28 SIMPOSIO SEIEM MELILLA 2025

LIBRO DE ACTAS

XXVIII SIMPOSIO SEIEM

Editores:

María Burgos Navarro

María C. Cañadas Santiago

José María Marbán Prieto

Irene Polo Blanco

SEIEM

UNIVERSIDAD DE GRANADA

https://www.seiem.es/seiem2025/

Investigación en Educación Matemática

XXVIII

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Investigación en Educación Matemática XXVIII

María Burgos Navarro, María C. Cañadas Santiago, José Mª Marbán Prieto e Irene Polo Blanco (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Melilla, 10, 11 y 12 de septiembre de 2025

Investigación en Educación Matemática

XXVIII

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Dra. María Burgos Navarro

Dra. María C. Cañadas Santiago

Dr. José Mª Marbán Prieto

Dra. Irene Polo Blanco

Comité Científico

Dr. José Mª Marbán Prieto (coord.) (Universidad de Valladolid)

Dra. Irene Polo Blanco (coord.) (Universidad de Cantabria)

Dra. María Burgos Navarro (Universidad de Granada)

Dra. María C. Cañadas Santiago (Universidad de Granada)

Dra. Núria Planas Raig (Universitat Autònoma de Barcelona)

Dra. Berta Barquero Farràs (Universitat de Barcelona)

Dr. Israel García Alonso (Universidad de La Laguna)

Dr. Antonio M. Oller Marcén (Universidad de Zaragoza)

Dra. María Dolores Torres González (Universidad de Granada)

© de los textos: los autores

Diseño del logo: José A. Garzón Guerrero

Diseño cartel y portada: José A. Garzón Guerrero

ISBN: 978-84-09-75766-4

ISSN: 2952-0045

Investigación en educación matemática (Internet)

Cítese como: Burgos, M., Cañadas, M.C., Marbán, J.M. y Polo, I. (Eds.) (2025). *Investigación en Educación Matemática XXVIII*. SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

PRESENTACIÓN

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) se ha convertido en el más sólido referente del desarrollo, fortalecimiento y difusión de la investigación en educación matemática en el ámbito iberoamericano. A través de la organización de eventos científicos, la publicación de investigaciones especializadas y el fomento del diálogo entre diferentes colectivos, la SEIEM contribuye significativamente a la mejora de la calidad educativa y al establecimiento de vínculos entre investigadores, docentes y responsables del desarrollo de políticas educativas.

El simposio anual de esta sociedad ha ido recorriendo la geografía española durante veintiocho años y en 2025 se ha celebrado en la ciudad de Melilla, un enclave singular, acogedor y vibrante que, por primera vez, ha albergado este encuentro. El Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada ha asumido con entusiasmo la responsabilidad de organizar la vigésimo octava edición de este evento, con el firme compromiso de ofrecer una experiencia académica y humana de alto nivel. No es la primera vez que esta institución lidera la organización del simposio ya que lo hizo también en su séptima edición, celebrada en 2003.

Desde el primer momento, la ilusión por acoger el simposio vino acompañada de la consciencia sobre el reto que conlleva una organización de esta magnitud. Sin embargo, la guía y el respaldo de la Junta Directiva de la SEIEM y del Comité Organizador de la edición anterior han sido fundamentales para estructurar este camino. Queremos expresar desde aquí nuestro sincero agradecimiento a quienes han hecho posible una transición fluida, en especial a Natividad Adamuz Povedano, coordinadora del Comité Organizador del simposio celebrado en Córdoba en 2024, a Nuria Planas, actual presidenta de la SEIEM, por su generosidad, orientación y confianza, y a José María Marbán, coordinador del Comité Científico, por sus valiosas recomendaciones.

El programa de esta edición se inició con la ya tradicional Sesión de Jóvenes Investigadores, coordinada por la Dra. María Dolores Torres González y que contó con la participación de jóvenes investigadoras e investigadores de diferentes universidades y con la profesora Elena Castro Rodríguez, de la Universidad de Granada, como ponente, abordando en su intervención los diseños de investigación más usuales dentro del área de investigación en Educación Matemática. También se ha celebrado la Sesión sobre Formación Docente a cargo del profesor Juan Francisco Ruiz Hidalgo, también de la Universidad de Granada, quien ha invitado a los asistentes a repensar el modo en el que los formadores de futuros profesores pueden diseñar sus clases para lograr una formación más efectiva y rica.

La mañana del primer día del Simposio ha culminado con la recepción oficial por parte de las autoridades de la Ciudad Autónoma de Melilla en el Salón Dorado del Palacio de la Asamblea y con la generosa invitación por parte de la Ciudad a un ágape de bienvenida para todas las personas asistentes al Simposio.

La Mesa Inaugural del Simposio estuvo conformada por Pedro Mercado Pacheco (rector de la Universidad de Granada), Nuria Planas Raig (presidenta de la SEIEM), Manuel Torralbo Martínez (rector de la Universidad de Córdoba), Juan José Imbroda Ortiz (presidente de la Ciudad Autónoma de Melilla), Lucía Herrera Torres (decana de la Facultad de Ciencias de la Educación de Melilla) y José Luis Lupiáñez Gómez (director del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y coordinador del Comité Local). Las intervenciones destacaron el papel de

Melilla como ciudad anfitriona de culturas y conocimientos, y se dio una calurosa bienvenida a todas las personas asistentes.

En cuanto al programa académico, los seminarios temáticos reflejan el dinamismo actual de la investigación en Didáctica de la Matemática. En el seminario dedicado al sentido estocástico en el siglo XXI, el panel coordinado por la profesora María Magdalena Gea Serrano, de la Universidad de Granada, exploró los desafíos y las oportunidades que ofrecen las herramientas disponibles en nuestro siglo para el desarrollo del mencionado sentido estocástico, mientras que el panel coordinado por la profesora Nuria Climent Rodríguez, de la Universidad de Huelva, presentó un abanico de buenas prácticas de transferencia de la investigación en Educación Matemática.

Dentro de las actividades socioculturales se ofreció una visita guiada al recinto fortificado con entrada a las espectaculares cuevas del Conventico, así como una cena de gala en un acogedor salón de la sede del Simposio.

A lo largo de los días del simposio se han presentado 46 comunicaciones orales y 53 pósteres, al tiempo que se han celebrado las habituales reuniones de los distintos grupos de trabajo. Como ya es tradición, las sesiones de presentación de pósteres se han integrado en los momentos de pausa-café, generando espacios distendidos, pero intensamente participativos.

Este Simposio de la SEIEM en 2025 no se agota en los días de su celebración. En el marco del Año de la Didáctica de la Matemática en Melilla, se han desarrollado —y seguirán celebrándose a lo largo del año— numerosas iniciativas de formación y divulgación, como los cursos impartidos por la UNED Melilla sobre pensamiento matemático en las etapas de Infantil, Primaria y Secundaria, con la participación de diferentes especialistas de toda España.

