

UN ESTUDIO SOBRE LA REPRODUCIBILIDAD DE SITUACIONES DIDÁCTICAS: EL PAPEL DE LA NOCIÓN DE CONSERVACIÓN DEL ÁREA EN LA EXPLICACIÓN ESCOLAR DEL CONCEPTO DE INTEGRAL

María Guadalupe Cabañas - Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN, México
gcabanas@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx
Campo: socioepistemología
Nivel Educativo: Medio y Superior

RESUMEN

En este artículo se exponen aspectos centrales de un proyecto de investigación doctoral en el que estudiamos el fenómeno didáctico denominado reproducibilidad siguiendo la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa (Cantoral y Farfán, 2003), partiendo del tratamiento de la noción de área al nivel de actividades como repartir, comparar y reproducir, medir, cuantificar y conservar. Los antecedentes del estudio se ubican en los resultados de investigaciones realizadas por Piaget, et al., (1970) y Kordak y, Potari (2002), Kordaki, (2003). Mostramos además un particular diseño de actividades que involucran a la conservación del área en construcciones vinculadas con regiones planas.

Palabras clave: *socioepistemología, reproducibilidad de situaciones didácticas, integral definida, comparación, medición y conservación del área.*

ABSTRACT

In this paper there are exposed central aspects of a project of doctoral investigation in which we study the didactic phenomenon called reproductibility following the approximation socioepistemológica to the investigation in Mathematics Education (Cantoral & Farfán, 2003), start from the treatment of the notion of area at the level of activities like: distributing, to compare and to reproduce, to measure, to quantify and to conserve. The precedents of the study are located in the results of investigations realized for Piaget, et to., 1970 and Kordaky y Potari (2002), Kordaki, 2003. We show besides an individual design of activities that involve to the conservation of the area in constructions linked with planes regions.

Key Words: *socioepistemology, reproductibility of didactical situations, integral defined, comparison, measurement and conservation of the area.*

INTRODUCCIÓN

En esta investigación estamos interesados en estudiar el fenómeno didáctico de reproducibilidad vinculado a una de las actividades escolares que realiza el profesor, la de repetir “la misma clase” en diferentes escenarios. Pretendemos abordar dos tipos de

cuestiones: una relacionada con la búsqueda de evidencia empírica sobre la reproducibilidad de las situaciones didácticas en cálculo integral, y la otra relativa al papel que la noción de área desempeña en las explicaciones del profesor al explicar el concepto de integral definida. El estudio está ubicado al nivel de las historias de clase y de la comprensión de significados. El fenómeno de la reproducibilidad será explorado con base en el estudio de procesos de envejecimiento de situaciones de enseñanza, lo que constituiría el instrumento experimental. Trabajaremos la noción de integral definida a partir del tratamiento de la noción de área al nivel de actividades como: *repartir, comparar y reproducir, medir, cuantificar y conservar*.

La problemática se ubica en el reconocimiento de las dificultades que muestran los estudiantes en su intento por alcanzar una adecuada comprensión de la integral definida con base en la explicación escolar de “área bajo la curva” y en las complejidades que vive la sesión de clase cuando el maestro intenta comunicar dicha explicación. Presentación que consideramos precisa de un equilibrio entre el desarrollo conceptual de las ideas básicas del cálculo con el manejo apropiado de los algoritmos (Cabañas y Cantoral, 2005a). Resultados recientes de algunas investigaciones de naturaleza sistemática dan cuenta de las dificultades entre los estudiantes para comprender los procesos de integración, atribuidos fundamentalmente al desequilibrio entre el tratamiento conceptual con el algorítmico. Por lo que coincidimos con quienes afirman que en el discurso matemático escolar¹ la enseñanza del cálculo integral privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de integración, en detrimento de la comprensión de nociones básicas (Quezada, 1986; Artigue, 1998; Cordero, 2003; Cantoral, 2000).

En nuestra opinión, consideramos que previo a la definición de integral y al enfoque elemental de “subdividir y calcular mediante fórmulas”, se precisa del estudio de la noción de área a través de otras actividades que bien pueden ser normadas por prácticas de naturaleza social que viven de por sí entre los estudiantes en y fuera del aula. Actividades que incluyan a la medición, la comparación y la conservación. Se requiere además del dominio de los antecedentes y de ciertas técnicas específicas, de la comprensión de las propiedades como conservación y medición bajo ciertas transformaciones, así como de un manejo equilibrado entre el desarrollo conceptual con el tratamiento algorítmico. Este enfoque es el que usamos en el estudio que ahora se presenta, considerando al principio de conservación como condición esencial en la construcción de la noción de área (Cabañas y Cantoral, 2005b).

