados obtenidos para producir juicios y predicciones de interés para el investigador.

Un primer paso en la realización de una tarea de correlación es distinguir si las dos variables presentadas conforman una distribución bidimensional, en Estepa (2007) se encontró que aproximadamente la mitad de la muestra distingue entre un distribución bidimensional y dos variables cualesquiera.

En cuanto al análisis de estrategias en los juicios de asociación, diversas investigaciones (Estepa, 1994; Sánchez, 1999; Sánchez, Estepa y Batanero, 2000) llevan a cabo un estudio pormenorizado de la resolución de las tareas de covariación propuestas a los alumnos.

En los estudios realizados se presentan diferentes estrategias de resolución por parte de los estudiantes (Estepa, 1994, 2007 y 2008; Sánchez, 1999; Estepa y Sánchez 2003), extendiéndose incluso el estudio a tablas de contingencia de más de dos filas o columnas (Estepa, 1994; Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996). En la investigación desarrollada por Sánchez, Estepa y Batanero, (2000) se presentan tres ejes que explican las relaciones existentes entre las tareas planteadas y las estrategias empleadas: se encuentra una oposición entre el razonamiento numérico covariacional y el razonamiento gráfico covariacional; se muestra un empleo de argumentaciones numéricas y gráficas; los estudiantes apoyan sus argumentaciones en sus teorías previas.

En cuanto a la investigación de los factores que podrían explicar el razonamiento covariacional adquirido en la enseñanza, la secuenciación de los temas incluidos en un curso de introducción a la estadística, o el desarrollo del razonamiento de los estudiantes sobre temas introducidos con anterioridad a la covariación, Zieffler (2006) señala que:

- el razonamiento covariacional podría modelizarse según un patrón lineal e incluso cuadrático, dependiente de cada individuo.
- no se observa una influencia en el desarrollo del razonamiento covariacional marcada por la secuenciación del tema referido a la variable estadística bidimensional.
- se encuentra una marcada influencia del estudio de la variable estadística unidimensional en el desarrollo del razonamiento covariacional.

Respecto a estos dos últimos resultados, carecería de interés hallar una curva de regresión si las características de la variable estadística no estuvieran correlacionadas, de este modo, se defiende la secuenciación de trabajar en primer lugar la correlación y luego abordar la regresión (Estepa y Sánchez, 1998; Estepa, 2007).

En cuanto a las dificultades generales que presenta un adecuado razonamiento covariacional, Moritz (2004) destaca las siguientes:

- considerar las correspondencia de las dos variables implicadas en el estudio de modo conjunto, en lugar de considerar cada una de las variables de modo aislado;
- la existencia de teorías o creencias previas en cuanto a las variables de estudio y su asociación.

Su investigación se centra en el estudio de tres destrezas importantes: a) generar datos especulativos[11], mediante el desarrollo de gráficos que reflejen los juicios de asociación textuales, b) interpretar gráficos tales como diagramas de dispersión con la correspondiente emisión de juicios de asociación, y por último, c) interpretar tablas de frecuencias.

A estas dificultades cabría añadir las siguientes:

- la estimación del coeficiente de correlación es más precisa a partir del diagrama de dispersión que de otras representaciones, además, depende del tipo de tarea, intensidad de la correlación, tipo de covariación, y tipo de dependencia (Sánchez, Estepa y Batanero, 2000).
- los juicios de asociación parecen estar más influenciados por la presencia conjunta de las variables de estudio que por la ausencia conjunta de éstas, (Estepa, 1994; Zieffler, 2006).
- existe una gran dificultad para el razonamiento covariacional negativo (concepción unidireccional), esto es, los estudiantes perciben la dependencia sólo cuando ésta es positiva, y asignando independencia al caso de asociación inversa (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996)
- existe una tendencia a establecer relaciones de causalidad en el estudio de la asociación (concepción causal de la asociación). Hay estudiantes que sólo consideran la existencia de asociación si se puede atribuir una relación causal entre las variables de estudio (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996).
- la concepción determinista de la asociación. Los alumnos sólo consideran la asociación desde un punto de vista funcional (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996);
- La concepción local de la asociación. Los alumnos utilizan parte de los datos del estudio y no el conjunto de todos los datos para emitir el juicio de asociación (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996).

[11] Generar datos especulativos requiere de un razonamiento covariacional numérico y una comprensión contextual en cuanto al muestreo y recogida de datos (Moritz, 2004).

- Detectar la correlación directa a partir del coeficiente de correlación es más fácil que detectar la correlación inversa e independencia (Estepa, 2007).

La mitad de los estudiantes de la muestra no relacionan la covarianza con el signo de la correlación (Estepa, 2007)

En cuanto a los procesos de traducción entre las representaciones de la asociación (descripción verbal, tablas de valores, diagrama de dispersión y coeficiente de correlación) se detallan en (Sánchez, Estepa y Batanero, 2000) y Moritz (2004).

Un modo de comenzar la enseñanza de la correlación y regresión en los cursos introductorios es pedir a los estudiantes que estimen la intensidad de la asociación a partir de los diagramas de dispersión. Un estudio de este tipo se realiza en Estepa (2008), cuyos resultados resumimos: a) el 9 de cada 10 estudiantes leen correctamente las coordenadas de los puntos; b) 3/4 de los estudiantes discriminan la dependencia funcional de la aleatoria. Siendo más fácil de detectar la dependencia funcional lineal; c) la detección de la correlación positiva depende de la intensidad de la correlación, no ocurre igual con la dependencia negativa; d) el ajuste correcto de una línea recta a un diagrama de dispersión depende del gráfico y de la intensidad de la correlación

Enseñanza

Atendiendo a tres perspectivas fundamentales de análisis como es el análisis del contenido, el análisis de la enseñanza y el análisis del aprendizaje, Lina y cols. (2006) proponen situaciones de enseñanza acompañadas de cada uno de estos análisis en cuanto a las nociones de regresión y correlación.

En la literatura consultada, referida a las nociones de regresión y correlación, encontramos diversas propuestas de aula que evidencian una vez más la gran preocupación docente por estas nociones estadísticas. Por ejemplo:

- el uso de proyectos es una experiencia de aprendizaje muy motivadora y fructífera (Reid y Pecotcz, 2002; Batanero y Diaz, 2004; Watson, 2000; Joram y cols., 2004; Horton y cols., 2004).

- el uso de la Estadística en contexto: (Obremski, 2008); el estudio de patrones antropométricos (Joram y cols., 2004); etc.

- la metodología del aprendizaje colaborativo (Roseth, Garfield y Ben-Zvi, 2008);
- el tratamiento de los parámetros del modelo de regresión lineal: tratamiento de la pendiente de la recta de regresión mínimo cuadrática como tasa de cambio (Groth y Powell, 2004); el uso de la Hoja de Cálculo para estimar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ajuste mínimo cuadrático (Horton y cols., 2004); el estudio de los residuos del modelo y los observados experimentalmente (Todd y cols., 2004);
- la aproximación a los coeficientes de correlación (Pearson, Kendall y Spearman) mediante el diagrama de dispersión (Holmes, 2001);
- el estudio conjunto del coeficiente de determinación y el coeficiente de correlación lineal (Barrett, 2000).

En la investigación que desarrollaremos sobre la enseñanza de la correlación y regresión en bachillerato utilizaremos el marco teórico del enfoque ontosemiótico (EOS) de Godino y cols. Que respecto a la enseñanza distingue seis dimensiones: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional, cada una modelizable mediante un proceso estocástico (Godino Contreras y Font, 2006). Además proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva y la adopción de la negociación de significados como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. El aprendizaje matemático se concibe como el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de dichas trayectorias.

Estas nociones teóricas anteriores se complementan con la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006): a) *Idoneidad epistémica,* b) *Idoneidad cognitiva*, c) *Idoneidad interaccional*. d) *Idoneidad mediacional,* e) *Idoneidad emocional,* f) *Idoneidad ecológica;* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

El sistema de herramientas teóricas desarrollado por el EOS permite realizar distintos tipos de análisis a los procesos de estudio matemático (D'Amore, Font y Godino, 2007) como los siguientes: a) Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos); b) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; c)

Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; d) Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa); e) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Estos análisis vendrían complementados con un análisis adicional sobre la *idoneidad didáctica* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Conclusión

En este trabajo hemos resumido la investigación didáctica que hemos encontrado sobre la correlación y regresión tanto desde el punto de vista de su aprendizaje como de su enseñanza. Creemos que lo expuesto aquí tiene interés para la planificación de la enseñanza de este tema en general y, en particular, para la planificación de un experimento de enseñanza que queremos realizar para delimitar y explicar los fenómenos didácticos que ocurren en la enseñanza de un tema tan importante en nuestro bachillerato. Asimismo también tiene interés para la investigación didáctica, en general, sobre este tema.

Referencias bibliográficas

Alloy, L.B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of Covariation by Humans and Animals: The Joint Influence of Prior Expectations and Current Situational Information. *Psychological Review*. Vol 91 (1), pp. 112-149.

Barbancho, A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ed. Ariel. (Cuarta edición, reimpresión de 1.975).

Barret, G.B. (2000).The Coefficient of Determination: Understanding r^2 y R^2. *Mathematics Teacher*. Vol. 93, núm 3, pp. 230-234.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE. (recuperable en http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm, visitado el 01/03/2011)

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J.D. (1996). Students' understanding of Statistical association in a computer environments. En C. Batanero (Ed.*) Proceeding of the III Roundtable Conference on Teaching Statistics* (pp. 183-198). Universidad de Granada.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J.D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J.B. Garfield y G. Burrill, (eds). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers*, pp. 191-205. Voorburg: Internacional Statistical Institute.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J.D. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 151-169.

Cañizares, M. J.; Estepa, A.; Batanero, C.; Vallecillos, A. (2006). Una década de investigación del grupo de estadística, probabilidad y combinatoria de la SEIEM. *Tarbiya. Revista de investigación e innovación educativa del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Madrid,* nº38, pp. 39-60.

Chapman, L.J. y Chapman, J.P. (1967). Genesis of popular but erroneous Psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology*. Vol. 72 (3), 193-204.

Crocker, J. (1981). Judgment of Covariation by Social Perceivers. *Psychological Bulletin*. Vol. 90, No. 2, 272-292.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J.D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Versión ampliada y revisada de la conferencia invitada al IIe Congrès International sur la Théorie Anthopologique du Didactique. Uzès (France). *Paradigma,* vol XXVIII, núm. 2, pp. 49-77.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión en estudiantes de Educación Secundaria. "Zetetiké" Vol. 15, Nº 28, pp. 119-151. ISSN 0104-4877.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. Revista: "Enseñanza de las Ciencias", 26(2), pp. 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, pp. 25-41.

Estepa, A. y Sánchez, F.T. (1.998). Correlation and regression in secondary school text books. En: Pereira-Mendoza, L., Seu, L., Wee, T. y Wong, W.-K. (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching of Statistics* (vol. 2, pp. 671-676). Voorburg (The Netherlands): ISI Permanent Office.

Estepa, A. y Sánchez , F.T. (2003). Evaluación de la Comprensión de la correlación y la regresión a partir de la resolución de problemas. *Statistics Education Research Journal*. Vol 2 (1), pp. 54-68.

Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), pp. 39-88.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. [Versión ampliada de la ponencia invitada en el X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), publicada en *Paradigma*, vol. XXVII, núm. 2, pp. 221-252.] Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf. Visitado el 15/10/2010.

Groth, R.E y Powell, N.N. (2004). Uso de los proyectos de investigación para ayudar al desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes. *Mathematics Teacher*, Vol. 97, nº2.

Holmes, P. (2001). Correlation: From Picture to Formula. *Teaching Statistics*. Vol 23, núm. 3, pp. 67-71.

Horton, M.R. Phillips, V y Kenelly, J.(2004). Construir tu propio modelo de regresión. *Mathematics Teacher*. Vol.97, núm.4, pp. 284-289.

Joram, E., Hartman, C. y Trafton, P.R. (2004). As People Get Older, They Get Taller. *Teaching Children Mathematics*. Vol. 10, núm 7, pp. 344-351.

Lina, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *RELIME*, vol. 9, núm. 3, p. 383-406.

McKenzie, C. R. M., y Mikkelsen, L. A. (2007). A Bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology*. Vol. 54 (1), p. 33-61.

Moore, P.G. (1990). The Skills Challenge of the Nineties. Journal of the Royal Statistical Society. Vol. 153, núm. 3, p.265-285.

Moritz, J. (2004). Reasoning about Covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, pp. 221-255. (Eds. Ben-Zvi y J. Garfield). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Obremski, T. (2008). Pricing Models Using Real Data. *Teaching Statistics*. Vol. 30. Núm. 2, pp. 44-48.

Reid, A. y Petocz, P. (2002). Students' Conceptions of Statistics:A Phenomenographic Study. *Journal of Statistics Education*. Vol. 10, núm. 2. Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse/v10n2/reid.html. Visitado el 15/10/2010.

Roseth, C.J., Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). Collaboration in Learning and Teahcing Statistics. *Journal of Statistics Education*. Vol. 16, núm. 1. Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse/v16n1/roseth.html. Visitado el 15/10/2010.

Sánchez , F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Sánchez , F.T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*.Vol. 18 (2), 297-310.

Todd, J.G. Hagtvedt, R y Jones, K. (2004). A VBA-based Simulation for Teaching Simple Linear Regression. *Teaching Statistics*. Vol. 26. Núm. 2, pp. 36-41.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 88, núm. 421, pp. 1-8.

Watson, J. M. (2000). Statistics in Context. *Mathematics Teacher*. Vol. 93, núm. 1, pp. 54-58.

Zieffler, A.S. (2006). *A Longitudinal Investigation of the Development of College Students' Reasoning About Bivariate Data During an Introductory Statistics Course*. Universidad de Minnesota. PhD (vista, el 01/03/2011 en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/06.Zieffler.Dissertation.pdf.)

FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR PROBABILIDAD: UN ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE COLOMBIA Y ESPAÑA

Emilse Gómez
Universidad Nacional de Colombia
Carmen Batanero
Universidad de Granada
José Miguel Contreras
Universidad de Granada
José Antonio Fernandes
Universidade do Minho

Resumen

En este trabajo se analiza el acceso a la función docente de los profesores de matemáticas colombianos de educación media y españoles de educación secundaria. Se comparan la formación matemática y la formación didáctica para la enseñanza de la probabilidad. Se destacan las similaridades y diferencias, resaltando la necesidad específica de una mejor preparación para la enseñanza de la probabilidad.

Palabras clave: formación profesores, formación matematica, formación pedagógica, enseñanza probabilidad

Abstract

This paper examines access to the educational function of Colombian mathematics teachers in secondary education and high school Spanish. We compare the mathematical and didactic training for teaching probability. It highlights the similarities and differences, highlighting the specific need for better preparation for teaching probability.

Keywords: training teachers, mathematics education, teacher training, teaching probability

Gómez, E.; Batanero, C.; Contreras, J.M.; Fernandes, J.A. (2012*)*. Formación de profesores para enseñar probabilidad: un estudio comparativo entre Colombia y España. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 119-132). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

El conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno está compuesto, de acuerdo a Hill, Ball y Schilling (2008), por el conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido (o didáctico). Será importante, en consecuencia, que la preparación de los futuros profesores tenga en cuenta estos dos componentes. Esto no siempre ocurre para el caso de la probabilidad, donde algunas investigaciones han mostrado incluso concepciones incorrectas en los profesores de educación primaria (Azcárate, 1996) o sugieren que algunos profesores de secundaria tratan de reducir, o incluso omiten su enseñanza (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006).

La enseñanza de la probabilidad se incluye en la educación secundaria, tanto en España como en Colombia. En Colombia la educación secundaria se divide en dos periodos: La Educación Básica Secundaria, que es obligatoria (11- 14 años), y la Educación Media, de carácter voluntario (15 a 17 años). Estos niveles son muy similares a los de la Educación Secundaria Obligatoria en España (12-15 años) y el Bachillerato (16-18), salvo un desfase en la edad de inicio.

Los estándares colombianos (MEN, 2003) para la enseñanza de las Matemáticas incluyen los siguientes contenidos mínimos de Probabilidad dentro del bloque sobre *Pensamiento aleatorio y sistemas de datos*:

- *Grados 6° y 7°* (11-12 años)*:* Modelos para discutir y predecir la posibilidad de ocurrencia de un evento. Conjeturar el resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. Razonamientos y conclusiones usando información estadística.

- *Grados 8° y 9°* (13-14 años)*:* Cálculo de probabilidades de eventos simples. Conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.). Comparar resultados de experimentos aleatorios con los previstos por un modelo matemático probabilístico. Resolver problemas seleccionando información de fuentes diversas. Interpretar críticamente información estadística.

- *Grados 10° y 11°* (15-17 años)*:* Inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. Diseñar experimentos aleatorios para estudiar un problema.

Probabilidad condicional e independencia. Conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo). Inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Similares contenidos se incluyen en los Decretos Españoles de Educación Secundaria (MEC, 2006). Se incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, Estadística y probabilidad:

- *Primer Curso* (12 años): Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- *Tercer Curso* (14 años): Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
- *Cuarto curso. Opción A* (15 años): Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.
- *Cuarto curso. Opción B* (15 años): Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.

En el Bachillerato (MEC 2007; alumnos de 16 y 17 años) se estudian otros contenidos adicionales, como las variables aleatorias y distribuciones de probabilidad (primer curso) y una introducción a la inferencia, sólo en la especialidad de ciencias sociales en el segundo curso.

La consecución de estos objetivos requiere una adecuada preparación del profesor. Sin embargo, ni en España ni en Colombia, se requiere una licenciatura de matemáticas para el acceso a la función docente. La finalidad de este trabajo es analizar el acceso de estos profesores a dicha función y su preparación en probabilidad y su didáctica. Concluimos con algunas recomendaciones para mejorar la preparación de estos profesores para enseñar probabilidad.

Formación de profesores de matemáticas en Colombia

En Colombia, los profesores de matemáticas de secundaria se seleccionan por concurso público convocado por las instituciones territoriales al que puede acceder cualquier graduado universitario. Se exige un mínimo de 60 puntos para pasar el concurso, que se compone de pruebas de competencias básicas (50% de la puntuación), prueba psicotécnica (20%), una entrevista (10%) y valoración del currículo (20%).

Acceso a la función docente

En lo que sigue diferenciamos la formación de los Licenciados en Matemáticas, un título que, a diferencia del español, incluye una proporción considerable de asignaturas de contenido didáctico, además de la formación específica en matemáticas y otras especialidades. Dentro de estas últimas, encontramos Licenciados en Educación Básica con énfasis en matemáticas, Matemáticos (que no tienen formación didáctica) y egresados de otras titulaciones. Según la Asociación Colombiana de Facultades de Educación (ASCOFADE, 2006), el 54% de los aprobados en las pruebas del último concurso de profesores fueron Licenciados en Matemáticas (que actuarían de preferencia en educación media, pero también en educación básica-secundaria) o Licenciados en Educación básica con énfasis en matemáticas.

Formación de los licenciados en matemáticas

La normativa de los programas de Licenciatura en Matemáticas no fijan los contenidos, que se definen en cada universidad aplicando el principio de autonomía universitaria. La diversidad (Tabla 1) de estos currículos implica también una gran variabilidad en los niveles de cultura estadística de los profesores colombianos. La formación matemática constituye al menos el 40% del currículo en la mayoría de Universidades, con gran variabilidad en el nivel de profundidad en los temas disciplinares. No todas las universidades cuentan con personal calificado, pues puede no existir un Departamento de Matemáticas o no contar con profesores con formación Doctoral. En general, los planes tienen pocas asignaturas opcionales, hay una de epistemología y de historia de las matemáticas, una o dos de componente informático y se tienen tres ejes temáticos: Aritmética y Álgebra, Cálculo y Geometría; en algunos casos hay un cuarto eje temático de Estadística o de Física.

El tiempo dedicado a la probabilidad es escaso y está impartido en una asignatura compartida con temáticas de estadística descriptiva e inferencial. Solo en la Universidad Pedagógica Nacional se tiene un curso orientado exclusivamente a Probabilidad y se cubren otras temáticas especializadas de estadística pues tiene una línea de investigación dedicada a estadística y probabilidad que ofrece tres asignaturas electivas con temas avanzados. También se resalta la inclusión de Pensamiento aleatorio en la Universidad de Cundinamarca y de Historia del cálculo y la estadística en la Universidad de Tolima.

Tabla 1. Formación matemática y estadística en Licenciaturas en Matemáticas en Colombia según Universidad

Universidad y año aprobación plan	Créditos[1] o semestres	Asignaturas matemáticas	Asignaturas estadísticas
Pedagógica Nacional, 2008	151 cred.	14 obligatorias y tres electivas	Estadística, Probabilidad (obligatorias) Inferencia y métodos estadísticos; Análisis de varianza y regresión lineal y Análisis multivariado (electivas)
Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2009	175 cred.	20 obligatorias y una electiva	Estadística descriptiva y Estadística inferencial (electivas)
Tolima, 2010	167 cred.	16	Estadística descriptiva, Estadística inferencial, Historia del cálculo y la estadística y Modelos estadísticos para investigación
Amazonía[2]	10 sem.	15 obligatorias y dos seminarios electivos	Probabilidades y Estadística inferencial
Antioquia, 2005	220 cred.	9	Estadística
Nariño, 2005	10 sem.	20	Cálculo probabilidades, Estadística descriptiva e inferencial, Estadística avanzada
Cauca	10 sem.	18	Análisis de datos I y II
Quindío	160 cred.	16	Métodos Estadísticos, Probabilidad e Inferencia Estadística
Cundinamarca	10 sem.	25	Pensamiento aleatorio, Probabilidad y estadística I y II
Industrial de Santander. 2009	161 cred.	15	Estadística I y II
Tecnológica de Pereira[2]	12 sem.	14	Estadística matemática, Física Estadística

[1]Un crédito = 48 horas de trabajo del estudiante [2]Licenciatura en Matemáticas y Física

En general, los contenidos sobre probabilidad tratan sus diversos significados (Batanero, 2005), excepto el lógico, destinando mayor atención al enfoque clásico, frecuencial y axiomático, con escasas menciones del significado intuitivo o subjetivo.

Al final de la instrucción se espera que el estudiante comprenda teoremas básicos (como el teorema de probabilidad total o el principio de multiplicación), el teorema de Bayes, independencia, variables aleatorias y los modelos de distribuciones más conocidas (binomial y normal). Se proporciona apoyo de libros de texto dirigidos a estudiantes de ciencias e ingeniería y de herramientas tecnológicas. La relación de probabilidad con inferencia es casi nula, pues en muchos casos los contenidos de inferencia son mínimos (diferencia entre muestreo probabilístico y no probabilístico, procedimientos de pruebas de hipótesis e intervalos de confianza para una muestra bajo normalidad, nociones de distribuciones de muestreo y Teorema Central del Límite) o no se alcanzan a desarrollar por la extensión del contenido programado.

Formación didáctica

Se dedica a la formación didáctica entre el 25% y el 40% del contenido, predominando el conocimiento general en aspectos psicológicos, curriculares, epistemológicos y vinculados con la tecnología. El número de asignaturas se relaciona en la Tabla 2, discriminando el componente obligatorio del optativo y práctico. Hay también una alta variabilidad, con entre una y tres asignaturas de Didáctica de la Matemática. El conocimiento didáctico específico para cada eje temático está ausente en muchos casos, y no hay asignaturas optativas.

El número de horas del componente práctico varía mucho: Mientras que los dos planes más antiguos incluyen únicamente talleres con actividades formativas para la práctica, la Universidad del Tolima programa una actividad práctica para cada eje temático, y la Universidad Pedagógica Nacional realiza tres prácticas en contexto real. En algunos casos estas prácticas no alcanzan a cumplir el mínimo establecido (MEN, 2010), que sería un año lectivo escolar en el contexto de su futuro desempeño docente.

Tabla 2. Formación didáctica en Licenciaturas en Matemáticas en Colombia según Universidad

Universidad y año aprobación del plan	Asignaturas de didáctica	Asignaturas prácticas
Pedagógica Nacional (UPN), 2008	9*	3*
Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2009	3 obligatorias; 1 electiva	1
Tolima, 2010	11 obligatorias*; 1 electiva	4*
Amazonía	12	2
Antioquia, 2005	15	5

Nariño, 2005	11	3
Cauca	8	2
Quindío	9	2
Cundinamarca	8 obligatorias; 2 electivas	2
Industrial de Santander. 2009	13*	2
Tecnológica de Pereira	14	1

*Incluye una asignatura de didáctica de la estadística, aunque el nombre difiere de una institución a otra.

Pocas universidades ofrecen asignaturas específicas de didáctica de la estadística o de la probabilidad, pues solo tres tienen una dedicada a la enseñanza de la estadística, cuyos contenidos se enfocan al análisis de datos en forma prioritaria y requiere conocimiento previo de probabilidad con enfoque axiomático. Los futuros profesores son los principales responsables de su instrucción en la asignatura, donde leen y discuten, bajo la orientación del formador, documentos de organizaciones internacionales reconocidas y artículos, en su mayoría de origen español. Los temas tratados en esta asignatura son los sistemas de representaciones, medidas de tendencia central y de dispersión y algunos conceptos básicos de probabilidad, así como el conocimiento pedagógico de ese contenido, modelos de enseñanza, diseño curricular según orientaciones internacionales, características del razonamiento estocástico, y algunos errores, obstáculos y dificultades.

Pocos futuros profesores tienen contacto con los estudiantes de secundaria en el aula para conocer las dificultades en la enseñanza de probabilidad, pues sólo dos instituciones destinan un tiempo específico para la aplicación en aula de los conocimientos adquiridos en la temática de probabilidad y estadística.

Formación de licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas

La formación en esta licenciatura difiere de la anterior en el nivel de formación para el cual se dirige. Mientras ésta se orienta a los niveles obligatorios (educación básica, estudiantes de 6 a 14 años), la Licenciatura en Matemáticas se orienta principalmente a la educación media cuyo fin es preparar a los estudiantes para el ingreso a la educación superior (en la modalidad académica) o al trabajo (en la modalidad técnica). En consecuencia, el contenido matemático presente en la Licenciatura de Matemáticas es mayor que en ésta otra licenciatura.

En la actualidad, el país cuenta con 43 programas dirigidos a formar licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas. La mayor parte del contenido (70-80%)

son educativos, donde estudian las siguientes asignaturas (García, 2003): enseñabilidad; educabilidad; realidades, tendencias sociales y educativas institucionales, nacionales e internacionales; estructura histórica y epistemológica de la pedagogía. Además el resto de contenidos se centra en las matemáticas básicas correspondientes a los temas curriculares (Pensamiento numérico, Pensamiento aleatorio, Geometría y Magnitudes). Tienen por tanto una formación media en contenidos de probabilidad (suficientes para la enseñanza) pero no un componente específico en didáctica de la probabilidad.

Formación de postgrado para la docencia

Si el candidato a profesor de secundaria tiene una titulación sin componente de educación (por ejemplo, es un Matemático), al año de obtenido el concurso ha de acreditar un postgrado en educación con un mínimo de 10 créditos (480 horas de trabajo del estudiante). Los objetivos de este programa, cuyos contenidos no son específicos de didáctica de la matemática o probabilidad son, entre otros (MEN, 2005): (a) Consolidar la visión profesional del profesor y la responsabilidad del ejercicio de la docencia, orientada por valores éticos; (b) Construir una fundamentación pedagógica y una actitud de formación permanente que mejore progresivamente su práctica educativa; y (c) Adquirir herramientas que faciliten la organización de ambientes y el diseño de situaciones pedagógicas.

Formación de los profesores españoles

Acceso a la función docente

En España, los profesores de matemáticas de secundaria se seleccionan también por concurso público convocado por las diferentes autonomías. La prueba consta de dos partes: la primera (40%) escrita sobre conocimientos matemáticos, en donde el concursante ha de desarrollar un tema elegido por él, entre tres propuestos por el tribunal de entre todos los que forman el temario. La segunda (60%) de conocimientos didácticos se divide en dos partes. La primera (30%) consiste en la preparación de una programación didáctica escrita sobre un tema del currículo con 12 unidades didácticas, con unos criterios establecidos y la segunda (30%) en la exposición oral de un tema de dicha programación, entre tres propuestos por el tribunal. Posteriormente, entre los que superen el concurso se valoran también los méritos del currículo a efecto de adjudicación de plaza, pues se aprueban más concursantes que plazas disponibles.

A estas pruebas puede acceder cualquier graduado universitario, aunque la mayoría de los concursantes son Licenciados en Matemáticas (cuyos contenidos son exclusivamente matemáticos). Hasta el año 2009 se exigió también la realización del "Curso de Aptitud Pedagógica" que proporcionaba conocimientos generales de pedagogía y psicología y se realizaba, aproximadamente, durante un cuatrimestre académico, incluyendo algunas sesiones prácticas en centros de educación secundaria. Desde 2009 se exige la realización de un Máster de Formación del Profesorado de Secundaria, donde se contemplan especialidades, y el concursante debe seguir la de Matemáticas o Matemáticas e Informática. Aproximadamente el 50% de los estudiantes del Máster son licenciados en matemáticas y el resto de otras especialidades de ciencias, ingenierías o arquitectura, ciencias económicas, empresariales o dirección de empresas. Todas ellas tienen asignaturas de matemáticas, aunque no todas de probabilidad. A continuación se describe la formación recibida por los licenciados de matemáticas y en el Máster de Secundaria.

Licenciatura en matemáticas

La Licenciatura de Matemáticas (actualmente en proceso de transformación a un título de Grado) ha tenido hasta la fecha una duración de cinco cursos académicos (que se transformarán en cuatro) y varía de una a otra universidad, aunque en todas ellas incluyen las materias básicas de matemáticas: Análisis; Álgebra; Geometría; Estadística y asignaturas que se ocupan de los aspectos más aplicados de las matemáticas. Respecto al estudio de la probabilidad, todos los licenciados en matemáticas han cursado varias asignaturas específicas de probabilidad y estadística a lo largo de la carrera. Seguidamente describimos la enseñanza de la probabilidad en tres universidades, para mostrar la variabilidad, aunque en todas ellas han realizado al menos un curso:

- En la Universidad de Granada se imparten varias asignaturas en las que se trata explícitamente la probabilidad, algunas troncales (obligatorias) como "Probabilidades y Estadística" (10,5 créditos) o "Ampliación de Estadística" (9 créditos). Otra asignatura, de carácter optativo, que incluye la enseñanza de la probabilidad son "Teoría de la Probabilidad" (6 créditos) cada una. Además algunos alumnos eligen asignaturas tales como "Análisis de datos", "Análisis multivariante", "Estadística computacional", "Inferencia estadística", "Modelos de la investigación operativa" y "Procesos estocásticos”, que implícitamente utilizan la probabilidad.

- En la Universidad de La Laguna existen dos asignaturas troncales: “Probabilidades I” y “Probabilidades II”, de 6 créditos cada una. Además, implícitamente aparece la probabilidad en otras asignaturas troncales, como en “Estadística descriptiva” de primer curso, “Estadística I” de segundo e “Historia de las matemáticas”.

- En la Universidad de Salamanca se dedican 12 créditos a la enseñanza de la probabilidad en la asignatura troncal “Probabilidades y estadística”; con carácter optativo se ofrecen “Probabilidad y medida” y “Teoría de la probabilidad” y otras que tratan la probabilidad de forma implícita: “Procesos estocásticos” y “Análisis de datos multivariantes”, todas ellas de 7,5 créditos.

Máster universitario de educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas

Recientemente se ha implantado el Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, orientado a los estudiantes que se preparan profesionalmente para la docencia en dichos niveles educativos, y respondiendo a la obligatoriedad de cursar estudios de máster para ejercer la docencia en estos ámbitos, dispuesta en la Ley Orgánica de Educación 2/2006 de 24 de mayo de 2006 (LOE, 2006) y la regulación establecida para estos máster en la Orden ECI/3858/2007 de 27 de diciembre (ECI, 2007).

Más de 40 universidades españolas imparten este máster, cuya duración es de un año académico (60 créditos) e incide en las competencias que menos dominan los licenciados, como la formación psicológica, pedagógica y sociológica. La estructura de las enseñanzas del citado Máster es común y se estructuran en dos módulos: Uno genérico con formación básica y común para todos los alumnos (entre 12 y 15 créditos según la universidad) y otro específico que desarrolla las competencias relacionadas con las diferentes disciplinas o especialidades docentes (entre 20 y 30 créditos). Además, es obligatorio realizar un periodo de prácticas en centros de Educación Secundaria y un trabajo fin de máster (entre 16 y 20 créditos).

Los contenidos de los módulos varían de una a otra universidad. Aunque cada universidad interpreta de un modo diferente estas asignaturas, no todas imparten sesiones sobre probabilidad y su didáctica, pues algunas universidades no imparten este contenido, otras dedican hasta 3 créditos completos a la didáctica de la estadística y probabilidad, y en otras el tema sólo se incluye a través de la posibilidad de elegirlo para el trabajo fin de Máster. En la Tabla 3 se presenta un resumen de los planes de estudio del Máster en seis universidades, donde se puede observar esta disparidad.

Tabla 3. Formación didáctica en el Máster de Secundaria (matemáticas) según Universidad

Universidad	Genérico	Prácticas + Tesis Máster	Módulo específico	Probabilidad
Alicante	14 créditos	16 créditos	Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (15); Introducción a las metodologías y técnicas de investigación en Didáctica de la Matemática (9); Innovación en investigación en enseñanza de la matemática (6)	1 crédito en cada una asignaturas específicas
Cádiz	12 créditos	16 créditos + 8 materias optativas	Complementos disciplinares (6), Enseñanza y Aprendizaje (12); Investigación e Innovación (6)	No trata la probabilidad o didáctica de la probabilidad
Granada	12 créditos	16 créditos + 4 materias optativas	Complementos de formación disciplinar (6); Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas (12); Innovación docente e investigación educativa (4)	No trata la probabilidad o didáctica de la probabilidad
Pública de Navarra	14 créditos	16 créditos + 3 materias optativas	Complementos formación disciplinar (Estadística y Probabilidad) (6), Intensificación disciplinar (Análisis, Álgebra y Geometría) (6); Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (9); Iniciación a la investigación e innovación en didáctica de las matemáticas (6)	1,5 créditos en la asignatura de Complementos; 1 crédito en Aprendizaje y enseñanza; 0,5 en Iniciación a la investigación
Salamanca	15 créditos	18 créditos	Didáctica de las Matemáticas (3); Recursos en Matemáticas (3); Innovación docente en Matemáticas (3); Iniciación a la investigación educativa en Matemáticas (3); Historia de la Matemáticas (3); Evaluación en Matemáticas (3); Metodología en la Matemática (3); Contenidos en el contexto de la matemática (3)	No se trata la probabilidad o la didáctica de la probabilidad
Santiago de Compostela	16 créditos	18 créditos	La ciencia y su metodología (3); Diseño de investigaciones	2,5 créditos en la asignatura Análisis

	educativas (3), Matemáticas para el profesorado (5); Análisis didáctico en la Educación Secundaria (6); Diseño, Planificación y Evaluación de Propuestas Didácticas en Matemáticas en la Educación Secundaria (3)	didáctico en la educación secundaria

Conclusiones

El estudio realizado muestra algunos puntos comunes y diferencias en la forma de acceso y la formación general y probabilística de los profesores de secundaria en los dos países.

Entre las similaridades destacamos que no se requiere una Licenciatura en Matemáticas. En el caso de Colombia, se puede acceder sin una titulación en educación, o con una Licenciatura en Matemáticas o en Educación Básica con énfasis en matemáticas y, como consecuencia, aproximadamente el 50% de los profesores que superan el concurso en la actualidad pueden provenir de otras disciplinas, lo que no garantiza que hayan seguido un curso de probabilidad en su formación inicial. En España, aunque la mayoría de profesores es Licenciado en Matemáticas (por tanto ha cursado probabilidad), hay también un porcentaje creciente en los últimos años de licenciados en otras ramas de ciencias, economía, arquitectos o ingenieros, algunos de los cuáles no han cursado esta materia.

Una diferencia importante es que en España el Licenciado en Matemáticas tiene una formación puramente disciplinar, mientras que en Colombia, entre el 25% y el 40% se dedica a aspectos epistemológicos, psicológicos y didácticos de la matemática, por la cual los profesores colombianos tendrán conocimientos generales en estas materias.

En ambos países se requiere una formación didáctica, que en el caso de España se realiza mediante el Máster de Secundaria antes de acceder al concurso y en Colombia mediante un postgrado en pedagogía, una vez superado el concurso, aunque no se requiere a los licenciados en educación. La principal diferencia es que en Colombia esta formación pedagógica es general y en España está orientada específicamente a la Didáctica de la Matemática.

Como ocurre en otros países (Batanero y Díaz, 2011), no es usual en los cursos de formación de futuros profesores de matemáticas ni en España ni en Colombia introducir un curso específico sobre didáctica de la probabilidad. Tan sólo en algunos Másteres de secundaria españoles se incluye, aunque se dedica un tiempo mínimo (entre 1 y 3 créditos, es decir hasta 30 horas lectivas y 75 horas de trabajo del alumno). Esta situación puede explicar los resultados de un estudio realizado (Contreras, 2011) con futuros profesores de secundaria, tanto licenciados en matemáticas como alumnos del Máster de Formación del Profesorado, que mostró la existencia de sesgos en el razonamiento probabilístico en ambos colectivos.

Este autor no incluyó en su estudio de evaluación los conocimientos didácticos de los futuros profesores sobre probabilidad, que al no ser enseñados específicamente podrían ser insuficientes. Por este motivo, concluimos el interés de un futuro estudio de evaluación sobre los futuros profesores de matemática, colombianos y españoles, que permita hacer un diagnóstico de su nivel de conocimiento matemático y didáctico de la probabilidad al momento de egresar del programa de formación.

Referencias bibliográficas

ASCOFADE - Asociación Colombiana de Facultades de Educación. (2006, Octubre). Resultados en matemáticas segunda convocatoria concurso docentes y directivos docentes. Trabajo presentado en el *Foro Educativo Nacional de Matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics, 2*(2), en prensa.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

ECI (2007). *Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.*

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

García, G. (2003) Marco de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas. En *Documentos y marco legal de SABER PRO*. ICFES. On line: www.icfes.gov.co/.

Hill, H., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teacher's topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

LOE (2006). *Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo, por la que se regula las enseñanzas educativas en España en diferentes tramos de edades.*

MEC (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

MEN (2003). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Santafé de Bogotá: Colombia. Online: www.mineducacion.gov.co/.

MEN (2005). *Decreto 2035 del 16 de junio de 2005 por el cual establece los objetivos y los requisitos del programa de pedagogía que deben acreditar los profesionales con título diferente al de licenciado en* educación. Online: www.mineducacion.gov.co/.

MEN (2010). *Resolución 5443 del 30 de julio de 2010 por la cual se establecen las características específicas de calidad de los programas de formación profesional en Educación.* Online: www.cntv.org.co/.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

ACTITUDES DE LOS PROFESORES PORTUGUESES HACIA LA ESTADÍSTICA: UN PRIMER ANÁLISIS CUALITATIVO

José Alexandre Martins
Instituto Politécnico da Guarda,
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD). Portugal
Maria Manuel Nascimento
Centre of Mathematics of UTAD. Portugal
Assumpta Estrada,
Universidad de Lleida. España

Resumen

La importancia de las actitudes de los profesores hacia la estadística radica en que pueden afectar a la práctica docente y llegar a reflejarse en las actitudes (futuras) de sus estudiantes. Estas son razones más que suficientes para interesarnos en su estudio a fin de garantizar las mejores condiciones para la aplicación de una verdadera mejora de la enseñanza de la estadística. La influencia de las actitudes en la enseñanza de la estadística en diferentes contextos ya se considera en trabajos previos de Estrada et al. (2004, 2010) y Martins et al. (2011). Nuestro trabajo se centra en el estudio de las actitudes de docentes de primer ciclo de educación básica (6–9 años) en Portugal y es parte de un estudio más amplio que analiza las actitudes de los profesores portugueses de matemática hacia la estadística. Como instrumento de medida utilizamos la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002) y analizamos también las razones y motivaciones que dieron estos profesores como respuesta a algunos de los ítems presentados en la versión abierta del cuestionario.

Palabras clave: actitudes, educación estadística, formación de profesores, didáctica de la matemática, dominio afectivo.

Abstract

The importance of teachers' attitudes towards statistics is that it can affect teaching and get reflected in the (future) attitudes of students. These reasons are enough interest us in their study in order to ensure the best conditions for the application of a real improvement in teaching statistics. The influence of attitudes in teaching statistics in different contexts is seen in previous work by Estrada et al. (2004, 2010) and Martins et al. (2011). Our work focuses on the study of the attitudes of teachers first (6-9 years) cycle of basic education in Portugal and is part of a broader study that examines the Portuguese Mathematics teachers' attitudes towards statistics. Here we discuss teachers' attitudes towards statistics, and the reasons and motivations they gave in response to some open-ended items from the EAEE Scale of Attitudes Towards Statistics (Estrada, 2002). We begin the analysis of those answers with a survey submitted to Portuguese in-service teachers of first cycle. We define the content categories and we present an analysis of those data as an exploratory approach.

Keywords: teacher attitudes, statistics education, teacher instruction, mathematics teaching, affective domain.

Martins, J.A.; Nascimento, M.M.; Estrada, A. (2012*).* Actitudes de los profesores portugueses hacia la estadística: un primer análisis cualitativo. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 133-151). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

La Estadística es un componente importante de la educación escolar en el que los profesores tienen un rol fundamental y las actitudes hacia la materia intervienen de forma determinante en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Estrada, 2009). Por ello es evidente que sin el compromiso del docente en la enseñanza y en el aprendizaje es muy difícil que cualquier cambio significativo se produzca en la educación pues tal como Nóvoa (1992) señaló, "Las escuelas no pueden cambiar sin la participación de los maestros".

Asimismo, si se desea involucrar a los estudiantes en un aprendizaje más cognitivo y menos determinista y rutinario, además de tener en cuenta las características intrínsecas y/o diferenciadoras de la estadística (Gal y Ginsburg ,1994) el profesor debe ir más allá de la mera transmisión de conocimientos, con actitudes positivas, tanto en términos de la disciplina y del contenido de la misma, como en relación a los estudiantes, a la escuela y a la educación ya que sus propias actitudes no solo pueden afectar a la práctica docente sino lo que es más grave pueden reflejarse en las actitudes (futuras) de sus estudiantes (Estrada y cols., 2004).

Consideramos que estas son razones suficientes para adentrarnos en el estudio de las actitudes de los profesores de matemáticas hacia la estadística a fin de garantizar las mejores condiciones para la aplicación de una verdadera mejora de la enseñanza de esta materia. Este objetivo no es sólo un deseo reflejado en las directrices curriculares, pues según Garção (2004), "(...) la experiencia adquirida y desarrollada a lo largo de los años pueden sobreponerse a discursos y a intenciones de cambio."

Así, en este trabajo, que es parte de un estudio más amplio sobre las actitudes y conocimientos estadísticos de docentes de matemáticas de educación básica en Portugal, nos centramos en el estudio de las actitudes de profesores de primer ciclo (6–9 años). Complementa trabajos previos de Estrada y cols. (2004, 2010) y también Martins y cols. (2009, 2011) sobre la influencia de las actitudes en la enseñanza de la estadística en diferentes contextos y en este sentido, más allá de la presentación de una definición del término actitud y un enfoque multidimensional de este concepto a través de sus componentes y factores básicos, utilizados por Estrada (2002) y presentados en el anterior congreso de la SEIEM, analizamos además las justificaciones dadas para las razones y motivaciones que dieron los profesores portugueses de primer ciclo como respuesta a algunos de los ítems presentados en la versión abierta de la Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada EAEE (Estrada, 2002).

Actitudes hacia la Estadística

Las actitudes son parte integrante de todas las materias de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo. Sin embargo resultan difíciles de definir y no hay unanimidad respecto al significado del término actitud.

McLeod (1992) al conceptualizar el dominio afectivo de la educación Matemática distingue entre emociones, actitudes y creencias. Las emociones son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas mientras se estudia Matemáticas; mientras que las actitudes son respuestas o sentimientos más intensos y estables que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo.

Respecto a la Educación Estadística, Gal y Garfield (1997) sugieren que durante mucho tiempo, los términos de actitud y sentimientos han sido utilizados indistintamente. Algunos pensamientos o creencias intensos pueden ser el origen de las actitudes hacia la Estadística que definen como una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio. Las actitudes tienen intensidad moderada y una componente cognitiva menor que los sentimientos o las creencias. Siempre se expresan positivamente o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto) y puede representar sentimientos vinculados externamente a la materia (profesor, actividad, libro, etc.).

Además, en la actualidad, las actitudes hacia la Estadística se consideran un concepto pluridimensional y jerárquico, compuesto de diferentes elementos o dimensiones analizables por separado (Gil Flores, 1999). Han sido estudiadas por diversos autores, principalmente en estudiantes universitarios, a partir del uso de escalas o cuestionarios entre los que destacamos el SAS de Roberts y Bilderback (1980), el ATS de Wise (1985) y el SATS de Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995), por ser los cuestionarios más utilizados a nivel internacional. Otros trabajos han analizado la influencia de diversas variables tales como el género (Harvey, Plake y Wise, 1985; Anastasiadou, 2005), el rendimiento académico (Harvey, Plake y Wise, 1985; Roberts y Reese 1987; Nasser, 2004), la experiencia formativa en Matemáticas y Estadística

(Elmore y Vasu, 1980, 1986; Auzmendi, 1992; Mastracci 2000), el tipo de bachillerato o el área de estudios (Silva y cols., 1999; Gil Flores, 1999; Cuesta y cols. 2001).

En general son escasas las investigaciones realizadas en el ámbito de los profesores, posiblemente porque la estadística no es una materia obligatoria en su formación y los trabajos que dedican su atención a este colectivo estudian sus actitudes juntamente con otras variables. Entre ellos destacamos, en el mundo anglosajón, los de Onwuegbuzie, (1998, 2003), Watson y cols. (2003) y Nasser (1999,2004), en España los de Estrada y cols. (2004, 2009,2010), en Perú los de Aparicio y Bazán (2006,2008) y en Portugal los de Martins y cols. (2009,2011). Una descripción más detallada de ellos será encontrada en Estrada (2010).

La escala de actitudes hacia la estadística (EAEE)

En nuestro trabajo, consideramos las actitudes de los profesores hacia la estadística:

> *"como un rasgo compuesto de diferentes componentes, analizables por separado y cuya identificación nos permite incidir en su formación y cambio"* Schau y cols. (1995)

En el momento de elegir el instrumento de medida decidimos utilizar la escala de actitudes hacia la estadística (EAEE), en **Anexo1**, propuesta por Estrada (2002) por ser específica para docentes y por considerar diferentes aspectos didácticos de las actitudes, a nuestro entender fundamentales en el ámbito de los profesores. Además, la escala EAEE se construyó combinando la escala SAS (Roberts y Bilderback, 1980), la Escala ATS (Wise, 1985) ambas consideradas internacionalmente como las más usuales y la española de Auzmendi (1992). Asimismo, nuestro interés por los aspectos didácticos de las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación y en ejercicio, queda reflejado al considerar dos tipos distintos de componentes:

Componentes antropológicos:

- componente social: actitudes relacionadas con la percepción y valoración del papel del a estadística en el ámbito sociocultural de cualquier ciudadano;
- componente educativo: analizaremos en este componente el interés hacia la estadística y su aprendizaje, la visión de su utilidad para el alumno, su opinión sobre si debiera ser incluida en el currículo y la dificultad percibida;

- componente instrumental: se recoge aquí la utilidad hacia otras materias, como forma de razonamiento y como componente cultural.

El propósito de introducir estos componentes fue, además de contemplar todas aquellas cuestiones referentes a la utilidad, formación y multidisciplinariedad de la estadística, recoger también todas aquéllas que la relacionan directamente con el trasfondo social, económico y cultural. Por otro lado, la escala EAEE, tiene también en cuenta los componentes pedagógicos clásicos contemplados en investigaciones sobre actitudes como las de Auzmendi (1992), Gil (1999) o Gomez Chacón (2000):

Componentes pedagógicos:

- componente afectivo: son los sentimientos personales hacia la estadística y su estudio, como por ejemplo: agrado-desagrado hacia esta materia, miedo-confianza al iniciar su estudio o al resolver problemas, interés-desinterés por el tema;
- componente cognitivo: incluye las concepciones y creencias acerca de la estadística, comprensión de conceptos, resolución de problemas, así como también su percepción en el mundo de hoy, la ciencia y la escuela;
- componente comportamental: es el comportamiento respecto a la estadística, es la tendencia a la acción, la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros, el uso que se hace de la misma.

En el proceso de elaboración, descrito en Estrada (2010), se siguieron las recomendaciones de Osterlind (1989) y Thorndike (1989).

La escala EAEE, compuesta por 25 ítems, 14 afirmativos frente a 11 negativos, se distribuye según los componentes pedagógicos y antropológicos descritos anteriormente repartidos tal como aparece en la tabla 2.

Tabla 2. Componentes de las actitudes evaluadas en la escala de Estrada

	Componentes antropológicos		
Componentes pedagógicos	Social	Educativa	Instrumental
Afectivo	1, 11, 25	7, 12, 23	10, 13, 16, 20
Cognitivo	2, 19, 21	4, 6, 17	3, 24
Comportamental	9, 18	8, 15, 22	5, 14

En nuestro trabajo, dado que los ítems no están redactados en el mismo sentido, todos ellos han sido codificados de modo que una puntuación mayor vaya asociada a una actitud más positiva y viceversa. Hacemos notar que los ítems 1, 3, 6, 9, 11, 14, 15, 19, 21, 23 y 25 tienen un enunciado desfavorable a la actitud que tratamos de medir. Es por ello que, en estos ítems la puntuación otorgada será la contraria al modo usado en el resto de los ítems, es decir, se puntuará con el siguiente criterio (1 = muy de acuerdo, 2 = de acuerdo, 3 = indiferente, 4 = en desacuerdo, 5 = muy en desacuerdo).

Las medias y desviaciones típicas que se reportan para los ítems, se hacen respecto a la puntuación otorgada a la respuesta y en consecuencia siempre se deben interpretar en una escala positiva. Esta decisión se toma, por un lado, para poder tener una escala homogénea de comparación de todos los ítems, en que una media más (o menos) alta indique siempre una actitud más (o menos) positiva, independientemente de si el ítem se redacta con enunciado positivo o negativo. Por otro, en el cálculo de la puntuación total, es necesario que todos los ítems tengan la misma dirección. De esta manera, la puntuación total en actitudes, será la suma de las puntuaciones de los 25 ítems, y representará la actitud de cada encuestado respecto a la estadística.

Para aplicar la escala EAEE a los profesores portugueses hemos hecho una validación de la traducción del castellano al portugués a través de un panel de expertos (compuesto por un matemático, un estadístico, un psicólogo y un especialista en educación matemática/estadística).

Además, para profundizar la discusión sobre las actitudes hacia la estadística de los profesores, así como sus razones y/ó motivaciones, hemos añadido/asociado a nueve de los ítems de la EAEE (1, 3, 7, 14, 16, 19, 21, 22 y 23) la posibilidad de que los profesores expresen de forma abierta sus razones y motivaciones para la puntuación atribuida a esos mismos ítems. Esos ítems fueron escogidos por haber presentado las medias más bajas en los trabajos de Estrada (2002); Estrada y col. (2004, 2010); Martins y col. (2011).

En este trabajo presentamos el análisis cualitativo de las justificaciones obtenidas en cinco de los nueve ítems mencionados (1, 7, 14, 22 y 23), con representantes de todas las componentes, excepto en el campo cognitivo de la componente pedagógica.

Ya que el principal propósito de este trabajo es el análisis de las justificaciones de las puntuaciones atribuidas en el ámbito de las actitudes hacia la estadística por parte de los profesores, hemos establecido categorías para el análisis del contenido, basadas en las teorías desarrolladas por (Krippendorff, 2004, p. 105) y, también por (Bardin, 2004, p. 112) sobre las razones/motivaciones presentadas.

Análisis de los resultados

Los cuestionarios se pasaron en los meses de Septiembre y Octubre de 2010 entre profesores en servicio del primer ciclo de la Enseñanza Básica en el norte y centro de Portugal. Se obtuvieron 493 cuestionarios de los que 181 (37%) presentaron por lo menos una justificación de las nueve posibles. Esos 181 profesores son mayoritariamente mujeres (80%) y con edades entre los 26 y 62 años, con una media de edades de 45 años y una desviación típica 7.4. De entre estos 181 profesores casi un 40% afirmaron no poseer formación estadística ó que aprendieron por si solos. Los restantes recibieron formación en la escuela tanto a nivel secundario como en superior y algunos en los cursos de formación continua del profesorado. Estos profesores presentan una puntuación media total de 82 con desviación típica 11.1 y un rango de 48 a 111, correspondiendo a un valor medio de respuesta de 3.4 con desviación típica de 0.5, como podemos observar muy próximo a la posición de indiferencia o neutralidad.

A continuación se presentan los resultados para cada uno de los cinco ítems escogidos. Según el trabajo de Estrada y col. (2010), decidimos eliminar de este análisis todas las justificaciones de puntuaciones neutras ó de indiferencia (3) y analizar y categorizar solamente las justificaciones de puntuaciones referentes a actitudes consideradas como positivas (4–5), ó de puntuaciones referentes a actitudes consideradas como negativas (1–2).

Ítem 1 – "Me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de TV"

Para este ítem se eliminaron 65 puntuaciones neutras (36% de los 180 cuestionarios con puntuación atribuida en este ítem), con lo que solo 39 respuestas (22%) están relacionadas con actitudes positivas, o sea, no están de acuerdo con la afirmación del ítem 1, y 76 (42%) relacionadas con actitudes negativas, o sea, que están de acuerdo con la afirmación correspondiente. En la Tabla 3 se presentan las categorías definidas, así como bien como las respectivas frecuencias.

Tabla 3: Análisis del contenido para las actitudes positivas y negativas en el Ítem 1

Actitudes Positivas			Actitudes Negativas		
Categorías	fi	%	Categorías	fi	%
0 – Sin información	11	28	0 – Sin información	11	14
1 – Sin interés en la información de la TV	3	8	1 – Sin interés en la información de la TV	3	4
2 – Sin confianza en la información de la TV	12	31	2 – Sin confianza en la información de la TV	19	25
3 – Con confianza en la información de la TV	13	33	3 – Realidad y resultados estadísticos no coinciden	43	57
	39			76	

La categoría 0 de las actitudes positivas (28%) incluye las no respuestas y las respuestas sin sentido o que no añaden ninguna información tal como "*No me incomoda*" o "*La TV nacional transmite pocos programas relacionados con las matemáticas*".

La categoría 1 (8%) incluye afirmaciones como "*No tengo la oportunidad de confirmarla información dada*".

En la categoría 2 detectamos respuestas como por ejemplo *"No corresponde a la realidad"*, y otras que refuerzan la desconfianza hacia los métodos y herramientas estadísticas usadas en la base de la información de la TV como en "*Ni siempre es fiable. Muchas veces la amuestra no es recogida de la forma correcta*"; "*Extrapolaciones indebidas, amuestras poco representativas"*. En la categoría 3 – Con confianza en la información de la TV – detectamos afirmaciones como *"Porque ella me ayuda a tener ideas precisas sobre las cosas"*, *"Pienso que, en principio, los datos son fiables" o "No me molesta, pues podemos hay datos muy interesantes y conclusiones que se pueden obtener"*.

Para las actitudes negativas la categoría 0 (14%) también incluye las no respuestas y las respuestas sin sentido o que no añaden ninguna información tal como "*Estoy informado*".

La categoría 1 (4%) agrupa afirmaciones como "*Es mucha información al mismo tiempo*".

Para la categoría 2 existen afirmaciones como "*Debido al facto de que son imperceptibles, de no ser conocido el publico participante y que sean realizadas en* *áreas urbanas y no en las áreas rurales"* o “*Basada en una amuestra poco significativa*” o aun “*Por la falta de rigor*”.

Y finalmente en la categoría 3 surgieron respuestas que implican una manipulación no intencionada tales como “*No son considerados todos los datos*”, pero también afirmaciones que envuelven manipulación intencionada, como por ejemplo “*Por veces la información destuerce la realidad y es transmitida de una manera sensacionalista y no siempre verdadero, lo que influencia el espectador menos informado*”.

Ítem 7 – “Me divierto en las clases que se explica estadística”

Fueron eliminadas en este ítem un total de 64 puntuaciones neutras (39% de los 166 cuestionarios con puntuación atribuida en este ítem), y de los restantes 102 cuestionarios 39% están relacionadas con actitudes positivas y 23% con actitudes negativas. La Tabla 4 presenta las categorías definidas y también las respectivas frecuencias.

Tabla 4: Análisis del contenido para las actitudes positivas y negativas en el ítem 7

Actitudes Positivas			Actitudes Negativas		
Categorías	f_i	%	Categorías	f_i	%
0 – Sin información	18	28	0 – Sin información	17	45
1 – Para los profesores las clases son interesantes/desafiantes	22	34	1 – Falta de motivación	10	26
2 – Para los alumnos, segundo como lo ve el profesor	24	38	2 – Ningún conocimiento de estadística	3	8
			3 – Las clases son un asunto serio	8	21
	64			38	

Para las actitudes positivas también fue definida la categoría 0 (28%) que, además de las no respuestas, incluye las afirmaciones sin sentido o que no añaden ninguna información tal como: “*Desde que no sea en relación a la economía*”.

En relación a la categoría 1 (34%) fueron consideradas afirmaciones que muestran las clases como interesantes y desafiantes como en “*Es como un desafío*”, “*Creo que es interesante trabajar datos estadísticos*” o afirmaciones que evidencian los sentimientos de los propios profesores como en “Creo que es importante” y “Adoro las matemáticas”.

La categoría 2 (38%) agrupa respuestas tanto sobre lo lúdico, importante y motivador que son las clases donde se enseña estadística bien como el logro en ellas de competencias interdisciplinares, como por ejemplo "*A los alumnos les gusta hacer contajes y probabilidades en situaciones reales*" o "*Las clases de estadística proporcionan trabajo interdisciplinar (germinación de semillas, hábitos alimentares, etc.*".

Para las actitudes negativas la categoría 0 para las no respuestas solo incluye la siguiente afirmación: " *La uso siempre que es necesario*".

En las categorías 1 y 2 (34%), que en conjunto representan las justificaciones que tienen por base la falta de motivación o de formación de los profesores como por ejemplo *"Considero que aun no he conseguido motivarme lo suficiente"* o "*No poseo formación adecuada en esta área"*

Por contraste, la categoría 3 (21%) presenta justificaciones que tienen por base la seriedad de la enseñanza como en "*En las clases se debe estar atento para aprender y no para divertirse, hay otros lugares para la diversión*" o "*No tengo que divertirme, pues si son clases es para aprender*".

Ítem 14 – "Utilizo poco la estadística fuera de la escuela"

Para este ítem se eliminaron un total de 40 puntuaciones neutras (23% de los 175 cuestionarios con puntuación atribuida en este ítem), el 23% restante están relacionados con actitudes positivas y un 54% con actitudes negativas. En la Tabla 5 se presentan las categorías definidas y sus frecuencias.

Tabla 5: Análisis del contenido para las actitudes positivas e negativas en el ítem 14

Actitudes Positivas			Actitudes Negativas		
Categorías	f_i	%	Categorías	f_i	%
0 – Sin información	17	41	0 – Sin información	54	57
1 – Usa o necesita de acuerdo com las situaciones del día a día	10	24	1 – No usa estadística	30	32
2 – En el día a día la estadística está en todo	13	32	2 – Solo usa información indirecta	2	2
3 – Usa estadística en el trabajo pero no la reconozca presente en la vida del día a día	1	2	3 – A veces usa la estadística en el día a día	7	7
			4 – No tiene formación estadística	1	1
	41			94	

En este ítem la categoría 0 abarca el 41% de las actitudes positivas y la categoría 1 (24%) está definida para justificaciones sobre el uso/necesidad de la estadística en situaciones del día a día, como es el caso de "*Yo* la *uso en clase y en lo cotidiano*" o "A *veces la uso fuera de la escuela*". En la categoría 2 (32%) se incluyeron afirmaciones sobre la aplicación de la estadística en la vida diaria como por ejemplo "*Es utilizada diariamente aunque indirectamente*".

La única respuesta de la categoría 3 (2%) fue "*En la vida privada la necesito poco, pero ya la usé en otras actividades profesionales*". Para las actitudes negativas la categoría 0 además de las no respuestas incluyen afirmaciones del tipo "*No vivo de estadísticas, sino de resultados concretos*".

En la categoría 1 (32%) se agruparon las respuestas de los profesores basadas en la no necesidad, en el no uso, en la falta de voluntad, en la falta de tiempo o en la falta de interés en usar la estadística, como en los ejemplos: "*Yo nunca la uso fuera de la escuela. Yo no necesito de la estadística para saber los aspectos positivos y negativos del mercado portugués*"; "*Mi trabajo diario no me permite hacer reflexiones para partir para estudios estadísticos*"; "*La uso muy poco una vez que no me interesa*".

En la categoría 2 (2%) el uso de la información indirecta se refiere a los medios de comunicación o al trabajo científico. En la categoría 3 (7%) se incluyeron frases como "*La uso en algunas de las situaciones cotidianas*".

Finalmente, el ejemplo de la categoría 4 (1%) es "*No tengo formación adecuada en esta área*".

Ítem 22 – "Si pudiera eliminar alguna materia sería la estadística"

Un total de 44 puntuaciones neutrales fueron eliminadas en este ítem (25% de los 177 cuestionarios con puntuación atribuida en este ítem), restando un 70% relacionadas con las actitudes positivas y un 75% con las actitudes negativas. En la Tabla 6 se presentan las distintas categorías y sus frecuencias.

Un 41% de las actitudes positivas fueron integradas en la categoría 0 y un ejemplo de respuesta que no añade información es "*No la eliminaría*".

En la categoría 1 (44%) muchas de las respuestas fueron sobre la necesidad, la utilidad y el deseo de saber más estadística, como es el caso de "*Hace falta en el área de las matemáticas*" "*La considero bastante útil*" y en "*Bien por el contrario, me gustaría* *profundizar y aprender a disfrutar* [con la Estadística]", pero también afirmaciones desde el punto de vista de la educación estadística, como en "*Como pienso que es importante para el día a día y cada vez más utilizada es relevante que sea trabajada en el contexto de clase*".

Tabla 6: Análisis del contenido para las actitudes positivas y negativas en el ítem 22

Actitudes Positivas			Actitudes Negativas		
Categorías	f_i	%	Categorías	f_i	%
0 – Sin información	51	41	0 – Sin información	6	75
1 – Utilidad de la estadística	55	44	1 – Sentimientos del profesor	1	13
2 – Importancia de la estadística	3	2	2 – Demasiado temprano para ser enseñada	1	13
3 – A quien le gusta la estadística?	16	13			
	125			8	

En la categoría 2 (2%) se incluyeron afirmaciones que presentaban la estadística como importante en algunos niveles de la enseñanza o para algunas personas, y que por eso es necesario enseñarla así por ejemplo : "*Para algunos será fundamental*".

En las respuestas de la categoría 3 (13%) surgen tanto el gusto de los alumnos como el gusto simultaneo de los profesores y alumnos, algunos ejemplos son "*La estadística es una materia que les gusta a los alumnos y que los ayuda a transformar una gran variedad de información en gráficos*" o "*Me gusta el tema y a mis alumnos también*".

En relación a las actitudes negativas se destaca el pequeño número de respuestas, apenas 8. La categoría 0 (6 de 8) incluye cinco sin justificaciones y una respuesta que dice apenas "*No*".

En la categoría 1 (1 de 8) una profesora escribió "*Creo que mi indiferencia se debe a la poca formación que tengo y por eso me gustaría que los otros no sintiesen lo mismo que yo siento*". Para la categoría 2 (1 de 8) fue incluida la afirmación de un profesor "*En este* [primer] *ciclo es demasiado pronto para trabajar esta área*".

Ítem 23 – "A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido"

En este ítem se eliminaron 65 puntuaciones neutras (38% de los 173 cuestionarios con puntuación atribuida en este ítem). Además un 13% están relacionadas con actitudes positivas y un 49% con actitudes negativas. La Tabla 7 presenta las categorías definidas así como las respectivas frecuencias.

Tabla 7: Análisis del contenido para las actitudes positivas y negativas en el ítem 23

Actitudes Positivas			Actitudes Negativas		
Categorías	f_i	%	Categorías	f_i	%
0 – Sin información	12	53	0 – Sin información	50	59
1 – Para ayudar los otros	3	13	1 – Por veces acontece	21	25
2 – Trabajo cooperativo	7	30	2 – Sin conocimiento o formación suficiente	11	13
3 – En el pasado	1	4	3 – La estadística solo es usada en la clase	1	1
			4 – Casi todos entienden la estadística	2	2
	23			85	

De las actitudes positivas en este ítem un 53% fueron inseridas en la categoría 0. Para la categoría 1 (13%) las justificaciones refieren que los profesores intentan ayudar en la medida que pueden o cuando les es solicitado como en "*Siempre que me lo piden*" o "*Siempre que es posible*". En la categoría 2 (30%) estan incluidas las justificaciones donde los profesores mencionan la partilla como en "*Cuando hay dificultades utilizo la inter-ayuda para la resolución de problemas*". En la categoría 3 (4%) la única justificación es "Ocurrió cuando estudiaba estadística".

Del análisis de contenido hecho a las respuestas asociadas a las actitudes negativas en este ítem se incluyeron en la categoría 0 además de las no respuestas afirmaciones del tipo "*Solo da atención a las estadísticas quien quiere*". Para la categoría 1 (25%) fueron agrupadas respuestas del tipo "*Nunca ocurrió*" o "*Nunca me solicitaron cualquier tipo de ayuda*".

Para la categoría 2 (13%) el ejemplo es "*Mis colegas saben más de estadística que yo porque ellos son más jóvenes y tuvieron esa formación*". En la categoría 3 (1%) la justificación presentada fue "E*n mi grado de enseñanza* [primer ciclo] *no se discuten problemas de estadística*". Finalmente, para la categoría 4 (2%) las justificaciones fueron "*Todos entienden esta área*" y "*Los colegas están dentro del asunto*".

Consideraciones finales

Aunque las limitaciones de este estudio no permiten su generalización, creemos que es posible extraer algunas conclusiones. La primera constatación a hacer es que muchos de los profesores prefirieron no justificar las puntuaciones atribuidas a los ítems.

Respecto al ítem 1, y de una forma genérica, tanto las puntuaciones relacionadas con las actitudes positivas como con las actitudes negativas tienen justificaciones similares. Desde nuestro punto de vista, los profesores con actitud positiva en este ítem no se muestran incómodos con el mal uso de la estadística en la información transmitida en los programas de televisión; al contrario que los profesores con una actitud negativa que sí manifiestan su molestia, precisamente, por ese mal uso. Creemos por eso que la información de los medios de comunicación (TV, periódicos, etc.) es una buena fuente de información para estudiantes y también para profesores, subrayando, una vez más, la importancia de aprender y conocer la estadística para crear ciudadanos concienciados y participativos.

En el ítem 7 se constata que muchos de los profesores que lo puntuaron presentan una actitud positiva, lo que, a nuestro ver, es una promisoria actitud hacia la estadística en la clase y también una manera de influenciar en otros profesores. Para aquellos que han demostrado una actitud negativa quedó claro una falta de motivación y/o conocimiento, que a veces surge por la necesidad de presentar la estadística como un asunto serio que no puede generar entusiasmo. Por eso nos parece urgente solucionar el problema de falta de formación y conocimiento de estadística en los profesores del primer ciclo de la enseñanza básica en Portugal “motivarlos” con la recogida de datos reales y utilizando metodologías mas atractivas como los proyectos, en la formación estadística (inicial o a lo largo de la vida) de estos profesores.

En relación al ítem 14, se detecta otra vez el problema de la formación estadística de los profesores y en la mayoría de las justificaciones presentadas, tanto las relacionadas con actitudes positivas como negativas, distinguen de una manera clara entre escuela/trabajo y la vida cotidiana. Por eso nos parece crucial la inclusión y el impulso de la formación para y con los profesores del primer ciclo.

En el ítem 22, la actitud de los profesores es fuertemente positiva pues ellos la consideran útil y necesaria para la enseñanza y el aprendizaje, asi como en la vida profesional aunque algunos profesores no hagan la asociación entre la presencia de la estadística en sus vidas profesionales y sus vidas personales.

Respecto al ítem 23 consideramos que en general los profesores presentaron puntuaciones relacionadas con una actitud negativa, lo que refleja que en cierta manra son conscientes de sus lagunas formativas Sin embargo, aquellos que justificaron las puntuaciones relacionadas con una actitud positiva, apuntan como una buena practica el trabajo colaborativo en estadística.

En conclusión, se evidencia la necesidad o voluntad que tienen estos profesores de mejorar sus conocimientos estadísticos, nos parece pues un buen momento para continuar trabajando para y con ellos (no olvidando la componente afectiva, que implica directamente las actitudes), aprovechando este momento crucial que representa la completa implementación de los recientes programas de Matemática en la Educación Básica en Portugal a partir del curso 2010/2011.

Agradecimientos: Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2010-14947/EDUC. MCYT-FEDER

Referencias bibliográficas

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME On line, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius.

Aparicio, A. y Bazán, J (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19,* 644-650. Clame 2005.

Aparicio, A. y Bazán, J. L (2008). Aspectos afectivos intervinientes en el aprendizaje de la estadística: actitudes y sus formas de evaluación. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 180-189. Clame 2007.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero, Bilbao

Cazorla, I. M., Silva, C. B., Vendramini, C., y Brito, M. R. F. (1999). Adaptaçao e validaçao de uma escala de attitudes em relaçao à estatística. *Actas de la Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística*. PRESTA, Florianópolis: Florianópolis.

Cuesta, M., Rifá, H., y Herrero, F.J. (2001). Un estudio exploratorio, en estudiantes de psicología, de una escala de actitudes hacia la estadística. Póster presentado en el VII Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud, Madrid.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1980). Relationship between selection variables and statistics achievement. *Journal of Educational Psychology*, 72, 457-467.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1986). A model of statistics achievement using spatial ability feminist attitudes and mathematics. Related variables as prediction. *Educational and Psychological Measurement*, 46, 215-222.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. (2010). Instrumentos de medición de actitudes hacia la Estadística: la escala EAEE para profesores. En Moreno, M., Estrada, A., Carrillo, J., y Sierra, T (Eds,), XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática Lleida. SEIEM. ISBN: 978-84-8409-321-3.ISSN:1888-0762, D.L.:L-923-2010

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias*, 22 (2), 263-274.

Estrada, A., y Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Joint ICMI/ IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*. Monterrey: International Commission on Mathematical Instruction e International Association for Statistical Education.

Estrada, A., Batanero, C., Bazán, J. y Aparicio, A. (2009). As atitudes em relação à estatística em professores: um estudo comparativo de países *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática. Numeros e Estatística:reflectindo no presente, perspectivando o futuro.* Sociedad Portuguesa de Ciencias da Educaçao. Secçao de Educaçao Matematica.Vila Real, 16 e 17 de Maio de 2009 Estatística: Ensino e aprendizagem. ISBN: 978-972-8614-12-6.

Estrada, A.; Bazán, J. y Aparicio, A. (2010), Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. UNION, 24 ISSN: 1815-0640 http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press, Voorburg.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assessment framework. *Journal of Statistics Education,* 2 (2). On line, http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

Garção, N. (2004). *Reorganização Curricular do Ensino Básico: perspectivas, decisões e dificuldades de três professores de Matemática.* Colecção Teses, Associação de Professores de Matemática.

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea, Madrid

Harvey, A.L., Plake, B.S., y Wise, S.L. (1985,). The validity of six beliefs about factors related to statistics achievement. Comunicación presentada en el *Annual Meeting of the American Educational Research Association,* Chicago.

Martins, J. A., Nascimento, M.M. y Estrada, A. (2009). Estudio preliminar de las actitudes de profesores portugueses hacia la Estadística. En Cotos,T.R., Mosquero,M.A., Perez, A. (Eds.), actas del IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacions (pp. 31-36) .Ourense (España) Del 12 al 14 de Noviembre de 2009**).** ISBN: 978-84-613-6906-5.

Martins, J., Nascimento, M. y Estrada, A. (2011). Attitudes of teachers towards statistics: a preliminary study with portuguese teachers. Proceedings of CERME 7. Rzeszow, Poland, 9-13 February.

Mastracci, M. (2000). *Gli aspecti emotive nell'evolution dell'apprendimento della statistica e della sua valutazione. Un caso di studio sugli studenti di SSA.* Tesis de Laurea. Universidad La Sapienza de Roma.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan y N.C.T.M

Morales, P. (1988). *Medición de actitudes en psicología y educación.* Universidad de Comillas. San Sebastián.

Nasser, F. (1999). *Prediction of college students achievement in Introductory Statistics Course.* Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education,* 12 (1). On line: www.amstat.org/publications/ jse/v12n1/nasser.html.

Nóvoa, A. (1992). Formação de Professores e Profissão Docente. En: *Os professores e sua Formação* (pp. 15-33). Lisboa: Publicações D. Quixote. Instituto de Inovação Educacional.

Osterlind, S. (1989). *Constructing test items.* Kluwer, Boston

Onwuegbuzie, A.J. (1998). Teachers' attitudes toward statistics. Psychological Reports, 83, 1008-1010.

Onwuegbuzie, A.J. (2003). Modeling statistics achievement among graduate students. *Educational and Psychological Measurement*, 63(6), 1020-1038.

Roberts, D. M. y Reese, C. M. (1987). A comparison of two Scales measuring Attitudes Towards Statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 47, 759-764.

Roberts, D.M. y Saxe, J. E. (1982). Validity of a statistics attitude survey: A follow-up study. *Educational and Psychological Measurement*, 42, 907-912

Roberts, D. M. y Bilderback, E. W. (1980) Reliability and validity of statistics attitudes survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.

Silva, C. B. da, Cazorla, I. M.. Brito, M. R. F. (1999). Concepçoes e attitudes em relaçao a estatistica. *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* Florianópolis.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. Limusa. México.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405

Anexo 1

Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (EAEE)

1.- Me molesta la información estadística que aparece en algunos programas de T.V.

2.- La estadística ayuda a entender el mundo de hoy.

3.- A través de la estadística se puede manipular la realidad.

4.- Es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano.

5.- Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana.

6.- En la escuela no se habría de enseñar estadística.

7.- Me divierto en las clases que se explica estadística.

8.- Los problemas de estadística me resultan fáciles.

9.- No entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en la prensa.

10.- Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas.

11.- Me siento intimidado ante datos estadísticos.

12.- Encuentro interesante el mundo de la estadística.

13.- Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos.

14.- Utilizo poco la estadística fuera de la escuela.

15.- En clase de estadística nunca entiendo de qué están hablando.

16.- Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente.

17.- La estadística es fácil.

18.- Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas.

19.- La estadística sólo sirve para la gente de ciencias.

20.- Me gusta hacer problemas cuando uso la estadística.

21.- La estadística no sirve para nada.

22.- A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido.

23.- Si pudiera eliminar alguna materia sería la estadística.

24.- La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas.

25.- Evito las informaciones estadísticas cuando las leo.

LAS DIFICULTADES DETECTADAS EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA, CUANDO AFRONTAN LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Amable Moreno
Universidad Nacional de Cuyo. Argentina
José María Cardeñoso
Universidad de Cádiz. España
Francisco González García
Universidad de Granada. España

Resumen

El presente trabajo intenta interpretar las dificultades que se han detectado en un grupo de setenta y cinco estudiantes de dos Institutos de Formación Docente, uno de gestión estatal y otro de gestión privada, del Profesorado de Educación Primaria; en relación con la asignación de probabilidades a distintos sucesos aleatorios, correspondientes a los contextos: Juego, Cotidiano y Físico-Natural. Se utiliza el cuestionario que aplicara Cardeñoso (2001) en su tesis doctoral, con algunas modificaciones validadas para adaptarlo a nuestro contexto socio cultural. El mismo consta de doce ítems sobre el reconocimiento de la aleatoriedad y otros doce relativos a la asignación de probabilidades. En este trabajo analizaremos los ítems correspondientes a la estimación de la probabilidad. A las respuestas que dieron los estudiantes le aplicamos distintas técnicas estadísticas multivariantes, que nos permitieron encontrar cuatro tendencias de pensamiento probabilístico. El test DHS de Tukey no detectó diferencias significativas en el uso de las distintas categorías en función del contexto del suceso, pero si se encontraron diferencias significativas del nivel de confianza “medio” en los contextos de Juego y en el Cotidiano.

Palabras clave: formación de profesores, asignación de probabilidades, contexto del suceso, tendencias pensamiento, dificultades.

Abstract

This paper attempts to interpret the difficulties that have been detected in a group of seventy-five students from two teacher training colleges, one of state management and other privately owned Elementary Teacher Education, in connection with the assignment of probabilities to various random events, corresponding to contexts: Game, Physical and Natural Daily. Questionnaire is used to apply Cardeñosa (2001) in his doctoral thesis, with some modifications to adapt validated our socio-cultural context. It consists of twelve items on the recognition of randomness and twelve for assigning probabilities. In this paper we analyze the items corresponding to the estimation of probability. In the answers given by students will apply various multivariate statistical techniques, which allowed us to find four trends in probabilistic thinking. The DHS Tukey test did not detect significant differences in the use of different categories depending on the context of the event, but significant differences were found confidence level "medium" in the contexts of play and in everyday life.

Ke**ywords:** teacher training, assigning probabilities, context of the event, thinking trends, challenges

---

Moreno, A.; Cardeñoso, J.M.; González, F. (2012*).* Las dificultades detectadas en un grupo de estudiantes del profesorado de educación primaria, cuando afrontan la asignación de probabilidades. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 153-178). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

En nuestro país, Argentina, los diseños curriculares tanto de primaria como de secundaria plantean la enseñanza de la probabilidad y de la estadística. Sin embargo, en el caso de la provincia de Mendoza, el análisis realizado en el nivel medio (Moreno, 2009a) nos ha permitido detectar la ausencia de la enseñanza de dichos contenidos, por diferentes razones; una de ellas es la falta de formación en estos temas , según explican algunos docentes, lo que les impide afrontar su enseñanza en forma idónea. Esta situación nos plantea la necesidad de rever la formación de los futuros profesores de secundaria, para que puedan adquirir las competencias profesionales que les permitan promover la alfabetización estadística de nuestra sociedad.

Como indica Shaughnessy (1992) resulta necesario conocer qué piensan los estudiantes sobre el azar y la probabilidad, para identificar estrategias didácticas apropiadas. Como se ha dicho en muchas ocasiones una de las mayores dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad y la estadística reside en el aprendizaje significativo de los conceptos acerca del azar (Borovcnick y Bentz, 1991; Borovcnik y Peard, 1996). En este sentido se han llevado a cabo investigaciones sobre el reconocimiento de la aleatoriedad en profesores de educación primaria en formación y en actividad (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 1998). Por otra parte, siguiendo lo expresado por Cardeñoso y Azcárate (2011) "*esto implica un reto para el profesor que debe aprender a moverse en el método y razonamiento probabilístico y estadístico*".

En primer lugar, hemos analizado las argumentaciones que usa un grupo de estudiantes del Profesorado de Educación primaria, en el reconocimento de la aleatoriedad de sucesos aleatorios en distintos contextos; encontrando que este reconocimiento depende del contexto, siendo máximo este reconocimiento en los ítems correspondientes al contexto de juego, y mínimo para los ítems en el contexto físico natural (Moreno, Cardeñoso, González García; 2011). Nuestro interés es conocer que argumentaciones usan los estudiantes para asignar probabilidades a sucesos aleatorios en distintos contextos; como así también qué sesgos y errores cometen en ésta asignación; y en función de estas ideas encontrar categorías explicativas sobre la asignación de probabilidades.

En el siguiente apartado nos referiremos al marco teórico en el que se circunscribe este trabajo.

Marco Teórico

Desde nuestra perspectiva epistemológica socio constructivista, el conocimiento se puede considerar como sistemas de ideas con diferentes formas de concreción y articulación, que está sometido a evolución, reestructuración y reorganización continua, producto de la interacción con el medio. Estas reestructuraciones configuran nuevas formas de entender y comprender el entorno y las podemos concretar en diferentes niveles de formulación de dichas ideas; la transición de unas formulaciones a otras supone una serie de remodelaciones en el conocimiento previo. Por lo que, consideramos como educadores necesario conocer las ideas de nuestros alumnos.

El estudio de las concepciones estocásticas de los futuros docentes es una necesidad para la comunidad de profesores de Mendoza (Moreno, 2009b, 2010), pues la investigación educativa reconoce como fundamental el conocimiento del pensamiento del profesor para la mejora de la educación; ya que constituye un conocimiento prioritario para planificar los procesos de formación docente.

Las dos investigaciones que hemos tomado como antecedentes para el presente estudio se pueden encontrar en la tesis doctoral de Azcárate (1995) y en la de Cardeñoso (1998). Es Azcárate quien realiza su investigación desde la reflexión teórica tanto epistemológica como psicología y didáctica; y a partir de los resultados obtenidos, ha podido encontrar evidencia exploratoria de cuatro tendencias de pensamiento: Concepción No Probabilística; Concepción Probabilística Intuitiva; Concepción Probabilística Emergente; Concepción Normativa. Y por su parte, Cardeñoso (1998) realiza su investigación de corte cuantitativo, con 598 profesores de primaria en activo, y encontró-estabilizó cinco tendencias de pensamiento probabilístico:

- ✓ ***La Concepción Determinista*** que niega la existencia del azar, aunque tiene una buena capacidad calculístisca, lo cual le permite tratar el azar en términos de probabilidades, aunque cuando hace esto, afirma que "ya no es azar, porque si hay una regla ya son matemáticas". Cuando no puede responder a la evidencia de la incertidumbre, lo califica de excepcional. Como para el determinismo el azar sólo puede ser epistemológico, considera preferibles las teorías científicas de las que se desprenden leyes en las que no tiene cabida el azar.
- ✓ ***La Concepción Causal*** que acepta el azar como "excepción a la regla" de la ley determinista o en ausencia de información para generar dicha ley científica, usa

el azar como variable a controlar, personalmente incluso, afirmando que el "saca casi siempre cruz al lanzar una moneda al aire", por ejemplo. Sus explicaciones para las cuestiones imprevisibles, está relacionada con la vieja concepción helena de las "cadenas causales". Bajo el punto de vista del cientifismo clásico un evento era aparentemente aleatorio cuando no podía establecerse o controlarse su causa. También se podía asimilar a la ignorancia, como decía Laplace.

- ✓ ***La Concepción Personalista,*** también como las anteriores de corte pre-indeterministas; aunque el azar y lo indeterminado son cuestiones de carácter mágico o fenomenológico, esotérico, cabalístico, o una cuestión del destino o de casualidades como razón de los sucesos fortuitos. También se encuentran en este grupo sujetos que usan indebidamente ciertos "lugares comunes sobre lo indeterminado" o que usando los heurísticas para emitir juicios probabilísticos sobre un fenómeno o suceso, cayendo en los sesgos documentados en la literatura al uso.
- ✓ ***La Concepción llamada de Incertidumbre*** que reconoce la existencia de lo incierto de la vida, pero se queda prisionero en el proceso de reconocer la existencia de fenómenos azarosos y sucesos aleatorios, como si estuviera luchando para conseguir la conservación de esta atribución de los fenómenos. Utiliza las llamadas intuiciones primarias sobre los fenómenos y sucesos imprevisibles, como herramienta cognitiva para concebir la probabilidad como el grado de verosimilitud en que las condiciones iniciales, favorecen la realización de un suceso.
- ✓ ***Concepción Contingente,*** caracteriza a los sujetos que discriminan los fenómenos aleatorios y supeditan lo real a lo posible. No solo busca saber que ocurre, sino también conocer las causas que originan la variación de lo esperado respecto a lo posible. Estiman la probabilidad por medio de estrategias de estructura aditiva, construyendo relaciones entre lo favorable y lo desfavorable, que es lo que Nagel (1979) llama "contingencia" de un fenómeno.

En este trabajo partimos del sistema de categorías para la estimación de la probabilidad propuesto por Cardeñoso (1998: 244):

- **Contingencia**: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basada en la comparación aditiva entre los casos favorables y desfavorables a la consecución de un suceso.
- **Laplaciana**: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación multiplicativa estableciendo la proporción apririística entre los casos favorables y los casos posibles del fenómeno,siguiendo la lectura clasica del fenómeno o de la información aportada,
- **Frecuencial**: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación multiplicativa estableciendo la proporción empírica, siguiendo la lectura frecuencial del fenómeno o de la información aportada.
- **Equiprobabilidad**: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en justificaciones basadas en la asignación desde la equiposibilidad entre los resultados del fenómeno.
- **Experiencial**: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en criterios fruto de la experiencia personal, heurísticos o criterios inadecuados. A partir de estas categorías y tomando el cuestionario que elaboró Cardeñoso (1998), sobre el cual se efectuaron algunas modificaciones, logramos el cuestionario que aplicamos a un grupo de estudiantes del Profesorado de Ed. Primaria.

Metodología

La aplicación de nuestro instrumento de evaluación tiene como finalidad proporcionar información sobre los significados personales de un grupo de estudiantes sobre un objeto matemático: estimación de la probabilidad. Nuestro interés es conocer esos significados personales y clasificarlos de acuerdo al sistema de categorías propuesto en su investigación por Cardeñoso (1998).

El instrumento consta de doce ítems tendientes a la asignación de probabilidades en una escala ordinal. En cada ítem se le solicita al estudiante la asignación de un cierto nivel de confianza en relación con la ocurrencia del fenómeno, y luego que justifique su elección, lo que hace seleccionando una de cuatro opciones dadas o indicando por escrito el argumento que utilizó para justificar la aleatoriedad. El instrumento se aplicó a una muestra de 75 estudiantes de dos Institutos de formación docente.

Los estudiantes que respondieron el cuestionario habían cursado la asignatura "Matemática", que incluye una unidad sobre probabilidad y estadística; sin bien muchos de ellos no la habían aprobado.

El cuestionario fue pasado por uno de los investigadores bajo condiciones de examen, es decir, sin comunicarse entre ellos, y contaron con el tiempo que necesitaron para completarlo. En general, los estudiantes no mostraron problemas para entender los enunciados de los diferentes ítems.

Se efectuó un análisis descriptivo de los resultados obtenidos en cada uno de los ítems, se analizó la correlación entre diferentes variables. Se aplicó el modelo general multivariante para la determinación de diferencias significativas de las respuestas en función del contexto del suceso; y finalmente se aplicó el análisis de clusters en la determinación de las tendencias de pensamiento.

Resultados y Discusión

Vamos a realizar a continuación la presentación y discusión de algunos de los ítems referidos a la dimensión denominada "*estimación de probabilidad de un suceso*"

Análisis de las respuestas a los ítems

Como nuestro interés es conocer el nivel de confianza que le asigna cada uno de los estudiantes a los sucesos aleatorios y desde qué categoría justifican su elección, hemos registrado la frecuencia de cada nivel de confianza y de cada una de las categorías que utilizan para justificar su elección; empleando las variables definidas por Cardeñoso (1998):

PRO 5: si justifica la estimación de probabilidad desde la categoría "Contingencia"

PRO 6: si justifica la estimación de probabilidad desde la categoría "Laplaciana"

PRO 7: si justifica la estimación de probabilidad desde la categoría "Frecuencial"

PRO 8: si justifica la estimación de probabilidad desde la categoría "Equiprobabilidad"

PRO 9: si justifica la estimación de probabilidad desde la categoría "Experiencial"

En relación con el nivel de confianza que los estudiantes tienen de la ocurrencia del suceso, le hemos asignado los siguientes valores: 0 si no contestan al ítem, 1 si tienen un nivel bajo de confianza en la ocurrencia del suceso, 2 si el nivel es medio y 3 si el nivel es alto.

A continuación detallamos los resultados obtenidos de los ítems relativos a la estimación de la probabilidad.

Ítem 3: "La confianza que tengo en que corra viento mañana en mi localidad, es…"

En este ítem más de la mitad de los estudiantes (52%) tienen una confianza media que ocurra el fenómeno, mientras que un 29,3% tienen una confianza baja y sólo un 16% tiene una confianza alta; a lo que se agrega un 2,7% de estudiantes que no contestan.

En cuanto a las argumentaciones usadas para justificar el nivel de confianza elegido, se destaca el uso de la "Equiprobabilidad", siendo este de un 45,3%, seguido de la categoría Frecuencial con un 34,7%; luego la categoría Contingencia con un 12% y finalmente la Experiencial con un 4%. Los estudiantes que no contestaron representan el 4% del total.

Para este ítem entre las que tienen un nivel de confianza medio, encontramos argumentaciones como:

> *"Hay un 50% de probabilidad de que ocurra"* (PRO 8)
>
> *"Ya que es una sumatoria de diferentes hechos, por lo que es para mi aleatorio"*

donde se argumenta desde la causalidad, siendo ésta una categoría que se usa en el reconocimiento de la aleatoriedad.

En relación con los que tienen un nivel alto de confianza en la ocurrencia del suceso, encontramos argumentaciones como:

> *"El conocimiento del clima sobre el clima en la provincia, tiene características desérticas, como que corra viento"* (PRO 7)
>
> *"Porque en la zona que vivo siempre corre viento, al ser un lugar que se ubica en el pedemonte"* (Frecuencial: PRO 7).

Tabla 1. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 3

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia

0	2,7	2	PRO 0	4.0	3
1	29,3	22	PRO 5	12.0	9
2	52,0	39	PRO 6	0,0	0
3	16,0	12	PRO 7	34.7	26
			PRO 8	45.3	34
			PRO 9	4.0	3

Ítem 4: "La confianza que tengo en que, en un edificio de seis vecinos, en el primer intento consiga pulsar el timbre del portero automático que corresponde a la puerta de un amigo, sin saber dónde vive, es…"

En este ítem se destaca el uso del nivel de confianza bajo, con un 82,7%, seguido por el medio con un 16% y un 1,3% de estudiantes no contesta.

Entre los argumentos que emplean se destaca la Equiprobabilidad con un uso del 40%, seguida por la categoría Laplaciana con un 28%, luego la Contingencia con un 21,3% , finalmente la Experiencial con un 1,3% y un 5,3% de estudiantes no contestan.

Este ítem se destaca por la variedad de argumentaciones empleadas. Encontramos argumentos como:

> *"Por qué no sé donde vive"* (PRO 9)

Tabla 2. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 4

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	1.3	1	PRO 0	5.3	4
1	82.7	62	PRO 5	21.3	16
2	16.0	12	PRO 6	28.0	21
3	0,0	0	PRO 7	4.0	3
			PRO 8	40.0	30
			PRO 9	1.3	1

Ítem 6: "La confianza que tengo en sacar una bola roja de una urna que contiene 5 bolas blancas, 5 bolas rojas y 1 azul, es..."

En este ítem encontramos que más de la mitad de los estudiantes, el 65,3% tienen una confianza media de que ocurra el suceso, mientras que el 17,3% tienen poca confianza de que ocurra, seguida por un 14,7% de estudiantes que tienen una alta confianza, y un 2,7% que no contesta.

Tabla 3. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 6

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	2.7	2	PRO 0	6.7	5
1	17.3	13	PRO 5	56.0	42
2	65.3	49	PRO 6	12.0	9
3	14.7	11	PRO 7	0,0	0
			PRO 8	25,3	19
			PRO 9	0,0	0

El argumento más empleado para justificar el nivel de confianza es la Contingencia con un 56%, seguida por la Equiprobabilidad con un 25,3%, luego la categoría laplaciana con un 12% y un 6,7% de estudiantes que no contestan.

Ítem 7: "La confianza que tengo en conseguir horas cátedra de octavo año en la escuela secundaria de la localidad en la que resido; cuando me reciba es…"

En este ítem el nivel de confianza más frecuente es el correspondiente a la categoría "media" con un uso del 48%, seguida por la categoría "baja" con un 41,3%, finalmente la "alta" con un 6,7%; y un 4% de estudiantes que no contestan.

Tabla 4. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 7

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	4.0	3	PRO 0	5.3	4
1	41.3	31	PRO 5	21.3	16
2	48.0	36	PRO 6	0,0	0
3	6.7	5	PRO 7	33.3	25
			PRO 8	34.7	26
			PRO 9	5.3	4

Se destaca el uso de la Equiprobabilidad con un 34,7%, seguida de la categoría Frecuencial con un 33,3%, luego la Contingencia con un 21,3%, finalmente la Experiencial con un 5,3%; y un 5,3% que no contesta.

Un estudiante que tiene un bajo nivel de confianza de que ocurra, argumenta de la siguiente forma:

"No creo que me guste dar clase en 8° año" (PRO 9).

Ítem 9: "La confianza que tengo en que amanezca un día frío el 14 de Octubre, es…"

Menos de la mitad de los estudiantes, un 48% tienen un nivel de confianza bajo de que ocurra el suceso, la misma cantidad de estudiantes tiene un nivel de confianza medio, quedando un 2,7 % que tienen un nivel alto y un 1,3% que no contesta.

Más de la mitad de los estudiantes argumentan desde la Contingencia, un 54,7%, seguido por un 30,7% que lo hace desde la Equiprobabilidad, un 9,3 % usa la categoría Frecuencial y finalmente un 5,3% que no contesta.

Un estudiante, que afirma tener un alto nivel de confianza en la ocurrencia de este suceso, argumenta de la siguiente forma: *"Porque el cambio de clima se intensifica cada año"* (PRO 7).

Tabla 5. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 9

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	1.3	1	PRO 0	5.3	4
1	48.0	36	PRO 5	54.7	41
2	48.0	36	PRO 6	0,0	0
3	2.7	2	PRO 7	9.3	7
			PRO 8	30.7	23
			PRO 9	0,0	0

Ítem 11: "La confianza que tengo en que se produzca un deterioro del medio ambiente de mi localidad, el próximo año, es…"

Aproximadamente la mitad de los estudiantes tienen una confianza baja de que esto ocurra, es decir el 50,7%; un poco menos de la mitad, el 45,3% tienen una confianza media y un 1,3% tiene una confianza alta; mientras que un 2,7% no contesta.

En este ítem los argumentos empleados son muy variados; se usan todas las categorías. Encontramos predomino de la <Contingencia, con un 53,3%, seguida por un 18,7% que argumenta desde la Equiprobabilidad, luego un 12 % usa la estrategia Laplaciana, un 2,7% la Frecuencial, un 1,3% la Experiencial y aparece el uso de heurísticas, dado que el 1,3 % emplea la causalidad, el mismo porcentaje usa la incertidumbre y un 9,3% de estudiantes no contesta. Un estudiante, que no contesta al nivel de confianza pedido, afirma que:

> *"No hay interés en los habitantes"* (PRO 7).

Entre los estudiantes que tienen un nivel de confianza bajo, encontramos estas argumentaciones:

> *"Se está tomando conciencia gradualmente de lo necesario que es trabajar a favor de ese tema"* (PRO 7).

Entre los que tiene un nivel de confianza medio de que ocurra el suceso, encontramos respuestas como:

> *"Con todo el daño que le hacemos al medio ambiente puede ocurrir cualquier cosa"* (PRO 9).
> *"Porque los profesionales lo pueden predecir pero también está la posibilidad de que se equivoquen"* (PRO 8).

Tabla 6. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 11

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	2.7	2	PRO 0	9,3	7
1	50.7	38	PRO 5	53.3	40
2	45.3	34	PRO 6	12.0	9
3	1.3	1	PRO 7	2.7	2
			PRO 8	18.7	14
			PRO 9	1.3	1

Ítem 13: "La confianza que tengo en que me toque algún regalo en una rifa, en la que participo con alguno de los 10.000 números vendidos para el viaje de estudios del colegio, del…"

Más de la mitad de los estudiantes tienen poca confianza de que ocurra el suceso, es decir el 61,3%, el 37,3 % tienen una confianza media, y el 1,3% tiene una confianza alta. Lo que se destaca es que este ítem fue contestado por todos los estudiantes.

Tabla 7. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 13

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	0,0	0	PRO 0	1.3	1
1	61.3	46	PRO 5	36.0	27
2	37.3	28	PRO 6	24.0	18
3	1.3	1	PRO 7	12.0	9
			PRO 8	25.3	19
			PRO 9	1.3	1

Los argumentos que utilizan para justifica el nivel de confianza son variados. El 36 % usa la Contingencia, la Equiprobabilidad con un 25,3%, la Laplaciana con un 24%, la Frecuencial con un 12%, y finalmente el 1,3% usa la Experiencial, siendo el mismo porcentaje de estudiantes los que no contestan. En este ítem se destaca el uso de todas las categorías.

Entre los estudiantes que tienen un nivel de confianza bajo de que ocurra, encontramos argumentaciones como:

"Porque me considero que no tengo suerte para esas cosas" (PRO 9)

Entre los que tienen un nivel de confianza medio, encontramos este argumento:

"Depende de la cantidad de premios" (PRO 7)

Ítem 15: "La confianza que tengo en que esta primavera haya un terremoto en Mendoza, es…"

En este ítem más de la mitad de los estudiantes tienen una confianza media que ocurra el suceso, es decir el 54,7%, seguido por el 33,3% que tienen poca confianza de que ocurra, mientras que el 9,3% tiene una confianza alta y un 2,7% de estudiantes que no contesta.

La categoría más usada en este ítem para argumentar es la Equiprobabilidad con un 65,3%, seguida por la Frecuencial con un 24%, luego la Contingencia con un 6,7% y un 4% de estudiantes que no contestan.