Asimismo, creemos que la ciudad de Melilla ha constituido una sede de gran riqueza cultural e histórica para este simposio. Con antecedentes fenicios, romanos e islámicos, se convirtió en una plaza estratégica en el Mediterráneo tras el asentamiento de la Corona de Castilla en 1497. Este mestizaje ha dejado profundas huellas en su patrimonio que los asistentes han podido visibilizar en sus murallas renacentistas, su arquitectura modernista —una de las más notables de España— y su diversidad cultural. Todo ello convierte a Melilla en un destino turístico singular, donde la historia, el arte y la convivencia multicultural se entrelazan en un entorno privilegiado y donde la SEIEM ha servido de punto de reunión y debate académico para educadores e investigadores en Educación Matemática.

No queremos finalizar esta presentación sin dedicar un profundo agradecimiento a todas las personas del Comité Organizador Local y de los subcomités de apoyo, cuya dedicación, profesionalidad y pasión han hecho posible que el XXVIII Simposio de la SEIEM celebrado en Melilla haya sido no solo un éxito académico, sino también una experiencia humana muy enriquecedora. Agradecemos de corazón la desinteresada colaboración de Hossein, Hassan, Juanfran, Pepe, Mariloli, Nabil, Mohamed, Yusef, Silvia, Rafa, Mauro, Maricarmen, Luz, Elena y Jesús.

Finalmente, invitamos a todas las compañeras y compañeros que traten de encontrar en Melilla los elementos que aparecen en el logo del simposio.

José Luis Lupiáñez y Verónica Albanese

Coordinadores del Comité Local

ÍNDICE

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: INVESTIGACIÓN SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EL SIGLO XXI 1

INVESTIGACIÓN SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EL SIGLO XXI 3
Gea, M. M. 3

PENSAMENTO COMPUTACIONAL E ESTATÍSTICA CÍVICA: UMA PERSPETIVA INTEGRADA 7
Campos, P. 7

RETOS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN PROYECTOS STE(A)M DE EDUCACIÓN SECUNDARIA 20
Berciano, A. 20

LA INVESTIGACIÓN SOBRE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EDADES TEMPRANAS: IMPACTO EN LA ESCUELA 41
Alsina, Á. 41

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II: BUENAS PRÁCTICAS EN TRANSFERENCIA DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 59

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO "BUENAS PRÁCTICAS EN TRANSFERENCIA DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA" 60
Climent, N. 60

DE LA INVESTIGACIÓN AL AULA: CAMINOS Y DESAFÍOS PARA UNA TRANSFERENCIA EFECTIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 66
Ayala-Altamirano, C. y Cortiñas, J. R. 66

DE LA INVESTIGACIÓN A LA FORMACIÓN MASIVA DEL PROFESORADO: UNA EXPERIENCIA CON CURSOS MOOC 80
Gómez, P. y Velasco, C. 80

LOS SISTEMAS INTELIGENTES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN CONTEXTO DE INVESTIGACIÓN PARA EL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS 91
De Castro, C. 91

COMUNICACIONES 107

MIRAR PROFESIONALMENTE LOS RAZONAMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES Y LAS ACCIONES DEL PROFESOR 108
Aguiar, M. y Fernández C. 108

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CONTEXTUALIZADO QUE INVOLUCRA LA FUNCIÓN F(N)= 2^N CON NIÑOS Y NIÑAS DE 5 AÑOS 116
Anglada, L., Cañadas, M. C., Fuentes, S. 116

ANÁLISIS DE RAZONAMIENTOS ABDUCTIVOS POR DOCENTES EN FORMACIÓN: UN ESTUDIO EXPLORATORIO 124
Arce, M. y Conejo, L. 124

RECONOCIMIENTO DE TRIÁNGULOS EN ESTUDIANTES DE 1º A 6º DE EDUCACIÓN PRIMARIA 132
Bernabeu, M., Saorín, A., Buforn, À. y Sancho, M. 132

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS Y TALENTO MATEMÁTICO: UN ESTUDIO DE CASO 140
Burgos, M. y Lastra-Gil, D. 140

METODOLOGÍAS LÚDICAS Y SU IDONEIDAD EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN SECUNDARIA: UN ANÁLISIS DE TRABAJOS DE FIN DE MÁSTER 148
Cortes, A. Breda, A. Sánchez, A. Font, V. Sala-Sebastià, G. 148

EL CONTEXTO DE LAS SITUACIONES-PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN TEXTOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA 156
Elgueda-Ibarra, M., Batanero, C. y Gea, M. M. 156

CARACTERIZACIÓN DE PERFILES MOTIVACIONALES SOBRE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS Y SOBRE EL USO DE IA EN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA 164
Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. 164

USO DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE INTERDISCIPLINAR 172
Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Breda, A., Font, V., Vanegas, Y. 172

ERRORES EN LA IDENTIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS Y ALGEBRAICAS DE LAS PROPIEDADES ARITMÉTICAS 180
Flores-Lamolda, L., Ramírez-Uclés, R. 180

PERCEPCIÓN DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE LA REALIZACIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS CONSTRUCTIVISTAS PARA LA INCLUSIÓN DE PERSONAS CON DEFICIENCIAS VISUALES 188
García-Manrubia, B., Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. 188

TIPOLOGÍA DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA 196
Garrido-Rojas, J., Moreno, A., Ruiz-Hidalgo, J.F. 196

ANÁLISIS DE TÉCNICAS EMPLEADAS POR JÓVENES CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL PARA RESOLVER PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS 204
Hidalgo-Herrero, M., Lerma, A. M., García, F. J., Ortega, C., Sierra, T. A. 204

APORTACIONES DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA AL ESTUDIO DE LA INTEGRAL IMPROPIA 212
Igolnikov, N. y Rivas, M. 212

CONOCIMIENTO META DIDÁCTICO-MATEMÁTICO EPISTÉMICO DE UNA PROFESORA NOVEL EN LA PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES 220
Inglada, N., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Sol, T. 220

USOS OPERACIONALES Y RELACIONALES DEL SIGNO IGUAL EN ALUMNADO DE TERCERO DE PRIMARIA EN TAREAS DE IGUALDAD NUMÉRICA 228
Jiménez-Gutiérrez, J., Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E. y Ramos-Rodríguez, E. 228

DIFERENTES NORMATIVAS, DIFERENTES VERSIONES DEL SENTIDO NUMÉRICO 236
Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L., Ruiz-Hidalgo, J. F. 236

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE TAREAS CONTEXTUALIZADAS SOBRE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EMPLEANDO GEOGEBRA 244
Karkour-Afhim, M. y Albanese, V. 244

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA PARA EL DESARROLLO INTEGRAL DEL ALUMNADO: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA 252
Lanza-Escobedo, D. y Hernández-Rodríguez, M. C. 252

INCORPORACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DEL DISEÑO UNIVERSAL PARA EL APRENDIZAJE A LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA 260
Ledezma, C., Sánchez, A., Araya, D., Font, V. 260

INTERPRETACIÓN DE LIBROS DE TEXTO POR MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO A PARTIR DE DOS CASOS CONTRASTANTES 268
Lerma-Fernández, A. M., García-García, F. J., Martínez-Ortiz, F., y Lendínez-Muñoz, E. M. 268

EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN CONTEXTOS PROBABILÍSTICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA 276
López-Martín, M. M., Burgos, M., y Tizón-Escamilla, N. 276

METODOLOGÍA DOCENTE: MEJORANDO LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN FUTUROS DOCENTES DE INFANTIL 285
Loureiro-Ga M., Gutiérrez-Rodríguez I. 285

PERCEPCIÓN DOCENTE SOBRE CUESTIONES DE GÉNERO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN LA PROVINCIA DE CASTELLÓN 293
Madrid, M.J., Agramunt, I., Santágueda-Villanueva, M. 293

ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ALUMNADO DE PRIMARIA Y SU RELACIÓN CON AUTOPERCEPCIÓN Y GUSTO POR LAS MATEMÁTICAS: UNA APROXIMACIÓN FISIOLÓGICA 301
Marbán, J. M., Fernández-Cézar, R. y Martín-Colomo, I. 301

INTRODUCCIÓN AL LOGARITMO COMO MEDIDA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO 309
Martín-Barcala, A., González-Astudillo, M. T., Molina, M. 309

ARGUMENTACIÓN EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE PRIMARIA 317
Milanesio, B., Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. 317

COMPARACIÓN DE RECURSOS MANIPULATIVOS FÍSICOS Y VIRTUALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO DE CASO CON DOCENTES EN FORMACIÓN 325
Ochugboju, A., Díez-Palomar J. 325

JUEGO EQUITATIVO Y ARGUMENTACIÓN: EXPLORANDO INTUICIONES SOBRE ESPERANZA MATEMÁTICA 333
Oval-Trujillo, Z. y García-Alonso, I. 333

PREDICCIÓN DE VALORES EN UNA TABLA DE FRECUENCIAS POR ESTUDIANTES CHILENOS 341
Pallauta, J. D., Gea, M. M., Valenzuela-Ruiz. S. y Batanero, C. 341

ANÁLISIS DEL USO DE LA ESTRATEGIA RECURSIVA EN TAREAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES LINEALES 349
Pérez, O., De Gamboa, G. y Badillo, E. 349

JUSTIFICACIONES A TRAVÉS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN SEGUNDO Y TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA 357
Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. 357

EXPERIENCIA DE DESARROLLO PROFESIONAL CON ATENCIÓN A LA LENGUA COMO SOPORTE UNIVERSAL EN LA ENSEÑANZA DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS.....365
Planas, N., Arnal-Julve, C. y Arnal-Bailera, A. 365

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL.....373
Quevedo-Gutiérrez, E., Perdomo-Díaz, J., Lijó Sánchez, R. y de-Armas-González, P. 373

ANÁLISIS DEL DOMINIO AFECTIVO EN LA SEIEM: TENDENCIAS Y RETOS.....381
Rodríguez-Barreto, C. y García-Alonso, I. 381

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE CÁLCULO VECTORIAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS DERIVADAS EN VARIAS VARIABLES 389
Rojas-Celis C., Cáceres-García M.J., Sánchez-Barbero, B. 389

CUESTIONARIO PARA EVALUAR EL DESARROLLO DEL TPACK EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS 397
Sancho-Blanco, V., Arnal-Bailera, A., Manero, V. 397

¿QUÉ CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EMERGE TRAS UNA FORMACIÓN SOBRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL? 405
Santaengracia, J. J., Palop, B., Rodríguez-Muñiz. L. J. 405

CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE LA PRÁCTICA DE PLANIFICAR LECCIONES USANDO PRINCIPIOS DE LA ENSEÑANZA EXPLORATORIA.....413
Santonja, P., Moreno M., Llinares, S. 413

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN TESIS DE DOCTORADO Y DISERTACIONES DE MAESTRÍA EN BRASIL 421
Silva-Lima, L. R., Matesco-Cristovão, E. y Climent, N. 421

REPRESENTACIONES GRÁFICAS REALIZADAS POR MAESTROS EN FORMACIÓN AL REFORMULAR PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.....429
Sosa-Martín, D., García-Alonso, I. y Bruno, A. 429

SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD A TRAVÉS DEL JUEGO: LA MIRADA DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO/A 437
Suárez-González, C., de la Fuente, A., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 437

FORMULACIÓN DE RELACIONES DE RECURRENCIA UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PATRONES.....445
Trigueros-Rodríguez, E. Montejo-Gámez, J. 445

ELECCIÓN DE UNA MEDIDA DE POSICIÓN CENTRAL EN PRESENCIA DE VALORES ATÍPICOS POR MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN 453
Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C. y Pallauta, J. D. 453

CONOCIMIENTO ALGEBRAICO DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA: EL CASO DE LOS PATRONES Y SUCESIONES 461
Vargas, M. F. 461

¿QUÉ SE ESCONDE DENTRO DE LA BOTELLA? UNA PROPUESTA DE RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN ESTADÍSTICA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA **469**
Vásquez, S., Barquero, B., Bosch, M. 469

PÓSTERES **477**

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL VOLUMEN EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA **478**
Alarcón-Díaz, E. M. y Carrillo-Gallego, D. 478

EL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO AL ANALIZAR RESPUESTAS GENERADAS POR IA **479**
Alonso-Castaño, M., Abella-Vázquez, M., Tagarro, D. y Santaengracia, J. J. 479

DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS PARA LA SOSTENIBILIDAD **480**
Alsina, Á., López-Serentill, P., Pincheira, N., Acosta, Y. y Berciano, A. 480

EFICACIA DE LA METODOLOGÍA CRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS POR UN ESTUDIANTE CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES **481**
Andrés-Cirillo, L., Goñi-Cervera, J. y Flores-Lamolda, L. 481

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL **482**
Arencibia, J. M., Quevedo, E., Perdomo-Díaz, J., Lijó, R. y de-Armas-González, P. 482

LA SIMETRÍA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA: UNA MIRADA DESDE LA DEFINICIÓN E IMAGEN CONCEPTUAL **483**
Arias, J. R. y Arce, M. 483

DESARROLLO DE DESTREZAS DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO CON ENTORNOS DE REALIDAD VIRTUAL **484**
Arjona-Aranda, G., Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compaña, M. T. y León-Mantero, C. M. 484

LEYENDO UN MANUAL DE ARITMÉTICA PARA MAESTRAS DE 1896. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES DE PRIMARIA EN FORMACIÓN **485**
Arnal-Palacián, M. y Oller-Marcén, A. M. 485

METODOLOGÍA FREINET Y LOS PROCESOS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL: UN ESTUDIO DE CASO **486**
Bartolomé, Á. M. y Maroto, A. 486

UNA HERRAMIENTA DIGITAL PARA PROMOVER EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO **487**
Benjumeda, F. J. y Romero, I. 487

¿QUÉ SIENTE EL ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA HACIA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA? **488**
Caballero-Carrasco, A., López García, R., Melo-Niño, L., Calle-Alonso, F. y Ochoa de Alda, J. A. G. 488

LA INTELIGENCIA ARTICUFICIAL EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS: VALIDACIÓN Y RESULTADOS **489**
Cabezas-Barragán, D., Calle-Alonso, F., Ochoa de Alda, J. y Melo-Niño, L. 489