METODOLOGIA DE INVESTIGACIÓN

Como metodología de investigación usaremos a la ingeniería didáctica, por su potencia para la intervención en el sistema de enseñanza y por su capacidad de permitir evaluar los diseños mismos de la investigación. Estudiaremos cómo se reproduce un diseño de

¹ Constituye una concepción de enseñanza que está normada por el contrato escolar y el pragmatismo que se deriva de éste. Se ejerce la enseñanza-aprendizaje por un lado, considerando a la matemática como un conocimiento acabado y por el otro, tratando a los conceptos matemáticos en la didáctica como actos de repetición o memorización (Cordero, 2003).

ingeniería didáctica sobre la integral definida en la que la explicación de la integral en el aula no use exclusivamente las estrategias de medición del área, sino que emplee recursos como la comparación y la medición mediante transformaciones para dar lugar finalmente a la medición de áreas.

ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

Nuestra investigación toma como base estudios realizados por Piaget y colaboradores en los años 60's, cuando descubrieron el tipo de nociones que destacan entre los niños de 8 y 11 años de edad al tratar con nociones de conservación y medición de áreas usando materiales concretos. Afirman por ejemplo, que la noción de "conservación del área" es un asunto preliminar y fundamental para el entendimiento del concepto "medición de área", es decir que la conservación antecede a la medición. Estas ideas se llevaron a cabo en Grecia con estudiantes de secundaria de 14 años de edad, Kordaki y Potari (2003) usaron un micromundo llamado C.AR.M.E. (Conservación de Área y su Medida) para favorecer el que los estudiantes construyan, de manera dinámica, sus propias aproximaciones a los conceptos de conservación y medición del área. Exploraron las estrategias de los estudiantes en relación al concepto de conservación de área y su desarrollo mientras interactuaban con el micromundo; el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto de conservación de área en triángulos equivalentes y paralelogramos de base común e igual altura, y; el papel de las herramientas ofrecidas por el micromundo en relación con las estrategias de los estudiantes. El estudio muestra que las herramientas proporcionadas por el ambiente experimental, estimuló a los estudiantes a expresar sus propias aproximaciones del concepto de conservación de área (Cabañas y Cantoral, 2005a, 2005b). Los resultados reportados en (Piaget et al., 1970); (Kordaki y Potari, 2002), y; (Kordaki, 2003) con relación al estudio del área, fueron usados en el estudio reportado por Cabañas y Cantoral (2005b) en el que exploraron en estudiantes del tercer semestre de una licenciatura en Matemáticas (19 - 21 años de edad), en qué medida percibían la noción de conservación de área y la utilizaban en actividades que precisan del empleo de representaciones gráficas o analíticas vinculadas con regiones planas. El diseño de las actividades utilizadas en el estudio descansó en el empleo de la conservación del área a diferentes niveles, así como de conceptos asociados como medición, comparación y conservación. Encontraron que la naturaleza de las actividades contribuyó a que en algunos momentos se presentaran determinados tipos de modelos en el proceso de solución de las actividades por parte de los estudiantes. Caracterizaron siete tipos de modelos: algorítmico, de congruencia, de semejanza, de paralelismo, dinámico, gráfico y analítico. El estudio permitió además, obtener una caracterización de la conservación al nivel de: *principio*, *concepto*, *noción*, *práctica*, y *actividad*. Asimismo, se percibió que las actividades que comprendieron la secuencia didáctica del estudio estuvieron fundadas más en el plano de los objetos formales, contrario a otras investigaciones.

EL ESTUDIO DE LA INTEGRAL DEFINIDA DESDE LA APROXIMACIÓN SOCIOEPISTEMOLOGICA

Nuestro estudio está basado en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa, aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar a los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemológica del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza. Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales (Cantoral y Farfán, 2003, 2004).