Entre los estudiantes que tienen un nivel de confianza medio, encontramos argumentos como: *"Es un fenómeno que puede suceder por ser Mendoza una zona sísmica"* (PRO 7)

Entre los que tienen un nivel de confianza alto, encontramos: *"Mendoza es una zona sísmica por naturaleza"* (PRO 7)

Tabla 8. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 15

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	2.7	2	PRO 0	4.0	3
1	33.3	25	PRO 5	6.7	5
2	54.7	41	PRO 6	0,0	0
3	9.3	7	PRO 7	24.0	18
			PRO 8	65.3	49

Ítem 18: "La confianza que tengo en que me encuentre con un atasco, un sábado antes de Navidad, al ir al centro de la ciudad, es…"

En este ítem el 60% de los estudiantes tienen una elevada confianza que este suceso ocurra, mientras que el 26,7% tiene una confianza media, el 9,3% tiene poca confianza y el 4% no contesta.

Más de la mitad argumenta desde la categoría Frecuencial, es decir el 60%, le sigue la Equiprobabilidad con un 16%, luego la categoría laplaciana con un 14,7%, finalmente la Contingencia con un 6,7%, siendo de un 2,7% los estudiantes que no contestan.

Un estudiante que afirma tener un nivel de confianza medio , argumentó de la siguiente forma:*"Puede ocurrir o no independiente del contexto"* (PRO 8)

Tabla 9. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 18

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	4.0	3	PRO 0	2.7	2
1	9.3	7	PRO 5	6.7	5
2	26.7	20	PRO 6	14.7	11
3	60.0	45	PRO 7	60.0	45
			PRO 8	16.0	12

Ítem 19: "En una mesa de juego se dispone de una caja de fichas, contiene 29 fichas negras y 16 amarilla. La confianza que tengo en que salga una ficha negra, a lo largo de toda una tarde de juego, es…"

La categoría más usada para argumentar la estimación de la probabilidad es la Contingencia con un 46,7%, seguida por la Equiprobabilidad con un 33,3%, la laplaciana con un 9,3%, y finalmente la Frecuencial con un 2,7%, siendo un 8% los estudiantes que no contestan.

Tabla 10. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 19

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	4	5,3	PRO 0	8.0	6
1	6	8,0	PRO 5	46.7	35
2	45	60,0	PRO 6	9.3	7
3	20	26,7	PRO 7	2.7	2
			PRO 8	33.3	25

Ítem 23: "Durante una tarde de jugamos a lanzar los dados legales y acordamos que gana quien acierta el resultado de sumar los números obtenidos. La confianza que tengo en ganar eligiendo el 7 para toda una tarde de juego, es…"

En este ítem el 62,7% de los estudiantes tienen una confianza media de que este suceso ocurra, el 29,3% tiene poca confianza, el 4% tiene una elevada confianza, y el 4 % de los estudiantes no contesta.

Este ítem se caracteriza por el uso de todas las categorías; destacándose la Equiprobabilidad con un 58,7%, le sigue la laplaciana con un 10,7%, la Frecuencial con un 9,3%, y finalmente la Contingencia con un 5,3% y la Experiencial con un 4%; siendo de un 12% los estudiantes que no contestan.

Los estudiantes que tienen un nivel de confianza bajo, argumentan:

> *"Hay 1/12 posibilidades de que salga en un lanzamiento"* (Laplaciana: PRO 6)
>
> *"No tengo posibilidad"* (Experiencial: PRO 9)

Los estudiantes que tienen un nivel de confianza medio, argumentan:

> *"Si se tiene fe se puede todo, la confianza abarca mucho"* (PRO 9)

Tabla 11. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 23

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	4.0	3	PRO 0	12.0	9
1	29.3	22	PRO 5	5.3	4
2	62.7	47	PRO 6	10.7	8
3	4.0	3	PRO 7	9.3	7
			PRO 8	58.7	44
			PRO 9	4.0	3

Ítem 24: "La confianza que tengo en conocer una persona famosa el mes que viene, es.."

Para este ítem encontramos que la mayoría de los estudiantes tienen poca confianza de que esto ocurra, siendo de un 72%, mientras que el 24% tienen una confianza media, y finalmente el 2,7% tienen una elevada confianza de que ello ocurra, el 1,3% de estudiantes que no contestan.

Menos de la mitad de los estudiantes argumenta su elección desde la categoría Laplaciana, siendo del 42,7% en este grupo; el 36% usan la Equiprobabilidad; el 12% lo hace con la categoría Frecuencial y el 8% usa la Contingencia; además el 1,3% no contesta.

Entre los estudiantes que tienen un nivel de confianza bajo, hay argumentos como:

> *"Donde vivo no hay personas famosas"* (PRO7).

Entre los que tienen un nivel de confianza medio, encontramos:

> *"Nuestra ciudad es turística y visitada por distintas personas siendo también una importante meca cultural"* (PRO 7)

Entre los que tienen un nivel de confianza alto, encontramos:

> *"En el mes de setiembre se hacen recitales para el día de la primavera a los que asisto"* (PRO 7)

Tabla 12. Distribución de las frecuencias y porcentajes del nivel de confianza y de la categoría utilizada en la argumentación del ítem 24, se destaca el uso de la categoría Frecuencial y el no uso de la Experiencial

Nivel de confianza en la ocurrencia del suceso			**Estimación de la probabilidad**		
Nivel	Porcentaje	Frecuencia	Categoría	Porcentaje	Frecuencia
0	1.3	1	PRO 0	1.3	1
1	72.0	54	PRO 5	8.0	6
2	24.0	18	PRO 6	42.7	32
3	2.7	2	PRO 7	12.0	9
			PRO 8	36.0	27

Relación entre el nivel de confianza y el contexto del suceso

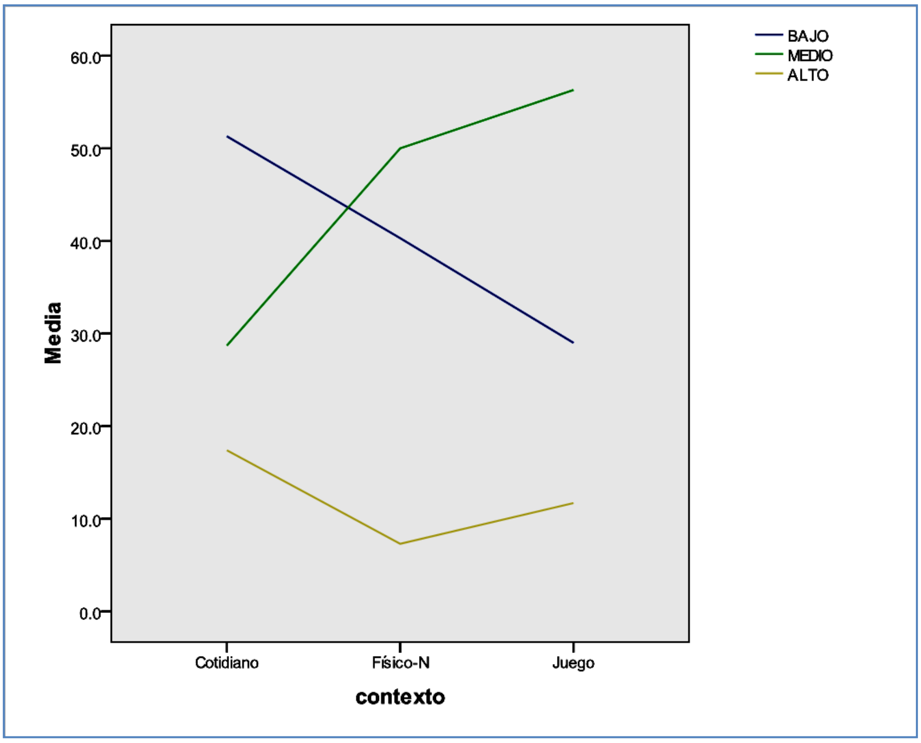
La siguiente tabla muestra los porcentajes de uso de los niveles de confianza en la ocurrencia de los sucesos planteados en cada uno de los ítems, en función del contexto en el que se enmarca el mismo. Se pretende establecer una relación entre la frecuencia en la ocurrencia del suceso y el contexto del mismo. De la tabla n° 13 se puede inferir que hay una tendencia a considerar que los sucesos relativos al contexto cotidiano son los menos frecuentes, mientras que los más frecuentes son los relativos al contexto de juego, y en segundo lugar los referidos al contexto físico natural. Esta situación también se puede apreciar en el gráfico de líneas de la figura 1.

Tabla 13. Porcentajes de los niveles de confianza de cada ítem distribuidos de acuerdo al contexto del suceso, que se representan en el siguiente gráfico de líneas, destacándose el contexto de juego para los sucesos más frecuentes

Contexto	**Nivel de Confianza**			
	Bajo	**Medio**	**Alto**	**No Contesta**

Juego	17,3 61,3 8,0 29,3	65,3 37,3 60,0 62,7	14,7 1,3 26,7 4,0	2,7 0,0 5,3 4,0
Valor medio	28,98	56,32	11,67	3,00
Cotidiano	82,7 41,3 9,3 72,0	16,0 48,0 26,7 24,0	0,0 6,7 60,0 2,7	1,3 4,0 4,0 1,3
Valor medio	51,32	28,67	17,35	2,65
Físico Natural	29,3 48,0 50,7 33,3	52,0 48,0 45,3 54,7	16,0 2,7 1,3 9,3	2,7 1,3 2,7 2,7
Valor medio	40,32	50,00	7,32	2,35

Figura 1 Niveles medios de confianza en función del contexto destacándose el contexto de juego



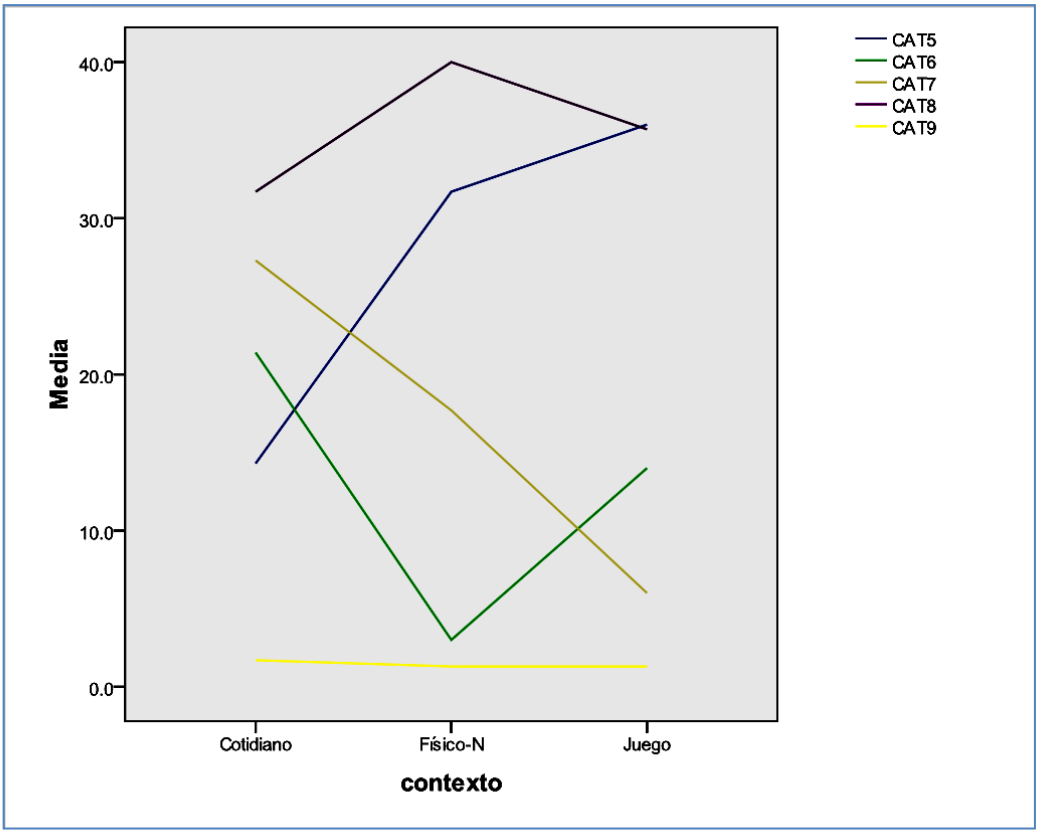
Relación entre el nivel de confianza y las categorías de argumentación de la estimación de la probabilidad

La siguiente tabla muestra los porcentajes de uso de las cinco categorías en la argumentación que utilizan los estudiantes para realizar la estimación de la probabilidad en la ocurrencia de los sucesos planteados en cada uno de los ítems, en función del contexto en el que se enmarcan. Se pretende establecer una relación entre la frecuencia de uso de las categorías y el contexto del suceso. De la Tabla N° 14 se puede inferir que hay una tendencia a argumentar la estimación de la probabilidad desde la "equiprobabilidad" en todos los contextos y la "contingencia" en el contexto de juego.

Tabla 14. Porcentajes de las categorías utilizadas en cada ítem distribuidos según el contexto del suceso, se destaca el uso de la "contingencia" en el contexto de juego y la "equiprobabilidad" en el contexto físico natural.

Contexto	**CATEGORÍAS DE ESTIMACIÓN DE LA PROBABILIDAD**					
	CAT 5	**CAT 6**	**CAT 7**	**CAT 8**	**CAT 9**	**No Contesta**
Juego	56,0 36,0 46,7 5,3	12,0 24,0 9,3 10,7	0,0 12,0 2,7 9,3	25,3 25,3 33,3 58,7	0,0 1,3 0,0 4,0	**6,7** **1,3** **8,0** **12,0**
Valor medio	**36,00**	14,00	6,00	**35,65**	1,32	**7,00**
Cotidiano	21,3 21,3 6,7 8,0	28,0 0,0 14,7 42,7	4,0 33,3 60,0 12,0	40,0 34,7 16,0 36,0	1,3 5,3 0,0 0,0	5,3 5,3 2,7 1,3
Valor medio	14,32	21,35	27,32	**31,67**	1,65	3,65
Físico Natural	12,0 54,7 53,3 6,7	0,0 0,0 12,0 0,0	34,7 9,3 2,7 24,0	45,3 30,7 18,7 65,3	4,0 0,0 1,3 0,0	4,0 5,3 9,3 4,0
Valor medio	31,67	3,00	17,67	**40,00**	1,32	5,65

Figura 2 Gráfico de líneas de las categorías utilizadas para argumentar la estimación de la probabilidad en función del contexto, se usa tanto la contingencia como la equiprobabilidad en el contexto de juego, mientras que los otros dos contextos se usa más la equiprobabilidad



Síntesis de los resultados de la estimación de la probabilidad

La siguiente tabla muestra los resultados de todos los ítems, para tener una mirada global de las respuestas de los estudiantes. Observamos que el nivel de confianza más usado es la "baja", y la categoría "equiprobabilidad" seguida de la "contingencia".

Tabla 15. Porcentajes de uso de las categorías relativas a la estimación de la probabilidad y niveles de confianza por ítem, siendo el nivel de confianza "bajo" y la categoría "equiprobabilidad" la más usada por los estudiantes

ÍTEM	CAT. 5	CAT.6	CAT.7	CAT.8	CAT.9	N/C	B	M	A	N/C
23J	5,3	10,7	9,3	58,7	4	12	29,3	62,7	4	4
13J	36	24	12	25,3	1,3	1,3	61,3	37,3	1,3	0
6J	56	12	0	25,3	0	6,7	17,3	65,3	14,7	2,7
19J	46,7	9,3	2,7	33,3	0	8	8	60	26,7	5,3
9F	54,7	0	9,3	30,7	0	5,3	48	48	2,7	1,3

11F	53,3	12	2,7	18,7	1,3	9,3	50,7	45,3	1,3	2,7
ÍTEM	**CAT. 5**	**CAT.6**	**CAT.7**	**CAT.8**	**CAT.9**	**N/C**	**B**	**M**	**A**	**N/C**
3F	12	0	34,7	45,3	4	4	29,3	52	16	2,7
15F	6,7	0	24	65,3	0	4	33,3	54,7	9,3	2,7
4C	21,3	28	4	40	1,3	5,3	82,7	16	0	1,3
7C	21,3	0	33,3	34,7	5,3	5,3	41,3	48	6,7	4
18C	6,7	14,7	60	16	0	2,7	9,3	26,7	60	4
24C	8	42,7	12	36	0	1,3	72	24	2,7	1,3
Media	**27,3**	**12,8**	**17**	**35,8**	**1,4**	**5,4**	**40,2**	**45**	**12,1**	**2,7**
D. E.	**20,7**	**13,2**	**17,9**	**14,9**	**1,9**	**3,2**	**23,8**	**15,9**	**17,0**	**1,5**
C.V.%	**75,7**	**103,6**	**105,1**	**41,6**	**134,2**	**58,8**	**59,3**	**35,4**	**140,4**	**56,7**

Queremos indicar con la mención en amarillo, la categoría más usada, cuando en esta tabla los ítem quedan organizados por contextos de tarea, bien referido al Físico-Natural, al de Juego, o bien al Cotidiano-Social.

Relación con el contexto

En la Figura 1 se puede apreciar que el “porcentaje de uso del nivel de confianza “medio” es mayor en el contexto de juego que en el contexto cotidiano. Por otra parte, el análisis de la varianza respecto de una única variable independiente, llamada factor, en nuestro caso es la variable contexto, y otra variable dependiente cuantitativa, en nuestro caso es “porcentaje de uso del nivel de confianza medio”; y con un valor p de 0,006 nos informó de la existencia de diferencias significativas de nuestra variable dependiente en los contextos de juego y cotidiano.

Además, el test de comparaciones múltiples, llamado el test de la diferencia honestamente significativa de Tukey, permitió obtener un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las medias de los porcentajes de uso del nivel de confianza medio entre los contextos de juego y cotidiano: (5,7378; 49,5622). Como este intervalo no contiene al cero, se infiere que el porcentaje medio de uso del nivel de confianza medio es mayor en el contexto de juego que en el contexto cotidiano con una confianza del 95%.

Asociación entre el "nivel de confianza" y la "categoría utilizada en la argumentación"

En todos los ítems relativos a la estimación de la probabilidad, el test de la chi-cuadrado rechaza la hipótesis nula de independencia entre las variables "nivel de confianza" y "categoría que argumenta el nivel de confianza elegido", con valores p menores a 0,05.

Análisis de clusters

Aplicamos el análisis de clusters a los efectos de determinar tendencias de pensamiento probabilístico entre los estudiantes encuestados. Para este análisis consideramos el método de las K medias, dado que habíamos determinado la existencia de 4 conglomerados distintos en relación con el reconocimiento de la aleatoriedad.

El grupo 1 formado por 25 estudiantes (33,33%) caracterizado por ser el que más usa la categoría Equiprobabilidad para la estimación de la probabilidad, en promedio es usada en el 58,33% de los ítems y en segundo lugar usa la Contingencia en el 18,33% de los ítems.

El grupo 2 formado por 31 estudiantes (41,33%) se caracteriza por ser el que más usa la categoría Laplaciana, en el 16,67% de los ítems, en promedio; y es el segundo en el uso de la Equiprobabilidad, ya que estima la probabilidad argumentando desde esta categoría en el 32,53% de los ítems.

El grupo 3 formado por solamente 2 estudiantes (2,7%), la categoría que más usa es la Contingencia en el 12,5% de los ítems, en promedio.

El grupo 4 formado por 17 estudiantes (22,67%) se destaca por ser el que más usa la Contingencia, el 64,10% de los ítems, la categoría Frecuencial en el 23,04% de los ítems y la categoría Experiencial en el 1,96% de los ítems.

Conclusiones

Del análisis de los resultados del cuestionario, encontramos que existe una relación de dependencia entre el nivel de confianza asignado al suceso y la categoría que argumenta dicha estimación; sin embargo, no hemos podido determinar cuál es esa relación que los vincula. En cuanto a las categorías más usadas, son la la

"Equiprobabilidad" y la "Contingencia; cada una de ellas es la más usada en cinco de los doce ítems; la "Contingencia" alcanza una media de 27,3, mientas que la "Equiprobabilidad" de 35,8. Por otra parte, el nivel de confianza más elegido es el "bajo".

En relación con el contexto, únicamente se ha encontrado que el nivel de confianza "medio" en el contexto de juego es significativamente mayor que en el contexto cotidiano.

En cuanto a la clasificación de los estudiantes, mediante el análisis de clusters, se han encontrado cuatro grupos en relación con el pensamiento probabilístico, destácandose solamente uno, que usa algunas categorías con un criterio apropiado al suceso sobre el que debe estimar la probabilidad de ocurrencia del mismo.

Ningún estudiante ha utilizado la categoría 6 en el ítem 3, este resultado es coincidente con el de Cardeñoso (1998); por lo que hemos incorporado al mismo otra opción; que es la siguiente: ***"porque en primavera la proporción de días que corre viento por mes así lo indica"***. Lo mismo ha ocurrido en los ítems 7 y 9. Lo que nos llevó a modificar el enunciado y una de las opciones del ítem 7; resultando:

Ítem 7.- La confianza que tengo en conseguir las horas cátedra de 8° 1° de la Escuela Secundaria de mi barrio cuando me reciba, es…

☐ **baja** ☐ **media** ☐ **alta**

1. ***porque es lo esperado comparando mis posibilidades a favor y en contra de conseguirlo.(Contingencia)***
2. ***porque analizando los ofrecimientos de horas cátedra en esa escuela, se presentan alrededor de 10 profesores por ofrecimiento con un puntaje similar al que tendré cuando me reciba. (laplaciana)***
3. ***porque tengo las mismas posibilidades de conseguirlas como de no conseguirlas.(Equiprobabilidad)***
4. ***porque lo más normal es que así ocurra cuando me reciba.(Frecuencial)***
5. ***porque……………………………………………………………………………***

En el ítem 9, ocurrió lo mismo, ningún estudiante usó la categoría 6, como ocurrió también en el cuestionario de Cardeñoso (1998); por lo que nuestra modificación fue la siguiente:

“porque según los partes metereológicos alrededor de dos días por semana amanece frío en Octubre”

Se repite la misma situación en el ítem 15 no hemos obtenido ninguna respuesta que contemple la categoría 6, para poder incorporar una opción que se corresponda con esta categoría, tuvimos la necesidad de introducir una modificación en el enunciado e incorporar otra opción; resultando:

Ítem 15.- La confianza que tengo en que el próximo sismo que ocurra en Mendoza, sea un sismo destructivo es..

☐ ***baja*** ☐ ***media*** ☐ ***alta***

1. ***porque es igualmente posible que un sismo sea destructivo o que no lo sea.(Equiprobabilidad)***
2. ***porque las estadísticas indican que esa es la frecuencia con que se produce un sismo destructivo.(Frecuencial)***
3. ***porque comparo las intensidades de los sismos que determinan que sea destructivo o no. (Contingencia)***
4. ***porque según la información de la estación sismológica por cada 10.000 sismos, 155 son destructivos. (Laplaciana)***

Consideramos que con estas modificaciones realizadas al cuestionario, estamos en condiciones de aplicarlo a la población mendocina de estudiantes del Profesorado de Matemática y del Profesorado de Biología de la provincia de Mendoza.

Referencias Bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento Profesional de los Profesores sobre las nociones de Aleatoriedad y Probabilidad. Su estudio en el caso de la Educación Primaria.* Tesis doctoral inédita, Universidad de Cádiz, España.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (1996). El lenguaje del azar. Una visión fenomenológica sobre los juicios probabilísticos. *Revista Epsilon,* 35, 12(2), pp. 165-178.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M (Artículo Admitido 17-07-2011), para el BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – BOLEMA, nº 40

Azcárate, P.; Cardeñoso, J.M. & Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias,* 16(1), pp. 85-97.

Azcárate, P.; Serradó, A.; Cardeñoso, J.M.; Meleitou-Mavrotheris, M. & Paparistodemou, E. (2008). An on-line professional environment to improve the teaching of statistics. En C. Batanero; G. Burrill; C. Reading & A. Rossman (Eds.) *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference.*

Barragués, J.I. & Guisasola, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 241-255.

Batanero, C., Burrill, G.; Reading, C. & Rossman, A. (Eds.)(2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, México: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.

Borovcnick, M.; Bentz, H. J. & Kapadia, R.(1991). Empirical Research in understading probability. En R. Kapadia y M. Borovnick (Eds). *Chance encounters: Probability in education.* Amsterdam. pp. 73-105. Dordrecht: Kluwer.

Borovcnick, M. & Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop at al.. (Eds): *International handbook of mathematics education* pp. 239-288. Netherlands, Dordrecht: Kluver Academic Publishers.

Cardeñoso, J. M. (1998). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la Matemática escolar. Modelización de conceptos sobre la aleatoriedad y probabilidad***.** Tesis doctoral inédita, Universidad de Cádiz. España. Y editada en 2001 por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz

Cardeñoso, J. M. & Azcárate, P. (2002). Una estrategia de formación de maestros de matemáticas, basada en los ámbitos de investigación profesional (A.I.P.). pp. 181-226, en L. Blanco & L.C. Contreras (Coord.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente*. Serv. Publicaciones, Univ. de Extremadura, Cáceres, España.

Cardeñoso, J.M. & Serradó, A. (2006). Escenarios para el aprendizaje de la estadística y la probabilidad. En P. Flores; R. Roa & R. Pozuelo (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas* pp. 279- 301. Granada: SAEM "Thales".

Serradó, A; Cardeñoso, J. M. & Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal,* 4 (2), pp 59-81.

Serradó, A., Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en los libros de texto de la ESO. *Tabirya: Revista de Investigación e innovación educativa,* 38, pp. 91-112

Cardeñoso, J. M. & Serradó, A. (2006). ¿Puedo adivinar qué idioma está hablando mi amigo con sólo contar las vocales? Escenarios para el aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad. En: Flores, P.; Pozuelo, R.; Roa, R. (Eds.)(pp. 279-301). *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: S.A.E.M. Thales y Univ de Granada. Disponible Acceso en:

20/07/2011. http://earlystatistics.net/template/pdf/Cardenoso_serrado_Thales2006_taller.pdf

Cardeñoso, J. M.; Azcárate, P & Serradó, A.(2008). Escenarios Interculturales para el Aprendizaje Estadístico en el Contexto Escolar. *Hipótesis Alternativa*, Caracas, Disponible en: http://www.ucv.ve/uploads/media/Hipotesis_alternativa_N16.pdf Acceso en: 20/07/2011.

Kyburg, H. E. (1974). *The Logical Foundations of Statistical Inference*. Dordrecht Reidel Publishing Company, Dordrecht, Hollad, Boston, U.S.A.

Lajoie, S.; Jacobs, V.R. & Lavigne, N. C. (1995). Empowering Children in the Use of Statistics. *Journal of Mathematical Behavior,* 14 (4), pp. 401-425.

Maury, S. (1984).La quantification des probabilities: analyse des argument utilizes par élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactiques des Mathemátique*, 5(2), pp. 187-214.

Meletiou,M; Paparistodemou, E.; Serradó, A.; Azcárate, P.; Cardoñoso,J.; Chadjipantelis,T.; & Andreadis, Y. (2006). Early Statistics: Improving Statistics Instruction in European Elementary and Middle Schools through Online Professional Development of Teachers. pp. 1-6. En A. Rossman. y B. Chance (Eds.) *Proceedings of the 7th Internacional Conference on Teaching Statistics (ICOTS).* Brasil: Salvador de Bahía: Internacional Association for Statistical Education.

Moreno, A. (2009b). *El concepto de población en los estudiantes del Profesorado de Biología*. Diploma de Estudios Avanzados (DEA), Unv. de Mendoza y Unv. de Granada

Moreno, A. (2010a). *The concept of population in students of biology programs.*(poster). The 8th International Conference on Teaching Statistics. Data and context in statistics education: towards an evidence based society. Ljubljana. Slovenia.[CD ROM].

Moreno, A; Cardeñoso, J.M. & González García, F. (2010b). *Necesidad de conocer los sistemas de ideas probabilísticas de los futuros profesores: Elaborando un cuestionario.* Comunicación presentada al Encuentro Latinoamericano de Profesores y Estudiantes de Matemática y Ciencias Naturales. Centro de Congresos y Exposiciones.IES 9-011 “DEL ATUEL”. San Rafael, Mendoza, Argentina. 15 y 16 de octubre.[CD-ROM].

Moreno, A.; Cardeñoso, J.M. & González Garcia, F. (2011). *Las argumentaciones que usan los estudiantes en el reconocimiento de la aleatoriedad.* Comunicación presentada en el Segundo Congreso Internacional de Educación en Ciencia y Tecnología.Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Catamarca. San Fernando del Valle de Catamarca, Argentina. 6-10 de Junio.

Nagel, E. (1979). Significado de la probabilidad. En J.R. Newman (Comp), *Enciclopedia Sigma: el mundo de las matemáticas*, Vol. 3. Barcelona. Grijalbo

Porlán, R. (2002). La formación del profesorado en un contexto constructivista. Investigações em Ensino de Ciências 7(3), 271-281.

Pfannkuch, M. & Wild, C.J. (2004). Toeards na understanding of statistical thinking. pp. 17-46. In J. Garfield & D. Bem-Zvi (Eds.), *The challenge of developing* *statistical literacy, reasoning and thinking* . Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Rouan, O. & Pallascio, R. (1994). Conceptions probabilistes d'éléves marocains du secondaire. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 393-428.

Serradó, A. & Cardeñoso, J.M. (2002). La resolución de problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de Educación Secundaria. En J.M. Cardeñoso; E. Castro; A.J. Moreno & M. Peñas (Eds.), *Investigando en el aula de Matemáticas. Resolución de problemas* pp. 245-253. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. S.A.E.M. “Thales”.

Serradó, A. ;Cardeñoso, J.M. & Azcárate, P. (2005 a). Las concepciones deterministas, un obstáculo para el desarrollo profesional del docente en el campo probabilístico. *Actas del V Cibem. Congreso Ibero-Americano de Educaçao Matemática*, Portugal: Porto.

Serradó, A., Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M.(2005b). Randomness in textbooks: The influence of deterministic thinking. In M. Bosch (Ed.) pp. 559-569. *Proceedings for the CERME 4: Four Conference of the European Society for Researcha in Mathematics Education*, 18-21 Febrero. Barcelona, Spain: Ramon Llull University.Disponible en: http://www.erme.unito.it/CERME4/ Acceso en: 22/09/2006

Serradó, A.; Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proccedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM] pp. 1-20. .Salvador (Bahía). Brasil: International Statistical Institute. http://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/2E4_SERR. pdf Disponible.con Acceso en: 20/07/2011

Serradó, A.; Azcárate, P. & Cardeñoso, J. M. (2009). “*Numbers: Zona cero*” (I): método científico de investigación estadística. *Revista Eureka sobre la Enseñanza y Divulgación de las ciencias.* 6 (1) pp. 47-62. Acceso en 20/07/2011.Disponible en: http://venus.uca.es/eureka/revista/Volumen6/Numero_6_1/Serrado_et_al_2009.pdf.

Serradó, A.; Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (2009).”*Numbers: Zona cero*” (II): Entorno de aprendizaje profesional. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las ciencias* 6 (2) pp. 47-62.

Shaughnessy, J. M. (2007). *Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM

GRUPO:

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA (DMDC)

Coordinadora: Pilar Bolea Catalán, Universidad de Huesca

DMDC1- ***Clarificando criterios para evaluar el conocimiento especializado de futuros profesores sobre la derivada.*** (Luis R. Pino-Fan, Juan D. Godino y Vicenç Font Moll)

DMDC2- ***Visión desde la teoría antropológica de lo didáctico de la dimensión epistemológica del problema del álgebra elemental.*** **(**Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch Casabò y Josep Gascón Pérez).

CLARIFICANDO CRITERIOS PARA EVALUAR EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE LA DERIVADA

Luis R. Pino-Fan
Universidad de Granada. España
Juan D. Godino
Universidad de Granada. España
Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona, España

Resumen

En los últimos años, una de las problemáticas que más ha interesado referente a la formación de profesores, es la caracterización y determinación del complejo de conocimientos que debe tener un profesor para que su enseñanza de las matemáticas sea efectiva. Sin embargo, son pocas las investigaciones orientadas al diseño y aplicación de instrumentos que permitan explorar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre tópicos específicos. En el presente trabajo, presentamos algunos resultados obtenidos del diseño y aplicación de un instrumento que permite explorar algunos aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento del profesor, derivada, enfoque ontosemiótico, faceta epistémica.

Abstract

In the last years one of the most interesting problems on teacher's training is the characterization and assessmentof the complex knowledge that a mathematics teacher must have for his/her mathematics teaching to be effective. However, there are few researches focused on the design and application of instruments to explore aspects of the didactic-mathematical knowledge of teachers on specific topics. In this paper we present some results obtained from the design and implementation of a questionnaireto explore the didactic-mathematical knowledge of future high school teachers about the derivative.

Keywords: teacher's training, teacher's knowledge, derivative, onto-semiotic approach, epistemic facet.

Pino-Fan, L.; Godino, J.D.; Font, V. (2012*)*. Clarificando criterios para evaluar el conocimiento especializado de futuros profesores sobre la derivada. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 181-192). Ciudad Real: SEIEM.

Antecedentes

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores.

Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático requerido para enseñar matemáticas. Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986) y las investigaciones de Ball (2000); Ball, Lubienski y Mewborn(2001); Hill, Ball y Schilling (2008), suponen avances en la caracterización de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.Sin embargo, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, si se quiere profundizar en la trama de conocimientos que el profesor requiere para enseñar matemáticas, es necesario centrarse en tópicos concretos, por ejemplo, el conocimiento que requiere el profesorado de bachillerato para enseñar el objeto derivada(García, Azcárate y Moreno, 2005).

En este trabajo se informa de algunos de los resultados obtenidos de la implementación de un instrumento que, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009), hemos diseñado con el fin de explorar aspectos relevantes de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada.

Diseño del instrumento

El Cuestionario, que consta de siete ítems, se diseñó con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009) que propone una categorización y análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor mediante la aplicación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

El cuestionario se centra, fundamentalmente, en la evaluación de aspectos parciales relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada. Dicha faceta incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) tres tipos de conocimiento: *conocimiento común*, *conocimiento especializado* y *conocimiento ampliado*.

En el proceso de diseño del instrumento, que hemos denominado *Cuestionario sobre Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario CDM-derivada)*, se consideraron tres criterios para la selección de las tareas que lo conforman. El primer criterio considera que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste de los significados personales de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada(Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación).

El segundo criterio es que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones activadas en los tres subprocesos que intervienen en el cálculo de la función derivada según Font (1999):

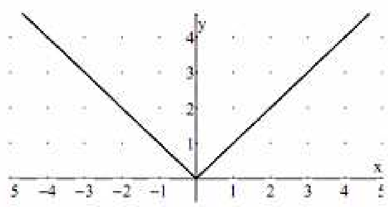
1. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$.
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$.
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Los ítems seleccionados ponen en juego los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular, tanto para la función como para su derivada.

El tercer criterio refiere al conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores y considera la inclusión de tres tipos de tareas: (1) aquellas que piden poner en juego el conocimiento común del contenido (resolver la tarea matemática propia de las matemáticas del bachillerato); (2) aquellas que requieren del conocimiento especializado (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver la tarea mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre conocimiento común o especializado y/o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo).

En la Figura 1 se ilustra una de las tareas del instrumento para evaluar el CDM sobre la derivada. Dicha tarea ha sido objeto de diversas investigaciones (Tsamir, Rasslan, y Dreyfus, 2006; y Santi, 2011),e indaga dos tipos de conocimiento que componen la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada: 1) conocimiento común (ítem a), en tanto que el futuro profesor debe solamente resolver el ítem sin necesidad de utilizar diversas representaciones o argumentaciones; y 2) conocimiento especializado en sus dos niveles de actuación, por un lado los ítems b) y c), demandan al profesor, además de resolver los ítems, el uso de diversas representaciones (gráficas, simbólicas y verbales) y argumentaciones válidas que justifiquen sus procedimientos; por otro lado el ítem d) requiere que el profesor resuelva los ítems anteriores y que identifique el entramado de conocimientos que se ponen en juego en sus resoluciones. Las acepciones de la derivada como pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos), están asociadas a esta tarea.

Examina la función $f(x) = |x|$ y su gráfica.



a) ¿Para qué valores de x es derivable $f(x)$?
b) Si es posible, calcula $f'(2)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
c) Si es posible, calcula $f'(0)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
d) ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver este problema?

Figura 1. Tarea incluida en el instrumento para evaluar el CDM sobre la derivada

Así, la Tarea presentada en la Figura 1 es evaluadora de dos niveles de conocimiento especializado. Un primer nivel en el que los futuros profesores deben *hacer uso* de diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos para resolver la tarea. El segundo nivel se refiere a la *competencia de los profesores para identificar conocimientos* (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución de una tarea sobre derivadas

En el siguiente apartado se abordan algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado, y se darán pautas y criterios para analizar el conocimiento especializado, sobre la derivada, que manifiestan futuros profesores.

Aspectos relevantes del conocimiento especializado

Una de las características fundamentales de los ítemssobre el conocimiento especializado incluidos en el cuestionario*CDM-derivada*, es la reflexión, de los futuros profesores,sobre el tipo de matemáticas que se espera que los alumnos aprendan a propósito de una práctica educativa. Esta característica se concreta y se operativiza mediante la noción de *configuración de objetos y procesos* (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2010). Dicha noción favorece la identificación sistemática de diferentes procedimientosde resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que seponen en juego en su formulación, así como formas de argumentar o justificar los procedimientos y propiedades. Además, el análisis del tipo de tarea propuesta y las variables didácticas que intervienen en la misma orienta la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos (Godino, 2009).

A continuación se presenta sucintamente, a manera de ejemplo, el análisis epistémico para una posible solución de la tarea presentada en la Figura 1. En dicho análisis se identificanlos objetos centrales(lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en el enunciado y en la solución esperada de la tarea. Dicho análisis forma parte delsegundo nivel de conocimiento especializado que se espera que los futuros profesores manifiesten.

Proceso de Representación $\leftrightarrow$ *Significación*

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos previos y emergentes. Como elementos previos identificamos la representación algebraica de la función valor absoluto de *x* ($f(x) = |x|$) y su representación gráfica, la representación notacional (simbólica) de la imagen de la función derivada en el punto $x = 2$ ($f'(2)$), y la representación notacional de la imagen de la función derivada en el punto $x = 0$ ($f'(0)$), por mencionar algunos. Como elementos emergentes podemos encontrar la representación notacional que describe el dominio de la función derivada ($\mathbb{R} - \{0\}$, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $(-5,0) \cup (0,5)$,etc.), la representación gráfica y notacional de la imagen de la función derivada en los puntos $x = 2$ y $x = 0$, así como la representación gráfica de la función derivada de la función "valor absoluto de *x*".

Algunos de los conceptos y definiciones previos necesarios para la resolución del problema son: el valor absoluto y su definición, el concepto de función (función valor absoluto), dominio (valores de *x* para los cuales las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ están definidas), imagen (valor $y \in \mathbf{R}$ que se le asigna a cada una de las $x \in \mathbf{R}$ del dominio de la función por medio de una regla de correspondencia) y continuidad. Algunos conceptos y definiciones emergentes son: el límite, límites laterales, derivada (en el sentido de pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación) y derivadas laterales.

Proceso de Composición ↔ *Descomposición*

A partir de los elementos lingüísticos representacionales y los conceptos y definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones o propiedades, procedimientos y argumentos. Algunas proposiciones o propiedades son: las reglas de correspondencia para las funciones $f(x)$ y $f'(x)$, la continuidad o discontinuidad de dichas funciones, la derivabilidad de una función en un punto crítico, y la relación entre continuidad y derivabilidad.

Mediante el análisis del tipo de elementos lingüísticos, los conceptos/definiciones, y propiedades/proposiciones empleados en las resoluciones, pueden identificarse tanto los procedimientos usados para resolver una tarea como los argumentos que los justifican. Un posible procedimiento se presenta en la Figura 2.

Para saber si existe la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, debemos verificar que el $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe. Para este caso particular dicho límite no existe ya que:

Si $h > 0$, entonces $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{0+h-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

Si $h < 0$, entonces $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{0-h-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1$

Por lo tanto no es posible calcular $f'(0)$ dado que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

Figura 2. Posible resolución del apartado c de la tarea presenta en la Figura 1

El procedimiento presentado en la Figura 2 puede valorarse como formal dado que los elementos lingüísticos, conceptos, definiciones y propiedades o proposiciones empleados para comprobar la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$, giran en torno al significado formal de la derivada (tasa instantánea de variación). Es decir, el procedimiento se centra en la comprobación formal de la existencia de la derivada en un punto mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. La consideración como formaldel procedimiento se justifica con la sentencia: "dado que las derivadas laterales son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ ".

Análisis similares pueden realizarse con otros tipos de resoluciones de la tarea para identificar otros procedimientos y justificaciones que involucren distintos elementos lingüísticos, conceptos y definiciones, y propiedades o proposiciones.

Proceso de Particularización ↔ Generalización

La tareade la Figura 1, plantea un caso particular de la derivabilidad de una función en un punto crítico: "la derivabilidad de la función valor absoluto de *x* en $x = 0$ ". La tarea admite posibles generalizaciones que requerirían de los futuros profesores de bachillerato la puesta en práctica de conocimientos especializados y avanzados. Por esta razón, este proceso está estrechamente vinculado con la transición del conocimiento común y especializado al conocimiento ampliado de los futuros profesores y vínculos entre estos tres tipos de conocimientos.

Ejemplo de una posible generalización sería justificar, con base en la definición formal de derivada, por qué la gráfica de una función derivable no puede tener "picos" (esquinas, ángulos).

Proceso de Materialización ↔ Idealización

Este proceso es de suma importancia si se quieren determinar los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los futuros profesores sobre tópicos específicos de matemáticas, puesto que es a partir de los objetos materiales que los futuros profesores externan su aprehensión de objetos ideales (y viceversa) tales como la derivada y, en general, los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen sobre dicho objeto.

La tarea presentada en la Figura 1 requiere que, a partir de objetos materiales (ostensivos) tales como la representación gráfica y algebraica de la función y las representaciones algebraicas para los distintos conceptos y definiciones, el futuro profesor signifique objetos ideales emergentes tales como la derivada, la derivada en un punto, la derivabilidad de una función en un punto crítico, referidos al ejemplo que nos ocupa.

La prueba: Resultados y Discusión

La prueba se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. La duración de la licenciatura es de cuatro años (8 semestres). La Facultad de Matemáticas de la UADY es la encargada, a través del plan de estudios de dicha licenciatura, de formar profesores con salida al nivel bachillerato o universitario en el estado de Yucatán en México.

Los 53 estudiantes habían cursado cálculo diferencial en el primer año de su licenciatura y, a lo largo de ella, habían tomado otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con la didáctica de las matemáticas.

Para el análisis de los resultados obtenidos consideramos variables cuantitativas (grado de corrección de los ítems) y cualitativas (análisis del tipo de resolución dado a cada tarea). Por esta razón nuestra investigación se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

A continuación, con el análisis de la tarea presentada en la Figura 1, ejemplificamos el tipo de análisis que hemos realizado para cada una de las siete tareas incluidas en el cuestionario. La Tabla 1 presenta los resultados para el grado de corrección: respuesta correcta, parcialmente correcta o incorrecta, de las respuestas de los futuros profesores.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de la tarea dada en la Figura 1

Grado de Corrección	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Correcta	40	75,47	22	41,51	19	35,85
Parcialmente C.	0	0	10	18,87	15	28,30
Incorrecta	10	18,87	15	28,30	13	24,53
No contestan	3	5,66	6	11,32	6	11,32
Total	53	100	53	100	53	100

Se aprecia de la Tabla 1, que un elevado número de los futuros profesores presentaron dificultades para dar respuesta a los apartados b) y c). Respecto al ítem b), puede observarse que el 58,5% de los estudiantes, considerando las respuestas parcialmente correctas, incorrectas y no contestan, tuvieron problemas para resolverlo. Para el ítem c), considerando respuestas parcialmente correctas, incorrectas y no contestan, el 64% de los futuros profesores tuvieron dificultad para dar una respuesta satisfactoria. Lo anterior revela que, dado que el apartado a) esta relacionado con el conocimiento común y los apartados b) y c) con el conocimiento especializado, más de la mitad de los futuros profesores exhiben carencias respecto al conocimiento común y especializado del contenido requerido para resolver la tarea.

Además, a partir del análisis cualitativo de las resoluciones dadas por los futuros profesores, se identificaron tres tipos de procedimientos (y sus argumentos), es decir, tres tipos de resolución a la tarea, cada una de las cuales lleva asociada una configuración de objetos y procesos. A estos 3 tipos de resolución los hemos denominado: *gráfico-verbal, técnica y formal.* Los resultados respecto al tipo de resolución de la tarea presentada en la Figura 1 se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes del tipo de solución de la tarea dada en la Figura 1

Tipo de resolución	**Apartado a)**		**Apartado b)**		**Apartado c)**	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Gráfico-Verbal	47	88,68	12	22,64	29	54,72
Técnica	2	3,77	33	62,26	13	24,53
Formal	1	1,89	1	1,89	3	5,66
No dan solución	3	5,66	7	13,21	8	15,09
Total	53	100	53	100	53	100

En la Tabla 2 se observa que un porcentaje elevado de los futuros profesores proporcionan una resolución gráfico-verbal para los apartados a) y c) (e.g., "…no es derivable en $x = 0$ ya se pueden trazar infinitas tangentes a la función en ese punto").

Para el apartado b) la mayoría de los futuros profesores proporciona una resolución técnica (i.e., mediante el uso de reglas de derivación y la definición de valor absoluto). Cabe señalar que un estudiante (1,9%) proporcionó una resolución formal, a partir de la acepción de la derivada como tasa instantánea de variación, en los cuatro apartados de la tarea, y 2 estudiantes (3,8%) proporcionaron una configuración formal sólo para el apartado c).

Finalmente, por limitaciones en el espacio disponible en esta comunicación, no incluimos los resultados del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes al apartado d). En general, los futuros profesores han tenido dificultades para identificar los conocimientos requeridos para resolver la tarea.

Reflexiones finales

Los resultados obtenidos a partir del análisis de las resoluciones que los futuros profesores dieron a las cuestiones incluidas en el *Cuestionario CDM-derivada*, señalan que los futuros profesores exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento común y el conocimiento especializado. Las resoluciones dadas a los ítems sobre el conocimiento especializado (ver apartado d) Figura 1) se circunscriben a la enumeración de algunos conceptos matemáticos. Esto hace advertir insuficiencias en el conocimiento especializado manifestado por los futuros profesores, que podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento matemático de sus estudiantes sobre la derivada.

Se observó el predominio de resoluciones de tipo gráfico-verbal (mediante el uso de la derivada en el sentido de pendiente de la recta tangente) y técnicas (mediante el uso de las reglas de derivación).

La aparente desconexión entre el conocimiento común y especializado podría obstaculizar la transición hacia el conocimiento ampliado y las relaciones entre estos conocimientos, ya que al desconocer procedimientos y argumentos formales, se dificulta el tránsito hacia eventuales generalizaciones y conexiones con objetos matemáticos más avanzados presentes en el currículo.

Las insuficiencias manifestadas en el conocimiento especializado y ampliado de los futuros profesores podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento matemático de sus futuros alumnos sobre la derivada. Algunos investigadores han reportado que el conocimiento matemático de los profesores tiene efecto en los logros de los estudiantes (Ball, 1990; Wilson, Shulman y Richert, 1987).

Parece justificada la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. El desarrollo podría lograrse mediante el diseño de procesos de enseñanza de la derivada, distintos a los habituales, que se focalicen en el significado global de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Además debe tenerse en cuenta, en el diseño de dichas acciones formativas, el conocimiento especializado, no sólo en su nivel de *aplicación*(uso de diversos elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos para la resolución de una tarea), sino también el desarrollo de competencias para la *identificación de objetos matemáticos*, sus significados y vínculos entre ellos, lo que permitirá una futura gestión idónea de los aprendizajes de sus estudiantes.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, EDU2010-14947 (Universidad de Granada) y EDU2009-08120 (Universidad de Barcelona). Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), España. Ministerio de Asuntos Exteriores y de Cooperación y Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (MAEC-AECID).

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D.L (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenirexpressionssimbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada.*Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2005). Conocimiento del contenido didáctico del profesor de matemáticas de universidad y su relación con otros contenidos disciplinares. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en*

Educación Matemática (SEIEM), Universidad de Córdoba, España. Grupo de investigación: Didáctica del Análisis.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.*Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. &Lurduy, O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational Studies in Mathematics. Springer.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students.*Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Johnson, R.B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *EducationalResearch*, *33*(7), 14-26.

Pino-Fan, L., Godino, J.D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação MatematicaPesquisa, 13*(1), 141-178.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function.*Educational Studies in Mathematics,* 77(2-3), 285-311.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Tsamir, P., Rasslan, S., y Dreyfus, T. (2006).Prospetive teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior,* 25, 240-251.

Wilson, S.M., Shulman, L.S y Richter, A (1987). 150 ways of knowing: Representations of Knowledge in teaching. In L. Calderhead (Ed.), Exploring teachers' thinking (pp.104-1249). Sussex, England: Holt, Rinehart y Wilson.

VISIÓN DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO DE LA DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA DEL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

Noemí Ruiz-Munzón
Escola Universitària del Maresme.
Marianna Bosch Casabò
Universitat Ramon Llull.
Josep Gascón Pérez
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Presentaremos una visión global, sintética y actualizada de las aportaciones realizadas desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en la dimensión epistemológica (Gascón 2011a) del problema de la enseñanza del álgebra elemental. Recordaremos los primeros resultados de las investigaciones realizadas por Yves Chevallard entre 1980 y 1990 que marcaron la línea de investigación en torno a los problemas transpositivos del álgebra y construiremos un modelo epistemológico de referencia del álgebra elemental.

Palabras clave: teoría antropológica de lo didáctico, álgebra elemental, modelo epistemológico de referencia, enseñanza secundaria.

Abstract

We present a global, synthetic and updated vision of the contributions made by the anthropological theory of the didactic (ATD) to epistemological dimension (Gascón 2011a) to the didactic problem of elementary algebra. We summarising the first results obtained by Yves Chevallard in the 80s that have marked the trend of research on elementary algebra in the anthropological approach. A reference epistemological model of elementary algebra is then proposed using these results.

Key words: anthropological theory of the didactic, elementary algebra, reference epistemological model, secondary school.

Ruiz-Munzón, N.; Boschs, M.; Gascón, J. (2012). Visión desde la teoría antropológica de lo didáctico de la dimensión epistemológica del problema del álgebra elemental. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 193-214). Ciudad Real: SEIEM.

1. El problema del álgebra elemental: enfoque desde la teoría antropológica de lo didáctico

Los primeros trabajos sobre el álgebra elemental de Yves Chevallard (1984, 1986) giran en torno a la cuestión ¿qué se entiende por "álgebra elemental" en la clase de matemáticas, en la escuela y, más ampliamente, en la sociedad? Esta pregunta inicial – qué actividades y conocimientos constituyen el álgebra elemental en cuanto saber enseñado – y su versión complementaria – qué actividades y conocimientos relativos al álgebra *no* se enseñan en la escuela – constituyen, desde el enfoque antropológico, un cuestionamiento esencial cuando uno se interesa por las condiciones de posibilidad de un cambio educativo que no se reduzca a una mera innovación local, es decir, cuando se quiere analizar la *ecología didáctica* del sistema del enseñanza relativo al álgebra elemental (Artigue, Assude, Grugeon & Lenfant 2001) para saber cómo incidir en ella de forma controlada y en las direcciones apropiadas.

Si tomamos el álgebra elemental como objeto de estudio en la Teoría antropológica de lo didáctico (en adelante TAD) debemos considerar todo su proceso de *transposición didáctica*; que se inicia en el momento en que un "saber" (en este caso el álgebra) – generalmente proveniente del "saber sabio" – es seleccionado y designado como "saber a enseñar" y acaba cuando un cuerpo de conocimientos, actividades y discursos sobre este saber llega – a través de la escuela y del profesor – al grupo de alumnos al que va destinado, convirtiéndose así en un "saber enseñado" o, cuando se puede utilizar en nuevas actividades, como un "saber aprendido". La figura 1 ilustra las diferentes etapas del proceso de transposición didáctica, donde las flechas en doble dirección indican que las transposiciones tienen lugar en múltiples sentidos y que las evoluciones de cada saber en cada etapa se ven condicionadas por las de todos los demás:

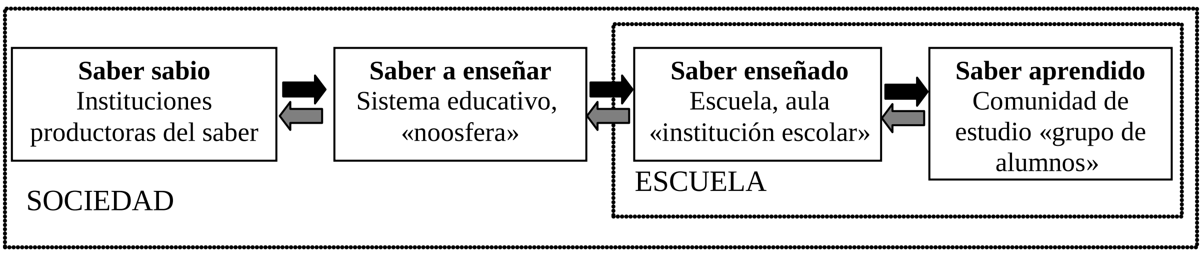


Figura 1: Etapas del proceso de transposición didáctica

Recordemos que la transposición de un *saber* comporta siempre una recreación o reconstitución de dicho saber en cada una de las instituciones afectadas por el proceso transpositivo, estableciéndose así condiciones particulares que marcan la manera cómo este saber puede desarrollarse en esta institución. Lo que los alumnos pueden aprender depende en gran medida de lo que se les enseña; y este saber enseñado, las actividades que lo componen, no es algo unívocamente definido sino que viene fuertemente determinado por lo que la sociedad, a través de su "noosfera" y bajo el auspicio de la comunidad "sabia", designa como "saber a enseñar". De ahí que el estudio de cualquier *fenómeno didáctico*[12] deba tomar en consideración las transformaciones que sufre el saber en las diferentes etapas de la transposición.

En el caso que nos ocupa, este postulado comporta no dar por sentado qué es el álgebra elemental que se enseña, cuál es su origen y cuáles son los mecanismos transpositivos que le van dando forma en cada momento de la historia del sistema de enseñanza hasta llegar a la forma final que tiene hoy día. Será esta *dimensión epistemológica* del problema del álgebra elemental la que analizaremos en las secciones siguientes.

La indagación de los interrogantes anteriores es lo que nos permitirá poner de manifiesto algunas de las *condiciones ecológicas* que permiten que algunos *objetos del saber*[13] se mantengan en la escuela según unos modos particulares de funcionamiento, otros desaparezcan en algunos momentos y reaparezcan después bajo otros nombres o en otras configuraciones, y algunos no consigan penetrar nunca en la enseñanza mientras que otros no se puedan llegar a erradicar nunca.

Presentaremos una revisión de los trabajos sobre la enseñanza del álgebra elemental iniciados por Y. Chevallard (1984, 1986, 1989b, 1990a, 1990b) que creemos han tenido poca difusión en la investigación educativa en lengua española y que pueden considerarse, globalmente, como la construcción de un *dominio de investigación didáctica* en el que se sustentan las investigaciones realizadas posteriormente en relación al problema didáctico del álgebra elemental en el ámbito de la TAD (Gascón 1994-95, 1999; Bolea, Bosch & Gascón 2001a, 2001b). Para ello llevaremos a cabo un análisis de la evolución que ha sufrido el álgebra elemental como *saber a enseñar* en el sistema de educación español desde finales del siglo XIX hasta la actualidad, lo que nos permitirá empezar a delimitar las "restricciones

[12] Utilizaremos la noción de "fenómeno didáctico" como una noción primitiva tal como suele hacerse cuando se habla de "fenómenos físicos", "fenómenos biológicos" o "fenómenos sociológicos". El análisis de la forma cómo una teoría didáctica construye los fenómenos didácticos y cómo los utiliza merece un estudio en profundidad que no podemos hacer aquí. Para un inicio de la explicitación de esta noción ver Artigue, Bosch & Gascón (2011).

[13] A partir de la introducción de la noción de "praxeología" (Chevallard 1996, 1999) como herramienta fundamental para la descripción de la estructura y la dinámica del saber, la transposición didáctica pasa a tener como sujeto las praxeologías matemáticas y didácticas (ver, por ejemplo, Bolea, Bosch & Gascón 2001a).

transpositivas” que provienen de la *noosfera* (vía el estudio de los programas y currículos oficiales) que explican parcialmente el estado actual del álgebra elemental como *saber enseñado*.

El estudio de los procesos transpositivos que afectan al álgebra elemental incluye, como hemos dicho, un cuestionamiento sobre qué es el álgebra como saber sabio, como saber a enseñar y como saber enseñado. Para ello, es necesario que el investigador construya un punto de vista epistemológico propio sobre la naturaleza del álgebra para evitar adoptar, sin cuestionamiento previo, la perspectiva de las instituciones que toma como objeto de estudio. Este principio es aplicable tanto para el saber a enseñar como para el saber sabio. En la tercera sección de este trabajo se presentará un análisis de la evolución histórica de este saber sabio – que, en el caso del álgebra elemental no es siempre fácil de identificar – así como el *modelo epistemológico de referencia* que adoptamos en la investigación.

Finalmente queremos remarcar que, siguiendo la terminología introducida por Gascón (2011a), el trabajo presentado aborda el problema del álgebra casi exclusivamente desde una dimensión epistemológica pero este análisis debe ampliarse con el estudio del problema asociado de la *ecología matemática*, es decir, el estudio de las *condiciones* que permiten y las *restricciones* que afectan la génesis, desarrollo, estancamiento, migración, etc. de las actividades matemáticas y didácticas en una institución determinada. Forman parte también de la dimensión ecológica de un problema didáctico las cuestiones dirigidas a esclarecer qué *condiciones* se requerirían para que las actividades matemáticas y didácticas presenten unas características determinadas en una institución concreta. En el caso del álgebra elemental dichas cuestiones serían por qué la relación institucional a lo algebraico es como es, qué restricciones la determinan y qué condiciones se requerirían para modificarla (Bolea, Bosch & Gascón 2004).

2. Evolución histórica de la enseñanza del álgebra elemental en España

En sus primeros estudios sobre el fenómeno de la transposición didáctica, Chevallard (1984, 1986, 1989a, 1989b, 1990a, 1990b) consideró el caso del álgebra elemental como un ejemplo paradigmático de construcción, evolución y “difuminación” de un saber en el cuerpo de las matemáticas enseñadas. Siguiendo el guión de análisis que se presenta en estos trabajos, estudiaremos la evolución curricular del álgebra elemental en España para identificar el origen, el estatus y la razón de ser de esta área de las matemáticas escolares que, como veremos, ha sufrido fuertes fluctuaciones a lo largo del tiempo y mantiene una posición incierta en el currículum actual.

2.1. El álgebra elemental en la enseñanza tradicional de las matemáticas

Antes de la reforma de las *matemáticas modernas*, en los años 60, el álgebra representaba, en el currículum escolar, la entrada a las "matemáticas avanzadas". Las matemáticas de la enseñanza primaria –o "primera enseñanza" como se designó a partir de la Ley Moyano de 1857– se limitaban al corpus tradicional de la aritmética práctica, con sus cuatro reglas y el sistema legal de medidas, las fracciones o quebrados y el universo de las razones y proporciones junto con la regla de tres. Se le añadían en la primaria superior, principios de geometría, dibujo lineal y agrimesura. La enseñanza del álgebra no llegaba hasta el segundo curso de secundaria, donde la matemática se dividía en los tres bloques tradicionales de aritmética, álgebra y geometría[14]. Ésta es la organización clásica de las matemáticas elementales, que encontramos en la mayoría de sistemas educativos occidentales anteriores a la reforma de las "Matemáticas Modernas", estructura que en España pervivió durante más de 100 años, hasta la aparición de la Ley General de Educación de 1970.

La estructura tradicional de la matemática enseñada en los tres bloques de aritmética, álgebra y geometría respondía a una visión de las matemáticas como "ciencia de la cantidad". En esta concepción, la aritmética corresponde al estudio de las "cantidades discretas", la geometría al de las "cantidades continuas" y el álgebra se presenta como "la ciencia que trata de la cantidad en general" (Vallejo 1835). De todas formas, es conocida la tradicional filiación directa del álgebra con la aritmética. En su libro "Lecciones de matemática" de 1758, el jesuita catalán Tomás Cerdá, importante impulsor de la enseñanza moderna de la ciencia (especialmente la física y las matemáticas) en la España del siglo XVIII e introductor en el país de la matemática europea del momento, expresa la vinculación entre la aritmética o "ciencia que trata de los números" y el álgebra o "aritmética universal" (la *Arithmetica Universalis* de Isaac Newton) en los términos siguientes (*Op. cit.* p. 6): [15]

> La parte de la Arithmetica, que se sirve de las expresiones universales, è indeterminadas, *a*, *b*, *c*, etc. se llama Algebra, ò Arithmetica Universal, pero entrambas se fundan en unos mismos principios, aunque el modo de obrar es algo diferente el uno del otro; el del Algebra es mas fácil, y expedíto, porque no está atado à tantas leyes, y circunstancias, el de la Arithmetica es mas difícil, y penoso.

El profesor Vallejo citado anteriormente, indica sin embargo que la filiación de la aritmética con el álgebra parece resultar más de una estrategia de difusión y organización de los tratados

[14] Ley de instrucción pública del 9 de septiembre de 1857 (Ley Moyano).

[15] http://www.archive.org/stream/licionesdemathe00cerdgoog#page/n11/mode/1up (Acceso 20/10/2010).

de matemáticas que de su propia naturaleza. Así lo indica críticamente en los términos siguientes (Vallejo 1835, p. 3):

> El álgebra se ha aplicado con más frecuencia a la determinación de las leyes de los números; esta es la razón porque, ordinariamente, este tratado sigue a la Aritmética. Nosotros no nos apartaremos de este uso aunque lo creemos fundamentado en ideas poco exactas del carácter elevado y trascendental del álgebra.

En la organización clásica de las matemáticas enseñadas, el álgebra mantiene habitualmente una estructura estándar que incluye una introducción al cálculo algebraico, el tratamiento de las ecuaciones de primer grado y los problemas asociados, el cálculo de potencias y raíces de expresiones algebraicas, el tratamiento de las ecuaciones de segundo grado y los problemas asociados. Aparecen también algunos otros temas como las proporciones y progresiones, los logaritmos, la regla de falsa posición, etc. (ver por ejemplo Cortázar (1881), Contreras (1902), etc.).

2.2. La reforma de las matemáticas modernas

Con la llegada de la reforma de las matemáticas modernas a partir de los años 60, la organización tradicional de las matemáticas sufre un fuerte descalabro. De la “ciencia de la cantidad” organizada en tres bloques, se pasa a una nueva concepción del edificio matemático como conjunto de estructuras y se reconstruye la matemática enseñada a partir de principios lógicos totalmente distintos. De este modo, en los nuevos programas del bachillerato (o enseñanza secundaria) publicados en 1967 ya no se encuentra ningún rastro de los tres bloques de contenido tradicionales y sólo se indica una serie lineal de lecciones o temas sin ninguna agrupación aparente. Como indica Mª Teresa González Astudillo en un estudio sobre la matemática moderna en España (2006, pp. 66-67):

> La distribución de las materias se hizo por curso agrupando los temas alrededor de las estructuras algebraicas fundamentales y prescindiendo por lo tanto de la tradicional separación entre Aritmética y Geometría. Así, en primero la estructura dominante es la de [semi]grupo (números naturales y segmentos); en segundo, el grupo y el anillo (números enteros, segmentos orientados, movimientos, ángulos como giros); en el tercero, aparece la estructura de cuerpo con los números racionales; finalmente en cuarto como ya están las estructuras necesarias se hace énfasis en la sedimentación y revisión de todo lo incluido en el ciclo y se introducen algunas nociones de polinomios.

Esta misma autora describe la evolución curricular que se produjo en la recepción de la reforma de las matemáticas modernas (*Op. cit.*, p. 68):

> La primera vez que se hace referencia a la Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria es a través de la Ley General de Educación en 1970, así el 2 de diciembre de 1970 se aprueban por Orden ministerial de Villar Palasí, las *Orientaciones Pedagógicas para la Enseñanza General Básica*. Para facilitar la creación de estructuras mentales se introduce la Matemática Moderna desde la primera etapa (6-10 años de edad). Esto permite, por ejemplo, la construcción de los números como una propiedad de los conjuntos, facilita la comprensión de estos conceptos antes

> de introducir los mecanismos correspondientes a las operaciones y evita el aprendizaje memorístico. En la segunda etapa (10-14 años) se insiste en los aspectos más formales y formativos en las matemáticas y se pretende que el alumno logre claridad, rigor y precisión en el pensamiento. Se concedió gran importancia al estudio de conjuntos y estructuras algebraicas, que se consideraron como un fin en sí mismos.

En esta Ley General de Educación, los programas correspondientes a los últimos cursos de la Enseñanza Básica (que corresponden a los primeros del bachillerato antiguo) indican que a lo largo de los diferentes niveles de la EGB la enseñanza de la matemática debe centrarse en el proceso de matematización de los problemas y la creación de sistemas formales.

En la nueva organización curricular de los contenidos no se mencionan para nada las expresiones algebraicas que, a diferencia de los polinomios, no se saben inscribir en ninguna estructura algebraica concreta. La noción de aplicación entre conjuntos y de función numérica ocupa una posición central, al que queda supeditado el cálculo ecuacional. Permanecen sin embargo algunos vestigios de la antigua organización matemática como la noción de proporcionalidad (de magnitudes y de segmentos) que coexistirá durante años con la de aplicación lineal.

2.3. La estructura curricular de la matemática “postmoderna” en España

Unos años más tarde, en la propuesta curricular que fija las enseñanzas mínimas para el ciclo superior de la Educación General Básica (lo que corresponde a los primeros cursos de la ESO actual, alumnos entre 12 y 14 años), la matemática enseñada adquiere una nueva estructuración en ocho bloques de contenidos: Conjuntos numéricos, Divisibilidad en ℕ, Geometría plana, Funciones, Proporcionalidad de magnitudes, Geometría del espacio, Estadística descriptiva e Informática. En esa nueva división, los temas que tradicionalmente correspondían al álgebra quedan esparcidos por los distintos bloques. Los números enteros pasan a formar parte del bloque de conjuntos numéricos y el trabajo con expresiones algebraicas y ecuaciones se incluye en el apartado de las funciones.[16]

En los programas que se desarrollan a partir de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990, la definición del currículum de la ESO pasa a ser competencia de los gobiernos de las distintas comunidades autónomas. Aparece un cambio formal importante en la manera de presentar los contenidos al distinguir entre “Hechos, conceptos y sistemas conceptuales”, “Procedimientos” y “Valores, normas y actitudes”. El Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes

[16] Real Decreto 3087/1982, de 12 de noviembre, por el que se fijan las enseñanzas mínimas para el ciclo superior de Educación General Básica. *Boletín Oficial del Estado*, 22 de noviembre 1982, núm. 280, p. 32013.

a la Educación Secundaria Obligatoria[17], propone la siguiente estructura de los contenidos (*Op. cit*., pp. 34-35):

1. Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización.
2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes.
3. Representación y organización en el espacio.
4. Interpretación, representación y tratamiento de la información.
5. Tratamiento del azar.

En el primer bloque encontramos un apartado de conceptos denominado “Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones” donde se especifica que el trabajo a realizar consiste en la resolución de ecuaciones de primer grado mediante transformaciones algebraicas, búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números, etc. En el cuarto bloque aparece mencionado el término de “expresión algebraica” vinculado a la representación gráfica de funciones. Y las ecuaciones vuelven a aparecer como herramienta de resolución de problemas aunque se indica que los alumnos deben también saber plantear y resolver ecuaciones mediante métodos que no requieran la manipulación algebraica de expresiones. Cabe mencionar que en los documentos curriculares no aparece explícitamente mencionada el álgebra como un “lenguaje de naturaleza matemática” como si se hace con las gráficas o la estadística.

La matemática “postmoderna” rompe definitivamente con la estructura tripartita clásica de la aritmética-álgebra-geometría y se produce un gran cambio tanto en el tipo de contenidos como en la actividad matemáticas que se propone para ser enseñada. El universo de las funciones adquiere, en cierto sentido, el papel de entrada a la “matemática superior” que anteriormente correspondía al álgebra.

2.4. El álgebra elemental en los currículos actuales

En España, la última reforma curricular corresponde a la Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo del 2006, de Educación (LOE)[18] que propone una nueva distribución de los contenidos presentada en los términos siguientes (*Op. cit*., p. 750):

> En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas. […] El resto de los contenidos se han distribuido en cinco bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas, y Estadística y probabilidad.

Vemos pues que el álgebra vuelve a adquirir derecho de ciudadanía en el reino de las matemáticas enseñadas que parecen retomar la estructura clásica aritmética-álgebra-

[17] *Boletín Oficial del Estado*, 26 de junio 1991, núm. 152, p. 21193.
[18] *Boletín Oficial del Estado*, 5 de enero del 2007, núm. 5, p. 677.

geometría, ampliándola con la herramienta funcional y la estadística y probabilidad. El texto se toma la molestia de precisar, a continuación, que la estructura en bloques no significa desconexión entre contenidos (*Íbid.*):

> Es preciso indicar que es sólo una forma de organizarlos. No se trata de crear compartimentos estancos: en todos los bloques se utilizan técnicas numéricas y algebraicas, y en cualquiera de ellos puede ser útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística.

En relación a la LOGSE, ha desaparecido la estructura de los contenidos en "procedimientos", "hechos-conceptos-sistemas conceptuales" y "actitudes-valores-normas". Además, al especificar los contenidos de cada bloque, mucho más detallados, se distinguen los cuatro cursos de las ESO. En la primera etapa de la ESO se propone una visión del álgebra más centrada en su faceta como lenguaje algebraico y es en la segunda etapa en la que se amplía esta visión del álgebra como herramienta para resolver problemas, investigar, demostrar, etc. Se indica además que el trabajo algebraico debe ser retomado y ampliado en cada curso (*Íbid*.):

> La consolidación de los contenidos complejos se realizará de forma gradual y cíclica, planteando situaciones que permitan abordarlos desde perspectivas más amplias o en conexión a nuevos contenidos. [...] Las destrezas algebraicas se desarrollan a través de un aumento progresivo en el uso y manejo de símbolos y expresiones desde el primer año de secundaria al último, poniendo especial atención en la lectura, simbolización y planteamiento que se realiza a partir del enunciado de cada problema.
>
> Para la organización de los contenidos de álgebra se ha tenido en cuenta que su estudio resulta, con demasiada frecuencia, difícil a muchos alumnos. La construcción del conocimiento algebraico ha de partir de la representación y transformación de cantidades. El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos.

Encontramos, al igual que en la LOGSE, una reiteración de la importancia otorgada a la resolución de problemas (*Íbid*.):

> Los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad.

Ahora, como en la reforma anterior, la última concreción de los contenidos curriculares es competencia de las comunidades autónomas, lo que provoca algunas diferencias significativas entre comunidades que no pretendemos abordar aquí. Sólo comentaremos el caso de Catalunya en el que al considerar el desarrollo curricular (DOGC núm. 4915, 29/6/2007), el cambio respecto al currículum anterior no se manifiesta demasiado en la descripción de los bloques de contenidos. Encontramos, en efecto, los cinco mismos bloques comunes a los cuatro cursos de la ESO, sin ninguna referencia explícita al álgebra: Numeración y cálculo, Cambio y relaciones, Espacio y forma, Medida y Estadística y azar. Los contenidos tradicionalmente asignados al álgebra elemental se ubican mayormente en el bloque de "Cambio y relaciones". Como respuesta a las dificultades de aprendizaje del álgebra que se mencionan en los documentos curriculares estatales se plantea un contacto paulatino con las expresiones algebraicas a través de la introducción al mundo funcional. En los primeros cursos se insiste en el uso de diversas formas de representación: verbales, tablas, gráficas y, en casos excepcionales, las expresiones algebraicas; se observa a medida que avanzamos en los cursos de la secundaria obligatoria como el álgebra asume un papel principal, y casi exclusivo, de medio de representación del mundo matemático. También se hace una mención explícita, y bastante frecuente, a la noción de modelización relacionándola y completando la de resolución de problemas.

Vemos pues que, a diferencia de la propuesta estatal expresada en el texto de la LOE, la opción del gobierno catalán en su descripción de la matemática a enseñar ha sido la de mantener una terminología en la que el vocabulario básico del álgebra elemental no presenta ningún protagonismo, esto no ocurre por ejemplo en las disposiciones realizadas, por ejemplo, por el gobierno de la Comunidad de Madrid donde el álgebra aparece como un bloque más de contenido.

Indiquemos, para finalizar este breve recorrido, que en la introducción al conjunto de contenidos de toda la etapa, la "competencia matemática"[19] se presenta como la cuarta "competencia básica" dentro de un conjunto de ocho. En su descripción detallada, tanto en la introducción general como al inicio del apartado de "Matemáticas", las únicas referencias al manejo de expresiones o del lenguaje algebraico aparecen en los términos siguientes:

> Competencia en comunicación lingüística. Las matemáticas contribuyen en esta competencia aportando el conocimiento de un lenguaje específico, necesario en el desarrollo de las ciencias (y en general del conocimiento) y en la resolución de muchos problemas cuotidianos. [...]
>
> Se debe potenciar el uso de diferentes formas de representación para comunicar aquello que se quiere expresar, a partir de la verbalización hasta llegar, de forma progresiva, al lenguaje simbólico. Este proceso favorece la incorporación gradual del lenguaje específico de las matemáticas y se convierte en una herramienta de resolución de problemas. [...]
> También el lenguaje algebraico, importante en los dos últimos cursos de esta etapa, se debe relacionar con aspectos numéricos, geométricos, de medida y funcionales.

Se pone así de manifiesto la tendencia a la interpretación, por parte de los currículos, del álgebra elemental como mero lenguaje científico.

[19] Un análisis del *enfoque por competencias* desde una perspectiva antropológica se encuentra en Gascón (2011b).

2.5. Características del álgebra como saber enseñado

Hemos visto como la evolución curricular hizo desaparecer durante muchos años el álgebra como área de las matemáticas enseñadas para reintroducirla recientemente, en algunos casos con la aritmética, en otros con las funciones, pero raras veces como un bloque de contenido con entidad propia. Un rápido examen de los libros de texto más utilizados muestra que, en la Secundaria española actual, el álgebra elemental se identifica básicamente con la resolución de ecuaciones. Este ámbito se ve a veces precedido por una "introducción al lenguaje algebraico", que sirve principalmente para introducir la terminología específica del cálculo ecuacional: expresión algebraica; valor numérico de una expresión; términos, miembros y coeficientes; términos semejantes; igualdades, identidades y ecuaciones e identidades notables (Bolea 2003).

Una breve encuesta pasada recientemente a profesores de matemáticas de Secundaria en activo, siguiendo el modelo propuesto en Chevallard (1986) a la pregunta: "Una persona que ha hecho estudios científicos pero que ha perdido contacto con la enseñanza secundaria actual os pide qué se enseña hoy día en álgebra en secundaria. ¿Qué le contestáis?"[20] La mayoría de profesores citan las ecuaciones, algunos nombran las técnicas para el cálculo algebraico y quedan algunas menciones al lenguaje algebraico, cálculo con números y letras y polinomios.

Por lo tanto, podríamos decir que los profesores identifican el álgebra enseñada en la ESO con resolver ecuaciones (de primer y segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas) y aprender a manipular expresiones algebraicas (básicamente polinomios y fracciones de polinomios). La articulación entre el universo de las ecuaciones y el de las funciones queda, generalmente, en el aire. Y, una vez en el Bachillerato (16-18 años), la matemática que se enseña hace un uso pleno del formalismo algebraico.

Aunque el desarrollo del cálculo algebraico está ligado históricamente a la teoría de ecuaciones, la enseñanza actual presenta una desproporción sorprendente entre los ejercicios de cálculo algebraico propuestos a los alumnos y los cálculos algebraicos efectivamente exigidos en la resolución de ecuaciones: éstos son en general mucho más simples que aquéllos. El tema de las ecuaciones no basta pues para justificar la importancia dada al cálculo algebraico en la ESO. Y tampoco encontramos otros ámbitos que, como ha ocurrido en el

[20] Esta encuesta no fue realizada sobre una muestra representativa de profesores de España, pero creemos que es útil como primer contacto con la visión de la institución escolar sobre el álgebra enseñada. En el anexo A de Ruiz-Munzón (2010) pueden consultarse las respuestas.

pasado con la geometría o el cálculo funcional, podrían requerir un dominio más avanzado del cálculo algebraico.

A falta de un ámbito de intervención para el cálculo algebraico este se hace siempre en el vacío, de manera intrínseca, sin relación con un objetivo matemático que convertiría el cálculo en un medio (y no un fin en sí mismo) y que daría pertinencia a las manipulaciones efectuadas sobre las expresiones algebraicas. Además, cuando el alumno tiene necesidad de aplicar efectivamente el cálculo algebraico a una tarea matemática (por ejemplo en el cálculo de límites en el Bachillerato), se pone claramente de manifiesto que el dominio manipulativo que ha adquirido sobre el vacío es completamente insuficiente para adaptarlo en cada caso a la especificidad de la tarea. Tomemos por ejemplo el cálculo de la derivada de una función racional y de sus asíntotas que se puede encontrar en cualquier libro de Bachillerato:

> Sea $f(x)=\frac{x^3+3x-8}{x^2+1}$. La mayoría de los estudiantes usarán para el cálculo de la derivada, directamente la fórmula del cociente y, para el cálculo de las asíntotas de $f(x)$ una secuencia de pasos "algorítmicos" (límite cuando x tiende a infinito; cálculo de límite de $f(x)/x$; etc.). No se les ha enseñado a "manipular" previamente la expresión de la función, mediante técnicas algebraicas conocidas como la división de polinomios, para obtener una expresión más sencilla de derivar y más adecuada para determinar las asíntotas: $f(x)=x+\frac{2x-8}{x^2+1}$.

En resumen, el primer aprendizaje del cálculo algebraico se hace en un marco formal y no funcional, en el que el alumno aprende a "desarrollar", "factorizar", "simplificar" expresiones porque se le pide hacerlo, no porque ello le permita resolver o facilitar alguna tarea. En consecuencia, las adquisiciones de estos primeros aprendizajes generales se pondrán a prueba en un ámbito nuevo donde el alumno tendrá que elegir, combinar y aplicar adecuadamente las reglas algebraicas aprendidas formalmente. El aprendizaje de las reglas del cálculo algebraico no debería hacerse de manera formal del mismo modo que el aprendizaje de las reglas del ajedrez debe hacerse con la utilización efectiva de estas reglas para jugar. Es en la práctica matemática efectiva, y con un objetivo concreto, como el alumno podrá aprender a elegir la mejor regla para cada "jugada".

Este aprendizaje "formal" posee dos limitaciones importantes:

(1) Se aprende implícitamente en referencia a la aritmética y al cálculo con números, cuando en realidad el cálculo algebraico se rige por unas reglas sintácticas totalmente distintas a las del cálculo aritmético. En particular, el cálculo aritmético tiende a simplificar cualquier operación realizada antes de pasar al cálculo siguiente. En cambio el álgebra se

basa en la no reducción – e incluso en la “complexificación” – ostensiva de los cálculos y manipulaciones realizadas (Bosch 1994).

(2) El aprendizaje formal es incapaz de recrear toda la variedad de manipulaciones que el alumno puede necesitar en el momento en que deba hacer un uso funcional de la herramienta algebraica. Surge así todo un vocabulario ligado a la necesidad de disponer de consignas que se refieren a las distintas manipulaciones formales (“calcular”, “simplificar”, “desarrollar”, “factorizar” y todas sus variantes) que, no sólo no permiten generar las manipulaciones algebraicas fundamentales, sino que, además, impiden que el alumno se enfrente al problema de tener que elegir cuál es, en el caso considerado, es decir, para llegar al fin propuesto, la transformación formal más adecuada.

Consideremos por ejemplo el siguiente problema:

¿Bajo qué condiciones la suma de dos positivos impares consecutivos será múltiplo de 3?

Para responder a esta cuestión podemos designar dos impares consecutivos cualesquiera mediante: $2n + 1$ y $(2n + 1) + 2$. Ante esta expresión el alumno actual sólo sabe hacer dos cosas: “desarrollarla” para obtener $4n + 4$ y “factorizarla” para encontrar la expresión algebraica equivalente: $4(n + 1)$ que permite afirmar que el resultado de nuestra operación será siempre un número par y múltiplo de 4, pero no permite dar una respuesta a nuestra cuestión inicial.

Por el contrario, una manipulación “funcional” de esta expresión – es decir dirigida a resolver el problema propuesto – requiere que se intente sacar un 3 factor común, “complexificando” la expresión reducida $4n + 4$ mediante la igualdad:

$$(2n + 1) + ((2n + 1) + 2) = 4(n + 1) = 3(n + 1) + (n + 1)$$

que nos permite afirmar que la suma de dos impares consecutivos es múltiplo de tres cuando la parte entera de la mitad del segundo impar es múltiplo de 3.

En resumen, podemos interpretar el álgebra enseñada en cada periodo histórico como el resultado de un proceso de transposición didáctica que, si bien permite que algunos componentes praxeológicos de las organizaciones matemáticas sabias penetren en el sistema de enseñanza, deja fuera muchos otros, creando unas organizaciones matemáticas escolares con una lógica propia cuyo origen no es fácil de desentrañar. El propio sistema de enseñanza creará un discurso para legitimar esta *ecología escolar* particular y defender su “autenticidad” en relación al saber sabio[21]. Por ejemplo se suele declarar que la diferencia entre el álgebra

[21] En este tipo de discursos se reproduce un fenómeno que ha mostrado la teoría de la transposición didáctica (Chevallard 1991) y que puede formularse como sigue: en el sistema de enseñanza el saber matemático no puede ser “cuestionado” y, en particular, no puede ni siquiera plantearse la cuestión de la distinción entre el “saber

enseñada y el álgebra sabia es una cuestión de "nivel" (la manipulación formal sería lo básico, la funcional lo avanzado, esto es, *lo formal va antes de lo funcional*), pero se niega la existencia de una diferencia esencial. Esta creencia justifica que un alumno sólo deba conocer un número reducido de expresiones notables, cuando un matemático profesional necesita muchas más.

3. Un modelo epistemológico de referencia del álgebra elemental

Acabamos de ver cómo el álgebra elemental que se propone para ser enseñada desde la *noosfera* y que se plasma en los sucesivos documentos curriculares ha ido evolucionando a lo largo de las últimas décadas. En este apartado elaboraremos un *modelo epistemológico de referencia* (en adelante, MER) utilizando los datos empíricos que emanan, por un lado, de la citada evolución del álgebra elemental que se ha propuesto para ser enseñada y, por otro, de la evolución del álgebra en la historia de las matemáticas. Para este segundo conjunto de datos empíricos tomaremos como referente las diferentes etapas descritas por Chevallard (1986) de la evolución del álgebra en la historia de las matemáticas. Se trata de tomar en consideración todos los datos empíricos que nos ayuden a interpretar cómo ha ido construyéndose históricamente este ámbito evolutivo que designamos como *álgebra elemental*, cuál ha sido su papel dentro de la matemática y qué tipo de funcionalidad ha tenido en las diferentes instituciones. La construcción de un MER del álgebra elemental tiene, al menos, dos objetivos: en primer lugar será útil para *reinterpretar* lo que se considera "álgebra" en la matemática escolar actual (en el ámbito de la enseñanza secundaria) y para indagar el papel que desempeña el álgebra elemental en relación con las demás áreas; y, en segundo lugar, el MER será imprescindible para estudiar la ecología de lo que el propio MER caracteriza como "actividad algebraica elemental", esto es, las restricciones que explican la situación de dicha actividad en la matemática escolar actual y las condiciones que deberían implantarse para modificarla en una dirección determinada.

3.1. Evolución del saber sabio

Siguiendo a Chevallard (1986), inicialmente consideramos como "núcleo primario" del álgebra la teoría de ecuaciones tal como la crea al-Khwarizmi en la primera parte del siglo IX.

sabio" y el "saber enseñado" porque esta distinción pondría en duda la legitimidad de la matemática escolar. De hecho, la distancia objetiva que existe entre estos dos regímenes del saber y que pone claramente en evidencia la teoría de la transposición didáctica, es la puerta de entrada del saber matemático en la problemática didáctica y constituye, en consecuencia, uno de los postulados fundamentales del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas y una de las principales aportaciones de la TAD a dicho programa.

En esta época la aritmética se entiende como el arte del cálculo mediante artilugios como el ábaco, la tabla de contar, la caja de arena, etc. Así, la utilización del método algebraico se identifica con el dominio, más allá de las reglas del cálculo ecuacional (*al-jbr* o cambio de miembro de un término y *al-muqabala* o reducción de términos del mismo tipo), de todo un cálculo algebraico que se desarrolla fuera del marco estricto de las manipulaciones de ecuaciones, sino directamente sobre las expresiones algebraicas. Como señala el matemático, filósofo e historiador Roshdi Rashed (1984):

> Los sucesores de al-Khwarizmi emprendieron una aplicación sistemática de la aritmética al álgebra, del álgebra a la aritmética, de ambas a la trigonometría, y de la geometría al álgebra. Fue así como se crearon el álgebra polinomial, el análisis combinatorio, el análisis numérico, la solución numérica de ecuaciones, la nueva teoría elemental de números, y la construcción geométrica de ecuaciones.

Siguiendo siempre a Chevallard (1986), y desde el punto de vista que adoptamos aquí, la evolución histórica del álgebra sabia se puede esquematizar en tres grandes etapas, dejando de lado los problemas del simbolismo algebraico que se zanjan esencialmente entre finales del XVI y principios del XVII, aunque no se resolverán completamente hasta el siglo XIX con la construcción formal de los sistemas de números.

La *primera etapa* corresponde a la identificación del álgebra, como sector de las matemáticas sabias, con la *resolución de* “*problemas aritméticos*” (expresados tradicionalmente de forma retórica). Esta identificación no se extiende más allá del Renacimiento porque estos problemas, exceptuando los del corpus diofántico que seguirán alimentando la reflexión matemática, se resuelven teóricamente quedando reducidos a simples aplicaciones comerciales. Es lo que da lugar a la aritmética práctica o comercial, del que la *Arithmetica Universalis* de Newton (1707) es un ejemplar ilustre al tiempo que constituye el corazón del corpus tradicional de la aritmética enseñada clásica que, como hemos visto, pervivirá en nuestros sistemas de enseñanza hasta la reforma de las matemáticas modernas.

La *segunda etapa* corresponde al desarrollo de la *teoría de ecuaciones* que ocupará a los algebristas europeos desde el Renacimiento hasta Descartes y su geometría (1673/1925). Los algebristas italianos del siglo XVI (Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli, etc.) resolvieron las ecuaciones generales de grados 3 y 4 (los matemáticos árabes no lo habían conseguido); sus sucesores chocarán durante tiempo con las ecuaciones de grado superior hasta que, entre finales del XVIII (Vandermonde, Lagrange) y principios del XIX (Abel, Galois), se llega a una respuesta negativa (imposibilidad de resolver algebraicamente, “por radicales”, las ecuaciones de grado superior o igual a 5). De este trabajo surgirán los primeros conceptos del álgebra moderna (cuerpos, anillos, etc.) que inician un nuevo periodo de desarrollo de la matemática sabia. Esta "teoría de las ecuaciones" sólo se difundirá en los niveles más altos de la educación (secundaria superior y universidad). En nuestro rápido recorrido de los programas educativos, hemos constatado que su "transposición" a la Secundaria obligatoria se hizo de forma muy parcial, básicamente para organizar y describir la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado.

Si en la primera etapa la razón de ser del álgebra era básicamente la generalización de las técnicas de resolución de los problemas aritméticos, en este segundo periodo de evolución histórica, el álgebra se desmarca claramente de la aritmética.

En la *tercera etapa* que distinguimos aquí, la herramienta que constituye el cálculo algebraico bajo su forma simbólica moderna penetra todo los ámbitos de la matemática y encuentra nuevos campos de aplicación, primero en la geometría (a partir de Descartes) y la teoría de números (con Fermat) y después en el análisis matemático (que inicialmente se designaba como "análisis algebraico") con la creación, a finales del siglo XVII, del cálculo infinitesimal. En este periodo moderno que llega hasta hoy día, podemos decir, siguiendo a Bolea (2003), que todos los ámbitos de la matemática sabia actual están *completamente algebrizados* en el sentido de que es difícil encontrar actividades que se desarrollen sin recurrir al simbolismo algebraico. Y es también esta matemática completamente algebrizada la que los alumnos acabarán por frecuentar, de forma abrupta, al final de la educación secundaria.

3.2. Construcción de un modelo epistemológico de referencia: el álgebra elemental como instrumento de modelización

En clara afinidad con la evolución histórica y, siguiendo a Bolea, Bosch & Gascón (1998), interpretaremos el *álgebra elemental* con el *proceso de algebrización*, es decir que la consideraremos, en primera instancia, como una *herramienta* para llevar a cabo una actividad de modelización que acaba por afectar a todos los sectores de la matemática. Esto podría explicar las dificultades del álgebra para aparecer como un contenido más de la enseñanza obligatoria al mismo nivel de las demás organizaciones matemáticas que se estudian en la escuela (como la geometría o la aritmética). En efecto, tiene más sentido considerarla como un *instrumento genérico de modelización* de *todas* las organizaciones matemáticas escolares, es decir, como una herramienta para modelizar sistemas previamente matematizados dando lugar a un *proceso de algebrización*.

Esta visión del álgebra como proceso de algebrización permite dar una respuesta concreta al problema del estatus y la razón de ser del álgebra elemental en la enseñanza secundaria actual.

Por un lado, el álgebra aparece como una herramienta privilegiada para abordar *cuestiones teóricas* que surgen en distintas áreas de la matemática elemental (especialmente la aritmética y la geometría) y que no encuentran respuesta dentro de estas mismas áreas. Un ejemplo tipo y bien conocido es el de trabajar con patrones o secuencias de las que se conoce el principio de construcción pero no la fórmula o ley general que las caracteriza. Esta caracterización pone de manifiesto otro rasgo diferenciador del álgebra elemental en relación a la aritmética ampliamente conocido: el álgebra elemental como "aritmética universal" permite *estudiar relaciones universales independientemente de la naturaleza de los objetos relacionados.* Como consecuencia se obtienen resoluciones "generalizadas", de todo un tipo de problemas, y no únicamente la respuesta asociada a un problema aislado como ocurre en aritmética. Por tanto, otro aspecto esencial de la razón de ser del álgebra elemental es la de responder a la necesidad de agrupar las tareas en *tipo de problemas* e introducir la idea de generalización del proceso de resolución.

En Ruiz-Munzón (2010) se propone una concreción de este proceso de algebrización articulado en tres etapas. El punto de partida del proceso requiere disponer de un sistema inicial para modelizar. Este sistema agrupa lo que Y. Chevallard designó, a principios de los años 2000, como los *programas de cálculo,* es decir cualquier secuencia de operaciones aritméticas que se puede efectuar "paso a paso". Podemos considerar que la mayoría de problemas de la aritmética (y algunos de la geometría elemental) remiten a la descripción verbal (o gráfica) y efectuación de estos programas de cálculo. El trabajo en este sistema hace surgir cuestiones de naturaleza teórica relacionadas con la necesidad de explicar las razones por las cuales se obtiene un resultado dado, de justificar o interpretar resultados equivalentes, etc. Es esta necesaria y progresiva ampliación de la problemática en torno a los programas de cálculo la que tomaremos como base para describir las tres etapas sucesivas del proceso de algebrización que constituyen una formulación esquemática del MER del álgebra elemental que proponemos.

La *primera etapa*[22] del proceso de algebrización aparece cuando es necesario considerar el *programa de cálculo* (PC) no sólo como un proceso sino *como un todo*, por ejemplo traduciendo la formulación retórica del PC a una *formulación escrita* que permita su manejo. Queremos remarcar que esto no implica, necesariamente, el uso de letras para denotar los números o las cantidades involucradas en el programa (denominadas como variables del PC),

[22] La delimitación de las etapas del modelo propuesto es relativamente arbitraria, ya que cualquier modelo responde a una intención de estudiar un cierto fenómeno. El lector encontrará una descripción más detallada en Ruiz-Munzón (2010).

pero sí que se requiere poner en juego la jerarquía de las operaciones y las normas de uso de paréntesis. En el trabajo en esta etapa aparecen nuevas técnicas para la *creación* y la *simplificación* de escrituras y un nuevo entorno tecnológico-teórico que incluye la noción de *expresión algebraica* y de *PC equivalentes*. Siguiendo la terminología clásica del cálculo ecuacional, diríamos que en esta etapa se incluye la técnica que Al-Khwarizmi (c. 780 – c. 850) designó por *al-muqabala*¸ pero no la operación fundamental de "restauración". "cancelación" o *al-jabr*, palabra árabe que da nombre al álgebra y que consiste en transformar simultáneamente los dos PC (los dos miembros de la ecuación) para obtener una nueva ecuación (o igualdad entre PC) equivalente a la anterior. Las manipulaciones de técnicas de simplificación y cancelación de ecuaciones es lo que designamos como "cálculo ecuacional".

El paso a la *segunda etapa* del proceso de algebrización se produce cuando las técnicas de simplificación de un PC y el trabajo con PC equivalentes no es suficiente para resolver el problema propuesto porque los "datos" del problemas y la propia "incógnita" vienen dados en forma de *relaciones entre variables* del PC. En consecuencia, la estructura de los tipos de problemas característicos de esta segunda etapa viene dada mediante la igualdad entre dos PC con los *dos mismos argumentos no numéricos* (x_1, x_2). En esta etapa aparece una mayor complejidad en las técnicas algebraicas de la primera etapa y, además, se requieren nuevas técnicas que permitan la manipulación de expresiones algebraicas, en particular, el *cálculo ecuacional* y la consideración de las *ecuaciones* (en principio con dos variables) como un nuevo objeto matemático. En el caso particular de que la incógnita sea el valor numérico que toma uno de los argumentos no numéricos (dados el valor concreto que toma el otro argumento no numérico y la relación entre los dos PCA), entonces el problema se reduce a la resolución de una ecuación con una incógnita. Es precisamente en este ámbito particular de la segunda etapa donde se sitúa principalmente el álgebra de la escuela secundaria española, esto es, en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita y de situaciones que pueden ser modelizadas por éstas.

La *tercera etapa* de algebrización llega cuando *no se limita el número de variables* con las que trabajamos y se elimina la distinción entre *parámetros* e *incógnitas*. Esta etapa no aparece en la secundaria actual, y sólo aparece ligeramente (con gran escasez de técnicas efectivas) en la asignatura de física, ya que incluye, en cierta manera, un trabajo de producción, procesamiento e interpretación de fórmulas.

En la primera etapa del proceso de algebrización se pone de manifiesto de manera incipiente uno de los rasgos característicos y diferenciadores del álgebra respecto a la aritmética qué ya hemos citado anteriormente y que consiste en el tratamiento de todo tipo de problemas mediante resoluciones generalizadas. Este planteamiento rompe con la idea dominante en el actual sistema de enseñanza secundaria, un tanto simplista, según la cual la principal razón de ser del álgebra escolar consistiría sólo en *simplificar* la solución aritmética "pura" (discursiva) de los problemas mediante el cálculo algebraico.

En efecto, en la matemática escolar de la enseñanza secundaria, el objetivo final del estudio del álgebra escolar consiste en traducir el enunciado de un problema al lenguaje algebraico y resolverlo mediante el planteamiento de una ecuación con una incógnita. Como fue constatado por Bolea (2003) la ausencia de una manipulación sistemática de la estructura global de los problemas de Secundaria se ve reflejada en el hecho de que las "letras" que forman parte de una expresión algebraica juegan únicamente el papel de incógnitas (en las ecuaciones) o únicamente el papel de variables (en el lenguaje funcional), pero los parámetros están prácticamente ausente. Es en este aspecto que afirmamos que el álgebra escolar tal como se presenta en la ESO española se ubica completamente en la parte más elemental de la segunda etapa del proceso de algebrización y podemos afirmar que nunca se alcanza la tercera etapa del proceso de algebrización, puesto que el álgebra no es utilizada como una herramienta de modelización para el estudio de problemas de todo tipo.

En resumen, y de acuerdo con el MER que hemos propuesto, consideramos que el álgebra debería introducirse en la enseñanza secundaria (y quizá incluso en la enseñanza primaria) como una *herramienta funcional* que permita llevar a cabo una actividad de modelización matemática antes de ser tematizada.

Postulamos que la enseñanza del álgebra debe promover una dialéctica entre el manejo formal del cálculo algebraico y el contenido de los sistemas numéricos. Este objetivo se deriva en una doble consideración: no podemos tener un dominio funcional del cálculo algebraico, sin ponerlo en funcionamiento como una *herramienta útil*[23]; y no podemos poner en funcionamiento esta herramienta sin instaurar una verdadera *dialéctica entre lo numérico y lo algebraico*. Puntualizamos que esta función modelizadora no niega la relación fundamental que existe entre el álgebra y la aritmética, pero sí la jerarquía unidireccional preestablecida entre estos dos ámbitos matemáticos. Desde esta nueva interpretación, la aritmética, o al menos parte de ella, constituye un sistema intra-matemático, entre otros, que el instrumento algebraico puede modelizar.