INSTRUCCIÓN BASADA EN ESQUEMAS COMO APOYO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR DOS JÓVENES CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL 490
Calderón-Macho, C., Goñi-Cervera, J., y Flores-Lamolda, L. 490

APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS Y EMOCIONES EN LA ENCRUCIJADA 491
Calle-Alonso, F., Mestrinho, N., Caballero Carrasco, A., Mochón, J. F. C., Gómez-González, R. y Ochoa de Alda, J. A. G. 491

PROPUESTAS METODOLÓGICAS RECIENTES EN ARITMÉTICA: ANÁLISIS DIDÁCTICO E HISTÓRICO 492
Colmena, S. y Sánchez-Jiménez, E. 492

SENTIDOS PRODUCIDOS SOBRE VALIDACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN EL MARCO DE TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA 493
Cruz, M. F., Esteley, C. y Moreno, A. 493

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA EN LA REVISTA DE INSTRUCCIÓN PRIMARIA (1849-1851) 494
Dólera-Almaida, J., López-Cánovas, V. y Carrillo-Gallego, D. 494

CREENCIAS Y CONCEPCIONES SOBRE DISCALCULIA EN EL ENTORNO FAMILIAR 495
Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I. 495

EVOLUCIÓN DE ESTRATEGIAS DE REPARTO POR UN ESTUDIANTE CON AUTISMO BAJO UN ENFOQUE DE INSTRUCCIÓN BASADA EN ESQUEMAS MODIFICADA 496
Flores-Lamolda, L., Polo-Blanco, I. y Fernández-Cobos, R. 496

ANÁLISIS DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DESDE UN ENFOQUE STEM 497
Fraile-González, J. y Palop, B. 497

BARRERAS A LA INTEGRACIÓN DE TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL 498
Gallego-Sánchez, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M. 498

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR EN EL USO DE RECURSOS INTRODUCIENDO LA MULTIPLICACIÓN 499
García-Viso, P., Climent, N. y De las Heras, M. A. 499

LA PAREJA MATEMÁTICA COMO MODELO DE AGRUPAMIENTO PARA ATENDER EL SENTIDO SOCIAFECTIVO EN EDUCACIÓN PRIMARIA 500
Garrido-Martos, R., De la Fuente, A. y Benito, A. 500

ANÁLISIS DEL LENGUAJE DE LA PROPORCIONALIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMER CURSO DE LA ESO 501
Garzón-Guerrero, J. A. y Recarte-Castellanos, M. J. 501

CÓMO SELECCIONAN DEFINICIONES MATEMÁTICAS LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA 502
Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., Toscano, R. y Fernández-León, A. 502

TRAYECTORIAS FORMATIVAS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO LATINOAMERICANO 503
Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 503

TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE SOBRE LA MAGNITUD VOLUMEN EN EDUCACIÓN INFANTIL 504

Gómezescobar, A. y Carrera-González, M. 504

HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA CHILENA 505
González-Díaz, S., Díaz-Levicoy, D. y Salcedo, A. 505

FORMACIÓN SOBRE NECESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO EN MATEMÁTICAS EN EL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA 506
González-López, M. J., van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y Goñi-Cervera, J. 506

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES CON AUTISMO FRENTE A PATRONES DE REPETICIÓN 507
Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I. , Chimoni, M. y Pitta-Pantazi, D. 507

SOBRE LA ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA: LAS DIFICULTADES DE PLANTEAR UN BUEN PROBLEMA 508
Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J. y Almeida-Cabrera, R. 508

NIVEL DE ALGEBRIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA DE ESTUDIANTES DE 1º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA 509
Liviano-Carmona, V., Caballero-Carrasco, A., Soto-Ardila, L. M. y Gordillo-Merino, A. 509

FACETA COGNITIVA de futuros maestros a través del modelado de MAQUETAS 3D INCLUSIVAS 510
Lois-Prados, C., Blanco, T. F., Fernández-López, A. y Gorgal-Romarís, A. 510

EFECTO DEL ESPACIO EDUCATIVO EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE 511
Loureiro-G, M., Míguez-Álvarez, C. y Mociño González, I. 511

ENTRE LA MAGIA Y LA EMOCIÓN: SEGUIMIENTO AFECTIVO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS 512
Maestre, N., Palop, B., Forte, A. y Garrido-Martos, R. 512

ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA LITERATURA CIENTÍFICA: UN ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO 513
Martín-Colomo, I., Marbán, J. M. y Espina, E. 513

LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: ANÁLISIS TEMÁTICO Y DE DESCRIPTORES DE INVESTIGACIÓN 514
Maz-Machado, A., Rodriguez-Baiget, M. J., Rodrígez-Baige, D. y Martínez, H. 514

IDENTIFICACIÓN DEL SENTIDO ESPACIAL POR PARTE DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA 515
Montoro-Flores, R. y Ramírez-Uclés, R. 515

ESTUDIO DE LAS CAPACITACIONES MATEMÁTICAS DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN PANAMÁ 516
Murillo, M., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Fuertes-Prieto, M. A. 516

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EDUCACIÓN INFANTIL: UNA MIRADA CUALITATIVA A LA VISIÓN DEL DOCENTE ANTE UNA ENSEÑANZA DESCONECTADA 517
Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A., Del Olmo-Muñoz, J., Sotos-Serrano, Mt. y O'Connor, P. 517

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA DE LA COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN 1º DE ESO 518
Palop, B. , Ramos, P. y Garrido-Martos, R. 518

RELACIONES ENTRE ÁMBITOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS DE TAREAS FORMATIVAS: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA 519
Plazas, R., Climent, N. y Contreras, L. C. 519

EL ROL DEL DOCENTE EN PLATAFORMAS VIRTUALES: UN ESTUDIO COMPARATIVO CON DESMOS Y MOODLE PARA LA ENSEÑANZA DE RACIONALES 520
Ponce-Serrano, B., Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A. y Del Olmo-Muñoz, J. 520

ACTIVIDADES SOBRE GRÁFICO DE CAJA EN LOS LIBROS DE TEXTO CHILENOS Y ESPAÑOLES 521
Rodríguez-Alveal, F., Aguayo-Arriagada, C. G. y Díaz-Levicoy, D. 521

ESTUDIO DEL TRATAMIENTO DESENCHUFADO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA 522
Rodríguez-Muelas, D. y Rodríguez-Sánchez, M. M. 522

¿CÓMO PERCIBE EL PROFESORADO DE SECUNDARIA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD? 523
Ruiz, F., Pallauta, J., Concha, R. y Elgueda-Ibarra, M. 523

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS CON ALUMNOS DEL PROGRAMA DE DIVERSIDAD CURRICULAR 524
Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J., Ramos, M. y Antequera-Barroso, J. A. 524

MOVILIZANDO CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS MAESTROS SOBRE PROPORCIONALIDAD 525
Santos-Pérez, A., Martín-Díaz, J. P., García-Viso, P. y Climent, N. 525

REALIDAD VIRTUAL INMERSIVA PARA EL DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE SOBRE POLIEDROS 526
Sorroche, P., Guirado, C., Romero, I. M. y García, M. M. 526