Dada su naturaleza sistémica, este enfoque posibilita la articulación entre la teoría de situaciones con el estudio de construcción del conocimiento, por lo que el punto de partida de esta investigación es el diseño de situaciones didácticas. Presentaremos una visión alternativa a partir del tratamiento de la noción de área al nivel de las actividades asociadas, que son detectadas en las filiaciones entre enseñanza básica y superior cuando tratan con la integral definida (fig. 1) mediante actividades como:

- a) *Repartir*. Esta actividad se vincula a situaciones de la vida cotidiana en la que dado un objeto hay que repartirlo equitativamente, ya sea aprovechando regularidades, por estimación o por medición.
- b) *Comparar y reproducir*. Las situaciones tienen que ver con la comparación de dos superficies con el fin de determinar cómo es una respecto de la otra. En otras, se busca obtener una reproducción con forma diferente a la dada inicialmente. Estas actividades pueden realizarse mediante: inclusión, transformaciones, estimación, por medición, o estudiando funciones.
- c) *Medir y cuantificar*. El área suele aparecer en situaciones de medida ya sea para repartir, conservar, comparar o valorar. Este proceso puede realizarse mediante exhaustión, acotación, transformaciones, o relaciones geométricas generales.
- d) *Conservar*. Esta actividad se presenta después de realizar transformaciones, o movimientos en construcciones vinculadas a regiones planas o no planas. En este proceso, los objetos pueden cambiar o mantener su forma sin que el área se altere.

Actividades que, en la enseñanza habitual no son consideradas en el estudio de la integral. El método de enseñanza tradicional por el contrario tiende a desarrollar habilidades en los

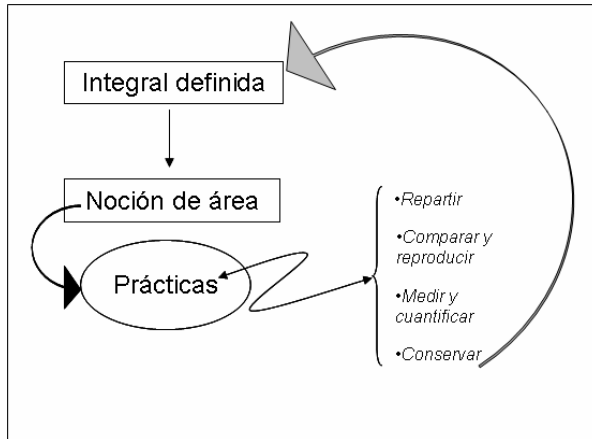


Fig. 1. Estudio de la integral definida desde la aproximación socioepistemológica

estudiantes para el uso de fórmulas y técnicas de integración en el cálculo de áreas, olvidando el papel de las actividades de la vida cotidiana (Cabañas y Cantoral, 2005a). En la escuela básica por ejemplo, previo a la medición del área, se sitúa a los niños a trabajar con objetos tangibles para que perciban cualidades como la conservación y la comparación, de tal forma que sean capaces de determinar si un objeto o cosa es más grande, igual o más pequeño, sin el uso de fórmulas, se trata más bien de que comparen mediante la superposición apoyándose en movimientos, en la

simetría, etc.

Nuestra tesis es que aunque estemos en el nivel superior y trabajemos con objetos formales, se requiere introducir a esos objetos con actividades previas que tomen en cuenta principios esenciales como la conservación. Aceptamos que la dimensión empírica juega un papel importante en la dimensión conceptual de la enseñanza superior, la comparación y la medición son antecedentes. Sin embargo, nos preguntamos ¿Cómo recuperar estas prácticas en la enseñanza superior sin regresar a la escuela básica? Consideramos que previo a la presentación didáctica de la integral, se requiere movilizar prácticas como la conservación y conceptos asociados (Cabañas y Cantoral, 2005b).

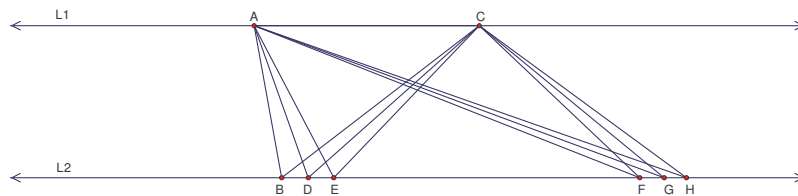
ACTIVIDADES RELATIVAS A LA CONSERVACIÓN DEL ÁREA

En este apartado presentamos un diseño de actividades que no son definitivas ni hemos realizado exploraciones sistemáticas sobre ellas, más bien intentamos mostrar a qué queremos referirnos cuando señalamos que el diseño de las situaciones didácticas descansará en aspectos de la conservación del área (Cabañas y Cantoral, 2005a).

El diseño de las situaciones será posterior a un estudio teórico para conocer a qué nivel opera la conservación y qué es lo que se conserva cuando estudiamos la integral. La conservación del área se usará sistemáticamente en figuras elementales como triángulos o polígonos de pocos lados, cuando sean sometidos a ciertas transformaciones como recortar y recomponer, o trasladar entre otras; haremos evidente también, mediante recursos tecnológicos específicos, cómo es que el método del cambio de variable para la integración es un recurso que modifica la forma de la gráfica de la función a integrar así como los límites de integración, pero que tiene la propiedad de conservar el valor del área; o bien cómo con la aplicación del teorema del valor medio para integrales lo que se busca es transformar una figura en otra conservando su área (Cabañas y Cantoral, 2005a).