[23] Que permita obtener información del modelo intra-matemático o extra-matemático con el que trabajamos.

4. Reflexiones finales

El examen de los procesos transpositivos que han afectado el área curricular del álgebra elemental es pues un claro síntoma de la poca consciencia que tiene el sistema de enseñanza de las matemáticas de la razón de ésta, esto es, de su función en el desarrollo de la actividad matemática que los alumnos deben llevar a cabo. La pequeña encuesta a profesores españoles en activo que hemos citado más arriba es muy ilustrativa al respecto: el álgebra escolar se limita (según la idea dominante en la cultura escolar) a la resolución (formal) de ecuaciones y la manipulación (todavía más formal) de polinomios. La paradoja aparece cuando, en el bachillerato o en los estudios superiores, el alumno se encuentra con un universo matemático totalmente algebrizado, el de las funciones, el de la geometría analítica y el de la estadística, en los que deberá aprender a manipular expresiones y fórmulas con parámetros, así como decidir qué transformaciones le conviene realizar en cada situación.

¿Cómo puede la investigación en didáctica contribuir a modificar esta situación? El tipo de análisis que propone la TAD y que hemos presentado parcialmente en este trabajo (ver también Chevallard & Bosch 2011; Ruiz-Munzón et al. 2011) requiere en primer lugar una emancipación radical por parte de la investigación respecto de la visión sobre las matemáticas escolares que predomina en el sistema de enseñanza y, parcialmente, en la matemática sabia. La obligación del didacta es reconstruir este objeto de enseñanza que se designa como “álgebra elemental”, analizando sus componentes, sus funcionalidades y potencialidades dentro de una visión global del quehacer matemático que la escuela se propone difundir. Para ello se requiere tomar como *unidad de análisis* (Bosch & Gascón 2005) un sistema empírico que va mucho más allá de la clase de matemáticas e incluso de la escuela, para examinar todas aquellas obras sociales que están o podrían estar de alguna manera relacionadas con el álgebra, tanto en el presente como en el pasado del sistema de enseñanza: qué se enseña y por qué, qué se enseñaba y por qué, qué se podría enseñar y por qué no se enseña, cómo se ha transformado el álgebra de la matemática “sabia” para ser enseñada. En esta unidad empírica caben por supuesto los alumnos (actuales y pretéritos) y sus dificultades de aprendizaje, pero deben incluirse también las actividades, discursos y propuestas de todos los actores que integran el sistema de enseñanza (actual y pretérito) o inciden sobre él.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B. & Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: approaching complexity through complementary perspectives. En H. Chick, K. Stacey, J.

Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra Proceedings of the 12th ICMI Study Conference,* Melbourne, Australia: The University of Melbourne, vol. 1 (pp. 21-32).

Artigue, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Research praxeologies and networking theories. *VII Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).* Rzeszów (Polonia).

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001a). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001b). ¿Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas? *Educación Matemática*, 13(3), 22-63.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14,* 125-133.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.) *Balises en Didactique des Mathématiques,* Grenoble: La Pensée Sauvage (pp. 107-122).

Cerdán, T. (1758). *Lecciones de matemática. Elementos generales de arithmetica y algebra*. Barcelona: Francisco Suria.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique, *Petit x,* 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1986). *Enseignement de l'algèbre et transposition didactique*, intervention aux *Seminari e conferenze di scienze matematiche* (IRRSAE Piemonte, Turin, 25-26 novembre, 1986). (No publicado)

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche.* Marseille: Publications de l'IREM Aix-Marseille nº 16.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x,* 19, 45-75.

Chevallard, Y. (1990a). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Perspectives curriculaires : vois d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, 23, 5-38.

Chevallard, Y. (1990b). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire,* Nota de síntesis (no publicado).

Chevallard, Y. (1991). Didactique, anthropologie, mathématiques. Postface à la seconde édition. *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. *En R. Noirfalise y M-J. Perrin-Glorian (coord.), Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995),* 83-122.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2011). L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématique.*

Contreras, M. M. (1902). *Tratado de álgebra elemental* (10.ª edición). México: Antigua Imprenta de Eduardo Muguia.

Cortazar, J. (1881). *Tratado de álgebra elemental* (27.ª edición). Madrid: Librería de Hernarndo.

Descartes, R. (1673/1925). *La géométrie*. En *The Geometry of René Descartes,* Nueva York: Dover Publications.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée », *Petit x*, 37, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, 11(1), 77-88.

Gascón, J. (2011a). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME,* 14 (2), 203-231.

Gascón, J. (2011b). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológico de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31 (1), 9-50.

González Astudillo, M. T. (2006). La matemática moderna en España. *Unión. Revista Iberoamericanda de educación matemática,* 6, 63-71. Disponible en: < http://www.fisem.org/descargas/6/Union_006_008.pdf >. (Acceso 31/7/2010).

Rashed, R. (1984). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes.* Paris: Les Belles Lettres.

Ruiz-Munzón, N. (2010). La introducción elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzon, N., Matheron, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modelisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématique*.

Vallejo, J. M. (1835). *Compendio de Matemáticas. Puras y Mistas* (3.ª edición). Madrid: Garrasavaza.

Legislaciones

Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, núm. 4915, 29/6/2007.

Ley de instrucción pública del 9 de septiembre de 1857 (Ley Moyano). En *Historia de la Educación en España. II De las Cortes de Cádiz a la Revolución de 1868*. Breviarios de Educación. Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría General Técnica. Madrid 1985.

Ley 14/1970, de 4 de agosto, general de educación y financiamiento de la reforma educativa. *Boletín Oficial del Estado*, 6 de agosto de 1970.

Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado*, 4 de octubre de 1990, núm. 238, p. 28927.

Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo del 2006, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 5 de enero del 2007, núm. 5, p. 677.

Real Decreto 3087/1982, de 12 de noviembre, por el que se fijan las enseñanzas mínimas para el ciclo superior de Educación General Básica. *Boletín Oficial del Estado,* 22 de noviembre 1982, núm. 280, p. 32013.

Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 26 de junio 1991, núm. 152, p. 21193.

GRUPO:

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO (PNA)

Coordinador: José Luis Lupiáñez Gómez, Universidad de Granada

PNA1- ***Actuaciones de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas de edades en el entorno de la hoja de cálculo*** (Joaquín Arredondo, David Arnau y Luis Puig)

PNA2- ***Pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Una tesis en marcha*** (Mª Asunción Bosch, Encarnación Castro e Isidoro Segovia)

PNA3- ***La fenomenología de las fracciones: un estudio con maestros en formación*** (Elena Castro y Luis Rico)

PNA4- ***Un ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación de resolución de problemas en educación matemática*** (Antonio Codina, María C. Cañadas y Enrique Castro)

PNA5- ***Construcción de un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de EPO y ESO*** (Catalina Fernández Escalona y Juan A. Prieto Sánchez)

PNA6- ***Interpretación de diagramas en términos de enunciados verbal y su traducción algebraica*** (Fany González Barrios y Enrique Castro Martínez)

PNA7- ***Dificultades de estudiantes de sexto de primaria en la resolución algebraica de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo*** (José Antonio González-Calero, David Arnau y Luis Puig)

PNA8- ***Comprensión del sistema de numeración decimal en estudiantes del grado de maestro de educación primaria*** (Antonio Luis Ortiz, José Luis González y Jesús Gallardo)

PNA9- ***Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico*** (Susana Rodríguez, Marta Molina, María C. Cañadas y Encarnación Castro)

ACTUACIONES DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA CUANDO RESUELVEN PROBLEMAS DE EDADES EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO[24]

Joaquín Arredondo
David Arnau
Luis Puig
Universitat de València

Resumen

Se presenta el esbozo inicial de una investigación que pretende replicar parte del estudio de Arnau (2010) para verificar si la línea de vida, recurso espontáneo de los estudiantes para la resolución de problemas de edades en el entorno de la hoja de cálculo, se puede asociar a las características del entorno de enseñanza. Además, la investigación planteada pretende utilizar el análisis de las producciones de los estudiantes para concluir si la estructura de los problemas de edades es un condicionante para la aparición de la línea de vida como estrategia de resolución.

En la presenta comunicación se incluye el esquema de la investigación realizada y los resultados y conclusiones obtenidas tras el análisis de las producciones de los estudiantes durante la resolución autónoma de problemas algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo.

Palabras clave: aprendizaje y enseñanza del álgebra, resolución de problemas, problemas verbales de edades, nuevas tecnologías

Abstract

We present an initial outline of an investigation on solving age problems in the spreadsheet environment which tent to replicate a part of Arnau´s study (2010) to ensure if life line, a spontaneous resource to solve age problems in the spreadsheet environment, can be associated to spreadsheet features. Additionally, the investigation will use the analysis of students' productions to conclude if age problems structure is a conditioning for the use of the life line as a resolution strategy.

In this communication we include investigation´s structure and the outlines and conclusions obtained with the analysis of the students productions during their autonomous solving of algebraic problems in the spreadsheet environment.

Key words: learning and teaching of algebra, problem solving, age word problems, new technologies

[24] Esta investigación se ha realizado dentro del proyecto EDU2009-10599 concedido por la Dirección General de Investigación Científica y Gestión del Plan Nacional I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia.

Arredondo, J.; Arnau, D.; Puig, L. (2012). Actuaciones de estudiantes de Secundaria cuando resuelven problemas de edades en el entorno de la hoja de cálculo. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 217-228). Ciudad Real: SEIEM.

Antecedentes

El uso de la hoja de cálculo como medio para favorecer el paso de la aritmética al álgebra ha sido analizado por numerosos autores (Arnau, 2010; Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Friedlander, 1999; Sutherland y Rojano, 1993; Wilson, Ainley y Bills, 2004). Estas investigaciones han arrojado resultados a favor y en contra del uso de la hoja de cálculo en la introducción del álgebra y, en algunos casos, se han señalado los peligros que puede encerrar su uso.

Wilson, Ainley y Bills (2004) apuntan que la hoja de cálculo sirve de apoyo para el desarrollo de las actividades generacionales (Kieran, 2007), y lo justifican atendiendo a la necesidad de expresar los cálculos en la hoja de cálculo siguiendo unas estrictas convenciones de notación y a la retroalimentación inmediata que proporciona la misma. Sin embargo, Alex Friendlander y Michal Tabach (Friedlander y Tabach, 2001; Tabach y Friedlander, 2004) plantean la necesidad de ser precavidos al referirse a las posibilidades de la hoja de cálculo. Estos autores distinguen entre usar: exclusivamente números, fórmulas recursivas (que expresan una relación entre dos números consecutivos en una secuencia), fórmulas explícitas (que usan una sola variable independiente para expresar la generalidad) y fórmulas multivariables (que usan más de una variable para expresar la generalidad). Al relacionar los tipos de fórmulas anteriores con los equivalentes en álgebra encuentran: "En álgebra estándar, las fórmulas recursivas son herramientas menos efectivas para encontrar un número solicitado en una secuencia o para analizar y justificar propiedades de las secuencias […] Las fórmulas multivariables son consideradas frecuentemente un obstáculo para de los estudiantes al realizar tareas algebraicas" (Tabach y Friedlander, 2004, p. 429). En definitiva, concluyen que la potencia de la hoja de cálculo a la hora de generar grandes cantidades de números empleando cualquier tipo de fórmula hace imposible establecer una jerarquía de las habilidades necesarias para expresar generalización, válida en ambos entornos.

Las investigaciones de Rojano y Sutherland (Rojano, 1996; Rojano y Sutherland, 1993, 1997; Sutherland y Rojano, 1993), desarrolladas a partir del proyecto Spreadsheet Algebra Project, concluyen que la hoja de cálculo ayuda a los alumnos a explorar, expresar y formalizar sus ideas informales que, en la mayoría de los casos, demostraban una forma no algebraica de pensar al partir de lo conocido hacia lo desconocido. A diferencia de las posibles resoluciones aritméticas, el método de la hoja de cálculo implica que el resolutor sea consciente de las relaciones entre las cantidades, de que cantidad actúa como incógnita y de cuales son las restricciones para la obtención de su valor. Así, el uso de la incógnita en un entorno numérico podría considerarse como el inicio de la aceptación de operar con la incógnita simbólica en el álgebra tradicional.

Ahora bien, también encontraremos estudios que critican algunos aspectos del uso de la hoja de cálculo. En estos casos, es habitual señalar que el exceso de confianza en la producción de resultados numéricos puede disminuir la necesidad de reflexionar sobre las relaciones existentes entre las cantidades (Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Friedlander, 1999). En la misma línea, en Arnau (2010) se describe el recurso a una estrategia a la que llama uso de las líneas de vida cuando estudiantes, a los que se ha instruido en la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo, resuelven problemas de la familia de edades.

Objetivos

El recurso a las líneas de vida, que veremos en detalle a posteriori, posibilita que se puedan resolver problemas de edades de los que se ha hecho una lectura algebraica sin necesidad de operar con lo desconocido, motivo por el cual parece plausible suponer que el uso de líneas de vida no favorece la competencia a la hora de resolver problemas de manera algebraica, pues la base de este método es la operación con lo desconocido. De hecho, en Arnau (2010) se observó una disminución de la competencia de los estudiantes que participaron en un estudio en el que se les enseñó a resolver problemas mediante el método algebraico de la hoja de cálculo (en adelante, MHC; véase una descripción detallada en Arnau 2010) a la hora de resolver problemas de edades en lápiz y papel, así como un aumento en el uso de letras polisémicas, que contrastó con un incremento en la competencia a la hora de resolver problemas de otras familias.

Estas conclusiones, contrarias a lo que se esperaba, nos llevaron a plantear la replicación de esta parte del estudio con la intención de constatar si los resultados obtenidos en Arnau (2010) tenían su causa en la población del estudio o era un hecho que podíamos ligar a la naturaleza de la hoja de cálculo. En esta comunicación presentaremos resultados de un estudio llevado a cabo con nueva población que nos permitirán concluir que la aparición de esta estrategia espontánea es consecuencia de las características del entorno.

Las líneas de vida

Las líneas de vida (Arnau, 2010) suponen la creación de una secuencia numérica que representa las distintas edades que puede tener cada persona, transformando las cantidades incluidas en el problema (edades actuales y futuras de cada personaje) en variables (edad de cada personaje) que representan una situación real. Es decir, el recurso a las líneas de vida se apoya en el conocimiento de la realidad y el potencial de la hoja de cálculo para generar secuencias numéricas mediante fórmulas de recurrencia, de tal forma que los alumnos evitan operar con lo desconocido. Así, si para calcular la edad futura de una persona se da únicamente como dato la edad actual de la misma, en las líneas de vida los estudiantes sustituyen el trabajo con el tiempo transcurrido (cantidad desconocida) por la generación de la edad del año que viene de manera recurrente, buscando en dicha secuencia el momento que satisface las condiciones establecidas en el problema.

Compararemos unas actuaciones tipo para ejemplificar el uso de la línea de vida como alternativa válida para obtener la solución en los problemas de edades.

En el problema "Paz, Petra y su madre":

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las niñas, igualen la edad de la madre?

Resolución según MHC

Se construyen todas las cantidades del problema.

	A
1	**Paz,Petra y su madre**
2	Edad de Paz
3	Edad de Petra
4	Edad de la madre
5	Años para igualar edad de la madre
6	Edad de la madre pasados x años
7	Edad de Paz en x años
8	Edad de Petra en x años
9	¿Se iguala?

Se establecen las relaciones implícitas en el enunciado del problema

	A	B
1	**Paz,Petra y su madre**	
2	Edad de Paz	6
3	Edad de Petra	9
4	Edad de la madre	35
5	Años para igualar edad de la madre	1
6	Edad de la madre pasados x años	=B4+B5
7	Edad de Paz en x años	=B2+B5
8	Edad de Petra en x años	=B3+B5
9	¿Se iguala?	=B7+B8

Resolución con línea de vida

Se construyen cantidades que no hacen referencia a edades concretas, sino a los personajes de forma genérica.

	A
1	paz
2	petra
3	su madre
4	paz y petra

Se generan las edades futuras de los personajes del problema utilizando fórmulas de recurrencia.

	A	B	C	D
1	paz	6	=B1+1	=C1+1
2	petra	9	=B2+1	=C2+1
3	su madre	35	=B3+1	=C3+1
4	paz y petra	=B1+B2	=C1+C2	=D1+D2

Se obtienen las posibles soluciones dando valores al tiempo, cantidad desconocida.

	A	B	C
1	**Paz,Petra y su madre**		
2	Edad de Paz	6	6
3	Edad de Petra	9	9
4	Edad de la madre	35	35
5	Años para igualar edad de la madre	1	=B5+1
6	Edad de la madre pasados x años	=B4+B5	=C4+C5
7	Edad de Paz en x años	=B2+B5	=C2+C5
8	Edad de Petra en x años	=B3+B5	=C3+C5
9	¿Se iguala?	=B7+B8	=C7+C8

El uso de la fórmula de recurrencia permite obtener todas las situaciones que acontecen con el paso de los años, evitando así trabajar con lo desconocido.

	A	B	C	D
1	paz	6	7	8
2	petra	9	10	11
3	su madre	35	36	37
4	paz y petra	15	17	19

La fila 9, ¿se iguala?, permite observar si se cumple la condición establecida por el problema para obtener la solución correcta.

	A	B	C
1	**Paz,Petra y su madre**		
2	Edad de Paz	6	6
3	Edad de Petra	9	9
4	Edad de la madre	35	35
5	Años para igualar edad de la madre	1	=B5+1
6	Edad de la madre pasados x años	=B4+B5	=C4+C5
7	Edad de Paz en x años	=B2+B5	=C2+C5
8	Edad de Petra en x años	=B3+B5	=C3+C5
9	¿Se iguala?	=B7+B8	=C7+C8

La fila 4, paz y petra, recoge la suma de las edades de las dos hijas. Su valor se obtiene como suma de las edades de ambas.

	A	B	C	D
1	paz	6	=B1+1	=C1+1
2	petra	9	=B2+1	=C2+1
3	su madre	35	=B3+1	=C3+1
4	paz y petra	=B1+B2	=C1+C2	=D1+D2

Cuando la suma de las edades futuras de Paz y Petra toma el valor de la edad de la madre tenemos el momento buscado.

	A	S	T	U
1	**Paz,Petra y su madre**			
2	Edad de Paz	6	6	6
3	Edad de Petra	9	9	9
4	Edad de la madre	35	35	35
5	Años para igualar edad de la madre	18	19	20
6	Edad de la madre pasados x años	53	54	55
7	Edad de Paz en x años	24	25	26
8	Edad de Petra en x años	27	28	29
9	¿Se iguala?	51	53	55

Para determinar cuándo se verifican las condiciones del problema buscamos las celdas en las que el valor de "paz y petra" se iguala con "su madre".

	A	U	V	W
1	paz	25	26	27
2	petra	28	29	30
3	su madre	54	55	56
4	paz y petra	53	55	57

El diseño de la investigación y la selección de los problemas

El estudio que ofrecemos se desarrolló en el marco de un grupo natural de 27 estudiantes, de segundo curso de educación secundaria obligatoria (13-14 años), perteneciente a un centro de enseñanza de Albacete (Castilla-La Mancha). La experiencia se llevó a cabo como una actividad propia del curso lectivo, siendo incluida en la programación anual como complemento de las unidades de álgebra, proyectándose su desarrollo al finalizar el tema de ecuaciones con una incógnita y antes de comenzar la enseñanza de los sistemas de ecuaciones.

Las fases de la investigación se pueden esquematizar en cinco pasos:

- Primera fase: Administración de un cuestionario previo a la enseñanza (pre-test). El uso de este cuestionario tiene la finalidad de detectar el nivel de competencia de los alumnos que van a participar en el estudio cunado resuelven problemas verbales.
- Segunda fase: Introducción al funcionamiento de la hoja de cálculo. El objetivo de esta fase es conseguir que la hoja de cálculo se convierta en una herramienta para la resolución de problemas. Para lograrlo es necesario que los alumnos dominen las funciones que vamos a utilizar (introducción de fórmulas, establecer relaciones, etc.), por lo que se han diseñado unas sesiones de enseñanza centradas en su manejo.
- Tercera fase: La enseñanza de la resolución de problemas utilizando el MHC. El objetivo de esta fase es conseguir que los estudiantes sean capaces de resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo de manera algebraica.
- Cuarta fase: Resolución autónoma de problemas en el entorno de la hoja de cálculo. En esta fase observaremos las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas típicamente algebraicos mediante la hoja de cálculo. Con este fin se les suministrará tanto problemas de edades (6 problemas), para analizar si sus características influyen en la aparición de las líneas de vida, como problemas pertenecientes a otras familias (5 problemas a los que llamaremos problemas de control), que nos servirán para confirmar que la aparición de las líneas de vida no se asocia a un desconocimiento del MHC. Durante las sesiones dedicadas a esta fase, la intervención del investigador se limitará a aclarar dudas referentes únicamente al uso de la hoja de cálculo.
- Quinta fase: Administración de un cuestionario posterior a la enseñanza (post-test). Mediante este cuestionario se evaluará cómo la experiencia desarrollada ha modificado la competencia de los estudiantes al resolver problemas con lápiz y papel.

En la presente comunicación nos centraremos en la fase cuarta de la investigación, Resolución autónoma de problemas en el entorno de la hoja de cálculo, y analizaremos de forma detallada las producciones de los alumnos en los problemas de edades propuestos para concluir si la estructura de los problemas de edades condiciona la aparición de la línea de vida.

Selección de los problemas

El análisis detallado de todos los problemas utilizados fue presentado en Arredondo, Arnau y Puig (2011), por este motivo mostraremos únicamente, como elemento indispensable, el enunciado deteniéndonos en el análisis de los resultados obtenidos.

Paz, Petra y su madre

> Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Adrián

> Adrián tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián?

Padre e hijo

> Un padre tiene 40 años y su hijo 12. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era cinco veces la edad del hijo?

Amaya y Andrea

> Amaya tiene 9 años más que Andrea, y dentro de 3 años le doblará en edad. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Mi edad

> Mi edad dentro de 55 años será 6 veces mayor que mi edad actual. ¿Cuántos años tengo?

Joaquín y sus nietas

> Joaquín es un orgulloso abuelo de dos niñas, Icíar de 7 años y Luisa de 11 años. Si él tiene 52 años ¿Cuántos años han de pasar para que la suma de las edades de las nietas sea la edad de Joaquín?

Análisis resultados

Para resumir de forma breve y concisa los resultados de todas las parejas de alumnos que han participado en la investigación recurriremos a las tablas 1 (Resultados Generales), 2 (Resultados problemas de edades), y 3 (“Resultados problemas control”).

En la primera se muestran tres columnas que recogen el total de problemas abordados y resueltos correctamente por cada pareja, datos que se desglosan en las dos tablas siguientes en función de los dos tipos de problemas que distinguimos, edades y control. El porcentaje incluido en todas ellas muestra el número de problemas resueltos correctamente respecto del total de problemas abordados.

Las columnas denominadas como "Resueltos correctamente" recogen todos aquellos problemas que han sido resueltos sin tener en consideración la estrategia utilizada. Sin embargo, en las tablas 2 y 3 se añade una referencia al método de resolución, ya que consideramos relevante, en el primer caso, el número de veces que utilizan correctamente las líneas de vida y, en el segundo, si se utiliza el MHC.

Pareja	Abordados	Resueltos correctamente	Porcentaje
Puesto 2	11	10	90,91%
Puesto 3	5	5	100,00%
Puesto 4	11	10	90,91%
Puesto 5	8	6	75,00%
Puesto 6	10	10	100,00%
Puesto 7	5	5	100,00%
Puesto 8	5	5	100,00%
Puesto 9	7	7	100,00%
Puesto 10	9	8	88,89%
Puesto 11	2	1	50,00%
Puesto 12 (solo día 1)	1	1	100,00%
Puesto 13	6	6	100,00%
Puesto 14	9	8	88,89%
Total	89	82	92,13%

Tabla 1. Resultados Generales

Problemas de edades				
Pareja	Abordados	Resueltos correctamente	Resueltos correctamente con LV	Porcentaje
Puesto 2	6	6	0	100,00%
Puesto 3	3	3	0	100,00%
Puesto 4	6	6	4	100,00%
Puesto 5	6	4	4	66,67%
Puesto 6	6	6	4	100,00%
Puesto 7	3	3	2	100,00%
Puesto 8	5	3	1	60,00%
Puesto 9	5	5	3	100,00%
Puesto 10	6	6	4	100,00%
Puesto 11	0	0	0	0,00%
Puesto 12	0	0	0	0,00%
Puesto 13	4	4	3	100,00%
Puesto 14	6	5	4	83,33%
Total	56	51	29	91,07%

Tabla 2. Resultados problemas de edades

Problemas de control			
Pareja	Abordados	Resueltos correctamente con MHC	Porcentaje
Puesto 2	5	4	80,00%
Puesto 3	2	2	100,00%
Puesto 4	5	4	80,00%
Puesto 5	2	2	100,00%
Puesto 6	4	4	100,00%
Puesto 7	2	2	100,00%
Puesto 8	2	2	100,00%
Puesto 9	2	2	100,00%
Puesto 10	3	2	66,67%
Puesto 11	2	1	0,00%
Puesto 12	1	1	0,00%
Puesto 13	2	2	100,00%
Puesto 14	3	3	100,00%
Total	35	31	88,57%

Tabla 3. Resultados problemas control

Los resultados obtenidos en los problemas control reflejan que todas las parejas resolvieron al menos un problema correctamente mediante el MHC y que, en el conjunto de la clase, en el 88,57% de estos casos se resolvieron los problemas favorablemente. Estos datos parecen indicar que las trece parejas estaban capacitadas para utilizar satisfactoriamente el MHC.

Si analizamos los datos obtenidos con los problemas de edades, vemos que el porcentaje de problemas resueltos es mayor, un 91,07%, utilizando la línea de vida como estrategia de resolución diez de las doce parejas que afrontan, al menos, uno de los problemas de edades.

En la tabla 4 (Desglose problemas de edades) se muestra el número de parejas que resolvió cada uno de los distintos problemas de edades, detallando en las columnas siguientes el método de resolución empleado y la corrección de los resultados. En la tabla mencionada se resaltan los resultados de los tres problemas que suponen una novedad respecto a la investigación de Arnau (2010), seleccionados porque aportan estructuras de relaciones entre cantidades topológicamente diferentes.

Es destacable que en los problemas tomados de la investigación de Arnau la aparición de la línea de vida vuelve a ser frecuente (78% de las parejas en "Paz, Petra y su madre" y 80% de las parejas en "Adrián"". Sin embargo, esta situación no se repite en "Amaya y Andrea" y "Mi edad", problemas que los alumnos no resuelven utilizando la línea de vida sino recurriendo al MHC o a una resolución que combina ambos métodos.

				Método de resolución								
				Con LV			Con MHC			Híbridas		
Problema	Parejas	LV		Parejas	Bien		Parejas	Bien		Parejas	Bien	
Paz, Petra y su madre	9	7	78%	7	7	100%	2	2	100%	0	0	0%
Adrián	10	8	80%	8	7	88%	2	2	100%	0	0	0%
Padre e hijo	11	9	82%	9	8	89%	2	2	100%	0	0	0%
Amaya y Andrea	10	0	0%	0	0	0%	6	6	100%	4	4	100%
Mi edad	8	0	0%	0	0	0%	6	5	83%	2	2	100%
Joaquín y sus nietas	6	5	83%	5	5	100%	1	1	100%	0	0	0%
Total	54	29	54%	29	27	93%	19	18	95%	6	6	100%

Tabla 4. "Desglose problemas de edades"

Conclusiones

Centrándonos únicamente en los problemas de edades, y sabiendo que los problemas control demuestran que todas las parejas de alumnos son capaces de utilizar el MHC, podemos concluir que la línea de vida es un recurso espontáneo al que recurren un alto porcentaje de nuestros estudiantes, un 78% de las parejas, para la resolución de problemas de edades en el entorno de la hoja de cálculo.

Sin embargo, la línea de vida no se presenta en todas las situaciones, ya que la estructura de los problemas de edades parece actuar como un condicionante que limita su aparición cuando el tiempo no es la variable de referencia, sino un dato conocido. De esta forma, en los problemas "Amaya y Andrea" y "Mi edad", en los que el número de años que han transcurrido es un dato conocido, los estudiantes recurren al MHC o a una resolución que mezcla ambas el MHC con las líneas de vida.

En nuestra investigación se incluyó un tercer problema que incluía una nueva situación respecto a la investigación de Arnau (2010). En "Padre e hijo", en el que se pregunta por una situación pasada, la novedad es la necesidad de generar las líneas de vida decrecientes, utilizando para ello una formula de recurrencia que reste. Esta dificultad, que presuponíamos que podía limitar la aparición de la línea de vida, no ha sido tal para los estudiantes como apunta el dato de que nueve de las once parejas que resuelven el problema recurren a esta estrategia.

Referencias bibliográficas

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: València.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *2*, 337-344.

Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 252-257). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 137-145). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1993). Towards an Algebraic Approach: The Role of Spreadsheets. En I. Hirabayashi, N. Nobuhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 17th Psychology of Mathematics Education Conference*, *1*, 189-196.

Selvi (2010). La resolución de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo: un estudio exploratorio con alumnos recientemente introducidos en el uso del método cartesiano. Servei de Publicacions de la Universitat de València: València.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 353-383.

Tabach, M. y Friedlander, A. (2004). Levels of student responses in a spreadsheet- based environment. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *4*, 423-430.

Wilson, K., Ainley, J. y Bills, L. (2004). Spreadsheet generalising and paper and pencil generalising. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, *4*, 441-448.

PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO EN LOS PRIMEROS NIVELES. UNA TESIS EN MARCHA.

Mª Asunción Bosch Saldaña
Encarnación Castro Martínez
Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada

Resumen

En los últimos años, la investigación en matemática temprana ha experimentado un fuerte empuje, y el estudio de tópicos como el razonamiento multiplicativo o proporcional, que antes se enfocaba en niños mayores, se ha extendido a niños más pequeños. Nuestro trabajo trata de avanzar en el conocimiento sobre el pensamiento multiplicativo y relacional en niños de entre 4 y 6 años, en un contexto de resolución de problemas. Concretamente, mediante la propuesta de problemas de división que no puedan ser resueltos mediante un reparto, y el planteamiento de cuestiones sobre proporcionalidad asociadas a dichos problemas. Los análisis de los datos pretenden extraer información tanto de lo que hacen los niños y cómo lo hacen (logros alcanzados y estrategias utilizadas), así como de lo que dicen (argumentaciones y verbalizaciones realizadas). Estamos obteniendo interesantes evidencias de pensamiento multiplicativo y proporcional en los niños desde 4 años, en su resolución de las distintas tareas planteadas. Seguimos trabajando al respecto.

Palabras clave: pensamiento multiplicativo, pensamiento relacional, Educación infantil.

Abstract

In recent years, research on early mathematics has experienced a strong push, and the study of topics such as multiplicative or proportional reasoning, which previously focused on older children, has spread to younger children. Our job is to advance knowledge about multiplicative and relational thinking in children between 4 and 6, in a context of problem solving. Specifically, through the proposed division problems that can not be solved by a deal, and the proportionality approach to issues associated with these problems. The data analysis aims to extract information about both what children do and how they do (achievements and strategies used), as well as what they say (arguments and utterances made). We are getting interesting evidence of multiplicative and proportional thinking in children since 4 years old. We continue working on it.

Keywords: multiplicative thinking, relational thinking, early childhood education.

Bosch, M. A.; Castro, E.; Segovia, I. (2012). Pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Una tesis en marcha. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 229-240). Ciudad Real: SEIEM.

Marco conceptual y antecedentes

Los niños hacen matemáticas en cualquier parte y en muchas y diversas situaciones. Por lo tanto es algo natural que, en el aula, los niños de Educación Infantil lleven a cabo, espontáneamente, actividades que requieren habilidades matemáticas. Pero en la escuela, además, hemos de hacer matemáticas más sistemáticas, preparadas y dirigidas por los maestros, porque el sistema educativo tiene como finalidad potenciar todos los aprendizajes (Alsina, 2006; Canals, 2001).

Para realizar su labor docente con las máximas garantías, los maestros, junto con su experiencia, tienen que disponer de unas directrices, desde la Ciencia, sobre cómo desempeñar su labor (Baroody, 2003). El Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática es una de las principales encargadas de este cometido, ya que una de las tareas que se le encomiendan es la de proporcionar al educador matemático los instrumentos necesarios para que desarrolle su trabajo, de modo competente (Castro, Olmo y Castro, 2002). Hasta la década de los noventa, ha habido muchas investigaciones sobre esquemas de acción y modelos mentales en aritmética temprana, pero concentradas en torno a la suma y la resta (Castro, 1995). Del mismo modo, se han dedicado numerosos esfuerzos a proponer problemas de estructura aditiva a los niños y analizar su comportamiento y respuesta ante ellos, así como las estrategias usadas al resolverlos, mientras que la investigación sobre problemas de estructura multiplicativa ha sido muy escasa (Rodríguez y otros, 2008).

Posteriormente, se ha ido prestando más atención a los razonamientos multiplicativo y proporcional. De hecho, el estudio de tópicos de investigación tales como el razonamiento multiplicativo o proporcional, que antes se enfocaban en niños mayores se ha extendido a niños más pequeños (Charles & Nason, 2000; Lamon, 2007; Mulligan & Vergnaud, 2006; Sophian & Wood, 1997).

Actualmente, la investigación sobre matemática temprana está en auge. En los últimos años, la investigación en matemática temprana ha experimentado un fuerte empuje; han surgido nuevas revistas de investigación y numerosos artículos de investigación (Perry & Dockett, 2008; Sarama & Clements, 2009).

No obstante, la instrucción del conocimiento matemático se suele iniciar con tareas rutinarias y se relega el planteamiento de problemas verbales. Y los problemas que se proponen suelen tener la misma estructura semántica, lo que produce una automatización de las respuestas

(Caballero, 2005). Por ejemplo, los problemas de división que se plantean inicialmente suelen ser problemas de reparto. Y es cierto que la división comienza con la experiencia del reparto, pero no se puede limitar a ella (Nunes, 1997; Bryant, 1997).

Bajo este marco tiene lugar el estudio que presentamos a continuación. Para una mayor profundización sobre los antecedentes en el pensamiento multiplicativo a los primeros niveles, remitimos al lector interesado, a las publicaciones siguientes: Bosch, Castro y Segovia (2007), Bosch y Castro (2009) y Bosch (in press).

El problema de investigación

Nuestra investigación[25] pretende indagar cómo hacen frente los niños de entre 4 y 6 años a problemas de división que no pueden ser resueltos mediante un reparto, así como a tareas sobre pensamiento relacional de tipo proporcional.

El propósito general que pretendemos alcanzar con la tesis doctoral consiste, pues, en *realizar una búsqueda, propuesta y análisis de situaciones problema a través de las cuales los niños pongan en juego su pensamiento multiplicativo*. Dicho objetivo general se puede desglosar en varios objetivos particulares, entre ellos los siguientes:

- Describir cómo los alumnos de Educación Infantil se enfrentan a ciertos problemas de división en los que no se pueda realizar un reparto, así como el tipo de estrategias que utilizan resolviendo dichos problemas.
- Analizar cómo se enfrentan a determinadas cuestiones sobre pensamiento relacional de tipo proporcional y qué tipos de argumentos utilizan en sus razonamientos.

Nuestro problema de investigación se centra, pues, en plantear, a niños de entre 4 y 6 años, problemas de división que no pueden ser resueltos mediante un reparto y cuestiones sobre proporcionalidad asociadas a dichos problemas, y analizar posteriormente sus respuestas.

[25] Esta investigación se encuentra subvencionada por el proyecto I+D+I EDU 2009-11337 del MICINN, "Modelización y Representaciones en Educación matemática", cuyo responsable es el Dr. Enrique Castro Martínez, Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Recogida de datos: la entrevista

Los datos que exponemos en este documento, se han obtenido mediante entrevistas realizadas en el curso 2009/2010, a 54 niños del CEIP “28 de Febrero”, de Huércal de Almería.

Para la realización de dichas entrevistas, y como situación sobre la que plantear las preguntas, colocamos sobre una mesa un camino de papel continuo con 12 piedras (de plástico) equidistantes. Nos situamos alrededor de la mesa, entrevistadora y entrevistado/a, uno frente al otro, y explicamos la historia que contextualiza toda la entrevista, esto es, que la rana quiere llegar al final del camino donde le espera su mamá para darle la merienda, recalcando el hecho de que los saltos tienen que ser todos iguales una vez que inicia el camino.

De los estudios piloto anteriores (Bosch, Castro y Segovia, 2007; Bosch y Castro, 2009), obtuvimos valiosa información acerca de, entre otras cuestiones:

- El lenguaje más adecuado en las distintas secciones que componen la entrevista definitiva.
- La memoria de trabajo de los sujetos, así como el tiempo máximo de duración de las entrevistas, para evitar el cansancio de los mismos,
- El tipo de información no verbal que éstos ofrecían y que podía sernos de gran utilidad para nuestro análisis,
- El carácter de las ayudas o pistas que podíamos proporcionar a los alumnos, basándonos en las estrategias y argumentaciones de los mejores resolutores.
- Las preferencias en las representaciones, renunciando así al lápiz y papel que se ofrecía en estudios anteriores, y manteniendo las señales de plastilina optativas.

Por todo ello, la entrevista final, motivo de esta investigación, consta de tres partes:

En la **primera parte,** se observan las primeras habilidades de cómputo y estrategias de subitización y conteo de los sujetos, además de comenzar a explorar su incipiente pensamiento multiplicativo y relacional.

Concretamente, en primer lugar le pedimos que dé n saltos fuera del camino establecido, variando n entre 2, 3, 4, 5, 6, 10 y 12. Seguidamente, le interpelamos sobre el número total de piedras del camino. Por último, ya dentro del camino, le mostramos cómo podría avanzar la rana de una en una, de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y de seis en seis, y después le solicitamos a él o ella que lo haga por sí mismo.

En la **segunda parte** de la entrevista, se plantean a los sujetos las situaciones problema principales elegidas para la investigación[26]. Dichas situaciones problemas son las siguientes:

SECCIÓN A (Preguntas sobre el multiplicador[27])

- Tarea A.0: "Si la rana va de 1 en 1, ¿cuántos saltos tendrá que dar para recorrer todo el camino?"
- Tarea A.1 (m=2): "Si la rana va de 2 en 2 piedras, ¿cuántos saltos tendrá que dar para recorrer todo el camino?"
- Tarea A.2 (pensamiento relacional): "Si en lugar de ir de 2 en 2 piedras, la rana va saltando de 4 en 4 piedras, ¿dará más saltos o menos saltos que antes para llegar al final?"
- Tarea A.1 (m=4): "Si la rana va de 4 en 4 piedras, ¿cuántos saltos tendrá que dar para recorrer todo el camino?"

SECCIÓN B (Preguntas sobre el multiplicador)

- Tarea B.0: "Si la rana diera un salto muy grande y llegar hasta el final del camino, en un solo salto, ¿cuántas piedras pasaría a la vez?"
- Tarea B.1 (n=2): "Para hacer el camino en 2 saltos (iguales), ¿cuántas piedras es necesario saltar a la vez?, ¿de cuánto en cuánto tiene que ir la ranita?"
- Tarea B.2 (sobre pensamiento proporcional)*:* "Si en lugar de hacer el camino en 2 saltos, lo hace en 4 saltos, ¿pasará más o menos piedras en cada salto?"
- Tarea B.1 (n=4): "Para hacer el camino en 2 saltos (iguales), ¿cuántas piedras es necesario saltar a la vez?, ¿de cuánto en cuánto tiene que ir la ranita?"

Las tareas A.0 y B.0 son de carácter introductorio, y nos sirven, además de para insistir en el número total de piedras que vamos a dividir, para observar si el niño necesita contarlas de nuevo o razona sobre el número contado inicialmente.

[26] De los 54 estudiantes, 27 realizaron la entrevista con la parte A en primer lugar y la parte B en segundo lugar, mientras que los otros 27 la realizaron en orden inverso. De los 27 estudiantes de cada grupo, 9 correspondían a cada franja de edad, esto es, 9 eran de 4 años, 9 de 5 años y 9 de 6 años.

[27] Desde la literatura científica sobre los problemas de multiplicación y de división, se observa que multiplicando y multiplicador juegan dos papeles distintos, ya que influyen en la complejidad del problema. Asimismo, se muestra que la diferencia entre los roles de multiplicando y multiplicador influye en las estrategias de resolución adoptadas por los distintos resolutores, así como en la decisión de la operación a realizar (Gómez, 1995).

Las tareas de tipo A.1 y B.1 se refieren a la indagación sobre el pensamiento multiplicativo, en general; una es de tipo quotitivo y la otra de tipo partitivo, ya que preguntamos por multiplicador y multiplicando, respectivamente.

Las tareas de tipo A.2 y B.2 se refieren a la indagación sobre el pensamiento relacional multiplicativo de tipo proporcional. Sirven además como introducción a la siguiente tarea de tipo 1, ya que después de predecir lo que ocurriría si variamos las condiciones iniciales, instamos al niño a que lo compruebe.

Si los alumnos no emprenden la tarea a la primera, o no la concluyen con éxito, se les ofrece una ayuda o pista. Las ayudas que se ofrecen están basadas en las estrategias y argumentaciones más usadas por sujetos entrevistados anteriormente, observadas en los estudios piloto (Bosch, Castro y Segovia, 2007; Bosch y Castro, 2009). Recordemos que el enfoque de esta investigación se realiza desde la Didáctica de la Matemática, luego la intención es enseñar a los niños a aprender, no solamente apoyados en la propia capacidad, sino gracias a la ayuda del docente y de los iguales.

Las ayudas ofrecidas fueron las que se explicitan a continuación:

En la tarea A.1: "Ve de n en n y dime cuántos saltos has dado".

En la tarea A.2: "¿Cómo crees que llegará la ranita antes, de 2 en 2 o de 4 en 4?".

En la tarea B.1: "¿Dónde crees que está la mitad/cuarta parte del camino?".

En la tarea B.2: "¿Cuándo será el salto más grande, si hace el camino en 2 saltos o en 4 saltos?".

En la **tercera parte**, si el niño ha superado las anteriores tareas y no tiene muestras de cansancio o apatía, entonces se le propone una situación imaginaria en la que el camino conste sólo de 6 piedras y se le hacen las mismas preguntas que para el camino inicial, manipulable, pero adaptadas al nuevo número disponible de objetos.

Análisis de datos

En este trabajo, pretendemos realizar tres tipos de análisis sobre los datos obtenidos, que son: Un análisis de los logros de los alumnos, un análisis de las estrategias usadas por los niños y un análisis de las argumentaciones y las verbalizaciones ofrecidas por los sujetos.

A continuación, exponemos una muestra de algunos resultados obtenidos en cada tipo de análisis.

I) Análisis de logros

Una muestra de los logros obtenidos, en la tarea tipo A versus la tarea tipo B, se refleja en la siguiente tabla:

	Tipo A (INCÓGNITA: Nº DE SALTOS)								Tipo B (INCÓGNITA: Nº DE PIEDRAS)							
	De 2 en 2				De 4 en 4				En 2 saltos				En 4 saltos			
	4a	5ª	6a	Total	4a	5a	6a	Total	4a	5a	6a	Total	4a	5ª	6a	Total
NI	7			7	13	3		16	3		1	4	16	8	3	27
NC	7	4	2	13	5	6	4	15	12	6	1	19	2	5	7	14
CA	2	4	6	12		1	9	10	3	9	9	21			6	6
CS	2	10	10	22		8	5	13		3	7	10		5	2	7
				54				54				54				54

NI: No ha lugar la pregunta o no lo quiere intentar el niño.

NC: Intenta realizarlo y no lo consigue.

CA: Lo consigue tras la ayuda.

CS: Lo consigue solo.

Tabla 1: Logros en las tareas tipo A versus logros en las tareas tipo B.

Podemos observar que más de la mitad de los niños han sido capaces de resolver, con o sin ayuda, las tareas de división planteadas en el caso n=2; concretamente, 34/54 en el tipo 1 (De 2 en 2 piedras, ¿cuántos saltos?) y 31/54 en el tipo 2 (En 2 saltos, ¿Cuántas piedras?). Aunque en el caso de las tareas de tipo B, en las que se pregunta sobre el multiplicando, la necesidad de ayuda ha sido mucho mayor, ya que únicamente han contestado sin ayuda 10 niños, frente a los 22 niños que han logrado superar A1 sin ningún tipo de sugerencia. Se ha mostrado en este sentido muy interesante el proceso tanto de obtención como de confirmación del punto medio del camino, con diversas estrategias puestas en juego por parte de los niños.

II) Análisis de estrategias

El análisis de las estrategias utilizadas por los niños es importante, porque permite determinar cómo éstos organizan y procesan la información (Rodríguez y otros, 2008).

En este documento, ofrecemos una muestra del tipo de estrategias que utilizan los niños al enfrentarse a las tareas de tipo B1 ("En 2 saltos, ¿cuántas piedras?"). Así pues, tenemos que:

- Para obtener la mitad de las piedras (o del camino):
  - Señalan, por parejas, desde los extremos del camino hacia el centro.
  - Estiman (el número de piedras solicitado o el espacio que éstas ocupan):
    - En cálculo (tratando de partir el número en su cabeza)
    - En medida (poniendo la mano en el punto medio del camino)
- Para confirmar la mitad/cuarta parte del camino:
  - Cuentan los grupos de piedras:
    - En el mismo sentido.
    - Desde los extremos hasta el centro.
  - Agrupan los distintos trozos, como unidades múltiples, sirviéndose de los dedos (representando con un dedo cada una de las unidades simples-piedras, y explicitando el grupo de modo cardinal, tal y como habitualmente, niños y adultos, representamos digitalmente un grupo de unidades reducido).

III) Análisis de verbalizaciones

En este sentido, pretendemos realizar un análisis de contenido, que aún está en ciernes. No obstante, mostramos a continuación algunas de las más significativas aportaciones de los niños, en relación a la tarea A2 ("¿Si va de 4 en 4, dará más saltos o menos saltos que de 2 en 2?"), sobre pensamiento relacional de tipo proporcional (inverso).

- Ejemplos de verbalizaciones de niños de **4 años**:
  - "Le gusta dar saltos grandes, porque si da saltos pequeños tarda mucho en llegar… Da muchos saltos, en saltos pequeños"

- "Si salta muchas piedras, es más difícil, pero llega antes"

- Ejemplos de argumentaciones de niños de **5 años**: "Menos saltos de 4 en 4 porque …
  - "porque es más … porque es más adelantado"
  - "porque salta más piedras y termina antes"
- Ejemplos de argumentaciones de niños de **6 años**: "Menos saltos de 4 en 4 porque …
  - "porque se gastan más piedras y entonces llega antes"
  - "porque cuanto más dé, pues menos tiene que hacer"

Resultados y conclusiones

Algunos de los resultados más relevantes obtenidos hasta el momento, en estas últimas entrevistas, son los siguientes:

Respecto al conteo, hemos observado varias cuestiones:

- En el conteo inicial, fuera del camino, que los niños más pequeños comienzan a contar en voz alta para cantidades menores, mientras que los niños mayores, comienzan a contar en voz alta, únicamente, a partir de solicitarles que dieran 5 o 6 saltos con la rana.
- Comparando el conteo de los saltos de la rana (acciones) que las piedras (objetos), podemos afirmar que les cuesta más realizar los primeros que los segundos, ya que en numerosas ocasiones los niños no han sido capaces de contar los 12 saltos solicitados, pero sí de contar las 12 piedras que componían el camino (objetos estáticos, "independientes del sujeto").

Respecto a la capacidad de los niños de estas edades para resolver problemas de división que no puedan ser resueltos mediante un reparto, tenemos que:

- Más de la mitad de los alumnos entrevistados resolvieron algunos de los problemas planteados (igualando y mejorando, en algunas cuestiones concretas, los resultados obtenidos en los estudios piloto, entendemos que por el efecto de adaptación del lenguaje y de las ayudas ofrecidas, ambos aprendizajes obtenidos en los estudios previos).
- Además, las ayudas han sido de utilidad en muchos casos, información que nos parece especialmente relevante debido a la finalidad didáctica de nuestro trabajo.

En relación al pensamiento relacional de tipo proporcional incipiente, hemos obtenido interesantes indicios del mismo, en el sentido de que:

- Respecto a las preguntas iniciales, en el conteo fuera del camino, numerosos entrevistados realizaban distintos tipos de saltos según el número solicitado de los mismos y, en bastantes ocasiones, adaptados al espacio disponible sobre la mesa. Así, los niños realizaban, rana en mano, saltos dentro de las siguientes categorías:
  - Saltos iguales (en cuanto a la amplitud de los mismos).
  - Saltos menos amplios conforme se acercan al final del camino (y observan que ya no tienen espacio).
  - Saltos más pequeños conforme el número solicitado es mayor, pero iguales en amplitud desde el principio del conteo (en cada caso concreto).
- Respecto a las preguntas sobre la tarea B2 ("Si en lugar de hacer el camino en 2 saltos, lo hace en 4 saltos, ¿pasará más o menos piedras en cada salto?"), les ha resultado más sencillo razonar sobre el continuo que sobre el discreto, en el sentido de que sabían con seguridad qué trozo del camino o qué salto era mayor o menor, pero no en cuál recorría un mayor o menor número de piedras.

  De forma análoga observábamos ya en los estudios piloto (Bosch, Castro y Segovia, 2007; Bosch y Castro, 2009), que ante la pregunta sobre si la rana daría más o menos saltos, si iba de 4 en 4, en lugar de ir de 2 en 2, los niños respondían en términos continuos, en el sentido de si la rana llegaría antes o después a su destino.

A modo de conclusión, si tenemos en cuenta las evidencias de que los niños son capaces de realizar tareas mucho más sofisticadas de las que hasta ahora se le planteaban, y de que el conocimiento acerca de las mismas resulta crucial para la formación de las maestras y maestros y sus futuras prácticas docentes, entonces vemos imprescindible el desarrollo de una investigación que permita seguir avanzando hacia un currículo de Educación Infantil que potencie al máximo el desarrollo de los niños.

Este trabajo empírico pretende, en este sentido, recoger y analizar evidencias sobre pensamiento multiplicativo en los primeros niveles, que permitan mejorar la comprensión acerca de cómo se desarrolla el pensamiento multiplicativo de los niños, lo cual ayude a los maestros, tal y como indica Baroody (2004), a planificar correctamente una secuencia de tareas, provocar un conflicto cognitivo y promover el aprendizaje significativo. Continuaremos trabajando para este cometido.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto "Modelización y Representaciones en Educación Matemática" (ref. EDU 2009-11337, Plan I+D+i del Ministerio de Ciencia e Innovación), cuyo investigador principal es el Dr. Enrique Castro Martínez, Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático en niños de 0 a 6 años,* Octaedro, Barcelona.

Baroody, A. J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*, pp. 1-34. Lawrence Erlbaum.

Bosch, M. A.; Castro, E.; Segovia, I. (2007) El Pensamiento Multiplicativo en los Primeros Niveles. *PNA*, vol. 1, 179-190.

Bosch, M.A.; Castro, E. (2009). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Un estudio evolutivo de corte transversal. En *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación Monografía XII*, pp. 248-259.

Bosch, M.A. (in press) El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Un análisis teórico.

Bryant, P. (1997). Mathematics understanding in the nursery school years. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics*, pp. 53-67. Psychology Press.

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Canals, M. A. (2001). *Vivir las Matemáticas,* Octaedro, Barcelona.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*, Comares, Granada.

Castro, E.; Olmo, M. A.; Castro, E. (2002). *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Charles, K.; Nason, R. (2000).Young Children Partitioning Strategies. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43, 191-221.

Gómez, B. (1995). *El multiplicando y el multiplicador. ¿Es necesario distinguirlos o es indiferente?* Extraído de http://www.uv.es/gomezb/28Elmultiplicando.pdf, el 27/07/2010.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning. En Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 629-667. USA: NCTM.

Mulligan, J.; Vergnaud, G. (2006). Research on Children's Early Mathematical Development. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research in the Psychology of the Mathematics Education*, pp. 117-146.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective*, pp. 29-44. Psychology Press.

Perry, B.; Dockett, S. (2008). Young Children's Access to Powerful Mathematical Ideas. En *Handbook for International Research in Mathematics Education*, pp. 81-112.

Rodríguez, P., Lago, M. O., Caballero, S., Dopico, C., Jiménez, L.; Solbes, I. (2008). El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. Anales de Psicología, vol. 24, 240-252.

Sarama, J.; Clements, D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for young Children*, Routledge, New York.

Sophian, C.; Wood, A. (1997). Proportional reasoning in young children: The parts and the whole of it. *Journal of Educational Psychology*, 89, 309-317.

LA FENOMENOLOGÍA DE LAS FRACCIONES.
UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN

Elena Castro-Rodríguez
Luis Rico Romero
Pedro Gómez Guzmán
Universidad de Granada. España

Resumen

En este trabajo presentamos la fenomenología de la relación parte-todo en el estudio de las fracciones. Abordamos está noción debido a su contribución al significado del concepto de fracción. Para ello describimos cuáles son los fenómenos para los que la relación parte-todo es el medio de organización y qué relación tiene dicho concepto con esos fenómenos. Además mediante la invención de problemas estudiamos desde un planteamiento empírico el dominio conceptual que tienen los maestros en formación inicial sobre la fenomenología de la relación parte-todo. El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los distintos fenómenos presentes en las producciones de los participantes.

Palabras clave: fracciones, relación parte-todo, fenomenología, maestros en formación.

Abstract

In this paper, we present the phenomenology of part-whole relationship in the study of fractions. We are interested in this idea for his contribution to the meaning of the concept of fraction, and we also describe the interpretations of the part-whole relationship, as well as the relationship this concept has with these interpretations. Once this problem arises, we also study from an empirical approach the conceptual knowledge teachers have in initial training on the phenomenology of part-whole relationship. The analysis has provided the categorization of responses, and relationships have emerged between those phenomena seen in the outputs of the participants.

Keywords: fractions, **p**art-whole relationship, phenomenology, teachers in initial training.

Castro-Rodríguez, E.; Rico, L.; Gómez, P. (2012*).* La fenomenología de las fracciones. Un estudio con maestros en formación. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 241-250). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

Bajo diferentes contextos, los conceptos matemáticos adquieren diferentes significados. Un hecho difundido en los ámbitos especializados es la carencia o pobreza de significados de los conceptos matemáticos que se observa en los estudiantes. El conocimiento de estos significados, sus interrelaciones y la capacidad para interpretarlos y utilizarlos como elementos de aprendizaje forman parte del conocimiento del contenido que debe poseer un profesor de matemáticas. El escaso bagaje o riqueza de situaciones con los que están familiarizados y que respondan a estructuras semánticas distintas es una de las causas del fracaso escolar de los estudiantes al resolver problemas. La riqueza de situaciones con las que trabajan los estudiantes está determinada por las programaciones que hace el profesor o que selecciona de las que ya están hechas por las editoriales. El profesor es pues una pieza clave en este aspecto y la formación de maestros debería incluir una parte que resaltara el papel y la importancia que tiene la fenomenología de los conceptos en el éxito en resolución de problemas.

Las fracciones y la relación parte-todo

Las fracciones se utilizan en diversas situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo: a) al tostarse, el café pierde un quinto de su peso, si un comerciante tiene 80 kg. de café verde ¿cuánto pesará el producto después de tostarlo? b) Indica la relación que existe entre la parte sombreada y el total de esta figura. Estas y otras situaciones que podemos localizar en manuales y otros materiales escolares conllevan distintas interpretaciones del concepto de fracción, que interesan a profesores y educadores ya que afectan de modo importante a su trabajo con los escolares. Los usos y significados de las fracciones son objeto de estudio por los expertos e investigadores en educación matemática.

Distintas interpretaciones de este concepto se han estudiado por diferentes especialistas en educación matemática, quienes las han presentado y difundido en trabajos y publicaciones (Berh et al.,1983; Carpenter, Fennema y Romberg, 1993; Figueras, 1988; Freudenthal, 1983; Kieren, 1976; Streefland, 1978). Kieren utiliza el término *subconstructo* para referirse a distintas interpretaciones de las fracciones. Inicialmente, Kieren identifica cuatro subconstructos de las fracciones: razón, operador, cociente y medida, en donde la relación parte todo es considerada la raíz o el origen de estos.

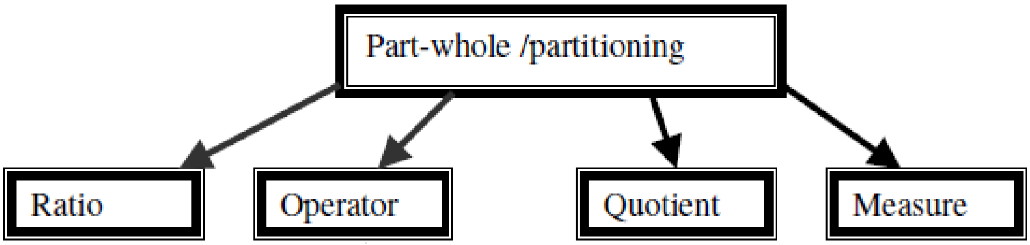


Figura 1. Esquema del Modelo Teórico Propuesto por Behr, et al. para las Fracciones

Un examen detallado del diagrama presentado en la figura 1 pone de manifiesto que la relación parte-todo junto con el proceso de partición se considera fundamental para el desarrollo de los cuatro subconstructos de las fracciones.

Nosotros consideramos que la relación parte-todo es importante en la interpretaciones escolares de las fracciones, pero a diferencia del modelo de Behr et al. no consideramos que el subconstructo parte-todo sirva de fundamento para el desarrollo del resto de interpretaciones si no como base para las interpretaciones de cociente-reparto y medida. En ambos casos la estructura en la que se basan la constituye la relación multiplicativa entre las partes que se consideran y el todo que se ha dividido en partes.

En este proceso de fragmentación de un todo, bajo ciertas condiciones, dichas partes P_i pueden ser iguales. En este caso, la relación entre una de las n partes iguales P de un todo o totalidad T se convierte en una relación multiplicativa, lo que conocemos en aritmética escolar como relación parte-todo y que será el núcleo de nuestro estudio. Este caso particular donde las partes son iguales, podemos representar aritméticamente la relación multiplicativa entre una parte y el todo por $T = n \times P$.

En esta conceptualización de la relación multiplicativa parte-todo hay presentes cuatro componentes fundamentales:

El todo (T) o cantidad que tomamos como referencia, de la que se parte. En el caso de las matemáticas escolares consideramos fundamental distinguir si el todo se presenta mediante una o varias figuras geométricas o a través de una cantidad de alguna magnitud.

La relación ($R(P,T)=1/n$), que expresa la relación entre una de las partes iguales P y el todo T o cantidad que se divide; usualmente se simboliza la relación mediante la fracción 1/n. En el caso en el que el todo se presente como una figura geométrica, la relación expresa numéricamente la medida de cada una de las n partes iguales, P, con respecto del todo T que es tomado como medida de la parte obtenida.

La parte (P) cuya relación con el todo T viene dada por una unidad fraccionaria 1/n, y se denomina *parte enésima de T*.

Estas tres componentes dan lugar a un cuarto elemento presente en la estructura, el complementario de la parte ($T = P \cup C$).

Dentro de nuestro estudio, nos centramos y desarrollamos nuestro trabajo en la relación parte todo, identificándola en situaciones en las que un todo se divide o separa en partes iguales. No obstante, queremos subrayar que siendo básica la relación parte-todo en la fundamentación del concepto de fracción, hay otras interpretaciones que no se derivan de esa relación.

Fenomenología de la relación parte-todo

En el campo de la didáctica de la matemática, la fenomenología adquiere especial relevancia debido a Freudenthal (1983), en su obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* en la que realiza una minuciosa descripción de la *fenomenlogía didáctica*, un particular análisis de los objetos matemáticos. Éste método de análisis de los objetos matemáticos parte de la contraposición entre fenómeno y noumeno. El término noumeno hace referencia a los conceptos y estructuras matemáticas, mientras que el término fenómeno hace referencia al conjunto de fenómenos organizados por un concepto o una estructura matemática determinada.

En nuestro trabajo, la reflexión con que abordamos la fenomenología se fundamenta en los trabajos de Rico y sus colaboradores (Rico, 1992; Rico 1995, 1997; Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig et al. 1997). Estos investigadores desarrollan una herramienta para la planificación de unidades didácticas de matemáticas, los organizadores del currículo, con los que buscan abordar los problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Los organizadores del currículo se describen como aquellas herramientas conceptuales y metodológicas que permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre los múltiples significados de las matemáticas. Entre estos organizadores se encuentra un referente de nuestro interés, la fenomenología. Desde un punto de visto fenomenológico, seguimos las ideas propuestas por estos autores para poder establecer aquellas cuestiones que serán tenidas en cuenta en la clasificación de los tipos de problemas que involucran a la relación parte-todo.

Tipos de problemas

En la conceptualización de la relación pate-todo propuesta anteriormente, se identifican los siguientes elementos: (a) la relación (R), (b) la fracción ($1/n$) (b) el todo (T), (c) una parte (P), y (d) la parte complementaria (C). Estos elementos se relacionan como se muestra a continuación:

$$R(T,P) = \frac{1}{n},$$

$$P = \frac{1}{n}T,$$

$$T = nP,$$

$$T = P + C.$$

La distinción en la atención a las partes da lugar a la consideración de lo que es conocido y desconocido de acuerdo con nuestra conceptualización. Cuando se considera una parte en el modelo

$$P = \frac{1}{n}T,$$

cada uno de los elementos, *P*, $\frac{1}{n}$ o *T* junto la parte complementaria puede ser el dato desconocido, mientras que los otros dos se conocen.

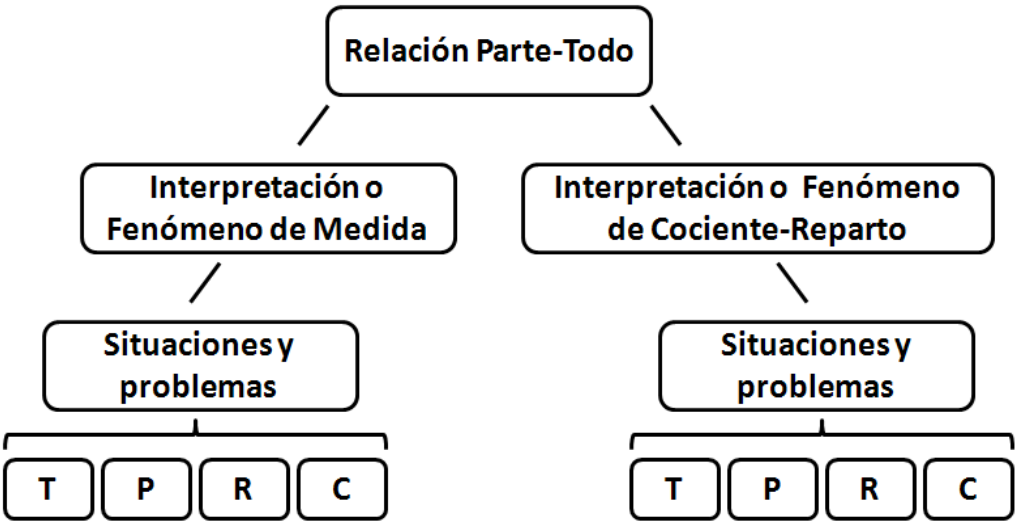


Figura 2. Esquema de los tipos de problemas para la relación parte-todo

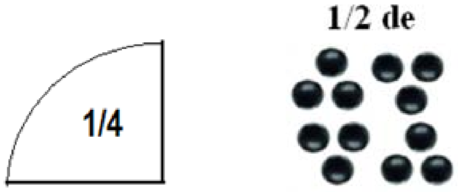
La caracterización de la relación parte-todo que hemos presentado nos permite clasificar los problemas de fracciones atendiendo a su interpretación y a los datos conocidos y desconocidos implicados: T, P, R y C. Así, un ejemplo de un problema de medida inventado por uno de los sujetos del estudio, en el que los datos del enunciado son el todo y la parte, y la incógnita es la relación es: "si la medida de este segmento es 1/3, dibuja el segmento completo".

Metodología

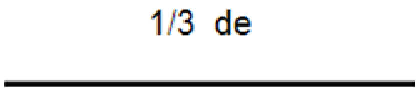
Este trabajo lo situamos en el campo de la metodología descriptiva, basado en el método de encuesta con la utilización de un cuestionario de respuesta abierta como instrumento para la recogida de datos. Se trata de un estudio de tipo exploratorio, realizado durante el curso académico 2009-2010. Los sujetos encuestados fueron 358 estudiantes de magisterio de primer año de la Universidad de Granada, que constituyen una muestra intencional por disponibilidad y en total. Las cuestiones se han formulado con el objetivo de poner de manifiesto las interpretaciones que los maestros en formación inicial utilizan y conocen en relación con dos tipos de fenómenos: medida y cociente-reparto, con cantidades tanto discretas como continuas. Para ello proporcionamos una información gráfica, mediante esta prueba en la que carácter discreto o continuo lo proporcionan las representaciones utilizadas, y se pide a los estudiantes que doten de sentido a las representaciones mediante un enunciado que responda a los datos proporcionados.

Las preguntas del cuestionario cuyas respuestas se someten a análisis en este estudio son:

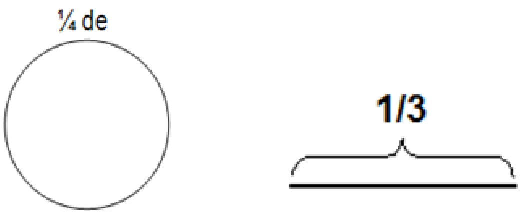
Cuestionario 1. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:



Cuestionario 2. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:



Cuestionario 3. Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:



Resultados

Una vez realizado el vaciado de todos los enunciados producidos por los estudiantes de magisterio participantes en el estudio, estudiamos la frecuencia de respuesta de cada unos de los tipos de problemas presentados anteriormente.

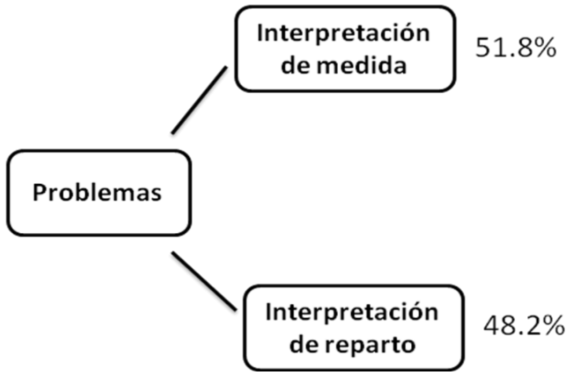


Figura 3. Frecuencia en porcentaje de las respuestas obtenidas según la interpretación

Como se observa en la figura 3, los enunciados inventados por los estudiantes emplean en porcentajes muy similares situaciones de medida y situaciones de cociente-reparto en sus problemas.

Tabla 1. Frecuencia en porcentaje de las respuestas obtenidas según la interpretación

Dato desconocido	**Porcentaje**
Todo	16%
Parte	41.7%
Relación	11.8%
Parte complementaria	30.5%

Tabla 2. Frecuencia en porcentaje de las respuestas obtenidas según la interpretación y el dato desconocido

Interpretación	**Dato desconocido**	**Porcentaje**
Medida	Todo	22.3%
	Parte	25.1%
	Relación	16.6%
	Parte complementaria	36%
Cociente-Reparto	Todo	9.2%
	Parte	59.5%
	Relación	6.7%
	Parte complementaria	24.6%

A nivel general, los problemas propuestos sobre la relación parte-todo presentan como dato desconocido la parte. No obstante, existe una mayor frecuencia de la parte complementaria como dato desconocido en los problemas que hacen referencia al fenómeno de medida. En el lado opuesto, encontramos que el dato desconocido menos frecuente en los enunciados de los maestros en formación es la relación entre la parte y el todo. Este resultado coincide tanto en la interpretación de medida como en la de reparto, seguido en ambos casos por los problemas que presentan el todo como incógnita.

Conclusiones

El análisis realizado ha revelado que los maestros en formación inicial que participaron en este estudio, consideran una pluralidad de problemas no triviales para estos conceptos. Además se observa que es posible la clasificación de dichos enunciados en términos de fenómenos tanto de medida como de cociente, independientemente de que las representaciones sean discretas o continuas, y que esto lo hacen desde un nivel gráfico a otro verbal.

Con respecto a los tipos de preguntas planteadas, corroboramos que la información gráfica dota de sentido (medida o reparto) a una relación parte-todo, independientemente del tipo de cantidad (discreta o continua) considerada, sin que se aprecie una preferencia por uno de estos sentidos. También se confirmó que las gráficas permiten identificar elementos de la estructura conceptual y expresar las relaciones entre el todo y la parte de manera coherente.

Como hemos destacado anteriormente, la relación parte-todo resulta fundamental en la interpretación escolar de las fracciones. Aunque aparentemente parezca una noción trivial, la relación parte-todo presenta cierta complejidad que es necesario determinar. Es por ello que decidimos realizar un estudio empírico centrado en cómo los maestros en formación inicial abordan la relación parte todo a través de una serie de preguntas sencillas. Finalmente y mediante el proceso descrito, se ha recogido la información necesaria para realizar un acercamiento a aquellos fenómenos que contemplan los maestros en formación inicial en la invención de problemas sobre la relación parte-todo.

Referencias bibliográficas

Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational-number concept. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisitions of mathematics concepts and processes. (pp. 91-126). New York: Academy Press.

Carpenter, T.P., Fennema, E. y Romberg T. A. (Eds.). (1993). Rational numbers: An integration of research. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales. Tesis de Doctorado, Cinvestav. México.

Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En F. Hitt (Ed.) Investigaciones en Matemática Educativa. (pp. 173-196). México: Grupo Editorial Iberoamérica,

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), Number and measurement. (pp. 101-144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Streefland, L. (1978). Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. Educational studies of mathematics, 9(1), 51-73.

Rico, L. (1992). Proyecto docente. Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (1992). Evaluación del sistema educativo español: El caso de las matemáticas. SUMA, 10, 15-24.

Rico, L. (1995). Conocimiento numérico y formación del profesorado. Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada.

Rico, L. (Coord.) (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona: Horsori.

UN EJEMPLO DE USO DEL ANALISIS SECUENCIAL EN LA INVESTIGACIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Antonio Codina Sánchez
Universidad de Almería, España
María C. Cañadas Santiago
Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada, España

Resumen

En este trabajo presentamos las posibilidades del análisis secuencial y la técnica de coordenadas polares para describir y analizar el proceso de resolución, por parejas, de un problema de optimización mediado por una i-actividad. Iniciamos el trabajo con algunos antecedentes teóricos y la descripción de las técnicas del análisis secuencial y de coordenadas polares. Finalmente ejemplificamos y describimos el potencial de estas técnicas.

Palabras clave: análisis secuencial, técnica de coordenadas polares, resolución de problemas.

Abstract

We describe the possibilities of sequential analysis and the coordinates polar's technique to describe and analyze de resolution process, in pairs, of an optimization problem mediated by a i-activity. We first present the general theoretical background and the description of the sequential analysis techniques and the polar coordinates. Finally, we exemplify and describe the potential of these techniques

Keywords: sequential analysis, coordinates polar's technique, problem solving.

Codina, A.; Cañadas, M.C. y Castro, E. (2012*).* Un ejemplo de uso del análisis secuencial en la investigación en resolución de problemas en educación matemática. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 251-269). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

La resolución de problemas matemáticos como campo de investigación educativa ha sido y es abordada desde diversas ópticas y enfoques (Castro, 2008) destacando como una de las principales y tradicionales corrientes de investigación en Educación Matemática (Kilpatrick, 1992). Algunas de las investigaciones han puesto su atención en las etapas o fases[1] durante la resolución de problemas (Artz y Armour-Thomas, 1990, 1992; Goos, Galbraith y Renshaw, 2002; Pólya, 1945, Schoenfeld, 1985) pero en sus análisis no se llegan a establecer con nitidez las relaciones que existen entre ellas.

En un intento para establecer y describir dichas relaciones, presentamos una aproximación basada en la metodología observacional (Anguera, 1990, 1993) y las posibilidades del Análisis Secuencial de la conducta (Bakeman y Gottman, 1989) y la técnica de coordenadas polares (Anguera y Losada, 1999) para *describir y analizar el proceso de resolución, por parejas, de un problema de optimización mediado por una i-actividad*[2].

En este trabajo mostramos, por un lado, cómo se obtienen diversos estadísticos básicos que caracterizan el proceso de resolución general; medidas del trabajo en paralelo, de continuidad y de traslación en el desempeño; grafos de transiciones y cómo, cuántas y en qué orden se producen. Y por otro lado, a través de las coordenadas polares, presentamos las relaciones entre los episodios en resolución de problemas y el carácter excitatorio o inhibitorio entre ellos, tanto en la perspectiva prospectiva como en la retrospectiva. Finalmente, el análisis de los resultados nos lleva a concluir que estas técnicas tienen un gran potencial en el campo de la investigación en resolución de problemas.

Marco conceptual y antecedentes

La resolución de problemas en Educación Matemática es multidisciplinar y multifocal, considerándose una actividad matemática y también un objeto educativo relevante en el

[1] En este trabajo, aunque se parte de la idea tradicional de fases o etapas en la resolución de problemas, adoptamos la noción de episodio: “periodo de tiempo durante el cual un individuo o grupo de resolutores están ocupados con una determinada tarea … o persiguen una meta común” (Schoenfeld, 1985, p. 292) como unidad de observación en nuestra descripción del proceso de resolución de problemas.

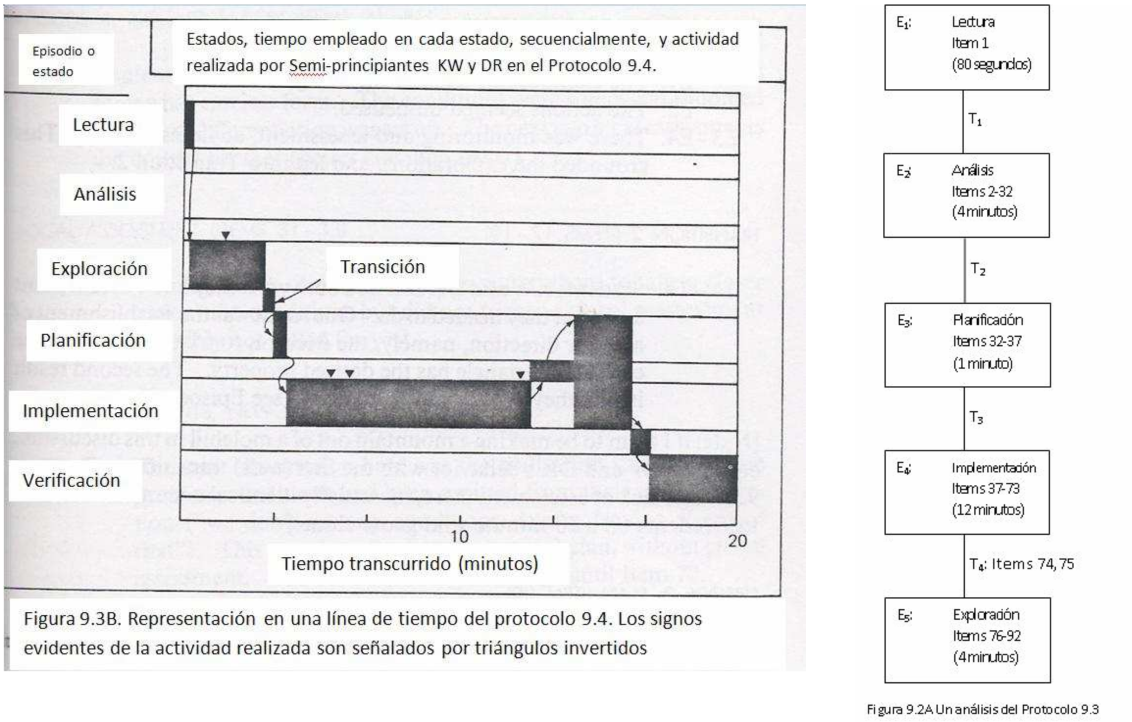
[2] Se define i-actividad como “actividades en formato Web cuyo objetivo es facilitar el desarrollo de la propia actividad y el consiguiente aprendizaje a través de la interactividad del ordenador con el estudiante” (Codina, Cañadas y Castro, 2011, p. 159). En Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2010) se encuentra una descripción detallada de la i-actividad.

proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Ambas perspectivas, que no pueden entenderse la una sin la otra, han propiciado el desarrollo de dos grandes líneas de investigación educativa: (a) la que se preocupa por enseñar a resolver problemas y (b) la que está orientada a estudiar cómo pensamos cuando resolvemos problemas (Castro, 2008). Este trabajo se enmarca dentro de la segunda orientación.

Numerosos autores han intentado caracterizar cómo los humanos resolvemos problemas siendo el trabajo de Pólya (1945) uno de los más influyentes (Castro, 2008; Codina, 2000). Pólya, en su libro *How to Solve it*, pretende proporcionar al estudiante herramientas para la resolución de problemas matemáticos, principalmente estrategias heurísticas, a la vez que ofrecer una guía al docente acerca de cómo ayudar al estudiante en ese aprendizaje. Este autor propone un modelo del proceso de resolución de problemas en cuatro etapas: (a) comprender el problema, (b) concebir un plan, (c) ejecutar el plan y (d) examinar la solución.

Schoenfeld (1985), bajo la influencia del trabajo de Pólya, idea un protocolo de observación para analizar y describir el proceso de resolución basado en la toma de decisiones de los estudiantes a nivel de ejecución y de control del proceso. Este modelo considera la noción de *episodio* como unidad de observación, donde un episodio es un “periodo de tiempo durante el cual un individuo o grupo de resolutores están ocupados con una determinada tarea… o persiguen una meta común” (Schoenfeld, 1985, p. 292). El modelo de Schoenfeld se compone de seis episodios: (a) lectura, (b) análisis, (c) exploración, (d) planificación, (e) implementación y (f) verificación. Este autor organiza la información en una sucesión de episodios ordenada en el tiempo y describe el proceso de resolución a través de un análisis cualitativo de las producciones verbales y escritas de los sujetos (ver Figura 1).

Artz y Armour-Thomas (1990, 1992) caracterizan y codifican por separado los procesos cognitivos y metacognitivos durante la resolución de problemas a partir del trabajo de Schoenfeld. Artz y Armour-Thomas definen un nuevo modelo con ocho episodios: (a) lectura, (b) exploración, (c) comprensión, (d) análisis, (e) planificación, (f) implementación, (g) verificación y (h) observación y escucha. Al igual que Schoenfeld, utilizaron una técnica secuencial temporal para el registro y análisis de los episodios (Figura 2). Utilizando una técnica similar a las descritas, Goos, Galbraith y Renshaw (2002) analizan los procesos de autocontrol y autorregulación de parejas de resolutores (Figura 3).



Nota: Texto originariamente en inglés. Traducción propia.

Figura 1. Organización secuencial de Schoenfeld (1985, p. 303 y p. 295)

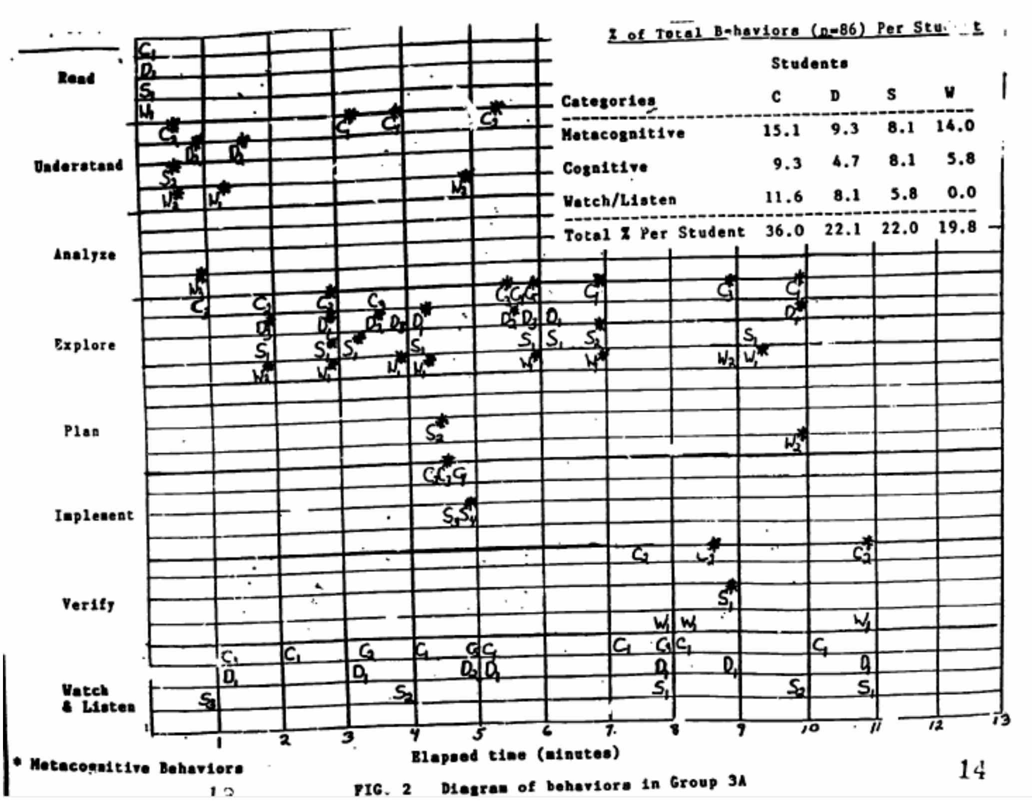


Figura 2. Parrilla de observación de Artz y Armour-Thomas (1990, p. 12)

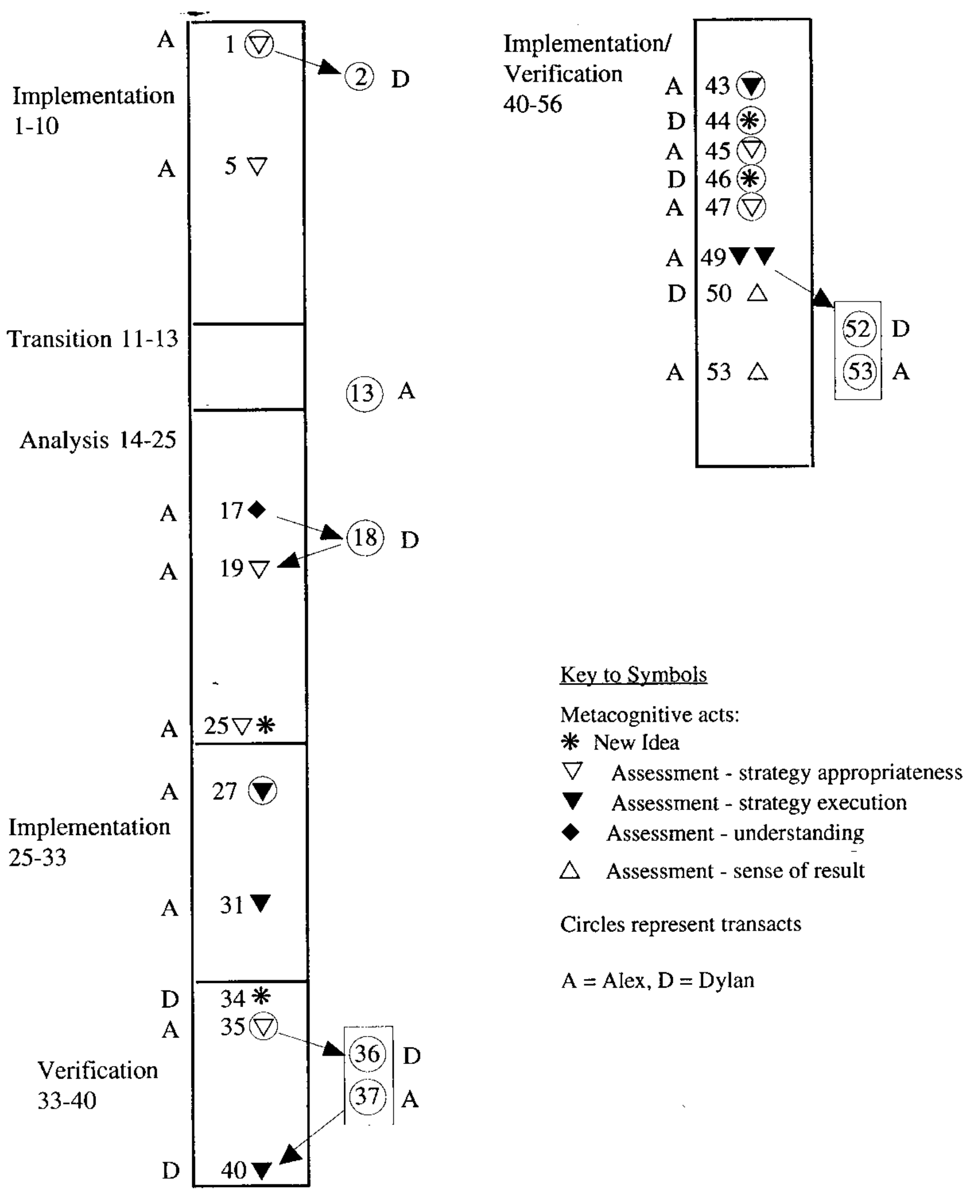


Figura 3. Protocolo de análisis de Goos, Galbraith y Renshaw (2002, p. 214)

En los ejemplos propuestos, el proceso de resolución es entendido como un flujo de conductas en el tiempo, observables a través de la utilización de los episodios como unidad de registro. Aunque estas investigaciones han aportado un significativo avance en la comprensión del proceso de resolución de problemas, las relaciones que se establecen entre los distintos episodios durante la resolución es una cuestión abierta. Desde una metodología observacional, la técnica del análisis secuencial de la conducta, entendida como "un conjunto de técnicas cuya finalidad es poner de manifiesto las relaciones, asociaciones, o dependencias secuenciales entre unidades de conducta" (Quera, 1993, p.349), provee nuevas herramientas donde el foco de atención se sitúa en las relaciones, asociaciones o dependencias entre los distintos episodios durante la resolución de problemas. Una revisión bibliográfica permite concluir que el análisis secuencial tiene tradicionalmente su campo de aplicación en Psicología (Anguera, 1990, 1993; Bakeman y Gottman, 1989) y en las Actividades Físicas y Deportivas (Gorospe y Anguera, 2000). En cambio, no tenemos constancia de investigaciones con este enfoque en Educación Matemática[3], de ahí que lo consideremos un nuevo camino a explorar.

Un requisito previo en la metodología observacional, y para cualquier análisis secuencial, es disponer de un sistema taxonómico que caracterice la conducta a observar. Las posibilidades de análisis son mayores si el sistema es además exhaustivo y mutuamente excluyente.

La técnica de coordenadas polares permite conocer las relaciones entre los episodios a través de la elaboración de un mapa de relaciones con el que poder objetivar en qué medida cada una de los episodios repercute en los otros y si esta influencia es inhibidora o activadora.

Anguera (1997) y Gorospe y Anguera (2000) proponen una modificación de técnica en coordinadas polares, llamada de retrospectividad genuina, a partir de la propuesta inicial de coordenadas polares de Sackett (1980).

Esta modificación (Figura 4) consiste en fijar un episodio (*E*) y, en la perspectiva prospectiva, se tienen en cuenta las puntuaciones *z*, el número de retardos o lag[4] considerados, tomando *E* como episodio criterio y las demás (*A*, *B*, *C* y *D*) como apareo. Sin embargo, en la perspectiva retrospectiva, se considera el episodio *E* como apareo. Una vez obtenidas las puntuaciones *z*, se obtienen los valores del estadístico $Z_{sum} = \frac{\sum z}{\sqrt{n}}$, siendo *z* los valores independientes obtenidos en los respectivos retardos y *n* el número de retardos. Según Sackett (1980), el parámetro Z_{sum} es un potente reductor de datos con una elevada capacidad informativa de las

[3] No se han obtenido resultados positivos en ERIC probando con diversas palabras clave relacionadas con la metodología observacional y la técnica de análisis secuencial de la conducta. Búsqueda realizada el 29 de junio de 2011 en http://www.eric.ed.gov

[4] Un retardo o *lag* es la transición entre las ocurrencias de dos categorías, en nuestro caso, los episodios. Los retardos se contabilizan desde ocurrencias de una conducta criterio o focal hasta las ocurrencias de las conductas apareadas u objetivo.

relaciones entre conductas. La variante de la retrospectividad genuina considera suficiente calcular los retardos positivos, de *+1* a *+5* en la perspectiva prospectiva mientras que en la perspectiva retrospectiva se considera de *-1* a *-5*.

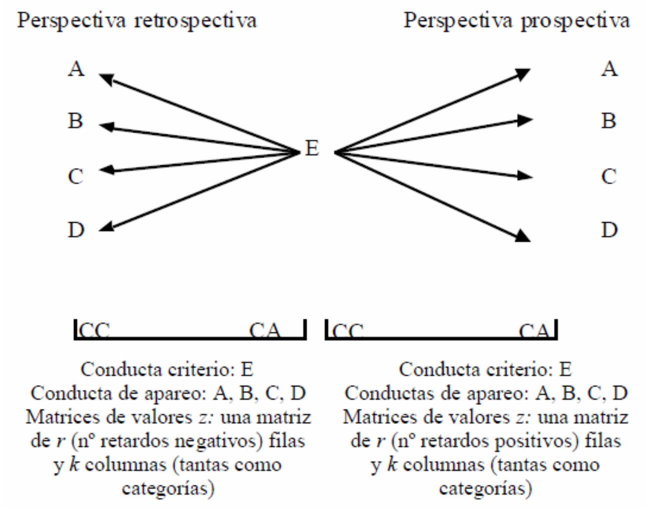


Figura 4. Coordenadas polares restrospectividad genuina (Gorospe y Anguera, 2000, p. 279)

Llamando Z_{sumX} al sumatorio de los residuos ajustados del retardo 1 al 5 dividido entre la raíz del número de retardos (perspectiva prospectiva) y Z_{sumY} al sumatorio de los residuos ajustados del retardo -1 al -5 dividido entre la raíz del número de retardos (perspectiva retrospectiva), el par (Z_{sumX}, Z_{sumY}) permite definir vectores con los que construir un mapa conductual de inhibición y excitación. Si los módulos de los vectores generados son superiores a *1.96*, las relaciones se consideran significativas. El ángulo respecto del origen proporciona la naturaleza de la relación (inhibición o excitación). La interpretación se sintetiza en la Figura 5.

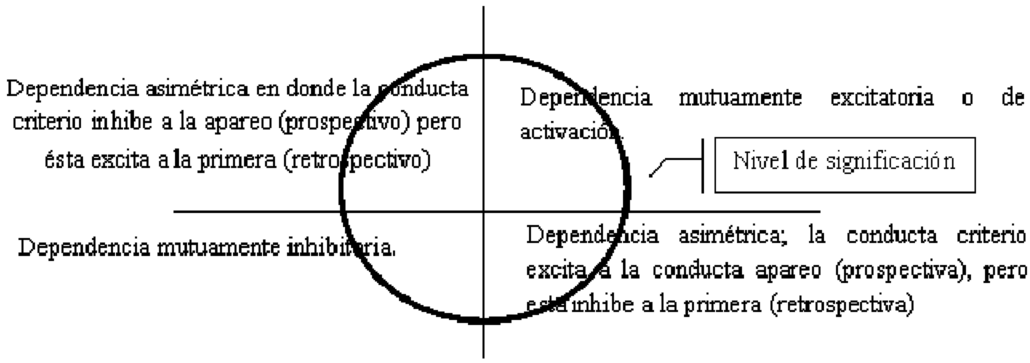


Figura 5. Interpretación de relaciones en la técnica de coordenadas polares

Objetivo de investigación

El objetivo de nuestra investigación es caracterizar el proceso de resolución por parejas de resolutores cuando se encuentra ante una i-actividad que involucra la optimización. En este trabajo utilizamos el análisis secuencial como una metodología innovadora en Educación Matemática para analizar la información.

Método

En este apartado describimos el sistema taxonómico definido necesario para poder aplicar la técnica del análisis secuencial, y una breve descripción de cómo se realizó la recogida de información, cómo se registró y qué herramientas se utilizaron para su análisis.

Sistema taxonómico

Siendo conscientes de que no existe una única caracterización (Codina, 2000), definimos nuestro sistema taxonómico considerando los siguientes episodios[5]:

Episodio 1. *Lectura*. El sujeto realiza la lectura del enunciado e interioriza las condiciones y objetivo del problema.

Episodio 2. *Análisis*. El sujeto intenta comprender el problema, seleccionar perspectivas, reformular o introducir nuevos enfoques cuando no existe una aparente forma de proceder. En este episodio el sujeto suele considerar conocimiento específico relevante para la resolución.

Episodio 3: *Exploración*. El sujeto suele utilizar las estrategias e idealmente no tiene un procedimiento estructurado de acción, busca información relevante para incorporar a una secuencia análisis-plan-ejecución. Durante este episodio, el sujeto ejerce mayor control a través de evaluaciones locales de su progreso.

Episodio 4. *Planificación*. El sujeto selecciona los pasos y las estrategias que potencialmente pueden conducir a la resolución del problema.

Episodio 5. *Implementación*. El sujeto ejecuta las acciones estructuradas en la planificación.

[5] En Codina, Cañadas y Castro (2011) se realiza una descripción detallada de la construcción del sistema taxonómico.

Episodio 6. *Verificación*. Este episodio recoge la evaluación local y global de la resolución del problema. Este episodio puede ser transversal a las anteriores.

Episodio 7. *Observación y Escucha*. El sujeto parece estar atendiendo y observando el trabajo del compañero.

A los que tenemos que añadir para conseguir la mutua exclusión y la exhaustividad:

Episodio 8. *Diálogo con el profesor*. El sujeto establece algún tipo de diálogo con el docente.

Episodio 9. *Impass*. El sujeto realiza un descanso durante la resolución del problema.

El sistema taxonómico definido permite aplicar un conjunto de técnicas analíticas de la metodología observacional: (a) técnicas que relacionan medidas globales (frecuencias, duraciones, tasas, prevalencias, probabilidades simples de ocurrencias, etc) y (b) técnicas que investigan relaciones entre los episodios (frecuencias de transición, coocurrencias, o la técnica de coordenadas polares) (Anguera, 1997; Gorospe y Anguera, 2000; Sackett, 1980). En este trabajo adoptaremos la modificación de retrospectividad genuina de Anguera (1997) y Gorospe y Anguera (2000).

Las medidas globales relativas a los episodios son:

Freq: frecuencia, tomando cada ocurrencia como una unidad.
Relf: frecuencia relativa = freq/(Total freq)
Rate: razón = freq/Total Tiempo (#Units)
Dura: duración total de todas las ocurrencias (en segundos)
Reld: duración relativa = dura/Total tiempo (#Units)
Prob: probabilidad incondicional o simple = (rate*dura)/freq
avgD: duración media
minD: duración mínima
maxD: duración máxima
avgG: duración media desde el final del episodio hasta el siguiente inicio
minG: duración mínima desde el final del episodio hasta el siguiente inicio
maxG: duración máxima desde el final del episodio hasta el siguiente
avgO: duración media desde el inicio del episodio hasta el siguiente inicio
minO: duración mínima desde el inicio del episodio hasta el siguiente inicio
maxO: duración máxima desde el inicio del episodio hasta el siguiente inicio
avgL: duración media desde el inicio la sesión hasta el inicio del episodio
minL: duración mínima desde el inicio la sesión hasta el inicio del episodio
maxL: duración máxima desde el inicio la sesión hasta el inicio del episodio

Recogida, registro y análisis de la información

En este trabajo presentamos la información recogida sobre una pareja de estudiantes universitarios que trataron de resolver el siguiente enunciado a través de una i-actividad:

Los puntos *A* y *F* son los vértices de una habitación con las siguientes dimensiones. *AB=4m. BC=3m* y *BE=2m.* Una mosca "sin alas" está sobre el punto *A* situado en el lado *BA*. ¿Qué camino debe seguir la mosca para recorrer la menor distancia si desea llegar al punto *F*?

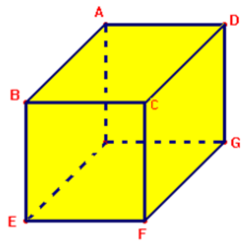


Figura 6. Enunciado del problema de optimización

Grabamos en vídeo la sesión en la que los estudiantes trabajaron. La recogida de información la llevamos a cabo a través del empleo de la técnica de incidentes críticos (De Katele y Roegiers, 1995, p. 24) que permite identificar y registrar el episodio así como el tiempo de inicio y finalización, medido en segundos, para cada uno de los sujetos. Obtenemos así un flujo de episodios para cada sujeto del tipo III (Anguera, 1990. Tomando como unidad de observación la pareja de resolutores, los datos se transforman en tipo IV pues son temporalmente exhaustivas para cada sujeto, pero en conjunto, la serie se compone de coocurrencias de unidades más la duración de las mismas.

La técnica de registro se basa en el sistema taxonómico presentado: *Lectura* (Lec), *Análisis* (Ana), *Exploración* (Exp), *Planificación* (Pla), *Implementación* (Imp), *Verificación* (Ver), *Diálogo con el profesor* (Dlg) e *Impass* (Ips).