INSTRUMENTOS PARA LA EVALUACIÓN DE LA AUTOEFICACIA MATEMÁTICA DEL ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA 527
Sukunza-Pagola, M., Berciano, A. y Marbán, J. M. 527

TERTULIAS MATEMÁTICAS DIALÓGICAS: ALCANCES Y DESAFÍOS 528
Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J. 528

TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO E INCERTIDUMBRE EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA 529
Vergara-Gómez, A. y Henríquez-Rivas, C. 529

REPRESENTACIONES ESTADÍSTICAS EN EL CONTETO DE LA EDUCACIÓN PARA ADULTOS 530
Zúñiga, A., Pallauta, J., Concha, R. y Elgueda, M. 530

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I: INVESTIGACIÓN SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EL SIGLO XXI

Coordina: María Magdalena Gea Serrano

Ponentes:

- Pedro Campos (Universidade do Porto): *Pensamento Computacional e Estatística Cívica: Uma Perspetiva Integrada.*
- Ainhoa Berciano Alcaraz (Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea -UPV/EHU-): *Retos de la Investigación sobre sentido estocástico en proyectos STE(A)M de Educación Secundaria.*
- Ángel Alsina Pastells (Universidad de Girona): *La Investigación sobre Estadística y Probabilidad en Edades Tempranas: Impacto en la Escuela.*

INVESTIGACIÓN SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EL SIGLO XXI

Research on stochastic sense in the 21st Century

Gea, M. M.

Universidad de Granada

Con enorme responsabilidad acepté la invitación de coordinar este seminario de investigación, asumiendo un doble reto. Por una parte, mantener la calidad con la que Carmen Batanero había coordinado los dos últimos seminarios de investigación que la SEIEM había celebrado en torno a la estadística (Batanero, 2007) y la probabilidad (Batanero, 2015); por otra parte, reunir ambas áreas de interés en un ambicioso seminario para contribuir a nuestra realidad educativa, porque comparto la idea de que "nuestra realidad [educativa] rara vez coincide con nuestras intenciones" (Moreno, 2022, p. 50). Es decir, el sentido estocástico ha irrumpido en nuestras aulas sin precedente alguno, a cualquier nivel (MEFP, 2022a, 2022b, 2022c y 2022d), aunque la investigación en didáctica de la estadística y en didáctica de la probabilidad y combinatoria tuviera amplia tradición en el campo de investigación de educación matemática en nuestro país (Barquero et al., 2022).

Este seminario presenta reflexiones fundamentadas en avances de investigación en educación matemática, para contribuir al diálogo sobre las oportunidades y desafíos educativos que la estadística, probabilidad y combinatoria ofrece al desarrollo de la sociedad de hoy, conocida por muchos como la era digital basada en datos (Bieheler y Wilkerson, 2025); además, se conecta con interrogantes abordados en seminarios previos sobre el nuevo marco curricular en matemáticas (Moreno, 2022), el papel de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Diago, 2022) y el reto de la formación del profesorado para responder a todas estas exigencias (Rodríguez-Muñiz, 2023).

Pedro Campos caracteriza en su ponencia nuestra sociedad del siglo XXI, reclamando la necesidad de desarrollar competencias digitales y pensamiento crítico en todos los ciudadanos, como medio para garantizar nuestra participación plena en una vida democrática. Esta demanda la explica desde una perspectiva innovadora, donde justifica que el pensamiento computacional y la programación formen parte de la educación estadística: "Esto incluye la capacidad de comprender algoritmos, cuestionar los criterios de toma de decisiones automatizada, evaluar los riesgos para la privacidad y reflexionar sobre las implicaciones éticas de la inteligencia artificial y la vigilancia digital.".

El autor describe diferentes iniciativas por parte de instituciones que promueven el sentido estocástico en la sociedad y subraya que el foco de interés de todas se encuentra en fomentar la interpretación y el pensamiento, en detrimento de la enseñanza de técnicas o métodos. El enfoque pedagógico que propone, de integrar tanto el pensamiento computacional como la programación en la educación estadística, lo explica mediante el análisis de cuatro casos con los que *divulgar*, *participar*, *interactuar* y *medir* el pensamiento computacional y su importancia en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, con foco en la estadística cívica (Ridgway, 2022).

Merece recordar, en este momento, el primer simposio que celebró la SEIEM en Zamora, en el que Eduardo Lacasta (1998) presentaba estrategias de análisis estadístico para facilitar la investigación en didáctica de las matemáticas. Planteaba el interrogante "¿es necesaria la estadística?" y con gran respeto recomendaba que "cuando se utilice, se haga con un control y un conocimiento de los métodos estadísticos utilizados" (p. 122), porque "lo más importante es que el investigador tenga un criterio para decidir los métodos adecuados y conocer su alcance y sus límites" (p. 123), y "podrá usarlos o

Gea, M.M. (2025). Investigación sobre sentido estocástico en el siglo XXI. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

no, pero estará en mejores condiciones para tomar las decisiones oportunas en su trabajo y para juzgar la pertinencia del aparato estadístico utilizado en otras investigaciones" (p. 137).

En el segundo simposio de la SEIEM la estadística volvió a ser protagonista, esta vez, al reflexionar sobre el papel del ordenador en su enseñanza y aprendizaje (Batanero et al.,1998). Como conclusiones entre ponentes y réplicas destaco la utilidad del ordenador para favorecer la interpretación y comprensión del contenido, así como su potencialidad para la simulación. También, se discutieron limitaciones por resolver como el idioma del software, la lentitud del procesador, o la falta de práctica de los estudiantes con la tecnología y el reto que supone la formación especializada del profesorado o el diseño de situaciones didácticas adecuadas.

Con esta retrospectiva podemos entender mejor cuando Pedro Campos plantea que la investigación en educación matemática todavía "debe evolucionar para preparar a los ciudadanos no sólo para leer el mundo con datos, sino para actuar en él con conciencia computacional y responsabilidad social". Wild (2017) explica esta mirada con el término *statistical literacy* (alfabetización estadística, en su traducción literal), que empodera al ciudadano y es necesaria para la sociedad actual, porque no solo somos consumidores de información basada en datos, sino que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) nos implican en nuestros propios dispositivos electrónicos a elaborar nueva información basada en los datos que consumimos (*consumir* y *cocinar,* en su traducción literal). Asimismo, Biehler y Wilkerson (2025) iniciaron su conferencia plenaria en el último Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática Europeo celebrado este año mismo año planteando las siguientes inquietudes: "¿Qué es importante que los estudiantes sepan sobre los datos? ¿Qué deberían poder hacer con los datos? ¿Dónde deberían los estudiantes adquirir los conocimientos, las habilidades y las disposiciones necesarias para comprender la vida con datos?".