A continuación presentamos un diseño de actividades a manera de ejemplos. El propósito es identificar si se percibe que el área puede conservarse en representaciones analíticas o gráficas ya sea realizando transformaciones o bien al determinar relaciones entre figuras geométricas. En las actividades uno y dos se sitúa a trabajar sobre polígonos convexos y no convexos, en la tres y cuatro, con funciones lineales y no lineales y en la cinco, con integrales.

Actividad 1. Determina qué relación existe entre las áreas de los triángulos ABC, ACD, ACE, ACF, ACG y ACH. Ellos son construidos entre dos paralelas. Argumenta tu respuesta. [La misma situación se presentará en medios dinámicos].



Actividad 2. Transforma cada uno de los siguientes polígonos en otro, con forma diferente, de modo que sus áreas sean iguales. Explica en cada caso, el método que utilizaste.



Actividad 3. Bosqueja la gráfica de una función no lineal cuya “área bajo la curva” sea igual al área de la región sombreada para cada una de las siguientes figuras:



Actividad 4. Una función f está definida en el intervalo $[0, 1]$, el área bajo la curva en dicho intervalo es $1/6$. Grafica cuatro funciones diferentes cuyo dominio sea igual al de f y el área bajo la curva en dicho intervalo sea también $1/6$.

Actividad 5. Interpreta geoméricamente los resultados de cada una las siguientes integrales

a). $\int_0^3 \frac{1}{2} \sqrt{x+1} dx$

b). $\int_1^2 n^2 dn$

c). $\int_1^4 \frac{1}{2} \sqrt{m} dm$

CONSIDERACIONES FINALES

Con esta investigación no pretendemos estudiar las dificultades del aprendizaje entre los estudiantes, ni explorar las bondades o limitaciones de un cierto diseño innovador, se pretende estudiar el fenómeno de reproducibilidad de situaciones en el caso de la integral definida cuando se introduce al aula mediante explicaciones relativas al área bajo la curva. Nos preguntaremos si un profesor que reproduce la misma historia, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones por su parte y por parte de los alumnos, ¿ha reproducido el mismo hecho didáctico? Y éste, ¿ha reproducido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?

Abordar esta problemática desde la aproximación socioepistemológica permitirá hacer consideraciones de tipo cognitivo, didáctico epistemológico y social. Las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica se utilizan para explicar el funcionamiento didáctico. Sin embargo en si mismas no explican por completo fenómenos de orden social, fundamentalmente aquello que escapa al ámbito de las relaciones internas en el contexto escolar. La dimensión “social” nos permitirá abordar las prácticas previo a la construcción de conceptos, buscando afectar el sistema educativo en el rediseñando el discurso matemático.

BIBLIOGRAFIA

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental : Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 1(1), 40 – 55
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématique* 7 (2), 33 – 115.
- Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005a). Una aproximación socioepistemológica al estudio de la integral definida. En Dolores, C., Martínez, G. (Eds). *La socioepistemología en el aula*. Universidad Autónoma de Guerrero. Fomix del Conacyt-Guerrero (en prensa).
- Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005b). La conservación en el estudio del área. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Reverté-Clame, A.C. (en prensa).
- Cantoral, R. (Ed.) (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal*. ICME 8 – Sevilla España. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics* 53 (3), 255 – 270.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.
- Cantoral, R. y Ferrari, M. (2004). Uno studio soioepistemologico sulla presizione. *La matematica e la sua didattica* (2), 33 – 70.
- Cordero, F. (2002). *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Del Olmo, M. A., Moreno, F.M. y Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.
- Domínguez, R. (1984). *Conceptualizaciones y procedimientos de medición de áreas en la escuela primaria*. Tesis de maestría. México: Cinvestav.
- Farfán, R.M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.
- Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1), 65 - 100.
- Kordaki, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on student's strategies regarding the concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematical* 52(2), 177 - 209.

- Lezama, J. y Farfán, R. (2001). Introducción al estudio de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 161 – 1 3.
- Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics* 14(1), 1 – 18.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). *The child's conception of geometry*. New York; U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.
- Quezada, M. (1986). *Cálculo de primitivas en el bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial*. Tesis de maestría. México: Cinvestav.
- Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématique* 11(23), 241 – 294.