El material técnico utilizado en la codificación, registro y posterior análisis ha sido: dos cámaras de video, un cañón proyector, un portátil de trabajo con la i-actividad para los sujetos y un ordenador para el tratamiento de la información con diverso software (Excel para realizar diversas transformaciones de datos; Subtitle Workshop para la la transcripción de audio, Studio 9.0 y VirtualDub para el tratamiento de los videos; Atlas-TI 5.0 para la codificación y el programa de análisis secuencial GSEQ 5.1.07 de Bakeman y Quera (2011).

Resultados

Presentamos algunas tablas y gráficos así como breves ejemplos del análisis de la información que pueden extraerse del análisis secuencia para la descripción del proceso de resolución. Intercambiaremos convenientemente como sujetos de observación a la pareja 3 (P3) y los sujetos A5 y A6.

Medidas globales

La Tabla 1 muestra las medidas globales para P3 con datos referidos a eventos con tiempo de inicio y finalización en segundos. A modo de ejemplo, los datos de la Tabla 1 revelan que los sujetos dedican un 28% del tiempo a escucharse y a observarse, doblando en cantidad de tiempo al empleado en los episodios de lectura, análisis, exploración y verificación. Implementación sólo ocupa un 4% y planificación es casi residual (1%).

Información similar puede obtenerse tomando como sujeto de observación a A5 y A6.

Tabla 1

Medidas generales P3

	freq	relf	rate	dura	reld	prob	avgD	minD	maxD
Lec	45	0,2	0,01	460	0,14	0,14	10,22	1	84
Ana	30	0,1	0,01	406	0,12	0,12	13,53	3	32
Exp	35	0,1	0,01	472	0,14	0,14	13,49	1	82
Pla	3	0	0	42	0,01	0,01	14	12	16
Imp	7	0	0	123	0,04	0,04	17,57	1	44
Ver	32	0,1	0,01	323	0,1	0,1	10,09	1	39
Obs	71	0,3	0,02	907	0,28	0,28	12,78	2	83
Ips	4	0	0	25	0,01	0,01	6,25	4	11
Dlg	34	0,1	0,01	506	0,16	0,16	14,88	4	43
Total	261	1	0,08	3264	1	1			

Nota: Unidad = segundos

Tabla 1 (Continuación)

Medidas generales P3

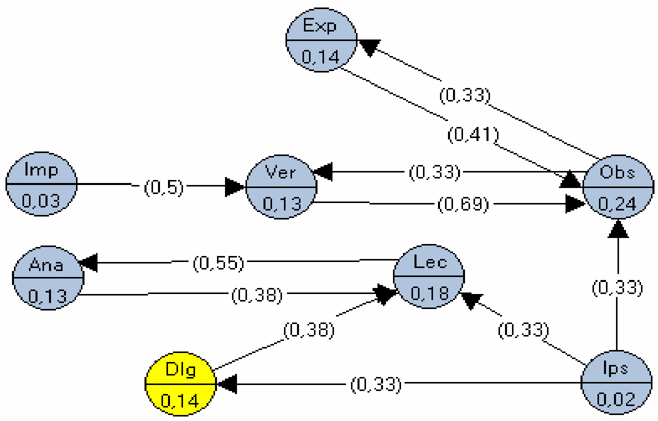
	avgG	minG	maxG	avgO	minO	maxO	avgL	minL	maxL
Lec	62,42	5	508	72,8	8	511	15	15	15
Ana	53,43	1	264	66,1	8	277	99	99	99
Exp	62,7	2	215	76,1	7	250	267	265	268
Pla	19,5	4	35	32,5	16	49	934	934	934
Imp	111,8	39	176	129	62	184	948	948	948
Ver	76,57	2	533	87,2	5	554	279	279	279
Obs	27,97	1	135	40,9	3	148	156	123	189
Ips	81	28	134	89,5	34	145	792	702	881
Dlg	86,19	5	232	99,3	13	247	0	0	0
Total									

Nota: Unidad = segundos

Medidas de relaciones locales

¿Cuánto tiempo están trabajando en paralelo?, ¿cómo se producen las transiciones entre episodios?, es decir, ¿cómo se producen la continuidad y las traslaciones en el desempeño?

¿cuántas son y en qué orden? son preguntas a las que se puede responder a través de la información que se obtiene de la realización de tablas de contingencia, en distintos retardos o lag y considerando adecuadamente los episodios criterios y apareos, así como de la matriz de probabilidades simples correspondiente. Por ejemplo, la cantidad de tiempo de trabajo en paralelo y de coocurrencias de los sujetos se obtiene a través de una tabla de contingencia de retardo 0 con episodios criterio todos los de uno de los sujetos y episodios apareo, todos los del compañero. El estudio de las transiciones se lleva a cabo a través de la matriz de probabilidades de cada sujeto y del correspondiente grafo de transición que nos informa, a través de mapas conceptuales, de las transiciones más probables entre episodios (Figura 7). Estos datos se complementan con las frecuencias de las secuencias diádicas y triádicas de los episodios (Tablas 2 y 3)



Grafo de probabilidades de transición. Sólo para >0.3

Figura 7. Grafo de transiciones

Tabla 2
Secuencias diádicas de A5

		frecuencia
Lec	Ana	12
Ana	Lec	6
Ana	Dlg	6
Exp	Lec	5
Exp	Obs	7
Ver	Obs	11
Obs	Exp	10
Obs	Ver	10
Dlg	Lec	6

Nota: sólo mayores que 5

Tabla 3
Secuencias triádicas de A5

			frecuencia
Lec	Ana	Lec	5
Lec	Ana	Dlg	4
Ana	Lec	Ana	5
Exp	Obs	Exp	5
Ver	Obs	Ver	7
Obs	Exp	Obs	4

Nota: Sólo mayores que 4

Por ejemplo, las secuencias diádicas más frecuentes son del tipo *Episodio 1->Episodio 2 y viceversa* [Lec->Ana (12, prob=0.55) y Ana->Lec (6, prob=0.38); Exp->Obs (7, prob=0.41) y Obs->Exp (10, prob=0.33); Ver->Obs (11, prob=0.69) y Obs->Ver (10, prob=0.33)]. Esta información permite estudiar y complementar el estudio de cadenas de secuencias excitatorias e inhibitorias. Para ello, se compara la probabilidad condicionada con la incondicionada en sucesivos retardos procediendo como sigue: Se parte del retardo +1, se compara la probabilidad condicionada de un determinado episodio criterio (comienzo de la cadena) con la probabilidad incondicional de los demás. Si esta es mayor, el episodio comparado se convierte en la siguiente iteración (retardo +2) en el episodio criterio. Se sigue iterando hasta que:

- no tenemos más patrones o tenemos al menos dos retardos consecutivos vacios.

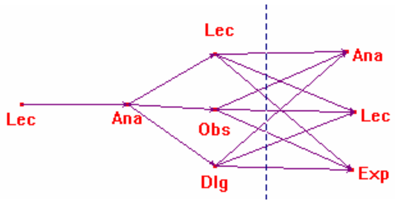
- cuando en varios retardos consecutivos se producen bifurcaciones, dobles, triples, etc., se considera sólo el primero de ellos (max-lag) y finaliza el patrón.

Por ejemplo, para el sujeto A5, tomando como criterio Lec (Tabla 4).

Tabla 4

Secuencia excitatoria de A5 para Lec

		Lec	Ana	Exp	Imp	Ver	Obs	Ips	Dlg
		Probabilidad independiente							
		0,18	0,13	0,14	0,03	0,13	0,24	0,02	0,14
Lec									
	lag1	0	0,55	0,18	0	0,09	0,09	0,05	0,05
	lag2	0,27	0	0,05	0	0	0,36	0	0,32
	lag3	0,24	0,24	0,24	0	0,1	0,1	0,05	0,05
	lag4	0,19	0,19	0,05	0	0,05	0,29	0	0,24



Obtenemos los siguientes patrones (Lec-Ana-Lec); (Lec-Ana-Obs); (Lec-Ana-Dlg)* y (Lec-Ana)*, dónde * indica que la relación es significativa (>1.96) en el correspondiente retardo.

Por otro lado, considerando las parejas de sujetos, decimos que hay *continuidad en el desempeño* cuando uno de los sujetos observa y su siguiente episodio codificado es en el que se encontraba el sujeto observado, mientras que decimos que hay t*raslación de desempeño* cuando al menos uno de los sujetos intercambia el episodio codificado por el del compañero en dos episodios consecutivos (Tabla 5).

Tabla 5
Situaciones de continuidad y traslación de desempeño

	Sujeto A	Sujeto B	Sujeto A	Sujeto B
	Situación inicial		Situación siguiente	
Continuidad desempeño sujeto A	Obs	X	X	Y
Continuidad desempeño sujeto B	X	Obs	Y	X
Traslación desempeño sujeto A	X	Y	Y	Z
Traslación desempeño sujeto B	X	Y	Z	X
Traslación mutua	X	Y	Y	X

Nota: X, Y y Z representan un episodio

Para analizar la continuidad y traslación en el desempeño, se recodifican los códigos definiendo episodios duales, por ejemplo, ObsLec, ObsAna,…, o [LecObs, AnaObs, …, dónde *ObsY* representa A5 en *Obs* y A6 en *Y*, y *XObs* representa A5 en *X* y A6 en *Obs*. Con estos nuevos códigos se elabora una tabla de contingencia con retardo prospectivo +1 y se obtienen las frecuencias de ocurrencias que nos permitirán describir el trabajo colaborativo llevado a cabo.

Coordenadas Polares

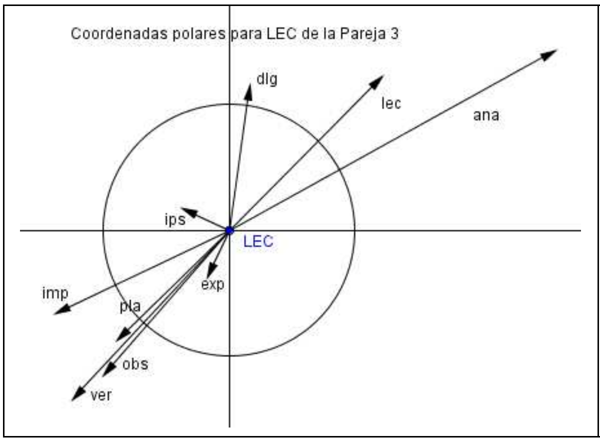
Mostraremos un ejemplo de los valores numéricos de los cálculos para episodio criterio Ver (Tabla 6) así como los gráficos de vectores para episodio criterio Lec y Ver (Figura 8).

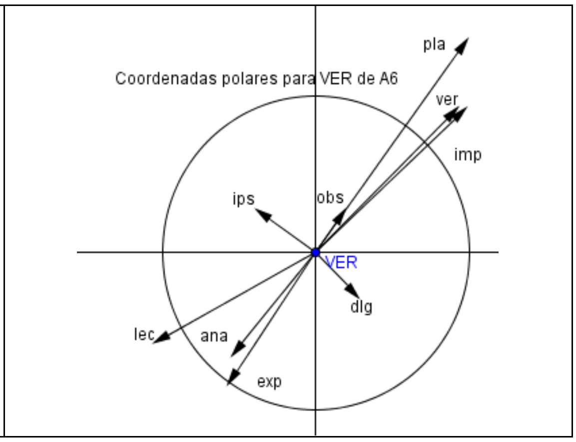
Según se observa en la Figura 8, la relación excitatoria entre lectura y análisis es coherente con una dinámica estándar de los procesos de resolución de problemas. Después de un proceso de lectura del enunciado, los resolutores suelen analizar la información, volviendo a la lectura en caso necesario y para una mejor comprensión del problema poniendo en juego conductas metacognitivas. Por otro lado, el hecho de que por encima de las probabilidades que otorga el azar, lectura tenga una relación significativa con diálogo para la pareja 3, pero no así para los sujetos indica que éste episodio incide sobre la conducta colaborativa de la pareja. Nótese que al entablarse un diálogo entre un sujeto y el investigador, éste es escuchado y puede o no ser utilizado por el otro componente.

En cuanto a las relaciones excitatorias entre verificación, planificación e implementación, la dinámica estándar de los procesos de resolución de problemas otorga coherencia a dichas relaciones. La planificación conlleva habitualmente un proceso de implementación de lo planificado acompañado de verificación o control durante y/o después de dicha implementación. Si no se obtienen resultados satisfactorios, se vuelve sobre el proceso de planificación o sobre el proceso de implementación. En cuanto a la relación entre verificación y observación para la pareja 3, ésta indica que mientras que uno de los sujetos está llevando a cabo acciones de verificación, el otro normalmente observa.

Tabla6
Datos numéricos coordenadas polares para Verificación de A5

		Lec	Ana	Exp	Imp	Ver	Obs	Ips	Dlg
Retardo	Criterio				Condicionadas				
1	Ver	0,06	0,06	0,06	0,00	0,00	0,69	0,00	0,13
2	Ver	0,07	0,13	0,07	0,00	0,47	0,00	0,00	0,07
3	Ver	0,20	0,07	0,07	0,00	0,13	0,47	0,00	0,07
4	Ver	0,13	0,20	0,07	0,00	0,20	0,13	0,00	0,13
5	Ver	-1,02	-0,64	0,01	2,43	0,11	-0,25	-0,64	0,95
	ZsumX	-0,56	-0,18	0,28	2,43	0,91	1,04	-0,64	1,35
	X=	-0,25	-0,08	0,13	1,09	0,41	0,47	-0,29	0,60
-5	Ver	-0,57	-0,90	-0,11	-0,80	0,11	2,48	1,03	-1,69
-4	Ver	-1,26	-0,88	0,70	0,71	0,83	-0,60	-0,68	1,49
-3	Ver	-0,54	-1,67	-0,18	0,72	0,03	2,53	1,05	-1,67
-2	Ver	-2,00	-0,86	0,61	0,72	4,14	-1,19	-0,68	-0,06
-1	Ver	-0,59	-1,65	-0,93	2,25	-1,65	3,83	-0,67	-0,85
	ZsumY	-4,96	-5,96	0,09	3,60	3,46	7,05	0,05	-2,78
	Y=	-2,22	-2,67	0,04	1,61	1,55	3,15	0,02	-1,24
	Cuadrante(X,Y)	(- -)	(- -)	(+ +)	(+ +)	(+ +)	(+ +)	(- +)	(+ -)
	Radio=	2,23	2,67	0,13	1,94	1,60	3,19	0,29	1,38
	Ángulo	-83,56	-88,27	17,82	55,98	75,26	81,61	4,47	-64,10
	Áng. Corregidos	263,56	268,27	17,82	55,98	75,26	81,61	175,53	295,90





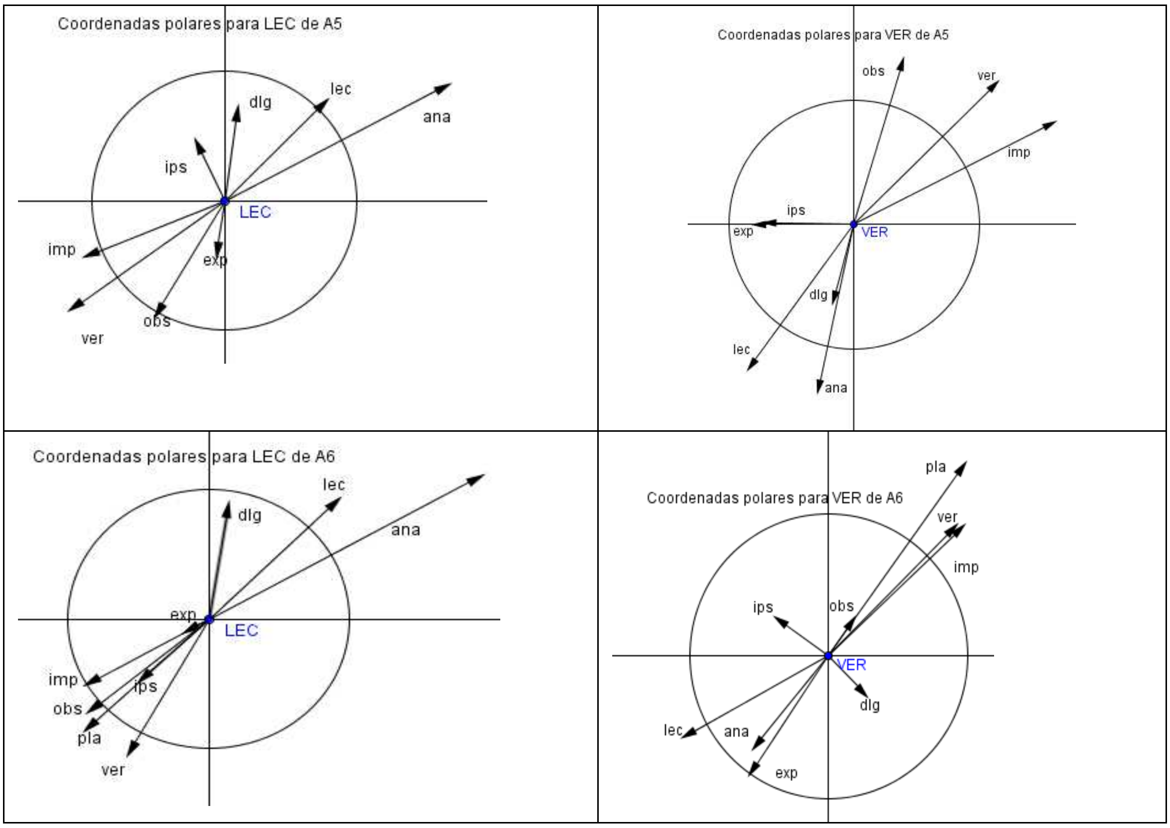


Figura 8. Gráficos coordenadas polares con episodios criterio Lectura y Verificación

Conclusiones

El estudio llevado a cabo muestra que la aplicación del análisis secuencial y la técnica de coordenadas polares es una potente herramienta y ha sido acertada con vistas a llevar a cabo nuestro propósito de investigación.

En este sentido, nos permite abordar el estudio de las relaciones entre los episodios que se establecen durante el proceso de resolución, tomando distintas unidades de observación (pareja y sujetos) lo que a su vez, describirá el trabajo colaborativo llevado a cabo. Por tanto, se puede llevar a cabo un análisis global y particular que otras técnicas enfocan principalmente desde una vertiente cualitativa y descriptiva.

Por otro lado, el estudio estadístico no depende del tipo de i-actividad o problema que abordan los sujetos sino del sistema taxonómico elegido, añadiendo flexibilidad al enfoque para abordar nuevas investigaciones en resolución de problemas y en Educación Matemática.

Por último, no queremos olvidar, aunque en este trabajo no se ha abordado, que una de las principales dificultades de la metodología observacional y por ende, de este tipo de análisis, es el diseño y elaboración del sistema taxonómico. Además, añadido a ello, se tiene que tener en cuenta aquellos aspectos relacionados con la fiabilidad, registro y codificación de las observaciones; por ejemplo la concordancia entre observadores; así como la validez y calidad de los datos; por ejemplo la cantidad de datos mínimos necesarios.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado dentro del grupo FQM-193 de la Junta de Andalucía y ha sido apoyado por el proyecto I+D+i "Modelización y Representaciones en Educación Matemática", con referencia EDU2009-11337.

Referencias bibliográficas

Anguera, M. T. (1990). Metodología observacional. En J. Arnau, M. T. Anguera y J. Gómez (Eds), Metodología de la investigación en ciencias del comportamiento (pp. 125-236). Murcia: Universidad de Murcia.

Anguera, M. T. (Ed) (1993). Metodología observacional en la investigación psicológica. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Anguera, M. T. (1997, April). From prospective patterns in behavior to joint analysis with a retrospective perspective. Colloque sur invitation «Méthodologie d'analyse des interactions sociales». Université de la Sorbonne. Paris.

Anguera, M. T. y Losada, J. L. (1999). Reducción de datos en marcos de conducta mediante la técnica de coordenadas polares. En M.T. Anguera (Coord) Observación de conducta interactiva en contextos naturales: aplicaciones (pp.163-188). Barcelona: Universidad de Barcelona

Artzt, A. y Armour-Thomas, E. (1990). Protocol analysis of group problem solving in mathematics: A cognitive-Metacognitive framework for assessment. Comunicación presentada en Annual Meeting of American Educational Research Association, Boston, abril de 1990. Obtenido de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED320927.pdf el 13 de noviembre de 2011.

Artzt, A. y Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. Cognition and Instruction, 9(2), 137-175.

Bakeman, R. y Gottman, J. M. (1989). Observación de la interacción: introducción al análisis secuencial. Madrid: Ediciones Morata.

Bakeman R. y Quera, V. (2011). GSEQ. Software for the analysis of interaction sequences V5.1. Obtenido de http://www.ub.edu/gcai/gseq/

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En G. Luengo (Coord.), Investigación en Educación Matemática XII (pp.¶) Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Obtenidode: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm el 14 de noviembre de 2010

Codina, A. (2000). Elementos para la reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas. Granada: Universidad de Granada.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2010). Diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas de matemáticas. En F. Albuquerque, G. Lobato, J. P. De Matos, I. Chagas, E. Cruz (Eds.), I Encontro Internacional Tic e EducaÇão. InovaÇão curricular com TIC (pp. 1-7). Lisboa: Instituto de EducaÇão da Universidade de Lisboa.

Codina, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2011). Un sistema de categorías para el análisis de la interactividad en una i-actividad de resolución de problemas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática (pp. 157-164). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

De Ketele, J. M. y Roegiers, X. (1995). Metodología para la recogida de la información. Madrid: La Muralla.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. Educational Studies in Mathematics, 49(2), 193-223.

Gorospe, G. y Anguera, T. A. (2000). Modificación de la técnica clásica de coordenadas polares mediante un desarrollo distinto de la retrospectividad: aplicación al tenis. Psicothema, 2(2), 279-282.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. J. Grouws (Ed), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan.

Pólya, G. (1945). How to solve it. Princenton: Princenton University Press (Zagazagoitia, J. (1965). Como plantear y resolver problemas. México D.F.: Trillas)

Quera, V. (1993). Analisis Secuencial. En M.T. Anguera (Ed.) Metodología Observacional en la Investigación Educativa, Vol. 2 (pp. 341-583). Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

Scakett, G. P. (1980). Lag sequential analysis as a data reduction technique in social interaction research. En D.B. Sawin, R.C. Hawkins, L.O. Walker y J.H. Penticuff (Eds.), Exceptional infnat. Phychosocial risks in infant-environment transactions (pp. 300-340). New York: Brunner/Mazel.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO EVOLUTIVO DEL INFINITO CARDINAL EN ALUMNOS DE EPO Y ESO

Catalina Fernández Escalona
Juan A. Prieto Sánchez
Universidad de Málaga

Resumen

El objetivo de la investigación que llevamos acabo desde hace ya más de cinco años, es indagar en determinados aspectos del conocimiento del infinito cardinal y así proponer mejoras en la enseñanza en este concepto matemático. Para ello, tratamos el concepto mediante las comparaciones de sucesiones numéricas finitas e infinitas según Russell, en alumnos de ESO. A partir de ahí hemos construido un modelo evolutivo susceptible de comparación empírica con la ayuda de entrevistas semiestructuradas. Finalmente, se analizaron las situaciones singulares encontradas, así como los procedimientos, destrezas y estrategias, y con ello dirigirnos hacia un modelo evolutivo que explique las competencias del alumnado en el concepto, pero pudimos comprobar que el modelo inicial que propusimos estaba incompleto en niveles superiores, así como la dificultad que tenían algunos alumnos en iniciar las tareas iniciales. Por ello, se ha ampliado este modelo, por ahora teórico, en niveles superiores y en niveles de arranque asociándose para ello, más tareas. Se ha intentado que para la realización de las mismas, el uso de las TIC[33].

Palabras clave: infinito actual cardinal, sucesiones numéricas, modelo evolutiva, entrevistas clínicas.

Abstract

The objective of the research, which is carried out for over five years, is to investigate certain aspects of the knowledge of the infinite cardinal and to propose improvements in teaching this mathematical concept. To do this, we treat the concept through comparisons of finite and infinite numerical sequences according to Russell, in Secondary School students. From there, we have built an evolutionary model capable of empirical comparison with the help of semi-structured interviews. Finally, the unique situations encountered were analyzed, as well as procedures, skills and strategies to go towards an evolutionary model to explain the competence of students in this concept. However, it was seen that the initial model proposed was incomplete at higher levels, as well as the difficulty that some students had to start the initial work. Therefore, this model has been expanded, so far, theoretically, in higher and initial levels by adding more tasks. To perform them, the use of ICTs [34] has been proposed.

Keywords: actual infinite cardinal, numerical series, evolutionary model, clinical interviews.

[33] Tecnología de la Información y de la Comunicación
[34] Information and Communication Technology

Fernández, C.; Prieto, J.A. (2012). Construcción de un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de EPO y ESO. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 271-284). Ciudad Real: SEIEM.

.

Marco conceptual y antecedentes

Nuestro trabajo lo podríamos situar en la línea de investigación de la Compresión en aritmética y álgebra (Didáctica de las Matemáticas, línea 05.02.203). Se trata de la creación de un modelo evolutivo basándonos en el modelo de razonamiento inductivo de la Tesis Doctoral de Alfonso Ortiz (1997). La validación y análisis de datos cualitativos sigue las pautas del modelo evolutivo de las relaciones lógicas ordinales de la Tesis de Catalina Fernández (2001), por tanto, toda la metodología, para la creación de un modelo evolutivo, está basada en las citadas tesis.

De todas la formas de abordar el concepto del infinito actual cardinal, hemos utilizado las comparaciones entres conjuntos finitos e infinitos de sucesiones numéricas[35] para describir el conocimiento lógico en alumnos de la ESO.

Para iniciar la línea de investigación, se realizó un estudio exploratorio donde se caracterizó y analizó los resultados de las tareas que se realizaron los alumnos para dar significado a los comportamientos generales. Posteriormente, se hicieron entrevistas clínicas semiestructurada, se analizaron las situaciones singulares encontradas, así como los procedimientos, destrezas y estrategias, y con ello pudimos formar un modelo evolutivo que explicara las competencias del alumnado.

Las respuestas a las tareas analizadas denotaron la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos permitió caracterizar diferentes perfiles del conocimiento de la comparación entre series numéricas finitas e infinitas, así como su evolución.

Con todo ello, pudimos clasificar los alumnos de la muestra en cinco niveles, que más adelante detallamos. Pero pudimos observar, que algunos alumnos no realizaban las tareas básicas que incluye en el nivel I, así como otros que llegaban a realizar las tareas del nivel V sin ningún problema, demandando algo más.

Es por ello, que hemos completado, por ahora de forma teórica sin llevarlo aun a la práctica, unas tareas que llamaremos de arranque para que esos alumnos que no estén familiarizado con las sucesiones numéricas puedan hacerlo y razonar así sobre el infinito cardinal. Por otro lado, hemos realizado unas tareas superiores a las asociadas al

[35] RUSSELL, B. (1982). Los Principios de la Matemática. Madrid. Espasa Calpe. (Versión original es de 1903), Pág. 223.

nivel V, para aquellos alumnos que demandaba un razonamiento lógico mayor sobre el concepto.

Los antecedentes de este trabajo los encontramos en distintos campos teóricos:

- *Epistemología matemática*.

De una forma generalizada desde las teorías de Aristóteles, con el concepto de infinito potencial, hasta las ideas de Cantor concernientes a conjuntos infinitos (actualmente infinito).

Dado la amplitud de antecedentes, hemos centrado en las teorías de Russell en "Los principios de la Matemática" (1903) en su forma de comparar lo finito con lo infinito.

- *Educación Matemática*.

Nos hemos basado en una amplia bibliografía. Nos ayudó bastante un estudio realizada por Bruno D'Amore (1996). El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. Epsilon nº 36, pp. 341-360. Donde adjuntó una bibliografía de trabajos de investigación relacionada con el infinito en la educación. Posteriormente realizó un estudio de formas de poder abordar este concepto matemático siempre en el mismo ámbito.

- *Psicología*

La mayor parte de los trabajos de investigación consultados en psicología, es sobre el método de inducción para series numéricas. Según Ortiz (1997), las investigaciones y trabajos se podrían agrupar en los siguientes apartados y referencias significativas:

- La inducción como una capacidad (Pellegrino, 1976).
- Análisis de procesos cognitivos (Holtzman, 1983).
- Elaboración de la información (Sterneberg, 1986).
- Errores del razonamiento inductivo (Ross, 1981).

Estos a lo que se refieren a la psicología cognitiva, con respecto al constructivismo piagetiano se podría distinguir dos interpretaciones:

- La inducción como instrumento intelectual (Inhelder, 1955; Oleron, 1967).

La inducción como generalización de estructuras (Moreno y Sastre, 1983).

Modelo evolutivo inicial del conocimiento

Objetivo

Nos proponíamos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre la comparación de series numéricas finitas e infinitas que explicara e integrara los siguientes factores:

- ✓ La progresión en el descubrimiento por parte del sujeto individual.
- ✓ Las características en el uso de la series para determinar.
- ✓ Los tipos de series que se toman en consideración.
- ✓ La evolución al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

Para ello fue necesario:

- Realizar un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas.
- Determinar las posibles interpretaciones que pueda establecer el alumno acerca de las comparaciones entre las series numéricas finitas e infinitas y asignar a cada una de ellas un estatus evolutivo.
- Delimitar los distintos tipos de tareas y construir las que se puedan adaptar mejor a las distintas interpretaciones y niveles de competencias.
- Ordenar los tipos de respuestas en categorías y delimitar las características que las definen teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriores expuestos, es decir, la construcción del modelo.

La opción que elegimos para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.

<u>NIVEL I</u>

Lo alumnos no distinguen entre lo finito y lo infinito.

<u>NIVEL II</u>

Los alumnos distinguen las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de pocos términos y primeros.

NIVEL III

Los alumnos distinguen las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de mayor número de términos.

NIVEL IV

Los alumnos distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con pocos términos iniciales.

NIVEL V

Los alumnos distinguen sucesiones finitas e infinitas en las que la diferencia es con mayor número de términos iniciales.

Pero en el proceso de validación, debemos distinguir dos etapas desde el punto de vista metodológico: la construcción del modelo y la valoración empírica del modelo.

Viabilidad de una prueba asociada al modelo evolutivo

En este apartado buscamos una prueba que forme parte de un diseño experimental adecuado para un propósito muy concreto dentro de esta investigación, que no es otro que el de validar empíricamente el modelo teórico evolutivo ya expuesto.

Al tratarse de un modelo evolutivo se pretende determinar diferentes estados de conocimiento y las transiciones de unos estados a otros. En este sentido, no basta con los métodos de observación pura y pruebas de rendimiento, sino que se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Vinh-Bang, 1966; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974). Dicho método puede tener la siguiente forma:

Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones (Piaget y Apostel 1986; Bermejo y Lago 1991; Sophian, 1995; Ortiz, 2001; Fernández, 2001).

En este sentido, hemos considerado adecuado aplicar el método anteriormente expuesto en la construcción de la prueba, sin perder de vista que nuestras pretensiones son las de evaluación de distintos estados que entran a formar parte de un modelo evolutivo. Es por ello que la prueba la conforma un conjunto de tareas destinadas cada una de ellas al estudio y análisis de las características lógicas matemáticas que se dan en cada uno de los estados. Por tanto, la prueba consta de cinco tareas, una por cada estado.

Tareas asociadas a los Niveles del Modelo Evolutivo

Para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo.

El procedimiento seguido queda sistematizado en el cuadro del gráfico; lo explicamos a continuación:

- Cuando indicamos nivel K, la letra K toma sucesivamente los valores I, II, III, IV y V.
- La tarea específica para cada uno de los estados, se inicia con una situación de partida que llamaremos Situación S1. Está situación es la presentación de una serie numérica a partir del término general.
- La situación S1 divide a los alumnos en dos categorías: los que la resuelven y los que no lo hacen. La primera queda codificada como K1A, y la segunda como K1B.
- A los alumnos de la categoría K1B se les presenta otra situación, llamada Situación S2.
- La situación S2 divide a los alumnos de K1b en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K2A, y los que no lo hacen, codificada como K2B.
- Los alumnos de la categoría K2B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K2A se les presenta otra situación, llamada Situación S3.
- La situación S3 divide a los alumnos de K2A en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K3A, y los que no lo hacen, codificada como K3B.
- Los alumnos de la categoría K3B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K3A se les presenta la situación de partida, es decir la Situación S1 o bien la situación S1’, la misma que resolvieron los de la categoría K1A.

- Los alumnos de la categoría K3A, que son parte de los que inicialmente no habían resuelto la situación S1, pueden, ahora, llegar a resolverla una vez que han realizado con éxito las situaciones S2 y S3.Si no la resolvieran quedarían en la categoría K1'B y serían considerados en un nivel inferior.
- Los alumnos que después del proceso precedente están en K1'B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y están en un estado inferior al considerado.
- Los alumnos que están en K1'A, bien desde el principio de la prueba o una vez seguido el proceso, son los alumnos del nivel en cuestión.

Todas las situaciones de cada una de las tareas están planteadas con el material que hemos reseñado en el apartado anterior, y cada una de ellas se pretende adaptar al nivel lógico matemático del nivel. Teniendo en cuenta las características lógico matemáticas del Estado K y el método sistemático, se determina la tarea asociada al mismo perfilando las tres situaciones que la componen.

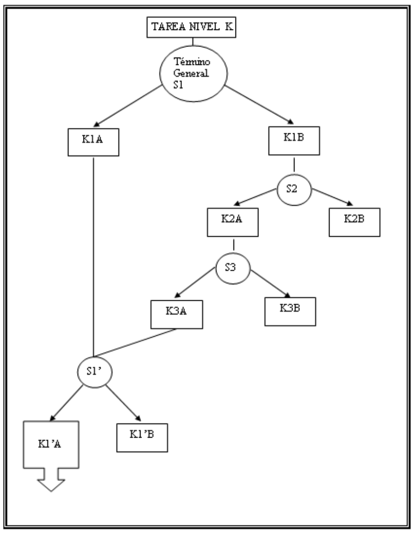


Gráfico. Sistematización en las tareas realizadas para cada uno de los niveles del modelo teórico.

A continuación, y para cada uno de los niveles, veremos, algunas consideraciones generales sobre las tres situaciones que conformarían la tarea asociada al mismo, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista de las características lógicas-ordinales del estado.

Tarea asociada al Nivel II

Situación 1.- Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de las sucesiones numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) de cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series divergentes básicas de la forma:

$$a_n = n + k, \qquad a_n = k.n$$

Situación 2.- Situación a la cual llegan aquellos alumnos que no han superado con éxito la anterior tarea o bien no entendieron la pregunta o desconocían todo lo que conlleva el término general. Para ello, en esta situación, se les explica en que consiste el término general y se les ayuda a elaborar la serie a partir de él. Si fuera necesario, es decir si no lograran generar los términos a partir del general, se les presentan las series desarrolladas para que las comparen.

Situación 3.- Situación a la cual llegan aquellos alumnos que han superado con éxito la anterior tarea (situación 2). Se les presentan unas series muy parecidas a las de S1 para que la elaboren y comparen.

Situación 1'.-Situación a la que llegan aquellos alumnos que superaron con éxito la situación S1 o aquellos que superaron con éxito la situación .3.

En este caso la tarea será similar pero con una cantidad mayor de números que en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos alumnos que no supieron diferenciar las sucesiones finitas de las infinitas después de todo este proceso, quedan catalogados en el Nivel 1. Los que lo superan pasan a las tareas programadas siguientes.

Tarea asociada al Nivel III

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan solo que las sucesiones numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos.

Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel II.

Tareas asociadas a nivel IV

Situación 1.- Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) de cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán sucesiones convergentes básicas de la forma:

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \qquad a_n = \frac{1}{n+k}, \qquad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Las situaciones que preceden en los que los alumnos superan o no estas tareas son similares a la expuesta en las tareas asociadas al nivel II, pero ahora con sucesiones convergentes.

Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no lo superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.

Tareas asociadas a nivel V

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan solo que las sucesiones numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos.

Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', se catalogan en el nivel V. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel IV.

Ampliación del modelo evolutivo anterior del conocimiento

Objetivo

Como dijimos anteriormente, una vez analizado las respuestas de los alumnos pudimos observar que un grupo de alumnos no realizaban correctamente las tareas iniciales debido al desconocimiento que tenían en las sucesiones numéricas en los niveles escolares que se encontraban. Con el modelo anterior éstos sujetos estarían catalogados en el nivel I cuando no se les daba la oportunidad de razonar aún con el infinito. Y por otro lado, alumnos que demandaba otro nivel superior en el razonamiento lógico del infinito.

Para ello fue necesario replantear todo el modelo anterior:

- Realizando un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas anteriores y proponiendo tareas de tipo arranque para conectar esos alumnos que le costaba realizar las tareas asociada al nivel I, y tareas superiores para niveles más avanzado.
- Examinando el desarrollo curricular y analizar su incidencia en las tareas y competencias en estudio, de forma más exhaustiva, teniendo en cuenta que ese desconocimiento.
- Intentando, en la medida de lo posible, la utilización de las herramientas TIC de centros escolares.

Tareas de Arranque

Sin duda, el empleo de las TIC agilizará todo el proceso de entrevista, por ello, hemos pensado ampliar la población a estudiar. De esa forma no sólo estudiaremos los cursos desde 1º de ESO hasta 4º de ESO, ampliaremos desde 6º de EPO.

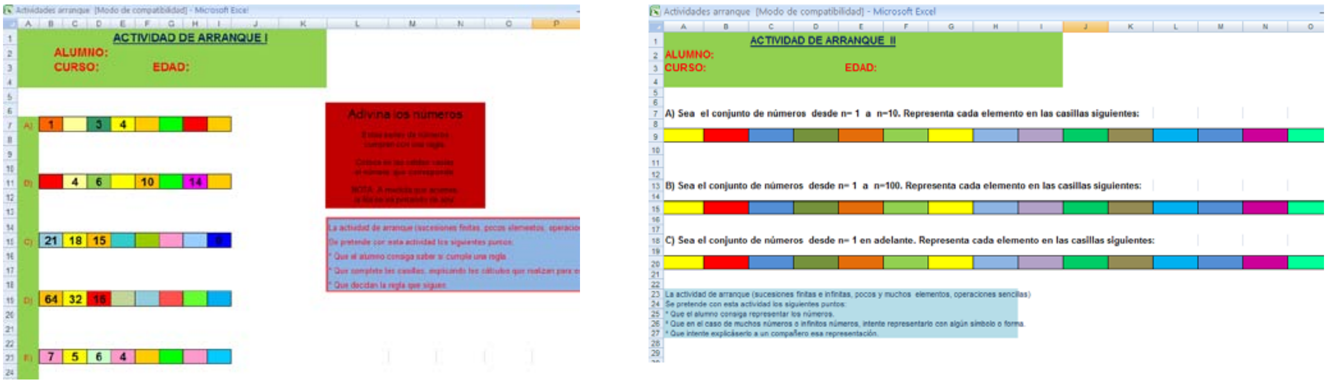
Si con el anterior modelo ya tuvieron dificultad algunos alumnos de realizar con éxito las tareas asociadas en niveles inferiores debido a esos contenidos curriculares que no se ajustan a su nivel escolar, ahora incluyendo el curso de 6º EPO el número de estos alumnos serán mayores. Es por ello, la necesidad de realizar las tareas de arranque.

Mediante distintos software[36], los alumnos con estas necesidades, mediante tareas recreativas pueden afrontar esos contenidos curriculares que no recuerdan o no se dieron esos niveles educativos.

Una primera tarea[37], “Adivina los números”, trata de completar en una regleta de series numéricas, algunos números que faltan. Si aciertan, los recuadros se van coloreando en azul.

Con el mismo programa informático, una segunda tarea de arranque aparece una regleta donde deben añadir el conjunto numérico que se les pregunta. Conjuntos numéricos finitos, con poco y muchos números, y conjuntos numéricos infinitos. Se pretende con esta tarea, observar como reflexiona, razona, y registra en ella, los muchos o infinitos números que se piden que anoten. Se espera que las mayorías utilicen los puntos suspensivos para denotar que “siguen en adelante”.

[36] Microsoft Office Excel y JClic.
[37] En Microsoft Office



Fotos: Actividades de Arranque I y II

Con la tercera actividad de Arranque, se pretende que el alumno, utilizando un programa informático didáctico[38] y a la vez lúdico, relacione sucesiones numéricas a partir de un término general. Mediante flechas, van uniendo la regleta superior con la inferior según el término general de la sucesión que se les proporciona. Se pretende con esta actividad que el alumno pueda asociar dos sucesiones: la sucesión formada por los índices y los términos de la sucesión que se les indica.

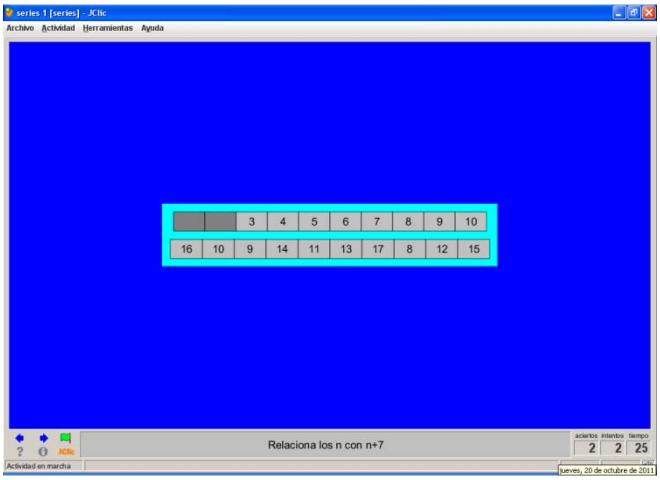


Foto: Tarea de Arranque III.

Tareas asociadas a niveles superiores

Son aquellas tareas asociadas al nivel VI, donde el alumno ha alcanzado este nivel de forma óptima resolviendo las tareas inferiores razonando el infinito mediante comparaciones de conjuntos finitos e infinitos según Russell (1903) y demandando más reflexión sobre el concepto.

[38] JClic

Hemos pensado en el concepto de velocidad tanto en sucesiones convergentes como divergentes.

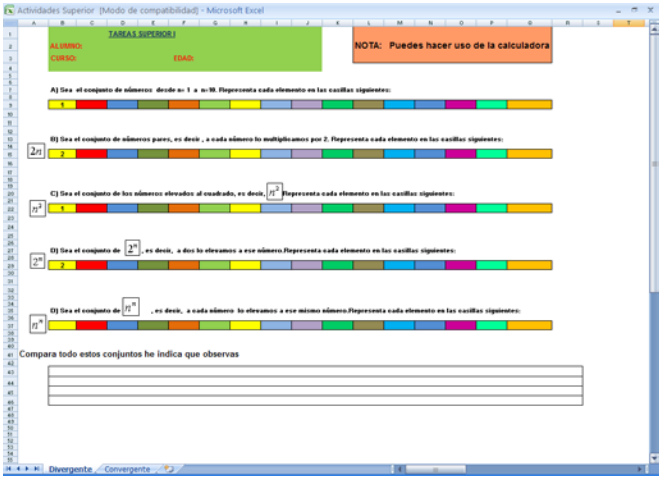


Foto: Tareas asociadas a Niveles Superiores.

En la primera Tarea, se comparan las siguientes sucesiones numéricas:

$$a_n=n;\ \ a_n= 2n\ ;\ a_n=n^2;\ a_n=2^n;\ a_n=n^n$$

Se le pide al alumno que complete las casillas con los términos de cada sucesión que están ordenadas de formas crecientes en cuanto a la velocidad de divergencia.

Evidentemente, todas ellas tienden al infinito, pero el alumno puede observar que cuanto mayor es la velocidad de divergencia, menos términos escrito aparecen en la regleta que deben completar.

En la segunda Tarea, se compara las siguientes sucesiones numéricas:

$$a_n=n;\ a_n=\frac{1}{2n}\ ;\ a_n=\frac{1}{n^2}\ ;\ a_n=\frac{1}{2^n}\ ;\ a_n=\frac{1}{n^n}$$

De la misma forma que la tarea anterior pero con sucesiones convergentes. Creemos que además de la velocidad de convergencia que adquieren las últimas sucesiones con respecto a las primeras, el hecho de tener una cota en el límite (todas ellas tienden a al mismo número, 0) podrán razonar en la cardinalidad de cada sucesión si es o no la misma.

Referencias bibliográficas

Bermejo, v.; Lago, M. O. (1991).Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos. Madrid. C.I.D.E.

Carpenter, T:P. (1980). Research in cognitive development. Research in Mathematics Education. N.C.T.M. Reston. Virginia, pg. 146-206.

Castro, E. (1994). Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años). Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Claparède, E. (1976). Prefacio en, J. Piaget, Le Langage et la pensèe chez l'enfant, 9ªed. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Cohen, L.; Manion, L. (1990). Métodos de Investigación Educativa. Madrid. Muralla.

D'Amore, B. (1996) El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas: Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. Epsilon nº 36, pags 341-360.

Fernández, A. (1995). Metodologías de la Investigación en Educación Matemática. En Berenguer, L.; FLORES, P. (eds): Investigación en el Aula de Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. S.A.E.M. Thales, p. 47-65.

Fernández Escalona, C. (2001) Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Ferrater Mora, J.: *Diccionario de filosofía*. Buenos Aires: Ed. Sudamericana, 1969.

González, J.L. (1995). El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Inhelder, B., Sinclair, H. y Bovet, M. (1974). Apprentissage et structures de la connaissance. Paris. Presses Universitaires de France, p. 33-43.

Ortiz, A. (1997). Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Kamii, C. (1982).- El número en la Educación Preescolar. Madrid. Visor.

Mayer, R.E. (1985). El futuro de la psicología cognitiva. Madrid. Alianza Universal.

Mayer, R.E. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Barcelona. Paidós.

Ortiz, A., González, J.L.(2001). El inductivismo aritmético y su influencia en la enseñanza del número. Rev. Aula. Universidad de Salamanca.

Piaget. J. (1979a). Tratado de lógica y conocimiento científico, Tomo 3. Epistemología de la Matemática. Buenos Aires. Guadalupe.

Piaget. J. (1979b). Naturaleza y Métodos de la Epistemología. Madrid. Paidós.

Piaget. J. (1985). La Psicología de la Inteligencia. Barcelona. Grijalbo.

Piaget. J.; Apostel, L., y otros (1986). Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética. Barcelona. Piados Studio.

Piaget, J.; Morf, A. (1970). Estructuralismo y Psicología. Buenos Aires. Nueva Visión.

Poincare, H. (1963). La Ciencia y la Hipótesis. Madrid. Espasa Calpe.

Polya, G. (1966). Matemáticas y Razonamiento Plausible. Madrid. Técnos.

Prieto, J.A. (2009). Número infinito como identidad cardinal entre series numéricas. Un estudio mediante entrevistas clínicas en alumnos de la ESO, Nº 19, pp.117-129 ISSN: 1815-0640 UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

Russell, B. (1982). Los Principios de la Matemática. Madrid. Espasa Calpe. (Versión original es de 1903).

Scaglia, S.B. (2000) Dos conflictos al representar números reales en la recta. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Segovia, I. (1995). Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos”. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Sophian, C. (1995). Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation, and Comparisons between Sets. Child Development, v66 n2 p559-577.

Stegmüller, W. (1970). Teoría y Experiencia. Barcelona. Ariel.

Sternberg, R.J. (1990). Más allá del cociente intelectual. Bilbao. Desclee de Bouwer.

Vinh-bang. (1966). La mèthode clinique et la recherché en psychologie de l’enfant. Psychologie et èpistemologie gènétique : thèmes piagètiens, Paris, Dunod, p. 67-81.

White, R. y Gunstone, R. (1992). Probing understanding. The Falmer Press. London.

INTERPRETACIÓN DE DIAGRAMAS EN TÉRMINOS DE ENUNCIADO VERBAL Y SU TRADUCCIÓN ALGEBRAICA

Fany Markela González Barrios
Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada

Resumen

En este estudio analizamos cómo interpretan estudiantes de primer curso de secundaria obligatoria diagramas lineales que muestran relaciones entre cantidades. Los participantes fueron 89 estudiantes sin preparación previa en el uso de los mismos. Para ello, hemos diseñado y aplicado una prueba que consta de dos problemas con dos apartados cada uno: en el primer apartado se pide a los estudiantes que enuncien un problema a partir del diagrama lineal y, en el segundo, que escriban una ecuación. Los resultados muestran que: a) un buen número de estudiantes no realizan la traducción del diagrama lineal a enunciados verbales o ecuaciones algebraicas; b) los estudiantes tienen menos dificultad para traducir un diagrama lineal a enunciado verbal que a ecuaciones algebraicas, y c) hay estudiantes que no utilizan toda la información contenida en el diagrama.

Palabras clave: Representaciones, diagramas lineales, problemas de enunciado verbal, problemas de enunciado gráfico, problemas de enunciado simbólico.

Abstract

In this study we analyzed how students interpret the first year of compulsory secondary line diagrams showing relationships between quantities. Participants were 89 students with no prior preparation in using them. To do this, we designed and implemented a test that consists of two problems with two sections each: the first section asks students to set up a problem from the linear plot in the second, write an equation. The results show that: a) a number of students do not perform the translation of the diagram or linear algebraic equations verbal statements, b) students have less difficulty in translating a verbal statement linear diagram those algebraic equations, and c) some students not use any information contained in the diagram**.**

Keywords: Representations, linear diagrams, word problems, graphic problems, symbolic problems.

González, F.; Castro, E. (2012*)*. Interpretación de diagramas en términos de enunciado verbal y su traducción algebraica. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 285-296). Ciudad Real: SEIEM.

Las representaciones juegan un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Castro y Castro, 1997). Investigadores como Booth y Thomas, 2000; Diezmann y English, 2001, y Novick y Hurley, 2001, subrayan la importancia de las representaciones externas en el proceso de resolución de problemas, figurando como uno de los principales elementos a investigar la utilización de representaciones gráficas en la resolución de problemas. Los diagramas, gráficas, imágenes y otros tipos de representaciones externas se utilizan en muchas tareas cognitivas como la resolución de problemas, razonamiento y la toma de decisiones. Nuestro interés se centra en los diagramas lineales como una forma de representación externa de relaciones numéricas.

Un diagrama es una representación visual que presenta la información en una disposición espacial (Diezmann y English, 2001). Los diagramas se consideran las representaciones estructurales en los que los detalles superficiales no son importantes. (Vekiri, 2002). Los diagramas normalmente se basan en las convenciones para mostrar los componentes tanto de la situación representada y su organización. En la resolución de problemas, un diagrama puede servir para representar la estructura de un problema, por lo que puede ser una herramienta útil en la solución del problema. Estos convenios se deben aprender y entender antes de utilizar exitosamente los diagramas (Diezmann y English, 2001).

El uso de diagramas ha sido identificado como una de las estrategias más efectivas que se han propuesto para mejorar la eficiencia en la solución de problemas matemáticos (Cheng, 2002; Hembree, 1992; Pólya, 1945; Stern, Aprea y Ebner, 2003; Uesaka, Manalo y Ichikawa, 2007). Su importancia se ha resaltado en la fase de comprensión o representación de los problemas aritméticos o algebraicos de enunciado verbal, ya que pueden ser utilizados para ayudar a descomprimir la estructura de un problema, y así sentar las bases para su solución. Son útiles también para simplificar una situación compleja para hacer los conceptos abstractos más concretos y obtener resultados de forma sencilla (Diezmann y English, 2001; Larkin y Simon, 1987; Novick, Hurley y Francis, 1999). Los diagramas se han utilizado como método en el proceso de resolución de problemas en distintas situaciones. (González, 2010), presenta un estudio sobre cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando diagramas lineales, después de ser instruidos para ello, en la que expresan ser capaces de hacer un razonamiento de las distintas fases de la resolución, llegando a comprender mejor todo el proceso. En esa misma línea (Martínez, 2011), introduce la enseñanza de un diagrama lineal basado en el uso de segmentos de tal manera que los estudiantes puedan resolver problemas algebraicos de forma gráfica, mostrando la aceptación del mismo por parte de los estudiantes como forma de representación de cantidades.

Van Garderen (2007) expone algunos aspectos relativos a los estudios sobre diagramas en resolución de problemas, introduce a los estudiantes dos tipos de diagramas, utiliza los diagramas lineales que generalmente son usados para poner cosas en orden y los diagramas parte todo, los utiliza para agrupar cosas o colocarlas juntas, en los que resalta la estructura partitiva y la estructura parte todo de la suma.

Por otro lado, varios estudios han demostrado que los diagramas son útiles cuando los inventan los alumnos, no cuando se les proporcionan (Cox, 1999). En esa misma línea, (Castro, Morcillo y Castro, 1999) obtienen que en algunos problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la educación secundaria obligatoria, utilizan de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. En esos problemas este tipo de estrategias son más eficaces de cara a obtener la solución correcta que las estrategias de carácter simbólico y evitan que los estudiantes cometan errores persistentes en estos problemas.

Los diagramas también se han utilizado como facilitadores en el proceso de resolución con o sin la presencia de ellos (Pantziara, Gagatsis y Elia, 2009). Este estudio mostró que la presencia de los diagramas no aumenta el rendimiento general de los estudiantes en la resolución de problemas no rutinarios. Sugiriendo, como implicación de las conclusiones obtenidas, que los profesores pueden dar oportunidades a los estudiantes no sólo a utilizar diagramas, sino también para inventar o buscar su propia estrategia de solución, incluyendo la construcción activa y el uso de diagramas como herramientas en la solución de problemas.

Tras la revisión de investigaciones previas observamos que muchas de ellas han centrado su interés en el uso de los diagramas como ayuda durante el proceso de resolución de problemas de matemáticas. Sin embargo, ningún estudio hasta la fecha, del cual somos conscientes en esta revisión, ha tratado sobre la interpretación que le dan los estudiantes a los distintos diagramas que se les presentan.

En este trabajo nuestro interés es observar cómo interpretan los estudiantes los diagramas desde el punto de vista operacional, para ello analizamos cómo los estudiantes hacen la traducción de dos problemas enunciados gráficamente en forma de diagramas hacia lo verbal y lo simbólico. Nos planteamos el siguiente objetivo.

Objetivo de la investigación

Indagar cómo interpretan diagramas lineales los estudiantes de los primeros cursos de la Escuela Secundaria Obligatoria (E.S.O.), a partir de su traducción verbal y simbólica.

Preguntas de investigación

La mayoría de las investigaciones que han centrado su atención en los diagramas para la resolución de problemas, lo hacen desde la perspectiva de que los diagramas son una ayuda para resolver problemas. No se han planteado que el resolver un diagrama constituye un problema en sí mismo, que puede coincidir semánticamente o no con el problema de enunciado verbal que representa. Por ello, para conocer mejor la función de los diagramas en la resolución de problemas nos planteamos las preguntas: ¿Qué problemas enuncian a partir de un diagrama lineal que representa relaciones entre cantidades? ¿Qué ecuaciones plantean?

Método

Participantes

En este estudio han participado 89 estudiantes de ambos sexos matriculados en primer curso de Educación Secundaria Obligatoria de dos Institutos públicos de la ciudad de Granada y cuyas edades oscilan entre los 12 y 14 años. Estos participantes no tenían preparación previa en el uso de diagramas.

El instrumento

Para tratar de cubrir el objetivo general de la investigación hemos diseñado un instrumento propio: dos cuestionarios (cuestionario 1 y cuestionario 2) que constan de un conjunto de problemas o tareas matemáticas. El cuestionario 1, fue construido para aplicarlo a los estudiantes de 1º de ESO. Está constituido por tres bloques que contienen dos tareas cada uno y cada tarea dos apartados. En este informe nos centramos en el *Cuestionario 1* y, dentro del él nos limitamos a analizar el bloque 3 que consta de dos problemas (problemas 5 y 6) ambos con dos apartados a y b.

En ellos, el enunciado viene dado por un diagrama lineal en el que aparece la información cuantitativa que representa las cantidades que actúan como datos. Tal y como refleja la Figura1.

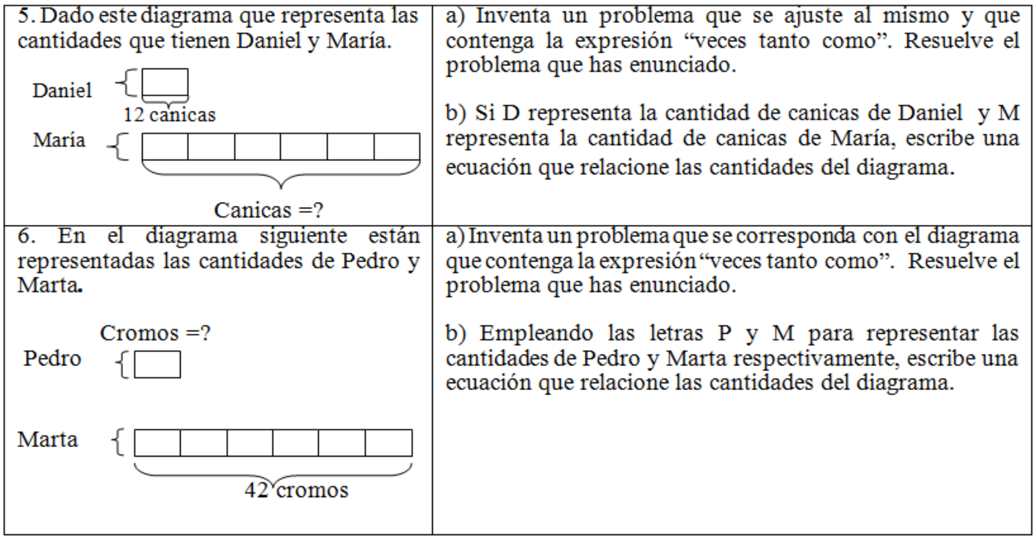


Figura 1: Problemas planteados a los estudiantes

- El problema 5 es un problema de comparación multiplicativa con comparado desconocido y enunciado consistente, según Lewis y Mayer (1987).
- El problema 6 es un problema de comparación multiplicativa con referente desconocido. Es decir de enunciado inconsistente, según Lewis y Mayer (1987).

En un primer apartado se les pide que inventen un problema que se ajuste al diagrama y se les sugiere que utilicen la expresión "veces tanto como", a la vez que lo resuelvan. En el segundo apartado se les pide que escriban una ecuación que relacione las cantidades del diagrama dado.

La elección de los grupos de estudiantes y el momento de la aplicación dependieron de la disposición y el horario de clases de los profesores de matemáticas de cada centro escolar. Las tareas o problemas fueron aplicados a primeras horas de la mañana, en el curso 2010/2011, durante los primeros días del mes de mayo y fueron resueltas de manera individual, en una prueba de lápiz y papel en la hora normal de clase en el aula habitual de matemáticas con la presencia del profesor habitual y la investigadora, en calidad de observadores del proceso de resolución.

Resultados

Hemos analizado por separado las respuestas de los estudiantes en los apartados a y b de las preguntas 5 y 6 del cuestionario 1. Agrupando los apartados con interrogantes comunes, (5a y 6a) y (5b y 6b), para que nos permita categorizar las producciones y realizar el análisis de frecuencias simples de las mismas. Con el fin de observar qué tipos de problemas inventan, partiendo de un diagrama, y saber qué habilidades tienen los estudiantes para pasar de lo gráfico (G) a lo verbal (V) y de lo gráfico (G) a lo simbólico (S).

$$\begin{tikzcd} & V \\ G \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S \end{tikzcd}$$

De gráfico a verbal: $G \longrightarrow V$

De gráfico a simbólico: $G \longrightarrow S$

Resultados del apartado a

A partir de las producciones de los estudiantes, hemos realizado un proceso de categorización de las respuestas mediante un proceso inductivo. Designamos a cada estudiante (**E**) un número del 01 al 89, una categoría (**I**) dependiendo el caso que sea del I_1 al I_8, y la tarea (**T**) con el número y el apartado de los problemas 5 y 6 en este caso 5a ó 6a.

Ejemplos:

- El estudiante E-01 en la tarea 6a lo ubicamos dentro de la categoría $\mathbf{I_2}$ donde inventa un problema similar, es decir replica el enunciado dado utilizando un diagrama con estructura similar. Además de cambiar los personajes del enunciado, resuelve bien el problema manteniendo la estructura multiplicativa del problema.

E-01**; I**$_2$; **T**-6a

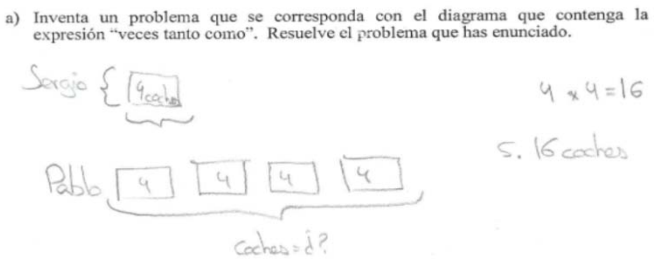
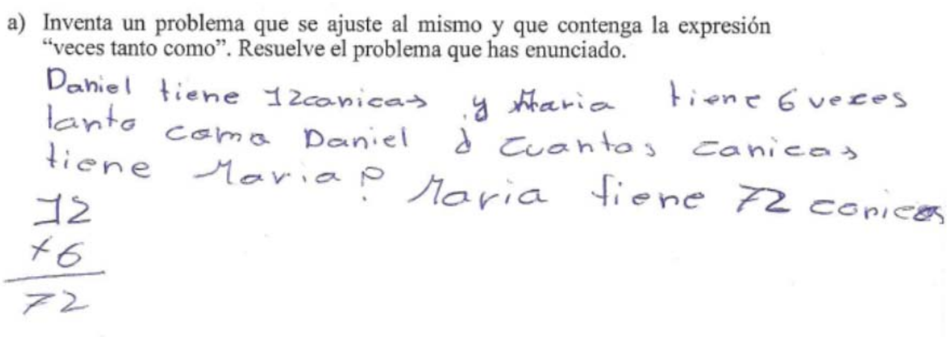


Figura 3. Invención de problemas a partir de un enunciado gráfico del estudiante E-01

- El estudiante E-46 en la tarea 5a, lo colocamos dentro da la categoría I_8, que es cuando el enunciado es correcto, ajustándose a las cantidades numéricas y personajes propuestos, es decir inventó un problema verbal de comparación multiplicativa utilizando la frase "veces tanto como". Además de presentar la resolución del problema utilizando multiplicación.

E-46; **I_8; T**-5a


a) Inventa un problema que se ajuste al mismo y que contenga la expresión "veces tanto como". Resuelve el problema que has enunciado.

Daniel tiene 12canicas y Maria tiene 6 veces tanto como Daniel ¿ Cuantos canicas tiene Maria? Maria tiene 72 canicas

12
×6
72

Figura 4. Invención de problemas a partir de enunciado gráfico del estudiante E-46

La Tabla 1 muestra la codificación y las distintas categorías basadas en las producciones de los estudiantes el análisis de frecuencias y los porcentajes de las soluciones de los estudiantes de primero de secundaria.

Tabla 1: Frecuencias (F) y Porcentajes (%) de la tarea 5a y 6a

Tarea		5a		6a	
Código	Invención de problemas a partir de un diagrama	F	%	F	%
I_1	no hay información o en está en blanco	11	12	19	21
I_2	dibujan un diagrama con estructura similar	9	10	6	7
I_3	utilizan las frases "veces más que" y "veces menos que"	4	4	6	7
I_4	inventan problema de comparación aditiva	1	1	1	1
I_5	el enunciado es incompleto	14	16	14	16
I_6	el problema no es de comparación	9	10	12	13
I_7	cometen error de inversión	4	4	5	7
I_8	inventan problemas verbales de comparación multiplicativa correctamente	37	42	26	29

De esta tabla se desprenden los siguientes resultados donde se muestra que hay estudiantes que inventan problemas de diferentes formas.

- La frecuencia con que plantean enunciados verbales incompletos es la misma en ambos casos superando el 10%.
- La frecuencia con la que inventan otro tipo de problemas (isomorfismo de medidas, proporcionalidad, grupos repetidos), superan el 10%.
- Muy pocos estudiantes cometen el error de inversión en estos casos, siendo la frecuencia de apenas un 5%. Igualmente presentan muy baja la frecuencia con que cambian la estructura del problema de multiplicativa a aditiva (1%), destacando que fue el mismo estudiante quién cambia la estructura en ambos problemas.
- El porcentaje de frecuencia con que mantienen la estructura multiplicativa, enunciando correctamente el problema es de un 35%.
- En este apartado la información en blanco supera el 15%.

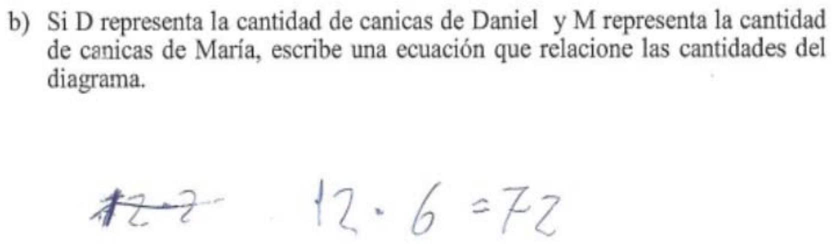
Resultados del apartado b

Por tratarse de apartados distintos hemos designado a cada estudiante (**E**) un número del 01 al 89, una categoría (**C**) dependiendo el caso que sea del C_1 al C_6, y la tarea (**T**) con el número y el apartado b de los problemas 5 y 6.

Ejemplos:

- El estudiante E-59 en la tarea 5b, lo ubicamos en la categoría C_2 en donde podemos observar que no escribe una ecuación, es decir trata de resolver el problema de forma numérica para luego utilizar la incógnita como otro dato y obtener una respuesta sin percatarse que no se le pide que resuelva el problema.

E-59; C_2; T-5b.


b) Si D representa la cantidad de canicas de Daniel y M representa la cantidad de canicas de María, escribe una ecuación que relacione las cantidades del diagrama.

~~12·7~~ 12 · 6 = 72

Figura 5. Escritura de ecuación a partir de un enunciado gráfico del estudiante E-59

- El estudiante E-62 en la tarea 6b ubicado dentro de la categoría C_6, escribe la ecuación correctamente, toma en cuenta la relación entre los datos del problema y utiliza las variables propuestas con las operaciones para cada caso.

E-62; C_6**;** T-6b.

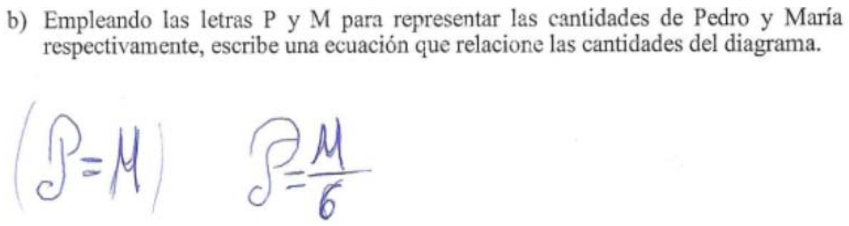


Figura 6: escritura de ecuación a partir de un enunciado gráfico del estudiante E-62

La Tabla 2 muestra la codificación con las categorías que surgen de las producciones de los estudiantes de primero de secundaria al resolver el apartado b de los problemas 5 y 6 con el análisis de frecuencias y los porcentajes de cada caso.

Tarea		5b		6b	
Código	invención de ecuación a partir de un diagrama	F	%	F	%
C_1	no hay información o en está en blanco	26	29	33	37
C_2	no escribe una ecuación o está incompleta	20	22	17	19
C_3	escribe ecuación incorrectamente	18	20	17	19
C_4	escribe varias ecuaciones	1	1	3	3
C_5	comete error de inversión	2	2	1	1
C_6	escribe ecuación correctamente	22	25	18	20

Tabla 2: Frecuencias (F) y Porcentajes (%) en la tarea 5b y 6b

De los datos obtenidos en la Tabla 2 observamos:

- La frecuencia con que escriben la relación de forma numérica, es aproximada a la frecuencia que no escriben ecuaciones, es decir se limitan a colocar los datos del enunciado, dejando la información incompleta sin ser mayor al 20%.
- Hay estudiantes que escriben más de una ecuación sin dejar claro, cuál es la que representa los datos del enunciado sin llegar a alcanzar el 4%.
- En este apartado hay muy pocos estudiantes que escriben la ecuación con la operación inversa cometiendo el error de inversión. La frecuencia está por debajo del 2%.
- La frecuencia con que escriben la ecuación correctamente, supera el 20%.

- Debemos mencionar que en este apartado se superó el 30%, el porcentaje de las frecuencias de las respuestas en la que los estudiantes no escriben información o la dejan en blanco.

Conclusiones

Una de las primeras conclusiones que obtenemos es el alto porcentaje de respuestas en blanco, lo que interpretamos como abstenciones por parte de los estudiantes ante este tipo de enunciados. Esto nos lleva a pensar en la falta de familiaridad en el uso de diagramas lineales. Las abstenciones se han producido tanto en la traducción a lo verbal como a lo gráfico, aunque con un porcentaje mayor de falta de respuesta en el paso a lo algebraico. La mayor dificultad de traducir el diagrama a lo algebraico que a lo verbal se manifiesta también en el menor número de traducciones correctas. Los estudiantes han sido capaces de interpretar mejor los diagramas lineales en el paso de lo gráfico a lo verbal que de lo gráfico a lo simbólico.

Nos ha llamado la atención el poco número de errores de inversión que han cometido los estudiantes tanto en el paso a lo verbal como a lo algebraico, frente a los resultados dados en investigaciones análogas (Lewis y Mayer, 1995) con problemas planteados verbalmente. Da la impresión de que los diagramas lineales facilitan el control de este error de inversión. También es digno de destacar que en los dos apartados de ambas tareas los sujetos no emplean la información completa.

En cuanto a la invención de problemas a partir de un enunciado gráfico con diagramas lineales, cabe resaltar que hay estudiantes que no inventan problemas con enunciado verbal y, en su lugar, dibujan un diagrama con estructura similar al dado en el cuestionario, o inventan problemas verbales que no corresponden a la categoría de comparación (isomorfismo de medidas, proporcionalidad, grupos repetidos), redactan enunciados incompletos, cambian la estructura multiplicativa por aditiva.

En la escritura de ecuaciones, observamos que algunos estudiantes, no escriben ecuaciones y se limitan a colocar los datos del enunciado. Hay estudiantes que escriben la relación de forma numérica, mientras que otros estudiantes escriben más de una ecuación sin dejar claro, cuál es la que representa los datos del enunciado. Resaltar también que el número de estudiantes que escriben la ecuación correctamente no supera el número de las abstenciones en cada caso.

Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

Referencias bibliográficas

Booth, R., y Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior,* 18(2), 169–190.

Castro, E.; Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori.

Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations Produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 2. (pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Cheng, P. C. H. (2002). Electrifying diagrams for learning: principles for complex representational systems. *Cognitive Science*, 26, 685-736.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343–363.

Diezmann, C. M., y English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 77–89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

González, F. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving-a metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 242–273.

Jitendra, A.; Di Pipi, C y Perron-Jones, N. (2002). An Exploratory Study of Schema-Based Word-Problem–Solving Instruction for Middle School Students with Learning Disabilities: An Emphasis on Conceptual and Procedural Understanding. *The Journal of Special Education* (pp. 23–38).

Jitendra, A. (2002). Teaching Students Math Problem-Solving Through Graphic Representations. *Teaching Exceptional Children*. (pp. 34-38).

Larkin, J., y Simon, H. A. (1987). Why a diagram (sometimes) worth ten thousand words. Cognitive Science, 11, 65-9.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363-371.

Martínez, M. (2011). *Utilización del Método Geométrico Lineal (MGL) para la Resolución de Problemas de Álgebra Elemental*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Novick, L., y Hurley, M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: that is the question. *Cognitive Psychology*, 42, 158–216.

Novick, L. R., Hurley, S. M., y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition*, *27*, 288–308.

Pantziara, M., Gagatsis, A. y Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non-routine mathematical problems. *Educ. Stud. Math.*72:39-60.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. (Cómo plantear y resolver problemas (1986). México: Trillas).

Stern, E., Aprea, C., y Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, 13, 19 1–203.

Uesaka, Y., Manalo, E., y Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, 17, 322– 335.

Vekiri, I., (2002). What is the value of Graphical Displays in Learning? *Educational Psychology Review, Vol. 14, No. 3,* 261-312.

Van Garderen, D. (2007). Teaching Students with LD to Use Diagrams to solve Mathematical Word Problems. *Journal of Learning Disabilities*. (pp. 540-553).

Xin, Y. P., Jitendra, A. K., y Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word problem solving instruction on students with learning problems. *Journal of Special Education, 39,* 181–1 92.

DIFICULTADES DE ESTUDIANTES DE SEXTO DE PRIMARIA EN LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO[39]

José Antonio González-Calero
Universidad de Castilla-La Mancha
David Arnau
Luis Puig
Universitat de València

Resumen

En esta comunicación presentamos algunos resultados derivados de una investigación realizada con estudiantes de sexto curso de primaria (11-12 años) en la cual se abordó la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. El principal objetivo del estudio era evaluar si la hoja de cálculo podría constituir un precursor en la enseñanza de la resolución algebraica de problemas. En esta comunicación describimos resumidamente las etapas y características de la investigación, así como los resultados obtenidos. Dedicaremos el núcleo de la comunicación a mostrar, mediante el análisis de un estudio de casos, algunas de las dificultades reveladas por los estudiantes a la hora de resolver problemas de forma algebraica mediante el método de la hoja de cálculo. En concreto, mostraremos ejemplos de la dificultad que presentan estos estudiantes para operar con lo desconocido.

Palabras clave: aprendizaje y enseñanza del álgebra, prealgebra, resolución de problemas, nuevas tecnologías.

Abstract

In this paper we put forward some results from an investigation into the teaching of algebraic solving of word problems in the spreadsheet environment in sixth grade of primary school (11-12 years*).* The main aim of this study was to determinate whether the spreadsheet could be a precursor into the teaching of algebraic problem solving. In this paper we describe briefly the stages and characteristics of this research. We will dedicate the core of this paper to show, by analyzing a case study, some of the difficulties revealed by students in solving problems algebraically in the spreadsheet environment. Specifically, we show examples of the difficulty presented by these students to operate with the unknown.

Keywords: learning and teaching of algebra, prealgebra, problem solving, new technologies.

[39] Esta investigación se ha realizado dentro del proyecto EDU2009-10599 concedido por la Dirección General de Investigación Científica y Gestión del Plan Nacional I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia.

González-Calero, J.A.; Arnau, D.; Puig, L. (2012*).* Dificultades de estudiantes de sexto de Primaria en la resolución algebraica de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 297-307). Ciudad Real: SEIEM.

.

Antecedentes y objetivos

En esta comunicación presentamos algunos de los principales resultados obtenidos el marco de una investigación realizada en sexto curso de Educación primaria (11-12 años) en la que abordamos la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. La investigación, de la que ofreceremos resultados, se fundamenta sobre la hipótesis de que el uso de la hoja de cálculo posibilita anticipar la resolución algebraica de problemas verbales a los últimos años de enseñanza primaria y se apoya sobre otros estudios que han puesto de manifiesto el potencial de la hoja de cálculo en este sentido (Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Friedlander, 1996; Sutherland y Rojano, 1993).

Nuestra principal referencia lo constituye la tesis doctoral de Arnau (2010) en la que se parte de la hipótesis de que el estatus híbrido aritmético-algebraico del lenguaje de la hoja de cálculo podría facilitar la transición entre la resolución aritmética y algebraica de problemas verbales, pero también se toma en consideración un aspecto ciertamente soslayado por los trabajos previos, como son los posibles efectos no deseados que puedan derivarse del uso de la hoja de cálculo. Así, uno de los objetivos de esta investigación fue analizar cómo influía la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo en la competencia de los estudiantes cuando resolvían problemas verbales con lápiz y papel y, en especial, mediante el método cartesiano (véase Filloy, Rojano y Puig, 2008; Puig, 2003). El estudio de Arnau (2010) se realizó con estudiantes de segundo curso de secundaria, inmediatamente después a que los alumnos fuesen instruidos en la resolución algebraica de problemas en lápiz y papel. La elección de la población, así como del momento de la observación, respondía, lógicamente, a los objetivos fijados, pues se estimaba que en este periodo se podría producir tanto un aumento en la competencia en el método cartesiano como la aparición de tendencias cognitivas manifestadas en un regreso a las formas de resolver propias de la aritmética. Los resultados de Arnau (2010) evidencian las limitaciones del método de la hoja de cálculo al ponerse de manifiesto ciertos efectos secundarios como consecuencia de la instrucción en este método. En concreto, se observó un incremento del número de lecturas algebraicas, pero con una disminución del uso del lenguaje del álgebra. Además, para la subfamilia de los problemas de edades, se observó una disminución significativa de la competencia de los estudiantes para realizar planteamientos algebraicos. Este resultado es atribuido a la aparición de estrategias espontáneas habilitadas por las posibilidades del entorno de la hoja de cálculo. Estos resultados plantean severas dudas sobre la conveniencia del uso del método de la hoja de cálculo en el nivel de educativo de secundaria, cuando ya los alumnos han recibido instrucción en el lenguaje algebraico. Sin embargo, estas conclusiones no coartan el hipotético potencial de la hoja de cálculo en la enseñanza del álgebra con anterioridad a la formalización de dicho lenguaje.

En la investigación de Selvi (2010) se analizó si estudiantes de segundo de secundaria, ya instruidos en el método cartesiano, eran capaces de resolver espontáneamente de manera algebraica problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo antes de ser instruidos en el MHC. En su estudio no apareció ninguna actuación en ese sentido, lo que le lleva a afirmar "parece que no se produce una transmisión al entorno de la hoja de cálculo de aquello que se ha aprendido tras la enseñanza del MC [método cartesiano]" (p. 135). Estos resultados refuerzan el diseño de nuestra investigación, especialmente en relación con la necesidad de incluir una secuencia de enseñanza la resolución algebraica de problemas verbales.

En esta comunicación describimos una de las dificultades reveladas por los estudiantes de sexto de primaria a la hora de resolver problemas de forma algebraica tras haber sido instruidos en la resolución algebraica en dicho entorno. En concreto, mostraremos ejemplos de la dificultad que presentan estos estudiantes para operar con lo desconocido.

Población, diseño y desarrollo de la investigación

El marco teórico y metodológico empleado en la investigación es de los Modelos Teóricos Locales. En esta comunicación no realizamos una descripción de las principales características de este marco teórico ni de los componentes que los componentes de los que consta (véase Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kieran y Filloy, 1989), sino que optamos por describir las etapas relativas al desarrollo de la experimentación. En concreto, nos centraremos en describir la secuencia de enseñanza y la recogida de datos en el estudio de casos.

A la hora de construir un modelo de enseñanza partíamos de la base del total desconocimiento de los alumnos sobre la herramienta a utilizar, la hoja de cálculo. Este hecho nos obligaba a incluir en nuestro modelo la enseñanza de los elementos y rudimentos básicos con antelación a la formación en el método de la hoja de cálculo. De esta forma, el modelo de enseñanza consta de dos partes bien diferenciadas: 1) La enseñanza de los rudimentos básicos de la hoja de cálculo. 2) La enseñanza del método de la hoja de cálculo.

La secuencia de enseñanza se desarrolló en el aula de informática de un centro de Castilla-La Mancha. El aula disponía de 12 ordenadores con sistema operativo Windows XP y con la suite OpenOffice 3.3.0, de difusión gratuita, instalada en todos los equipos. Esta suite posee la hoja de cálculo Calc, cuyas características y funcionamiento son prácticamente idénticos a la hoja Excel. El desarrollo de la secuencia de enseñanza ocupó diez sesiones, cinco sesiones de 45 minutos de duración y otras cinco de una hora. Las sesiones se impartieron en el horario de la asignatura de matemáticas. Los alumnos se agruparon por parejas libremente con el fin de fomentar el proceso comunicativo entre ellos. La primera etapa de la secuencia de enseñanza, tenía como objetivo transmitir el conjunto de rudimentos básicos, así incluía las técnicas básicas siguientes: la identificación de los elementos de una hoja de cálculo (celda, fila, columna…), la introducción de fórmulas, la necesidad de uso de paréntesis, etc.

La segunda etapa, dedicada a la instrucción en el método de la hoja de cálculo, se inició con la resolución por parte del profesor de un problema-ejemplo mediante este método (para una descripción más detallada del método véase Arnau, 2010). A partir de este momento, y durante cuatro sesiones más, se brindó a cada pareja una colección de problemas para que fuesen resueltos de forma autónoma. Durante estas sesiones, dos o tres profesores prestaban ayuda a las parejas en el proceso de resolución. En las dos primeras sesiones los profesores actuaban prestando ayuda siempre que percibían dificultades en cualquiera de las parejas, mientras que en las dos últimas sesiones sólo intervenían bajo petición de las parejas.

Tras la realización de secuencia de enseñanza, cuyas principales características acabamos de describir, y en la que intervinieron todos los miembros del grupo (21 alumnos), se procedió a la realización del estudio de casos donde participaron todos los estudiantes que habían asistido de manera continuada a las sesiones de enseñanza.

El estudio de casos consistió en que las mismas parejas conformadas para la secuencia de enseñanza, se enfrentasen a la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. El estudio de casos fue grabado en vídeo para su posterior transcripción a un protocolo escrito.

Para la realización del estudio de casos se preparó una colección de cuatro problemas, cuya principal característica es que la lectura más natural de los mismos desemboca en una resolución algebraica. Todos los problemas fueron seleccionados con la intención de que tuvieran un nivel dificultad similar a los problemas planteados durante la secuencia de enseñanza. En la presente comunicación, por motivos de espacio, sólo presentamos el análisis de uno de los problemas, el titulado *Actividades deportivas*.

Actividades deportivas

En un colegio 441 alumnos realizan actividades deportivas. A baloncesto se han apuntado 27 personas más que a fútbol y en balonmano hay 4 veces más alumnos que en baloncesto. ¿Cuántas personas hay en cada actividad?

Análisis de las cantidades
Número de personas apuntadas a actividades deportivas. (T = 441) Número de personas apuntadas a baloncesto. (B) Número de personas apuntadas a balonmano. (H) Número de personas apuntadas a fútbol. (F) Número por el que hay que multiplicar el número de personas apuntadas a baloncesto para obtener el número de personas apuntadas a balonmano. (Vbh = 4). Número de personas de más que hay apuntadas a balonmano respecto a las apuntadas en fútbol. (Mfb = 27).
Análisis de las relaciones
$T = F + B + H$ $B = F + Mfb$ $H = B \cdot Vbh$

Este problema fue seleccionado para abrir el estudio de casos por ser un problema que ofrece una lectura algebraica sencilla, en la que la traducción de las relaciones a fórmulas no requiere realizar inversiones de las relaciones que se deducen de una lectura natural del enunciado. Además, los valores provisionales que se generan al representar las relaciones de la lectura habitual son positivos. Estas características motivaron que este problema, al igual que hizo Arnau (2010), fuese empleado como indicador de la capacidad de los resolutores para aplicar el método de la hoja de cálculo.

Una vez presentado el análisis del problema *Actividades deportivas*, dedicaremos el resto de la comunicación a una de las dificultades que emergieron durante la resolución algebraica de problemas verbales durante el estudio de casos: la operación con lo desconocido. Emplearemos las actuaciones de dos parejas al enfrentarse al problema *Actividades deportivas* para ilustrar aspectos relevantes de esta dificultad.

La dificultad para operar con lo desconocido

El análisis de las actuaciones de las parejas al enfrentarse al estudio de casos nos permite construir un catálogo de actuaciones, donde se recogen principalmente dificultades y errores a la hora de aplicar el MHC. En esta comunicación, tal y como decíamos anteriormente nos centraremos exclusivamente en la dificultad para operar con lo desconocido en un marco concreto, el problema *Actividades deportivas*.

El método de la hoja de cálculo implica inexorablemente operar con lo desconocido. Aunque en el global del estudio de casos se observó un aceptable nivel de competencia en la aplicación del método de la hoja de cálculo, no es menos cierto que emergieron actuaciones individuales donde se revelan reticencias a la operación con lo desconocido.

La pareja Antonio-Diego en el problema Actividades deportivas

La pareja Antonio-Diego estaba formada por estudiantes con un historial académico bajo, es más Diego repetía sexto curso de primaria. Mantuvieron el siguiente dialogo mientras llevaban a cabo acciones en la hoja de cálculo para resolver el problema partiendo de la situación representada en la Figura 1.

	A	B	C
1	alumnos total	441	
2			
3	baloncesto	27	
4	balonmano		
5	futbol		
6	total		
7			

Figura 3. Contenido de las celdas antes del ítem 13

13. (Antonio introduce “27” en B3.)
14. (Antonio introduce “total” en A6.)
15. (Antonio empieza a introducir “=B3...” en B6.)
16. Diego: Be cinco.

17. (Antonio introduce “=B3+B5” en B6 y en dicha celda aparece el número 27].)

18. Diego: Pon… ¿en total qué has puesto? Tienes qué poner estas tres para que te dé el total de alumnos. (Se refiere a las celdas B3, B4 y B5.)

19. Antonio: A ver… be tres más be cinco…

20. Diego: Te falta be cuatro…

21. (Antonio modifica “=B3+B5+B4” en B6 y en dicha celda aparece el número 27.)

22. Antonio: Veintisiete…

23: Diego: Ya… eso ya va a ir cambiando… ahora tenemos que buscar…

24: Antonio: ¡Es que eso no está así bien!

25: Diego: Sí, está bien.

26: Antonio: ¡No!

27: Diego: Hay que buscar ahora rellenar un hueco…

28: Antonio: No… hay que poner… a ver… balonmano… a baloncesto se han apuntado veintisiete personas más que a fútbol… y a balonmano hay cuatro veces más que a fútbol…

29: (Antonio borra la celda B6.)

30: Antonio: Cuatro veces más alumnos que en baloncesto… (Introduce “4” en la celda B4.)

31: Antonio: …y ahora total…

32: Diego: Cuatro no, no pongas cuatro… cuatro veces más, no cuatro…

33: Antonio: Pe… pero, es que no… no lo va a leer… igual

En este fragmento del protocolo escrito, se constatan las dificultades de Antonio para operar con lo desconocido. Esta dificultad se manifiesta en el hecho de que el resolutor evita constantemente introducir fórmulas cuyos argumentos sean celdas vacías. Así, puede verse como sólo lo hace bajo indicación directa de su compañero (ítems 16 a 21) y como, a pesar de ello, demuestra no comprender la relación aditiva representada (ítem 24) y termina borrándola (ítem 30). La dificultad para operar con lo desconocido provoca que asigne directamente el valor de las cantidades conocidas *Vbh* y *Mfb* a las cantidades *B* y *H*, respectivamente (ítems 13 y 30). Nótese que las cantidades *Vbh* y *Mfb*, son cantidades intermedias que se usan para la comparación de unas cantidades desconocidas con otras. La imposibilidad de operar con lo desconocido, intenta ser solventada mediante el uso exclusivo de cantidades conocidas y, como consecuencia, se produce una representación de relaciones erróneas.

La pareja Santos-Raúl en el problema Actividades deportivas

La pareja Santos-Raúl estaba formada por estudiantes con un historial académico medio. Mantuvieron el siguiente dialogo mientras llevaban a cabo acciones en la hoja de cálculo para resolver el problema partiendo de la hoja en blanco.

2. Santos: A ver, pon baloncesto.

3. (Raúl introduce “baloncesto” en la celda A1.)

4. Santos: Veintisiete… eh…

5. Raúl: ¿Veintisiete personas más?

6. Santos: No. Veintisiete personas más que a fútbol y en balonc… a ver, vale dale… veintisiete.

7. (Raúl introduce “27” en la celda B1.)

8. Raúl: Más. (Raúl modifica “27+” en la celda B1.)

	A	B	C
1	baloncesto	27+	
2			
3			

Figura 4. Contenido de las celdas después del ítem 8

9. Santos: Ahora pon abajo…

10. (Raúl activa la celda B2).

11. Santos: No, espera. (Señala la celda A2 con el dedo). Ahora pon aquí (A2) balonmano.

12. (Raúl introduce “balonmano” en la celda A2.)

13. Raúl: Y abajo, ¿fútbol?

14. Santos: Y abajo fútbol.

15. (Raúl introduce “futbol” en la celda A3.)

16. Santos: Balonmano… a ver, ahora tenemos… espera, que hagamos esto. Aquí, veintisiete.

17. (Santos modifica “27” en la celda B1.)

18. Santos: Espero que no nos salga fecha, y en balonmano tenemos que hacer igual a esto (B1) por cuatro. (Introduce "=B1*4" en la celda y dicha celda aparece 108.)
19. Raúl: Claro, por cuatro.
20. Santos: Ciento ocho, ciento ocho…
21. Raúl: Por cuatro veces más… que baloncesto.
22. Santos: Vale, espera. Total… (Introduce "total" en la celda A4.)
23. Santos: … y total (introduce "total" en la celda A5.)
24. Santos: Aquí (B4) ponemos los que son, que son cuatrocientos cuarenta y uno. (Introduce "441" en la celda B4.)
25. Santos: Y aquí…
26. Raúl: Te tiene que dar lo mismo.
27. Santos: Sí, espera. Esto (B3) más esto (B2)…
28. Raúl: Be dos…
29. Santos: Más esto (B1). (Introduce "=B3+B2+B1" en la celda B5 y en dicha celda aparece 135]).

	A	B	C
1	baloncesto	27	
2	balonmano	=B1*4	
3	futbol		
4	total	441	
5	total	=B3+B2+B1	
6			

Figura 5. Contenido de las celdas después del ítem 29

Hemos incluido este fragmento del protocolo escrito correspondiente a la resolución de la pareja Santos-Raúl, pues su actuación en los primeros pasos (ítems 7 a 17) pudiera interpretarse erróneamente como una dificultad para operar con lo desconocido, cuando en realidad la dificultad está ligada al entorno de resolución. A diferencia del método cartesiano, el método de la hoja de cálculo requiere la previa representación de todas las cantidades involucradas en una relación antes de poder materializar ésta en una fórmula. Esta consideración es pertinente pues, con cierta frecuencia, los resolutores pretenden construir fórmulas sin haber asignado celda a las cantidades implicadas, y dada la inexistencia de referencias les resulta imposible construir la fórmula. Éste es el caso de nuestra pareja, que es incapaz de representar la relación $B = F + Mfb$, pues en el ítem 7 aún no han asignado celda a la cantidad F. Como decíamos, esta dificultad puede ser interpretada erróneamente como una resistencia a operar con lo desconocido, y a tenor de la actuación de la pareja (véase ítem 29) no parece que el hecho de operar con cantidades desconocidas sea un foco de dificultades. La realidad es que la hoja de cálculo impide operar con cantidades no representadas y, en consecuencia, la dificultad no estaría ligada al carácter de la cantidad (conocida o desconocida) sino a la imposibilidad de hacer referencia a la misma en la fórmula[40]. Esto se debe a que cuando se usa la hoja de cálculo, no existe una planificación previa de en qué celda se alojará cada cantidad y, más concretamente, la cantidad desconocida. Por tanto, no es posible construir una fórmula al no tener la referencia de la celda en la que se representará la cantidad involucrada. Esta situación no se da en el método cartesiano, donde de forma clásica se usa la letra x para representar la cantidad desconocida, y el resolutor puede emplear con sentido dicha cantidad en cualquier momento del proceso de resolución.

Conclusiones

Hemos puesto de manifiesto que la dificultad para operar con lo desconocido también aparece cuando se introduce a los estudiantes en la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo y que, en consecuencia, no puede ligarse exclusivamente a la resolución algebraica de problemas con lápiz y papel. Sin embargo, también hemos ofrecido un ejemplo en el que más que la dificultad para operar con lo desconocido se presenta una dificultad para operar con cantidades que no se han representado en la hoja de cálculo. Parece por lo tanto necesario atender a que convendría separar la dificultad para operar con lo desconocido en dos vías: la dificultad para operar con lo desconocido cuando se resuelve de manera algebraica y la dificultad para referirse a una cantidad que no ha sido representada en el lenguaje en que se pretende llevar a cabo la resolución.

Referencias bibliográficas

Artículos en revistas

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del algebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *9*, 71-75.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7*, 230-240.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra

[40] Las cantidades conocidas determinadas pueden ser representadas directamente mediante su valor en una fórmula, no así las desconocidas que exigen la asignación de celda en la hoja de cálculo.

Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 353-383.

Libros

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: Valencia.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*. (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual,* (pp. 174-186). México, D.F.: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.

Selvi, S. (2010). *La resolución de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo: un estudio exploratorio con alumnos recientemente introducidos en el uso del método cartesiano.* Trabajo Fin de Máster no publicado. Universitat de València: València.

COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN ESTUDIANTES DEL GRADO DE MAESTRO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Antonio Luis Ortiz Villarejo
José Luis González Marí
Jesús Gallardo Romero
Universidad de Málaga.

Resumen

Tener un buen nivel de comprensión y dominio del conocimiento matemático elemental es, sin lugar a dudas, una condición necesaria, aunque no suficiente, para que un Maestro de Educación Primaria desarrolle su labor profesional con garantías. Pero la comprensión que manifiestan los estudiantes para maestros al comienzo de sus estudios sobre la mayoría de los contenidos matemáticos elementales suele ser limitada, defectuosa y difícil de modificar con los planes de formación actuales y en el corto espacio de tiempo disponible. En estas condiciones cabe preguntarse, ¿qué y cómo puede enseñar un Maestro sobre un contenido matemático que no domina satisfactoriamente?; ¿se han de conocer y tener en cuenta dichas carencias y limitaciones para planificar la formación inicial? En el presente artículo se exponen los aspectos fundamentales de un estudio exploratorio realizado sobre la comprensión que manifiestan los futuros maestros del nuevo Grado de Primaria acerca de los sistemas de representación numérica, los errores que cometen y las estrategias que utilizan. Los primeros resultados ponen de manifiesto que la mayoría de los alumnos inician su formación profesional con un dominio meramente técnico, limitado y con lagunas de comprensión importantes.

Palabras clave: Conocimiento del Contenido Matemático de los Profesores, Comprensión del Conocimiento Matemático, Sistema de Numeración Decimal, Sistemas de Representación Numérica, Formación profesor de matemáticas.

Abstract

Having a good level of understanding and mastery of basic mathematical knowledge is, undoubtedly, a necessary but not sufficient condition for a primary school teacher to develop their professional activities with guarantees. However understanding on elementary mathematical contents showed by student for elementary teachers at the beginning of his/her studies are often limited, defective and difficult to modify in the current teacher training plan and with the short time available. Under these conditions can be formulated the two following questions: ¿can you teaching a mathematical content that you don`t dominate successfully?, ¿Do we must recognizing these shortcomings and limitations and taking it into account for planning the initial training? This article presents the fundamentals of an exploratory research on understanding of prospective elementary teachers about the numerical representation systems, the mistakes and the strategies they use. The first results show that most students begin their training with a purely technical domain, limited and with major gaps in understanding.

Key words: Mathematical Content Knowledge of Teachers, Understanding Mathematics, Decimal Number System, Representation Number Systems, Teacher's Degree in Primary Education.

Ortiz, A. L., González, J. L.; Gallardo, J. (2012*).* Comprensión del Sistema de Numeración Decimal en estudiantes del Grado de Primaria. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 309-378). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

Parece que existe un cierto consenso en que el Maestro de Primaria debe ser un profesional reflexivo (Flores, P., 2007) sobre los procesos de adquisición del conocimiento matemático, los recursos, materiales y métodos adecuados para ello y sobre las destrezas cognitivas y metacognitivas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales (Llinares,S.; Sánchez, M. V., 1990). Pero para adquirir una buena formación sobre dichas cuestiones es necesario tener un cierto dominio y un buen nivel de comprensión de los conocimientos matemáticos elementales que se encuentran en la base de tales destrezas profesionales (Shulman, 1986). Qué duda cabe de que la formación matemática del Maestro de Primaria es un elemento clave para mejorar la calidad de la Educación Matemática, disminuir el fracaso escolar y superar la situación actual de bajo rendimiento académico que se puede apreciar claramente en las evaluaciones de diagnóstico realizadas hasta la fecha (Informe Pisa 2010).

Pero todo ello nos remite directamente a las siguientes cuestiones no respondidas aún satisfactoriamente: *¿cuáles deberían ser los conocimientos matemáticos elementales que debe dominar y comprender un maestro de Primaria para adquirir una formación profesional eficaz y completa?; ¿hasta dónde debe llegar el dominio y comprensión de dichos conocimientos*?; *¿cuál es la situación real de la comprensión al comienzo de los estudios profesionales?*; *¿Cómo debería ser la formación universitaria para optimizar la comprensión y el dominio que ya poseen al comienzo de los estudios?*

Se trata, evidentemente, de cuestiones complejas a las que no podemos responder directamente con el estudio que aquí se presenta. Antes bien, creemos que para dar respuesta fundada a algunas de dichas cuestiones y realizar cualquier consideración sobre los procesos formativos correspondientes es necesario indagar previamente en los siguientes aspectos que inciden en el problema planteado:

1) El estado real de la comprensión de los conocimientos matemáticos de los alumnos futuros maestros al acceder a la Universidad desde la doble dimensión fenómeno epistemológica y hermenéutica;

2) Los errores que cometen, las estrategias que utilizan y los modos y estilos de razonamiento cuando se enfrentan a situaciones y experiencias en las que intervienen los diferentes conocimientos matemáticos.