La ponencia de Ainhoa Berciano aporta luz a estos interrogantes, según la tendencia educativa reciente de integrar la enseñanza y aprendizaje de diferentes ámbitos de conocimiento; en particular, la ciencia, la tecnología, la ingeniería, el arte y la matemática (STEAM). Presenta una mirada crítica de la enseñanza y aprendizaje del sentido estocástico en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (12 a 15 años) según contextos o proyectos STEAM. Para ello, en primer lugar, describe qué es la educación STEAM y la importancia de promover un cambio en el enfoque educativo que adopte contextos de aprendizaje que integren los ámbitos de conocimiento que alberga la educación STEAM. Continúa describiendo la evolución histórica del sentido estocástico en educación, relacionando las dimensiones de diversos marcos teóricos que se han venido desarrollando en los últimos años. Finaliza su fundamentación teórica describiendo los avances de investigación más relevantes para entender la realidad del tratamiento del sentido estocástico en el aula de secundaria. Considera la actitud del profesorado hacia el sentido estocástico y su enseñanza, el sentido estocástico que se promueve en proyectos STEAM, tanto en el panorama europeo como estatal, y centra su atención en la implementación de un caso particular de los desarrollados en centros educativos de Educación Secundaria públicos del País Vasco.

En base a la fundamentación teórica y la realidad descrita, la autora plantea tres grandes retos a la investigación en educación matemática, para favorecer la adquisición del sentido estocástico en la etapa de secundaria según el desarrollo de contextos o proyectos STE(A)M, como son: la creación y medición de estrategias de fomento de la actitud del profesorado hacia el sentido estocástico y su enseñanza; la medición y fomento del grado de integración del sentido estocástico en los diseños de los proyectos STE(A)M y la evaluación del desarrollo del sentido estocástico en sus implementaciones; así como el análisis de las variables que determinan e influyen en el tratamiento que hace el profesorado del sentido estocástico en proyectos STE(A)M en el aula de Educación Secundaria.

La perspectiva de Ainhoa Berciano podría ampliarse a la etapa de primaria o bachillerato, haciendo las correspondientes revisiones de la literatura de investigación en educación matemática para

fundamentar la realidad de aula en cualquiera de estas etapas educativas, pero resulta más complejo hacer esta adaptación para la etapa de Educación Infantil, como se describe en la ponencia de Ángel Alsina, pues en el currículo de muchos países no se considera explícitamente la enseñanza de la estadística y probabilidad, como sucede en nuestro país (MEFP, 2022a). El autor presenta avances de la investigación sobre estadística y probabilidad en edades tempranas (3 a 8 años), que abarca tanto el segundo ciclo de Educación Infantil como el primer ciclo de Educación Primaria. Las evidencias sobre cómo los niños recorren las fases del ciclo de investigación estadística (formulación de una pregunta, recolección, organización, representación e interpretación de datos) y cómo abordan el significado intuitivo de la probabilidad (Batanero, 2005) haciendo uso del lenguaje verbal o mediante la escala cualitativa, contribuyen al diálogo sobre la responsabilidad de la escuela y de nuestra propia sociedad de la SEIEM por impulsar la cooperación e intercambio entre la investigación y la docencia, en estos niveles educativos.

No cabe duda de que estas evidencias se acompañan de diferentes desafíos, como describe Ángel Alsina en su ponencia. En particular, se centra la atención en el desarrollo profesional docente, tanto en la formación inicial como continua, pues "la mera presencia de la estadística y la probabilidad en algunos currículos de matemáticas de los primeros niveles no garantiza que su enseñanza en el aula sea óptima y se promueva la alfabetización estadística y probabilística".

He resumido demasiado los aspectos de interés y las interrelaciones entre las ideas que se presentan en cada una de las ponencias que sustentan este seminario. Además, estas no cubren todas las inquietudes y problemáticas de investigación que ocupan este campo de investigación. Por tanto, esperamos que la selección de investigaciones actuales que se presentan aliente un espacio dinámico de discusión sobre el sentido estocástico. Al menos, reconsiderar que socialmente se entiende este término como novedoso, por su reciente incorporación a nuestra normativa curricular, pero que viene siendo una demanda desde este campo de investigación desde hace más de un cuarto de siglo (Wallman, 1993).

Finalizo esta presentación con mi más sincero agradecimiento a la Junta Directiva de la SEIEM y al Comité Científico de este Simposio por la invitación a coordinar este seminario de investigación, así como al interés y dedicación de los ponentes porque lo han hecho posible.

Agradecimientos

Proyecto *PID2022-139748NB-100* financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

Referencias

Barquero, B., Batanero, C., Blanco, T. F., Bosch, M., Camacho-Machín, M., Cañadas, M. C., Castro, E., Chamoso, J. M., Contreras, L. C., Gea, M. M., Godino, J. D., Martín-Molina, V., Moreno, M. y Wilhelmi. M. R. (2022). Spanish Research on Mathematics Education. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas, (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1). PME.

Batanero, C. (2015). Investigación en Didáctica de la Probabilidad. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 69-72). SEIEM.

Batanero, C. (2007). Enseñanza de la Estadística en los niveles no universitarios: algunos retos para la investigación. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 93-97). SEIEM.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, *8*(3), 247-264.

Batanero, C. Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística. En E. Lacasta y J. R. Pascual (Coords.) *Actas del II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 169-185). SEIEM.

Biehler, R. y Wilkerson, M. H. (2025). The new role of data in society: Challenges and opportunities for mathematics education in the age of data science and AI. En M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Plenary talk* (en prensa). Free University Bozen-Bolzano and ERME.

Diago, P. D. (2022). El papel de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 3-5). SEIEM.

Lacasta, E. (1998). Estrategias del análisis estadístico para el tratamiento de cuestiones de Didáctica. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 121-138). SEIEM.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022a). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 28.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022b). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 52.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022c). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 76.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022d). Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, núm. 82.

Moreno, A. (2022). Introducción al seminario de investigación II: el desarrollo del nuevo marco curricular en matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 49-51). SEIEM.

Ridgway (Ed.). (2022). *Statistics for empowerment and social engagement: Teaching Civic Statistics to develop informed citizens*. Springer.

Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 61–68). SEIEM.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), l-8. https://doi.org/10.1080/01621459.1993.10594283

Wild, C. (2017). Statistical literacy as the Earth moves. *Statistics Education Research Journal*, *16*(1), 31-37. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.211

PENSAMENTO COMPUTACIONAL E ESTATÍSTICA CÍVICA: UMA PERSPETIVA INTEGRADA

Integrating computational thinking and civic statistics: A holistic perspective

Campos, P.

Faculdade de Economia da Universidade do Porto
Instituto Nacional de Estatística, Portugal
Laboratorio de Inteligencia Artificial e Análise de Decisão - LIAAD INESC TEC

Resumo

Este artigo propõe uma reflexão crítica sobre a integração do pensamento computacional e da programação na educação estatística, com um foco na estatística cívica. Tendo como população alvo os estudantes, professores e cidadãos, descreve-se como o ensino de estatística pode promover não só competências técnicas, mas também consciência social e participação informada. Através de práticas pedagógicas baseadas em projetos com dados do mundo real, os estudantes desenvolvem competências para interpretar, comunicar e agir sobre questões sociais relevantes. Por outro lado, os docentes enfrentam o desafio de articular programação, estatística e cidadania num currículo inclusivo. Defende-se uma abordagem integrada, onde a educação estatística forma não apenas analistas, mas cidadãos capazes de pensar criticamente com e sobre os dados.

Palabras clave: *pensamento computacional, estatística cívica, educação estatística, cidadania, projetos com dados reais.*

Abstract

This article proposes a critical reflection on the integration of computational thinking and programming into statistical education, with a focus on civic statistics. Targeting students, teachers, and citizens, it describes how the teaching of statistics can promote not only technical skills but also social awareness and informed participation. Through pedagogical practices based on real-world data projects, students develop the ability to interpret, communicate, and act on socially relevant issues. Meanwhile, educators face the challenge of combining programming, statistics, and citizenship in an inclusive curriculum. An integrated approach is advocated, in which statistical education trains not only analysts but also citizens capable of thinking critically with and about data.

Keywords: *computational thinking, civic statistics, statistical education, citizenship, real-world data projects.*

INTRODUÇÃO

Na sociedade contemporânea, a cidadania está cada vez mais entrelaçada com os dados. O cidadão não é apenas um consumidor passivo de informações, mas também um produtor ativo de dados, quer através da sua participação em inquéritos, do uso de plataformas digitais ou da partilha de conteúdos nas redes sociais. Esta nova realidade exige uma compreensão crítica da forma como os dados são recolhidos, utilizados e interpretados.

Campos, P. (2025). Pensamiento computacional e Estatística cívica: uma perspectiva integrada. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

A disponibilização de dados abertos provenientes de organismos públicos, tais como Institutos de Estatística e Agências internacionais (como Nações Unidas e Banco Mundial) e privadas (Amazon, Meta, Google, etc.) tem desempenhado um papel central na promoção de uma ciência mais acessível e participativa. Esta abertura fomenta a emergência de uma ciência cívica, na qual cidadãos, investigadores, jornalistas e organizações da sociedade civil podem colaborar na produção de conhecimento e na monitorização de políticas públicas. Um exemplo inspirador deste tipo de envolvimento é o trabalho de agências como Open Data Watch (https://opendatawatch.com/) e o trabalho de jornalistas de dados e ativistas digitais, que utilizam visualizações, investigações baseadas em dados e plataformas tecnológicas para promover a transparência e a justiça social (Local Data Journalism Initiative: https://miurban.uchicago.edu/opportunities/local-data-journalism-initiative/). Entre outros exemplos conhecidos destaca-se também o trabalho de Hans Rosling, que procurou combater mitos sobre o mundo com base em dados estatísticos acessíveis e visualmente apelativos (Rosling et a., 2018), etc.

Para que os cidadãos possam participar plenamente na vida democrática, é fundamental que desenvolvam competências para a cidadania digital, que vão além da literacia estatística tradicional. Isto inclui a capacidade de compreender algoritmos, questionar os critérios de decisão automatizada, avaliar os riscos de privacidade e refletir sobre as implicações éticas da inteligência artificial e da vigilância digital.

Num trabalho sobre a importância do uso de microdados com ferramentas computacionais que permitam aos alunos aprofundar a compreensão dos fenómenos reais, Campos (2016) sugere que e importante o conhecimento dos dados, nomeadamente dos metadados, sem os quais é difícil aos alunos explorarem relações mais complexas entre variáveis.

A literacia de dados e a literacia estatística, que se sobrepõem, tornam-se, assim, ferramentas essenciais de capacitação individual e coletiva. Neste contexto, iniciativas como o ISLP (International Statistical Literacy Project: https://iase-web.org/islp/) ou a National Numeracy no Reino Unido (https://www.nationalnumeracy.org.uk/, Malawi (https://nnpmalawi.org/) e Estados Unidos, por exemplo, assim como a National Numeracy Network https://www.statlit.org/Schield.htm), entre outras, têm procurado promover a literacia estatística em todo o mundo, especialmente entre os jovens, desenvolvendo materiais educativos, competições e redes de apoio às comunidades educativas, entre os quais se destacam, no caso do ISLP, a competição internacional de pósteres e o Best Cooperative Project Award (https://iase-web.org/islp/Competitions.php).

Do mesmo modo, a iniciativa GIST (Global Network of Institutions for Statistical Training: https://unstats.un.org/gist/) procura fortalecer a utilização de dados em políticas públicas e contribuir para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), defendendo uma cultura de tomada de decisão baseada em evidência. A Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável enfatiza a necessidade de fortalecer os sistemas estatísticos e melhorar o acesso a dados fiáveis, oportunos e desagregados. A promoção da literacia estatística e da cidadania baseada em dados é, portanto, um passo essencial para alcançar metas como a educação de qualidade (ODS 4), igualdade de género (ODS 5), e sociedades pacíficas e inclusivas (ODS 16), garantindo que as decisões políticas refletem de forma mais justa e precisa as realidades vividas pelos cidadãos.

Por outro lado, o projeto LEME (Laboratório de Ensino de Matemática Escolar), coordenado por Mauren Porciúncula no Brasil (Porciúncula, 2022), promove o uso de tecnologias digitais e programação em ambientes de aprendizagem ativa. Através de atividades baseadas em dados e uso de software como R, os alunos desenvolvem raciocínio estatístico e competências computacionais em contextos que fazem sentido para as suas realidades culturais e sociais. Este alinhamento com uma aprendizagem significativa e situada (Ausubel, 1968; Lave & Wenger, 1991) mostra como a programação pode ser usada para construir conhecimento estatístico de forma contextualizada. Outro exemplo relevante é o projeto What's Going On in This Graph?, uma colaboração entre a *American*

Statistical Association e o *New York Times* (https://www.nytimes.com/column/whats-going-on-in-this-graph), que semanalmente apresenta gráficos reais retirados do jornal para que alunos os interpretem, discutam e comentem online. Embora não exija programação direta, esta atividade envolve processos de abstração, decomposição de informação visual e raciocínio algorítmico, elementos centrais do pensamento computacional (Wing, 2006). A prática recorrente da leitura crítica de dados visuais fortalece a literacia estatística, incentivando os alunos a questionar fontes, contextos e representações gráficas - competências essenciais no atual ecossistema mediático e informacional.

O projeto ProCivicStat (Ridgway, 2022) vai mais além ao defender explicitamente uma educação estatística crítica para a cidadania. Foca-se em temas socialmente relevantes - como desigualdade, migrações ou alterações climáticas - e recorre a dados públicos abertos, análise computacional e visualização interativa. Ao estimular os alunos a explorar problemas complexos com recurso a ferramentas digitais, o ProCivicStat coloca o pensamento computacional ao serviço da consciencialização social e da participação democrática, em consonância com as propostas de Skovsmose (1994) e Weiland e Sundrani (2022).

Todos estes projetos partilham um elemento comum: a promoção de um uso ativo e reflexivo da estatística, em articulação com ferramentas digitais e raciocínio computacional. Ao envolver os alunos na formulação de perguntas, exploração de dados, uso de algoritmos e comunicação de conclusões, estas iniciativas mostram que pensar estatisticamente e computacionalmente são dimensões complementares da literacia de dados contemporânea. Mais do que ensinar técnicas, estes projetos ensinam os alunos a pensar com dados - um objetivo central para uma educação crítica, ética e relevante no século XXI.