En el estudio que presentamos vamos a tratar de responder a las dos cuestiones anteriores en el caso particular del sistema de representación decimal de los números naturales. Nuestras conjeturas previas indican que los futuros maestros tienen dificultades y cometen errores que proceden de una formación previa mejorable y que, en consecuencia, poseen un nivel de comprensión medio bajo sobre este campo de las matemáticas elementales. Por otra parte, creemos que los errores y las estrategias utilizadas al resolver tareas propias del campo analizado proporcionan información privilegiada sobre las limitaciones, dificultades y otras características de las capacidades, destrezas y maneras de razonar relacionadas con los sistemas de numeración. A partir de la información obtenida se podrá plantear el desarrollo de un plan de formación inicial orientado a que los alumnos mejoren su nivel de comprensión y superen los errores y las dificultades encontradas, lo que, evidentemente, será objeto de otra investigación.

Creemos que el estudio tiene sentido por la proyección que dichos conocimientos tienen o pueden tener sobre la tarea profesional del maestro y porque se realiza al comienzo de un nuevo plan europeo que amplía los estudios a cuatro años. Adicionalmente, las siguientes premisas delimitan con precisión el problema planteado en forma de conjeturas plausibles y justifican sobradamente la importancia y pertinencia del estudio:

1.- El profesor/maestro de matemáticas debe dominar el contenido matemático que va a enseñar (condición necesaria pero no suficiente). El tipo de habilidad, de conocimiento, el nivel, las relaciones, la profundidad, etc., están por delimitar y estudiar: ¿contenido formal de nivel superior?; ¿sólo lo que va a enseñar y con el mismo nivel?, etc.

2.- Los estudiantes para maestro comienzan sus estudios profesionales con una formación limitada y deficiente sobre los contenidos matemáticos que deberán enseñar, cometiendo errores persistentes y utilizando estrategias no adecuadas. Parece que la formación que aportan es una formación técnica, memorística, basada en fórmulas y procedimientos aprendidos y no es una formación significativa, relacional, analítica, de alto nivel, como sería deseable que fuera para enseñar a los estudiantes de Primaria.

3.- A pesar de ser un contenido meramente técnico y aparentemente sencillo y que parece lógico que debe ser dominado por todo el mundo, incluidos los futuros maestros, el tema del sistema de numeración decimal participa también de la situación descrita en el apartado 2, es decir, los estudiantes para maestro presentan una comprensión limitada sobre el mismo con errores importantes y con lagunas que pueden afectar gravemente a su labor profesional en el aula de Primaria.

Como cuestión secundaria para los propósitos del estudio, aunque no menos importante y útil para la propia formación de docentes, se encuentra el hecho de que los datos que se obtengan van a proporcionar información sobre la formación matemática de LARGA DURACIÓN que se alcanza con el proceso educativo ordinario y las experiencias vitales del sujeto. Se trata de conocimientos que los futuros maestros de Primaria han aprendido, construido y trabajado durante un largo período de tiempo que va desde los niveles de Educación Infantil, con el aprendizaje de los primeros números naturales, la escritura y la lectura de números, hasta los años de Bachillerato.

Pero, puesto que somos responsables de la formación de los futuros docentes y suponiendo que las afirmaciones anteriores son ciertas, queda en el aire una cuarta cuestión no menos importante que deberá ser abordada en una investigación posterior fundamentada en los datos proporcionados por el estudio que presentamos, que tiene que ver con la posibilidad de corregir, enmendar, paliar, mejorar, etc. la situación descrita en el punto 3:

4.- Es posible mejorar los niveles bajos en comprensión del contenido matemático de los futuros docentes mediante procesos de reeducación "ad hoc" caracterizados por nuevas formas de ver y tratar los contenidos. Las experiencias se han de diseñar teniendo en cuenta las características de la comprensión así como los niveles, errores y estrategias constatados en el estudio correspondiente a los puntos 2 y 3.

En el presente artículo se describen los aspectos fundamentales de un estudio exploratorio realizado mediante la aplicación de un primer instrumento de recogida y análisis de datos para confirmar la plausibilidad de las conjeturas, valorar el conocimiento y la comprensión de los futuros maestros de primaria sobre el sistema de numeración decimal y verificar la potencialidad del modelo operativo de interpretación de la comprensión matemática (Gonzalez, 1998, Gallardo y Gonzalez, 2006, Gallardo , Gonzalez y Quintanilla, 2007). Para realizar el estudio se ha tomando como referencia la población de estudiantes de primer curso de la nueva titulación del Grado de Maestro en Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga.

Para llevar a cabo el estudio planteado, hemos comenzado por la aplicación del procedimiento conocido como Análisis Didáctico (González, J. L., 1999) para el tratamiento de los antecedentes del problema de investigación. Dichos antecedentes así como el marco teórico y el modelo operativo que se utiliza en la investigación se muestran con detalle en el apartado siguiente. A continuación, al amparo del modelo mencionado se realiza un análisis fenómeno-epistemológico del campo de conocimientos para determinar el universo y las categorías de situaciones y problemas de aplicación del sistema de numeración decimal.

Teniendo en cuenta el esquema de categorías, situaciones y niveles del apartado anterior se procede a la selección y ordenación de tareas y a la construcción del cuestionario. En los apartados siguientes se describe brevemente la aplicación del mismo a una muestra representativa de estudiantes y se incluye una selección de algunos de los numerosos resultados obtenidos. El artículo finaliza con las principales consecuencias para la continuación del estudio, la elaboración de un segundo instrumento y las principales conclusiones sobre los niveles de comprensión que manifiestan los alumnos, los errores que cometen y las estrategias que utilizan. Esta información será contrastada de nuevo con los resultados de la aplicación del segundo cuestionario y podrá ser confirmada mediante entrevistas semiestructuradas y estudios complementarios.

Antecedentes y marco teórico

La investigación que aquí se presenta constituye una parte de un estudio más amplio que tiene sus inicios en una investigación preliminar orientada a la consecución de la Memoria de Tercer Ciclo de Ortiz, A. (1998) [41]. En dicho trabajo se realizó un estudio sobre la comprensión del sistema de numeración decimal y más concretamente un análisis sobre la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado y su relación con la construcción significativa de los algoritmos de las operaciones aritméticas y el desarrollo del cálculo mental.

El estudio se desarrolló mediante la aplicación de metodologías diversas. Entre los métodos no empíricos se utilizaron: a) Análisis Didáctico, como procedimiento específico derivado del análisis cualitativo (González, J. L., 1995, 1998); b) Análisis Curricular ; c) Revisión Histórica mediante una aproximación al método histórico-crítico; d) Revisión de textos,

[4141] Memoria no publicada correspondiente al Programa de Doctorado del Departamento en el bienio 1.996-1.998.

mediante una aproximación a los análisis bibliográficos. En la parte empírica se construyó y se aplicó un cuestionario a una muestra intencional de 4º de Primaria.

Los principales logros y resultados son los siguientes:

Desde el punto de vista histórico y epistemológico se actualizó la información (Guitel, G., 1.975; Ifrah, G., 1.994) y se hizo un análisis de los sistemas de numeración actuales a la luz de la *Clasificación jerarquizada de las numeraciones escritas* propuesta por Guitel. Desde el punto de vista matemático y formal se actualizó la información sobre los intentos de generalización de los sistemas de numeración en el s. XVII y las reflexiones sobre los orígenes de la Aritmética (Caramuel, J., 1670). Igualmente, se han revisado las consideraciones formales sobre los sistemas de numeración (Capelo, Ferrari y Padovan, 1990).

En lo que se refiere a la comprensión y dominio de los sistemas de numeración se organizaron y analizaron de cara al estudio empírico los resultados de los estudios:

- Nadine Bednarz y Bernadette Dufour-Janvier (1982, 1988) en relación con la escritura convencional, la capacidad para leer y escribir números, el valor de posición, los algoritmos de cálculo y los agrupamientos.
- Mieko Kamii (1980,81,82) y Constance Kamii (1984,85) sobre el valor de posición y la capacidad de los niños entre 4 y 9 años para agrupar objetos y representar estos grupos con imágenes y cifras, y estudiar la interacción entre los significantes construidos individualmente y los transmitidos socialmente.
- Estudios de Pedagogía Operatoria sobre el proceso de reconstrucción infantil de los sistemas de numeración (Sellarès, R. y Bassedas, M. en Moreno, M. (1980)). Establecieron una génesis que incluye siete conductas que agruparon en tres niveles o momentos de progresiva estructuración y toma de conciencia.
- Estudios sobre el dominio de la numeración al terminar los ciclos en la educación primaria (Aguilar, M.; Martinez, J., 1997), de los que se aplicaron los principales resultados obtenidos en un estudio muestral mediante la aplicación del “Test de Evaluación Curricular Matemática. Primero, Segundo y Trecer Ciclo de Educación Primaria. Numeración”. Las conclusiones son las siguientes:
    - Hay competencias numéricas que evolucionan por madurez

- hay dificultades y errores que persisten a lo largo de los tres ciclos de Primaria.
- las respuestas son fruto de un aprendizaje más repetitivo, rutinario y memorístico que significativo y conceptual.
- interesaría averiguar: qué parte de los errores corresponden al desconocimiento de los conceptos numéricos y qué parte dependen de las propias capacidades cognoscitivas inherentes al desarrollo evolutivo y las estratégias que usan los niños que resuelven bien los items difíciles.

- Lucie Deblois (1.993) realiza 6 estudios de casos sobre la comprensión de la numeración en niños con dificultades de aprendizaje.

  La numeración de posición, para L. Deblois aparece como campo conceptual, en el sentido en como lo define Vergnaud (1.990) y elige el modelo de comprensión de Bergeron y Hercovics (1.989). Establece distintos bloques y distintas componentes de la comprensión en cada bloque y enuncia criterios observables de cada una de dichas componentes. Los bloques son: conceptos preliminares y conceptos emergentes. Los criterios observables de la comprensión se agrupan en torno a las siguientes componentes: intuitiva, procesual, abstracta y formal.

El estudio empírico se desarrolló mediante una primera prueba exploratoria, tipo cuestionario, basada en el modelo de Jan de Lange (1.996), desarrollado por Mary C. Shafer y Sherian Foster, en el trabajo, “ The changing face of assesment” (1.997). Se consideraron las variables independiente de tarea: tipo de actividad, con tres categorias que representan los niveles de dificultad de la tarea; nivel de comprensión, con las categorías nivel I o de reproducción, nivel II o de conexiones y nivel III o de análisis; tipo de lenguaje utilizado, con dos categorias, según el soporte de la actividad sea de naturaleza fundamentalmente verbal o de naturalea figurativa, y una tercera con dos modadidades distintas referidas a la utilización de los dos sistemas de representación numérico escrito (con cifras) y verbal (con letras).
La variable dependiente o de respuesta es una variable discreta de carácter cuantitativo con cuatro posibles valores: respuesta correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco.

Las tareas se eligieron de entre las siguientes categorías:

Escritura en ambos sistemas de números de hasta 5 cifras

Traducciones de un sistema a otro

Órdenes de agrupamientos: unidades, decenas, centenas

Número de agrupamientos distintos de una cantidad

Comparaciones de números, encontrar un número entre otros dos.
Construcciones del mayor y menor número con distintos dígitos.
Uso de las ideas de agrupamientos en los algoritmos de las operaciones elementales.

En esta primera prueba exploratoria, se confirman las siguientes conjeturas:

- La enseñanza del sistema de numeración se orienta a los aspectos técnicos y no favorece la comprensión involucrada en las situaciones de conexiones y de análisis.
- Las traducciones del sistema escrito (cifra) al verbal (letras) son las más dificiles,
- Las actividades que se clasifican como no verbales tienen un menor índice de dificultad. El lenguaje verbal resulta un obstáculo en la comprensión de las situaciones propuestas.

Pero el trabajo que se pretende realizar ahora se encuentra con un marco teórico bastante más desarrollado que entonces y con un modelo más avanzado y completo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático. En este sentido, puesto que la continuación de la investigación pretende:

- Ampliar el estudio de la comprensión al resto de aspectos del campo de la representación numérica elemental
- Utilizar el nuevo marco teórico y el nuevo modelo operativo sobre la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático
- Centrar la indagación en los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Primaria
- Extraer consecuencias fundadas para la formación específica de dichos alumnos
- Sentar las bases para abrir una vía de indagación sobre diseño y desarrollo de planes de formación basados en los resultados de este tipo de estudios

El nuevo estudio se ha de fundamentar en los siguientes campos y temas de investigación:

a) las investigaciones sobre la formación del profesorado y, en particular, sobre la formación acerca del conocimiento del contenido matemático;

b) los estudios sobre la comprensión del conocimiento matemático en general y, en particular, sobre la comprensión de la representación numérica y el sistema de numeración decimal.

Veamos a continuación las principales referencias y principios que constituyen el marco teórico que sustenta la investigación que presentamos.

El dominio y la comprensión del conocimiento matemático elemental como parte de la formación de maestros de Educación Primaria

La investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático posee un interés intrínseco fuera de toda duda (Sierpinska, 1994; Gallardo, 2005, 2006, 2010). Pero si, además, se analiza la comprensión en alumnos futuros maestros de Primaria, la relevancia es doble, si tenemos en cuenta que lo que conoce y comprende el profesor influye en su actuación en las aulas y, como consecuencia, en lo que los alumnos aprenden.

Es evidente, por tanto, la relación que tiene el estudio de la comprensión con las investigaciones sobre las características, actitudes, creencias y conocimientos del profesor, existiendo un amplio consenso en que la comprensión y el dominio de las Matemáticas (o conocimiento de la materia específica) constituye una componente necesaria, junto al conocimiento de contenido pedagógico y al conocimiento curricular, del conocimiento profesional del maestro de Primaria o del profesor de Matemáticas (Shulman, 1986), (Rico y Gutierrez, 1994). Del mismo modo se manifiestan los autores:

- Bromme y Brophy (1986), que hablan del conocimiento teórico y el conocimiento profesional o práctico. El primero se refiere a las Matemáticas como disciplina, como producto històrico, como parte de la cultura y como parte del currículo escolar.

- Lappan y Theulen Lubinski (1994), que a la luz de los Professional Standards for Teaching Mathematics (NCTM, 1991), también identifican el conocimientos de Matemáticas como uno de los pilares básicos de la formación de docentes.

- Bromme (1988, 1994) explicita y diferencia el análisis que hace Shulmann definiendo lo que denomina una “topología del conocimiento profesional de los profesores” en la que ocupan un lugar destacado el conocimiento del contenido de las matemáticas como disciplina.

- Llinares (2009), revisando la literatura existente, considera que el conocimiento de y sobre las Matemáticas, sobre la actividad matemática y sobre el currículum matemático constituyen partes importantes del conocimiento de los profesores.

La cuestión central se traslada entonces al debate acerca del tipo de conocimiento matemático que se debe proporcionar en los planes de formación. Por ejemplo, Fennema y Loef (1992) aseguran que el profesor deberá tener un entendimiento conceptual de las Matemáticas cifrado en dos constructos importantes: la naturaleza de las Matemáticas en sí misma y la organización mental del conocimiento matemático.

El conocimiento de cómo las Matemáticas deben ser presentadas en la enseñanza requiere tomar una materia compleja y transformarla de modo que pueda ser entendida por los alumnos. Esto distingue a los profesores de Matemáticas de los matemáticos profesionales (investigadores); estos deben crear nuevos conocimientos de la disciplina mientras que los profesores deben fomentar la comprensión en la mente del alumno, lo que requiere, evidentemente, procesos formativos distintos.

En consecuencia, parece plausible que para facilitar el aprendizaje comprensivo el profesor debe saber transformar/presentar las Matemáticas bajo formas sencillas, asequibles y conectadas con conocimientos y situaciones conocidas para que los estudiantes puedan ver la relación entre lo que conocen y el nuevo conocimiento que deben adquirir. Para ello, es necesario tener un dominio del contenido que incluye un alto nivel de comprensión del mismo.

Pero nuestro interés no se centra todavía en la formación matemática que hay que planificar para los futuros docentes ni en cómo debe ser dicha formación, sino en la formación matemática con la que estos llegan a la universidad, lo que remite directamente a los alumnos para maestros de Educación Primaria, sobre los que se han realizado estudios que indican que la formación matemática con la que acceden a la Universidad es insuficiente y con grandes lagunas en la comprensión de nociones elementales (García; Escudero; Llinares y Sánchez, 1994); (Llinares y Sánchez, 1990; Carrillo y Contreras, 1993); Forner (1993, 1995); Fortes, A. (1995); (Palarea; Hernández; Socas, 2001).

La comprensión del conocimiento matemático: algunos antecedentes y cuestiones abiertas

Durante las últimas décadas la preocupación por el estudio de la comprensión se ha generalizado en el ámbito de la Educación Matemática, al reconocerse, de forma mayoritaria, la conveniencia de garantizar entre los alumnos un aprendizaje comprensivo de las matemáticas (Hiebert et al., 1997; NCTM, 2000), principalmente porque aporta privilegios y ventajas intelectuales, reduce las dificultades derivadas del carácter jerárquico de la propia disciplina matemática, proporciona experiencias satisfactorias que fomentan actitudes favorables hacia las matemáticas, apoya la autonomía en el aprendizaje futuro, permite adaptarse a las condiciones de un entorno tecnológico cada vez más desarrollado y complejo y propicia el uso flexible del conocimiento ante nuevos tipos de problemas en contextos diversos (Byers y Erlwanger, 1985; Carpenter y Lherer, 1999; NCTM, 2000; Rico, 1997), entre otras razones.

Pero el fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático es complejo por su carácter multidimensional, lo que ha dado y da lugar a estudios que tratan de aproximarse a la comprensión matemática a través de diferentes dimensiones (Gallardo, González, Quispe, 2008a, 2008b) como es el caso de:

- la naturaleza de la comprensión como actividad cognitiva ligada a las representaciones internas y sus conexiones con el conocimiento matemático (Goldin, 2002; Hiebert & Carpenter, 1992; Romero, 2000).
- los factores que inciden en el fenómeno, como las capacidades cognitivas del sujeto, la especificidad del objeto de comprensión o las características del medio, entre otros (Godino, 2000; Sierpinska, 1994).
- la comprensión como fenómeno dinámico que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter & Lehrer, 1999); (Kieren, Pirie & Calvert, 1999; Pirie & Kieren, 1989, 1994); o el modelo evolutivo de Koyama (1993, 1997, 2000).
- Los efectos internos y externos asociados (Duffin and Simpson, 1997; 2000).

Junto al análisis específico de las distintas dimensiones se han desarrollado estudios que vinculan la comprensión con otros aspectos cognitivos, tales como los trabajos de Byers y Erlwanger (1985), donde se vincula con el aprendizaje y la memoria, Godino y Batanero (1994) en relación con el significado de los objetos matemáticos o Bender (1996) cuando asume imagen y comprensión como modos de pensamiento distintos aunque estrechamente relacionados.

Lo que es indudable es la estrecha relación existente entre la evaluación y la investigación sobre la comprensión del conocimiento matemático. Entre las principales contribuciones se encuentran aquéllas que tratan de evaluar teniendo en cuenta las representaciones y las conexiones internas del conocimiento matemático (Barmby, Harries, Higgins, & Suggate, 2007; Hiebert & Carpenter, 1992), la aparición de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1990, 1994) o los significados institucionales (Godino & Batanero, 1994). También son de destacar las aproximaciones que tratan de elaborar perfiles de comprensión (Pirie & Kieren, 1994) o estrategias y procedimientos de evaluación basados en diferentes aspectos, como es el caso del análisis semántico y estructural de Niemi (1996), el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos (Godino, 2002a, 2002b) o, más recientemente, el análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático desarrollado y aplicado en Gallardo y González (2006).

Por otra parte, en la mayoría de las aproximaciones y estudios se llega a reconocer la naturaleza interpretativa de la valoración de la comprensión (Morgan y Watson, 2002), de tal manera que la interpretación se sitúa en la base de las cuestiones fundamentales que atañen al estudio de la comprensión del conocimiento matemático (Gallardo y González, 2007). Como consecuencia, es obligado conceder un papel relevante a los distintos aspectos involucrados, como son la naturaleza de las situaciones matemáticas a emplear, las componentes que configuran los escenarios donde transcurre la interpretación, los rastros que revelan la comprensión y la caracterización de la comprensión y los usos del conocimiento matemático en base a los rastros encontrados.

Se distinguen tres orientaciones básicas en la consideración y el tratamiento de la interpretación en matemáticas: cognitiva, semiótica y hermenéutica. En la *orientación cognitiva*, se concibe la comprensión matemática como un fenómeno cognitivo y, por tanto, no observable directamente; la interpretación se realiza accediendo a realidades cognitivas internas con ayuda de la observación de realizaciones sensibles objetivadas (Duffin y Simpson, 2000) al amparo de supuestos teóricos sobre la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo visible (Koyama, 1993). En esta orientación se pueden situar trabajos del conocido *enfoque representacional*, que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002). Las principales dificultades operativas en este enfoque están relacionadas con la transición entre los ámbitos externo e interno de la comprensión junto con los propios rasgos mentales de la misma.

La *orientación semiótica* es una variante alternativa que presenta la comprensión como una capacidad esencial o competencia del alumno que se traduce en prácticas sociales interpretables públicamente (Font, Godino y D'Amore, 2007); (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). La interpretación se circunscribe al espacio exclusivo de la actividad matemática visible y del uso que en ella se hace de los sistemas de signos matemáticos mediante la aplicación de un modelo de análisis estructural de inspiración lingüística. Las posibles fronteras de la orientación semiótica las situamos en la suspensión de las referencias externas sobre las que se proyectan los registros semióticos, en la omisión del texto como *unidad* global de reflexión semiótica y en la problemática relación entre el signo hablado y el signo escrito.

En el *enfoque hermenéutico* la interpretación (Gadamer, 2000), constituye el núcleo y el requisito básico para la identificación y caracterización de la comprensión (Brown, 1996, 2001). En esta orientación, el registro observable generado durante la actividad matemática y su "contextualización" (respuestas matemáticas escritas, transcripciones de diálogos, acciones grabadas en vídeo, etc.) es la fuente principal de la expresión visible de la comprensión de acuerdo con Ricœur (2002). Este tercer enfoque constituye una parte importante del modelo para la interpretación de la comprensión matemática propuesto por Gallardo, González y Quispe (2008a, 2008b), si bien, como se puede apreciar más adelante, el enfoque hermenéutico se completa con la interpretación del individuo sobre sus propias producciones como cierre de lo que denominamos "círculo interpretativo".

Modelo operativo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático

Las tres orientaciones mencionadas, cuyas principales características se analizan en Gallardo, González y Quispe (2008b), presentan numerosas limitaciones y cuestiones abiertas (Gallardo, González, 2007) en torno a *las dimensiones de la comprensión, al grado de profundidad y extensión en el estudio, a las características de la interpretación y a su idoneidad, al papel de cada una de las aproximaciones y al dilema metodológico que se plantea.*

Sin embargo, las tres orientaciones no tienen porqué ser excluyentes. Creemos que se pueden establecer vínculos dialécticos entre ellas con una clara intención integradora, como se puede apreciar en el modelo operativo que se expone más adelante propuesto por Gallardo y colaboradores (Gallardo, González, & Quispe, 2008a, 2008b; Gallardo, González, & Quintanilla, 2010). En dicho modelo se introduce un punto de vista extendido de la interpretación en el que los tres enfoques intervienen de forma complementaria en diferentes fases de la misma propuesta interpretativa: primero se trabaja en el nivel cognitivo, reconociendo abiertamente que la comprensión matemática es un fenómeno mental de carácter cognitivo, a continuación se pasa al nivel semiótico, en el que se analiza la actividad matemática mostrada en el registro escrito, finalmente se traslada la reflexión a un nivel fenómeno-epistemológico que nos permite volver a la comprensión del sujeto a través de los usos del conocimiento matemático (conexión triádica cognitivo-semiotico-hermeneutica). Pero veamos a continuación en qué consiste.

El análisis de la información descrita y los diferentes estudios realizados dentro de la línea de investigación (Gallardo, González y colaboradores, 2002-2011) han permitido configurar un modelo operativo para la interpretación y el estudio de la comprensión basado en:

a).- una *concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático* y su valoración basada en la imposibilidad del acceso directo a la misma y en el papel relevante que desempeña el uso del conocimiento matemático;

- el uso intencional del conocimiento matemático, como forma de acción observable e interpretable, da cuenta de su comprensión;

- un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico; lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza para elaborar y emitir voluntariamente una respuesta adaptada a una situación, proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende;

b).- una *concepción analítica del conocimiento matemático* basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de situaciones y categorías a que dichas estructuras dan lugar;

La estructura epistemológica incluye, entre otros componentes: representaciones, conocimientos constituyentes, relaciones, significados.

La estructura fenomenológica incluye diferente tipos de situaciones en función de los usos del conocimiento (aplicación exclusiva o no exclusiva, entre otras).

c).- Un método o *proceso secuenciado* articulado en torno a dos dimensiones:

c.1).- dimensión *fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio mediante un procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006b) para determinar situaciones problemáticas, configurar los instrumentos de recogida de datos y realizar un primer análisis macroscópico de los resultados:

1. Análisis Didáctico (González, 1998, Gallardo y González, 2006a);

2. delimitación del conjunto genérico de situaciones

3. estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto genérico de situaciones. Criterios de clasificación y categorías de situaciones

4. selección de tareas y elaboración de instrumentos

5. análisis de resultados y primeras conclusiones

c.2).- dimensión *hermenéutica*, en la que se analiza la información en profundidad y se completan los resultados y conclusiones con estudios puntuales:

1. delimitación del escenario básico de valoración (fases o situaciones distintas del proceso de enseñanza y aprendizaje, agentes intérpretes y objeto de interpretación);

2. proceso secuenciado, círculo interpretativo o método hermenéutico (esquema 1), cuyas principales actuaciones son:

- determinación de rastros de comprensión matemática en el registro escrito

- caracterización de los usos del conocimiento matemático

- participación del sujeto como cierre del procedimiento

Con las siguientes pautas metodológicas:

Previo al episodio de interpretación: selección de las tareas matemáticas y configuración del escenario básico.

Durante el episodio de interpretación: garantizar la textualización y el registro.

Después del episodio de interpretación (a) identificar y validar los rastros de comprensión matemática diseminados a lo largo del registro escrito; (b) revelar en estos rastros los usos dados al conocimiento matemático.

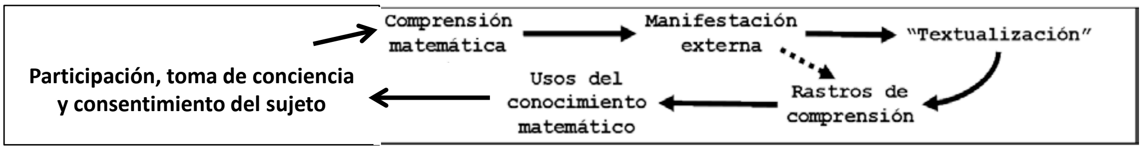


Figura 1.- Círculo interpretativo

En lo que sigue se describen los diferentes aspectos abordados en la aplicación del modelo al problema específico del estudio.

Análisis fenómeno epistemológico del sistema de numeración decimal. Categorías de tareas

De acuerdo con el modelo descrito en el apartado anterior y completando el estudio previo realizado (Ortiz, 1999), se obtiene la estructura del conjunto de situaciones en las que el sistema de numeración participa de forma exclusiva o destacada. El cuadro de la figura 2 sintetiza las categorías y niveles que se describen a continuación.

Categorías epistemológicas (niveles de comprensión):

Nivel técnico o de reproducción:

- Conoce el sistema de numeración como herramienta, sin dominar los principios y las ideas que le dan significado.

- Utiliza el número para operar, comparar, ordenar o es capaz de realizar traducciones, pero no necesita de la descomposición en partes, ni el empleo de la estructura propia del sistema de numeración.

- resuelve tareas relacionadas con el dominio técnico del instrumento y sus aplicaciones elementales en tareas rutinarias tales como:

-Identificación de los diferentes órdenes.

-Lectura y escritura de números.

-Cuantificación en diferentes contextos.

-Ordenación y comparaciones aditivas de cantidades.

-Dominio instrumental de los algoritmos de las operaciones elementales.

Nivel analítico:

- utiliza el número y la estructura del sistema de numeración decimal, aunque no es competente o tiene dificultades en la traslación a sistemas de numeración isomorfos con diferente base.

- domina el instrumento con conocimiento significativo del mismo, se es consciente de los principios que caracterizan al sistema de numeración y esto permite dar significación a otras entidades matemáticas. Resolverán tareas como:

-Traducciones entre diversos sistemas numéricos (icónicos, desarrollos polinómicos, etc.)

-Ordenación y comparaciones aditivas de cantidades.

-Cálculo mental y estimado.

-Dominio significativo de los algoritmos.

-Utiliza las herramientas anteriores para modelizar y resolver problemas en situaciones no rutinarias (nuevas), vale decir, en verdaderos problemas.

-Nivel sintético: La representación numérica pasa de útil a objeto de reflexión y, por tanto:

-En éste la representación numérica se constituye en objeto de conocimiento y por ello se generalizan sus propiedades y principios a otros sistemas equivalentes. Resolverán tareas como:

-Traducciones entre diferentes sistemas posicionales.

-Identificación/obtención de patrones y regularidades: criterios de divisibilidad, etc.

-Cuantificación en sistemas de diferentes bases.

-Algoritmos en distintas bases

Dentro de este nivel distinguiremos dos subniveles:

-Sintético I : generalización a sistemas equivalentes en bases determinadas.

-Sintético II : generalización a sistemas equivalentes en bases indeterminadas.

Nivel formal:

-Supone la culminación del proceso de construcción de la representación numérica. El individuo formaliza sus conocimientos generando teorías, proponiendo y demostrando teoremas, realizando construcciones formales, etc. Supone el nivel de experto.

-Las situaciones que incluiremos en este nivel son de máxima dificultad, pues su resolución supondrá la capacidad de realizar razonamientos formales, comprobaciones, demostraciones, etc.

-Supondrá cuantificar, ordenar, comparar y operar sobre números expresados en sistemas de numeración en una base indeterminada.

Categorías fenomenológicas son las situaciones de aplicación de la numeración siguientes:

-Situaciones relacionadas con el conocimiento de la numeración. (N)

-Situaciones de traducción entre el sistema cifrado, el sistema oral y el sistema ordinal. (T)

-Cuantificación y medida. (C)

-Situaciones de comparación y orden. (O)

-Operaciones y algoritmos elementales. (A)

Estructura del cuestionario y distribución de tareas

Las categorías y los tipos de situaciones descritas se han agrupado en cuatro partes homogéneas para la selección de tareas y la construcción del instrumento de recogida de datos (figura 2): **la primera parte**, formada por situaciones de reproducción (traducciones entre los sistemas de numeración hablado (con letras) y escrito (cifrado), órdenes de unidades y orden numérico; **la segunda parte** está formada por situaciones de análisis tales como: escrituras no habituales, cuestiones relacionadas con el orden y situaciones de comparación numérica. En la **tercera parte** se incluyen cuestiones relacionadas con los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales y en la **cuarta parte** se proponen situaciones relacionadas con la cuantificación y el cálculo con cantidades en agrupamientos diferentes al decimal. En esta última parte las actividades corresponden al nivel sintético del modelo.

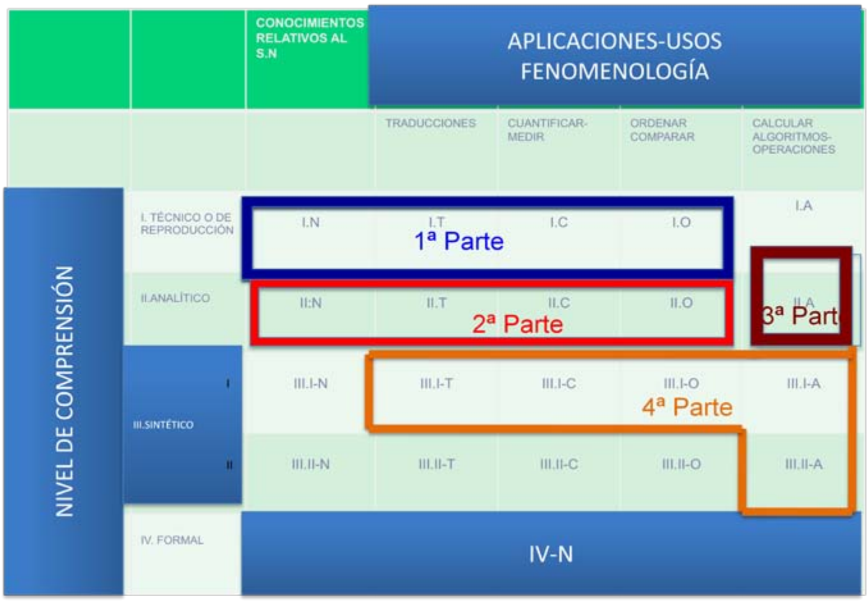


Figura 2.- categorías y niveles de la estructura fenómeno-epistemológica del sistema de numeración decimal y partes del cuestionario

A continuación se describe la distribución de cuestiones en las cuatro partes mencionadas.

Primera parte: Reproducción (I)

Está formada por 6 cuestiones con varias partes cada una, resultando un total de 16 items cuya distribución se ilustra en la figura 4. Con las 2 primeras cuestiones compuestas por los items IT1.1[42], IT1.2, IT2.1 y IT2.2, se proponen traducciones entre los sistemas de numeración "verbal" y "cifrado" incluyendo cantidades con una presencia destacada de ceros, habida cuenta de que esta presencia es generadora de dificultades y abundantes errores. (Orozco y Otálora, 2006).

Las cuestiones 3 y 4, divididas a su vez en los ítems IO3.1, IO3.2, IO3.3, IO3.4, IO4.1 y IO4.2, se refieren a la obtención de los siguientes y anteriores a números propuestos en las dos representaciones numéricas correspondiendo a la categoría fenomenológica de ordenar y comparar.

En las preguntas 5 y 6, compuestas por los ítems del IN5.1 al IN5.4 y los IN6.1 y IN6.2 correspondientes al nivel de reproducción y al conocimiento del sistema de numeración

[42] la codificación de la tarea IT1.1 indica: nivel (I) o de reproducción, tarea de tipo técnico (T) con el número 1 en el cuestionario (1) y con varios apartados de los que se indica el primero de ellos (.1)

decimal, se propone la identificación de diferentes órdenes de unidades en cantidades escritas en ambos sistemas de representación.

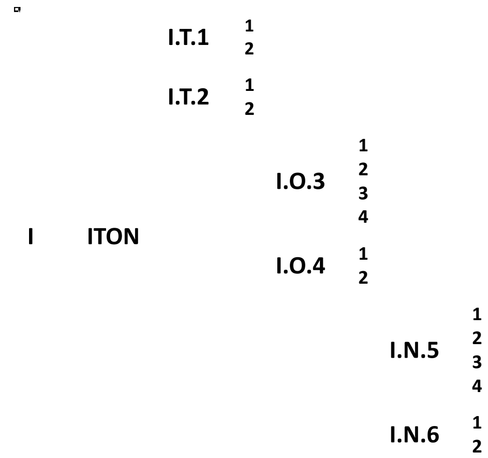


Figura 3.- Distribución de tareas de reproducción

Segunda parte: Análisis 1 (II)

Con los apartados 7, 9, 12 Y 16, compuestos de II.T.7, IIN8.1, IIN8.2, IIN9.1, IIN9.2, IIO12.1, IIO12.2 y IIC16, se presentan cantidades expresadas en la representación verbal y en formas "no habituales" con el propósito de que la expresen en el código de numeración cifrado. En el caso concreto de los ítems que corresponden a la pregunta 12 se les pide además que obtengan el anterior o el siguiente. Todas estas cuestiones las situamos en el nivel analítico de comprensión y corresponden a situaciones de traducciones, de conocimiento del sistema y de comparación y orden. Para los ítems incluidos en este apartado hemos tenido en cuenta la investigación realizada por Salinas M.J. (2007). La cuestión IIN8.1 se ha obtenido de las actividades propuestas en Gómez, B. (1989) y las IIN8.2, IIN9.1 y IIN9.2 del estudio realizado por Aguilar y Martínez (1997).

Con los ítems IIN8.1 y IIN8.2 se pretende conocer el dominio sobre el tamaño de los diferentes órdenes de unidades en la expresión de una determinada cantidad y la diferencia que existe con las cifras que la componen. Para incidir en esta diferencia se proponen las situaciones IIN10 y IIN.11, que corresponden como en los anteriores al nivel de análisis y al conocimiento de la numeración.

Tercera parte: Análisis 2-operaciones aritméticas (II)

Está compuesta por la preguntas 13, 14 y 15 del cuestionario y corresponden al nivel analítico y a aplicaciones del sistema en los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales. La relación es evidente. la comprensión del sistema necesita del conocimiento de las operaciones y los algoritmos suponen una buena oportunidad para profundizar en la construcción del sistema de numeración (Tegiri, F. y Wolman, S (2007). Los 6 ítems que componen las cuestiones de esta parte (IIA13.1, IIA13.2, IIA14.1, IIA14.2, IIA15.1, IIA15.2 y IIA15.3) se han obtenido de la investigación realizada por Salinas M.J. (2003) con estudiantes de Magisterio y se refieren a los algoritmos de la suma, resta y multiplicación. Se eliminaron del cuestionario definitivo las correspondientes a la división por razones de extensión del mismo.

La distribución de las tareas de las partes 2 y 3 se describe en el cuadro de la figura 4.

<u>Cuarta parte: Síntesis (III)</u>

La primera cuestión de esta última sección del cuestionario, IIC.16, supone actuar sobre un sistema de numeración aditivo, en el que se pretende encontrar el número de asteriscos presentes (unidades), incluyendo diferentes símbolos para distintos órdenes de agrupamiento. En esta situación planteada, más que valorar el resultado, nos interesa conocer el proceso seguido que reflejará la identificación de propiedades comunes con nuestro sistema de numeración.

El núcleo de esta última parte está formado por 8 cuestiones que suponen la extensión a representaciones numéricas con agrupamientos distintos del decimal y con agrupamientos indeterminados. Todas las actividades se refieren al mismo contexto real: agrupamientos de bombones en bolsas, paquetes y cajas, utilizando agrupamientos de 8 en 8, de 6 en 6 y de a en a.

<table>
<tr><td rowspan="10">II</td><td rowspan="6">IITON</td><td>II.T.7</td><td colspan="2"></td><td colspan="4" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>II.O.12</td><td>1
2</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="4"></td><td>II.N.8</td><td>1
2</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>II.N.9</td><td>1
2</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.N.10</td></tr>
<tr><td colspan="2">II.N.11</td></tr>
<tr><td rowspan="3">IIA</td><td colspan="5" rowspan="3">Operaciones aritméticas</td><td>II.A.13</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>II.A.14</td></tr>
<tr><td>II.A.15</td></tr>
<tr><td>IIC</td><td colspan="6"></td><td>II.C.16</td></tr>
</table>

Figura 4.- Distribución de las tareas de análisis (segunda y tercera parte)

En el ítem IIIC.17 se plantea la realización de un recuento para realizar un pedido. En los siguientes ítems (18-23) se introduce de forma contextualizada la notación numérica abreviada correspondiente a sistemas de numeración en distintas bases. Se pretende valorar la aplicación a diferentes sistemas de numeración de los principios aditivo, multiplicativo y posicional y las estrategias que se utilizan para realizar las operaciones aritméticas elementales necesarias para resolver las cuestiones planteadas.

Los ítems III.II.A.24.1 y III.II.A.24.2 suponen un paso más en la generalización y una ocasión para valorar la comprensión de los principios que caracterizan al sistema y sus aplicaciones en situaciones operatorias. Constituyen también una buena oportunidad para valorar las estrategias que se ponen en juego en contextos algebraicos.

<table>
<tr><td rowspan="6">III</td><td rowspan="5">III.1</td><td>III.AOT.20</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>III.AOT.21</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>III.I.A.18</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>III.C.17</td></tr>
<tr><td>III.C.19</td></tr>
<tr><td>III.2</td><td></td><td>III.2.A.22</td><td></td></tr>
</table>

Figura 5.- Distribución de las tareas de síntesis (cuarta parte)

Población y muestra

La población objeto de la investigación está compuesta por 420 alumnos del primer curso del grado de Maestro/a de Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga (curso académico 2010-11), distribuidos en 6 grupos, 3 de mañana y 3 de tarde. De la población anterior se ha elegido una muestra intencional de 155 alumnos de 3 de los 6 grupos mencionados. La tabla de la figura 6 refleja la composición de la muestra y las frecuencias correspondientes.

grupo

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	1	49	31,6	31,6	31,6
	2	44	28,4	28,4	60,0
	3	62	40,0	40,0	100,0
	Total	155	100,0	100,0	

Figura 6.- Distribución de la muestra

Desarrollo y resultados

El cuestionario se cumplimentó a finales de mayo del curso 2010-11 en horas de clases y en las aulas ordinarias. Se les explicó a los alumnos el objeto de la investigación y se resaltó la necesidad de conocer sus conocimientos sobre numeración para el futuro desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética. Se les indico que leyeran con detenimiento las cuestiones y que se tomaran máximo interés en resolverlas sin limite de tiempo para su realización[43]. También se les indico que los datos personales así como los resultados del cuestionario serían confidenciales y que su utilización quedaría restringida al desarrollo de la investigación. Además de la que figura en el encabezado del cuestionario, se solicitó información sobre los estudios previos realizados. El 30% de los alumnos que han incorporado dicha información han cursado alguna asignatura de matemáticas en los años de bachillerato, mientras que el 70% restante han cursado un bachillerato o un ciclo superior sin materias de matemáticas.

Una vez finalizada la aplicación de la prueba se procedió a la codificación de respuestas. Se tuvieron en cuenta y se registraron: el tipo de respuesta (correcta, incorrectas y en blanco), los tipos de estrategias utilizadas y los tipos de errores cometidos. Las tablas de datos que figuran en el Anexo 1 se han procesado en el paquete estadístico SPSS para realizar el estudio descriptivo que se aborda en primer lugar y del que se exponen algunos resultados. En segundo lugar se describe una parte del análisis puntual pormenorizado realizado sobre los errores cometidos y las estrategias utilizadas.

Análisis descriptivo global

En las tablas nº 1, 2, 3 y 4 (Anexo 1) se exponen los resultados de las respuestas a los ítems que corresponden a los tres niveles del modelo. Con dichos datos se han obtenido los gráficos de las figuras 7, 8 y 9, en los que se representan los porcentajes de los tipos de respuestas a todos los ítems del cuestionario, y la distribución de la muestra de alumnos por niveles de comprensión.

Porcentajes de tipos de respuestas por ítem.

[43] El tiempo medio empleado en la realización de la prueba fue de 61,5 minutos

En el gráfico de la figura 7 se pueden apreciar tres partes diferenciadas; en primer lugar las correspondientes a las actividades de la primera parte del cuestionario en las que existe un alto porcentaje de respuestas correctas; en segundo lugar las correspondientes a la segunda y tercera parte del cuestionario, donde el porcentaje de acierto fluctúa, con cuestiones con porcentajes altos, otras con porcentajes cercanos al 50% y algunas con porcentajes muy bajos. El último tramo de la gráfica asociado a los ítems del nivel de síntesis refleja la existencia de porcentajes muy bajos con una clara tendencia decreciente.

En el caso de los 16 ítems que hemos situado en el nivel de análisis observamos que solo en 5 de ellos hay porcentajes de respuestas acertadas superiores al 50%, en los ítems IIN9.2 y IIA13.1 los porcentajes están comprendidos entre el 30% y 40% y en los 8 restantes los porcentajes de respuestas consideradas acertadas se sitúan por debajo del 30%; es de destacar el bajo porcentaje (inferior al 10%) de los alumnos que han justificado las cuestiones planteadas sobre el algoritmo de la resta.

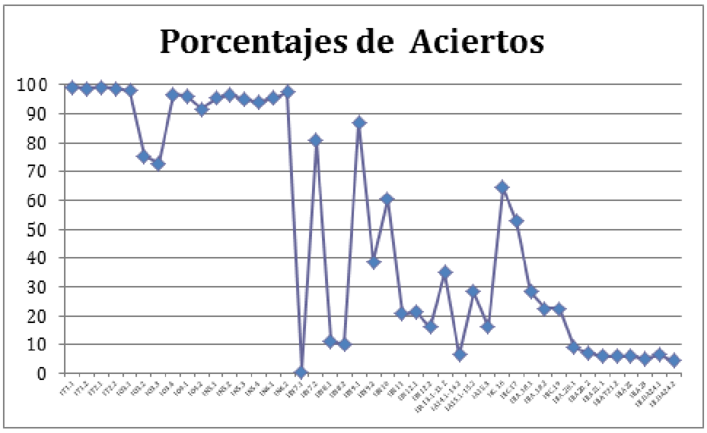


Figura 7.- Porcentajes de respuestas correctas

Si analizamos las respuestas correspondientes a las 11 cuestiones que hemos considerado perteneciente al nivel de síntesis observamos que en tres de ellas los porcentajes están comprendidos entre el 20% y el 30% y en las 8 restantes este porcentaje es inferior al 10%. Es de señalar que en los ítems IIIA18.1-2, aunque los porcentaje de respuestas correctas son superiores, hay un porcentaje importante de alumnos (20%) que responden con la estrategias A18.1 que consideramos perteneciente al nivel de análisis; algo similar ocurre en los ítems IIIA20.1-2, cuyos porcentajes de aciertos son netamente inferiores a los anteriores, donde la estrategia A18.1 es utilizada también, aunque por un porcentaje reducido de alumnos.

Si realizamos un análisis complementario de las cuestiones no completadas o con respuestas "en blanco", vemos (figura 8) que la tendencia es opuesta a la de las correctas. Prácticamente inexistente en la primera parte del cuestionario, con porcentajes bajos, salvo algunas cuestiones puntuales, en la segunda y tercera partes correspondientes al nivel de análisis y con una tendencia claramente ascendente en los ítems de síntesis.

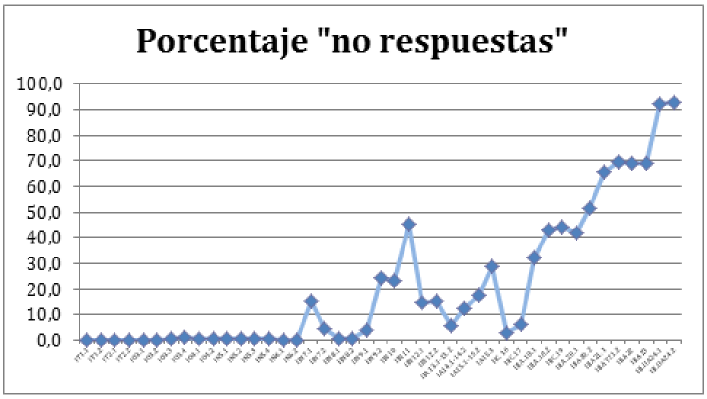


Figura 8.- Porcentajes de respuestas en blanco

Las respuestas consideradas erróneas se pueden observar en la siguiente gráfica, donde se aprecia los muy bajos porcentajes de errores en las cuestiones del nivel de reproducción, salvo en los ítems IO3.2 y IO3.3 donde se acercan al 30%. En los ítems correspondientes al nivel de análisis se aprecian grandes oscilaciones, destacando con los mayores porcentajes de error, superiores al 70% de los alumnos, los ítems IIN7.1, IIN8.1, IIN8.2 y IIA14.2. Los porcentajes de error inferiores y cercanos al 10% corresponden a los IIN7.2 y IIN9.1; el resto fluctúan entre el 20% y el 60%.

Los porcentajes de errores en los ítems del nivel sintético varían entre el 20% y el 50%, salvo en los dos últimos, III.IIA24.1 y III.IIA24.2, donde los porcentajes de errores son casi inexistentes por corresponder con los que mayor índice de "no respuesta".

Figura 9.- Porcentajes de respuestas erróneas

Distribución de alumnos por niveles de comprensión

Empleamos los siguientes criterios para situar el conjunto de respuestas de un alumno en uno de los niveles epistemológicos definidos:

- un alumno se encuentra en el nivel técnico o de reproducción cuando resuelve los ítems relacionados con este nivel y tiene un alto nivel de errores o no contesta en los siguientes niveles.

- un alumno se encuentra en el nivel de análisis cuando resuelve satisfactoriamente las cuestiones técnicas, obtiene un porcentaje alto de aciertos en las del nivel de análisis y sin embargo tiene altos índices de errores o no responde a los ítems correspondientes al nivel de síntesis.

- un alumno se encuentra en el nivel de síntesis cuando responde de forma adecuada a un porcentaje alto de los ítems correspondiente a éste nivel y a los anteriores.

En la tabla 5 (Anexo 1) se incluyen el número de alumnos por intervalos de porcentajes de aciertos sobre el total de ítems en cada uno de los tres niveles epistemológicos considerados. Los gráficos de las figuras 10, 11 y 12 representan cada una de las distribuciones mencionadas; veamos las principales características de cada una de ellas.

Si observamos los porcentajes de respuestas correctas a los ítems correspondientes al nivel I o de reproducción, observamos que la mayoría de los sujetos (120 alumnos que corresponden al 77,5 % de la muestra), responden acertadamente a mas del 90% de los 16 ítems del mencionado nivel.

Figura 10.- Frecuencias absolutas de respuestas al nivel I (Reproducción/Técnico)

En la gráfica de la figura 11 correspondiente al nivel II o de Análisis se aprecia que, a diferencia de lo que ocurre con el nivel de reproducción, los porcentajes de respuestas correctas se distribuyen más homogéneamente a lo largo de los diferentes intervalos. Pero se puede comprobar que un total de 108 alumnos, el 70 % de la muestra, contestan correctamente con porcentajes inferiores al 50% de los ítems de este nivel.

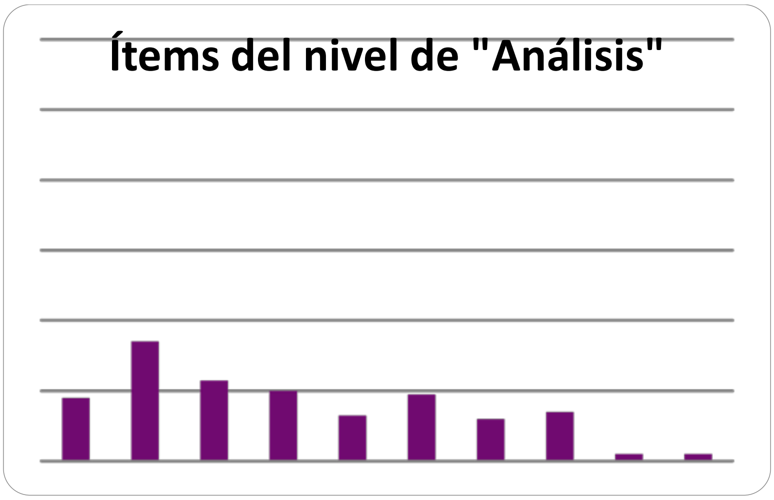


Figura 11.- Frecuencias absolutas de respuestas al nivel II (Análisis)

Examinando las gráficas de las figuras 10 y 11 y teniendo en cuenta los criterios establecidos podemos asegurar que más del 70% de los alumnos de la muestra se encuentran en el nivel de reproducción.

Por último, del análisis de respuestas globales a los ítems del nivel de síntesis se aprecia que 132 alumnos responden con porcentajes inferiores al 30%, concentrándose la mayoría de ellos en el intervalo de porcentajes inferiores al 10%.

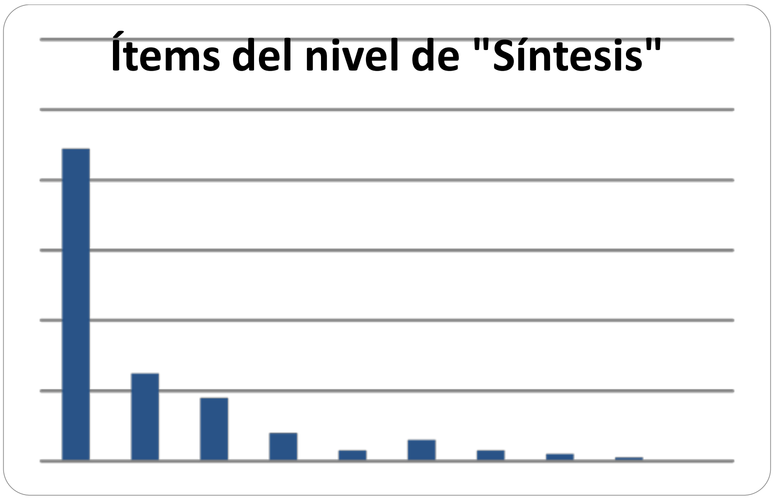


Figura 12.- Frecuencias absolutas de respuestas al nivel III (Síntesis)

Análisis puntual de respuestas, errores y estrategias

Cuestiones correspondiente al nivel de reproducción.

Si analizamos los errores cometidos en los ítems IO3.2 y IO3.3, encontramos algunas respuestas tipo que pueden justificar la dificultad que presentan. En el caso del IO3.2 donde se propone escribir "con letras" el siguiente al número ***ciento cuatro mil noventa* y *nueve***, encontramos los siguientes errores[44]:

- E3.1: 35 alumnos responden que es ***ciento cinco mil***

En cuanto a los errores cometidos en el ítem IO3.3, en el que deben encontrar el anterior al ***ciento diez mil,*** encontramos:

- E3.2: 25 responden que es el ***ciento once*** mil (sin duda responden al siguiente y no al anterior, continuando con lo solicitado en el ítem previo)**,**
- E3.3: 5 contestan ***ciento nueve mil noventa y nueve***
- E3.4: 4 que es el ***ciento noventa y nueve mil.***

También encontramos alumnos que contestan de forma adecuada a ambos ítems, pero necesitan traducir previamente a números con cifras. Esta estrategia y la tipología de respuestas erróneas descritas anteriormente, muestra la dificultad que tiene resolver cuestiones en el sistema de numeración "verbal" con cantidades que incluyen ceros, sobre todo los que tienen un carácter sintáctico frente a los puramente léxicos, y con la obtención

[44] Los errores se codifican mediante la letra E, el número de la tarea y un número de orden

del anterior y el siguiente a un numero en el sistema "verbal" cuando hay que cambiar varias cifras.

Cuestiones correspondiente al nivel de análisis (primera parte).

En la tabla nº 2 (Anexo 1) se exponen los resultados de las respuestas a los ítems correspondientes al nivel de análisis relacionados con conocimientos de la propia numeración (actividades 7,8,9,10,11 y 12). Dadas las diferencias existentes en las respuestas realizaremos un análisis particular de cada uno de los ítems (el cuestionario completo se encuentra en el anexo II).

Item IIN7.1

22 alumnos responden que "no se puede", "no existe", "son cantidades inventadas" o "está mal expresado", respuestas que no se han contabilizado entre las respuestas erróneas porque, efectivamente, la cantidad propuesta no cumple con la sintaxis ordinaria del sistema de numeración. Para la segunda versión del cuestionario se va a cambiar la redacción de esta cuestión para disminuir la apariencia engañosa llamando la atención sobre lo inusual de las expresiones.

A pesar de todo se han producido las respuestas erróneas siguientes:

-E71.1: 11.111, que aparece en 78 cuestionarios, lo que supone mas del 50% del total y un 66% de las respuestas consideradas erróneas.

-E71.2: respuestas del tipo "11000110011" o "11011011", con un total de 30, y que sugieren soluciones en la que se yuxtaponen las cantidades presentes y que será una constante en muchas de las respuestas a las cuestiones planteadas durante el cuestionario.

Item IIN7.2

Aunque el porcentaje de aciertos es muy superior a la cuestión anterior, existen respuestas semejantes, como por ejemplo la de los 9 alumnos que opinan que "son cantidades inventadas", "no existen" o "esta mal expresada".

Item IIN8.1 y IIN8.2

Son pocos los alumnos que diferencian la cifra correspondiente a un determinado orden en un número de la cantidad de unidades de dicho orden contenidas en el mismo. De los 16 que aciertan esta cuestión es de destacar la respuesta de 2 de ellos que precisan hasta el extremo de asegurar que por ejemplo en el numero 8234 existen 82,34 centenas y en el 210004 hay 21,0004 decenas de millar.

Entre las respuestas consideradas erróneas destacamos:

E8.1: que confunden el número de centenas o el de decenas de millar con las cifras de las centenas o las decenas de millar respectivamente. Este error se manifiesta en 118 cuestionarios y corresponden al 76% del total y al 85% de las respuestas erróneas.

<u>Item IIN9.1 y IIN9.2</u>

A pesar de constituir cuestiones con contenidos similares, el hecho de que en la 9.2 aparezcan ordenes superiores a diez hace que se complique sustancialmente la actividad; así, mientras que en la 9.1 la cuestión es superada por el 87,1% en el caso de la 9.2 este porcentaje se reduce al 38,7% y también es muy superior el número de alumnos que dejan sin contestar la 9.2 frente a la 9.1.

Entre las repuestas erróneas destacamos la siguiente:

E9.1: 22 respuestas correspondientes al item IIN9.2 construyen el numero pedido yuxtaponiendo los diferentes órdenes, así por ejemplo la respuesta 7131617 corresponde a este error de yuxtaposición.

<u>Item IIN10</u>

Esta cuestión tiene un numero considerable de respuestas erróneas y en blanco, sólo podemos reseñar como errores frecuentes:

E10.1: los que consideran de partida números de 5 cifras, no atendiendo por tanto a la cuestión planteada; error que se puede adjudicar a la lectura inadecuada del enunciado. Este error aparece de forma recurrente a lo largo del cuestionario.

E10.2: los que consideran las 10 decenas como 10 unidades o 1 decena.

Hay un grupo de respuestas que proponen directamente un numero que no cumple las condiciones sin aportar ningún tipo de argumentación ni operación.

<u>Item IIN11</u>

En éste item es destacable el alto número de respuestas en blanco (45,2 %). Entre los errores cometidos destacamos:

E11: relacionado con el E8.1: por el que 30 alumnos consideran como cifra de las centenas las 16 centenas que contiene el numero y por ello responden que el numero de lotería es el 1698.

Item IIN12.1 y IIN12.2

Ambas cuestiones presentan porcentajes bajos de aciertos, aunque por los resultados podemos considerar mas difícil la 12.2 que la 12.1, quizás porque en la segunda aparecen órdenes mas altos y cantidades de dos cifras. Los errores que destacamos son:

E12.1 relacionado con el E10.1: realizan la traducción a cifras de los números propuestos, sin tener en cuenta que lo que se le solicita es el numero anterior o posterior. El numero de sujetos que responden de esta manera es de 64 en la 12.1 y 51 en l 12.2.

E12.2 relacionado con el E9.1: 6 en el item 12.1 y 15 en el 12.2 se limitan a yuxtaponer los diferentes ordenes y obtienen respuestas del tipo: 130.041 o 134 para la primera y 10.000.024, 10.000.024, 10.000.250 ó 10.000.249 para el item 12.2. Aquí se observa que en algunas de las respuestas también comenten el error E12.1.

Cuestiones correspondiente al nivel de análisis de los algoritmos de las operaciones elementales.

En la tabla nº 3 (Anexo I) se relacionan las frecuencias y porcentajes de aciertos, fracasos y respuestas en blanco a los ítems correspondientes a la tercera parte del cuestionario, que como se indicó anteriormente son cuestiones del nivel de análisis relativas a los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales.

Items IIA13.1-13.2

Hemos realizado un análisis conjunto de ambos ítems porque entendemos que son complementarios y del análisis conjunto podemos valorar el nivel de conocimiento del algoritmo de la adición.

Se han considerado respuestas correctas aquellas que justifican el significado de las llevadas, asociándolas a las decenas y centenas, a pesar, que en algún caso la explicación no quede suficientemente clara. Aquí se echa en falta un estudio más exhaustivo de la cuestión, a través de entrevistas individuales donde se podría incidir más en las respuestas consideradas “dudosas”.

El porcentaje de respuestas acertadas es netamente superior al alcanzado en la investigación de Salinas.M.J. (2007) (20,3%.), quizás debido a que en el estudio de Salinas M.J. todos los alumnos eran de “letras”, mientras que en el presente estudio el 30% de alumnos han cursado alguna asignatura de matemáticas. Sin embargo habría que hacer notar que aquella investigación se realizo sobre alumnos que acababan Magisterio mientras que esta se realiza sobre alumnos que están iniciando los estudios del grado de Primaria.

Registramos las siguientes respuestas erróneas, tipología que concuerda con la detectada en el estudio de Salinas M.J.:

Ea.1: Aplicaciones mecánicas del algoritmo, con respuestas tipos como las siguientes:

- *Como 8+7= son 15, el 1 de la suma del 15, me llevo 1 unidad (*C-2).

- *El uno que me he llevado anteriormente de haber sumado 8+7=15(C-3)*

- *Sumo 1 a la operación, porque el resultado de la anterior es 15(me llevo 1)C-10)).*

Ea.2: Considera decenas en todas las llevadas :

- *Nos llevamos una puesto que 8+7 son 15, al ser un número de mas de una cifra, nos llevamos el numero de decenas y se lo sumamos la siguiente (*Respuesta para el ítems IIA13.1*). Sucede lo mismo que en la situación anterior solo que el resultado en lugar de ser 15 es 11 (*Respuesta para el ítems IIA13.2). (C-13)

- *Pues lo mismo que antes, hemos superado la decena por lo tanto ese numero se pasa a la siguiente suma* (Respuesta para el ítems IIA13.2)(C-15)

Items IIA14.1-14.2

Como en el análisis anterior hemos entendido que el análisis conjunto de ambos ítems nos permitirá valorar el nivel de comprensión del algoritmo de la resta y encontrar los errores conceptuales de los alumnos estudiados. Si los comparamos con los resultados del algoritmo de la adición los resultados son sensiblemente inferiores en cuanto a los porcentajes de acierto y mayor el porcentaje de respuestas en blanco. Lo que nos lleva a confirmar los resultados de la investigación de Salinas M.J. en los que los porcentajes de aciertos suponen una quinta parte de los fallos.

En cuanto a errores podemos destacar los siguientes:

Ea1: aplicación mecánica del algoritmo, con respuestas tipo como la siguiente:

-Porque el numero de arriba es más pequeño que el de abajo (Respuesta a 13.1*). Porque se lleva uno de la resta de los anteriores* (Respuesta a 14.2) (C-53)

-Porque al añadirle valor adicional a ese 2ncondiciona en la siguiente debe sumarle 1 (Respuesta a 14.2) (C-155)

Ea.3, intento de justificar la decena que se toma, pero sin entender como se devuelve a las decenas del sustraendo:

-Porque el numero de arriba debe ser mayor, porque de lo contrario saldría negativo, entonces consideramos que el 2 es un 12 y que el 1 esta en las decenas. (Respuesta a 14.1) *Porque al llegar a 12, te llevas ese 1 que es una decena, que tienes que sumar en las decenas, pero en la fila de abajo*.(Respuesta a 14.2) (C-71)

-Porque al ser más pequeño que el 6 le sumo 10 y me llevo 1 (Respuesta a 14.1). *Porque estás sumando la decena que se le puso al 2 para poder hacer la* resta (Respuesta a 14.2) (C-80)

Items IIA15.1-15.2

Las respuestas a estas cuestiones está muy relacionadas con las del algoritmo de la suma y por ello los porcentajes correspondientes a las tres categorías determinadas son similares.

Los errores cometidos son los siguientes:

Ea.1: en el que la justificación es una aplicación mecánica del algoritmo sin ninguna comprensión:

-Significa que 8x6=48, pero dicho numero no puedes ponerlo entero porque hay mas unidades, con lo cual te lo llevas y se lo sumas a la siguiente cifra (Respuesta a 15.1). Porque 6x5 son 30, mas las 4 que nos llevamos de la cifra anterior equivale a 34 (Respuesta a 15.2) (C-110).

Ea.2: Considera decenas en todas las llevadas: en esta caso para detectar el error, hemos considerado la respuesta a esta cuestión en relación con las correspondiente a los ítems 13.1 y 13.2. Para detectar con mayor precisión este error convendría realizar la pregunta sobre una multiplicación de un orden superior a las decenas. A continuación exponemos alguna respuesta en la que se puede apreciar esta tipología de error:

-*Significa que me llevo 4 decenas del numero colocado en las unidades* (Respuesta a 15.1). *Porque una vez que te llevas una cifra, se suma en la siguiente operación* (Respuesta a 15.2). *El (1) en (b) constituye las decenas del número 12, obtenido anteriormente de la suma 6+5= 11+1 que me llevaba de haber sumado 8+7* (Repuesta a 13.2) (C-98)

<u>Items IIA15.3</u>

Las respuestas consideradas acertadas[45] en este ítem las situamos entre tres tipologías diferentes:

A15.3.1: se refiere directamente a la propiedad distributiva para justificar la cuestión:

-*Porque estamos multiplicando por 26 (20+6) así que, por la propiedad distributiva, multiplicando por 6 y luego por 20 y sumamos resultados (el espacio vacío corresponde a un "0")* (C-11)

A15.3.2: no especifica que están utilizando la propiedad distributiva pero los argumentos que exponen están referidos a ella:

-*Desplazamos una posición a la izquierda asumiendo que el 2 corresponde a las decenas, por lo que es como si multiplicáramos por 20.* (C-92)
Encontramos un tercer tipo de respuestas que aunque podemos considerarlas incompletas, demuestran cierta comprensión:

A15.3.3: los que aseguran que al multiplicar por decenas el resultado son decenas:

-Porque estamos multiplicando unidades por decenas, entonces el resultado nos dará decenas. (C-54).

-Porque el segundo número con el que multiplicamos, es decir, el "2" corresponde a las decenas por lo tanto hay que colocar el resultado a partir de las decenas. (C-126)

Entre las respuestas que hemos considerado erróneas, señalamos los siguientes errores detestados:

Ea.1: en el que la justificación es una aplicación mecánica del algoritmo sin ninguna comprensión:

-Porque cuando son multiplicaciones de dos cifras, ejemplo: <u>**2**</u>6 cuando empiezo a multiplicar con el dos me muevo un espacio (C-67)

[45] Las vamos a considerar como estrategias y les vamos a asignar la letra A seguido del número de la tarea

-Porque es el segundo numero que se multiplica, para que después en la suma es resultado sea correcto.(C-122)

Ea.4: corresponde al intento de dar una explicación del tipo A15.3.3, pero se apoyan de alguna manera en la aplicación mecánica del algoritmo:

-Porque estamos multiplicando con las decenas y hay que correr un lugar hacia la izquierda (C-20).

-Porque el que se multiplica ahora son las decenas y se corre un lugar (C-80)

-Porque ese "2" no es una unidad, sino que es de la decena, por lo tanto hay que colocarlo con la decena. (C.27)

-Porque ese "6" es el resultado de la segunda cifra del número, comenzamos multiplicando por unidades y ahora continuamos con las decenas; por ello hay que colocarlo bajo el número por el que se multiplica. (C-117)

-Porque la en 1ª fila está el resultado del primer numero por el que se ha multiplicado (6), en la segunda la del 2. El 6 va bajo el 4 porque ocupa el lugar de las decenas. (C-34)

-Porque ahora multiplica la decena del denominador (C-38)

-Porque pertenece a las decenas y no a las unidades. (C-7)

-Porque el 2 del multiplicando es decena. Si pusieramos el 6 debajo del ocho, el 2 del multiplicando sería unidad.(C-1)

Ea.4: Aceptación del mecanismo:

-Porque el método lo dice así. (C-155)

-No lo se, me enseñaron eso cuando iba al colegio pero nunca supe el motivo (C-66).

Cuestiones correspondiente al nivel de síntesis

En la tabla incluida en el anexo 1 se incluyen las frecuencias y los porcentajes de aciertos, fallos y respuestas en blanco correspondientes a la cuarta parte del cuestionario (Síntesis: capacidad para aplicar las ideas y los conocimientos sobre el sistema de numeración a otros isomorfos).

El propósito de las cuestiones que constituyen esta parte del cuestionario no es el de valorar los conocimiento que tienen sobre sistemas de numeración en bases distintas a 10, que para muchos alumnos no ha constituido parte del curriculum cursado, sino la posibilidad de ampliar a estas nuevas situaciones contextualizadas, las ideas y estrategias construidas en nuestro sistema de numeración. Lo que nos dará una prueba de la fortaleza con la que se han adquirido estos conocimientos numéricos.

Como veremos más adelante, la inclusión de los sistemas de numeración en bases distintas a 10 en el curriculum estudiado por algunos alumnos, opera de forma negativa en su capacidad para resolver algunas cuestiones planteadas, pues desde un nivel de reproducción intentan recuperar-recordar estrategias memorizadas sin comprensión, resultando técnicas totalmente desafortunadas. El análisis puntual de cada uno de las cuestiones de esta parte arroja los siguientes resultados:

<u>Item IIC16</u>

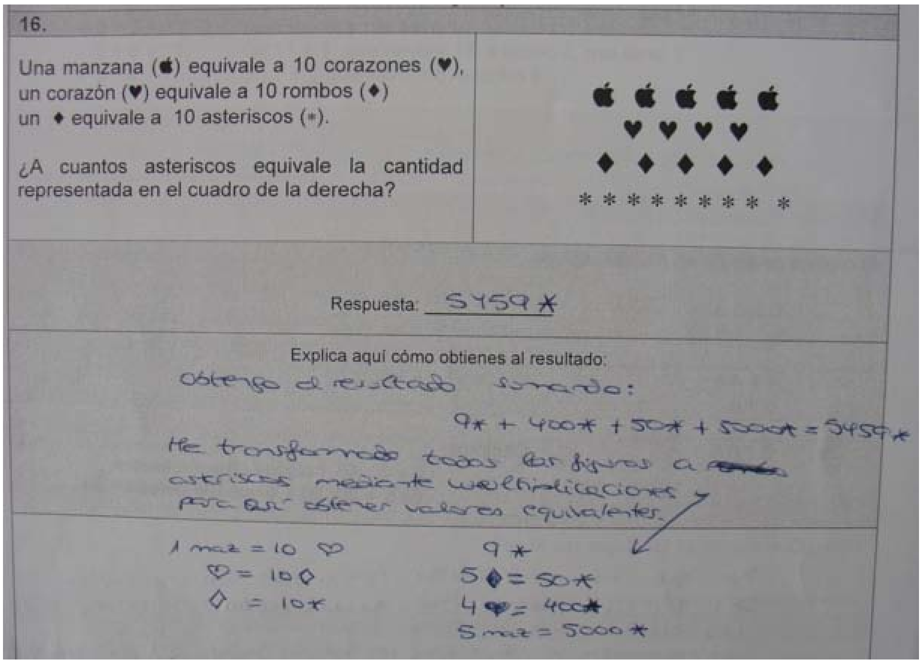
Con la primera cuestión planteada en esta tercera parte se pretende conocer las estrategias utilizadas para realizar la traducción desde un sistema de numeración decimal y aditivo con elementos comunes al nuestro como es la base del agrupamiento.

Para realizar dicho recuento, hemos observado tres estrategias diferentes que denotan diferentes grados de dominio de las propiedades que caracterizan nuestro sistema de numeración:

A16.1: Resultado de operar el desarrollo polinómico, traducción adecuada para sistemas con base de agrupamientos diferente a 10 (Babilonio):

$5x10^3 +4x10^2 +5x\ 10 +9$

En la siguiente figura se registra una respuesta tipo de esta estrategia (C-108)



16.

Una manzana (🍎) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) un ♦ equivale a 10 asteriscos (*).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?

Respuesta: 5459 *

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Obtengo el resultado sumando:
9* + 400* + 50* + 5000* = 5459*
He transformado todas las figuras a asteriscos mediante multiplicaciones para así obtener valores equivalentes.

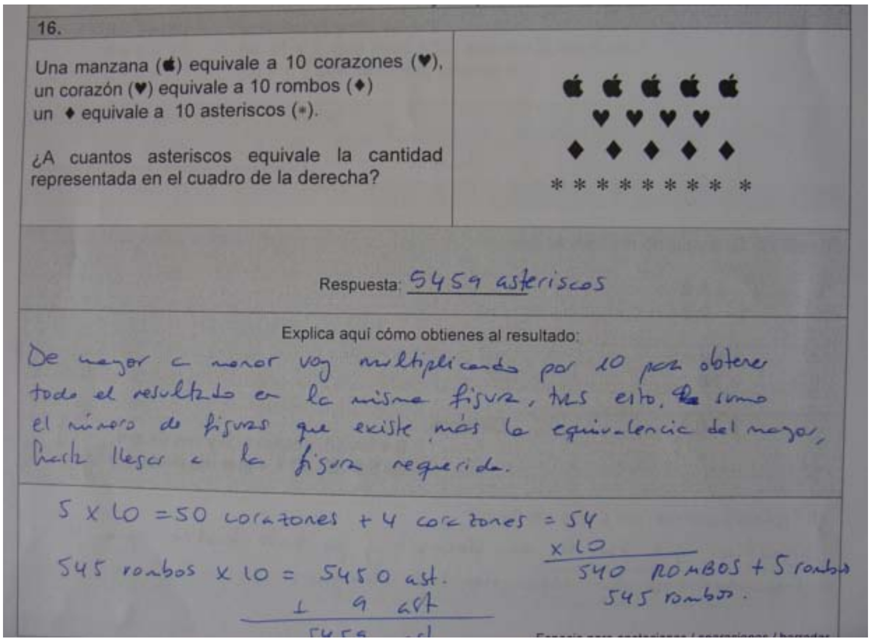
1 manz = 10 ♥
♥ = 10 ♦
♦ = 10 *

9 *
5 ♦ = 50 *
4 ♥ = 400 *
5 manz = 5000 *

A16.2:Variante de la estrategia anterior, en la que se transforma de forma progresiva las unidades de mayor a menor orden, traducción adecuada para sistemas con base de agrupamiento diferente a 10 y además variable (Maya):

[(5x10 +4)x10) +5]x10 +9

En la siguiente figura se registra una respuesta tipo de esta estrategia (C109):



16.

Una manzana (🍎) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) un ♦ equivale a 10 asteriscos (*).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?

Respuesta: 5459 asteriscos

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

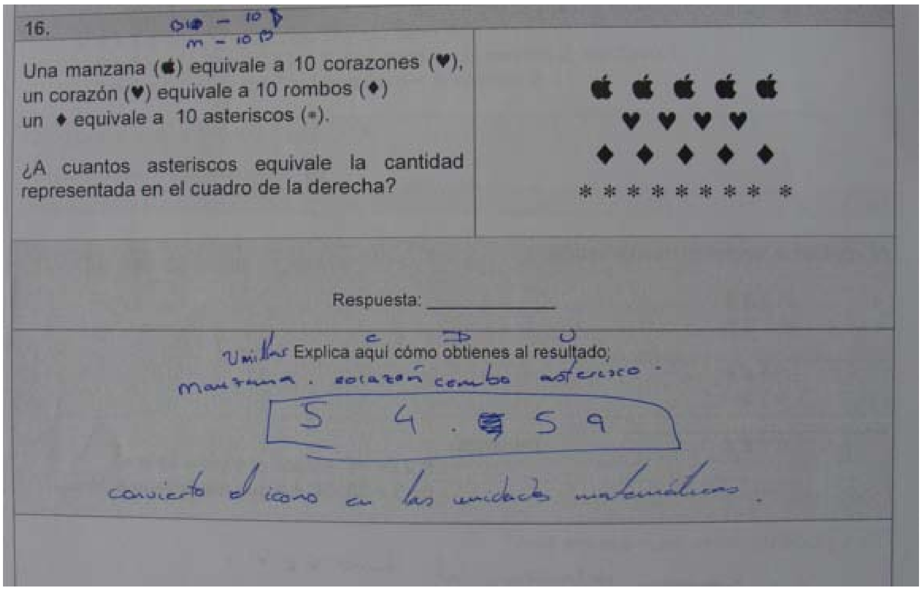
De mayor a menor voy multiplicando por 10 para obtener todo el resultado en la misma figura, tras esto, le sumo el número de figuras que existe más la equivalencia del mayor, hasta llegar a la figura requerida.

5 x 10 = 50 corazones + 4 corazones = 54
x 10
540 rombos + 5 rombos
545 rombos.

545 rombos x 10 = 5450 ast.
+ 9 ast

A16.3: Identificación entre sistemas decimales. En este caso los alumnos que la utilizan reconocen la coincidencia de la base de agrupamiento y dan una respuesta sin necesidad de realizar ninguna operación. A continuación exponemos dos respuestas que corresponden con esta estrategia:

-*Convierto el icono en las unidades matemáticas* (C-41).


16.

Una manzana (🍎) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) un ♦ equivale a 10 asteriscos (*).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?

🍎 🍎 🍎 🍎 🍎
♥ ♥ ♥ ♥
♦ ♦ ♦ ♦ ♦
* * * * * * * * *

Respuesta: ____________

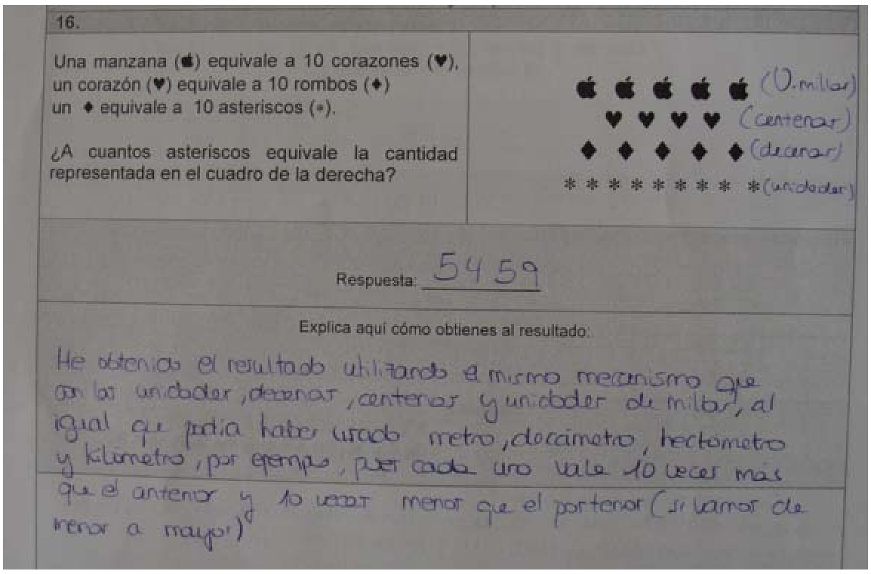
Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Manzana . corazón rombo asterisco .

5 4 . 5 9

Convierto el icono en las unidades matemáticas .

- *He obtenido el resultado utilizando el mecanismo que con las unidades, decenas, centenas y unidades de millar, al igual que podía haber usado metro, decámetro, hectómetro y Kilómetro, por ejemplo, pues cada uno vale 10 veces más que el anterior y 10 veces menos que el posterior (si vamos de menor a mayor)* (C-100).


16.

Una manzana (🍎) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) un ♦ equivale a 10 asteriscos (*).

¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?

🍎 🍎 🍎 🍎 🍎 (U. millar)
♥ ♥ ♥ ♥ (centenas)
♦ ♦ ♦ ♦ ♦ (decenas)
* * * * * * * * * (unidades)

Respuesta: 5459

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

He obtenido el resultado utilizando el mismo mecanismo que con las unidades, decenas, centenas y unidades de millar, al igual que podía haber usado metro, decámetro, hectómetro y kilómetro, por ejemplo, pues cada uno vale 10 veces más que el anterior y 10 veces menor que el posterior (si vamos de menor a mayor)

La siguiente tabla registra las frecuencias y porcentajes de respuestas correctas que corresponden a cada una de las estrategias utilizadas:

Estrategia	Ni	%
A16.1	66	42,6%
A16.2	23	14,8%
A16.3	11	7,1%
	Total: 100	64,5%

Item IIIC.17

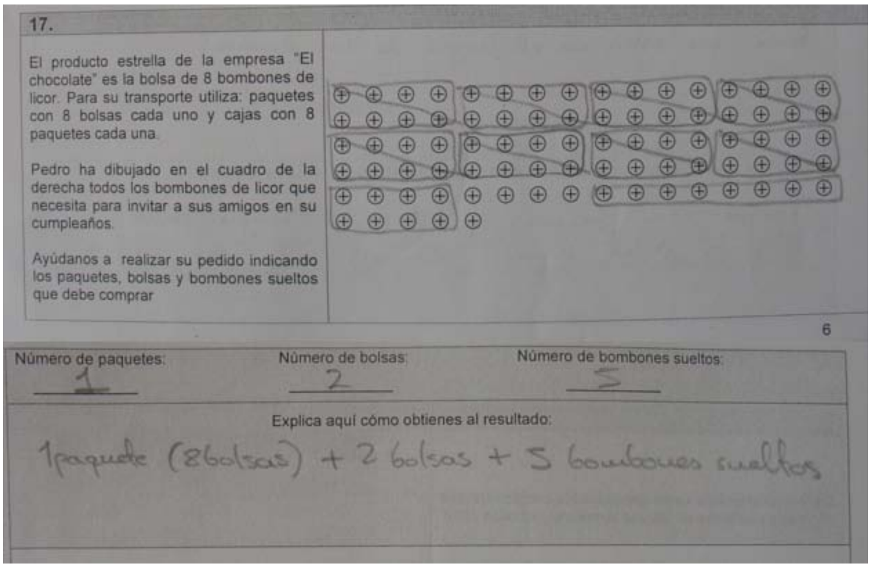
Con este ítem se inicia una serie de cuestiones con la que pretendemos conocer la capacidad para extrapolar a otros sistemas, en los que la base del agrupamiento es distinta, los conocimientos y las estrategias desarrolladas en nuestro sistema de numeración.

Para valorar estas cuestiones hemos considerado un contexto familiar de compras y ventas de bombones, con diferentes tipos de empaquetados y diferentes sistemas de agrupamientos. Inicialmente se considera los agrupamientos de 8 en 8, en bolsas y paquetes y mas adelante se alterna con los agrupamientos de 6 en 6 y finalmente con agrupamientos indeterminados de a en a.

En el primer ítem de esta serie, el IIIC17, la distribución de los bombones en la figura que se le presenta en el cuestionario pretende facilitar los agrupamientos o simplemente el recuento de los mismos. Se han distribuidos en 5 filas completas de 16 (8+8) bombones y una sexta fila de 5 bombones sueltos.

Entre las estrategias utilizadas para resolverla hemos encontrado las siguientes:

A17.1: Señala sobre el dibujo los diferentes agrupamientos de 8 (Bolsas), considerando los agrupamientos facilitadores propuestos en la figura; señala de alguna manera a 8 bolsas para obtener un paquete y deja los bombones sueltos no agrupados (C-123).



17.

El producto estrella de la empresa "El chocolate" es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una.

Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños.

Ayúdanos a realizar su pedido indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar

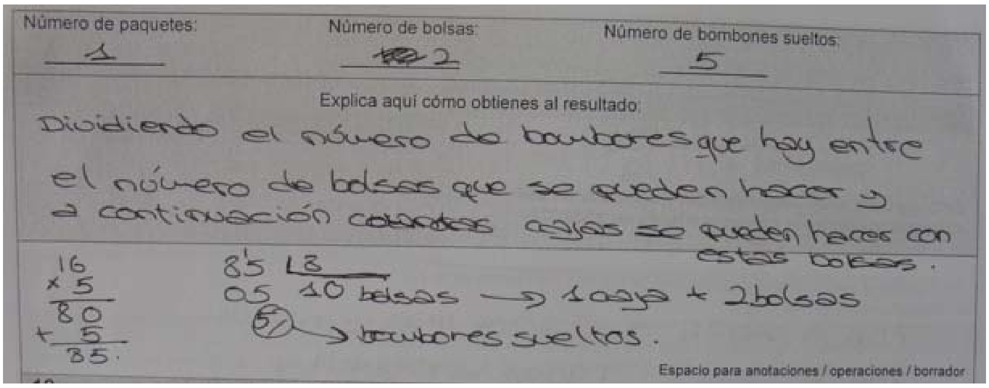
6

Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 2 Número de bombones sueltos: 5

Explica aquí cómo obtienes el resultado:

1paquete (8bolsas) + 2 bolsas + 5 bombones sueltos

A17.2: Es la estrategia A17.1 pero realizada de forma aritmética, dividiendo sucesivamente por 8. Puede ser la estrategia aprendida para realizar los cambios de una base cualquiera a base 10 (C-128).



Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 2 Número de bombones sueltos: 5

Explica aquí cómo obtienes el resultado:

Dividiendo el número de bombones que hay entre el número de bolsas que se pueden hacer y a continuación cuantas cajas se pueden hacer con estas bolsas.

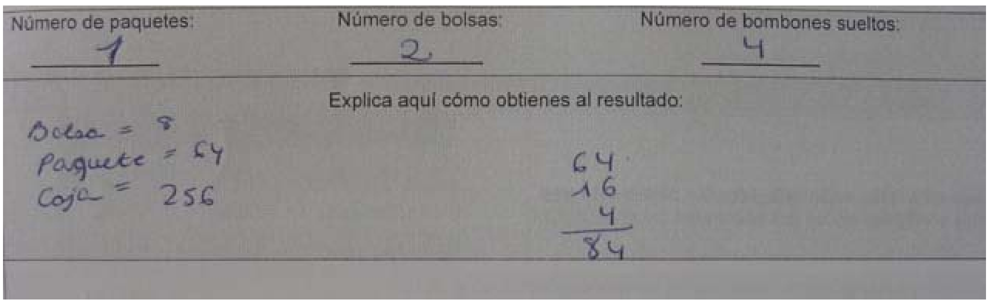
16 × 5 = 80; 80 + 5 = 85

85 ⌊8 — 05 10 bolsas → 1 caja + 2 bolsas

5 → bombones sueltos.

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

A17.3: Estrategia que consiste en agotar las unidades de mayor a menor orden, realizando previamente la equivalencia entre cada uno de los distintos ordenes y las unidades (C-146).



Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 2 Número de bombones sueltos: 4

Explica aquí cómo obtienes el resultado:

Bolsa = 8
Paquete = 64
Caja = 256

64 + 16 + 4 = 84

La distribución en frecuencias y porcentajes de las estrategias utilizadas se encuentran en la tabla siguiente:

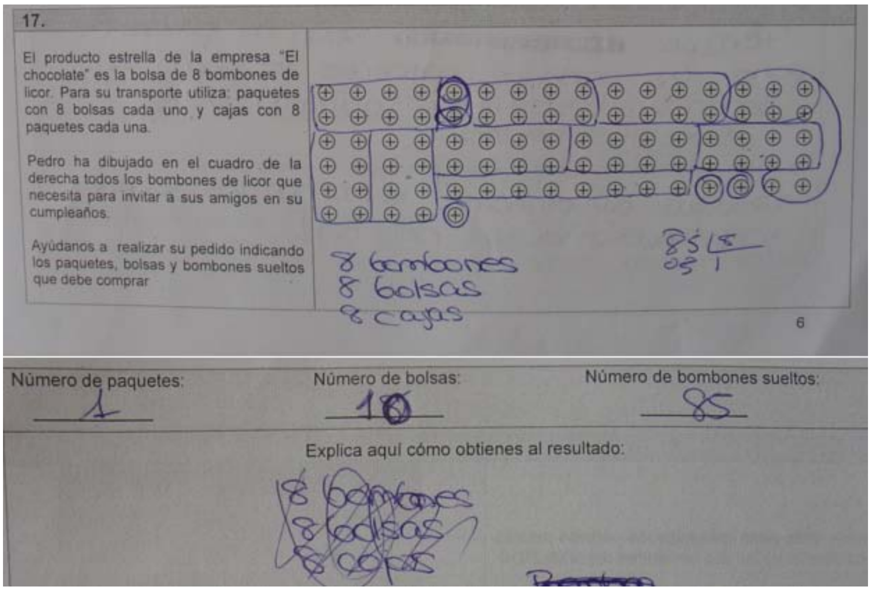
Estrategia	Ni	%
A17.1	42	27,1%
A17.2	20	13%
A17.3	20	13%
	Total: 82	53%

Entre las respuestas que hemos considerado fallidas destacamos la siguiente tipología:

Ec.1: cuenta el total de bombones, los agrupa de 8 en 8 mediante divisiones, pero repite ordenes. En algunos casos supone una aplicación no adecuada del proceso que se enseña para pasar a base 10 y que no se ha aplicado adecuadamente. Así por ejemplo :

-Responde 1 paquete, 10 bolsas y 85 bombones sueltos.(C-8)

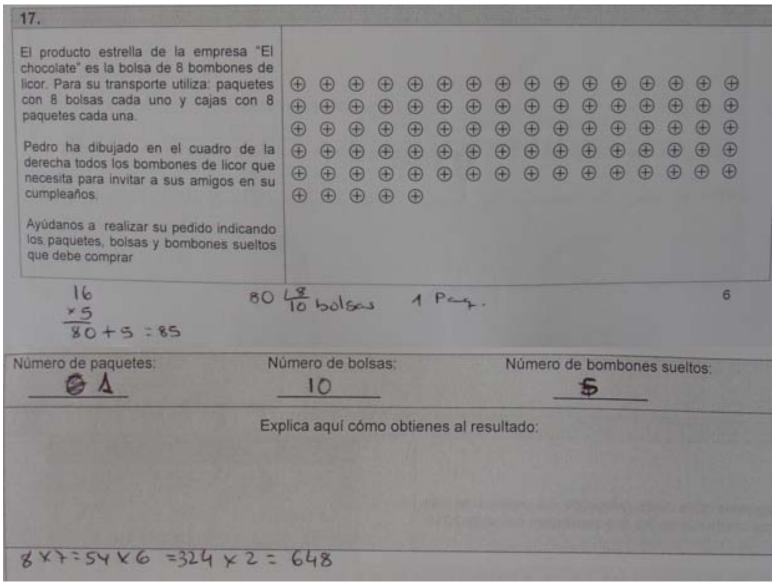
Señala en la figura claramente 10 grupos de 8 (utiliza agrupamientos no coincidentes con las filas de la figura) y a continuación divide 85 entre 8, se equivoca pues obtiene de cociente 1 y de resto 5.



-Responde 1 paquete, 10 bolsas y 5 bombones sueltos. (C-31)

Primero calcula el total de bombones (no utiliza la figura para realizar los agrupamientos): 16x5=80+5=85

Después divide 80 entre 8 y obtiene 10 bolsas y añade a continuación 1 paquete.



17.

El producto estrella de la empresa "El chocolate" es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una.

Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños.

Ayúdanos a realizar su pedido indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar

16
x5
80 + 5 = 85

80 | 8
10 bolsas 1 Paq.

6

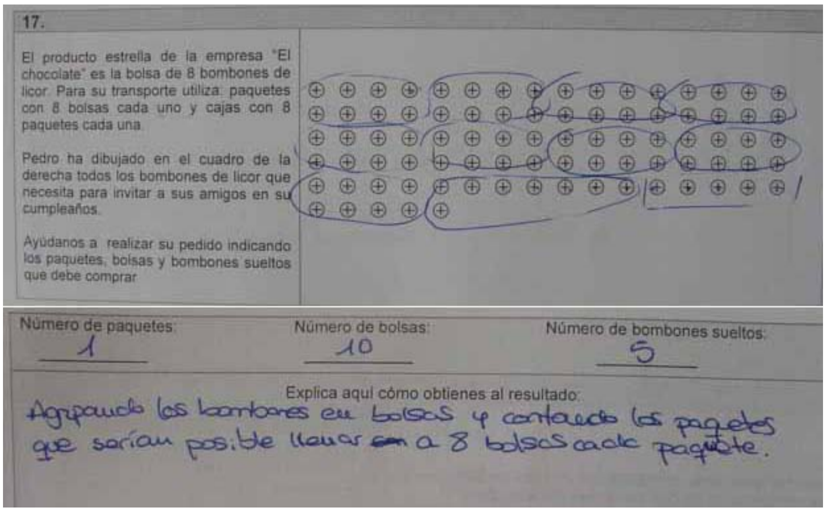
Número de paquetes: 1 | Número de bolsas: 10 | Número de bombones sueltos: 5

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

8 x 7 = 54 x 6 = 324 x 2 = 648

Ec.2: Error idéntico al anterior, en cuanto a resultados, pero donde se actúa sólo con agrupamiento gráficos, sin realizar operaciones.

- Se señalan los 10 agrupamientos (ha tenido en cuenta en cuenta de forma parcial la distribución gráfica facilitadora) y de ello deduce el resultado: 1 paquete, 10 bolsas y 5 bombones sueltos; realiza el siguiente comentario: *Agrupando los bombones en bolsas y colocando los paquetes que serían posible llenar a 8 bolsas cada paquete*. (C-10)



17.

El producto estrella de la empresa "El chocolate" es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una.

Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños.

Ayúdanos a realizar su pedido indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar

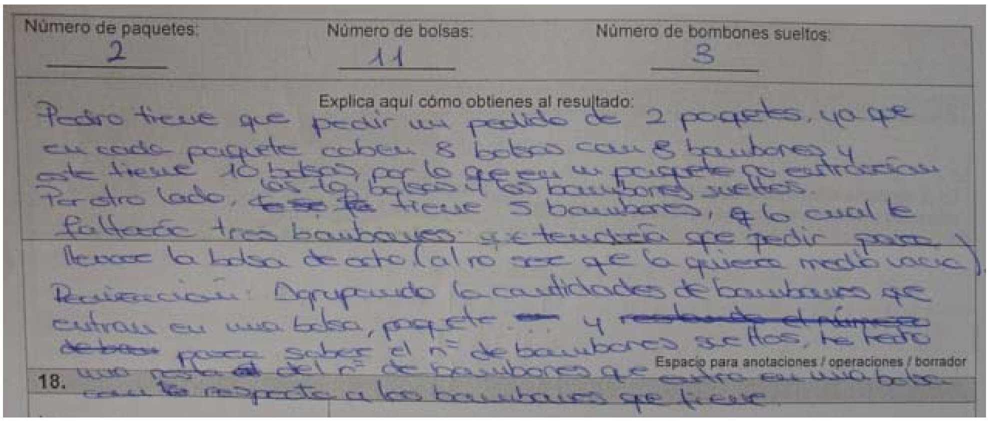
Número de paquetes: 1 | Número de bolsas: 10 | Número de bombones sueltos: 5

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Agrupando los bombones en bolsas y contando los paquetes que serían posible llenar ~~en~~ a 8 bolsas cada paquete.

Ec.3: simplemente los cuenta y responde 85 bombones. (C-74)

Una respuesta curiosa por lo complejo y lo rebuscado del proceso es la del C-106, responde : (2 paquetes, 11 bolsa y 3 bombones), cuenta el total de bolsa 10 y 5 bombones sueltos; pero como parece que pretende realizar los pedidos con paquetes por una parte y bolsas por otra, dice que necesita 2 paquetes (con 1 paquete no tiene suficiente) y para las bolsas responde que necesita 11 (la ultima no estaría completa y por ello dice que pediría 3) y quizás por ello responda en bombones sueltos 3.


Número de paquetes: 2 Número de bolsas: 11 Número de bombones sueltos: 3

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Pedro tiene que pedir un pedido de 2 paquetes, ya que en cada paquete caben 8 bolsas con 8 bombones y este tiene 10 bolsas, por lo que en un paquete no entrarían las 10 bolsas y los bombones sueltos. Por otro lado, ~~ese~~ tiene 5 bombones, a lo cual le faltarán tres bombones que tendría que pedir para llenar la bolsa de esto (al no ser que la quiera medio vacía).

Revisación: Agrupando las cantidades de bombones que entran en una bolsa, paquete y ~~restando el número de bolsas~~ para saber el nº de bombones sueltos, he hecho una resta del nº de bombones que entra en una bolsa con respecto a los bombones que tiene.

18. Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

Item IIIA18.1 y IIIA18.2

En estas actividades propuestas se compaginan dos notaciones, la primera en la que están presentes los diferentes tipos de agrupamientos y en la segunda posicional a la que en el cuestionario hemos denominado abreviada. Para resolverla se tiene que realizar una suma o resta de las dos cantidades de bombones vendidas en los dos años. En el enunciado no se dice nada sobre el formato que deben utilizar para dar el resultado, por tanto no sería necesario obtener el total de bombones sueltos vendidos o los bombones sueltos que representen el incremento producido, sino que podrían operar o bien con los agrupamientos y dar el resultado en los mismos o directamente en la anotación abreviada.

Las estrategias utilizadas para resolverlas son:

A18.1: Transforma las cantidades a base 10 y a continuación operan. Supone obtener el total de bombones sueltos y operar con ellos.

A18.2: Opera en estos agrupamientos y posteriormente pasan a base 10.

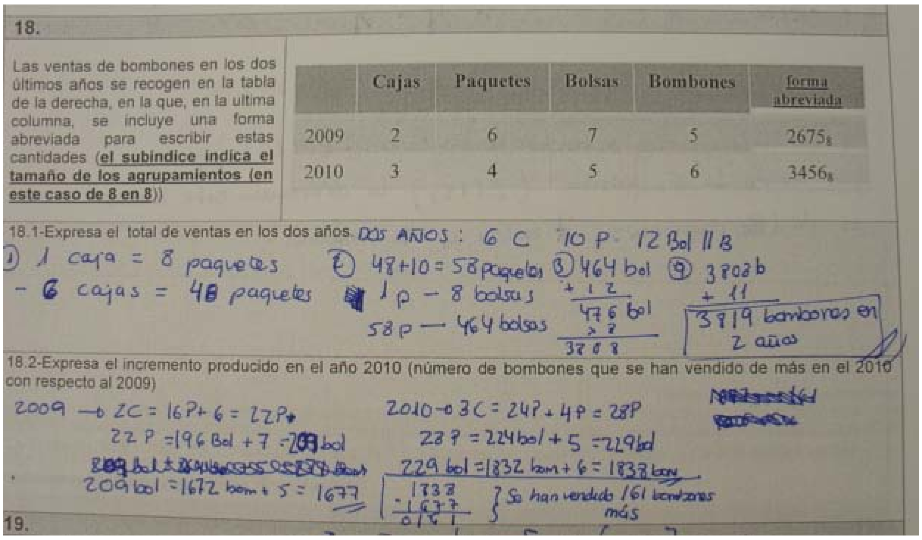
A18.3:Opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados sin realizar trasferencia entre los distintos ordenes y por tanto con cantidades en algunos de ellos superior a la base.

A18.4: Opera en los agrupamientos correspondientes ofreciendo los resultados con transferencias de órdenes.

La primera de las estrategias anteriores suponen una cierta incapacidad para actuar en este nuevo sistema de numeración aplicando estructuras conceptuales semejantes a las utilizadas en el nuestro. En lugar de actuar en este nivel superior de abstracción, traduce al nuestro y opera en este nivel inferior.

El uso de las estrategias A18.2 y A18.3, permite adivinar esta capacidad de operar en un nivel superior de abstracción y por tanto consideraremos que estos alumnos podrían pertenecer al nivel III de síntesis de nuestro modelo. Como veremos a lo largo del análisis de los ítems de esta cuarta parte del cuestionario, nos encontraremos sujetos que están a caballo entre ambos niveles, el II de análisis y el III de síntesis, pues a lo largo del desarrollo del mismo responden con estrategias propias de uno o de otro de forma indistinta.

Un ejemplo de A18.2 lo constituye el C-134 :


18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subindice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años. DOS AÑOS : 6 C 10 P 12 Bol 11 B

1 caja = 8 paquetes
6 cajas = 48 paquetes
48+10 = 58 paquetes
1 p — 8 bolsas
58 p — 464 bolsas
464 bol + 12 = 476 bol
3808 b + 11 = 3819 bombones en 2 años

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)

2009 → 2C = 16P + 6 = 22P
22 P = 196 Bol + 7 = 209 bol
209 bol = 1672 bom + 5 = 1677

2010 → 3C = 24P + 4P = 28P
28 P = 224 bol + 5 = 229 bol
229 bol = 1832 bom + 6 = 1838 bom

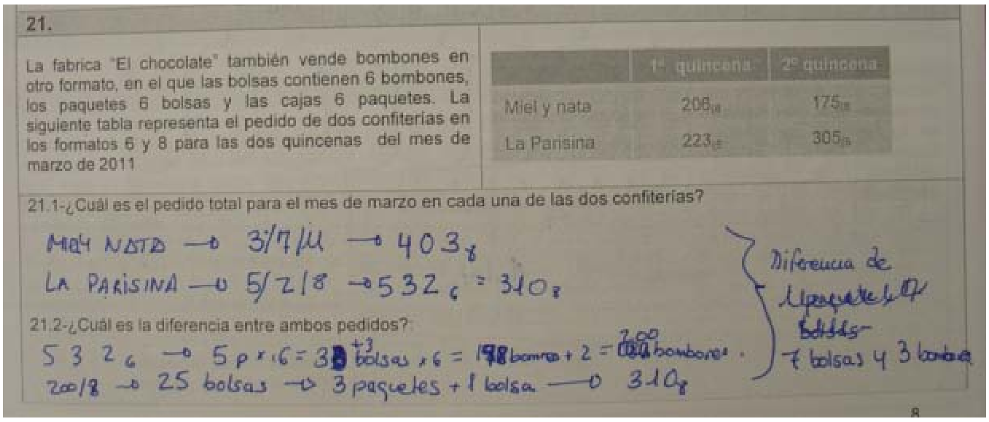
1838 − 1677 = 0161 Se han vendido 161 bombones más

19.

En el IIIA18.1 opera en los agrupamientos 8, sin efectuar trasferencias de ordenes y a continuación traduce a base 10 para obtener el total de bombones sueltos. En cambio en IIIA18.2 no opera en el agrupamiento 8, posiblemente por la dificultades de la sustracción en agrupamientos distintos de 10; traduce las cantidades a base 10 y allí realiza la sustracción.

Es interesante comprobar que esta alumna cuando resuelve los ítems IIIA20.1, IIIA20.2, IIIA21 y IIIA22, va depurando la estrategia y progresivamente realiza trasferencia entre diferentes órdenes para utilizar una notación abreviada óptima:

En este ítem opera cometiendo algún error puesto que realiza llevadas con agrupamientos 10 (En Miel y Nata 7 5 $6_{(8}$ + 2 0 2 $6_{(8}$ = 2 7 8 $2_{(8)}$), al sumar unidades (6 + 6 =12, considera 1 decena que agrupa a las unidades de segundo orden). Pero subsana este error en el IIIA21 y IIIA22:


21.

La fabrica "El chocolate" también vende bombones en otro formato, en el que las bolsas contienen 6 bombones, los paquetes 6 bolsas y las cajas 6 paquetes. La siguiente tabla representa el pedido de dos confiterías en los formatos 6 y 8 para las dos quincenas del mes de marzo de 2011

	1ª quincena	2ª quincena
Miel y nata	$206_{(8}$	$175_{(8}$
La Parisina	$223_{(6}$	$305_{(6}$

21.1-¿Cuál es el pedido total para el mes de marzo en cada una de las dos confiterías?

MIEL NATA → 3/7/11 → 403_8

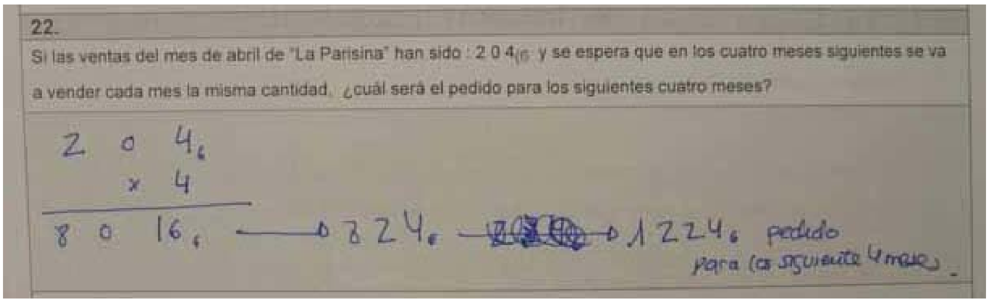
LA PARISINA → 5/2/8 → 532_6 = 310_8

21.2-¿Cuál es la diferencia entre ambos pedidos?

532_6 → 5 p × 6 = 33 bolsas × 6 = 198 bombones + 2 = 200 bombones.

$200/8$ → 25 bolsas → 3 paquetes + 1 bolsa → 310_8

Diferencia de 1 paquete 7 bolsas y 3 bombones


22.

Si las ventas del mes de abril de "La Parisina" han sido : $204_{(6}$ y se espera que en los cuatro meses siguientes se va a vender cada mes la misma cantidad, ¿cuál será el pedido para los siguientes cuatro meses?

204_6
× 4

8 0 16_6 → 824_6 → 1224_6 pedido para los siguientes 4 meses.

En la siguiente tabla reflejamos las frecuencias y los porcentajes de alumnos que utilizan cada una de estas estrategias en los dos ítems considerados.

	IIIA18.1		IIIA18.2	
Estrategia	Ni	%	Ni	%
A18.1	31	20	33	21,3
A18.2	6	3,9	2	1,3
A18.3	3	1,9	-	-
A18.4	4	2,6	-	-
Total	44	28,4	35	22,6

Se aprecia una minima diferencia entre los resultados de las dos cuestiones anteriores en el uso de la estrategia A18.1, pero si es sustancial en cuanto al uso de las estrategias A18.2 y en las A18.3 y A18.4 no utilizadas en el caso del algoritmo de la sustracción en agrupamientos distintos al decimal.

Si realizamos un seguimiento de los alumnos que han utilizado estrategias adecuadas para el ítem IIIA18.1 y sin embargo no han completado con éxito el ítem IIIA18.2 nos encontramos con la siguiente situación:

-De los 6 alumnos que han utilizado la estrategia A18.2, solo 2 mantienen una estrategia semejante para la sustracción (C-100 y C-134), uno cambia a una estrategia que consideraremos errónea consistente en operar como si las cantidades presentadas estuvieran expresadas en agrupamientos de 10 (C-137) y los otros 3 simplemente no realizan el ítem IIIA18.2. (C-19, C-22 y C-62)

-De los 3 alumnos que han optado por la estrategia A18.3, uno no ha realizado el ítem IIIA18.2 (C-47), uno ha resuelto operar como en base 10 (C-77) y el tercero (C-18), ha pretendido continuar con la estrategia pero ha restado el mayor del menor en los distintos ordenes sin atender a las cantidades de las que proceden, cometiendo el error que codificaremos posteriormente como E18.3

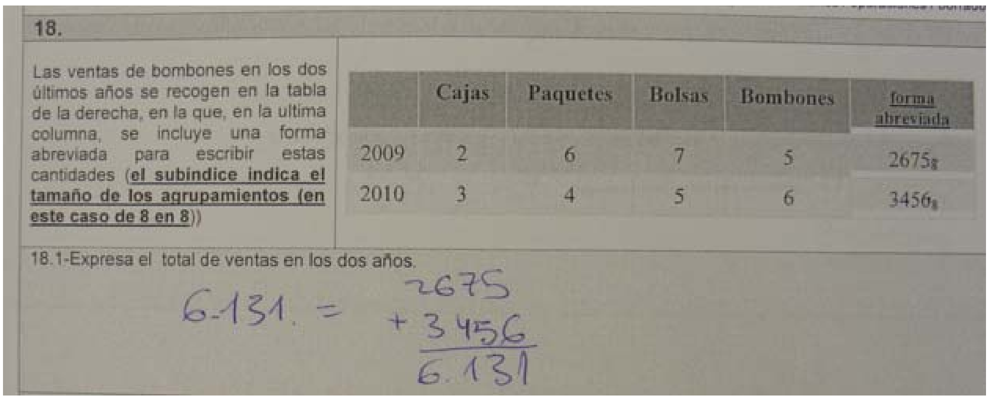
-De los 4 alumnos que utilizaron A18.4, dos cambian y realizan la sustracción en base 10 (C-60 y C-79) y los otros dos no realizan el ítem IIIA18.2 (C-5 y C-17).

Del análisis horizontal anterior podemos concluir las diferencias notables entre la extrapolación que realizan los alumnos a algoritmos de adición y sustracción en bases diferentes a la decimal. Esta diferencia esta apoyada por las diferencias que hemos encontrados en la capacidad para justificar aspectos importantes en los algoritmos de la adición y sustracción (ítems IIA13.1-2 y IIA14.1-2).

Si analizamos por otra parte lo errores cometidos en estos dos ítem, observamos los siguientes:

Ea.4: operan sin tener en cuenta el hecho de que son agrupamientos de 8 en 8, o sea, operan como en nuestro sistema.

-(C-53) Realiza la siguiente operación:



18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8**))

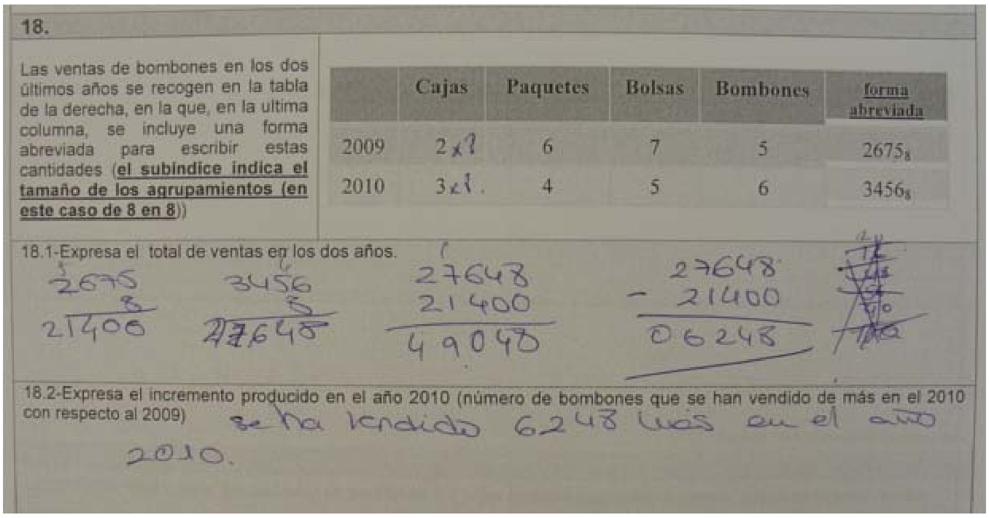
	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

6.131 = 2675 + 3456 = 6.131

Et.1: pretenden pasar a base 10 realizando transformaciones erróneas. Es frecuente en este caso multiplicar la cantidad por la base para obtener cantidades en nuestro sistema.

-(C-16).Realiza las siguientes operaciones:



18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2x1	6	7	5	2675_8
2010	3x1	4	5	6	3456_8

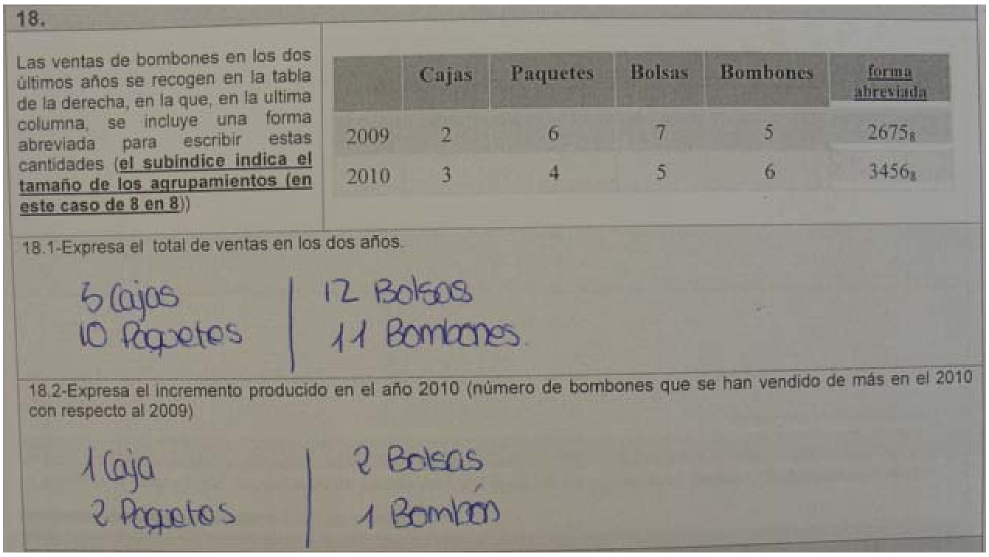
18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

2675 × 8 = 21400   3456 × 8 = 27648   27648 + 21400 = 49048   27648 − 21400 = 06248

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009) se ha vendido 6248 más en el año 2010.

Ea.5: frecuente en sustracciones y consistente en restar siempre del orden mayor el menor, sin atender a las cantidades a las que cada una pertenece.

-(C-18). Da como resultado 1 caja, 2 paquetes, 2 bolsas y 1 bombón.



18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

18.1-Expresa el total de ventas en los dos años.

5 Cajas | 12 Bolsas
10 Paquetes | 11 Bombones.

18.2-Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)

1 Caja | 2 Bolsas
2 Paquetes | 1 Bombón

Esto supone que ha restado 3-2 cajas, 6-4 paquetes, 7-5 bolsas y 6-5 bombones, sin tener en cuenta que en paquetes y bolsas las restas deberían ser 4-6 y 5-7 para ser coherente con las cantidades que se operan.

<u>Item IIIC.19</u>

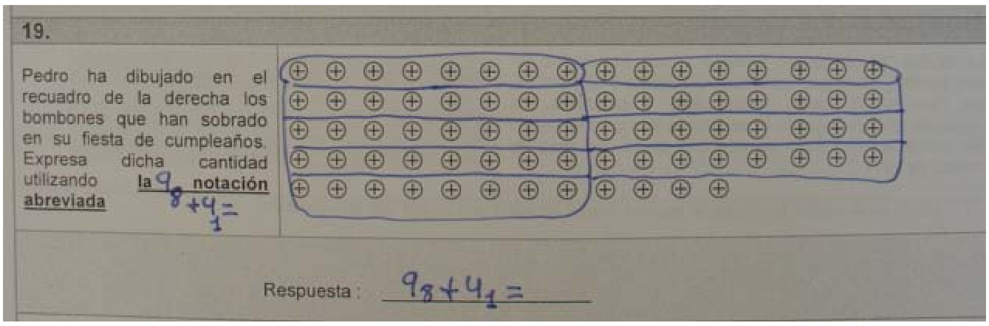
Este ítem es una actividad semejante a la realizada en el IIC17, con la diferencia que aquí se le requiere que expresen la cantidad resultante en la notación abreviada, utilizada en las dos actividades anteriores. Esta diferencia en el enunciado ha causado un número importante de renuncias; mientras que en la IIC17 sólo el 6,5% de los alumnos dejaron la respuesta en blanco en el caso de este ítem el porcentaje de repuestas sin contestar se eleva a un 43,9 % del total de la muestra.

Las estrategias utilizadas para realizar esta cuestión son semejantes a las de la IIC17. En la tabla siguiente mostramos la frecuencia y los porcentajes de las respuestas correctas encontradas.

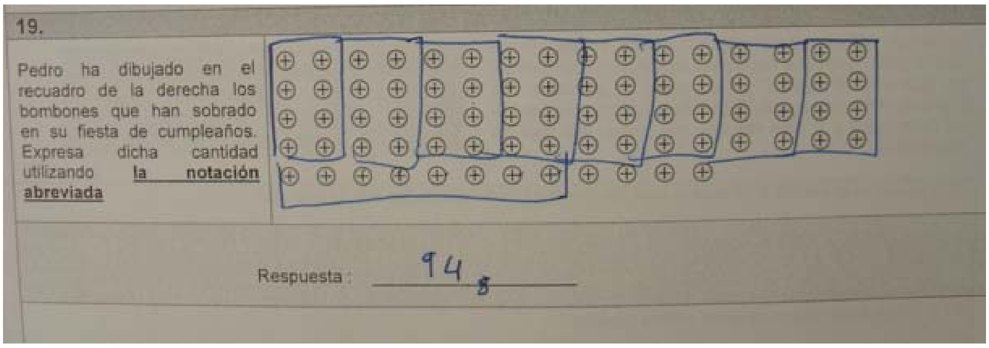
Estrategia	Ni	%
A17.1	-	-
A17.2	18	11,6
A17.3	11	7
A17.4	5	3,3
	Total: 34	

Los errores que cometen son similares a los señalados en el ítem IIC17, salvo que aparece un nuevo error (Ec.4) y es el que resulta de obtener los distintos agrupamientos pero a la hora de expresar el resultado final no se realizan las transferencias de órdenes y se ofrecen respuestas del tipo:

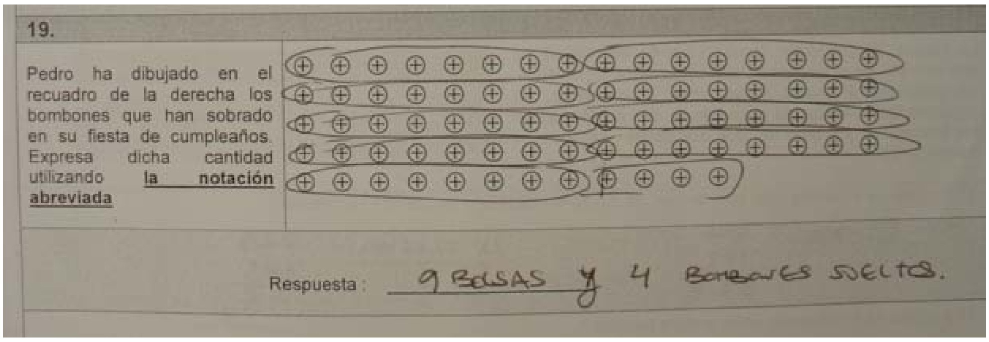
-(C-85): Después de realizar agrupamientos de 8 bombones sobre la figura proporcionada en el cuestionario responde $9_8 + 4_1$



-(C-86): igual que el anterior tras lo que responde $94_{(8}$



-(C-93): igual que los anteriores responde: 9 bolsas y 4 bombones sueltos.



La distribución de errores se pueden observar en la siguiente tabla.

Errores	Ni	%
Ec.1	13	8,4
Ec.2	4	2,5
Ec.3	14	9
Ec.1	7	4,5
Otros	14	9
	Total: 52	33,5

<u>Item IIIA20.1 , IIIA120.2, IIIA21.1 y IIIA121.2</u>

Lo primero que observamos es el nivel de respuestas en blanco que aumenta respecto a las anteriores y el bajo porcentaje de respuestas consideradas acertadas.

Las estrategias utilizadas para resolverla y los errores que se cometen son de la misma naturaleza que los de los ítems IIIA18.1 y IIIA18.2; la diferencia radica en los porcentajes resultantes.

En las tablas siguientes presentamos las frecuencias y porcentajes de estrategias validas utilizadas y de los errores cometidos.

	IIIA20.1		IIIA20.2		IIIA21.1		IIIA21.2	
Estrategia	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%

A18.1	10	6,5	9	5,8	7	4,5	8	5,2
A18.2	-	-	-	-	-	-	-	-
A18.3	-	-	1	0,6	-	-	-	-
A18.4	4	2,5	1	0,6	2	1,3	1	0,6
Total	14	9	11	7	9	5,8	9	5,8

	IIIA20.1		IIIA20.2		IIIA21.1		IIIA21.2	
Errores	Ni	%	Ni	%	Ni	%	Ni	%
Ea.4	65	42	55	35,5	30	19,4	18	11,6
Et.1	8	5	7	4,5	10	6,5	12	7,7
Ea.5	-	-	-	-	-	-	-	-
Otros	3	2	2	1,3	4	2,6	8	5,2
Total	76	9	64	7	44	28,5	38	24,5

<u>Item IIIA22 y IIIA23</u>

Como en los ítems analizados anteriormente y en los que se deben realizar operaciones con expresiones numéricas expresadas en agrupamientos distintos al decimal, el numero de respuestas “en blanco” crece respecto de las cuestiones incluidas en las tres primeras partes del cuestionario. También es sensiblemente inferior el numero de estrategias acertadas que se utilizan.

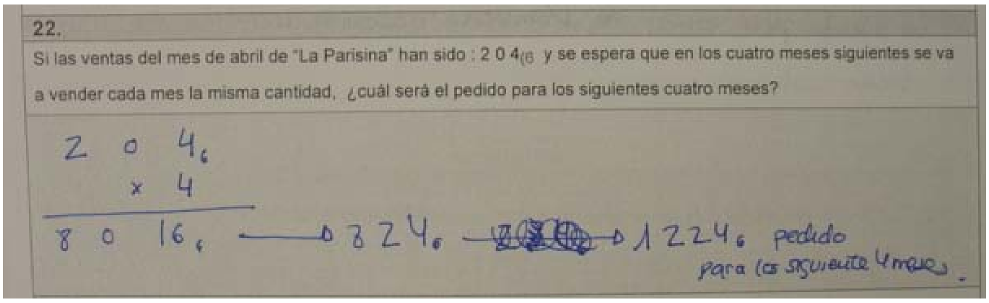
Los errores y las estrategias utilizadas tienen características similares a las expuestas en los ítems anteriores.

	IIIA22		IIIA23	
Estrategia	Ni	%	Ni	%
A18.1	7	4,5	7	4,5
A18.2	-	-	-	-
A18.3	-	-	-	-
A18.4	2	1,3	-	-
Total	9	5,8	7	4,5

	IIIA22		IIIA23	
Errores	Ni	%	Ni	%
Ea.4	30	19,2	30	19,2
Et.1	8	5,2	9	5,8
Ea.5	-	-	-	-
Otros	1	0,6	1	0,6
Total	39	25	40	25,6

Como ejemplo de alumno/a que resuelve la cuestión planteada y denota una comprensión de nivel sintético es el siguiente:

-El C-134 en el ítem IIIA22 resuelve de la siguiente manera que ya hemos expuesto anteriormente:

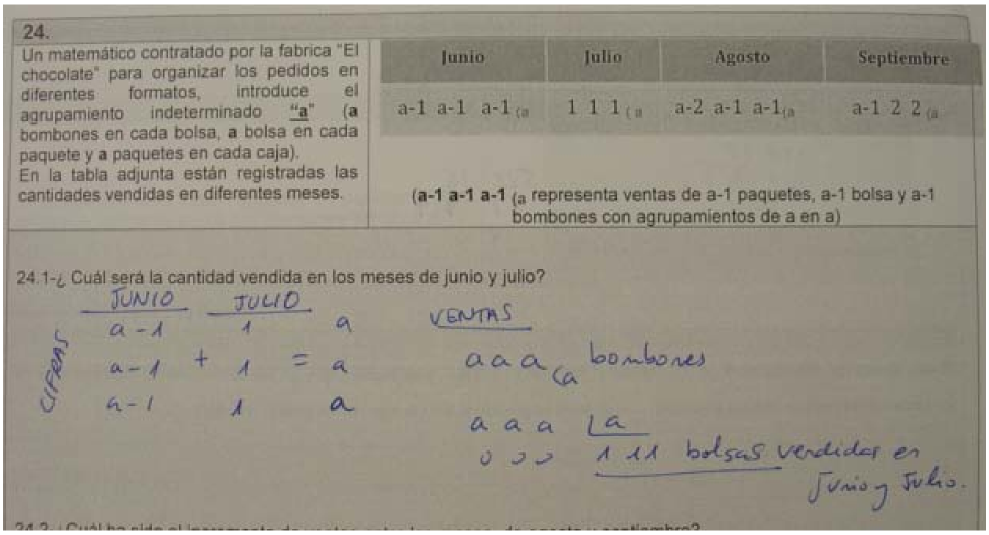


<u>Item III.IIA24.1 y III.IIA24.2</u>

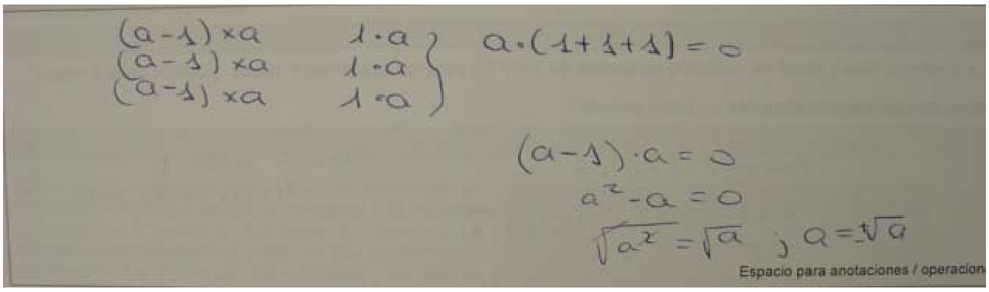
Corresponden a un nivel que hemos considerado frontera entre el nivel sintético y formal, y por ello posiblemente la mayoría de los alumnos (143 y 144) no lo responden. De los alumnos que intentan realizarla sólo 2 en el caso de la 24.1 la realizan de forma adecuada; el numero de alumnos que intentan realizar los algoritmos en la base **a** son 1 y 3 para los ítems 24.1 y 24.2 respectivamente, pero terminan cometiendo algún error algebraico; 6 intentan, en ambas actividades, realizar alguna intervención de tipo algebraica, sin conectar con el sentido de lo propuesto, terminando en algún caso resolviendo ecuaciones o bien operando expresiones polinómicas.

Como ejemplo podemos ver los siguientes:

-(C-109) Opera con las cantidades sin realizar trasferencias de órdenes y a continuación mantiene la estrategia errónea de dividir entre la base para obtener los resultados:



-(C-108) Para continuar con su estrategia errónea de pasar a base 10, multiplicando por la base (Et1) y una vez desprendido del significado de los términos utilizados (incapacidad para compatibilizar el contexto con el nivel algebraico (perdida de referencia)), suma las cifras de los distintos órdenes y termina planteando y resolviendo ecuaciones :



Conclusiones

- Del análisis conjunto de las respuestas podemos concluir que la mayoría de los alumnos se encuentran entre los niveles de reproducción y análisis. Muy pocos alumnos superan dichos niveles alcanzando el nivel de síntesis.

- El nivel técnico o de reproducción se encuentra tan consolidado que provoca la aplicación mecánica de los procedimientos en cualquier situación, incluso en el caso de agrupamientos distintos de 10, provocando errores del tipo Ea.4.

- Las respuestas en blanco y la persistencia de los errores Ea.1 en los ítems del nivel análisis de los algoritmos y Ea.4 en los ítems de la cuarta parte del cuestionario, nos inducen a pensar que los alumnos que responden de esta manera se encuentran en el nivel de reproducción.

- Hay alumnos y alumnas que muestran señales de compresión que corresponden al nivel de síntesis y, sin embargo, en algunas cuestiones, sobre todo las relacionadas con la sustracción de cantidades expresadas en agrupamientos distintos al decimal, vuelven a utilizar estrategias propias del nivel anterior (A18.1) o bien cometen errores del tipo Ea.4.

- Entre los errores más frecuentes destacamos el de la *aplicación mecánica de los algoritmos*, error Ea1, que se manifiesta en los ítems en los que deben justificar los pasos dados en su aplicación y que también se refleja en el error Ea4, por el que cuando realizan operaciones con cantidades en agrupamientos distintos al decimal mantienen los esquemas de llevadas sin modificarlos.

-En las situaciones en las que realizan traducciones entre sistemas con agrupamientos distintos al decimal, cometen el error Et1, por el que en lugar de efectuar el desarrollo polinómico correspondiente, se limitan a multiplicar la cantidad por la base correspondiente.

-En situaciones de expresar la cantidad con agrupamientos diversos, cometen el error Ec4, por el que realizan los sucesivos agrupamientos pero no se realizan trasferencias entre los distintos órdenes obtenidos, por lo que se obtienen expresiones no canónicas.

- En la gráfica correspondiente a los porcentaje de aciertos en todos los ítems del cuestionario (figura 7) apreciamos tres partes bien diferenciadas; en primer lugar las correspondientes a las actividades de la primera parte del cuestionario en las que existe un alto porcentaje de respuestas correctas; en segundo lugar las correspondientes a la segunda y tercera parte del cuestionario, donde el porcentaje de acierto fluctúa, con cuestiones con porcentajes altos, otras con porcentajes cercanos al 50% y algunas con porcentajes muy bajos. El último tramo de la gráfica asociado a los ítems del nivel de síntesis con porcentajes muy bajos con una clara tendencia decreciente.

-Si realizamos un análisis complementario de las cuestiones no completadas, respuestas “en blanco”, veremos como se puede apreciar en la gráfica siguiente, que la tendencia es opuesta a la de las correctas. Prácticamente inexistente en la primera parte del cuestionario; con porcentajes bajos, salvo algunas cuestiones puntuales, en la segunda y tercera parte, correspondiente con el nivel de análisis y con una tendencia claramente ascendente en los ítems de síntesis.

-Del análisis conjunto de las respuestas correctas y las “en blanco” podemos concluir que la mayoría de los alumnos se encuentran entre los niveles de reproducción y análisis y muy pocos en el de síntesis.

-Las respuestas en blanco y la persistencia de los errores Ea.1 en los ítems del nivel análisis de los algoritmos y Ea.4 en los ítems de la cuarta parte del cuestionario nos inclinaría a conjeturar la pertenencia del alumnos que responde de esta manera al nivel de reproducción.

-Hay alumnos y alumnas que muestran señales de compresión que corresponden al nivel de síntesis y sin embargo, en algunas cuestiones, sobre todo las relacionadas con la sustracción de cantidades expresadas en agrupamientos distintos al decimal, vuelven a utilizar estrategias propias del nivel anterior (A18.1) o bien cometen errores del tipo Ea.4.

Propuestas de mejora del instrumento

1.- Para eliminar sospecha de que el progresivo abandono del cuestionario se puede deber a razones de “cansancio”, realizaremos algunas modificaciones:

- Reduciremos el número de cuestiones correspondientes a la primera parte, dada la escasa dificultad y la poca discriminación que produce.

- Reduciremos también el numero de ítems de la segunda parte, incluyendo preguntas únicas en los algoritmos de la suma y resta y dos de la multiplicación.

- Eliminaremos el ítem IIN10 y mantendremos el IIN11 de similares características.

- Reduciremos los ítems IIN9.1, IIN9.2, IIO12.1 y IIO12.2 a uno sólo.

- Mantendremos el ítem IIIA22 y eliminaremos el IIIA23.

2.- Hay cuestiones que podemos modificar para evitar incertidumbres a la hora de interpretar las respuestas. Éstas serían:

- En los ítems E13.1, E13.2, E15.1 y E15.2 realizar las preguntas del significado del proceso seguido en los algoritmos, centrándolas sobre las cifras de las centenas o superiores, para de esta manera constatar con más precisión el error Ea.2.

- En los ítems IIN17.1 y IIN17.2 incluir en el enunciado la aceptación de no ser cantidades usuales. Por ejemplo: " En el caso de encontrarte una cantidad del tipo……, podrías indicarnos con cifras a cual correspondería".

3.-Incluiremos algunas cuestiones del sistema de numeración ordinal, no incluidas en éste primero.

Referencias bibliográficas

Aguilar, M.; Martinez, J. (1997). El dominio de la numeración al terminar cada uno de los ciclos de la Educacion Primaria. Numeros, 31.Pp.15-31.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2007). How can we assess mathematical understanding? In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 41-48). Seoul, South Korea: PME.

Bednarz, N.; Dufour-Janvier, B. (1.982). Experiencias de la numeración en la Escuela Primaria.

Bender, P. (1996). Basic imagery and understandings for mathematical concepts. In C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), 8th International Congress in Mathematics Education ICME (pp. 57-74). Sevilla, Spain: SAEM Thales.

Bishop, A.J.1989. " Review of research on visualization in mathematics education". Focus on Learning Problems in Mathematics, 11. 1, 7-15.

Bohan H.; Bohan S. 1993. " Extending the regular curriculum through creative problem solving". En: Arithmetic teacher . V 41. P. 83-87.

Brown, T. (1996). Towards a hermeneutical understanding of mathematics and mathematical learning. In P. Ernest (Ed.), Constructing mathematical knowledge: Epistemology mathematical education (pp. 141-150). London: RoutledgeFalmer.

Brown, T. (2001). Mathematics Education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Byers, V., & Erlwanger, S. (1985). Memory in mathematical understanding. Educational Studies in Mathematics, 16(3), 259-281.

Capelo, A.; Ferrari, M.; Padovan G. (1990). I Sistemi di Numerazione. Porgetto strategico del C.N.R. Tecnologie e innovazioni didactiche. Formazione e aggiornamiento in mathematica degli insegnati. Quaderno nº 7.

Caramuel, J. (1.670). Filosofía de la Matemática (Meditatio Prooemialis). Ed. Alta Fulla. Barcelona (1.989)

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carrillo y Contreras, (1993). "La identificación de las concepciones del Profesor sobre la matemática y la educación matemática como claves para el diseño de strategies de formación del profesorado". VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Sevilla.

Cavey, L. O., & Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. Journal of Mathematical Behavior, 24(2), 171-190.

Coob P. y otros. (1992). "Characteristics of classrroom mathematics traditions: An interational analysis". En American educational reserarch journal. Vol.29(3). 573-604.

Davis, R. B. (1992). Understanding "understanding". Journal of Mathematical Behavior, 11(3), 225-241.

Deblois, Lucie. 1996. Une analyse conceptuelle de la numération de position au Primaire. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 16, nº 1, pp. 71-128.

Doneddu, A. 1962. Aritmétique générale. Ed. Dunod.Paris.

Dörfler, W. (2006). Inscriptions as objects of mathematical activities. In J. Maasz & W. Schoeglmann (Eds.), New Mathematics Education research and practice (pp. 97-111). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Duffin, J., & Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 166-173). Lhati, Finland: PME.

Duffin, J., & Simpson, A. (2000). A search for understanding. Journal of Mathematical Behavior, 18(4), 415-427.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1/2), 103-131.

Ell, F. (2006). Can moderate hermeneutics help us to understand learning and teaching in the mathematics classroom? In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 33-40). Prague, Czech Republic: PME.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). Mathematics Education: models and processes. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.) (1999). Mathematics classrooms that promote understanding. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flores, P. (1997).- El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En: Berenguer y otros.- Investigación en el aula de matemáticas. La tarea docente. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Sociedad Thales. pp. 13-27.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. Actas del VIII Simposio de la SEIEM. La Laguna (Tenerife).

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in Mathematics Education. For the Learning of Mathematics, 27(2), 2-9.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gadamer, H. G. (2000). El problema de la conciencia histórica. Madrid: Tecnos.

Galton, F. 1980. "Visualised numerals". Nature, 21, 252-256 and 494-495.

Gallardo, J. y González, J. L. (2002). Multiplicaciones con cifras desconocidas: problemas para practicar y comprender el algoritmo estándar de la multiplicación. Epsilon, 54, 469-478. [ISSN: 1131-9321]

Gallardo, J. y González, J. L. (2004). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales [Resumen Tesis Doctoral]. Boletín de la SEIEM, 17, 32-33. [ISSN: 1576-5911]

Gallardo, J. y González, J. L. (2005a). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.) Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 197-204). Córdoba: Universidad de Córdoba. [ISBN: 84-7801-782-8]

Gallardo, J. y González, J. L. (2005b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales [Resumen Tesis Doctoral]. Enseñanza de las Ciencias, 23, 2, 294-295. [ISSN: 0212-4521]

Gallardo, J. y González, J. L. (2006a). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno, (Eds.) Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses-Universidad de Zaragoza. [ISBN: 84-8127-156-X]

Gallardo, J. y González, J. L. (2006b). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. For the Learning of Mathematics, 26, 2, 10-15. [ISSN: 0228-0671]

Gallardo, J. y González, J. L. (2006c). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. PNA, 1(1), 21-31. [ISSN: 1886-1350]

Gallardo, J. y González, J. L. (2007a). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. Números, 66. [ISSN: 0212-3096]

Gallardo, J. y González, J. L. (2007b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.) Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico (pp. 157-184). Granada: Editorial Universidad de Granada. [ISBN: 8433845429]

Gallardo, J. y González, J. L. (en prensa). Advances in the research on mathematical understanding: an integrating synthesis. Philosophy of Mathematics Education Journal. [ISSN: 1465-2978]

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2007c). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y Mª. T. González (Eds.) Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación (pp. 207-222). Tenerife: CajaCanarias- SEIEM. [ISBN: 978-84-612-5856-7]

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.) Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 283-293). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática-SEIEM. [ISBN: 978-84-934488-9-9; ISSN: 1888-0762]

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 11(3), pp. 355-382 [ISSN: 1665-2436]

Gallardo, J., González, J. L., & Quintanilla, V. A. (2010). Un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas. Manuscript submitted for publication.

Gallardo, J., González, J. L., & Quispe, W. (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 11(3), 355-382. ISSN 1665-2436.

Gallardo, J y Gonzalez, J.L. (2011). Análisis Didáctico como metodología para el tratamiento de los antecedentes en la . . . Capítulo en:

García; Escudero; Llinares y Sánchez, 1994

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. Uno, 25, 77-87.

Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2002b). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matematica. La matematica e la sua didattica, 4, 434-450.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathematiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. The International Journal on Mathematics Education ZDM, 39(1/2), 127-135.

Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. En L. D. English (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, B. (1989). Numeracion y cálculo. Madrid: Síntesis

González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education, Vol. 1I (pp. 245-256). Osnabrück, Germany.

Grigorakis K. (1995). " The development of early manipulatory classification : A numerical architecture hypothesis". En: New ideas in Psychology. Vol. 13(3). 311-324.

Guitel, G. (1975). Histoire comparée des numérations écrites. Ed. Flammarion. Paris.

Hankes E. (1996). "Investigating the advantages of constructing multidigit numeration understanding through Oneide and Lakota native lenguages". Paper presented at the annual Conference of the Western Educational Research Association (Chicago).

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) (2001) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., et al. (1997). Making sense: teaching and learning mathematics with understanding, Portsmouth, NH: Heinemann.

Ifrah, G. (1.997). Historia Universal de las cifras

Kamii, M.; Kamii, C. (1.985). Estudios sobre el valor de posición.

Kieren, T., Pirie, S., & Calvert, L. G. (1999). Growing minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. In L. Burton (Ed.), Learning mathematics: from hierarchies to networks (pp. 209-231). London: Routledge.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 1, 63-73.

Koyama, M. (1997). Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analysing an elementary school mathematics class. Hiroshima Journal of Mathematics Education, 5, 21-33.

Koyama, M. (2000). A research on the validity and effectiveness of "two-axes process model" of understanding mathematics at elementary school level. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 159-166). Hiroshima, Japan: PME.

Lenshina M. 1991. "The development of elementary Mathematical conceps in Preschol children. Soviet studies in Mathematics Education. Vol.4. Ed: N.C.T.M.(Chicago).

Lucie Deblois (1.993). La comprensión de la numeración en niños con dificultades de aprendizaje.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51 (pp.92-101).

Martin, L. C., & Towers, J. (2003). Collective mathematical understanding as an improvisational process. In N. A. Paterman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 245-252). Honolulu, HI: PME.

Mason, D. E. (1998). Capsule Lessons in Alternative Algorithms for the Classroom. En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.) The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics (pp. 91-98). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

McCloskey M.; Macaruso P. 1995. "Representing and using numerical information" En: American psychologist. Vol 50(5). 351-363.

Miller F. y otros. (1995). "Preschol origins of cross-national differences in mathematical competence: the role of number-naming systems". En: Psichological-Science. Vol 6(1). 56-60.

Miura I. y otros. (1994). "Comparisons of children`s cognitive representation of number: China, France, Japan, Korea, Sweden and the United States". En: Tnternational journal of behavorial development. Vol. 7. P. 401-411.

Morgan, C. y Watson, A. (2002). The interpretative nature of teacher's assessment of students' mathematics: Issues for equity. Journal for Research in Mathematics Education, 33(2), 78-111.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niemi, D. (1996). Assessing conceptual understanding in mathematics: representations, problem solutions, justifications, and explications. The Journal of Educational Research, 89(6), 351-363.

Noel P.; Seron X. 1993. " Arabic number reading deficil: A single case study: or when 236 is read 2306 and judged superior to 1258". En: Connitive Neuropsychology. Vol. 10(4). 317-339.

Orozco, M. Y Otálora, Y. (2006). ¿Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco"? Relime. Vol 9, Num. 3. Pp. 407-433.

Ortiz, A. L. (1999). "Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado". Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado 1996-1998. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga. Documento inédito en poder del autor.

Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotic point of view. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9(4), 23-43.

Palarea, M.; Hernández, J., y Socas, M.M. (2001). Análisis del nivel de conocimientos de Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. En M. M. Socas et al. (Eds), Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III, 213-226. Campus. La Laguna.

Philipp, R. A. (1996). Multicultural Mathematics and alternative algorithms. Teaching Children Mathematics, 3, noviembre, 128-133.

Pirie, S. y Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. For the Learning of Mathematics, 9(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics, 26(2/3), 165-190.

Popper, K. (2005). El mito del marco común. Barcelona: Paidós.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Puig, L. (1998). Clasificar y significar. En L. Rico y M. Sierra (Eds.) Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 106-118). Granada: SEIEM-Universidad de Granada.

Rico, L. (1997). Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática. Suma 24, 5-19.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. PNA, 4(1), 1-14

Ricœur, P. (2002). Del texto a la acción. México: Fondo de Cultura Económica.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en Pensamiento Numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM (pp. 35-46). Huelva: Universidad de Huelva.

Ross S.; Sunfower E. 1995. “Place-Value: Problem-Solving and written Assessment using digit correspondence tsks”. Paper presented at the Annual meeting of the North American chapter of the International group for the Psychology of Mathematics Education.

Roth, W.M. (2004). What is the meaning of “meaning”? A case study from graphing. Journal of Mathematical Behavior, 23(1), 75-92.

Salinas M.J. (2003). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En Castro, E. (Ed.). Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática (pp.339-348). Granada: Universidad de Granada.

Salinas M.J. (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho et al. (Eds), Investigación en Educación Matematica XI, pp 381-390. SEIEM 2007.

Sellarès, R y Bassedas M. (1.980). Estudios sobre la construcción de sistemas de numeración. (Pedagogía Operatoria).

Sellares, R.; Bassedas, M. “La construcción de sistemas de numeración en la historia y en los niños” En: Moreno, M. y Sastre, G. La Pedagogía Operatoria.1983. Ed. Gedusa.

Seron, X., y otros. 1992. Images of number, or “When 98 is upper left and 6 sky blue”. En S. Dehaene (Ed), Numerical Cognition, Cambridge, MA: Blackwell, 159-197.

Shulmann, L. (1986). "Paradigms and Research Programs in the study of teaching: A contemporary perspectives". En Witrock, M. (Ed.). Handbook on Research on Teaching. MacMillan: New York

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, 10(3), 24-36.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in mathematics. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A. (2000). Mathematics classrooms that promote understanding [Review of the book Mathematics classrooms that promote understanding]. ZDM, 2, 45-50.

Sinclair A. Y otros. " Constructing and understanding of place value in numerical notation". En: europan journal of psychology of Education. Vol. 7(3). 191-207.

Tahta, D. (1996). On interpretation. In P. Ernest (Ed.), Constructing mathematical knowledge: Epistemology mathematical education (pp. 125-133). London: RoutledgeFalmer.

Tegiri F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. Revista iberoamericana de educación. Nº 43, pp59-83.

Thomas ,N. Y otros. 1994. Children`s representation of the counting sequence 1-100: Study and theorical interpretation. En J. Matos (Ed), Proceding of the 18th Annual Conference of PME, Vol II. Univ. Of Lisbon, Portugal: Department of Education, Faculty of Sciences, 1-8.

Thomas, N; Mulligan, J. (1995). Dynamic imagery in children`s representations of number. Mathematics Education Research Journal, Vol. 7, 1, 5-25.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes y P. E. Bryant (Eds.) Learning and Teaching Mathematics (pp. 5-28). London: Psycology Press, Ltd.

Warner, L. B., Alcock, L. J., Coppolo, J., & Davis, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? In N. A. Paterman, J. B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 371-378). Honolulu, HI: PME.

Wassman J.; Dasen R. (1994). " Yupno number system and countring" En: Journal of cross cultural pshychology. Vol. 25(1). 78-94.

Zhng J.; Norman D. (1995). "A representational analysis of numeration systems" En: Cognitión. Vol. 57(3). 271-295.

Anexo 1.- Tablas de frecuencias Tabla 1.- Nivel I. Reproducción o Técnico

	Aciertos		Fallos		Blanco	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**fa**	**%**
IT1.1	154	99,4	1	0,6	0	0,0
IT1.2	153	98,7	2	1,3	0	0,0
IT2.1	154	99,4	1	0,6	0	0,0
IT2.2	153	98,7	2	1,3	0	0,0
IO3.1	152	98,1	3	1,9	0	0,0
IO3.2	117	75,5	38	24,5	0	0,0
IO3.3	113	72,9	41	26,5	1	0,6
IO3.4	150	96,8	3	1,9	2	1,3
IO4.1	149	96,1	5	3,2	1	0,6
IO4.2	142	91,6	12	7,7	1	0,6
IN5.1	148	95,5	6	3,9	1	0,6
IN5.2	150	96,8	4	2,6	1	0,6
IN5.3	147	94,8	7	4,5	1	0,6
IN5.4	146	94,2	8	5,2	1	0,6
IN6.1	148	95,5	7	4,5	0	0,0
IN6.2	151	97,4	4	2,6	0	0,0

Tabla 2.- Nivel II. Análisis-Primera parte

	Aciertos		Fallos		Blanco	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**Fa**	**%**
IIN7.1	1	0,6	108	69,7	24	15,5
IIN7.2	125	80,6	14	9,0	7	4,5
IIN8.1	17	11,0	137	88,4	1	0,6
IIN8.2	16	10,3	138	89,0	1	0,6
IIN9.1	135	87,1	14	9,0	6	3,9
IIN9.2	60	38,7	57	36,8	38	24,5
IIN10	94	60,6	25	16,1	36	23,2
IIN11	32	20,6	53	34,2	70	45,2
IIN12.1	33	21,3	30	19,4	23	14,8
IIN12.2	25	16,1	55	35,5	24	15,5

Tabla 3.- Nivel II. Análisis-Algoritmos

	Aciertos		Fallos		Blanco	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**Fa**	**%**
IIA13.1-13.2	54	34,8	92	59,4	9	5,8
IA14.1-14.2	10	6,5	127	81,9	19	12,3
IA15.1-15.2	44	28,4	85	54,8	27	17,4
IA15.3	25	16,1	85	54,8	45	29,0

Tabla 4.- Nivel III.- Síntesis

	Aciertos		**Fallos**		**Blanco**	
Items	**fa**	**%**	**fa**	**%**	**Fa**	**%**
IIC.16	100	64,5	51	32,9	4	2,6
IIIC.17	82	52,9	63	40,6	10	6,5
IIIA.18.1	44	28,4	61	39,4	50	32,3
IIIA.18.2	35	22,6	53	34,2	67	43,2
IIIC.19	35	22,6	52	33,5	68	43,9
IIIA.20.1	15	9,7	75	48,4	65	41,9
IIIA20.2	12	7,7	63	40,6	80	51,6
IIIA21.1	9	5,8	44	28,4	102	65,8
IIIAT21.2	9	5,8	38	24,5	108	69,7
IIIA22	9	5,8	39	25,2	107	69,0
IIIA23	8	5,2	40	25,8	107	69,0
III.IIA24.1	10	6,5	2	1,3	143	92,3
III.IIA24.2	7	4,5	4	2,6	144	92,9

Tabla 5.- Número de alumnos por intervalos de porcentajes de aciertos

%	**Reproducción**	**Análisis**	**Síntesis**
[0-10)	**0**	**18**	**89**
[10-20)	**0**	**34**	**25**
[20-30)	**0**	**23**	**18**
[30-40)	**0**	**20**	**8**
[40-50)	**0**	**13**	**3**
[50-60)	**1**	**19**	**6**
[60-70)	**6**	**12**	**3**
[70-80)	**3**	**14**	**2**
[80-90)	**27**	**2**	**1**
[90-100]	**118**	**2**	**0**
	Total: 155		

Anexo 2.- Cuestionario

Cuestionario

Comprensión y dominio del Sistema de Numeración Decimal

Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga.

Pedimos que respondas a las cuestiones con el máximo interés en las zonas sombreadas. Los datos personales así como los resultados del cuestionario son confidenciales y su utilización queda restringida al desarrollo de la investigación. Gracias por tu colaboración.

Apellidos:		Nombre:
Curso:	Grupo:	Fecha:

I

I TON **Completa**

I.T.1)

Quince mil trescientos cuarenta y ocho	1 5 3 4 8
Doscientos cuarenta y cinco mil siete	
Cincuenta mil trece	

I.T.2)

9 7 0 2 9	noventa y siete mil veintinueve
2 1 0 2 0 0 4	
3 1 0 0 3 0 0	

I.O.3)

	el número siguiente es (con letras):
dos mil cuatrocientos ocho	
ciento cuatro mil noventa y nueve	
	el número anterior es (con letras):
ciento diez mil	
Tres mil veinte	

I.O.4)

	el número siguiente es (con cifras):
2 0 3 0 9 9	
	el número anterior es (con cifras):
3 0 4 0 0 0	

I.N.5)

	Subraya o rodea con un círculo
La cifra de las centenas	4 5 6 2
La cifra de las decenas	3 8 9 1
La cifra de las centenas de millar	2 3 4 4 0 0 9
La cifra de las unidades de millar	1 0 3 0 2

I.N.6)

	La cifra señalada es la . . . :
2 **7** 0 3 2	Cifra de las . . . . unidades de millar
3 0 **0** 0 0	Cifra de las . . .
8 0 1 2 0	Cifra de las . . .

II

II TNO **Completa**

II.T.7)

	Escribe el número (con cifras):
once mil once cientos once	
Doscientos dos miles doscientos siete	

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

II.N.8)

en el numero 8 2 3 4 . . .	hay _________ centenas
en el número 2 1 0 0 0 4 . . .	hay _________ decenas de millar

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

II.N.9)

	Escribe (con cifras) el número que corresponde a…
tres decenas de mil, cuatro centenas y cinco unidades	__________
siete unidades de millar, trece centenas, dieciséis decenas y diecisiete unidades	___________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

II.N.10)

	Escribe el número (con cifras):
Un número de cuatro cifras tal que al aumentarlo en 10 decenas se modifican las cifras de las unidades de millar y la de las decenas de millar	Respuesta: ________

I

I TON Completa

I.T.1)

Quince mil trescientos cuarenta y ocho	1 5 3 4 8
Doscientos cuarenta y cinco mil siete	
Cincuenta mil trece	

I.T.2)

9 7 0 2 9	noventa y siete mil veintinueve
2 1 0 2 0 0 4	
3 1 0 0 3 0 0	

I.O.3)

	el número siguiente es (con letras):
dos mil cuatrocientos ocho	
ciento cuatro mil noventa y nueve	
	el número anterior es (con letras):
ciento diez mil	
Tres mil veinte	

I.O.4)

	el número siguiente es (con cifras):
2 0 3 0 9 9	
	el número anterior es (con cifras):
3 0 4 0 0 0	

I.N.5)

	Subraya o rodea con un círculo
La cifra de las centenas	4 5 6 2
La cifra de las decenas	3 8 9 1
La cifra de las centenas de millar	2 3 4 4 0 0 9
La cifra de las unidades de millar	1 0 3 0 2

I.N.6)

	La cifra señalada es la . . . :
2 **7** 0 3 2	Cifra de las . . . . unidades de millar
3 0 **0** 0 0	Cifra de las . . .
8 0 1 2 0	Cifra de las . . .

N.11)

i amigo Roberto juega conmigo un décimo de ı número de la lotería del niño. Para adivinarlo e da las siguientes pistas: - La cifra de las centenas es el doble de cifra de las unidades. - El número contiene 16 centenas. - La cifra de las decenas es la suma de las ras de las unidades y las de las unidades de illar.	Respuesta: _________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

O.12)

	el número siguiente (con cifras) es:
Il número formado por 13 centenas y 4 decenas	____________
	el número anterior (con cifras) es:
Il número formado por 10 unidades de millar y 25 decenas	____________

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

II A Explica

A.13)

ı la resolución de la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} 368 \\ +\ 457 \\ \hline 825 \end{array}$$

ıcemos los siguientes cálculos:

- 8 + 7 = 15 (escribo 5) y me llevo 1
- 6 + 5 = 11, (a) 11 + **1** que llevo = 12, escribo 2, me llevo 1
- 3 + 4 = 7, (b) 7 + **1** que llevo = 8, escribo 8

Qué significa el uno (**1**) en (a) ?

Qué significa el uno (**1**) en (b) ?

I.A.14)

En la siguiente resta:

```
  5 6 2
-   3 6
-------
  5 2 6
```

Operamos así:
- De 6 a 12 van 6 y me llevo 1
- (a): 3 + **1** = 4, de 4 a 6 van 2
- De 0 a 5 = 5

¿Por qué digo de "6 a 12" si sólo hay un 2?

¿Por qué sumo **1** en (a)?

I.A.15)

Al realizar la siguiente multiplicación:

```
    2 5 8
  x   2 6
---------
  1 5 4 8
  5 1 6
---------
  6 7 0 8
```

Decimos:
- 6 x 8= 48, coloco el 8 y me llevo 4.
- 6x 5 = 30, 30 + 4 que me llevaba = 34 .....

¿Qué significan las 4 que me llevo?

¿Por qué se las sumo a las 30 en el segundo cálculo?

¿Por qué colocamos el 6 de la segunda fila debajo de 4 de la primera?

II) II C Resuelve y explica

I.C.16)

Si una manzana (□) equivale a 10 corazones (♥), un corazón (♥) equivale a 10 rombos (♦) y un ♦ equivale a 10 asteriscos (*).
¿A cuantos asteriscos equivaldría la cantidad representada en el interior del cuadro?

□ □ □ □ □
♥ ♥ ♥ ♥
♦ ♦ ♦ ♦ ♦
* * * * * * * * *

Respuesta: ____________

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

III

Resuelve y explica

III.C.17)

El producto estrella de la empresa "El chocolate" es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una.
Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños.
Ayúdanos a realizar su pedido indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar

Número de paquetes: __________ Número de bolsas: __________ Número de bombones sueltos: __________

Explica aquí cómo obtienes al resultado:

Espacio para anotaciones / operaciones / borrador

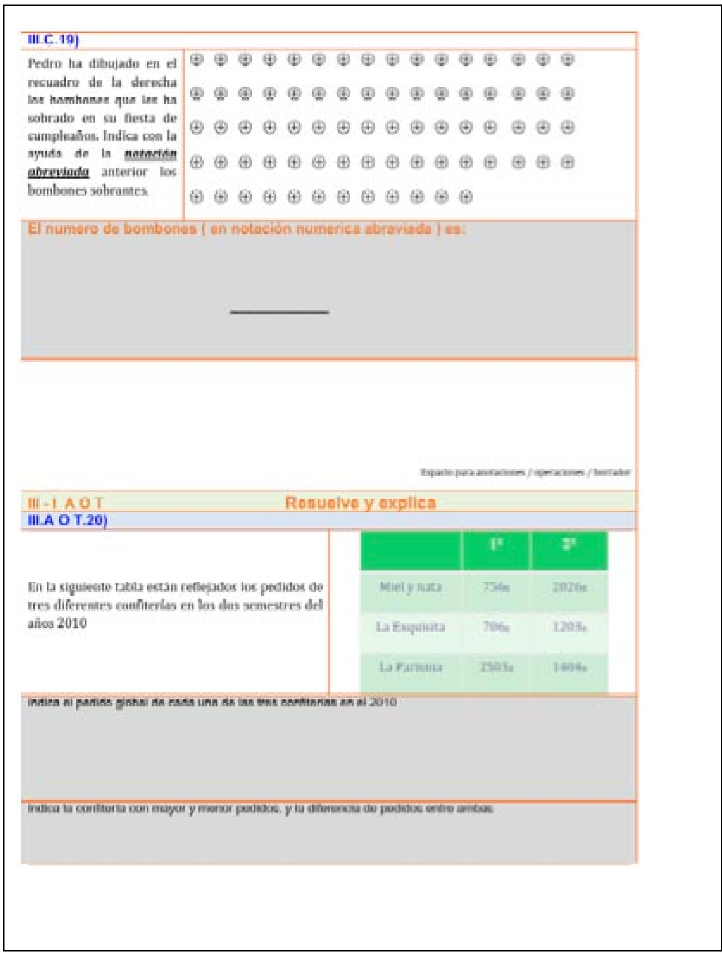
III.1.A.18)

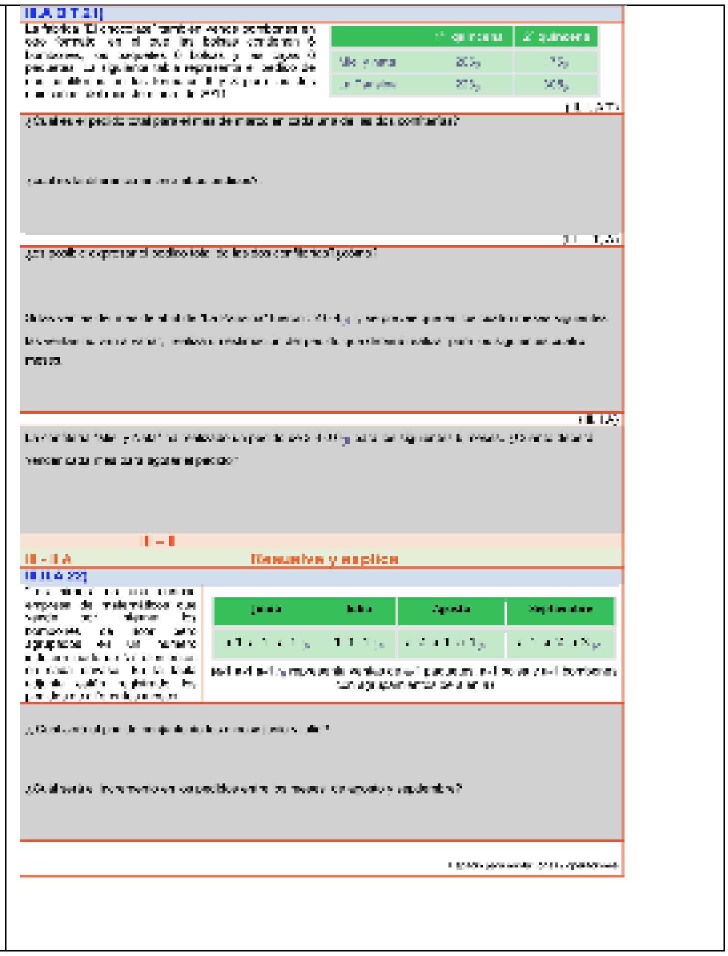
Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8**))

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

Expresa el total de ventas en los dos años.

Expresa el incremento producido en el año 2010 (número de bombones que se han vendido de más en el 2010 con respecto al 2009)


III.C.19)
Pedro ha dibujado en el recuadro de la derecha los bombones que les ha sobrado en su fiesta de cumpleaños. Indica con la ayuda de la notación abreviada anterior los bombones sobrantes.
El numero de bombones (en notación numerica abraviada) es:
Espacio para anotaciones / operaciones / borrador
III - I A O T
Resuelve y explica
III.A O T.20)
En la siguiente tabla están reflejados los pedidos de tres diferentes confiterías en los dos semestres del años 2010
1º
2º
Miel y nata
La Exquisita
La Parisina
Indica el pedido global de cada una de las tres confiterías en el 2010
Indica la confitería con mayor y menor pedidos, y la diferencia de pedidos entre ambas


III.A O T.21)
Resuelve y explica

ERRORES EN LA TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN DOMINÓ ALGEBRAICO[46]

Susana Rodríguez-Domingo
Marta Molina
María C. Cañadas
Encarnación Castro
Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca dentro de una investigación más amplia cuyo principal objetivo es indagar sobre la capacidad de los estudiantes de educación secundaria para traducir y relacionar enunciados algebraicos presentados en los sistemas de representación simbólico y verbal. La recogida de datos se realizó con 26 estudiantes de 4º de ESO a los que se propuso la construcción de un dominó algebraico, diseñado para esta investigación, y su posterior uso en un torneo. En este artículo presentamos un análisis de los errores cometidos en dichas traducciones. Entre los resultados obtenidos, destacamos que los estudiantes encontraron mayor facilidad al traducir enunciados de su representación simbólica a su representación verbal y que la mayoría de los errores cometidos al traducir de la expresión verbal a la simbólica son derivados de las características propias del lenguaje algebraico.

Palabras clave: enunciados algebraicos, errores, juego, representación simbólica, representación verbal, traducción entre sistemas de representación.

Abstract

We present a research study whose main objective is to inquire into secondary school students´ ability to translate and relate algebraic statements which are presented in the symbolic and verbal representation systems. Data collection was performed with 26 4th grade students to whom we proposed the construction of an algebraic domino, designed for this research, and its subsequent use in a tournament. Here we present an analysis of the errors made in translations. Among the obtained results, we note that the students found it easier to translate statements from the symbolic to the verbal representation and that most errors in translating from verbal to symbolic expressions where derived of the particular characteristics of algebraic language.

Keywords: algebraic statements, errors, game, symbolic representation, translation between representation systems, verbal representation.

[46] Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Rodríguez, S.; Molina, M.; Cañadas, M.C.; Castro, E. (2012*).* Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 379-391). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

En el segundo ciclo de educación secundaria se observa que, en el estudio del lenguaje algebraico, los estudiantes siguen teniendo dificultades para relacionar el lenguaje verbal y el simbólico. Esto dificulta, entre otros aspectos, la resolución de problemas que requieren del uso del lenguaje algebraico. Conocer los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico, puede ayudar en el estudio de la adquisición del simbolismo algebraico y de la resolución de este tipo de problemas.

Las dificultades que evidencian los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y la destacada presencia de contenidos algebraicos en el currículo de educación secundaria, a nivel internacional, hacen que este campo sea de gran interés para la investigación en Educación Matemática. Investigadores como Arcavi (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996) o Kaput (2000) han planteado la problemática existente en la adquisición de dominio y comprensión del lenguaje algebraico. Estudios centrados en la categorización de los errores en los que incurre el alumnado en el estudio del álgebra, como los de Socas (1997), Palarea (1998) o Ruano, Socas y Palarea (2008) dejan abiertos algunos aspectos por estudiar. Así mismo, observamos que si bien algunos trabajos exploran el papel de la escritura verbal en el aprendizaje del álgebra (MacGregor, 1990; Wollman, 1983), existen escasos estudios sobre la traducción de enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólica. El análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para: (a) profundizar en la comprensión que poseen de los estudiantes del lenguaje simbólico e (b) indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente aquello que pueden encontrar enunciado de forma verbal.

Objetivos

El objetivo general que nos planteamos con el trabajo de Rodríguez-Domingo (2011), del cual se presenta aquí parte, es *analizar el proceso de traducción que realizan estudiantes de educación secundaria entre los sistemas de representación verbal y simbólico, de enunciados generales de relaciones numéricas*. Este objetivo se concreta en tres objetivos específicos: (a) construir un instrumento que permita explorar el proceso de traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal, al no haberse encontrado en la literatura consultada; (b) analizar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones; y (c) describir las relaciones que los estudiantes ponen de manifiesto entre representaciones verbales y simbólicas de un mismo enunciado algebraico, así como las explicaciones que dan a las mismas. En este artículo nos centramos en los dos primeros objetivos mencionados.

Marco teórico

Tres elementos teóricos son claves en esta investigación: (a) álgebra, (b) sistemas de representación y (c) errores y dificultades en el álgebra. Las relaciones entre estos elementos así como su consideración en el contexto del juego fundamentan este trabajo. En la Figura 1 representamos un esquema que refleja estos elementos.

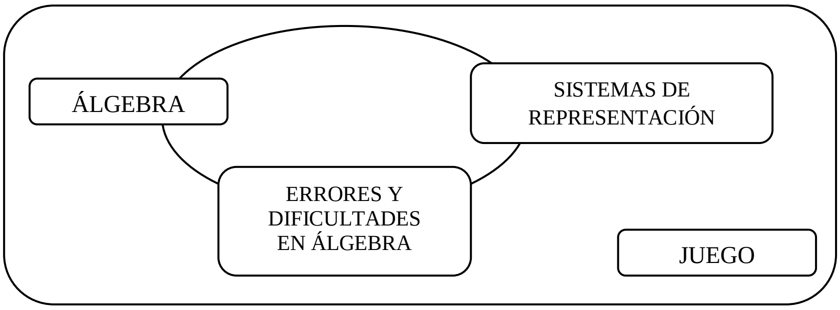


Figura 1. Esquema del marco teórico

Una breve revisión bibliográfica en torno a la concepción del álgebra nos ha permitido percibir la evolución de la misma a lo largo del tiempo, su conexión con la generalización (Bednarz et al. 1996; Kaput, 2000), su consideración como lenguaje y su destacada utilidad para la resolución de problemas (Fernández, 2001; Kieran y Filloy, 1989). En este contexto nos centramos en *enunciados que establecen relaciones generales entre cantidades, algunas de ellas desconocidas*, a los que denominados *enunciados algebraicos*.

Para la profundización sobre las nociones de representación y sistemas de representación nos hemos centrado principalmente en los trabajos realizados en el seno del Grupo "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (FQM-193). Prestamos atención a las representaciones externas, pues son las que se pueden observar en el trabajo de los estudiantes. Consideramos que un sistema de representación es el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que sigue cierta sistematización (Castro y Castro, 1997; Rico, 1997).

En lo que concierne a los errores y las dificultades de los estudiantes en el estudio del álgebra, partimos de la idea de que los errores provienen de esquemas cognitivos inapropiados (Matz, 1980; Socas, 1997). Pese a que todos incurrimos en errores, éstos suelen tener connotaciones negativas en la escuela, y parece ser que más en matemáticas. Rico (1995) reivindica que el error es una posibilidad permanente para la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos. Algunos estudios como los de Wollman (1983) o Clement, Lochhead y Monk (1981) determinan fuentes de error en la traducción de enunciados algebraicos verbales en su representación simbólica. En un trabajos más reciente, Ruano et al. (2008) estudian procesos específicos en los que se hace uso del lenguaje algebraico (sustitución formal, generalización y modelización), identificando los tipos de errores en los que incurren los estudiantes. Los autores identifican algunos errores recurrentes relacionados con la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Socas (1997) determina tres grandes categorías para los errores según su origen: (a) en un obstáculo, (b) en ausencia de sentido, (c) en actitudes afectivas y emocionales. Esta clasificación ha sido clave para elaborar la clasificación de errores a utilizar en este trabajo, la cual está adaptada a los resultados obtenidos.

Por último, el juego es el contexto en el que se lleva a cabo nuestra investigación. En la revisión de la literatura realizada, hemos observado que un material presentado en forma de juego fomenta el aprendizaje y la motivación entre el alumnado. Algunos autores establecen que el juego se manifiesta como una forma natural de la actividad humana (Castro, Olmo y Castro, 2002; De Guzmán, 1984). Los principios pedagógicos de Moyles (1990) establecen que: (a) el juego no es la antítesis de trabajo, pues ambos forman parte de las actividades de los individuos en la vida y (b) el juego es potencialmente un excelente medio de aprendizaje. El juego cobra especial relevancia en esta investigación porque los estudiantes participantes tienen una falta de motivación considerable para trabajar y aprender.

Marco metodológico

Teniendo en cuenta el objetivo general de este trabajo, se seleccionó una muestra intencional de 26 estudiantes de 4º de ESO matriculados en matemáticas opción A, en tres grupos diferentes a los que la primera autora impartía clase durante el curso académico 2010-2011. El nivel socio-cultural y académico de estos sujetos era bajo, el lugar donde se encuentra el centro educativo es conflictivo y los estudiantes tenían poco interés tanto por ir a clase como por estudiar. En cuanto a la situación académica de los 26 estudiantes, 6 estaban repitiendo 4º curso y de los 20 restantes, la mayoría tenían aún la asignatura de matemáticas de cursos anteriores sin aprobar. Antes de la aplicación del instrumento de recogida de datos, estos estudiantes ya habían trabajado en clase el bloque de aritmética y parte del bloque de álgebra, en concreto el tema de enunciados algebraicos y de ecuaciones e inecuaciones.

Instrumento de recogida de datos

Las características del alumnado hicieron necesario utilizar un instrumento de recogida de datos que despertase su interés, por lo que planteamos un instrumento en forma de juego: el dominó, con el que los estudiantes están bastante familiarizados.

La profesora de los estudiantes (primera autora de este trabajo) aplicó el instrumento en dos fases: (a) Construcción del dominó: fase individual donde los estudiantes tenían que traducir por escrito algunos enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico, y (b) Torneo: fase realizada en grupos en la que se pretendía observar las relaciones que establecían los estudiantes al emparejar distintas representaciones de un mismo enunciado algebraico. Esta segunda fase tiene las características de una entrevista clínica no estructurada donde a los estudiantes se les planteó una situación y se les dejó actuar bajo unas reglas establecidas, interviniendo únicamente si alguna regla era incumplida o se requería la repetición de alguna idea. En este artículo nos centramos en la primera fase, que detallaremos más adelante.

Construcción de la primera fase del instrumento de recogida de datos

En la primera fase nuestro interés se centra en analizar los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados entre los sistemas de representación verbal y simbólico[47]. Para el diseño de esta fase, en primer lugar, revisamos el libro de texto

[47] En Rodríguez-Domingo (2011) puede consultarse la recogida de datos y resultados de la segunda fase del estudio.

utilizado en la clase de los estudiantes y el trabajo previo que habían realizado. Esto permitió determinar las relaciones numéricas que habían manejado estos sujetos: la suma y resta de números, la multiplicidad y divisibilidad, potencias, raíces cuadradas, números consecutivos, pares e impares. Decidimos diseñar 12 enunciados que los estudiantes tenían que traducir de un sistema de representación a otro. Para que hubiera un equilibrio, 6 eran verbales y los otros 6 eran simbólicos.

Las relaciones numéricas son la primera variable de tarea considerada. Teniendo en cuenta las posibles combinaciones de las relaciones numéricas identificadas, de los 6 enunciados, decidimos que uno fuese solo aditivo, otro solo multiplicativo, otro solo de potencia, y los otros tres de las posibles combinaciones de los mismos (ver Tabla 1).

	Aditivo	Multiplicativo	Potencia
Aditivo	✕	✕	✕
Multiplicativo		✕	✕
Potencia			✕

Tabla 1. Relaciones entre los enunciados

Respecto al resto de las variables de tarea consideradas, decidimos trabajar sólo con números naturales, que la mitad de los enunciados fuesen abiertos y la otra mitad cerrados[48], que la mitad tuvieran solo una variable y la otra mitad dos variables, y que la mitad de los enunciados verbales fuesen secuenciales y la otra mitad no. En la Tabla 2 presentamos los doce finalmente enunciados propuestos. En la primera columna se incluyen los enunciados que fueron presentados verbalmente a los estudiantes para su traducción al lenguaje algebraico, y en la segunda columna los enunciados propuestos en representación simbólica para traducirlos a su representación verbal.

Representación verbal	Representación simbólica
Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$x+(x+1)-4$
El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)=2x$
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	$\left(\sqrt{x}\right)^y$
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$x\cdot(x+1)=7x$

[48] Entendemos por "enunciado cerrado" aquel que establece una igualdad entre enunciados, es decir, que equivale a una ecuación.

Representación verbal	Representación simbólica
El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$x^2 - y^2 = 11$
Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo	$(x \cdot y)^3$

Tabla 2. Enunciados para traducir en la primera fase

A partir de estos enunciados configuramos la tarea propuesta a los estudiantes que fue presentada en una hoja en formato A3. En dicha hoja había unas fichas de dominó incompletas simulando una partida ya jugada, de modo que los estudiantes tenían que ir rellenando los huecos que aparecían para que fuera correcto el emparejamiento de fichas hecho (ver Figura 2).

Como se puede observar en la Figura 2, hay fichas donde en un extremo hay un enunciado verbal y la ficha junto a ella está en blanco. Para que estas fichas puedan emparejarse, en la parte en blanco debe estar la representación simbólica correspondiente al enunciado dado. El procedimiento es análogo con todas las fichas.

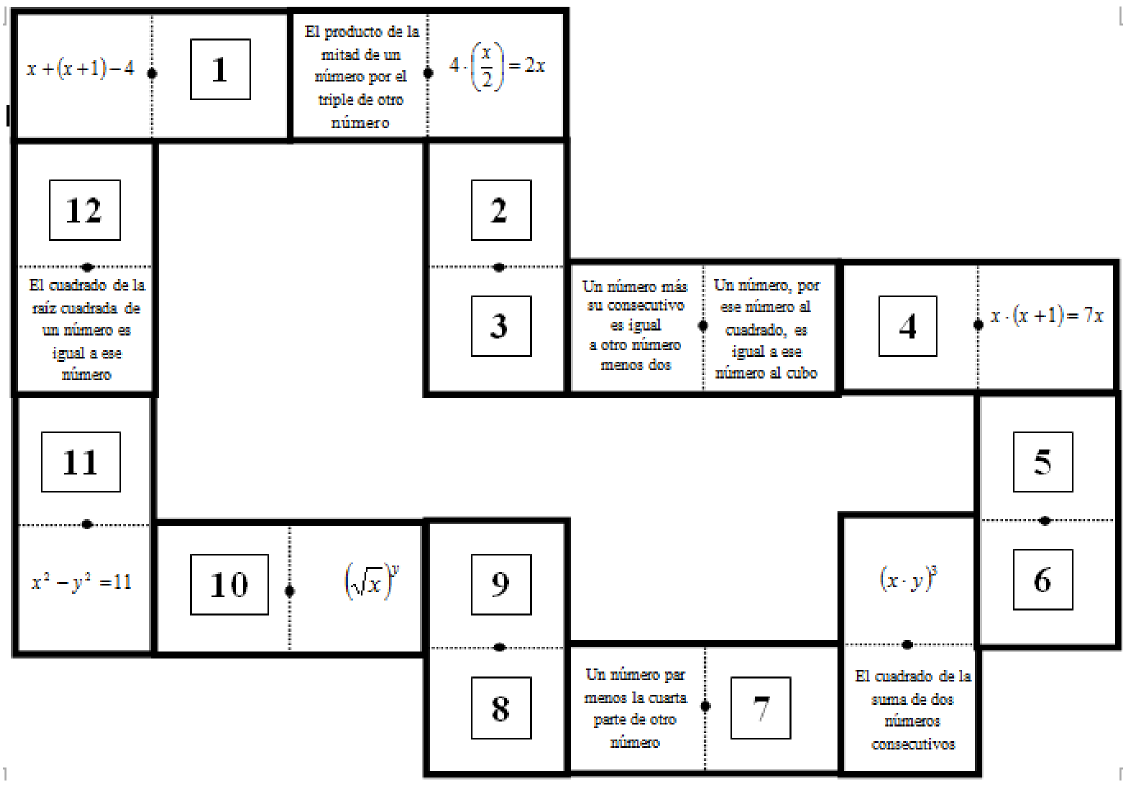


Figura 2. Documento para la primera fase de la recogida de información

Aplicación primera fase

Pedimos a los estudiantes que anotasen el nombre en su hoja de trabajo y que completaran el dominó de forma individual. Informamos a los estudiantes de la forma en que debían rellenar las partes en blanco y de la ausencia de fichas dobles o fichas en blanco (cómo ocurre en el dominó clásico).

Análisis de datos

En el análisis de datos de la primera fase se atendió al tipo de traducción (de simbólico a verbal o viceversa) que los estudiantes realizaron en cada caso, al tipo de error en que incurrieron, la frecuencia con que se cometió cada error y el enunciado en el que se produjo.

En primer lugar hicimos un recuento, para cada estudiante, de los enunciados que eran correctos, cuáles habían dejado en blanco, si alguno era dudoso y cuáles eran erróneos. En la Tabla 3 incluimos estos últimos.

De Simbólica a Verbal	Nº Errores	De Verbal a Simbólica	Nº Errores
Enunciado 2	1	Enunciado 1	13
Enunciado 5	4	Enunciado 3	7
Enunciado 6	2	Enunciado 4	1
Enunciado 9	4	Enunciado 7	8
Enunciado 10	2	Enunciado 8	14
Enunciado12	2	Enunciado 11	0
Total	15	Total	43

Tabla 3. Número de errores en la traducción de enunciados

Para determinar el tipo de error, utilizamos la categorización presentada en la Tabla 4, que surge de categorías consideradas en estudios previos sobre errores, adaptándolas a nuestra investigación y a las respuestas dadas por los estudiantes.

Categoría	Subcategoría o tipo	Código
I. Según la completitud del enunciado	Incompletos	I.1
	Desmedidos	I.2
II. Derivados de la aritmética	Paréntesis	II.1
	Fracción - Producto	II.2
	Potenciación – Producto	II.3
	Suma – Producto	II.4
	Fracción - Potenciación	II.5
III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico	Generalización	III.1
	Particularización	III.2
	Variables	III.3
	Complicación estructural	III.4

Tabla 4. Clasificación de errores

En esta categorización, distinguimos tres grandes grupos de errores: (a) según la completitud del enunciado, (b) derivados de la aritmética y (c) derivados de las características propias del lenguaje algebraico. La primera hace referencia a errores que tienen que ver con enunciados en los que falta o sobra algún símbolo o palabra para que la expresión, ya sea simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. Si falta, se corresponden con la subcategoría de “incompletos” (I.1) y, si sobra, con la subcategoría “desmedidos” (I.2).

En los errores *derivados de la aritmética* consideramos aquellos que provienen de la incorrecta interpretación de los símbolos, operaciones o relaciones entre ellos. Distinguimos cinco subcategorías. La subcategoría “paréntesis” (II.1) corresponde a errores debidos a la mala posición de un paréntesis o a la falta del mismo y que hacen que la expresión algebraica no sea correcta. Las demás subcategorías se refieren a errores en los que las operaciones referidas en el nombre de la subcategoría no son correctamente interpretadas. Por ejemplo, si se requiere representar verbalmente el enunciado dado por $\left(\sqrt{x}\right)^{y}$, y los sujetos lo enuncian como “la raíz cuadrada de un número por otro número distinto”, entendemos que ha cometido un error en la interpretación de la potencia, al haber expresado en su lugar un producto (II.3).

Consideramos errores dentro de la categoría III aquellos que *derivan de las características propias del lenguaje algebraico* usado al interpretar los enunciados verbales o simbólicos, entendiendo como tales aquellos errores que son propios del uso del simbolismo algebraico. En esta categoría diferenciamos otros tipos de errores:

a) Errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, en vez de especificar que en la expresión simbólica $x+(x+1)-4$ “se resta el número cuatro”, expresa “se resta un número par” (III.1).

b) Errores debidos a la particularización de números o relaciones concretas de una expresión general (III.2). Por ejemplo, cuando se les pide que traduzcan simbólicamente el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” y lo expresan particularizando el número “par” a un número concreto, por ejemplo $2-\frac{x}{4}$.

c) Errores *de variable*[49] (III.3) cuando no se distingue de manera correcta el uso de distintas variables/incógnitas en el enunciado. Un ejemplo lo encontramos cuando al representar de forma simbólica el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a

[49] Debido a las características de los enunciados utilizados en este trabajo, no se está realizando una distinción entre si la letra utilizada tiene papel de variable o de incógnita.

otro número menos dos", el sujeto representa con el mismo símbolo ambas variables pese a corresponder a números diferentes.

d) Errores de *complicación estructural* (III.4) son aquellos en el que los sujetos no interpretan apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo, un sujeto que expresa el enunciado "El cuadrado de la suma de dos números consecutivos" como $x+(x+1)=x^2$.

En la Tablas 5 presentamos un resumen del tipo de errores en que incurren los estudiantes al traducir enunciados de forma simbólica a verbal, y viceversa, de la frecuencia de dichos errores, así como el enunciado donde se han producido y los sujetos que los han cometido.

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
		De simbólica a verbal	
I.1	3	5	3B, 6B
		10	9B
I.2	1	5	3B
II.3	7	6	4B, 9C
		9	6B, 9B, 2C, 9C
		10	4B
III.1	4	2	4B
		5	4ª
		10	4B
		12	4B
III.3	2	5	9B
		12	8B
		De verbal a simbólica	
I.1	5	7	3A, 3B, 5B, 6B, 1C
I.2	4	1	5A, 4B, 6B, 3C
II.1	2	7	3A, 1C
II.2	2	1	5B
		8	2ª
II.3	4	1	7A, 2B, 3B, 7C
II.4	1	4	7B
II.5	1	8	5ª
III.2	7	8	2A, 5A, 4B, 5B, 6B, 6C, 7C
III.3	13	1	7A, 3B, 6B, 7B, 8B, 9B
		3	5A, 7A, 6B, 8B, 9B
		8	6A, 7ª
III.4	15	3	8A, 6C
		7	2A, 6A, 3B, 5B, 6B, 1C, 9C
		8	4A, 7A, 8B, 9B, 1C, 5C

Tabla 5. Tipo de errores y frecuencia al transformar de verbal a simbólica

Discusión de resultados

La información recogida en la Tabla 5 nos permite observar que al transformar enunciados del sistema de representación simbólica a verbal, en la categoría debida a errores provenientes de la aritmética, los estudiantes incurren en errores debidos al mal uso de la interpretación de potencias y producto (II.3), mientras que no incurrieron en errores notados por II.1, II.2, II.4 y II.5. De las categorías de errores relacionadas con el álgebra, los sujetos incurren en errores debidos a generalización (III.1) y errores de variables (III.3). Sin embargo, dentro de esta categoría, no se han producido errores de particularización de elementos (III.2) ni debidos a la complicación estructural (III.4).

En cuanto a la traducción de enunciados del sistema de representación verbal al simbólico, destaca el hecho de que los errores debidos a la particularización (III.2), se produce únicamente en el enunciado 8, *un número par menos la cuarta parte de otro número*, pues los sujetos toman un número par concreto para expresar la relación de manera simbólica. Los errores relacionados con variables (III.4) se encuentran en los enunciados 3, 7 y 8. En el tercer enunciado, se producen errores al no expresar de manera correcta dos números consecutivos de manera simbólica. El sujeto 8A expresa la suma dos números consecutivos como $x+1x$ y el sujeto 6C como $x+x+2$. En el enunciado 7 (*el cuadrado de la suma de dos números consecutivos*) se producen errores por cambiar el orden de las operaciones indicadas, expresando los sujetos 1C y 9C el cuadrado de la suma como la suma de los cuadrados, y el sujeto 2A expresa simbólicamente un enunciado que no corresponde con la expresión verbal que se le proporciona ($x+(x+1)=x^2$). Por último, en el caso del enunciado 8 (*un número par menos la cuarta parte de otro número*) los errores de complicación estructural (III.4) provienen de que el sujeto 7A realiza una interpretación incorrecta de un número par cualquiera, expresándolo como x^2 y los sujetos 8B y 1C como $x+2$.

Una vez analizados los datos, observamos que en el trabajo escrito, el 75% de los errores analizados correspondían a las traducciones de verbal a simbólico, además, casi todos los errores se debían a la confusión de las operaciones potenciación y producto, a que no interpretaban correctamente la estructura del enunciado algebraico o a la particularización. Estos resultados coinciden con los obtenidos en 2008 en el trabajo realizado por Ruano et al. anteriormente mencionado.

Conclusiones

Hemos construido un instrumento que nos ha permitido obtener información, en particular, en la primera fase que consideramos en este artículo, nos ha permitido realizar un análisis y una clasificación de los errores en los que incurren los estudiantes al realizar traducciones por escrito de enunciados algebraicos.

A partir de estudios previos y de las respuestas encontradas en los trabajos de los estudiantes, hemos construido una categorización que ha permitido realizar un análisis en la traducción de enunciados en los dos sentidos en términos de errores, obteniendo que se produjeron más errores al pasar de la representación verbal a la simbólica. Todo este proceso de análisis nos ha servido como primer paso para indagar sobre la capacidad de los estudiantes al realizar traducciones y en su comprensión de enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados, lo que nos ha llevado a la consecución del objetivo general propuesto en esta investigación.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Castro, E., Olmo, Mª. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Dto. Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada

Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly, 88*, 286-290.

De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton” (Ed.). *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (*JAEM)* (pp. 49-85). Tenerife: Editor.

Fernández, F. (2001). El problema de los “problemas algebraicos”. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 137-147). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, **7***(3), 229-240.

MacGregor, M. (1990). Writing in natural language helps students construct algebraic equations. *Mathematics Education Research Journal, 2*(2), 1-11.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3*(1), 93-166.

Moyles, J. (1990). El juego en la educación infantil y primaria. Morata. Madrid.

Palarea, Mª. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna. Consultado el 10 de febrero de 2011 en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106509_archivo.pdf

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona: Horsori.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria.* Trabajo de Fin de Máster. Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1751/

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 169-181.

GRUPO:

CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR (DFP)

Coordinadora: Lourdes Figueiras Ocaña, Universitat Autónoma de Barcelona

DFP1-Caracterización del conocimiento matemático de profesores de educación primaria y secundaria (Nielka Rojas, Pablo Flores y José Carrillo)

DFP2-Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales (Jeannette Vargas, Mª Teresa González y Salvador Llinares)

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Nielka Rojas
Pablo Flores
Universidad de Granada
José Carrillo
Universidad de Huelva

Resumen

En este escrito se presenta un resumen del trabajo de tesis en curso denominado Caracterización del Conocimiento Matemático de profesores de Educación Primaria y Secundaria. Investigación que centra su interés en caracterizar el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas que tienen los profesores de educación primaria y secundaria, especialmente aquellos profesores que a través de la experiencia y el continuo aprendizaje han desarrollado una comprensión más profunda de las matemáticas elementales. Nos centramos en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas y en cómo este conocimiento se pone en juego al enseñar una unidad de enseñanza referida a los Números Racionales. La investigación se enmarca en una perspectiva interpretativa y su diseño corresponde al estudio de caso (Cohen y Manion, 1990).

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, profesorado de primaria, profesorado de secundaria, números racionales

Abstract

This paper presents an ongoing PhD dissertation which aims to characterize the mathematical knowledge of primary and secondary teachers. We are especially interested in those teachers which during their experience and continuous education have developed a deep comprehension of elementary mathematics. We focus on the professional knowledge of mathematics teachers and the way they use it when they teach a unit on rational numbers. Our investigation is done using an interpretative perspective, and has been designed as a case study (Cohen y Manion, 1990).

Keywords: Mathematical Knowledge for Teaching, Primary teachers, Secondary Teachers, rational numbers

---

Rojas, N.; Flores, P.; Carrillo, J. (2012). Caracterización del conocimiento matemático de profesores de educación primaria y secundaria. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 395-400). Ciudad Real: SEIEM.

El estudio sobre el conocimiento profesional de los profesores y los efectos de estos conocimientos en la enseñanza y en el aprendizaje de los alumnos, es un tema de interés en investigaciones actuales en el ámbito de la educación. En la literatura se hace alusión al conocimiento profesional como el conocimiento en acción (Schön, 1983; Ponte, 1994). Este conocimiento se basa principalmente en la experiencia y la reflexión (Ponte, 1994; Ponte y Chapman, 2006). Específicamente, se atiende al conocimiento profesional del profesor como al conjunto de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y del que hace uso en el desarrollo de su trabajo docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Climent, 2002). En el contexto de nuestro trabajo, el foco de interés se centra en el conocimiento profesional más específico: el que dispone el profesor para la enseñanza de las matemáticas. Una importante contribución al estudio del conocimiento profesional de los profesores aparece en los trabajos de Shulman (1986; 1987). Estos trabajos centraron su atención en el profesor, desde una perspectiva del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza y materia a enseñar, intentando completar lo producido en los años 80, donde el interés se había enfocado en los aspectos generales de la enseñanza más que en el conocimiento del profesor como enseñante de un contenido. Estos estudios han sido reconocidos como precursores en intentar determinar los componentes del conocimiento base que debe tener un profesor para la enseñanza de su disciplina (Shulman, 1987), de modo, que permita combinar adecuadamente la comprensión pedagógica, el conocimiento del contenido para la enseñanza de un dominio específico y el conocimiento del contenido del dominio específico.

El grupo de Deborah Ball, en la Universidad de Michigan, está llevando a cabo trabajos eminentes para caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza, definirlo con precisión y examinar cuál es el conocimiento que disponen grupos de profesores de educación primaria. Ellos han logrado caracterizar con detalle el conocimiento matemático para la enseñanza, como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.374), conceptualización que surge de estudios referentes a la práctica docente, en el ámbito matemático, y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores, y que a su vez requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento de la materia a enseñar (Ball, Hill y Bass, 2005). Estos investigadores, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman, proponen un modelo de Conocimiento

Matemático para la Enseñanza, distinguiendo entre Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido. Se propone una división del dominio de Conocimiento del Contenido, planteado por Shulman, segmentando éste en: Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento del horizonte matemático y Conocimiento Especializado del Contenido. Esto nos lleva a estudiar los componentes del conocimiento matemático y del conocimiento pedagógico para la enseñanza, que subyacen en las acciones de los profesores que tienen una comprensión más profunda de las matemáticas elementales, específicamente, referente al contenido matemático escolar de los Números Racionales.

En este trabajo surge la necesidad de recoger algunos aspectos que están relacionados con estas cuestiones, con el objetivo de puntualizar hechos referentes a nuestro problema. Específicamente, en aspectos conceptuales referentes al proceso de identificación y selección de docentes expertos. Con los años, las investigaciones han intentado descubrir los misterios de la experiencia, estudiando a diversos sujetos en variados ámbitos profesionales. Uno de los estudios más comunes de conocimiento, en educación, ha sido contrastar las actuaciones de los profesores experimentados y novicios, con el objeto de profundizar en sus actuaciones. Comúnmente, es considerado un docente experimentado o experto remitiéndose a características secundarias, como: años de experiencia docente, recomendaciones de sus pares y directivos de los centros donde ejercen su labor. Por otra parte, normalmente, los métodos de evaluación de la enseñanza como: los resultados de los estudiantes en pruebas nacionales e internacionales, son usados como medios para identificar a los docentes expertos, sin embargo las evaluaciones no miden el desempeño de los docentes directamente; como destaca Berliner (2001), "los profesores han de ser juzgados por su desempeño" (p. 467).

No obstante, para efecto de nuestro estudio, consideramos necesario establecer criterios para identificar y seleccionar a profesores expertos, con la finalidad de estudiar el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido que estos profesores manifiestan en su desempeño docente, al enseñar el contenido matemático escolar referente a los Números Racionales. Por otro lado, admitimos la dificultad de identificar y seleccionar a profesores con un nivel de pericia (Schempp, Tan, Manross y Fincher, 1998). Para afrontar el problema nos apoyamos en los estudios que describen etapas del desarrollo profesional de los docentes, que nos proporcionan información para extraer criterios para identificar y seleccionar a profesores expertos de acuerdo a su desempeño profesional. Algunos criterios que han convenido de la revisión de la literatura son: ser docente en ejercicio, con cinco o más años de experiencia docente en aulas; haber enseñado el contenido matemático escolar, alusivo al objeto de estudio de la investigación, más de una vez, en los últimos años de desempeño docente; y ser un docente recomendado por sus pares y por los directivos del centro donde se desempeña. Para efecto de este trabajo nos centraremos en estudiar el conocimiento profesional de profesores chilenos y españoles, por lo cual consideramos necesario contemplar el sistema en que se desempeña el docente. En el caso de los profesores chilenos, deben tener un nivel de desempeño Destacado o Competente según la Evaluación del desempeño docente vigente en Chile; además, tener Excelencia Pedagógica en las evaluaciones de conocimiento disciplinario y pedagógico, realizadas. En el caso de la selección e identificación de los profesores españoles, como en la actualidad España no cuenta con un sistema nacional de evaluación del desempeño profesional docente, únicamente establece evaluaciones que elaboran las administraciones correspondientes a cada comunidad autónoma, nos remitiremos a resultados emitidos por las administraciones que elaboran planes para la evaluación docente.

Continuamos revisando bibliografía de modo de establecer criterios precisos que permitan la identificación y selección de profesores que a través de la experiencia y el continuo aprendizaje han desarrollado una comprensión más profunda de las matemáticas elementales. De esto se desprende uno de los problemas sobre los cuales nos interesa que se centre el debate en el grupo de la SEIEM Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas, específicamente sobre criterios para identificar y seleccionar a profesores con una comprensión más profunda de las matemáticas elementales.

Por otra parte, en el contexto del estudio los datos obtenidos serán cualitativos, el análisis de los datos se realizará a través de una descripción detallada interpretativa. Emplearemos el Análisis didáctico, en el sentido que lo trabaja el grupo PNA de la UGR, iniciado con los trabajos curriculares desarrollados por Rico (1997a; 1997b), como una herramienta metodológica que permita identificar el conocimiento en acción manifestado por los docentes al momento de enseñar. Esta es otra cuestión que nos gustaría discutir, pues consideramos que los componentes que caracterizan al Análisis Didáctico permiten identificar los dominios de conocimiento que describe Ball et al., (2008); es decir, el Análisis Didáctico permite hacer operativo los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59; 389-407.

Ball, D. L., Hill, H.C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, Fall 2005, 14-22.

Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research*, 35(5), 463-482.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. *Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. España.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). Estudio de casos. En *Métodos de Investigación Educativa* (pp. 163-195). Madrid: Editorial. La Muralla S.A.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2006). *Mathematics teachers' knowledge and practices*. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P. (1994). *Mathematics teachers' professional knowledge*. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), Proceedings PME XVIII (pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Rico, L. (Ed.). (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (Ed.). (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Schempp, P., Tan, S., Manross, D., Fincher, M. (1998). Differences in novice and competent teachers' knowledge. *Teachers and teaching*, 4(1), 9-20.

Schön, D. (1983). The reflective practitioner: How professionals think in action. Nova York: Basic Books, Inc., Publishers.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. *Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL DOCENTE UNIVERSITARIO DE PRECÁLCULO. ESTUDIO DE CASOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES

Jeannette Vargas
María Teresa González
Universidad de Salamanca
Salvador Llinares
Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación busca responder a la pregunta ¿Cómo guía el docente la construcción de la función exponencial con estudiantes de precálculo? Para ello se plantea una propuesta de descomposición genética del concepto función exponencial, luego se describe y analiza la práctica del docente sobre la función exponencial integrando el constructo de modelación de descomposición genética (Gavilán, 2005/2010) e identificando cómo usa y justifica el docente los modos de representación simbólica y gráfica y los elementos matemáticos del concepto función exponencial.

Palabras clave: Función exponencial, descomposición genética, docencia universitaria, conocimiento matemático avanzado.

Abstract

In this investigation we intend to answer the question: How does the teacher guide pre-calculus students to building the exponential function? In order to do that, we propose a genetic decomposition of the exponential function. After this, we analyze teachers' practices concerning the exponential function, integrating the construct of modeling of genetic decomposition (Gavilán, 2005/2010) and identifying how teachers use and justify symbolic and graphic representations, and the mathematical elements involved in the exponential function.

Keywords: Exponential function, genetic decomposition, university education, advanced mathematical knowledge.

Vargas, J.; González, M.T.; Llinares, S. (2012*).* Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 401-405). Ciudad Real: SEIEM.

La propuesta de descomposición genética del concepto de función exponencial se ha construido partiendo de los presupuestos del marco teórico APOE (Dubinsky, 1991), de un estudio histórico del concepto de función exponencial, así como de los informes de investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática.

Esta descomposición se plantea con los elementos matemáticos que configuran el concepto de función exponencial, las relaciones lógicas establecidas entre estos elementos donde se incluyen las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo y las diferentes formas de representación. Se entiende por elemento matemático *"el producto de una disociación o de una segregación del concepto vinculada al concepto y a sus propiedades"* (Piaget, 1963). Estos elementos matemáticos se han obtenido a partir del estudio del concepto desde la matemática, la investigaciones arriba mencionadas y de las propuestas curriculares y se concretan en: el concepto de exponente, la estructura aditiva de los exponentes, la estructura multiplicativa de las potencias, la noción de covariación, el dominio y rango, la razón de cambio de la función, el crecimiento y la tendencia.

Con estos referentes teóricos, en esta investigación se realiza un estudio de dos casos de docentes universitarios de precálculo. Los instrumentos utilizados para la recogida de datos de cada sesión de aula fueron: una entrevista inicial, un audio y videograbación de las sesiones correspondientes a la enseñanza de la función exponencial y una entrevista final para cada sesión de contraste entre el investigador y el docente. Los videos junto con las grabaciones de voz tanto de las clases como de las entrevistas fueron transcritos en su totalidad e incorporados a la unidad hermenéutica del software.

En la primera fase del análisis se identifican diferentes segmentos de cada sesión y la segunda fase del análisis – fase en la que se encuentra el desarrollo de esta investigación – se rehace la clase del docente a partir de la descomposición genética planteada reagrupando los segmentos de acuerdo con la modelación del mecanismo que el profesor esté propiciando. Los resultados de este análisis se presentan a través de "viñetas" consideradas como un informe de la práctica del profesor (Gavilán, et al. 2007) en donde, entre otros, se incluye la inferencia realizada por los investigadores sobre la modelación del mecanismo de construcción identificado en la práctica.

Se han organizado viñetas correspondientes a los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación y generalización respecto a la construcción del concepto matemático. Como ejemplo se resume brevemente la viñeta correspondiente a la modelación del mecanismo de coordinación que realiza el caso 1. Esta modelación se ha identificado en las sesiones de clase 1, 2 y 5 mediante diferentes tareas que se describen a continuación:

A. En la sesión de la clase 1 se utiliza el contexto de interés compuesto y se modela el mecanismo de coordinación entre diferentes funciones exponenciales, haciendo uso de su representación simbólica señalando que lo que tienen en común estas funciones es que la variable está en el exponente. Se vuelve a insistir en este hecho durante la clase 2 con la función $y = 2^x$.

B. En la sesión de clase 1, se recuerda el tipo de crecimiento de la función lineal y la función cuadrática mediante el cálculo del cociente incremental para poder, en la sesión de clase 2, comparar este último crecimiento con el de la función exponencial $y = 2^x$. En ambas tareas se trata de modelar el mecanismo de *coordinación* a nivel aritmético comparando para ciertos valores de *x* los valores de $y = x^2$ con los correspondientes valores de $y = 2^x$ y observando qué significa esto en el registro gráfico. Es importante observar que no se realiza el análisis a través del cociente incremental sino que se hace punto a punto. De manera implícita se coordina el proceso correspondiente a la variación aritmética en la variable independiente y el consecuente cambio geométrico que se está generando en la variable dependiente.

C. En la sesión 2 se trabaja con la gráfica de la función $y = 2^x$ y se establecen comparaciones con las gráficas de otras funciones exponenciales con lo que se consigue modelar el mecanismo de *coordinación entre procesos de curvas exponenciales para establecer la relación entre el tipo de crecimiento y el valor correspondiente a la base permitan, el establecimiento del eje x como asíntota, su corte con el eje y, el dominio y el rango de las funciones exponenciales*. Así se hace una comparación entre varias funciones exponenciales específicas a partir de su gráfica y se establece que pueden ser tanto crecientes como decrecientes asociando este crecimiento al de un "tobogán".

D. En la sesión de clase 5, con el programa Derive, se realizan nuevamente las gráficas, en una misma pantalla, de de las funciones exponenciales $y=2^x$ $y=3^x$, para volver a identificar el crecimiento de cada una de ellas antes de cero y después de este valor. Luego, el profesor encamina la modelación del mecanismo de coordinación, haciendo uso de la expresión simbólica de cada función $y=2^x$ $y=3^x$ $y=e^x$ y la comparación de las tres curvas para dichas funciones exponenciales.

Referencias bibliográficas

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking,*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Gavilán, J.M. (2005/2010) *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Publicada en 2010 por Edición Digital @tres, S.L.L.

Gavilán, J.M., García, M; Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25 (2), pp. 157–170

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis doctoral inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Martínez, G. (2000): Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Martínez, G. (2006): Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. En: C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán y C. Navarro (Eds.) *Matemática Educativa.*

Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula (pp. 131-173). México: Editorial Díaz de Santos.

Martínez, C.; Penalva, M.C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, vol. 24*, pp. 285–297.

Piaget, J. (1963) Las Estructuras Matemáticas y las Estructuras Operatorias de la Inteligencia. *La Enseñanza de las Matemáticas.* Madrid: Editorial Aguilar.

GRUPO:

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL (IEMI)

Coordinadores: Carlos de Castro Hernández, Universidad Complutense

Mequè Edo Baste, Universitat Autònoma de Barcelona

IEMI1- ***Contextos de vida cotidiana para desarrollar el pensamiento matemático en Educación Infantil*** (Àngel Alsina i Pastells)

IEMI2- Buscando indicadores alternativos para describir el desarrollo del juego de construcción con niños de 2 y 3 años (Carlos de Castro y Gonzalo Flecha)

IEMI3- ***Situaciones interdisciplinarias para el desarrollo del pensamiento matemático en Educación Infantil en la formación de maestros*** (Mequè Edo i Basté)

IEMI4- ***Diagnosis del pensamiento matemático en escolares de 3 a 6 años. Proyecto*** (Catalina María Fernández Escalona)

IEMI5- ***Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica en el Grado de Educación Infantil. De la manipulación a la comunicación virtual*** (Guadalupe Gutiérrez y Ainhoa Berciano)

IEMI6- ***Estrategias de resolución de problemas numéricos de sumar y restar en la etapa infantil*** (María Salgado Somoza y Mª Jesús Salinas Portugal)

CONTEXTOS DE VIDA COTIDIANA PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN INFANTIL

Àngel Alsina i Pastells
Universidad de Girona. España

Resumen

En esta comunicación se argumenta la importancia de trabajar a partir de contextos de vida cotidiana para desarrollar el pensamiento matemático en las primeras edades. Partiendo de los principios de la Educación Matemática Realista, se presenta una posible forma de trabajar a partir de contextos de vida cotidiana, y más genéricamente, una posible manera de formar al profesorado de Educación Infantil. La presentación finaliza con la exposición de situaciones de aprendizaje de las matemáticas en contextos de vida cotidiana implementadas por profesorado del 2º ciclo de Educación Infantil que, en realidad, son los verdaderos artífices del trabajo que se presenta.

Palabras clave: Educación matemática, prácticas matemáticas, contextos de aprendizaje, vida cotidiana, Educación Infantil

Abstract

This paper argues for the importance of working from everyday contexts to develop mathematical thinking at an early age. Based on the principles of Realistic Mathematics Education, it presents a way of working from everyday contexts, and more generically, a way to train preschool teachers. It ends by presenting everyday mathematics learning situations used by professors of 2nd cycle preschool education courses who are, in reality, the true creators of the work presented.

Key words: Mathematics education, mathematics practicals, learning contexts, everyday life, preschool education.

Alsina, A. (2012*)*. Contextos de vida cotidiana para desarrollar el pensamiento matemático en Educación Infantil. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 409-426). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

La investigación en Educación Matemática en las primeras edades, así como la experiencia acumulada en formación inicial y permanente de maestros de Educación Infantil, me han permitido constatar algunas evidencias que expongo a continuación:

- Muchos profesionales necesitan actualizar sus conocimientos disciplinares y didácticos para enseñar matemáticas en las primeras edades, sobre todo a partir de la implementación de currículos orientados a la adquisición de capacidades.
- La mayoría de estos profesionales reciben estos conocimientos de forma transmisiva y descontextualizada, por parte de un experto en la materia (a través de libros, artículos, conferencias, etc.).
- Tanto estos profesionales en activo como las futuras maestras y maestros de Educación Infantil reivindican que para aprender a enseñar matemáticas no necesitan sólo saber leer palabras, o escuchar discursos. Descrito de forma muy simple, en múltiples diálogos reflexivos afirman que alguna cosa no funciona teniendo a un grupo reducido de expertos diciendo qué debe hacerse en las aulas y otro grupo muy extenso de profesorado en activo y aprendices de maestro haciéndolo. Este es un aspecto que ha dado lugar a mucha literatura (para profundizar sobre el tema consultar Esteve, Melief y Alsina, 2010), pero que a grandes rasgos pretende señalar que las personas que se forman, tanto en la formación inicial como permanente, reciben un conocimiento ya construido que a menudo es difícilmente aplicable en su propio contexto.

En esta comunicación se pretende romper con esta forma esteriotipada de aprender a enseñar matemáticas. Partiendo de los principios de la Educación Matemática Realista, se presenta una posible forma de trabajar a partir de contextos de vida cotidiana, y más genéricamente, una posible manera de formar al profesorado de Educación Infantil. La presentación finaliza con la exposición de situaciones de aprendizaje de las matemáticas en contextos de vida cotidiana implementadas por profesorado del 2º ciclo de Educación Infantil que, en realidad, son los verdaderos artífices del trabajo que se presenta.

Contextos de aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil

Desde el ámbito de la Educación Matemática, un contexto es una situación más o menos problemática que puede ser objeto de estudio y que genera preguntas o problemas que requieren las matemáticas para contestarlas o resolverlas. Desde esta perspectiva, en matemáticas un contexto no debería entenderse sólo como el contexto del aula; el contexto social o familiar de la escuela o del alumno; o el contexto histórico; sino que es un término mucho más general que engloba todas aquellas situaciones y actividades que tienen sentido para el alumno y fomentan su pensamiento matemático crítico, de acuerdo con Niss (1995). Ante esta perspectiva, surgen algunas preguntas: ¿por qué es interesante utilizar contextos en la clase de matemáticas?; ¿qué tipos de contextos podemos utilizar?; ¿qué funciones tienen?; etc.

Reeuvijk (1997), del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht (Holanda), expone cinco motivos para utilizar contextos:

- En primer lugar, pueden motivar a los alumnos. Asimismo, pueden ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Pueden aclarar por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia, y pueden contribuir a que los alumnos entiendan el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana.
- En segundo lugar, el uso de contextos puede favorecer que los propios alumnos aprendan a usar las matemáticas en la sociedad, además de descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores.
- En tercer lugar, los contextos pueden incrementar el interés de los alumnos por las matemáticas y la ciencia en general.
- En cuarto lugar, los contextos pueden despertar la creatividad de los alumnos, impulsarlos a utilizar estrategias informales y de sentido común al afrontar, por ejemplo, la resolución de una situación problemática o de un juego.
- Y en quinto lugar, un buen contexto puede actuar como mediador entre las situaciones concretas y las matemáticas abstractas.

El uso de contextos en la clase de matemáticas, pues, puede contribuir a facilitar el aprendizaje de esta disciplina, pero sobre todo a comprender cuál es el sentido de las matemáticas, cuáles son sus verdaderas funciones: formativa, teniendo en cuenta que los contextos permiten pasar progresivamente de situaciones concretas o situaciones abstractas (matematización progresiva); instrumental, al considerar que los contextos son, en realidad, herramientas que favorecen la motivación, el interés o el significado de las matemáticas; y aplicada, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares y, por lo tanto, contribuir a la formación de personas matemáticamente más alfabetizadas.

En relación a los contextos de aprendizaje que pueden utilizarse para desarrollar el pensamiento matemáticos durante las primeras edades, Alsina (2010) plantea una comparación muy simple: de la pirámide de la alimentación a la pirámide de la educación matemática. En este símil, se parte de la base que la medicina especializada en nutrición ha sabido educar a la sociedad en materia de alimentación de una forma muy simple, a través de la pirámide de la alimentación.

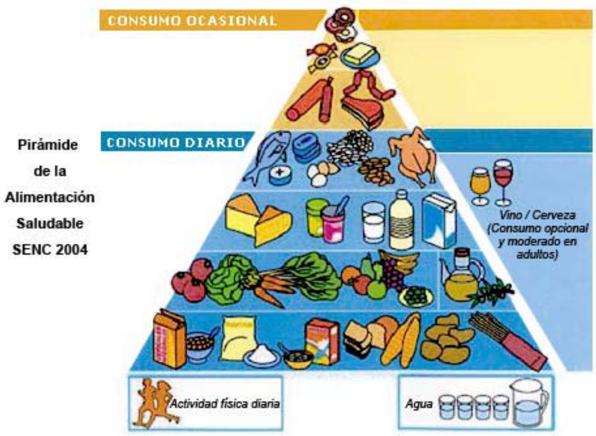


Figura 1: Pirámide de la alimentación

La Pirámide de Nutrición Saludable (SENC, 2004) que se muestra en la Figura 1 es un gráfico que, de forma muy visual, indica el tipo de alimentos que son necesarios para llevar una dieta equilibrada y su frecuencia de consumo más recomendable. No descarta ninguno, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a una ingesta ocasional y, por eso, es una herramienta muy útil para el consumidor preocupado por hacer de su alimentación una garantía de salud.

Si partimos de la base que la educación en general y la educación matemática en particular son también una necesidad básica podemos diseñar, como en el caso de la alimentación, una pirámide de la educación matemática en la que se presenten de forma sencilla distintos contextos para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable.

Figura 2: Pirámide de la educación matemática

Como en el caso de la pirámide de la alimentación, no se descarta ningún contexto, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional durante las primeras edades de escolarización y, por eso, puede ser una herramienta muy útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

En la base de este diagrama piramidal están los contextos que necesitan todos los niños y niñas para aprender y que, por lo tanto, se podrían y deberían "consumir" diariamente para desarrollar el pensamiento matemático. Ahí están las situaciones problemáticas que surgen en la vida cotidiana de cada día; la observación y el análisis de los elementos matemáticos de nuestro contexto (matematización del entorno); el movimiento como actividad básica para interiorizar, por ejemplo, conocimientos geométricos diversos; la posibilidad de vivenciar elementos matemáticos a través del propio cuerpo; la manipulación con materiales diversos, dado que la acción sobre los objetos posibilita que los alumnos puedan elaborar esquemas mentales de conocimiento; o bien el uso de juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben "tomarse" alternativamente varias veces a la semana, como las situaciones de aprendizaje mediante recursos literarios con un contenido matemático: cuentos populares, narraciones, novelas, canciones, adivinanzas, etc.; o los recursos tecnológicos como el ordenador y la calculadora. Por último, en la cúspide, se encuentran los contextos de aprendizaje que deberían usarse de forma ocasional: los libros o cuadernos de actividades. Sin embargo, los cuadernos continúan ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas o, dicho de otra manera, en el trabajo diario de buena parte del profesorado de Educación Infantil (Olmos y Alsina, 2010). Por lo que, en realidad, en la práctica diaria de muchas maestras y maestros este organigrama piramidal está invertido: en la base están los cuadernos de actividades, que vendrían a ser como las carnes grasas o los pasteles; mientras que la matematización del entorno, el uso de materiales manipulables, juegos, etc. "se consumen muy poco". En nutrición, la inversión de la pirámide conlleva problemas de salud, como por ejemplo la obesidad. En educación matemática, la inversión del organigrama piramidal que aquí planteamos puede conllevar también graves problemas: aprendizajes poco significativos, desmotivación, falta de comprensión, etc., y son los que han dado lugar, en términos generales, a una escasa competencia matemática.

De acuerdo con los parámetros anteriores, en esta comunicación vamos a hacer especial hincapié en los contextos de aprendizaje que se encuentran en la base de la pirámide de la educación matemática, es decir, en aquellos contextos que deberíamos usar más a menudo para desarrollar el pensamiento matemático de los niños y niñas de las primeras edades: los contextos de vida cotidiana.

Enseñar matemáticas en las primeras edades a partir de contextos de vida cotidiana: hacia una sistematización de la práctica educativa

Para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en Educación Infantil a través de contextos de vida cotidiana es recomendable llevar a cabo este tipo de prácticas educativas de forma periódica y sistematizada. En el Cuadro 1 se establecen diversas fases de trabajo que pueden favorecer la sistematización en este tipo de prácticas, y seguidamente se presentan algunas experiencias implementadas en diversos centros escolares de la geografía española (Alsina, 2011).

Educación matemática en contextos de vida cotidiana: fases de trabajo	
Fase 1: matematización del contexto	- En esta fase todavía no intervienen los alumnos. - Consiste en analizar todos los contenidos matemáticos que pueden trabajarse en el contexto de aprendizaje elegido.
Fase 2: trabajo previo en el aula	- Se presenta el contexto de aprendizaje: el patio de la escuela; la plaza del pueblo; etc. - Se inicia un diálogo con los alumnos para recoger sus conocimientos previos y experiencias a través de preguntas como: ¿qué formas hay en …? - Entre todos se decide el material necesario para documentar el trabajo en contexto: una cámara digital, una cinta métrica, una calculadora, una libreta para anotar los descubrimientos o para dibujar, etc.
Fase 3: trabajo en contexto	- Los alumnos descubren las matemáticas que hay en el contexto de aprendizaje elegido (formas, etc.). - Documentan lo que van descubriendo a través de fotografías, dibujos, anotaciones en la libreta, etc. - El docente interviene haciendo preguntas, sobre todo, más que dando explicaciones.
Fase 4: trabajo posterior en el aula	- Se establece un diálogo con los alumnos para que comuniquen lo que han descubierto, procurando que utilicen un lenguaje matemático adecuado. - Se usan las imágenes como base para trabajar aspectos matemáticos diversos (reconocer, relacionar u operar cualidades sensoriales, cantidades, posiciones, formas o atributos mesurables). - Se representa gráficamente el trabajo realizado en contexto a través de un póster, en una ficha, etc.

Cuadro 1: Fases de trabajo

A continuación se describe con detalle el planteamiento y la gestión de diversas actividades realizadas en contextos de vida cotidiana. Como se ha indicado, se trata de actividades implementadas en el 2º ciclo de Educación Infantil que, una vez descritas, se ilustran a través de secuencias de imágenes para favorecer que el lector pueda visualizarlas, interpretarlas y adecuarlas al propio contexto.

Actividad 1: Las matemáticas de nuestro patio

Lugar de implementación: CEIP Fernando Feliz, Gerena (Sevilla).

Nivel: 3-6 años

Maestras responsables de la implementación: Araceli Buzón Hoyos, Luisa Mª Martín Ojeda, Eloísa Mateos Falantes y Esperanza Méndez Carrasco.

Reto: descubrir qué acciones pueden hacerse con los materiales que hay en el patio.

Contenidos matemáticos trabajados:

- Agrupamientos según el color, la forma, etc.
- Relaciones de equivalencia: clasificaciones por criterios cualitativos (según el color, etc.).
- Relaciones de orden: ordenaciones por criterios cualitativos (según el tamaño, etc.)
- Correspondencias cualitativas.
- Seriaciones.

Asesoramiento pedagógico: Angel Alsina

Las matemáticas de nuestro patio		
		
En el aula dialogamos con los alumnos para conocer sus conocimientos previos.	En el patio les mostramos los materiales y enseguida empezamos a hacer actividades matemáticas.	Agrupamos las palas de color rojo.

		
Clasificamos las piezas de construcción según su forma.	Asociamos los cubos y las palas según su color (un cubo verde con una pala verde).	Seriamos las palas según su color: “azul, rojo, azul, …”
		
Ordenamos piedras según su tamaño.	En el aula representamos las acciones hechas en el patio en un papel.	Exponemos a las familias el trabajo realizado a través de un mural.

Cuadro 2: Las matemáticas de nuestro patio. CEIP Fernando Feliz, Gerena (Sevilla).

Actividad 2: “Para qué sirven los números”

Lugar de implementación: Col·legi El Bosc de la Pabordia, Girona

Nivel: 5-6 años

Maestras responsables de la implementación: Elisabeth Colomà Costa y Anna Nadal Farreras.

Reto: Descubrir qué funciones tienen los números

Contenidos matemáticos trabajados:

- Reflexión sobre los números, su significado, su presencia en el entorno inmediato y sus utilidades.
- Observación de números escritos en diferentes contextos (en matrículas de coches, en los precios de los productos, etc.)

Asesoramiento pedagógico: Angel Alsina

Para qué sirven los números		
		
Salimos a buscar números en las tiendas, pero los encontramos mucho antes.	En las matrículas de los coches.	En el teléfono público.
		
Llegamos a una tienda y descubrimos que en la puerta hay números que sirven para indicar los horarios de abertura y cierre.	En otra tienda descubrimos números grandes que sirven para indicar cuánto vale una nevera.	En la tienda de deportes descrubrimos el precio de los kayaks.
		
La talla de los zapatos.	¡Y muchos otros números!	En clase imprimimos las fotografías y recordamos dónde estaban los números y para qué sirven. Hemos aprendido que sirven para distinguir y para informar.

Cuadro 3: Para qué sirven los números. Col·legi El Bosc de la Pabordia, Girona.

Actividad 3: "La geometría en el Parque de Yamaguchi"

Lugar de implementación: Colegio San Cernin, Pamplona

Nivel: 3-6 años

Maestras responsables de la implementación: Ana Erro, Ana Estrella Ramírez, Sara Usoz y Beatriz Vázquez

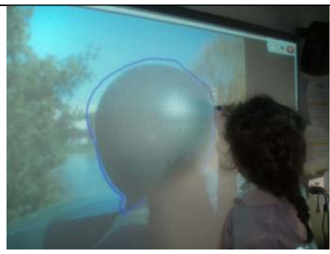
Reto: Descubrir las formas geométricas que hay en el parque

Contenidos matemáticos trabajados:

- Identificación de posiciones de los elementos del parque: dentro-fuera del estanque; delante-detrás de un banco; encima-debajo de un árbol; cerca-lejos de los columpios; a la izquierda-a la derecha del camino.
- Identificación de los giros realizados en el recorrido por el parque.
- Reconocimiento de propiedades geométricas de los objetos del parque (los que ruedan, los que no ruedan, los que ruedan a veces).
- Identificación de objetos con forma de esfera, prisma, cilindro, cono y pirámide.
- Identificación de objetos con forma de triángulo, círculo, cuadrado y rectángulo.
- Reconocimiento de diferentes tipos de líneas en el parque (rectas, curvas).

Asesoramiento pedagógico: Angel Alsina

La geometría en el Parque de Yamaguchi		
		
Antes de ir al parque clasificamos cuerpos geométricos según si ruedan siempre, ruedan	Hacemos recorridos a partir de un mapa en el papel.	Después vamos al Parque de Yamaguchi a aprender geometría.

algunas veces o no ruedan nunca. Clasificamos también figuras planas según el número de lados.		
		
Observamos muchos cilindros (en las farolas, en la valla del estanque, etc.).	Una esfera.	Un círculo.
		
Muchos rectángulos en el banco.	En clase hacemos puzzles con las fotos recortadas de la papelera y de la fuente del parque.	En la pizarra digital observamos las formas y describimos sus propiedades geométricas.

Cuadro 4: La geometría en el Parque de Yamaguchi. Colegio San Cernin, Pamplona.

Actividad 4: "Detectives en el Parque del Mundo"

Lugar de implementación: CEIP Doña Mayor de Navarra, Pamplona

Nivel: 5-6 años

Nombre de las maestras responsables de la implementación: Yolanda Santafé Dencausa; Sonia Jurío Burgui y Raquel de la Rosa Fernández

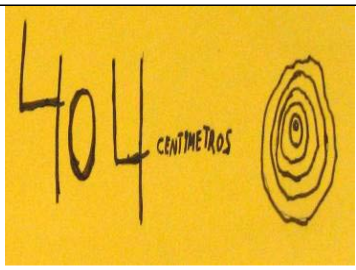
Reto: Encontrar un sistema para medir el perímetro del tronco de un cedro gigante.

Contenidos matemáticos trabajados:

- Comprender los atributos mesurables de los árboles y las unidades, sistemas, y procesos de medición.
- Aplicar técnicas apropiadas, herramientas y fórmulas para determinar mediciones.
- Establecer correspondencias respecto a la medida del tronco de un árbol.
- Elaborar y consensuar un símbolo que represente el diámetro.

Asesoramiento pedagógico. Angel Alsina

<table>
<tr><th colspan="3">Detectives en el Parque del Mundo</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Cada equipo se encarga de medir el perímetro de un árbol con una cinta métrica de 1 metro.</td><td>Con la cinta métrica de 1 metro no alcanzamos a medir el perímetro del cedro del Líbano. Pedimos la cinta a otro grupo, pero aún así es imposible.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Lo medimos con palos, pero cada palo es de diferente longitud.</td><td>Al final decidimos medirlo juntando los brazos y bordeando entre todos el árbol.</td><td>En el aula representamos la medida del cedro.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Después nos colocamos en línea recta y, con una cinta métrica de 5 metros que hay en la clase descubrimos cuánto mide el cedro en total.</td><td colspan="2">Algunas representaciones en el papel del resultado de las medidas, con los círculos concéntricos que sirven para indicar que se trata del perímetro del árbol.</td></tr>
</table>

Cuadro 5: Detectives en el Parque del Mundo. CEIP Doña Mayor de Navarra, Pamplona.

Actividad 5: “Maravillas verdes”

Lugar de implementación: CEIP Lepanto, Mairena del Aljarafe (Sevilla).

Nivel: 4-6 años

Maestras responsables de la implementación: Juani Moreno Gordillo, Águeda Vázquez Vázquez, Irene Penco Olivera, Antonia del Valle Guzmán Díaz, Fátima Rocío Perianez Pérez, Irene Fenoy Pérez.

Reto: Descubrir las matemáticas que hay en las plantas y los árboles del patio de la escuela.

Contenidos de razonamiento logicomatemático:

- Propiedades de los árboles: tamaño (grande-pequeño); forma (redondeada-puntiaguda); textura (rugoso-liso); grosor (grueso-delgado).
- Clasificaciones según diversos criterios: la forma de las hojas (acorazonada-elíptica); el tipo de árboles y plantas; etc.
- Seriaciones según diversos criterios: color de las hojas; frutos del otoño.

Contenidos de numeración y cálculo:

- Cuantificadores imprecisos: muchos-pocos.
- Conteo y ordenación numérica.

- Composición y descomposición de números.
- Representación gráfica de las cantidades observadas.

Contenidos de geometría:

- Identificar los cuerpos geométricos. Asociar estas formas a objetos del entorno.
- Reconocer figuras geométricas.
- Composición de paisajes a partir de figuras geométricas.
- Representación de los conocimientos geométricos del espacio mediante el dibujo del plano del colegio.

Contenidos de medida:

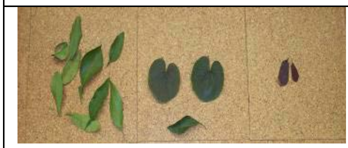
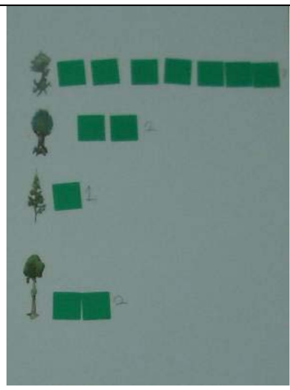
- Utilización de instrumentos de medida convencionales (cinta métrica) y no convencionales (dedos).
- Clasificación según longitud: largo-corto / alto-bajo.
- Reconocer el paso del tiempo en el árbol.

Contenidos de estadística y probabilidad:

- Recogida de datos.
- Representación de datos en un gráfico (diagrama de barras).

Asesoramiento pedagógico: Angel Alsina

Maravillas verdes		
	 	
El patio de nuestra escuela tiene una gran variedad de árboles y plantas.	Observamos algunas cualidades sensoriales, como la textura de los troncos: rugoso-liso.	Grueso y delgado

		
Contamos la cantidad de árboles que hay de cada tipo. En clase los ordenamos de los que hay más a los que hay menos.	Observamos las formas de los distintos árboles. En clase las asociamos a formas geométricas esteriotipadas.	Intentamos medir la altura de los árboles, primero con los dedos y después con la cinta métrica.
 		
En clase clasificamos las hojas de los árboles según el color, la forma, y otros criterios.	Trabajamos la simetría	Y al final votamos la mascota de la clase

Conclusiones

La Educación Matemática aporta alternativas muy válidas para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades: el uso de contextos de vida cotidiana es un claro ejemplo de ello. Sin embargo, es preciso destacar que el uso de contextos de vida cotidiana -o cualquier otro tipo de contexto de aprendizaje- no contribuyen por ellos mismos a la alfabetización matemática, sino que ello depende de cómo los profesionales de la Educación Infantil planteamos y gestionamos las actividades con nuestros alumnos. Las siguientes preguntas pueden orientar el profesorado en este sentido:

Respecto al planteamiento, es interesante preguntarse:

- ¿Es una actividad que tiene por objetivo responder una pregunta, resolver un reto? La pregunta puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse en un juego, puede tratar de una regularidad o hecho matemático.
- ¿Permite aplicar conocimientos ya adquiridos y hacer nuevos aprendizajes?
- ¿Ayuda a relacionar conocimientos diversos dentro de la matemática o con otras materias?
- ¿Es una actividad que se puede desarrollar de diferentes formas y estimula la curiosidad y la creatividad del alumnado?
- ¿Implica el uso de instrumentos varios como por ejemplo material que se pueda manipular, herramientas de dibujo, software, calculadora, etc.?

En la gestión de la actividad, es interesante preguntarse:

- ¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa del alumnado?
- ¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que con explicaciones?
- ¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos que conduce a hablar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
- ¿Implica razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados?
- ¿Se avanza en la representación de manera cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más adecuado?

En síntesis, puede concluirse que para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático deberíamos considerar, primero, que las matemáticas forman parte de nuestro entorno; segundo, que las matemáticas deberían servir para desenvolvernos mejor en este entorno, más que para resolver correctamente las actividades propuestas en un cuaderno; y tercero, y por encima de todo, los diferentes profesionales deberíamos plantearnos cuáles son las necesidades de los niños y niñas de las primeras edades para aprender matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años,* ICE-Horsori. Barcelona

Alsina, A. (2010). La "pirámide de la educación matemática". Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa,* 189, 12-16.

Esteve, O., Melief, K. y Alsina, A. (2010). *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado,* Editorial Octaedro. Barcelona.

Niss, M. (1995). Las matemáticas en la sociedad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 6, 45-58.

Olmos, G. y Alsina, À. (2010). El uso de cuadernos de actividades para aprender matemáticas en educación infantil. *Aula de Infantil*, 53, 38-41.

Reeuvijk, M.V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 12, 9-16.

Sociedad Española de Nutrición Comunitaria (2004). Pirámide de la Nutrición Saludable. Recuperado el 24-10-2010 de: http://www.sennutricion.org

SITUACIONES INTERDISCIPLINARIAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EDUCACIÓN INFANTIL EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

Mequè Edo i Basté,
Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este trabajo se presenta una asignatura de didáctica de las matemáticas de los nuevos planes de estudio de la formación de maestros de educación infantil. A continuación se describe una unidad docente. El tema que se presenta quiere incidir en el desarrollo de la siguiente competencia docente: Conocer, analizar y diseñar situaciones didácticas interdisciplinarias, identificando los contenidos matemáticos y los de otras áreas. En este texto se presenta un breve análisis de las posibles relaciones entre las matemáticas de infantil y otras siete áreas o lenguajes. También se detallan las distintas actividades de formación que realizaran los futuros maestros para aumentar su competencia para identificar y potenciar el contenido matemático en situaciones didácticas interdisciplinarias.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Infantil; Formación de Maestros; Interdisciplinariedad.

Abstract

In this work a mathematics education subject of the new programs for teacher training in early childhood education is presented. A particular lesson is also detailed. The main goal is to contribute to the development of teaching competences through the analysis and design of interdisciplinary didactical situations with mathematical contents and others. This text is a summary of potential relationships among mathematics and up to seven other languages. It also provides several training activities to be conducted by future teachers in order to increase their competence in the identification and promotion of mathematical contents in interdisciplinary didactical situations.

Keywords: Mathematics Education; Early Childhood Education; Teacher Training; Interdisciplinarity.

Edo, M. (2012). Situaciones interdisciplinarias para el desarrollo del pensamiento matemático en Educación Infantil en la formación de maestros. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 427-453). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

La transición, de la diplomatura al grado, en las titulaciones universitarias que se ocupan de la formación de maestros de Educación Infantil, hace que surjan nuevas asignaturas (adaptadas al Espacio Europeo) cuyos contenidos deben adaptarse también a un currículo relativamente reciente de Educación Infantil.

Uno de los contenidos novedosos a introducir en la formación de maestros de infantil es el aumento de la competencia docente para identificar y potenciar el contenido matemático en situaciones interdisciplinarias y globalizadoras y así conseguir un buen desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades.

Basándonos en la concepción socio constructivista de la enseñanza y el aprendizaje y apropiándonos de las orientaciones didácticas del currículum actual, entendemos que el contenido matemático está presente en una gran diversidad de situaciones de aula, incluso en aquellas que fueron diseñadas desde otras áreas.

Considerando las matemáticas desde una visión sociocultural, entendemos que éstas son una poderosa herramienta para conocer el entorno y explicar lo que nos rodea, por todo ello creemos que es necesario que nuestros alumnos, futuros maestros, así lo vivan y así lo puedan transmitir.

En este escrito se presenta en primer lugar (1) y de forma breve una asignatura del Grado de Educación Infantil de la Universidad Autónoma de Barcelona: La práctica matemática en el aula de educación infantil. En segundo lugar (2) se presenta una unidad docente: Las Matemáticas en situaciones interdisciplinarias y globalizadoras que persigue el aumento de la competencia antes mencionada.

El punto (1) presentación de la asignatura contiene: contextualización; objetivos formativos; unidades docentes; competencias a desarrollar los futuros maestros y resultados de aprendizaje esperados; metodología docente y actividades formativas y sistema de evaluación.

El punto (2) desarrollo de la unidad docente contiene: contextualización; temas, objetivos de aprendizaje y competencias implicadas; contenidos fundamentales; Actividades de enseñanza y aprendizaje y síntesis de la unidad.

(1) Presentación de la asignatura: La práctica matemática en el aula de educación infantil

El diseño y estructura de esta asignatura afronta directamente el problema de la segmentación de contenidos en el plan de estudios de los futuros maestros intentando aumentar, en los futuros maestros, la competencia de promover y facilitar los aprendizajes matemáticos en la primera infancia, desde una perspectiva globalizadora e integradora. A continuación se presenta: su contextualización en el plan de estudios, los objetivos formativos, las unidades docentes, la relación de competencias a desarrollar y resultados de aprendizaje esperados, la metodología docente, actividades formativas y el sistema de evaluación.

Contextualización

Se trata de una asignatura obligatoria de cuarto curso (4 ECTS) centrada en una didáctica específica. Se imparte cuando el alumnado ya ha hecho toda la formación básica y se cursa a continuación o paralelamente a, "Didáctica del conocimiento del medio natural y social"; "Educación de las artes visuales"; "Didáctica de la expresión musical"; "Didáctica de la lengua y la literatura"; "Didáctica de la expresión corporal" y "Educación psicomotriz".

Es por eso que la asignatura: *La práctica matemática en el aula de infantil*, quiere incidir en la capacidad de relacionar e integrar los conocimientos que los estudiantes están adquiriendo en las otras asignaturas y obtener así una visión globalizadora e interdisciplinaria de la docencia en las primeras edades.

"La práctica matemática en el aula de infantil" es la continuación natural de la asignatura "Las matemáticas en el currículum de infantil" realizada el curso anterior. La nueva asignatura desarrolla el conocimiento práctico y la aplicación del currículum matemático de infantil. Se centra en el conocimiento, el análisis y el diseño de situaciones educativas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil, con un énfasis especial en el parvulario y recuperando lo que se había aprendido de la escuela de cero a tres años.

El estudiante que haya superado las dos asignaturas obligatorias de didáctica de las matemáticas tiene la posibilidad de cursar, en el último semestre de la carrera, la asignatura optativa “Juego y actividad matemática en educación infantil” que, junto con otro conjunto de optativas, le permitirán obtener una especialización en las áreas de ciencias y matemáticas.

Objetivos formativos:

1. Conocer las teorías socioculturales de la enseñanza y aprendizaje matemático, comparándolas con otras teorías.
2. Analizar situaciones didácticas según los parámetros de la teoría y del currículum para hacer un diagnóstico sobre su pertenencia y adecuación.
3. Conocer y ser capaz de analizar una diversidad de situaciones didácticas creadas, desde, y para el aprendizaje de las matemáticas en el parvulario.
4. Conocer y ser capaz de analizar una diversidad de situaciones didácticas interdisciplinarias, identificando los contenidos matemáticos y los de otras áreas.

Unidades docentes:

1. El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil y su continuidad.

   1.1 Marco teórico psicológico de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Concepción constructivista.

   1.2 Enfoque sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, concepciones de los maestros y estilos docentes.

2. Análisis didáctico y profesional de casos y situaciones de aula.

   2.1 Aspectos generales: Marco teórico psicológico. Enfoque.

   2.2 Aspectos particulares: Contenidos, objetivos, capacidades, actividades, materiales, agrupación de los alumnos, consignas, papel del adulto, sistema de evaluación.

3. Formas de organizar el trabajo matemático en el parvulario; vida de aula, proyectos matemáticos, materiales, rincones y talleres.

3.1 La organización del trabajo matemático al aula de infantil. Programar desde las matemáticas.

3.2 El día a día en el aula: Actividades cotidianas, rutinas y hechos puntuales de la vida escolar. Proyectos matemáticos de números, de formas, de medida, etc. Actividades diseñadas a partir de materiales manipulativos. Trabajo por rincones y talleres.

4. Las Matemáticas en situaciones interdisciplinarias y globalizadoras.

    4.1 Qué entendemos por situación interdisciplinaria y globalizadora. Ejemplo y análisis de una situación.

    4.2 Búsqueda y análisis de situaciones Matemática y… juego, psicomotricidad, arte visual y plástico, literatura infantil, expresión musical, entorno natural y social.

5. Diseño de unidades didácticas con contenido matemático. Síntesis de las dos asignaturas.

    5.1 Justificación teórica, situación de aprendizaje y temporización.

    5.2 Currículum: selección y secuenciación de contenidos, objetivos y capacidades.

    5.3 Actividades, materiales, agrupación niños, papel y consignas del maestro.

    5.4 Sistema de evaluación.

Relación de Competencias a desarrollar los futuros maestros y resultados de aprendizaje esperados

1. Conocer teorías sobre la adquisición y desarrollo de los aprendizajes matemáticos.

    1.1 Conocimiento del marco teórico sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que rige el currículum.

    1.2 Comprender las matemáticas en cuanto que conocimiento sociocultural

    1.3 Capacidad de identificación de aspectos matemáticos a la vida cotidiana y capacidad de potenciarlos y compartirlos con los niños para favorecer su aprendizaje.

2. Reflexionar sobre las prácticas del aula para innovar y mejorar la tarea docente.

2.1 Capacidad de analizar una situación didáctica y hacer un diagnóstico sobre su pertenencia y hacer propuestas alternativas innovadoras.

2.2 Capacidad de inspirarse en buenas prácticas matemáticas para crear nuevas y personales.

3. Promover y facilitar los aprendizajes en la primera infancia, desde una perspectiva globalizadora e integradora de las diferentes dimensiones cognitiva, emocional, psicomotora y volitiva.

3.1 Conocimiento de situaciones didácticas y experiencias creadas des de una perspectiva globalizadora e integradora de las diferentes dimensiones cognitiva, emocional, psicomotora y volitiva.

4. Conocer estrategias didácticas para desarrollar representaciones numéricas y nociones espaciales, geométricas y de desarrollo lógico.

4.1 Conocimiento de diversidad de situaciones didácticas diseñadas desde las matemáticas del currículum.

4.2 Conocimiento de diversidad de situaciones didácticas interdisciplinarias para la E/A de las matemáticas en el parvulario.

4.3 Capacidad de diseñar situaciones didácticas personales a partir del currículum y sus directrices teóricas y de los ejemplos mostrados a la asignatura para la E/A de las matemáticas a educación infantil

5. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo en los estudiantes.

5.1 Capacidad de organización del trabajo personal y del conjunto para llevar a cabo las tareas requeridas desde la asignatura.

6. Trabajar en equipos y con equipos.

6.1 Capacidad de organización y de trabajo conjunto para diseñar y ejecutar un proyecto de trabajo compartido.

Metodología docente y actividades formativas

El protagonista en el proceso de enseñanza aprendizaje es el estudiante y es bajo esta premisa en la que se ha planificado la metodología de la asignatura tal y cómo se muestra en el cuadro que hay a continuación:

Actividad	**Horas**	**Metodología**
Presencial en gran grupo	23	Exposiciones por parte del profesorado de los contenidos y cuestiones básicas del temario. Se realiza con todo el grupo y permite la exposición de los principales contenidos a través de una participación abierta y activa por parte de los estudiantes.
Seminarios	10	Espacios de trabajo en grupos reducidos (1/3 parte del gran grupo) supervisado por el profesorado en los que mediante análisis de documentos, resolución de casos o actividades diversas, se profundiza en los contenidos y temáticas trabajadas en el gran grupo.
Supervisada y evaluación	12	Espacios que se reservan para hacer las presentaciones colectivas de los resultados de los trabajos en grupo. Las presentaciones de los trabajos (1) y (2) se realizan ante todo el grupo clase y se hará co-evaluación entre los estudiantes, además de la evaluación del profesor.
Autónoma	50	Lecturas recomendadas, buscar información sobre los trabajos que se tendrán que realizar, redactar partes de los textos que se tendrán que discutir y consensuar en los seminarios, preparar las presentaciones y el examen.
Evaluación individual	5	Se realizará un control escrito individual cuando ya se han cursado las ¾ partes de la asignatura para comprobar el dominio de los fundamentos científicos y matemáticos de los estudiantes.

Sistema de evaluación

La evaluación de la asignatura se realizará a lo largo de todo el semestre mediante les actividades que se señalan a continuación. La asistencia en las clases presenciales de la asignatura es obligatoria. La evaluación se realizará en parte grupalmente y en parte, individual.

Actividades de Evaluación	**% de la nota**
Entrega y exposición de Trabajo (1) en grupo centrado en las Unidades docentes 3 y 4	30%
Control escrito individual. Unidades docentes de la 1 a la 4	40%
Entrega y exposición de Trabajo (2) en grupo centrado en la Unidad docente 5	30%

(2) Desarrollo de la unidad docente 4: Las Matemáticas en situaciones interdisciplinarias y globalizadoras

A continuación, se presenta el desarrollo de la unidad docente 4. *Las Matemáticas en situaciones interdisciplinarias y globalizadoras.* En este punto se explicitan: la contextualización de la unidad docente, los temas, los objetivos de aprendizaje, las competencias a desarrollar, los contenidos fundamentales, las actividades de enseñanza y aprendizaje y la bibliografía para el alumnado. En relación a los contenidos fundamentales se presenta, en primer lugar, qué se entiende por situación interdisciplinaria o globalizadora, y en segundo lugar, una relación de siete situaciones didácticas escolares que pueden ser consideradas interdisciplinarias, si el maestro así lo considera y lo favorece. Estas situaciones son:

I. Juegos de reglas de gran motricidad
II. Transformaciones del espacio
III. Juego simbólico
IV. Arte, visual y plástica
V. Literatura infantil: lo cuento
VI. Canciones y danzas
VII. Descubrimiento del entorno: trabajo por proyectos

Contextualización

Esta unidad docente se centra en las situaciones didácticas que el maestro diseña desde el convencimiento de la intervención de contenidos de aprendizaje de distintas áreas. El currículum de Educación Infantil hace explícito que, a pesar de que el contenido del mismo está organizado en tres áreas de conocimiento: el área de descubrimiento de un mismo y de los otros, el área de descubrimiento del entorno y el área de comunicación y lenguaje, el trabajo con los alumnos no se tiene que presentar de manera parcelada. Lo que propone es crear unos espacios de aprendizaje globalizados, estableciendo relaciones entre los contenidos de las diferentes áreas, a fin de que se contribuya al desarrollo de las niñas y los niños, acercándolos a la interpretación del mundo, dando significado y facilitando su participación activa.

Los maestros actuarán como facilitadores de un entorno en el que se creen expectativas para el alumnado, a través de actividades que tengan interés y significado y que proporcionen oportunidades de aprender más allá de los contenidos parcelados en áreas y lenguajes.

Temas, objetivos de aprendizaje y competencias implicadas

Los **Temas** de la unidad docente 4: Las Matemáticas en situaciones interdisciplinarias y globalizadoras son:

- Qué entendemos por situación interdisciplinaria y globalizadora. Ejemplo y análisis de una situación.
- Búsqueda y análisis de situaciones con contenido matemático en situaciones de: juego, psicomotricidad, artes visuales y plástica, literatura infantil, expresión musical, entorno natural y social.

Todos los **objetivos** de esta asignatura están estrechamente vinculados, los unos no se pueden concebir sin los otros. Aun así se prioriza alguno en cada unidad docente.

Concretamente en la Unidad Docente 4 el principal objetivo es:

- Conocer y ser capaz de analizar una diversidad de situaciones didácticas interdisciplinarias, identificando los contenidos matemáticos y los de otras áreas implicadas.

Entendiendo que las **competencias** son el conjunto de conocimientos, habilidades y actitudes que describen los resultados del aprendizaje de un programa educativo, aquello que un estudiante puede demostrar que sabe, sabe hacer y sabe aplicar al final del proceso educativo, esta unidad docente prioriza las competencias siguientes:

- Promover y facilitar los aprendizajes en la primera infancia, desde una perspectiva globalizadora e integradora de las diferentes dimensiones: cognitiva, emocional y psicomotora.
- Comprender las matemáticas en cuanto que conocimiento sociocultural.

- Conocer estrategias didácticas para desarrollar representaciones numéricas y nociones espaciales, geométricas y de desarrollo lógico.
- Trabajar en equipos y con equipos

Contenidos fundamentales

A continuación se presentan de manera breve los principales contenidos de esta unidad docente agrupados en dos grandes temas. En primer lugar se presenta qué se entiende por una situación didáctica interdisciplinaria y globalizadora. A continuación se muestran varios ejemplos de situaciones didácticas que se relacionan tradicionalmente con contenidos de diferentes áreas. Estas situaciones se analizarán desde sus áreas de referencia y desde la matemática, obteniendo así una visión amplia de la matemática presente en muchos contextos y situaciones diferentes.

- <u>Qué entendemos por situación interdisciplinaria y globalizadora.</u>

Hay varias maneras de organizar y estructurar el trabajo matemático en las aulas de educación infantil, pero a grandes rasgos podemos distinguir entre dos grandes formas de programación, no incompatibles entre ellas. La primera, parte de los contenidos matemáticos curriculares y estos se estructuran, organizan y se programa su trabajo en el aula des de el propio contenido matemático. La segunda, parte de una situación interdisciplinaria y globalizadora, planteada generalmente desde otra área, en la que las matemáticas también están presentes; será tarea del maestro reconocerlas y potenciarlas.

Esta unidad docente se centra en estas situaciones didácticas en las que, ya desde el momento de programarlas, el maestro tiene conciencia que los alumnos de infantil al participar y realizar las actividades propuestas; estará trabajando y aprendiendo contenidos de diferentes áreas curriculares al mismo tiempo.

A menudo lo que se busca es una situación amplia que tenga interés y significado para los niños y es en esta situación donde el maestro, con sus conocimientos, debe ser capaz de analizar, reconocer y potenciar aquellos contenidos y objetivos de aprendizaje de las diferentes áreas que están aprendiendo los niños en aquel momento. Aun así, también puede suceder que la situación inicial se programe partiendo de un área en concreto, pero la conciencia y voluntad de hacer efectiva la interdisciplinariedad llevará a los maestros a reconocer y potenciar los contenidos curriculares de otras áreas, entre ellas y especialmente, las matemáticas.

- <u>Ejemplos de situaciones didácticas interdisciplinarias y globalizadoras</u>

Conozcamos algunos ejemplos de situaciones interdisciplinarias que, a pesar de tener un foco inicial en algunos contenidos no matemáticos, permiten desarrollar situaciones de enseñanza y aprendizaje matemático.

I. Juegos de reglas de gran motricidad

Este tipo de actividad en el currículum de educación Infantil aparece en el área de Descubrimiento de uno mismo y de los otros, concretamente en: Juego y movimiento y, entre otros, está directamente vinculado a contenidos como:

- Crecimiento personal en el desarrollo de varios juegos: de maternidad, de contrastes, exploratorios, sensorio-motrices, simbólicos.
- Comprensión y valoración progresiva de la necesidad de normas en algunos juegos.

El juego es una actividad que constituye una pieza clave para el desarrollo integral del niño (Vygotski, 2003). El juego tiene que estar presente en las aulas de infantil, más allá de cualquier contenido o área concreta. Sabemos que existen muchos tipos de juegos que están relacionados con las matemáticas.

¿Cuántos niños jugamos? ¿Cuántas sillas necesitamos?

Concretamente los juegos de reglas de gran motricidad son un tipo de actividad que adquiere sentido, tanto desde la psicomotricidad, como desde la matemática.

Desde la psicomotricidad, por ejemplo, con el trabajo del dominio progresivo de las habilidades motrices básicas: coordinación, tono muscular, equilibrio, posturas diversas y respiración, organización de la lateralidad, cooperación, etc.

Desde las matemáticas, desarrolla la comprensión y valoración progresiva de la necesidad de reglas; la interpretación de significados referidos al espacio: dentro y fuera, delante y detrás, lejos y cerca, etc. Referidos al tiempo: ritmo, orden, duración, simultaneidad, espera. También hay muchos juegos de reglas en los que intervienen aspectos relacionados con la cantidad, números que identifican, recuentos y pequeños cálculos, ordinales, etc. (Edo, Revelles, 2004).

Estos juegos, pues, tienen valor y significado por ellos mismos y, además los maestros pueden, a través de ellos, ayudar a los niños a reflexionar, conocer y representar aquellos aspectos espaciales, de tiempo, numéricos y cuantitativos que quieran destacar.

Ejemplos de estos juegos son: El pañuelo; los bolos; Un, dos, tres, el pollito inglés; Hacer paquetes; Juego de puntería; Rayuela; Las sillas musicales; Cuadrado y ángulo, etc.

II. Exploración y transformaciones de espacios con objetos

Este tipo de actividad en el currículum de educación Infantil está dentro del área de Descubrimiento de uno mismo y de los otros, concretamente en: Juego y movimiento y, entre otros, está directamente vinculado a contenidos como:

- Exploración de movimientos en relación con uno mismo, los otros, los objetos, y la situación espaciotemporal, avanzando en las posibilidades expresivas del propio cuerpo.
- Experimentación e interpretación de sensaciones y significados referidos al espacio: dentro-fuera, delante-detrás, seguro-peligroso, entre otros, y referidos al tiempo: ritmo, orden, duración, simultaneidad, espera.

Encima, debajo, muchos, pocos, plano, curvo…

La transformación de espacios es una de las prácticas psicomotrices habituales a muchas escuelas. Normalmente se trabaja a partir de la actividad motriz espontánea de los niños, ofreciéndoles objetos que pueden trasladar, agrupar, apilar, hacer rodar, etc. de manera libre. El juego espontáneo tiene una importancia capital en la práctica psicomotriz.

La acción de los educadores durante estas sesiones se centra en una preparación previa de los espacios y materiales, en un ritual de entrada y conversación de gran grupo, en una presentación de los espacios, en unas reflexiones sobre seguridad y normas, y en una compilación de pensamientos y experiencias al final de la sesión.

El rol del maestro es el de hacer de mediador, para ayudar a los alumnos a que conozcan mejor sus capacidades, sus sensaciones y las reacciones espontáneas y puedan así valorar el placer sensorio-motor y el placer del movimiento en grupo.

<u>Desde la psicomotricidad</u>, en esta actividad se desarrollan la coordinación de movimientos, su precisión, la fuerza, la necesidad de colaboración, entre otras. Esto serán logros que influirán, de manera simultánea, en la inteligencia y la afectividad del niño/a y que colaborarán en su proceso madurativo. (Aucouturier, Lapierre, 1977).

<u>Desde las matemáticas</u>, se puede incidir en la percepción y conocimiento de formas tridimensionales y figuras planas; el comportamiento de los objetos derivado de su forma (caras planas y curvas… apilar y rodar, etc.). También es una buena situación para la comparación de magnitudes e inicio de mediciones. Todos los términos relacionados con la orientación y localización espaciales: encima, debajo, cerca, lejos, dentro, fuera, etc. tienen en esta situación didáctica el mejor contexto para ser introducidos y vivenciados.

Por lo tanto, estas actividades de exploración y de transformación de espacios tienen valor y significado por ellas mismas pero, además, los maestros pueden ayudar a los niños a reflexionar, conocer y representar aquellos aspectos espaciales, geométricos y cuantitativos, que deseen destacar.

III. Juego simbólico

Este tipo de actividad en el currículum de educación infantil está dentro del área de Descubrimiento de uno mismo y de los otros, concretamente a: Juego y movimiento y, entre otros, está directamente vinculado a contenidos como:

- Crecimiento personal en el desarrollo de varios juegos: de maternidad, de contrastes, exploratorios, sensorio motrices, simbólicos.
- Expresión, a partir de la actividad espontánea, de la vida afectiva y relacional, mediante el lenguaje corporal.

El juego simbólico es el juego infantil por excelencia en el que los niños *imaginan ser*, imitando situaciones que ven en la vida real. En esta actividad los niños y las niñas utilizan al máximo su imaginación, jugando constantemente en el límite entre lo real y lo imaginado. A través de estas representaciones los niños asimilan y comprenden las situaciones que viven en la vida real estableciendo relaciones que los ayudarán a desarrollarse con éxito en el futuro

Piaget (1961, 1969, 1981) ubica evolutivamente el juego simbólico, entre el juego motriz o exploratorio, propio de los dos primeros años de vida, y los juegos de reglas que aparecen a partir de los seis años. De este modo, entre los dos y seis años, lo más importante para el niño es crear ficciones, es decir, preparar escenas y representar roles. Ya antes de iniciar el segundo ciclo de la educación infantil los niños elaboran, de una manera informal, intuiciones sobre el mundo que los rodea. La escuela tiene que conectar con los intereses y las actitudes que manifiestan, aprovechando su curiosidad y entusiasmo para hacer crecer este conocimiento vivido de una manera cada vez más estructurada.

<u>Desde el descubrimiento de uno mismo y de los otros</u> hay que promover el juego como actividad natural de aprendizaje del niño de esta etapa que le permitirá integrar espontáneamente la acción con las emociones y el pensamiento, favoreciendo así su desarrollo personal y social. El hecho que el juego simbólico consista en imaginar,

simular, actuar y verbalizar, hace de esta actividad una realidad potente para el desarrollo cognitivo, verbal y de socialización. Según Van Oers (1996, 1999, 2003) esta es la actividad natural de aprendizaje en estas edades.

Desde las matemáticas, entendemos que el juego simbólico en la escuela, bien organizado, con unos espacios y materiales adecuados, en los que sería deseable que los mismos alumnos intervinieran en su creación, constituyen un entorno ideal para que los niños y las niñas simulen y se apropien de la actividad social de los adultos (Edo y Revelles, 2004).

Esto y esto, todo vale cinco.

Así, por ejemplo, el rincón de la «tienda» en el que: el comprar y vender, hacer listas de compra, calcular el total que se tiene que pagar, seleccionar monedas, devolver cambio, etc., son acciones que aparecen vinculada a un juego de simulación. Estas acciones adquieren un potente significado para los alumnos, al mismo tiempo que permiten una actuación relajada basada en el ensayo y error, porque el juego no requiere de ellos la formalidad y el rigor de estas mismas acciones realizadas en la «realidad» y, por lo tanto, no existe la propia presión de evitar "el error".

Podemos pues vincular la creación de cualquier rincón de juego simbólico a las matemáticas; así la construcción colectiva del rincón de la casa, de la cocina, de la peluquería, del médico, etc., requieren un diseño, reparto de tareas, organización y ejecución temporal de las mismas, que las matemáticas nos ayudarán a realizar mejor.

Por lo tanto, las actividades de juego simbólico tienen valor y significado por ellas mismas pero, además, a través de ellas, los maestros pueden ayudar a los niños a reflexionar, conocer y representar aquellos aspectos cuantitativos, lógicos y de resolución de problemas que quieran destacar.

IV. Arte, visual y plástico

Este tipo de actividad en el currículum de educación infantil está dentro del área de Comunicación y lenguajes, concretamente en:

Observar, escuchar y experimentar, vinculado al contenido:

- Experimentación con técnicas plásticas básicas: dibujo, pintura, collage, modelado, estampación, trabajando el alfabeto visual: punto, línea, mancha, color, textura, volumen, encuadre, puntos de vista y luz.

Hablar, expresar y comunicar, vinculado a los contenidos:

- Interés para compartir interpretaciones, sensaciones y emociones provocadas por las producciones artísticas y plásticas.
- Expresión y comunicación de hechos, sentimientos y emociones, vivencias o fantasías a través del dibujo y de producciones artísticas plásticas.

Interpretar, representar y crear, vinculado al contenido:

- Uso de los lenguajes plástico y matemático como objetos de diversión, de creación y de aprendizaje a través de juegos expresivos. Apreciación de la estética de las formas artísticas y de las sensaciones y emociones que provocan.

Mira, un círculo naranja, un triangulo amarillo, un rectángulo azul…

Desde el arte, acercar los niños al mundo del arte forma parte del deseo de convertirlos en activos observadores y degustadores de las obras de diferentes artistas, y también a través de las palabras y sus composiciones plásticas puedan llegar a expresar sus descubrimientos y los sentimientos que estos despiertan (Edo y Gómez, 2006).

Desde las matemáticas, la contemplación y creación de formas artísticas a partir de líneas, figuras y cuerpos… puede ayudar tanto a intuir y construir nociones geométricas como a desarrollar sentimientos y emociones estéticas (Edo, 2003).

En los procesos de observación y análisis de obras de arte y de creación de composiciones plásticas hay muchos momentos en que los contenidos lógicos, geométricos y cuantitativos ayudan a los niños a llevar a cabo la tarea de manera más efectiva y consciente.

La obra de muchos pintores y escultores se vincula a la matemática de manera natural; a menudo ellos mismos se han referido a ello y en otros casos basta con observar sus esbozos para comprender el papel que juegan las matemáticas en estos procesos de diseño. Algunos de estos pintores son: V. Kandinsky, P. Klee, S. Delaunay, X. Roódtxenko, P. Mondrian, M. Bill, K. Malevich, A. Hervin, T. van Doesburg, etc. Entre los escultores señalo a: D. Smith, J. Oteiza, A. Alfaro, A. Calder, E. Chillida, entre otros.

Por lo tanto, las actividades que pretenden acercar los niños al mundo del arte tienen valor y significado por ellas mismas. No todas las obras servirán del mismo modo para trabajar las matemáticas. Pero hay la posibilidad de escoger, de vez en cuando, una obra que, además del trabajo artístico, puede ayudar a los niños a reflexionar, conocer y representar aquellos aspectos geométricos, cuantitativos y lógicos que los maestros quieran destacar.

V. Literatura infantil: El cuento

Este tipo de actividad en el currículum de educación infantil está dentro del área de Comunicación y lenguajes, concretamente en:

Observar, escuchar y experimentar, vinculado al contenido:

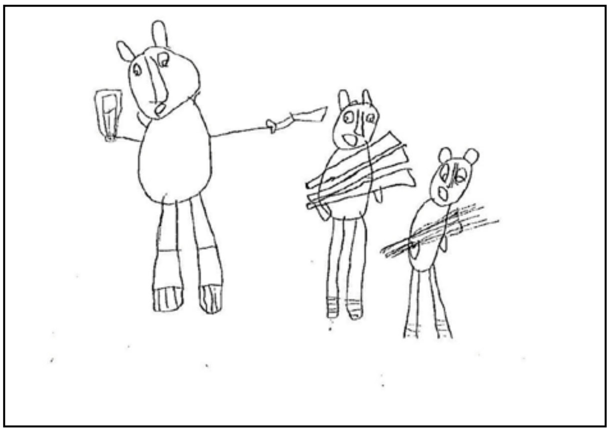
- Escucha y comprensión de narraciones, cuentos, leyendas, poesías, adivinanzas y dichos, tradicionales y contemporáneas, como fuente de placer y de aprendizaje.

Hablar, expresar y comunicar, vinculado al contenido:

- Interés para compartir interpretaciones, sensaciones y emociones provocadas por las producciones artísticas literarias.

Interpretar, representar y crear, vinculado al contenido:

- Uso de los lenguajes verbal y matemático como objetos de diversión, de creación y de aprendizaje a través de juegos lingüísticos y expresivos. Apreciación de la estética de las formas literarias, y de las sensaciones y emociones que provocan.



Un, dos y tres cerditos. Grande, mediano y pequeño

<u>Desde comunicación y lenguajes,</u> El cuento infantil no es sólo importante porque sirva como estímulo para el futuro lector, sino también, porque contribuye al desarrollo del lenguaje, de la creación literaria, de la imaginación de mundos posibles, entre otros. Además, porque al recrear la vida de los personajes e identificarse con ellos, permite al niño vivir una serie de experiencias y situaciones que lo ayudarán a adquirir mayor seguridad en sí mismo, a integrarse y formar parte del mundo que lo rodea.

El cuento tiene y debe tener, por él mismo, un papel fundamental dentro de las aulas de infantil. Tanto el cuento tradicional, por el valor que tiene de transmisión oral de elementos ancestrales, como el cuento de autor, acompañado a menudo de magníficas ilustraciones.

Es evidente pues que el cuento no debería ser sólo una excusa o una herramienta pedagógica al servicio de ciertos contenidos curriculares. A pesar de esto, hay ciertamente muchos cuentos (especialmente tradicionales) que contienen referencias importantes a ciertos contenidos matemáticos que los alumnos de infantil están aprendiendo. (Torra, 1997).

Desde las matemáticas, Las cantidades que más aparecen en este tipo de cuentos son aquellas que tienen una especial dificultad de aprendizaje como, por ejemplo, el "tres" y el "siete". Parece que este hecho no es casual, y desde la escuela podemos, aprovechar estas narraciones para hacer vivir a los niños situaciones en las que aparecen cantidades que están aprendiendo, como hacían las madres y abuelas de años atrás. De igual manera los cuentos contienen muy a menudo referencias espaciales: lejos, cerca, dentro, fuera, etc. Magnitudes: grande, medio, pequeño, gigante, enano, largo, corto, etc. Temporales: primero, segundo, tercero, hace muchos años, un día, el día siguiente, etc. Todas estas nociones y otras muchas son propias de la matemática y el cuento puede ser un gran recurso para la comprensión y apropiación de las mismas. (Saá, 2002).

Por lo tanto, el cuento tradicional, el cuento de autor, las leyendas, las poesías, las adivinanzas, los trabalenguas, etc., tienen un gran valor y significado por ellos mismos. No toda la literatura infantil servirá del mismo modo para trabajar las matemáticas. Pero es evidente que hay un gran número de relatos que pueden ayudar a los niños a reflexionar, conocer y representar aquellos aspectos cuantitativos, geométricos, lógicos, de magnitudes y medida, y de resolución de problemas, que los maestros quieran destacar. (Sheffield, Burns 1995).

VI. Canciones y danzas (lenguaje musical)

Este tipo de actividad en el currículum de educación infantil está dentro del área de Comunicación y lenguajes, concretamente en:

Hablar, expresar y comunicar, vinculado a los contenidos:

- Interés para compartir interpretaciones, sensaciones y emociones provocadas por las producciones artísticas musicales.
- Expresión y comunicación de hechos, sentimientos y emociones, vivencias o fantasías, a través de producciones artísticas musicales.

Interpretar, representar y crear, vinculado a los contenidos:

- Uso de los lenguajes verbal, musical, matemático y corporal, como objetos de diversión, de creación y de aprendizaje, a través de juegos musicales y expresivos.

- Apreciación de la estética de las formas musicales y de las sensaciones y emociones que provocan.
- Interpretación de canciones y danzas tradicionales catalanas y de todo el mundo, y representación de personajes, hechos y juegos de expresión corporal.

La música, las canciones y las danzas son uno de los contenidos claves en la educación infantil que influyen claramente en el desarrollo de la atención, la concentración, la discriminación, el ritmo, la voz, etc.

Un círculo de 4 niños que chocan las barrigas de dos en dos

<u>Desde comunicación y lenguajes</u> La educación musical es un aspecto muy importante en el desarrollo infantil. En el aula se puede trabajar desde diferentes enfoques y a través de infinidad de actividades buscando el principio de interdisciplinariedad y globalización. Si lo que se quiere es no jerarquizar ni separar la enseñanza, el trabajo integral a partir del aspecto musical puede ser muy exitoso.

El desarrollo lingüístico, la psicomotricidad, la expresión oral, física, motriz, son capacidades fácilmente vinculadas a la educación musical, pero la música también influye al desarrollo del pensamiento lógico matemático.

<u>Desde las matemáticas</u> Podemos centrarnos en el reconocimiento de cualidades sonoras, en las asociaciones de timbre e instrumentos, las ordenaciones de agudo a grave, de fuerte a flojo, de largo a corto, etc.; y especialmente en los ritmos. Saber encontrar un patrón, una unidad de repetición es equivalente a hacer o reconocer una seriación; la

coordinación necesaria para seguir un ritmo es una capacidad imprescindible para poder "contar" bien. (Saá, 2002).

Por lo tanto, la música, las canciones, las danzas, los juegos musicales, las audiciones, etc., tienen un gran valor y significado por ellas mismas en la educación infantil. Es evidente que este lenguaje ofrece unas grandes posibilidades de relación con contenidos de otras áreas y lenguajes. Y es evidente también que, por sí mismo, el aprendizaje musical, incide en el desarrollo del pensamiento matemático. De todas maneras, si el maestro quiere, puede además ayudar los niños a reflexionar, conocer y representar aquellos aspectos lógicos, de magnitudes y medida, cuantitativos o geométricos, que quiera destacar. (Edo, Revelles, 2004).

VII. Descubrimiento del entorno

Este tipo de actividad en el currículum de educación infantil está dentro del área de Descubrimiento del entorno, concretamente en:

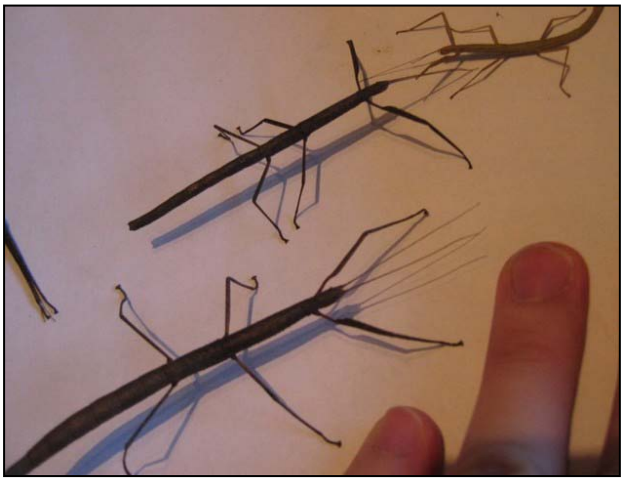
Exploración del entorno, vinculado a los contenidos:

- Observación e identificación de diferentes elementos del entorno: materiales, objetos, animales, plantas, paisajes.
- Observación e identificación de calidades de elementos del entorno.

Experimentación e interpretación, vinculado al contenido:

- Curiosidad e iniciativa por el descubrimiento, para hacerse preguntas, buscar información de diferentes fuentes, compartirla con los compañeros y compañeras de clase, y organizarla en los diferentes modelos.

Desde el área de descubrimiento del entorno, se debe ayudar los niños a hacerse preguntas y a elaborar explicaciones sobre los objetos y las situaciones que les interesan y les preocupan en cada momento, y procurar, a la vez, que se formen una idea de ellos mismos como personas con capacidad de aprender y con recursos para emprender retos. (Carbó, Gràcia, 2002).



El bicho palo cuánto mide? ¿Más o menos que mi dedo?

Desde las matemáticas sabemos que estas son una poderosa herramienta para conocer el entorno. El hecho de cuantificar, medir, localizar, etc., permite que se supere el simple conocimiento físico y se avance en el conocimiento científico para predecir, comprobar, generalizar y hacer modelos, que son formas de abstraer propias de las ciencias y de las matemáticas. (Edo, Revelles, 2004).

El aprendizaje depende en gran medida de la cantidad y de la calidad de situaciones vividas relacionadas con un determinado contenido. La vida diaria proporciona muchas oportunidades, a unos más que a otros, por ello es necesario que la escuela asegure a los niños experiencias suficientemente ricas. Además el maestro debe acompañarles en sus aprendizajes, impulsando el planteamiento de interrogantes, conduciendo las respuestas a sus preguntas, ofreciendo materiales, recursos y estrategias que ayuden, a través de los lenguajes, a conectar y hacer conscientes las experiencias vividas.

Actividades de enseñanza y aprendizaje

Después de haber presentado, a grandes rasgos, los contenidos fundamentales de esta unidad docente, se hace una pequeña relación de las principales actividades de enseñanza y aprendizaje que realizan los estudiantes para maestro en el desarrollo de esta unidad.

1º Actividad de introducción

Esta unidad docente se inicia con una sesión magistral donde se parte de un diálogo centrado en estas cuestiones:

- ¿Qué entendemos por aprendizaje interdisciplinario?
- ¿A qué se refiere el currículum cuando dice que hay que crear unos espacios de aprendizaje globalizados?
- ¿Qué situaciones didácticas conocéis de este estilo?
- ¿Creéis que la matemática tiene relación con otras áreas y lenguajes que habéis estudiado? ¿Cuál es esta relación?

A continuación se presenta y consensua el contenido de estos términos en nuestra materia.

2º Actividad presencial en gran grupo

En otra sesión se presenta, de forma descriptiva y narrativa, un ejemplo de situación interdisciplinaria en una sesión presencial en gran grupo. El contenido de la situación presentada es:

> Edo, M. (2005). (Matemática y Arte en la Educación Infantil a partir del cuadro "Bailando por Miedo" de Paul Klee. En: D. Couso, E. Badillo, A. Arduriz-Bravo i G. Perafán (Eds.) *Unidades Didácticas en Ciencias y Matemáticas,* (pp. 93-126). Bogotá: Magisterio.

A continuación se realiza un análisis conjunto del caso presentado: Arte y matemática, centrándonos especialmente en el reconocimiento e identificación de contenidos matemáticos presentes en la situación presentada.

3º Actividad presencial en gran grupo

En la tercera sesión se presentan, a grandes rasgos, las características de algunas experiencias interdisciplinarias que, partiendo de otros focos, trabajan determinados contenidos de las matemáticas:

- Juegos de reglas de gran motricidad
- Transformaciones del espacio
- Juego simbólico

- Arte, visual y plástica
- Literatura infantil: lo cuento
- Canciones y danzas
- Descubrimiento del entorno: trabajo por proyectos

A continuación se reparten los siete temas para realizar un trabajo en grupo. Estos siete temas, más los nueve de la unidad docente anterior, hacen un total de 16 temas que serán repartidos entre los 16 grupos de seminario y de esta forma cada grupo realizará un trabajo con contenido diferente y que será presentado al resto de compañeros.

<u>4º Actividad supervisada realizada en los Seminarios y actividad Autónoma</u>

Se pide la elaboración de un trabajo escrito de unas 20-25 páginas más bibliografía y una presentación oral a los compañeros de 15 minutos.

El esquema general (con pequeñas variaciones, según la temática), puede ser el siguiente.

Titulo: Las matemáticas y los juegos de reglas de gran motricidad

1. Introducción
2. Situar qué son y qué objetivos generales se pretenden (desde su área).
3. Relación de juegos de gran motricidad que pueden ayudar al desarrollo del pensamiento matemático.
4. Situar claramente los contenidos matemáticos de cada juego.
5. Proponer actividades complementarias para cada juego.
6. Valoración, conclusión del trabajo.
7. Bibliografía.

<u>5º Actividad presencial en gran grupo</u>

Se entrega el trabajo escrito de unas 20-25 páginas más bibliografía y se realiza una presentación oral delante de los compañeros, de 15 minutos más 10 minutos de preguntas.

Síntesis

La unidad docente que se ha presentado se centra en el conocimiento de experiencias reales de aula que se han programado de manera interdisciplinaria y en las que ya, desde el momento de su diseño, el maestro tiene conciencia que los niños, al participar y realizar las actividades propuestas, estarán trabajando y aprendiendo contenidos de diferentes áreas curriculares al mismo tiempo.

En especial nos hemos dedicado a reconocer y concretar qué contenidos matemáticos se trabajan en una serie de propuestas didácticas, como por ejemplo en: los juegos de reglas de gran motricidad, las transformaciones del espacio, el juego simbólico, las actividades de arte, visual y plástica, la literatura infantil: el cuento, las canciones y danzas y el descubrimiento del entorno.

La docencia de esta unidad, con los futuros maestros, se centra en la reflexión sobre qué es el aprendizaje interdisciplinario; a que se refiere el currículum cuando dice que hay que crear unos espacios de aprendizaje globalizados y cuál es el papel de las matemáticas en este tipo de trabajo. Se buscan situaciones de este estilo.

Se presenta y se analiza conjuntamente un caso centrado en el arte y las matemáticas y se identifican, al detalle, los contenidos matemáticos presentes en dicha situación.

A continuación se presentan, brevemente, algunas experiencias interdisciplinarias más y se acompaña al alumnado a adentrarse en el estudio de alguna de estas situaciones, pidiéndoles que realicen un análisis detallado del contenido matemático de cada situación que presenten.

Esta búsqueda se concreta en siete trabajos diferentes que serán expuestos en unas sesiones colectivas al acabar esta unidad docente. El trabajo cuenta un 30% de la nota final de la asignatura.

En última instancia esta unidad pretende ayudar a los futuros maestros a aumentar su capacidad de reconocer y potenciar el desarrollo de los contenidos matemáticos de los alumnos de infantil, más allá del trabajo diseñado desde las matemáticas.

Si entendemos que las matemáticas, desde una mirada sociocultural, son una poderosa herramienta para conocer el entorno y explicar lo que nos rodea, es necesario que nuestros alumnos, futuros maestros, así lo hayan vivido para poder transmitirlo.

Referencias

Aucouturier, B.; Lapierre, A. (1977). *Los contrastes y el descubrimiento de las nociones fundamentales*. Barcelona: Científico-Médica.

Carbó, L.; Gràcia, V. (2002). *Mirant el món a través dels números*. Lleida: Pagès editors.

Edo, M. (2003). Intuir y construir nociones geométricas desarrollando sentimientos y emociones estéticas. A L. Balbuena i D. de la Coba (Eds.), *Actas de las XI JAEM* (pp. 233-249). Tenerife: FESPM.

Edo, M. (2005). (Matemática y Arte en la Educación Infantil a partir del cuadro "Bailando por Miedo" de Paul Klee. En: D. Couso, E. Badillo, A. Arduriz-Bravo i G. Perafán (Eds.) *Unidades Didácticas en Ciencias y Matemáticas*, (pp. 93-126). Bogotá: Magisterio

Edo, M.; Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. En M. Antón y B. Moll, (eds.), *Educación infantil. Orientación y Recursos (0-6 años)*, (pp.103-179). Barcelona: Praxis.

Edo, M.; Gómez, R. (2006). Matemática y arte en Educación Infantil a partir del cuadro "Bailando por Miedo" de Paul Klee. En M. Anton y B. Moll, (eds.), *Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años),* (pp. 181-207). Barcelona: Praxis

Lapierre, A.; Vera, T.; Aucouturier, B. (1983). *Simbología del movimiento*. Barcelona: Cientifico-Médica.

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño*. México: FCE.

Piaget, J. (1981). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Buenos Aires: Ábaco.

Piaget, J.; Inhelder, B. (1969). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Saá, M. D. (2002). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones*. Madrid: EOS.

Sheffield, S.; Burns, M. (1995). *Math and Literature: (K-3) Book 2*. Calif: Math Solutions Publications.

Torra, M. (1997). Los cuentos en clase de matemáticas, algo más que un recurso. *Uno-Revista de Didáctica de la Matemáticas, 11*, 107-115.

Van Oers, B. (1996). Are you sure? Stimulating mathematical thinking during young children's play. *European Early Childhood Education Research Journal* 41: 71–87.

Van Oers, B. (1999). Teaching opportunities in play. In *Learning Activity and Development* ed. M. Hedegaard and L. Lompscher, 268–289. Oxford, UK: Aarhus University Press.

Van Oers, B. (2003). Learning resources in the context of play. Promoting effective learning in early childhood. *European Early Childhood Education Journal* 111: 7–26.

Vygotski, L. (2003). El papel del juego en el desarrollo del niño. En M. Cole; V. John-Steiner; S. Scribner; E. Souberman, (eds.), *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, (pp. 141-158). Barcelona: Edit. Crítica.

BUSCANDO INDICADORES ALTERNATIVOS PARA DESCRIBIR EL DESARROLLO DEL JUEGO DE CONSTRUCCIÓN CON NIÑOS DE 2 Y 3 AÑOS

Carlos de Castro Hernández
Universidad Complutense de Madrid. España
Gonzalo Flecha López
Escuela Infantil "La Cigüeña María" de Las Rozas. Madrid. España

Resumen

El objetivo del trabajo es detectar indicadores del desarrollo del juego de construcción infantil, que sean alternativos y complementarios a los que aparecen en la literatura, y sirvan para describir con detalle la evolución de este tipo de juego. Para ello, hemos realizado un estudio longitudinal con un grupo de alumnos de 2-3 años. A través de la observación, y la documentación de la actividad, desarrollamos este estudio cualitativo en el que nos centramos en cuatro posibles indicadores: la repetición, equivalencia, posición relativa de los bloques, y la forma global de la construcción. En cuanto a las acciones de los niños, hemos centrado la atención en indicadores verbales y de cooperación.

Palabras clave: juego de construcción, Educación Infantil, 0 a 3 años, matemáticas, geometría, repetición, equivalencia, simetría, patrones.

Abstract

The aim of this study is to identify indicators for the development of children's block play, alternative and complementary to those found in the literature. These indicators must serve to describe in detail the development of this type of play. With this objective, we have conducted a longitudinal study with a group of 2 and 3 year-old students. Through observation and documentation of the activity, we have developed this qualitative study in which we focus on four possible indicators: repetition, equivalence, relative position of the blocks, and the global shape of the building. To study children's actions, we have focused our attention on verbal and cooperation indicators.

Key words: block play, Early Children Education, toddler, mathematics, geometry, measurement, repetition, equivalence, symmetry, patterns.

De Castro, C.; Flecha, G. (2012*).* Buscando indicadores alternativos para describir el desarrollo del juego de construcción con niños de 2 y 3 años. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 455-472). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción: Fundamentando un trabajo de desarrollo curricular en la observación de la actividad infantil

Este estudio forma parte de un conjunto de trabajos que venimos desarrollando en Escuelas Infantiles, con niños de 2 a 6 años, con el objetivo final de desarrollar el currículo geométrico de la Educación Infantil (De Castro, 2011; De Castro y Escorial, 2006; De Castro, López y Escorial, 2011; y Escorial y De Castro, 2011). En particular, investigamos sobre el tipo de trabajo que podemos desarrollar en el aula de infantil, de juego de construcción con piezas de madera, para abordar el estudio de los sólidos (en el ámbito de la geometría tridimensional).

Dentro de este esfuerzo de desarrollo del currículo, nos hemos encontrado con algunas dificultades. Una de las mayores es la descripción que se hace del juego de construcción en algunos trabajos, cuando los protagonistas son niñas y niños de primer ciclo de Educación Infantil. Encontramos que las ‘etapas’ del desarrollo del juego de construcción descritas por Johnson (1996), comúnmente aceptadas en la literatura sobre juego de construcción, y que nosotros resumimos en De Castro, López y Escorial (2011), se suceden con mucha rapidez en el juego infantil y parecen no proporcionar información suficiente sobre la construcción, en estas edades, como para cimentar en esos planteamientos teóricos el desarrollo de un tipo de actividad matemática adecuada para los niños de 2-3 años. Sin embargo, tenemos una gran confianza en que, con niños de 2-3 años, es posible realizar una actividad matemática a través del juego de construcción. Esta convicción está inspirada en los trabajos de Arnaiz (2005) y Arnaiz y Camps (2005) en que se muestra el juego de construcción como un tipo de actividad adecuada al desarrollo de los pequeños de estas edades.

Así, el objetivo que nos planteamos en este trabajo es describir posibles indicadores del desarrollo del juego de construcción infantil, complementarios de los que encontramos en la teoría, que faciliten nuestra comprensión acerca de las posibilidades de desarrollar una actividad matemática, a través del juego de construcción, en estas edades (2-3 años).

Comenzaremos con la descripción de las etapas del aprendizaje de las construcciones, según aparecen en trabajos clásicos. Las ilustraciones para estas etapas las hemos tomado de nuestro propio estudio. Con esto, deseamos enfatizar nuestro convencimiento de que lo que se plantea en esta teoría es básicamente correcto aunque, como decimos en párrafos anteriores, insuficiente.

El punto de partida de nuestro trabajo: Las ‘etapas’ en la construcción

La evolución de las construcciones sigue unas pautas más o menos estables (Johnson, 1996), abarcando desde un año de edad hasta los cuatro o cinco años. Pensamos que no tiene mucho sentido hablar de ‘etapas’, pues los niños suelen pasar con cierta rapidez de unas construcciones a otras más evolucionadas (a veces en cuestión de días o semanas). De hecho, si comenzamos a construir con niños de últimos cursos de Educación Infantil (de 4 a 6 años), podemos asistir a toda una evolución ‘comprimida’ en dos o tres sesiones de juego libre.

Transporte

Cuando los niños comienzan a utilizar el material de construcción en primer ciclo de Educación Infantil, normalmente con uno o dos años, suelen producirse situaciones en las que los pequeños se limitan a transportar el material de un lado a otro sin realizar nada identificable por un adulto con una construcción. Parece como si los niños no supiesen (y seguramente sea así) para qué sirve el material y ‘a qué se puede jugar con él’. En estas situaciones, la educadora puede dedicar un rato a construir, para servir de modelo a sus alumnos que, poco a poco, partiendo de la imitación o por propia iniciativa, empezarán a elaborar sus primeras construcciones. Los comportamientos infantiles de transporte con materiales de construcción son similares a los que podemos observar en el juego heurístico (Goldschmied y Jackson, 2000) con niños de uno y dos años.

Figura 1. Apilamiento vertical lineal.

Figura 2. Apilamiento vertical lineal con piezas iguales.

Figura 3. Apilamientos horizontales lineales.

Apilamientos

Los apilamientos consisten en una acumulación de material sin que realmente exista una verdadera intención, por parte del niño, en la realización de una producción con una forma definida. Los primeros apilamientos se dan en forma de alfombra, aunque pronto comienzan a formarse los primeros apilamientos en vertical. Es habitual que no elijan los bloques intencionadamente, sino guiándose por un principio de proximidad o abundancia.

Puentes

Los puentes (Figura 6) son el segundo tipo de construcción en surgir, junto con los cerramientos -de hecho, en Gura (1992), se presentan los puentes como cerramientos verticales. Son construcciones con forma de dolmen, con dos piezas que suelen ser iguales, o al menos equivalentes en altura, separadas entre sí, con una pieza colocada sobre ellas. Estas construcciones plantean los primeros problemas de construcción. Los dos pilares deben tener entre sí una separación menor que la longitud de la pieza superior. Aquí comparamos una distancia (la longitud de un espacio vacío) con una longitud (de un objeto concreto). Además, el niño debe hacer ciertos equilibrios para que la pieza de arriba no caiga. También es el primer tipo de construcción con ‘agujeros’, un aspecto que suele llamar la atención de los pequeños al construir. Dado que los niños utilizan mucho la repetición como elemento constructivo, no es raro ver construcciones con varios puentes (Figura 6). El siguiente elemento constructivo de similares características aparecerá cuando los niños comiencen a construir ‘pisos’ con tablas cuadradas, con varios ‘pilares’ sustentando cada uno de sus ‘pisos’ (Figuras 25 a 27). Más adelante aún, los pequeños se darán cuenta que basta con un pilar en cada una de las cuatro esquinas de un piso cuadrado para que el edificio no se derrumbe.

Figura 4. Puentes.

Figura 5. Apilamiento tridimensional.

Figura 6. Puentes.

Cerramientos

Los cerramientos aparecen pronto (incluso en primer ciclo de Educación Infantil). Son ‘líneas’ cerradas que delimitan un espacio interior, separándolo del exterior (Figura 7). Los conceptos de cerrado, abierto, interior (dentro), exterior (fuera) y frontera (borde) son conceptos geométricos muy elementales (a los que llamamos conceptos topológicos), que suelen aprenderse pronto, en la Educación Infantil, junto a otros conceptos considerados básicos. Estos conceptos no suelen ocasionar dificultades y se aprenden de forma bastante natural en Educación Infantil, y no muestran su complejidad matemática y su dificultad hasta que los alumnos comienzan el estudio de la topología, dentro del análisis matemático, en la Educación Secundaria y el Bachillerato. Con todo, es preciso ser muy prudentes al interpretar las construcciones infantiles. Los cerramientos llevan consigo toda una simbología y unas connotaciones deben tenerse en cuenta. Muchos autores han descrito el comportamiento de niños que elaboran cerramientos y permanecen dentro de ellos durante un tiempo, como en una especie de aislamiento simbólico, o como buscando protección, hasta que se reincorporan a sus tareas con los demás. Ante este tipo de situaciones, defender que lo importante de la construcción es su aspecto matemático, puede evidenciar la ridiculez de la postura de querer ver todo desde una perspectiva matemática, cuando el hecho fundamental que ahí ocurre, admite lecturas más adecuadas desde el ámbito de lo afectivo.

Figura 7. Cerramientos I.

Figura 8. Cerramientos II.

Figura 9. Cerramientos III.

Patrones y simetrías

La palabra ‘patrón’ admite muchas definiciones diferentes. En construcción, los patrones se refieren a la repetición de un modelo. Los niños suelen crear construcciones, a veces muy sencillas, con varias piezas, y luego dedicarse a iterar este proceso de construcción. Igual que cuando los niños pegan gomets en una hoja de papel repitiendo la unidad formada por un triángulo y un círculo, para formar una serie repetitiva del tipo: triángulo, círculo, triángulo, círculo…, en construcción es habitual ver cómo un niño hace un piso con cuatro pilares y una tabla y, a continuación, repite esta estructura para formar un ‘edificio’ con pisos iguales. Así, aunque la repetición aparece muy pronto en la construcción (2-3 años), la conjunción de la repetición con la copia de un modelo, dando lugar a patrones, aparece más tarde. La simetría es uno de los ‘últimos’ aspectos matemáticos que aparecen en las construcciones. Esta afirmación choca con el hecho de encontrar ejemplos de construcciones simétricas en niños de 2-3 años. De nuevo, insistimos en que, en la evolución en las construcciones, que se suele producir de forma rápida, un elemento fundamental es la propia experiencia construyendo. La simetría que aparece en estas construcciones es una simetría bilateral, como la reflexión en un espejo. La simetría bilateral es la que tiene el cuerpo humano (externamente, y de manera sólo aproximada). Consiste en la división, por un plano de simetría, de los objetos en dos partes simétricas. Cada una de las dos partes, si se mirase en un espejo situado en el plano de simetría, vería a la otra parte de la figura (su parte simétrica).

Figura 10. Patrones y simetría.

Figura 11. Patrones.

Representación temprana

Llega un momento en que todos los elementos constructivos descritos, junto a otros que no hemos citado, se mezclan dentro de las construcciones infantiles. Es un momento en que toma importancia la construcción, vista globalmente en su conjunto, y comienza a tener protagonismo el aspecto de la representación. Es decir, la construcción se convierte en algo que está en el lugar de otra cosa. Al principio, los niños ponen nombre a las construcciones, o dicen lo que éstas representan, una vez finalizada la construcción, a posteriori. Hablamos en estos casos de que hay una situación de representación temprana; una anticipación de situaciones que veremos más claras en la siguiente sección.

Figura 12. Representación temprana (una casa).

Figura 13. Representación avanzada (un castillo).

Figura 14. Representación avanzada (un zoo).

Representación avanzada

El elemento característico y distintivo de la representación avanzada es de tipo metacognitivo. Los niños planifican de antemano cuál es el objetivo final del proceso de construcción. Normalmente, la idea que guía la construcción es la de mezclar la construcción con el juego simbólico. Si tienen juguetes que representan animales, pueden decidir hacer un zoo; si tienen coches, un garaje. La clave es que en situaciones de representación avanzada, hay una idea previa que orienta la planificación, monitorización y regulación de la actividad de construcción, que es de forma deliberada y plenamente consciente orientada a una meta. Los elementos constructivos son los mismos. Lo único que cambia es la integración de estos elementos (y estas destrezas constructivas) dentro de un plan, o un proyecto de construcción.

Propuesta de indicadores adicionales para describir el desarrollo del juego de construcción infantil

Tras describir las etapas en el aprendizaje de la construcción, pasamos a explicar qué indicadores vamos a observar en el presente estudio. Los indicadores que proponemos han surgido de la observación en los estudios previos que hemos realizado durante el periodo 2006-2011, así como de las revisiones de la literatura. Sin embargo, tenemos una actitud abierta a que surjan nuevos indicadores imprevistos en la presente investigación.

Para analizar las primeras construcciones infantiles, vamos a atender a cuatro aspectos fundamentales: la repetición, la equivalencia, las posiciones relativas de una pieza con respecto a las contiguas, y la forma global de la construcción. Al principio, los niños suelen repetir la acción de añadir un bloque, dando lugar a los llamados ‘apilamientos’. El ejemplo típico corresponde a niños de uno y dos años formando ‘torres’ con unos pocos bloques. El término ‘apilamiento’ tiene una connotación de amontonar piezas, una a continuación de la otra, sin tener en cuenta la forma global de la construcción que va apareciendo. Las piezas que se utilizan en los apilamientos no tienen por qué ser iguales (Figuras 1 y 3). En algunos apilamientos, la acción de ir añadiendo bloques de forma repetida, se combina con la elección de bloques iguales, o equivalentes, dando lugar a apilamientos con piezas equivalentes, que suelen tener un aspecto más regular, una forma global más definida (Figura 2).

La forma de juntar las piezas es también interesante. Normalmente, dos piezas contiguas en una construcción tienen contacto en una cara completa de cada pieza. Es raro ver que solo un vértice o una arista de un bloque toquen la superficie de una de las caras de otro bloque: el contacto suele ser cara a cara. Además, cuando las caras de dos piezas que se unen son equivalentes en longitud, los niños tienden, poco a poco, a intentar que las caras coincidan en toda su extensión. En este caso, si se forma un apilamiento con piezas iguales (tablas cuadradas, por ejemplo) y se ajusta la posición de cada tabla al colocarla sobre la anterior de forma que coincidan, la forma global del apilamiento será de prisma cuadrado. Ese tipo de apilamiento tan regular ya no es propio de primer ciclo de Educación Infantil, sino de niñas y niños algo más mayores.

Metodología

El presente trabajo es un estudio longitudinal. En él estudiamos la evolución de las construcciones que realizan los niños y niñas en situaciones de juego libre, a lo largo de un curso, tratando de buscar indicadores para describir esta evolución. Tiene cierto carácter exploratorio pues hemos tenido la necesidad de reinterpretar gran parte de la abundante literatura existente sobre el juego de construcción, rescatando de ella posibles indicadores para abordar de un modo diferente al tradicional el tema de la evolución en la actividad de construcción infantil. Por último, se ha seguido una metodología cualitativa observacional, en la que ha primado la recogida de documentación fotográfica de los alumnos y las anotaciones del educador en durante y después de los momentos de juego.

Participantes

En esta investigación ha participado un grupo de alumnos de primer ciclo de Educación Infantil, de 2 a 3 años de edad, de la Escuela Infantil “La Cigüeña María” de Las Rozas (Madrid), perteneciente a la red pública de escuelas infantiles de la Comunidad Autónoma de Madrid. El proyecto realizado comenzó el día 3 de marzo de 2011 y desde este día la zona de construcciones ha permanecido dentro del aula hasta fin de curso (30 de junio). En total han sido casi cuatro meses de seguimiento.´

El material

El material que hemos utilizado aparece en la Figura 15. Está inspirado en los bloques unidad (unit blocks) de Caroline Pratt (1867-1954), descritos en Wellhousen y Kieff (2001, p. 39) o en Hirsch (1996, p. 149), basados a su vez en los dones de Froebel. El material está diseñado para favorecer la actividad matemática. En especial, es un material idóneo para los procesos de composición y descomposición, fundamentales en el aprendizaje de la geometría. Por ejemplo, si vemos la pieza llamada ‘unidad’ (un ‘ladrillo’ de 4 × 8 × 16 cm), esta pieza puede componerse con dos medias unidades, con dos pilares largos, con cuatro pilares cortos, con ocho cubos de cuatro centímetros de arista, etc. Durante el trabajo de construcción, los niños establecen continuamente, y de forma espontánea, equivalencias entre distintas combinaciones de piezas, para resolver diversos problemas que les surgen durante la actividad de construcción.

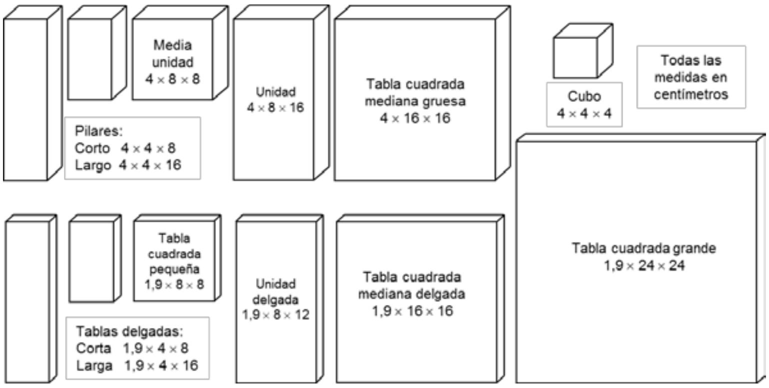


Figura 15. Diseño del material de construcción.

Por otra parte, el material se ha diseñado buscando la estabilidad de sus piezas. En experiencias anteriores (De Castro y Escorial, 2006; Escorial y De Castro, 2011) habíamos utilizado pilares con una sección cuadrada de 3 cm de lado y una longitud máxima de 24 cm. Ante la falta de estabilidad proporcionada por dicho material, cambiamos la sección de los pilares para que fuera un cuadrado de 4 cm de lado y decidimos reducir la longitud máxima del pilar a 16 cm. También hemos tenido en cuenta que el material sea de fácil reproducción, para favorecer que su uso pueda extenderse con facilidad.

Las sesiones de trabajo: descripción y aspectos didácticos

El aula estaba compuesta por una zona de juego de mesa, en donde los niños disponían de materiales tales como puzles, plastilina, juegos de ensartar, material para dibujo, etc.; una zona de cuentos; una zona de animales de plástico; una zona de juego simbólico, con una cocina, disfraces y coches; una zona de imanes; y, por último, una zona de pizarra. Cada una de estas zonas estaba delimitada a partir de alfombras, tarimas o con el propio mobiliario del aula, de tal manera que los niños elegían la zona de juego donde querían ir. El uso de alfombras y tarimas hace que el niño centre su acción en los materiales en la propia zona y evita la excesiva dispersión. La zona de las construcciones se introdujo como una más dentro del aula, colocando el material en una tarima.

En los momentos de juego libre, los niños deciden dónde ir y normalmente suelen pasar por varias zonas en una misma sesión, aunque también se observan “modas” o costumbres en sus juegos. En este sentido, las intervenciones del adulto están encaminadas en favorecer que el niño juegue en zonas diferentes a lo largo de la semana.

El primer día que se presentó el material, también se especificaron ciertas pautas de uso. Para ello, en el momento del corro o asamblea, se mostraron los diferentes bloques y se establecieron las normas. Estas eran del tipo: “No se puede hacer daño a los demás ni hacerse daño con las piezas”, “No se puede romper lo hacen los demás”, “Hay que avisar de que tiramos lo que hemos hecho, para que no le caiga a nadie encima”. Estas normas iban acompañadas de ejemplos para favorecer la interiorización. Durante las primeras sesiones, estas normas se recordaban continuamente para evitar que surgiesen conflictos.

El tipo de trabajo que realizamos en el aula está basado en la metodología por zonas de juego, es decir, una limitación mínima de espacios a partir de acotaciones (con alfombras, telas colgadas, colocación del material, etc.) perceptibles por el niño, de tal manera que sepa dónde encontrar los diferentes materiales. No existen normas, como ocurre con la metodología de los rincones. El material de una zona puede usarse en otra, salvo excepciones lógicas relacionadas con el cuidado de los materiales: por ejemplo, no está permitida la utilización de juegos de mesa fuera de éstas, ya que acarrea numerosas pérdidas de piezas o su deterioro. Se permite este “trasvase” entre zonas, primero, por razones evolutivas de los niños y, segundo, porque creemos que el uso de distintos elementos a la vez favorece su juego (como es el caso de usar animales de plástico para hacerles casas con las construcciones).

El trabajo realizado se ha integrado dentro de la metodología del aula, adecuando espacios y tiempos para la óptima utilización del material por los niños dentro de la dinámica general. La metodología empleada está basada en la utilización de zonas de juego (espacios mínimamente aislados desde el punto de vista perceptivo y con identidad propia), en la que la zona de construcción se convierte en una más.

Tras una primera sesión en la que se presenta el material y se establecen las normas de uso, las cuales se establecen de forma conjunta y se recuerdan siempre que sea necesario (enfocadas sobre todo al respeto a las obras ajenas y cuidado del material), los elementos de construcción pasan a formar parte del material habitual del aula. Para ello se dispone una tarima estable, que no dificulte las acciones de los niños, que facilita centrarse en el juego. También se cuenta con varios contenedores en que se guardarán las diferentes piezas, atendiendo a un orden que los niños pueden interiorizar. En nuestro caso, en cada contenedor, se introducían dos tipos de piezas muy distintas entre sí para favorecer, por un lado, la correcta discriminación con un simple "vistazo" y, por otro, facilitar su orden (Figura 17).

A partir de esta primera sesión, el material se encuentra en todo momento a disposición del niño, permitiendo dejar aquellas obras inacabadas en esta zona para, posteriormente, poder retomarlas. Durante un tiempo, los niños exploran el material de forma libre, evitando la intervención del adulto, con el objetivo de que se familiarizaran con este nuevo material (Figura 18). Pasado un tiempo, se comienzan a realizar pequeñas intervenciones verbales con el fin de "enmarcar" las acciones realizadas y de esta manera fomentar la toma de conciencia sobre sus intervenciones con el material.

Las intervenciones del adulto estaban encaminadas a enmarcar de forma verbal las acciones de los niños con el fin de hacerles caer en la cuenta de sus propias producciones y al mismo tiempo fomentar el que siguieran construyendo. Así, se hacían comentarios como: "¡Qué torre tan alta!" o "¡qué bonito lo que has hecho!" Por otro lado, según avanzaban las sesiones, se fueron introduciendo comentarios relacionados con conceptos espaciales y matemáticos o para provocar el uso de estos términos: "La torre de… es más grande/pequeña/alta/baja que la tuya", "¿qué torre crees que es más alta/baja/grande/pequeña?", "¿El muñeco está dentro/fuera/arriba/debajo de la casa que has hecho?", o "¿Dónde está el muñeco?" En las preguntas que se hacían, hay niños que tienden a responder de forma no verbal, ya que no tienen estos conceptos claros, cuando esto sucedía, el adulto daba la respuesta enfatizando el concepto matemático: "El muñeco está dentro de la casa que has hecho".

Con posterioridad, la intervención del adulto se centró en la proposición de nuevos retos a partir de las propias obras del niño, con el fin de fomentar el avance hacia la elaboración de nuevas estructuras, que fueran creativos en lo que hacían y no se limitaran a repetir aquellas distribuciones en las que se sentían cómodos. Es en este momento en el que utilizamos como recurso la literatura infantil como fuente de inspiración para el niño. Destacamos el cuento de "Los tres cerditos" como relato idóneo para fomentar la planificación y la intencionalidad en las producciones con las construcciones por parte del niño.

A raíz de esta historia, se observó un cambio significativo en las elaboraciones. Apoyándose en muñecos (animales de plástico), buscaban la realización de pequeños cerramientos a modo de "casitas" para dichos muñecos (Figura 19). Aprovechando las nuevas elaboraciones de los niños, comenzamos a introducir conceptos espaciales básicos (dentro de, encima de, al lado de,…) y conceptos matemáticos a partir de comparaciones (más alta que, más que, más grande que,…). Transcurrido un tiempo en el que los niños ganaron destreza tanto a la hora de ganar altura como en sus formas (poniendo tejados a sus casas, por ejemplo), comenzó a darse una creciente cooperación de forma espontánea. Se dieron situaciones en las que unos construían (los más) y otros proporcionaban nuevos bloques.

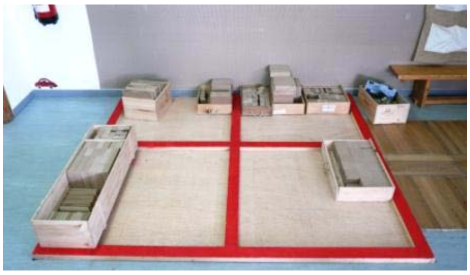


Figura 16. Zona de construcciones

Figura 17. Primeras construcciones

Figura 18. "Casitas para animales"

Recogida de información y evaluación de los alumnos

Durante los distintos momentos hemos llevado un pequeño registro escrito acerca de las acciones que se iban sucediendo y, sobre todo, hemos procurado realizar un seguimiento fotográfico de dichas acciones, dejando así constancia de sus avances en el tiempo. Así, procurábamos ir adaptando nuestras intervenciones en función del momento en el que se encontraban en cuanto a construcciones se refiere. Toda esta documentación sirve para propósitos de evaluación, como para recoger información para abordar el estudio que realizamos.

Por otro lado, al tratarse de una zona más de juego dentro del aula, los niños se acercaban a este material de forma continuada y en general participaba todo el grupo de forma natural en diferentes momentos sin que hubiera que motivar a la participación. Debe señalarse que los niños con necesidades educativas especiales tenían más reticencias a participar en el juego de construcción. En el aula había dos casos, uno diagnosticado como retraso psicomotor y otro con un retraso en el lenguaje y en la capacidad simbólica (este último con un año de desfase). En estos niños se observaba un escaso interés debido a que tenían dificultades por realizar algún tipo de estructura y rápidamente desistían y se dirigían a otros juegos más placenteros para ellos. La actitud del adulto para con estos niños era de intentar motivar para que creciera su interés por esta actividad. Para ello, se recurría a situaciones de imitación invitándoles a participar, al igual que se pedía la colaboración de sus iguales. Los resultados fueron escasos en cuanto a nivel de participación y evolución en sus producciones, no pasando en estos casos de pequeños apilamientos horizontales y verticales.

Resultados

En esta sección, vamos a describir los resultados de la observación sobre los indicadores propuestos en la introducción: repetición, equivalencia, posición relativa de una pieza y forma global de una construcción. Destacamos que, al tener el trabajo un carácter exploratorio, en muchos casos aventuramos interpretaciones de la observación, que deben ser tomadas como tentativas iniciales de comprender la actividad infantil.

Repetición

La repetición es una de las características más evidentes en las primeras construcciones infantiles. Los pequeños pueden repetir la acción de añadir una pieza, o el tipo de pieza utilizada. En este último caso, la repetición parece ligada a la búsqueda de equivalencias. Sin embargo, al observar la actividad infantil, parece que el uso de piezas iguales no es al principio algo intencionado por parte de los niños. Al inicio del juego, se produce una primera fase exploratoria, en la que el niño manipula los distintos bloques y los amontona sin parecer muy consciente de lo que está realizando. A partir de la manipulación, el niño va siendo más consciente de las características del material que está utilizando. Así, el niño mientras apila piezas, después de varias sesiones, y poco a poco, va dándose cuenta de igualdades entre piezas. En este momento, cuando el niño toma conciencia de esta igualdad, es cuando comienza a buscar intencionadamente piezas iguales para elaborar sus construcciones. Hasta ese momento, si se producen apilamientos con piezas iguales, este hecho parece ser provocado por la casualidad o la cercanía de estas piezas al niño en el momento de construir.

Las producciones de los pequeños de 2-3 años suelen ser similares unas a otras. Los niños parecen satisfechos y cómodos con este tipo inicial de construcción durante bastante tiempo. Una interpretación de este hecho, desde el ámbito de lo afectivo, podría ser que los niños y niñas encuentran seguridad y predictibilidad en la repetición de este tipo de construcciones.


Figura 19. Repeticiones I


Figura 20. Repeticiones II


Figura 21. Repeticiones III

Equivalencia

Dos piezas del material pueden considerarse equivalentes si coinciden en una o más de sus dimensiones. Se puede hablar entonces de piezas equivalentes en grosor, altura, forma, superficie, etc. Dentro de la equivalencia, un caso particular muy importante es el de igualdad. A partir de la observación, llegamos a la conclusión de que la equivalencia se aplica en la construcción en situaciones en que los niños desean encontrar piezas de unas determinadas características para llevar a cabo su proyecto. El problema surge cuando carece de aquellos bloques que necesita. Esta situación se da porque otros niños están usando dichas piezas, lo cual puede ser fuente de conflicto, o bien porque éstas se han acabado. Esto supone una oportunidad para 'intervenir' indirectamente, en el diseño del material proporcionado a los pequeños, de forma que el niño se inicie en la equivalencia. En este momento, el niño prueba con otras piezas y mediante estas pruebas (tras varios ensayos) comienza a descubrir equivalencias. Por ejemplo, la unión de dos cubos da como resultado un pilar corto. Se abre así una nueva perspectiva de construcción.


Figura 22. Equivalencias I


Figura 23. Equivalencias II


Figura 24. Equivalencias III

Posición relativa de las piezas

Al comienzo del proyecto, los niños se limitaban a apilar las piezas. Parece como si la posición de cada pieza con respecto a la colocada con anterioridad, careciera de interés para ellos. A partir del uso continuado del material, se observó un incremento del interés por la mayor coincidencia entre piezas dentro de un apilamiento, para formar una torre. Interpretamos esto en términos de un conocimiento mayor sobre estabilidad que aumenta las posibilidades de elaborar producciones más complejas. De ahí surge la búsqueda intencionada de piezas similares o la formación de equivalencias, como hemos señalado en apartados anteriores. La continua investigación, a través de la acción, por parte del niño, dio como resultado la combinación de distintas distribuciones para las piezas, llegando a crear estructuras cada vez más complejas. Por ejemplo, en las Figuras 25 a 25, se van tanteando diferentes colocaciones de las piezas en cada piso, combinadas con distintas alturas de los pisos, variadas configuraciones en cuanto a la forma de disponer las piezas, etc.

Figura 25. Construcción conjunta I

Figura 26. Construcción conjunta II

Figura 27. Construcción conjunta III

Forma global de la construcción

La forma global es un aspecto de la construcción en el que parecen poner su atención los niños sólo después de bastantes sesiones de trabajo. Esto implica que antes debe existir cierta planificación en la construcción. Resulta laborioso para el niño llegar a la conclusión de que va a realizar una construcción con un fin y no que el fin sea ver hasta donde es capaz de llegar. Es decir, que llegado a un punto, consideren que han terminado (no por falta de interés). Esto se ve muy claro cuando elaboran un producto y comienzan otro distinto. Normalmente, distinguimos esta situación porque los pequeños, al terminar su obra, reclaman la atención del adulto. Otro paso más es la elaboración de una construcción con un claro objetivo que guarda cierta relación con la realidad representada: hacer una casa, un castillo, una carretera, etc. En la representación gráfica pasa algo parecido. Recordemos que el niño a estas edades es global en sus aprendizajes. Al principio pinta sin intención de representar, por un simple placer motriz. A posteriori, suele poner nombre a su producto, sin que éste tenga relación con la realidad nombrada. Con el tiempo, enuncia lo que va a representar antes de realizarlo, observándose similitudes entre lo representado y el modelo, teniendo en cuenta sus limitaciones en cuanto a destreza de la técnica utilizada.


Figura 28. Una casa


Figura 29. Torre para encerrar al lobo


Figura 30. Torre terminada

Otros indicadores de evolución en la construcción

Hay dos aspectos que solemos observar en trabajos de construcción realizados por niños y niñas de Educación Infantil: 1. Cuándo se deja de construir y se comienza a realizar juego simbólico con las construcciones (y con materiales complementarios, como muñecos de plástico), y 2. En qué momento (y en qué niños) se produce el cambio de construir individualmente a compartir la actividad de construcción.

En cuanto a la primera cuestión, de nuestra observación concluimos que en esta investigación apenas se dieron episodios de juego simbólico. Es cierto que todo el juego estaba envuelto en cierto simbolismo, pero el objetivo principal del niño no parecía centrarse en ese juego, sino en la propia elaboración de estructuras. En trabajos anteriores (De Castro, López y Escorial, 2011) el juego simbólico se iniciaba casi siempre, con niños de 3-4 años, ante la ausencia de material para continuar las construcciones.

En cuanto a la segunda cuestión, a partir de las continuas interacciones con el material comenzaron a surgir, espontáneamente, episodios de construcción conjunta. La mayor parte de las producciones se elaboraban en paralelo, de tal manera que cada niño construía lo suyo. Poco a poco, con naturalidad, comenzaron a producirse procesos de cooperación con un mismo objetivo, con un cierto reparto de funciones: unos proporcionaban piezas y otros se encargaban de colocarlas. El resultado provocó estructuras más elaboradas, con una mayor carga simbólica, en las que creaban supuestos barcos, castillos, casas, etc., con el fin de jugar después con el resultado. Sin embargo, el juego parecía consistir en la propia creación, y cuando consideraban como terminada la obra, el juego terminaba.

De esta observación parece deducirse que, para algunos niños, aunque no para todos, el inicio de la cooperación en la construcción es un indicador del desarrollo en la actividad de construcción que no estaba previsto de antemano como tal al comenzar el presente estudio.

Figura 31. Juego cooperativo I.

Figura 32. Juego cooperativo II.

Conclusiones

En este estudio hemos podido observar la evolución de los niños, desde que toman contacto por primera vez con el material, hasta que son capaces de elaborar estructuras complejas. Esta evolución resulta verdaderamente rápida (todo lo descrito se ha desarrollado en cinco meses de trabajo), teniendo siempre presente que el material estaba a la disposición del niño como una zona de juego más dentro del aula. Ponemos de relieve este hecho, porque consideramos importante que el niño disponga de numerosos momentos para investigar sobre él, ya que esto favorece un proceso continuo de evolución.

En el juego de construcción de los niños de 2-3 años predominan los apilamientos verticales y horizontales. Aparecen después otro tipo de construcciones como puentes, cerramientos, alguna construcción simétrica poco elaborada (con no mucha frecuencia) y algunas repeticiones de estructuras sencillas, como puentes y torres con pisos (a veces con diferente número de pilares en cada uno). Es evidente el uso de la repetición y la equivalencia, y la combinación del juego de construcción con el juego simbólico.

Por otro lado, consideramos importantes las intervenciones del adulto como favorecedor en la adquisición de nuevos conceptos relacionados con la lógico-matemática y conceptos espaciales. Poniendo palabras a las acciones del niño podemos ir introduciendo nuevo vocabulario que poco a poco ellos mismos irán empleando a partir de las informaciones del contexto y las intervenciones adultas.

Referencias bibliográficas

Arnáiz, V. (2005). Testimonios de un itinerario. Ejemplos de lo que hacen algunos niños y niñas de dos años en el taller de construcciones. *Aula de infantil*, *26*, 16-19.

Arnáiz, V., y Camps, V. (2005). Taller de construcciones. ¿Cómo lo hacemos? *Aula de Infantil*, *26*, 7-10.

De Castro, C., y Escorial, B. (2006). El juego de construcción: una experiencia matemática para la escuela infantil. *Indivisa Revista, 15,* 15-17. Disponible en http://eprints.ucm.es/12635/

De Castro, C. (2011). Buscando el origen de la actividad matemática: Un estudio exploratorio sobre juego de construcción en primer ciclo de Educación Infantil. *Escuela Abierta, 14*. Disponible en: http://www.ceuandalucia.com/escuelaabierta/ea14.php

De Castro, C., López, D., y Escorial, B. (2011). Posibilidades del juego de construcción para el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Infantil. *Pulso: Revista de Educación*, *34*, 103-124. Disponible: http://revistapulso.cardenalcisneros.es/index.php

Escorial, B., y De Castro, C. (2011). La gran torre: Matemáticas en la Educación Infantil a través de un proyecto de construcción. Números, 78, 135-156. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Experaula_01.pdf

Goldschmied, E., y Jackson, S. (2000). *La educación infantil de 0 a 3 años*. Madrid: Morata.

Gura, P. (Ed.) (1992). *Exploring learning: Young children and blockplay*. London: Paul Chapman Publishing.

Johnson, H. (1996). The art of block building. In E.S. Hirsch (Ed.), *The block book* (3rd ed.) (pp. 9-25). Washington, DC: Naeyc.

Wellhousen, K., & Kieff, J. (2001). *A constructivist approach to blockplay in early childhood*. Albany, NY: Delmar.

DIAGNOSIS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN ESCOLARES DE 3 A 6 AÑOS. PROYECTO

Catalina María Fernández Escalona

Universidad de Málaga.

Resumen

Presentamos un proyecto en el que los resultados que esperamos obtener estarán en consonancia a una doble finalidad: Por una parte conseguir nuevos conocimientos sobre la evolución del pensamiento matemático en escolares de 3 a 7 años, y, por otra, confeccionar un material informático de fácil manejo para diagnosticar el pensamiento matemático tanto a nivel de individuos concretos como a nivel de pequeñas y grandes muestras de población.

El objetivo general es dar a conocer una nueva herramienta para profesionales de la educación y de la psicología del aprendizaje que facilite la evaluación del pensamiento matemático en escolares de Educación Infantil

Palabras clave: pensamiento matemático, diagnosis del pensamiento matemático, evaluación de competencias matemáticas en educación infantil

Abstract

We present a project in which the results we hope to obtain will be in line with a double objective: first, to obtain new insight into the development of mathematical thinking in school children aged three to seven, and second, to create user-friendly IT resources for diagnosing mathematical thinking both in individuals and in small and large population samples.

The overall aim is to introduce a new tool for education and psychology of learning professionals which facilitates the evaluation of mathematical thinking in early childhood learners.

Key words: mathematical thinking, diagnosis of mathematical thinking, evaluation of mathematical competence in early childhood learners.

Fernández, C. (2012*).* Diagnosis del pensamiento matemático en escolares de 3 a 6 años. Proyecto. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 473-487). Ciudad Real: SEIEM.

.

Introducción

La evaluación de las competencias matemáticas de los escolares al término de la educación obligatoria se considera un procedimiento coherente para estimar el dominio matemático de cada promoción escolar, necesario para mantener socialmente estas competencias y, en su caso, para tomar las medidas correctoras oportunas. La administración educativa se esfuerza para obtener indicadores útiles del rendimiento escolar. Para ello diseña y aplica diversos instrumentos, analizando los datos obtenidos e interpretando la información que de ellos se deriva. Los resultados de las pruebas se manejan como indicadores del nivel científico de una sociedad y ayudan a orientar la política educativa de un país. También se vienen utilizando por la OCDE como indicadores económicos y sirven para planificar el desarrollo de las comunidades humanas y hacer estudios comparativos entre países (Gil, 2000)

Entenderemos por pensamiento matemático el conjunto de conceptos, procedimientos, estructuras, representaciones, habilidades y destrezas mentales y culturales necesarias para intentar resolver tareas propias de la matemática. Este trabajo se sitúa en una línea de investigación que hemos denominado pensamiento matemático, que se caracteriza porque "estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras matemáticas. En concreto, la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos, la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura matemática" (Adaptación de Castro, E. 1994)

Este concepto integra conocimientos que corresponden a distintas líneas de investigación en Didáctica de la Matemática. Entre otras, podemos destacar las siguientes:

- Pensamiento proporcional
- Pensamiento probabilístico
- Pensamiento numérico
- Pensamiento geométrico
- Razonamiento inductivo numérico
- Sistemas de representación en matemáticas

- Pensamiento lógico-matemático en Educación Infantil
- Resolución de problemas matemáticos

Intentamos resolver parte de un problema de transferencia de resultados de investigación. Este trabajo es necesario para cubrir necesidades profesionales de profesores de matemáticas, psicólogos, pedagogos y maestros.

Para evaluar las potencialidades lógicas y matemáticas de los escolares hemos localizado tareas que han sido clave en los estudios realizados, seleccionado una batería suficiente y adaptándolas a un mundo virtual para facilitar el trabajo del futuro maestro.

Objetivos

El objetivo general es dar a conocer una nueva herramienta para profesionales de la educación y de la psicología del aprendizaje que facilite la evaluación del pensamiento matemático en escolares de Educación Infantil. Los futuros maestros participarán y colaborarán en nuestros objetivos de investigación en relación con dicha evaluación. Entre estos objetivos podemos destacar:

- Integrar resultados de investigaciones en educación matemática con el fin de difundir entre los profesionales unas pruebas objetivas de diagnosis del pensamiento matemático preparadas para que las realicen escolares de 3 a 6 años
- Adaptar los contenidos de dichas pruebas para realizarlas de manera virtual usando técnicas multimedia
- Dar a conocer las técnicas de validación estadística de los nuevos instrumentos

Pretendemos dar a conocer unas escalas de medida que diagnostican a los escolares según distintas edades. En total se darán a conocer 8 pruebas para escolares de 3 a 6 años. En Educación Infantil los alumnos deben ser diagnosticados cada seis meses.

Debido a la naturaleza de nuestras pruebas, y de acuerdo con nuestro diseño, en los trabajos realizados (Fernández, 2001; Hernández, 2005; Ortiz, 1997), para cada nivel se deben confeccionar unos protocolos virtuales para la realización de entrevistas de tipo clínico, las cuales posibilitarán ordenar a los alumnos en distintos niveles de competencias matemáticas.

Este proyecto debemos integrarlo en el Programa Nacional de Ciencias Sociales, Económicas y Jurídicas, en el apartado 5.1, abarcando los apartados de componentes didácticos, metodológicos, y tecnológicos de los programas de enseñanza/aprendizaje. Nuevas tecnologías de la información y comunicación y educación a lo largo de la vida .Aprendizaje en contextos virtuales.

Ante todo dejar claro que no pretendemos diagnosticar el rendimiento escolar en matemáticas. Lo que pretendemos es diagnosticar la capacidad de comprender-aprender matemáticas respecto a un nivel medio para cada edad. Solo una parte mínima de las pruebas se dedican a competencias escolares.

Finalidad

Por tratarse de formación de educadores y de un proyecto de "investigación en proceso" su finalidad es doble. Por una parte conseguir nuevos conocimientos sobre la evolución del pensamiento matemático en escolares de 3 a 6 años, y, por otra, confeccionar un material informático de fácil manejo para diagnosticar el pensamiento matemático tanto a nivel de individuos concretos como a nivel de pequeñas y grandes muestras de población. Así, un profesor podrá evaluar el estado del pensamiento matemático de sus alumnos obteniendo resultados inmediatos con gráficos y orientaciones didácticas para los casos necesarios.

Antecedentes y estado actual

El concepto de pensamiento matemático lo entenderemos como el conjunto de conceptos, procedimientos, estructuras, representaciones, habilidades y destrezas mentales y culturales necesarias para intentar resolver tareas propias de la matemática.

Pensamiento matemático integra conocimientos que son objeto de investigación en distintas líneas en el campo de la Educación Matemática. En relación a nuestro propósito, podemos destacar, entre otras, las siguientes líneas y referencias básicas:

- Pensamiento numérico (Castro,1994; Díez, 2001; Fernández, 1997, 2003 y 2004; Fernández y Sánchez, 1997; Fernández y Ortiz, 2008; González, 1995; Ortiz, 2009; Rico, 1997)

- Pensamiento geométrico (Alsina y otros, 1987 y 1988; Azcárate, 1997; Fortuny, y Almató, 1983; Martínez y otros. 1989)
- Razonamiento inductivo (Castro, 1995; Koning, Sijtsma y Hamers, 2003; Ortiz, 1997, 1998 y 2000)
- Sistemas de representación en matemáticas (Castro, 1994; Duval, 1999; Rico, 1996)
- Pensamiento lógico-matemático en Educación Infantil (Carpenter, y otros. 1999; Fernández, 2001a, 2001b, 2007a, 2007b, 2007c, 2008 y 2009)
- Resolución de problemas matemáticos (Castro,1994; Polya, 1953)

Todos estos estudios previos se pueden considerar como antecedentes relacionados al marco conceptual de este trabajo. Estas líneas de investigación están recogidas en grupos internacionales como la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) o el PME (Psichology Matematics Education)

Para evaluar las potencialidades lógicas y matemáticas de los escolares hemos de localizar aquellas tareas que han sido clave en los estudios realizados para configurar una batería suficiente que nos permita la diagnosis del pensamiento matemático en niños de 3 a 6 años.

Una vez visto los antecedentes nos vamos al estado actual. Hemos elaborado unas escalas de medida para diagnosticar a los escolares según distintas edades. Dichas escalas se elaboraran mediante 32 pruebas de las cuales 16 serán relativas al pensamiento numérico.

La diagnosis del pensamiento numérico en niños de 3 a 6 años se realizará según períodos de seis meses y atendiendo a 4 tareas tipo. Cada una de ellas conlleva estos esquemas:

- ❖ Cardinal, que denominaremos como C
- ❖ Ordinal que denominaremos como O
- ❖ Cardinal y ordinal que denominaremos como CO
- ❖ Suma y resta que denominaremos como SR

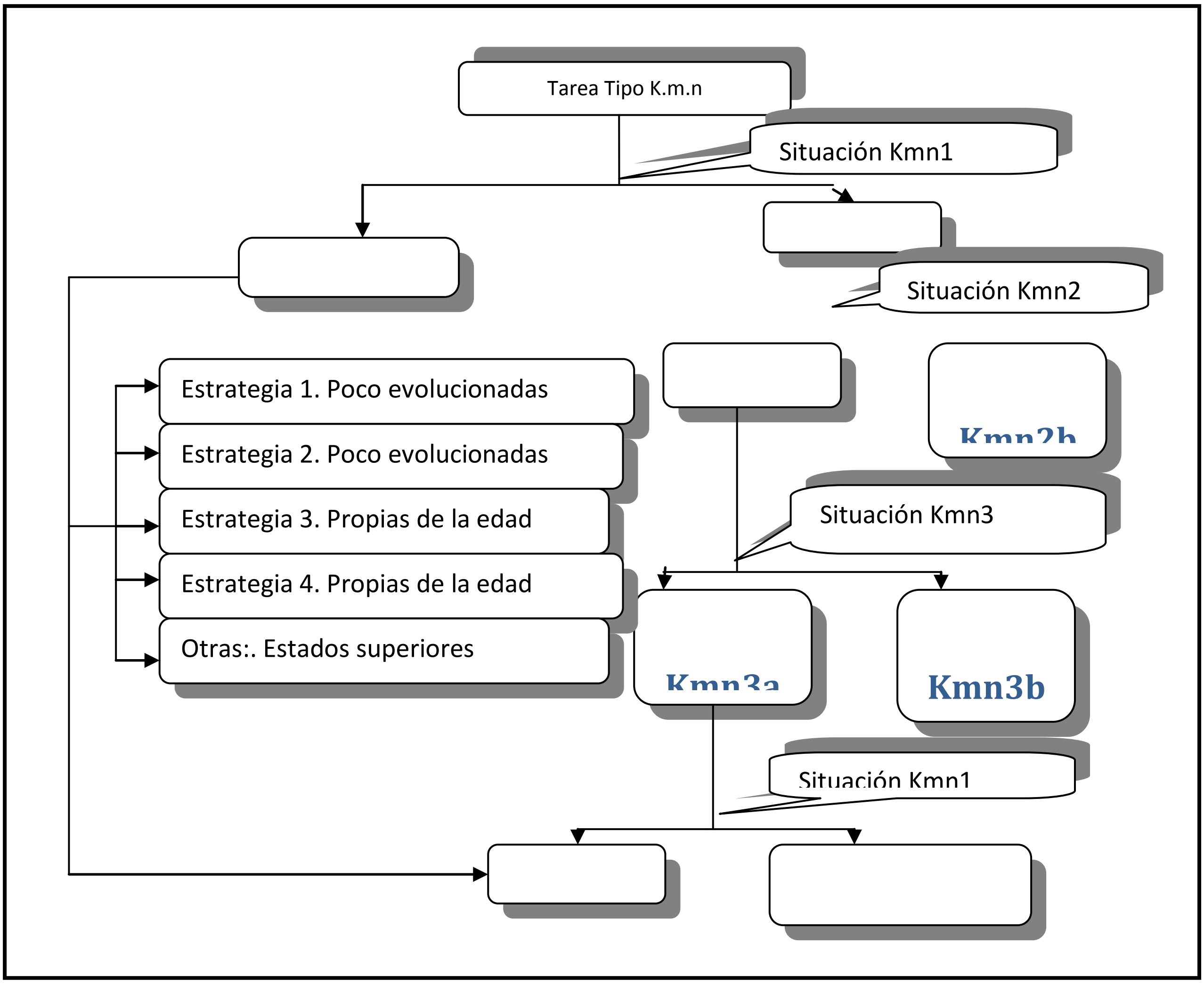
	DIAGNOSIS DEL CONOCIMIENTO NUMÉRICO							
Período	3.0-3.6	3.6-4.0	4.0-4.6	4.6-5.0	5.0-5.6	5.6-6.0	6.0-6.6	6.6-7.0
Tareas	C.3.0	C.3.6	C.4.0	C.4.6	C.5.0	C.5.6	C.6.0	C.6.6

	O.3.0 CO.3.0 SR.3.0	O.3.6 CO.3.6 SR.3.6	O.4.0 CO.4.0 SR.4.0	O.4.6 CO.4.6 SR.4.6	O.5.0 CO.5.0 SR.5.0	O.5.6 CO.5.6 SR.5.6	O.6.0 CO.6.0 SR.6.0	O.6.6 CO.6.6 SR.6.6

Según esta codificación, una tarea cualquiera K.m.n, donde K toma los valores C, O, CO y SR; m los valores 3, 4, 5 y 6; y n los valores 0 y 6, es la tarea que conlleva el esquema lógico-matemático K en el período m.0-m.6 si n=0 ó en el período m.6-m+1.0 si n=6

Dado un niño cualquiera de un período de edad determinado, diremos que tiene adquirido una competencia numérica dada (cardinal, ordinal, cardinal y ordinal, suma y resta) si ha superado con éxito la “tarea tipo” propuesta en la diagnosis con el esquema lógico matemático subyacente dado.

Superar con éxito la “tarea tipo” significa realizar correctamente la Situación Kmn1 del esquema siguiente:



Para diagnosticar a un niño cualquiera su pensamiento matemático, de un período de edad determinado, se le pasaran 8 tareas, 4 serán de pensamiento numérico (que son las que tratamos en este trabajo) y otras 4 corresponderán al conocimiento de estructuras lógico-matemáticas correspondientes al módulo “Desarrollo de capacidades lógico matemáticas en escolares de 3 a 7 años. Técnicas de evaluación, diagnosis y tratamiento de dificultades” del Experto Universitario en Diagnosis y Tratamiento del Pensamiento Matemático (3-7 años) de la Universidad de Málaga.

Puede ocurrir que el niño realice con éxito:

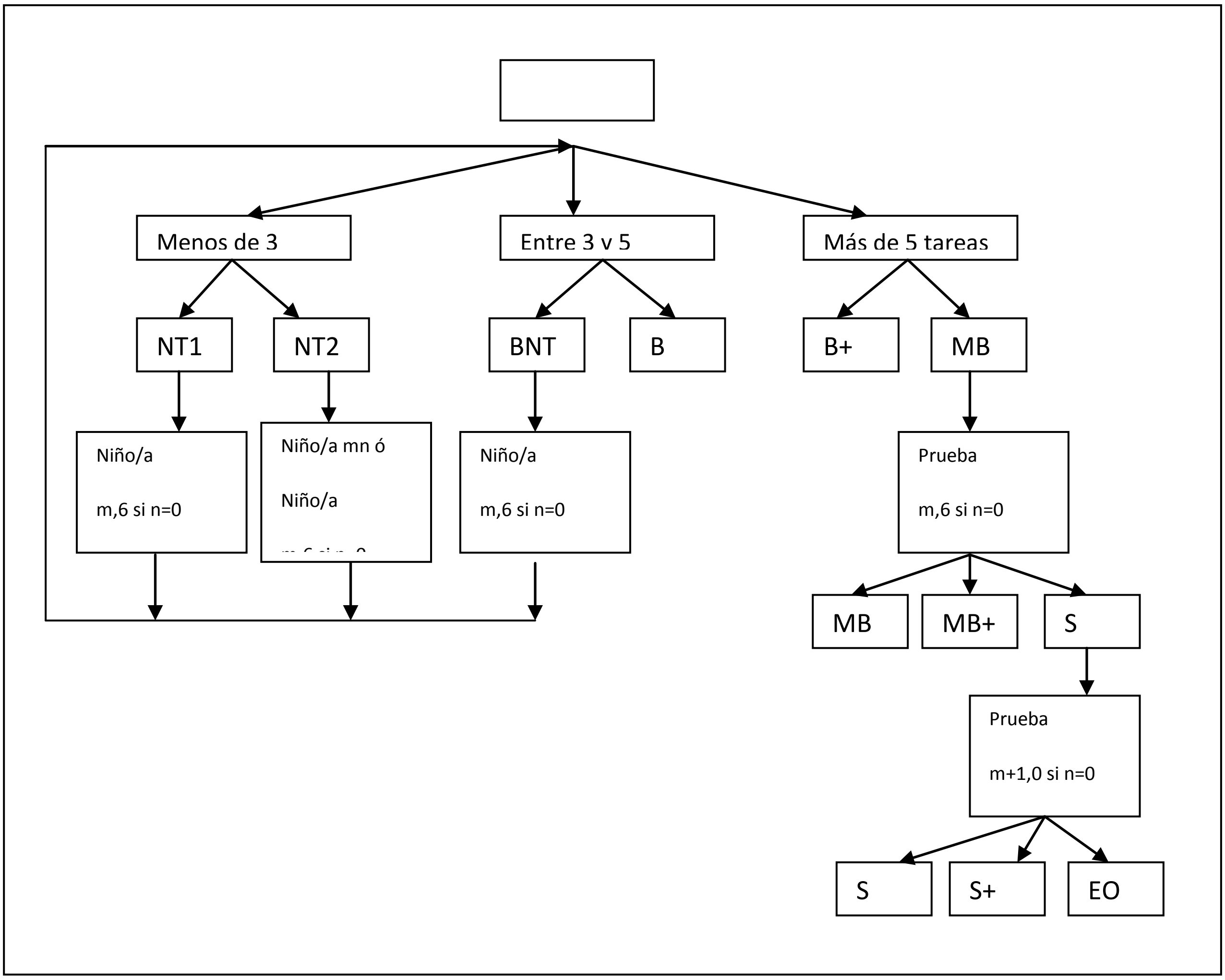
1. Menos de 3 tareas. Si el niño está por debajo de la media entre todos los que realizan menos de tres tareas entonces necesitará 6 meses de tratamiento; se evaluará como NT1 (necesita tratamiento del tipo 1). Si el niño está por encima de la media necesitará 3 meses de

tratamiento; se evaluará como NT2 (necesita tratamiento del tipo 2). Al cabo de ese período se realizará la diagnosis atendiendo al período natural del niño, es decir a la edad que en ese momento tenga.

2. Entre 3 y 5 tareas. Si el niño está por debajo de la media se hará un tratamiento de 3 meses; lo evaluaremos como BNT (bien necesita tratamiento). Si está por encima de la media lo evaluaremos como B (bien)

3. Más de 5. Si está por debajo de la media entre todos los que han hecho más de 5 lo consideraremos B+ (bien más). Si está por encima de la media será MB (muy bien) y le pasamos las pruebas del período siguiente aunque el niño no tenga la edad. Si en el período siguiente obtiene menos de 3 tareas su evaluación final será MB, es decir se queda como estaba. Si obtiene entre 3 y 5 se evaluará como MB+ y si obtiene más de 5 será S (sobresaliente). Si en este último caso obtiene más de la media se le pasarán las tareas del período siguiente que ya serán dos tramos de edades por encima de la suya; en este caso si obtiene menos de 3 su evaluación será S (sobresaliente), entre 3 y 5 es S+ (sobresaliente más) y si es más de 5 lo evaluaremos como EO (éxito operatorio) concluyendo la diagnosis del niño.

Todo esto se recoge en el esquema siguiente:



Ante todo dejar claro que no pretendemos diagnosticar el rendimiento escolar en matemáticas. Lo que pretendemos es diagnosticar la capacidad de comprender-aprender matemáticas respecto a un nivel medio para cada edad. Solo una parte mínima de las pruebas se dedican a competencias escolares.

A modo de ejemplo veremos la tarea tipo para diagnosticar el cardinal en el período 3.6-4.0, lo que notamos como C36:

En un lugar de la mesa disponemos un montón de tarjetas en las que hay dibujada una manzana en cada una de ellas, algunas serán verdes y otras rojas.

Situación1 C36. Le decimos al niño:

> De ese montón dame 5 manzanas. Recíprocamente, colocamos 5 manzanas sobre la mesa de cualquier forma y preguntamos cuántas hay.

Puede ocurrir que la haga bien 1C36a ó que la haga mal 1C36b

<u>Caso 1C36a</u>

Como la ha realizado correctamente vemos el tipo de estrategia que utiliza:

1. *Poco evolucionada*. Cuando el niño da la respuesta correcta en ambas cuestiones por ensayo y error, es decir se equivoca y rectifica cuando le preguntamos si está seguro.
2. *Propias de la edad* Usa subitización
3. *Más evolucionada*. Usa el conteo

Podremos observar, una vez pasadas todas las tareas, que los niños que usen la estrategia más evolucionada obtengan B+ ó más en su diagnostico global.

<u>Caso 1C36b</u>

A este niño se le presenta la Situación2 C36, que es más fácil que la Situación1 C36 pero que conlleva el mismo esquema lógico matemático ó competencia que en este caso es el cardinal.

<u>*Situación2 C36.*</u> Se presentan 4 manzanas sobre la mesa y se la pregunta al niño que cuántas hay.

Puede ocurrir que lo haga bien 2C36a ó que lo haga mal 2C36b

<u>Caso 2C36b</u>.

El niño no lo ha hecho bien y por lo tanto nos interesa ver los errores que comete para su posible tratamiento. Posibles errores:

✓ <u>Gesto rasante</u>. El niño hace un gesto rasante sobre los dos objetos mientras va diciendo los números que conoce

✓ <u>Errores en el señalamiento y/o etiquetaje</u>. El niño hace un señalamiento sobre los objetos pero éste no es correcto mientras va diciendo números aleatoriamente

✓ <u>Errores en el principio de cardinalidad</u>. El niño cuenta correctamente pero no tiene el principio de cardinalidad y vuelve a contar.

✓ <u>Errores de arbitrariedad</u>. El niño da como respuesta un número arbitrario.

<u>Caso 2 C36a</u>

Los niños dan la respuesta correcta a la situación 2 C36 y entonces se pasa a la Situación3 C36 que es más difícil que la anterior pero más fácil que la situación 1.

<u>Situación3 C36</u>. Se presentan 5 manzanas en hilera y se le pregunta cuántas hay. A continuación se le dice que nos dé 4 manzanas del montón.

Puede ocurrir que lo haga bien y estaríamos en el caso 3C36a ó que lo haga mal que sería 3C36b

<u>Caso3 C36b</u>

El niño ha hecho mal la situación 3 y por tanto es interesante ver los errores para un posible tratamiento.

Si falla en la primera parte de la situación 3, es decir no da la respuesta correcta a la pregunta cuántas manzanas hay en una hilera de cinco, los errores que consideramos serán los mismos que para la situación 2, es decir:

✓ Gesto rasante.

✓ Errores en el señalamiento y/o etiquetaje.

✓ Errores en el principio de cardinalidad.

✓ Errores de arbitrariedad

Si falla en la segunda parte, es decir no coge de un montón exactamente cuatro manzanas, los errores que consideramos son los siguientes:

✓ <u>No tener en cuenta el dato</u>. Que el niño coja cartas al azar del montón independientemente del dato (que sean 4)

✓ <u>Errores de conteo</u>. Que el niño haga un intento de conteo y no dé el número de cartas pedidas, con lo cual serán errores de conteo. En este caso el tratamiento será el mismo que se dará para tratar de corregir los errores de la primera parte de esta situación.

Caso 3 C36a

El niño ha realizado bien la situación 3 y por tanto se pasa a la situación 1 que es el indicativo si realiza con éxito, o no, la tarea C36.

Puede ocurrir que el niño la realice correctamente, caso 1C36a ó que lo haga mal caso 1C36b.

Caso 1C36b

Si lo hace mal se ven los errores para un posible tratamiento que serían los mismos que hemos visto en la situación anterior.

Caso 1C36a

Si lo hace bien el niño ha realizado con éxito la tarea tipo que conlleva la competencia cardinal y se miran las estrategias seguidas que ya hemos considerado.

Resultados y conclusiones

Como es un proyecto de investigación en marcha, los resultados que esperamos obtener estarán en consonancia a una doble finalidad: Por una parte conseguir nuevos conocimientos sobre la evolución del pensamiento matemático en escolares de 3 a 6 años, y, por otra, confeccionar un material informático de fácil manejo para diagnosticar el pensamiento matemático tanto a nivel de individuos concretos como a nivel de pequeñas y grandes muestras de población.

Esperamos llegar a que un maestro de infantil pueda evaluar el estado del pensamiento matemático de sus alumnos obteniendo resultados inmediatos con gráficos y orientaciones didácticas para los casos necesarios.

Referencias bibliográficas

Alsina,C. y otros (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina,C. y otros (1992). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

Behr,M.J.; Harel. G. y otros. (1992): Rational number, ratio and proportion. *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* Pág. 296-333.

Ben.Chaim, D.; Fey, J.T. y otros, (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational studies in mathematics*, Sept. 1998, 247-273.

Carpenter,T.P.; Fennema,E, y otros (1999). *Children`s Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Porstmouth,NH: Heinemann.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de granada.

Castro, Ec. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada

Desli, D. (1996). Does language affect proportional reasoning. *PME* 20.

Díez, Á. (1999). "Evaluación del rendimiento artmético. Estudio y actualización de un instrumento" Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fernández, C. (2001a). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años.* Tesis Doctoral. Universidad de Málaga

Fernández, C. (2001b). *Relaciones lógicas ordinales de la secuencia numérica: un estudio empírico cualitativo en niños de 3 a 6 años*. Palencia. V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM).

Fernández , C. (2003). *Pensamiento numérico y su didáctica (3-6 años).* Málaga. Dykinson, S.L

Fernández , C. (2004). *Análisis Didáctico de la Secuencia Numérica*. Málaga. Dykinson, S.L

Fernández, C. (2007a). ¿Cómo y cuándo abordar la didáctica de las operaciones de suma y resta?. *Bordón*, 59(1), 63-80

Fernández, C. (2007b). *Suma y resta en Educación Infantil. Tratamiento dicáctico-lúdico*. Málaga: Edita C. Fernández Escalona.

Fernández, C. (2007c). *Diagnosis del pensamiento numérico en escolares de 3 a7 años*. Málaga: Edita C. Fernández Escalona.

Fernández, C. (2007d). *Investigación sobre pensamiento numérico mediante entrevistas clínicas*. Málaga: Edita C. Fernández Escalona.

Fernández, C. (2008). Tratamiento creativo de las competencias de suma y resta en Educación Infantil. *Creatividad y Sociedad,* Nº. 12, < http://www.creatividadysociedad.com/nactual.html>. [Fecha de consulta: 19/enero/2009]

Fernández, C. y Ortíz, A. (2008): La evolución del pensamiento ordinal en escolares de 3 a 6 años. *Infancia y Aprendizaje*, 31(1), 107-130

Fernández, C. (1997). Razonar Jugando. En A. GERVILLA, (ed). *Eduacación Infantil: Metodología Lúdica*. Málaga: Educación Infantil y Formación Educadores. Universidades de Andalucía.

Fernández, C. y Sánchez, M.D. (1997). Actividades lúdicas en el Area Lógico-Matemática (0-6 años). En A. GERVILLA (ed). *Educación Infantil: Metodología Lúdica*. Málaga: Educación Infantil y Formación Educadores. Universidades de Andalucia.

Fernández, C. (2009): Modelización de competencias ordinales en escolares de 3 a 6 años. *PNA*, 3(4), 185-212.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Fortuny, J.M. y Almató, A. (1983): *La geometría a través de investigaciones de laboratorio*. Actas II Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. (III JAEM) Zaragoza, 337-343.

Gil, G. (2000). *El proyecto P.I.S.A.. El Proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Resultados Educativos de los Alumnos de la O.C.D.E.* Madrid: I.N.C.E (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación).

Lamon, S.J. (1993). Ratio and proportion. Connecting content and children`s thinking. *Journal for research in mathematics education*. Febrero 1993, 41-61

Karplus, R.; Pulos, S; Stage, E.K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. Adquisición of mathematics concepts and processes. *Handbook of research om mathematics teaching and learning*, 45-90.

Koning,E. Sijtsma, K. Hamers, J. (2003). Construction and validation of a test for inductive reasoning. *European Journal of Psychological Assessment*, Vol. 19, issue 1, 24-39

Lawton, C.A. (1993). Contextual factors affecting error in proportional reasoning. *Journal for research in mathematics education*. Febrero 1993, 460-466.

Lesh,R; Behr,M. y Post, T.(1989) Rational number relations and proportions. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. 93-118.

Ortiz, A. (2009). Lógica y pensamiento aritmético. *PNA*, 3(2), 51-72.

Ortiz, A. y González, J.L. (1998). El inductivismo aritmético y su influencia en la enseñanza del número. *Revista Aula*. Vol. 10.

Rico, L. (1997). Reflexiones sobre los fines de la Educación Matemática. *Suma*, N.24, 5-19.

Rico, L. y otros. (1996). The Role of Representation Systems in the Learning of numerical Structures. En A. GUTIÉRRES y L. PUIG (edts). *Proceeding of Twentieth international Conference for de Psychology of Mathematics Education* Vol. 1. Valencia: Universidad de Valencia.

Roth Wolf, M.. y Milkent, M. (1991). Factors in the development of proportional reasoning strategies by concrete operational college students. *Journal of research in science teaching*. Agosto 1991,. 553-566.

Sophian, C. y Wood, A. (2002). Proportional reasoning in young children: the parts and the whole of it. *Journal of educational psychology*, 309-317.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y SU DIDÁCTICA EN EL GRADO DE EDUCACIÓN INFANTIL. DE LA MANIPULACIÓN A LA COMUNICACIÓN VIRTUAL

Guadalupe Gutiérrez
Ainhoa Berciano
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Resumen

En este artículo presentamos una experiencia didáctica llevada a cabo en la asignatura Desarrollo del pensamiento Matemático y su didáctica de la Diplomatura de Magisterio en Educación Infantil. En dicha experiencia se detallan las principales actividades que se han llevado a cabo, basándonos principalmente en el aprendizaje reflexivo y en el uso de la plataforma Moodle. Tras el balance de las ventajas y de los puntos débiles detectados, planteamos las bases de mejora para el desarrollo de la misma asignatura en formato b-learning en el Grado de Educación Infantil.

Palabras clave: reflexión, pensamiento matemático, Moodle.

Abstract

In this paper we present a learning experience conducted in the course development of mathematical thinking and the teaching of the Diplomatura in Nursery Education. In this experience the main activities are explained, based primarily on reflective learning and the use of the Moodle platform. After the balance of benefits and weaknesses identified, we propose the bases for the development of the same subject in b-learning form in the Nursery Education Degree.

Keywords: reflection, mathematical thinking, Moodle.

Gutiérrez, G.; Berciano, A. (2012*)*. Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica en el Grado de Educación Infantil. De la manipulación a la comunicación visual. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 489-503). Ciudad Real: SEIEM.

.

Introducción

La importancia de un diseño válido para la asignatura virtual "Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica" se establece en los cambios en la actividad que se realizan en la Universidad para adaptarse al EEES. En la UPV/EHU los cambios se traducen fundamentalmente en la expansión de metodologías activas y en el uso de las diferentes herramientas tecnológicas.

Entre otros aspectos, con la implantación de los nuevos planes de estudio se han dado la vuelta a las relaciones tradicionalmente establecidas, tanto entre el profesorado como entre éste y el alumnado. Las interacciones cara a cara han perdido peso frente a las relaciones a distancia y las actividades programadas se han extendido fuera del aula presencial. Como consecuencia encontramos un nuevo concepto de clase, ésta ya no es un lugar sólo de apropiación del conocimiento sino de comunicación, que supera en sus relaciones la organización tradicional del espacio y del tiempo. Por otro lado la estructura modular establecida en los nuevos grados supera la organización independiente de las asignaturas haciendo imprescindible la coordinación del profesorado de diferentes áreas de conocimiento. El uso adecuado de las TIC nos debe permitir no solo el desarrollo de las competencias con el alumnado que habitualmente asiste a las clases sino también con aquel que no puede permitírselo.

En nuestra comunicación nos centraremos en la Escuela Universitaria de Magisterio de Bilbao y analizaremos desde diferentes perspectivas el cambio metodológico que supone en la actualidad la implantación del grado en Educación Infantil [2], observando los principios del modelo IKD de la UPV/EHU.
La reflexión sobre la experiencias de enseñanza-aprendizaje realizadas en la asignaturas de las diplomaturas a extinguir, nos ha llevado a valorar las ventajas del aprendizaje reflexivo en la formación de maestras/os. Y el análisis de los problemas que surgen con la exigencia de asistencia a las clases presenciales nos lleva a estimar el diseño de una asignatura b-learning en la UPV/EHU.

Contextualización del problema

En los últimos cursos los estudios de magisterio han pasado de ser "la cenicienta" de la Universidad a ser unos de los más demandados, provocando una tendencia al alza en las notas de corte[50]. Esto ha llenado las aulas con una tipología de alumnado mucho más responsable y disciplinado dispuesto a realizar el trabajo necesario para la consecución de sus objetivos formativos. Sin embargo, no se ha traducido en una mejor "preparación" desde el punto de vista de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y curiosamente tampoco de la tecnología.

Con la implementación de los nuevos grados, la UPV/EHU ha puesto en marcha su modelo de enseñanza-aprendizaje cooperativo y dinámico [9], IKD, a través del cual invita al alumnado a convertirse en protagonista de su propio proceso de enseñanza-aprendizaje y en un elemento activo en la universidad. Para ello fomenta el uso de metodologías activas y pretende garantizar la evaluación continua y formativa. Si bien esta reforma metodológica no es totalmente ajena a las escuelas de magisterio, si encontramos un aspecto hasta el momento no resuelto formalmente: a la vez que se exige la participación activa del alumnado en grupos colaborativos se les reconoce el derecho de ser evaluados mediante una única prueba final para conseguir superar las asignaturas. La cultura IKD fomenta la oferta de distintos tipos de enseñanza: parcial, presencial, semi-presencial, no presencial. Es dentro de este desarrollo curricular donde entendemos la necesidad de la planificación de asignaturas virtuales compatibles con el grado y la utilización significativa y sostenible de las TICs nos permitirá garantizar el seguimiento on-line de la asignatura para conseguir la adquisición de todas las competencias [4]. Mediante la plataforma virtual MOODLE, conseguiremos además de una adecuada gestión de contenidos, el incremento del trabajo colaborativo entre estudiantes, tanto entre los que habitualmente asisten al aula como entre los que no pueden hacerlo, ya que una de sus ventajas fundamentales es su disponibilidad las 24 horas del día y los 7 días de la semana [7].

Principios en los que fundamentamos nuestra propuesta (Nuestros principios)

A la hora de diseñar la asignatura Pensamiento Matemático y su didáctica hemos tenido en cuenta los siguientes principios metodológicos:

[50] Notas de corte de la UPV en el grado maestro en Educación Infantil superiores a 8 en los últimos cursos.
http://www.sarrera.ehu.es/p259content/es/contenidos/informacion/plazas_libre/es_notas/grados.html

- La Educación Infantil [10].

  El primero de los referentes es la Educación Infantil, y en particular las características relativas al desarrollo del pensamiento lógico-matemático. El proceso de maduración del pensamiento infantil es personal, y la función de la maestra no es trasmitir conocimiento para que las/os niñas/os aprendan, sino facilitar los procesos mentales que favorecerán al desarrollo del pensamiento en el/la niño/a. Este desarrollo de capacidades lógicas comienza y se asocia a situaciones de la vida práctica, y se desarrolla a su vez, poniéndolas en práctica.

- La Teoría del Aprendizaje Significativo [1].

  Dado el pensamiento preoperacional de la etapa, la utilización de materiales es imprescindible, tanto aquellos que pueden manipular como los que exigen manipulación virtual. Pero el manejo de material, ni manipulable, ni tecnológico, conseguirá por sí mismo el desarrollo de las competencias, deberá ir acompañado de alguna propuesta, así como de la expresión de las acciones realizadas

- El principio de tecnología de la NCTM [11].

  El tercer pilar de nuestra propuesta metodológica se sustenta en los principios para la enseñanza de la matemática del NCTM según el cual la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; ésta influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de aprendizaje.

- La actitud hacia la competencia matemática del futuro profesorado.

  Unas de las cuestiones más importantes es la experiencia previa asociada al aprendizaje de la matemática que tiene nuestro alumnado que, generalmente, no le ha permitido desarrollar actitudes positivas hacia la misma.

- El uso de las metodologías activas.

  El diseño de las sesiones de clase está fundamentado en la resolución de problemas, haciendo uso de la metodología activa basada en *técnicas de aprendizaje cooperativo/colaborativo* (TAC) [3]. Dichos problemas deberán resolverse en pequeños grupos, en los que cada componente deberá realizar una labor sin la cual el grupo no podrá avanzar en su resolución.

Desarrollo metodológico de la asignatura Pensamiento Matemático y su Didáctica

Entre la tipología de actividades realizadas durante el desarrollo de la asignatura destacamos las siguientes:

- ***Clase expositiva***: dirigida por la docente frente al grupo clase. En ella se expone el tema a tratar, dinámica de clase, objetivos de la misma,... tiene el tratamiento de una clase magistral.

- ***Trabajo en grupos pequeños con materiales manipulativos.*** El alumnado trabaja en grupos según las indicaciones de los documentos-guía. La profesora proporciona el material necesario, organiza el aula y asigna roles específicos dentro de cada grupo, observa el funcionamiento del grupo e interviene fundamentalmente para proporcionar ayuda en el aprendizaje académico cuando el alumnado así lo requiere.

  Del alumnado se espera que interaccione con sus compañeros/as, comparta ideas y materiales, se ayude en sus logros y se explique mutuamente tanto los conceptos elaborados como las estrategias utilizadas.

- ***Puesta en común de los diferentes trabajos realizados en los grupos.*** Con la exposición de los trabajos realizados y las conclusiones conseguidas pretendemos explotar la competencia comunicativa. En ocasiones, la necesidad de hacerse comprender por sus compañeros es el punto de partida para el análisis de sus propias carencias, tanto conceptuales como expresivas, sin obviar el uso de las herramientas digitales

- ***El diario***: Consiste en un acta de clase individual, en el que debe aparecer una reflexión didáctica/metodológica de lo ocurrido en clase. Una vez realizado el diario, un/a alumno/a (previamente seleccionado por la profesora) lo sube al Moodle. El alumnado debe escribir de forma crítica, reflexiva y con rigor y pretendemos que mediante la reflexión de una de las participantes en la actividad realizada en el aula, el resto de compañeras/os pueden comparar sus reflexiones con las publicadas y a la profesora le permite saber como construyen su conocimiento y qué estrategias podemos utilizar para favorecer su adecuado desarrollo [6].

Descripción de las experiencias previas llevadas a cabo en 2009/10 y 2010/11

Durante el curso 2009/10, en la asignatura "Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica II" (4,5 créditos) el alumnado se distribuyó en grupos pequeños de aprendizaje, el primer día se explicó que la tarea consistía en reconocer los estándares del aprendizaje de la matemática, conocer y utilizar materiales apropiados para el desarrollo de la competencia matemática y elaborar una propuesta didáctica a presentar al conjunto de la clase. Una de las actividades singulares que realizamos al comienzo del curso fue la lectura del artículo "El lamento de un matemático"[5]. Su posterior discusión en el aula relacionándola con su propia experiencia educativa como estudiantes de matemáticas en la escuela tradicional provoca en ellos un sensible cambio de actitud hacia las matemáticas y la importancia de su enseñanza

Fuera del aula, el alumnado que asistía a clase debía elaborar un diario en el que explicaban detalladamente la labor realizada en el aula, de forma que no sólo debía manipular y expresar verbalmente, sino que también necesitaba la expresión escrita para comunicar su reflexión sobre el trabajo. El diario era evaluado y tenía un peso del 20% en la calificación final (ver ANEXO I). Es importante destacar que observamos que al alumnado le ayudó a reconocer el objetivo y el contenido de la asignatura[51]

Los resultados de la evaluación fueron aceptables pero se detectaron una serie de puntos débiles:

[51] *"Podemos ver como **cada sesión de esta asignatura, aun hablando sobre conceptos o procedimientos diferentes están hiladas de modo que haya una conexión o nexo de unión entre ellas, que les dé un sentido, y que nos permitan ver a través de diferentes metodologías o ejemplos el sentido último de lo que se pretende que interioricemos** –en mi opinión- más allá de la teoría; **habituarnos a unas formas de reflexión determinadas** – a las que antes aludíamos-, a poner en relación diferentes cuestiones y a preguntarnos acerca de lo que estamos viendo. – a esto nos ayuda el diario…"-.Diario de la alumna MH*

*"En la primera sesión me preguntaba si el tiempo qué nos iba a llevar hacer diario iba a ser realmente justificable con los beneficios o aprendizajes derivados. Al realizarlo me doy cuenta de que **nos facilita darnos cuenta de las cosas que tienen mas importancia y de las que menos – aunque tambien la tengan-, algo que en un futuro será imprescindible; que sepamos priorizar y elegir.** El objetivo es construir diferentes recursos para reflexionar, para que cuando en un aula de infantil nos surjan dudas sepamos cómo resolverlas" diario de IP.*

- Gran parte del alumnado asistía a la clase porque se controlaba la asistencia, para poder acceder a la evaluación continua, pero sin manifestar intención de trabajar y en algunos casos provocando más ruido que riqueza con sus aportaciones.
- Respecto a la propuesta didáctica que debían realizar, los grupos de estudiantes se centraban más en la calidad estética de las exposiciones, tanto escritas como orales, que en el contenido matemático.
- A pesar de los compromisos que firmaban para la elaboración de la materia no siempre el reparto de trabajo era equitativo, de modo que el éxito de algunos grupos se sostenía en el trabajo de un par de miembros y no de todo el grupo.
- Las coevaluaciones que los miembros de los diferentes grupos realizaban se basaban más en la solidaridad entre ellos que en términos objetivos.
- Los resultados de los grupos se colgaban en la plataforma al finalizar el curso con lo que los compañeros que no asistían a clase difícilmente podían aprender del trabajo realizado en el aula durante el desarrollo del mismo.
- Los diarios de clase se evaluaban al final del mismo, con lo que no eran compartidos por los alumnos y únicamente dejaban constancia de la evolución individual de cada alumno.

El análisis de los diarios elaborados nos llevó a distinguir dos grandes clases:

- los reflexivos que incluían además de sus conclusiones personales, los aspectos que le llamaban la atención por su importancia, estas alumnas buscaban información complementaria y la incluían para no olvidarla,
- los descriptivos que además de ser muy repetitivos se caracterizaban por la escasa implicación personal en su elaboración.

Los resultados finales de la asignatura eran mejores en las alumnas cuanto mas reflexivo era el diario que elaboraban y a pesar de la ruptura de la intimidad que suponía hacerlo público, pensamos que compartirlo a lo largo del curso podía ayudar a todos los compañeros a mejorar su proceso de aprendizaje.

Durante el curso 2010/11, teniendo en cuenta los puntos débiles evidenciados el curso anterior, introdujimos varios cambios, tanto en el establecimiento de los grupos como en la organización del trabajo de los mismos:

- Eliminamos la exigencia de asistencia a clase. Las actividades de evaluación fueron continuas: en todas las sesiones, o en la mayoría de ellas, se valoraban los resultados de aprendizaje.
- Los grupos se organizaron para el trabajo durante el tiempo de clase, pero no continuaron fuera de ella, se formaban en cada sesión en función del alumnado que asistía a la misma.
- Cada sesión un/a estudiante (seleccionado/a por la profesora) publicó su "diario" de clase, colgándolo en la plataforma, de modo que no sólo era un instrumento de evaluación sino que con su publicidad pasaba a ser un elemento clave del aprendizaje grupal.
- Todo el alumnado dispuso para su propio aprendizaje la versión del compañero en Moodle, de modo que en la plataforma se encontraban dos desarrollos de la asignatura el planificado por la profesora con el material aportado por ella y las "actas" de lo ocurrido en las diferentes sesiones elaborado por diferentes alumnos.

Con todos estos cambios, hemos observado que:

- La variedad de grupos que trabajaron juntos favoreció la interdependencia positiva.
- El análisis de los textos elaborados por el alumnado favorece la reflexión y la calidad de los trabajos, mejorando ostensiblemente desde el principio del curso hasta el final.
- Los relatos del alumnado en los diarios nos permiten analizar la riqueza de sus reflexiones y la evolución de su actitud hacia el aprendizaje de la matemática.
- Los resultados finales del alumnado que no asiste a clase pero que sigue la evolución de la misma en la plataforma virtual han mejorado con respecto al de los cursos anteriores a éste y en entrevistas individuales con el alumnado, valoran muy positivamente el seguimiento que pueden realizar e incluso así lo manifiestan en las tutorías virtuales.

- El alumnado que no asiste a clase no tiene una tarea asignada pero en las entrevistas mantenidas después de la realización del examen final reconocían consultar la plataforma después de las clases, no solo para recabar la información colgada por la profesora, sino para reconocer el trabajo realizado por el resto de estudiantes en el aula y en muchos casos tener una guía "más real" de lo acontecido en ella. Como consecuencia mejoraron ostensiblemente sus calificaciones en comparación con los estudiantes que no habían asistido a clase en los cursos anteriores.

Futuro trabajo y conclusiones

Los estudios de magisterio requieren del conocimiento no sólo conceptual y competencial propio del grado, sino también exigen responder a la realidad sociocultural del País Vasco. El alumnado que deseando ser maestro en la comunidad tenga dificultades bien económicas, bien laborales o de conciliación familiar ve muy restringidas sus posibilidades de formación; dado que en la UNED, no se ofertan los estudios de grado de magisterio y en Euskadi no existe una universidad a distancia como la UOC y en los nuevos estudios de Grado la asistencia es obligatoria en todas las asignaturas.

La implantación de los planes de grado conlleva una reducción considerable del número de créditos dedicados al desarrollo de la asignatura en el grado de Infantil[52].Además, debido al gran número de estudiantes que se matriculan en el grado y al recorte de recursos de la universidad, las clases se han masificado.

Si conseguimos que parte de esa matrícula derive a programas b-learning encontramos soluciones a varios de los problemas que tenemos planteados en la actualidad: una adecuada atención al alumnado que no puede asistir, una disminución de estudiantes en el aula, un repositorio de material elaborado a lo largo del curso por los diferentes grupos.

Los resultados más interesantes los esperamos en el cambio actitudinal del alumnado hacia la enseñanza-aprendizaje de la matemática, ya que la interacción comunicativa

[52] En los planes anteriores suponían 9 créditos de los 204 y en los que actualmente desarrollaremos suponen únicamente 6 créditos de los 240, sin obviar que uno de los créditos se cede para la realización de un trabajo modular interdisciplinar.

entre las experiencias del alumnado presencial en el aula y los que cursen la asignatura en los entornos virtuales enriquece el aprendizaje de todos.

Esperamos así mismo una mejora e incluso equilibrio de resultados entre quienes asistan a clase y quienes sigan la asignatura en su entorno virtual.

Desde el punto de vista epistemológico, la introducción funcional de las TICs permite a las alumnas un mayor entendimiento de las estructuras matemáticas y proporciona a los futuros maestros modelos metodológicos adaptados a la escuela del siglo XXI, acercando al alumnado a la realidad de la matemática y permitiéndole un nivel de experimentación para el que en muchas ocasiones no está operacionalmente preparado.

Referencias bibliográficas

[1] Ausubel D.P.; Novak J.D.; Hanesian H. (1983). Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo. 2ª edición, TRILLAS, México.

[2] Berciano, A.; Bilbao, B.; Ezkurdia, G.; Díaz, J.; Gutiérrez, G. (2011). Una Nueva Experiencia Docente En Magisterio, Univest 2011, ISBN 978-84-8458-354-7.

[3] Johnson, D.W.; Johnson, R.T.; Smith, K.A. (1988). Active Learning: Cooperation in the College Clasroom (2ª ED.) edina, MN: INTERACCION Book Co.

[4] Juan, Angel A.; Steegmann, Carolina; Huertas, Antonia; Martinez, M. Jesus; Simosa, J. (2011). Teaching mathematics online in the European Area of Higher Education: an instructor's point of view, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42:2, 141-153.

[5] Lockhart, Paul (2008). El lamento de un matemático, Traducción disponible en La Gaceta Matemática RSME, vol. II, num. 4, 739-766.

http://aidaivars.wordpress.com/2011/01/20/lamento-de-un-matematico/

[6] Morales Socorro, Carlos (2011). El aprendizaje basado en Proyectos en la Educación Matemática del Siglo XXI: Cuaderno de Bitácora. Proceedings 15 JAEM: Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, 1-23. http://www.15jaem.org/

[7] Oliveira Groenwald, Claudia; Moreno Ruiz, Lorenzo (2006). Una propuesta metodológica para la formación de profesores de matemáticas, utilizando nuevas tecnologías. Paradìgma, vol.27, no.1, p.349-363.

[8] Schreyer-Bennethum, Lynn; Albright, Leonard (2011). Evaluating the incorporation of technology and application projects in the higher education mathematics classroom, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42:1, 53-63. http://dx.doi.org/10.1080/0020739X.2010.510216

[9] Modelo IKD de la UPV/EHU http://www.ehu.es/ehusfera/helaz/files/2010/10/ikd.pdf

[10] "DECRETO 97/2010, de 30 de marzo, por el que se modifica el Decreto que establece el currículo de la Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco", Boletín Oficial del País Vasco, (20 de abril de 2010), http://www.euskadi.net/bopv2/datos/2010/04/1002109a.pdf

[11] NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXO I
Ejemplo de una de las sesiones

Objetivos formativos específicos. Al finalizar la tarea cada estudiante será capaz de:

- Clasificar objetos en distintas clases según un criterio (o más de uno).
- Resolver cuestiones como docente, analizando su utilización en la escuela infantil, las ventajas e inconvenientes y su relación con la competencia matemática.
- Expresarse correctamente por escrito, utilizando los recursos tecnológicos y justificar sus argumentaciones.
- Evaluar el trabajo de sus compañeras/os y el suyo propio en base a unos criterios de evaluación prefijado. Reflexionar críticamente, reconocer sus propios errores y autorregularse para aprender.

En el aula-taller de matemáticas se trabajaba en grupo heterogéneo de 6 personas intentado que en todos los grupos hubiera chicos y chicas, estudiantes con actitud positiva hacia las matemáticas y, en caso de estudiantes de mayor edad, se las ubicó en grupos diferentes. Cuando trabajamos este tema la profesora ya conocía el grupo de clase y distribuyó los grupos respetando las condiciones anteriores.

Tiempo	Cronograma del trabajo en el aula-taller
00:05	Clase expositiva al grupo clase. Relevancia del tema en su formación, situación dentro del programa de la asignatura, objetivos, criterios de calidad...
00:05	Asignación de personas a equipos de trabajo cooperativo y acomodo espacial de estos. En cada una de las mesas existen un juego de bloques lógicos de Dienes y la ficha guión con el trabajo a realizar
00:50	En el grupo de trabajo realizan las actividades que están indicadas poniendo especial interés en la expresión del trabajo realizado y en la expresión escrita de los logros conseguidos El grupo va explorando las diferentes ideas de sus miembros. El/la secretario/a escribe los resultados que van consiguiendo así como las dificultades que han tenido en la elaboración del trabajo
00:30	Se realiza la puesta en común de los resultados conseguidos.

En el entorno virtual, cada estudiante tendrá que afrontar el tipo de actividad que le corresponda hacer según su responsabilidad ese día.

Tiempo	Cronograma del trabajo en el aula virtual
02:30	El responsable escribirá el diario de clase, atendiendo a las actividades que se han propuesto en el aula. La parte descriptiva recogerá el tipo de actividad que ha realizado cada uno de los actores (la profesora, el grupo, el secretario, el comunicador,….) así como los recursos que se han utilizado. Posteriormente se desarrollarán las actividades, explicitando los mejores resultados conseguidos y el proceso seguido para conseguirlo. Por último se añadirá una breve reflexión sobre el aprendizaje y las actitudes personales manifestadas hacia el mismo*
00:05	Subir el diario al Moodle
00:30	Lectura del trabajo realizado por el alumno correspondiente
00:60	Participación en el foro

ANEXO III
SUGERENCIA PARA LA REALIZACIÓN DEL DIARIO

El Diario de trabajo es un documento en el cual cada estudiante de manera sistemática debeis reflejar por escrito el trabajo realizado sobre la asignatura (tanto en el aula como fuera de ella). Las ideas, reflexiones, dudas y conclusiones que os han surgido durante el trabajo/estudio. Lo que creéis que habéis aprendido. En el diario se recogerá todo aquello que hayamos realizado durante las sesiones presenciales y que influye en el desarrollo de las distintas tareas: conceptos nuevos, procedimientos, competencias, actitudes, dificultades,… Nos interesa que se recoja la forma en la que llegáis a las conclusiones, no solo el final sino también el proceso que nos permite llegar a el. No son meramente apuntes de lo que se hace en clase, aunque nos den las fotografías elaboradas por diferentes autores de lo ocurrido a lo largo del curso, sino las interpretaciones del autor del diario. El diario debe ser sistemático, no puede realizarse al final del periodo ni un mes sobre los recuerdos que tenga a lo largo del mismo

Sesión nº

Fecha:

Tema:

1. ¿Qué he aprendido?
2. ¿Qué preguntas interesantes me he hecho durante el desarrollo de la sesión?
3. ¿Cómo hemos trabajado? ¿Qué material hemos utilizado?
4. ¿Qué agrupamientos se han establecido?
5. ¿Qué nos ha propuesto la profesora y como lo ha hecho?
6. ¿Qué no he sido capaz de aprender y por que?¿Que dudas me quedan?
7. ¿Qué he hecho para intentar resolverlas?
8. ¿Qué dificultades me he encontrado para elaborarlo y como las he resuelto?
9. ¿Cómo ha cambiado mi idea del papel de profesor de educación infantil?
10. ¿ha cambiado mi idea del valor de la tecnología para aprender matemáticas?
11. ¿he variado mi forma de estudiar y aprender?
12. ¿Qué preguntas interesantes me hago después de escribir mi aportación de hoy?

ANEXO II
Ejemplo de algunos de los diarios

Sesión 5
24 de febrero del 2009
Tema: Artículo de Paúl Lockhart "Lamento de un matemático"

En esta sesión seguimos trabajando el artículo de Paúl Lockhart "Lamento *de un matemático"*. La profesora ha apuntado en la pizarra los aspectos principales que cada uno de los grupos hemos respondido en el cuestionario.

Así, hay acuerdo entre nosotros/as de que el objetivo principal del artículo es una **denuncia social** (en la comunidad educativa) sobre el trabajo que se realiza en la enseñanza de la matemática. El argumento principal es que la enseñanza actual matemática se basa en planteamientos impuestos, impidiendo experimentarlas y estando centradas en fórmulas sin significado, no siendo aplicables a la vida diaria.

Aspectos clave del artículo son las matemáticas como arte, los juegos y el papel del profesor, quien debe situar al alumno en situaciones ricas para aprender. Un aspecto muy importante a reflexionar es que los argumentos que utiliza Lockhart son válidos para cualquier otra materia del curriculum.

Me hace reflexionar especialmente la afirmación que aparece en nuestra discusión con la profesora "hay *que saber mucha o por lo menos algunas cosas sobre matemáticas para saber lo que va a hacer reflexionar al alumno"*. En este sentido una idea muy extendida es que enseñar matemáticas en infantil es sencillo. Recuerdo que me llamo la atención cuando leí el artículo la primera vez la siguiente afirmación *"Las matemáticas es una arte y por ello debería estar enseñado por artistas y sino al menos por gente que aprecia esa forma de arte y la reconoce cuando la ve"*.

¿Tenemos **nosotros un conocimiento suficiente sobre matemáticas en el sentido en el que hace referencia el texto?** Es algo que me preocupa y nos debe hacer pensar sobre ello.

Echo un vistazo al contenido de los libros que aparecen en la bibliografía de la asignatura "matemáticas *para maestros y didáctica de las matemáticas para maestros*", y me tranquiliza un poco saber que contamos con ese apoyo didáctico.

Uno de los aspectos más importantes del texto es mi opinión la importancia de hacer pensar al niño, de jugar con las matemáticas (preguntar sobre ellas...), y que este presente la emoción, alegría, ya que con las fórmulas no hay problema sino que se pregunta y responde al mismo tiempo.

En casa todavía sigo dándole vueltas a algunos de los acertijos que hemos trabajado en clase.

SESION 8
Fecha: 4 de marzo de 2009
Tema: acertijos y la bolsa de objetos

La profesora habla sobre algunos de los acertijos que hemos resuelto y puesto en las paredes de la clase para que todos podamos compartirlos. Por ejemplo, una cuestión que nos tenemos que plantear en su resolución es que existen tres tipos de conocimiento, físico, social y matemático: así por ejemplo: *¿cuantas medias moscas volando son tres medias moscas mas mosca y media?* Desde un punto de vista matemático podríamos hace la operación, pero en cambio desde el punto de vista físico, media mosca no podría volar. (Nuevamente estamos reflexionando)

Muchas de las representaciones gráficas que hemos realizado van incluso más allá de lo que nos plantea el problema –nos dice la profesora- lo que hace que resolvamos más cuestiones
que la que se nos plantean: diagramas...

Una cuestión que me ha hecho reflexionar es que como dice Lockhart estamos *acostumbrados a vivir unas matemáticas basadas en fórmulas,* y cuando leemos un problema estamos seguros que no podremos hacerlo porque no conocemos esa fórmula, y si lo pensamos bien es posible que sepamos resolverlo por otros medios.

Esto me hace recordar algo sobre el artículo que he leído para realizar el trabajo; un mismo problema es resuelto de al menos 4 formas por diferentes niños. Me recuerda además la época en que estaba en el instituto. Recuerdo que en una examen había un problema, que yo no sabía realizar con las fórmulas, con lo cual lo estuve representando mentalmente y al final llegué a la solución. Recuerdo que la profesora no me dio ningún punto sobre 2 que valía ya que me dijo no lo había resuelto del modo que había que hacerlo (mediante ecuaciones). La verdad es que era un problema muy difícil y me fastidió no recibir aunque fuera medio punto cuando había llegado a la solución, mas cuando creo que escribí algunas operaciones mentales que me hicieron llegar a la solución para la resolución. Además, para mí en ese momento era muy satisfactorio haber conseguido resolverlo sin utilizar fórmulas matemáticas.

Para resolver uno de estos problemas, el proceso es similar al que tienen que vivir los niños en infantil (ensayo-error), (buscando posibilidades) ya que si vemos que mediante un dibujo o representación no conseguimos nada, podemos recurrir al lenguaje algebraico(aunque sabemos que un niño en principio no lo va a resolver de esa manera). Y es cierto que mediante un lenguaje escrito contamos con más recursos (gráficos, algebraicos...).

En la sesión hablamos también de que para trabajar el número en Infantil se trabajarán una serie de procedimientos, (antes de trabajar el número), para ello trabajamos un modelo de actividad: **la bolsa de objetos.**

Al abordar el tema hablamos de las razones por las que se hacen algunos objetos con forma cilíndrica. La verdad es que nunca me había preguntado por ejemplo porque las tapas de la alcantarilla son casi siempre redondas, o las cazuelas....

Hoy, una vez más, la profesora hace **una demostración de la metodología a trabajar en Infantil: dándonos la posibilidad de dar diferentes opciones y argumentar cada una de ellas, viendo después entre todos si pueden ser viable o no y el por que sobre todo, de modo que reflexionamos sobre ello:** búsqueda de soluciones conjunta de algo que no sabemos el resultado. Es verdad, que si reflexionamos y aplicamos esto a nuestra especialidad en las clases de infantil, cosas que para nosotros no constituyen un problema, para ellos si lo es por lo que hay que dejarles pensar y plantear soluciones□□ “imaginar **soluciones a problemas”.** Este aspecto me parece importantísimo no sólo para el desarrollo del pensamiento matemático sino a todos los niveles.

Es verdad que uno de los grandes problemas de la escuela es que **estamos acostumbrados a que nos digan lo que esta bien y lo que esta mal**. Y el sentimiento de miedo al ridículo experimentado por muchos de los alumnos ante el miedo a que su respuesta este mal en vez de pensar **“ *pudiera ser, vamos a ver que pasaría*”**, lo que hace que inconscientemente no estemos pensando en las posibles soluciones, y no damos la importancia que tiene al proceso, porque sabemos que, por una parte nos van a decir la solución, y por otra parte, que esa es la solución correcta ¿*aunque pudiera haber mas respuestas correctas*? (método de pregunta). En muchos casos por supuesto que si. A muchos de nosotros todavía nos ocurre eso, a mí personalmente si no estoy segura que lo que voy a contestar es correcto. Tenemos que tener en cuenta que en Infantil el trabajo es definitivo, como dice Mª Antonia Canals en su conferencia la E. Infantil es la base, los cimientos, y nuestra actitud, como hemos dicho antes, deben ser preguntas abiertas en las que en principio no estoy dispuesto a dar una solución.

¿Valor de estos conocimientos en mi futura practica profesional*? (M. Pregunta)*

Clases como las de hoy por ejemplo, aunque prácticamente no haya dado tiempo a trabajar la bolsa de objetos, son las que me parecen más valiosas. Me **parece más valioso reflexionar sobre el valor de estas cuestiones, que aprender aplicar por ejemplo un modelo de actividad,** aunque esta claro que también tiene su importancia. Valoro muy positivamente que la profesora nos dé la **posibilidad de vivir nosotros las cosas además de explicarlas en el plano teórico,** lo que hace que se pongan en juego los sentimientos, y por lo tanto que recordemos más fácilmente lo vivido. Valoro también muy positivamente que además del temario previsto, **la profesora se para en cualquier momento de la vida cotidiana “ de clase” que pueda aprovechar, para favorecer nuestro aprendizaje, una vez más mediante hechos nos demuestra la metodología y el sentido de las matemáticas para ella, y seguimos viviendo ejemplos de cuestiones que hemos visto,** por ejemplo como Lockhard hablaba de las matemáticas como arte de la explicación, y como no tiene por que ser la antítesis de la creatividad, al contrario. Como es posible disfrutar con ellas (conociéndolas).

Asi mismo y para terminar, la **profesora siempre escucha nuestras opiniones *“los estudiantes no son extraterrestres escuchales*”** decía Lockhard, y como dice MªAntonia Canals no se trata de enseñar, sino de aprender por uno mismo a través de “ocasiones *e interrogantes”*, que en este caso, nuestra profesora utiliza y aprovecha.

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NUMÉRICOS DE SUMAR Y RESTAR EN LA ETAPA INFANTIL

María Salgado Somoza
María Jesús Salinas Portugal
Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

La resolución de problemas numéricos en Educación Infantil, conlleva en la mayoría de ocasiones a la realización de operaciones sencillas de sumar y restar. Estas operaciones no poseen dificultades aparentes siempre que se realicen en contextos significativos y concretos.

En este estudio se describe el grado de abstracción en estrategias matemáticas utilizadas en la resolución de problemas numéricos de sumar y restar en Educación Infantil. Las tareas empíricas consistieron en resolver cuestiones con fichas y cuestiones verbales, descritas todas ellas en el test de competencia matemática básica (TEMA-3). Los resultados muestran la diversidad de respuestas en un grupo de iguales, conviene destacar la excesiva utilización de estrategias sociales para la resolución de las tareas. Finalmente, se señalan algunas aplicaciones educativas a partir de los resultados de este estudio.

Palabras clave: estrategias, problemas numéricos, competencia matemática, Educación Infantil.

Abstract

Numerical problem solving in early childhood education, leads in most cases to carry out simple operations of addition and subtraction. These operations are not always apparent difficulties have to be made meaningful and specific contexts.

This study describes the degree of abstraction in mathematical strategies used in solving numerical problems of addition and subtraction in kindergarten. The empirical work consisted in resolving issues with chips and verbal questions, described all the basic math proficiency test (TEMA-3). The results show the diversity of responses in a group of equals, it should be noted the excessive use of social strategies for solving tasks. Finally, it offers some educational applications from the results of this study.

Keywords: strategies, numerical problems, mathematical competence, Early Childhood Education.

Salgado, M.; Salinas, M.J. (2012*).* Estrategias de resolución de problemas numéricos de sumar y restar en la etapa Infantil. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 505-517). Ciudad Real: SEIEM.

.

Introducción

El constructivismo sostiene que los niños y niñas van construyendo el conocimiento matemático, y en particular el numérico, de una manera activa a lo largo de su vida (Rico, 1997). Esta construcción debe ser desde el interior, ya que solo así se alcanza la comprensión numérica (Carpenter y otros, 1999), por el contrario se adquiere un mecanismo de repetición.

Los números y sus operaciones, son probablemente el conocimiento más importante de aprendizaje de las matemáticas (Clements y Sarama, 2007) y son fundamentales en la educación matemática de las personas (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Se adquieren de forma temprana, en sus interacciones con el entorno desde muy pequeños los niños están en contacto con ellos (Castro, 2006), por lo que Salgado y Salinas (2009) basándose en estudios de Dickson, Brown y Gibson, señalan que muchos adultos consideran su conocimiento y uso como algo sencillo y obvio.

La solución de problemas numéricos en Educación Infantil, conlleva en la mayoría de ocasiones a la realización de operaciones sencillas de sumar y restar. Éstas no poseen dificultades aparentes siempre que se realicen en contextos significativos y concretos, por el contrario en contextos abstractos y/o desconocidos si poseen dificultades y los niños/as no suelen contestar (Hughes, 1986).

El objetivo de este estudio es conocer las estrategias que tienen un grupo de alumnos en la resolución de problemas de sumar y restar, según el nivel de abstracción.

Problemas numéricos: la suma y la resta

Un problema matemático es un enunciado verbal contextualizado (Alfaro y Barrantes, 2008).

Los problemas numéricos, y en particular de sumar y restar, que nos podemos encontrar son muchos y diversos. Un modo de clasificarlos es atendiendo al tipo de acción o de relaciones descritas en los problemas.

Siguiendo estudios de Carpenter y otros (1999), entre los problemas de sumar y restar se encuentran los problemas de: cambio creciente, cambio decreciente, y comparación. En los problemas de cambio creciente, la acción que se realiza es añadir; mientras que en los de cambio decreciente, la acción es quitar y con respecto a los problemas de comparación, la acción es comparar.

Estrategias infantiles

Las estrategias utilizadas por los niños para resolver problemas son muchas y diversas. La edad cronológica no es un factor determinante para la elección de una estrategia u otra, aunque si influye junto con el grado de maduración y el nivel cognitivo del niño/a.

Una posible clasificación de estrategias infantiles para la resolución de problemas de suma y resta es según Carpenter y Moser (1982) la siguiente: las estrategias de modelado directo, las estrategias de conteo y las estrategias de hechos numéricos.

Las estrategias de modelado directo conllevan a la utilización de los dedos u objetos que representen la operación; los procedimientos más utilizados (Díaz y Bermejo, 2007) por los niños son los de *separar de, separar a, añadir a, añadir hasta, juntar todos, quitar hasta, emparejamiento,…*

Las estrategias de conteo no implican el uso de dedos y/o objetos que representen la operación, solamente utilizan secuencias de conteo sin ningún tipo de representación de la operación; los procedimientos (Díaz y Bermejo, 2007) utilizados son *contar a partir del primer sumando, contar a partir del sumando mayor, contar hacia atrás a partir de, contar hacia atrás, contar a partir de lo dado,…*

Las estrategias de hechos numéricos pueden ser de dos tipos: conocidos y derivados. Los primeros son cuando el niño utiliza un resultado conocido y los segundos se refieren a la obtención del resultado mediante procedimientos de descomposición y composición.

Con respecto a estos tres tipos de estrategias Díaz y Bermejo (2007) resaltan que las estrategias que utilizan los niños cambian en relación al curso escolar, señalando el siguiente modelo evolutivo: primero utilizan las de modelado directo en infantil, después las de conteo y en segundo las de hechos numéricos; por tanto, las estrategias iniciales parten de lo material, hacia lo verbal y luego finalmente lo mental.

Niveles de abstracción

Díaz y Bermejo (2007) basándose en estudios de Kamii, Kirkland y Lewis (2001) señalan que el proceso de lo concreto hacia lo abstracto ocurre a través de niveles de desarrollo y describen cuatro niveles de abstracción: concreto, pictórico, numérico y verbal.

Nivel concreto implica la utilización de objetos como instrumentos favorecedores del aprendizaje y compresión del conocimiento.

Nivel pictórico, utilizan dibujos con nexo de unión entre lo concreto y abstracto.

Nivel numérico conlleva a la comprensión de la representación simbólica convencional del algoritmo.

Nivel verbal, implica la compresión semántica del problema.

Método

La metodología de este estudio se describe a partir de las características de la muestra, los materiales empleados y el procedimiento basado en el uso de entrevistas.

La muestra está formada por 20 niños/as de un colegio público de educación infantil y primaria de la comarca de Santiago de Compostela. De esta muestra 11 son niñas y 9 son niños, 11 de ellos se escolarizaron por primera vez el curso anterior y los 9 restantes acudieron a guardería antes de su escolarización en el colegio; todos estuvieron en el curso anterior en el mismo colegio, mismo grupo-aula. Lo vemos en la tabla I.

	GUARDERÍA			**COLEGIO (3 años)**		
	SÍ	**NO**	**TOTAL**	**SÍ**	**NO**	**TOTAL**
Niños	5	4	9	9	0	9
Niñas	4	7	11	11	0	11
Total	9	11	20	20	0	20

Tabla 1. Descripción de la muestra.

El material consistió en 3 problemas de cambio creciente, cambio decreciente y comparación, todos ellos están descritos en el test de competencia matemática básica TEMA-3 (Núñez del Río y Lozano, 2007).

En la Tabla II se describen los problemas y los materiales empleados.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA (NIVEL VERBAL)	TIPO DE PROBLEMA (NIVEL ABSTRACTO)	MATERIALES (NIVEL CONCRETO)
1. (2+1): Colocar 2 fichas en la tarjeta del examinador (esperar 3 segundos), cubrirlas y poner una más al lado de la tarjeta; volver a esperar 3 segundos, después deslizarla por debajo de la tarjeta y decir: “PON EN TU TARJETA LO MISMO QUE HAY EN LA MÍA”.	Cambio creciente.	12 Fichas y 3 tarjetas cobertoras.
2. (2-1): Colocar 2 fichas en la tarjeta del examinador (esperar 3 segundos) y cubrirlas. Sacar una ficha de debajo de la tarjeta y colocarla al lado de la tarjeta del examinador de manera que el niño pueda verla. Esperar 3 segundos y retirarla. Decir: “PON EN TU TARJETA LO MISMO QUE HAY EN LA MÍA”.	Cambio decreciente.	12 Fichas y 3 tarjetas cobertoras.
3. Imagínate que yo tengo 4 caramelos y tú tienes cinco. ¿Quién tiene más?	Comparación.	Caramelos.

Tabla 2. Problemas planteados

El procedimiento consistió en la realización de tres problemas descritos en la tabla 2, que se plantearon de forma individual a la muestra: La entrevistadora coincide con la persona que realiza este estudio.

Cada entrevista tuvo una duración aproximada de 10 minutos y se realizaron en horario escolar dentro del aula. Las respuestas se recogieron por escrito, se grabaron en vídeo y se valoraron como correctas o erróneas. Las estrategias de adición y sustracción se categorizaron de acuerdo con Carpenter y Moser (1982); modelado directo, conteo y hechos numéricos.

Análisis y discusión de los resultados

En este apartado describiremos primero el rendimiento de los alumnos y después analizaremos las estrategias utilizadas en los problemas planteados.

	P.1	**P.2**	**P.3**	**ICM**
Aa1	C	C	E	106
Aa2	C	C	C	104
Aa3	E	E	E	92
Ao4G	C	C	C	111
Ao5	C	C	E	111
Aa6G	C	C	C	145
Aa7	C	C	C	140
Ao8G	C	C	E	73
Ao9	E	E	C	100
Ao10	C	C	C	133

Ao11G	C	C	C		111
Aa12	C	C	C		111
Aa13	C	C	C		141
Ao14G	E	C	E		104
Aa15G	C	C	E		113
Aa16	C	E	E		104
Aa17G	C	C	C		103
Aa18G	C	C	C		106
Ao19G	C	C	C		123
Ao20	C	E	E		86

Tabla 3. Resultados individuales de los alumnos/as.

Las respuestas de los alumnos presentan una pequeña relación entre el número de respuestas correctas y el índice de competencia matemática (ICM) establecido por el TEMA-3. Los niños/as con mayor ICM responden correctamente a todos los problema, en contraposición a los que fallan algún problema que presentan un ICM medio o inferior a este. Señalar que el alumno con el ICM más bajo no se corresponde con el único alumno que responde erróneamente a todos los problemas.

	NIÑOS		**NIÑAS**	
	CORRECTAS	**ÉRRONEAS**	**CORRECTAS**	**ÉRRONEAS**
PROBLEMA 1	7	2	10	1
PROBLEMA 2	7	2	9	2
PROBLEMA 3	5	4	7	4

Tabla 4. Resultados de los problemas

La tabla 4 muestra los resultados de los problemas planteados atendiendo a la variable de género. No se observan cambios significativos entre las respuestas dadas por los niños y niñas. Señalar que en la muestra hay mayor número de niñas.

	GUARDERÍA		**NO GUARDERÍA**	
	CORRECTAS	**ÉRRONEAS**	**CORRECTAS**	**ÉRRONEAS**
PROBLEMA 1	8	1	9	2
PROBLEMA 2	9	0	7	4
PROBLEMA 3	6	3	6	5

Tabla 5. Resultados de los problemas en función al item de guardería

La tabla 5 muestra los resultados atendiendo al hecho de haber estado en guardería previamente a estar escolarizado. Se observa una pequeña diferencia, los alumnos que acudieron a guardería presentan mejores resultados.

	Nº Alumnos/as RESPUESTA CORRECTA	**Nº Alumnos/as RESPUESTA ÉRRONEA**	**Total Nº Alumnos/as**
PROBLEMA 1	17	3	20
PROBLEMA 2	16	4	20
PROBLEMA 3	12	8	20

Tabla 6. Resultado individuales de cada problema

La tabla 6 muestra los datos referentes a los resultados de cada problema. Todos los problemas a excepción del 4, fueron resueltos por una muestra homogenea de alumnos. Señalar que de los cuatro problemas el 4 es el que se encuentra en un nivel de abstracción más complejo con respecto a los otros planteados.

	PROBLEMA 1	**PROBLEMA 2**	**PROBLEMA 3**
MODELADO DIRECTO	11	11	8
CONTEO	4	4	4
HECHOS NUMÉRICOS	5	5	8

Tabla 7. Resultados de estrategias

En la tabla 7 se aprecia que la estrategia más empleada por los alumnos para la resolución de los problemas es la de modelado directo, por lo tanto, en la construcción del conocimiento matemático los niños usan la manipulación de objetos ante situaciones concretas y abstractas, presentando un nivel de abstracción concreto, característico de la etapa infantil siguiendo estudios de Kamii.

Además las estrategias de modelado directo se emplean más por los alumnos en los problemas 1 y 2, frente al problema 3. Este hecho se debe principalmente a que en este problema aumenta la utilización de la estrategia de hechos numéricos, ya que el problema 3 esta relacionado con un problema cotidiano y conocido del entorno como es la edad.

	P.1	**P.2**	**P.3**	**ICM**
Aa1	C- MD	C- MD	E- C	106
Aa2	C- MD	C- MD	C- HN	104
Aa3	E- C	E- C	E- C	92
Ao4G	C- HN	C- HN	C- HN	111
Ao5	C- MD	C- MD	E- MD	111

Aa6G	C- C	C- C	C- HN		145
Aa7	C- HN	C- HN	C- HN		140
Ao8G	C- MD	C- MD	E- MD		73
Ao9	E- MD	E- MD	C- MD		100
Ao10	C- HN	C- HN	C- HN		133
Ao11G	C- MD	C- MD	C- HN		111
Aa12	C- MD	C- MD	C- C		111
Aa13	C- C	C- C	C- HN		141
Ao14G	E- MD	C- MD	E- MD		104
Aa15G	C- MD	C- MD	E- MD		113
Aa16	C- MD	E- MD	E- MD		104
Aa17G	C- C	C- C	C- C		103
Aa18G	C- HN	C- HN	C- MD		106
Ao19G	C- C	C- C	C- HN		123
Ao20	C- MD	E- MD	E- MD		86

Tabla 8. Resultados individuales de estrategias y de ICM

En la tabla 8 se presentan los resultados individuales de estrategias utilizadas por los alumnos y el ICM.

Se aprecia las interacciones entre los alumnos al usar las estrategias de conteo y hechos numéricos; los que tienen el ICM más alto recurren más ellas, en comparación con los de ICM medio e inferior que usan principalmente las de modelado directo.

Conclusiones

En este estudio se confirman los siguientes planteamientos. Por un lado, la tendencia evolutiva que marca el rendimiento de los alumnos, pues en general el comportamiento del alumno se corresponde según sea su ICM. También se comprueba que los niños con un ICM más bajo suelen utilizar la estrategia de modelado directo de modo parecido a lo largo de los tres problemas, mientras que los de ICM más alto utilizan estrategias de hechos numéricos y conteo.

La utilización de diferentes estrategias por niños/as de la misma edad ante un mismo problema, determina que los alumnos piensan y resuelven los problemas de forma distinta.

Desde el punto de vista de la práctica educativa, este estudio pone de manifiesto la diversidad en el desarrollo del conocimiento matemático infantil en un grupo de alumnos; aspecto importante a tener en consideración a la hora de programar todos los docentes y proponer diversidad de tareas que den respuesta a las diferencias individuales.

Aplicaciones educativas

Las operaciones de añadir o quitar, son las primeras operaciones que los niños comprenden. Canals (2009) afirma que no por aprender las técnicas de las operaciones, mejorará la comprensión de las mismas.

Diseñamos una serie de aplicaciones educativas, que no han sido puestas en práctica, basadas en estudios de Canals (2009). Estas no pretenden enseñar técnicas, ya que no mejoran la comprensión de operaciones.

La manipulación de materiales es la base inicial de los problemas planteados a continuación, pasando en un segundo momento a la eliminación de los mismos para manipular cantidades con el pensamiento.

Problema 1.- Matrículas.

Materiales: soporte de matrículas de coches reales, nº de velcro y/o rotuladas en cartulinas.

Descripción de las propuestas:

- El juego consiste en crear números de matrículas cuyas cifras sumen *menos que* y/o *más que* y/o *igual a.*

- Previamente rotuladas las matrículas de un nº de coches, buscar la matrícula cuyas cifras sumen…

Problema 2.- Mi teléfono es…

Materiales: cartulinas y pinzas de la ropa.

Descripción de la propuesta:

- 1º Rotular números de teléfono en cartulina.
- 2º Escribir operaciones sencillas de sumar o restar en pinzas de la ropa
- 3º Mezclar todas las pinzas en un recipiente.
- Sacar pinzas al azar y formular en alto la operación que se plantea en la pinza, el alumno/a que tenga la respuesta en su número de teléfono levantará la mano y si es correcto colocará la pinza encima del nº hasta completar todos y cantar su teléfono.

Problema 3.- Juego comercial de cartas "UNO"

Material: baraja de cartas del UNO.

Descripción de la propuesta:

- Juego del "uno". Se reparten 7 cartas a cada jugador, estas tienen diferentes colores (rojo, amarillo, azul y verde) y diferentes números (del 0 al 9), además de comodines, cambio de sentido, turno prohibido, +2,+4. El juego consiste en asistir a nº y/o color de la carta tirada anteriormente y quedarse primero sin cartas. Para ello habrá obstáculos y cada jugador para ganar tendrá que intentar que su rival adquiera cartas.

Referencias bibliográficas

Alfaro, C.; Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense, *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática,* vol. 4 (3), 83-98.

Canals, M.A. (2009). *Primeros números y primeras operaciones,* Rosa Sensat. Barcelona.

Carpenter, T. P; Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem–solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective,* pp. 187-200. Erlbaum. Hillsdale, NJ.

Carpenter, T.P.; Fennema, E.; Franke, M.L.; Levi, L., Empson, S.B. (1999). *Children´s Mathematics. Cognitively Guided Instruction*, Heinemann. (Traducción española de Carlos de Castro Hernández y Marta Linares Alonso). Portsmouth, NH.

Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Revista pensamiento educativo,* vol. 39 (2), 119-135.

Clements, D.H.; Sarama, J. (2007). *Early childhood mathematics learning.* En Frank K. Lester, Jr. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 461- 555, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Díaz, J.J.; Bermejo, V. (2007). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales, *Relime,* vol.10 (3)

Hughes, M. (1987). *Los niños y los números: Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas,* Planeta. Barcelona.

Núñez del Río, M.C., Lozano, I. (2007). *Test de Competencia Matemática Básica,* TEA ediciones, S.A. Madrid.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en educación secundaria.* pp. 15-38. Horsori. Barcelona.

Salgado, M., Salinas, M.J. (2009). El número en los libros de texto de educación infantil. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo, *XII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* pp. 487- 497. SEIEM. Santander.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole Lumber Concepts and operations. En Frank K. Lester, Jr. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp. 557- 628. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.