Neste trabalho procura-se estabelecer uma ligação entre o pensamento computacional e a literacia estatística, propondo uma abordagem pedagógica que passe por uma reflexão crítica sobre a integração do pensamento computacional e da programação na educação estatística, com um foco na estatística cívica. É proposta uma análise de vários projetos através de uma organização em quatro grupos conforme o objetivo desses projetos: Divulgar, envolvendo projetos que têm como objetivo a divulgação de conteúdos; Participar, que foca em hackathons, com participação ativa de alunos; Interagir, em que é apresentado um exemplo de exposição interativa; e Medir, atividades para medir o uso de pensamento computacional.

O artigo entra-se estruturado da seguinte forma: começa-se por uma abordagem teórica sobre os fundamentos e oportunidades do pensamento computacional e literacia de dados na educação matemática. De seguida é definida a metodologia (baseada em casos de estudo) sendo depois apresentados esses casos de estudo, agrupados em Divulgar, Participar, Interagir e Medir. Termina-se com uma síntese conclusiva e ideias a desenvolver no futuro.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL E LITERACIA DE DADOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: FUNDAMENTOS E OPORTUNIDADES

A integração do pensamento computacional no ensino da matemática oferece um conjunto poderoso de estratégias cognitivas e operacionais que potenciam a compreensão crítica dos dados e dos algoritmos que estruturam o mundo atual. De acordo com Wing (2006), o pensamento computacional implica a formulação de problemas de forma a que as suas soluções possam ser representadas e tratadas por um agente computacional. Na educação matemática, esta abordagem favorece a resolução de problemas complexos, a modelação de fenómenos e a análise de padrões em dados reais - competências essenciais para uma cidadania informada e ativa.

Inspirado em teorias anteriores como a pedagogia construtivista de Piaget (Piaget, 1972) e a aprendizagem situada de Lave e Wenger (1991), o uso de ferramentas digitais e algoritmos no ensino da estatística permite aos alunos construir significados a partir da interação com dados autênticos, em

contextos que lhes são cultural e socialmente relevantes. Neste quadro, a literacia de dados deixa de ser apenas um domínio técnico, passando a ser um instrumento de empoderamento e capacitação social e de compreensão crítica do mundo - alinhado com os princípios da pedagogia crítica de Freire (Freire, 1972), onde aprender é também "ler o mundo".

Através destas práticas, os alunos não só aplicam conceitos estatísticos e matemáticos em contextos concretos, como desenvolvem um pensamento crítico sobre os fenómenos sociais, o que promove uma aprendizagem significativa (Ausubel, 1968) - onde os novos conhecimentos se integram e se relacionam com os saberes prévios e com as experiências vividas. Além disso, ao trabalhar com dados públicos e abertos, os alunos desenvolvem uma consciência ética sobre a proveniência, uso e impacto dos dados, em sintonia com as propostas contemporâneas de uma educação estatística crítica (Skovsmose, 1994; Weiland e Sundrani, 2022), que defende a análise reflexiva dos dados como meio de participação democrática.

O pensamento computacional, na tradição de Wing (2006), pode ser visto como uma evolução natural das competências identificadas por Gal (2002), no contexto de um mundo digital. Ele amplia a literacia estatística em três direções fundamentais, nomeadamente, (i) a Modelação de problemas e processos com dados, que requer compreender estruturas algorítmicas e simulações baseadas em dados; (ii) Crítica à automatização de decisões, associada à capacidade de compreender o funcionamento de algoritmos e de sistemas baseados em inteligência artificial; e, finalmente (iii), Autonomia na manipulação de dados digitais, através de ferramentas como R, Python ou software de visualização, que são hoje parte integrante do envolvimento cívico com informação.

Theobold e Hancock (2019) fizeram um estudo sobre o uso e ensino da estatística nas ciências do ambiente e descrevem uma abordagem baseada na programação, onde se recorre ao ambiente de programação R para proporcionar aos alunos o código necessário para modificar gráficos, resumos de dados e modelos e funções, ao mesmo tempo que os alunos são expostos a alguns conceitos computacionais, como ciclos e declarações condicionais e relacionais. Embora o estudo tenha revelado que alguns alunos recorreram a outros colegas para ajudar a explicar o código, isso permitiu que os estudantes compreendessem melhor a computação estatística necessária para os seus projectos de investigação independentes, o que, de um modo geral, contribuiu para uma melhor compreensão e competências computacionais destes estudantes. Horton e Hardin (2021) estudaram vários artigos sobre o uso de práticas computacionais no ensino da estatística e concluíram que é fundamental que a comunidade redobre os seus esforços para adotar a computação sofisticada no currículo de estatística e ciência dos dados. Ferguson e Pfannkuch (2022), por sua vez, desenvolveram uma tarefa baseada na Web, criada utilizando o pacote R *learnr* para proporcionar um acesso fácil a novos dados para testar modelos de previsão. Essa tarefa permitiu desenvolver novas ideias estatísticas e computacionais relacionadas com a modelação preditiva e as APIs (Application Programming Interfaces).

Quanto à literacia estatística, uma abordagem consistente e sistematizada, nomeadamente nos adultos, foi definida Gal (2002), que propõe que a literacia estatística deve ser entendida como mais do que a capacidade técnica de ler gráficos ou calcular médias. Gal (2002) identifica dois componentes principais. (i) Conhecimentos (*literacy-related knowledge components*), que incluem conhecimento matemático, estatístico, contextual e disposições cognitivas; e (ii) Competências de interpretação (*literacy-related enabling dispositions*), sobre questionar criticamente os dados, interpretar fontes e tomar decisões com base em evidência. Além disso, Gal defende que os cidadãos devem desenvolver responsabilidades em relação ao uso da informação estatística, tanto como consumidores como produtores de dados. No domínio da educação matemática, esta proposta é coerente com a anterior visão da Educação Estatística Crítica proposta por Skovsmose (1994), que procura capacitar os alunos para questionar estruturas sociais através de dados e com a aprendizagem baseada em projetos (*project-based learning*) e ainda a aprendizagem colaborativa (Thomas, 2000), que permite a

modelação de dados reais e simulações computacionais. A abordagem sociocultural da literacia (Street, 1984), segundo a qual ler e interpretar dados é uma prática situada culturalmente, está ligada às realidades dos cidadãos e também está alinhada com estas práticas.

A proposta de Gal (2002) faz ainda mais sentido no contexto atual, caracterizado por dados massivos (big data) e desigualdades digitais, em que a literacia estatística precisa integrar o pensamento computacional e algorítmico para responder aos novos desafios da cidadania. A educação matemática deve, por isso, evoluir para preparar cidadãos não só para ler o mundo com dados, mas para agir sobre ele com consciência computacional e responsabilidade social. Mais recentemente o projeto ProCivicStat (https://iase-web.org/islp/pcs/), financiado pelo Erasmus+, permitiu desenvolver um conjunto de modelos e recursos com vista à criação de uma estatística cívica capaz de dar aos cidadãos um forte conhecimento para lidar com as situações do dia a dia (Ridgway, 2022). Na sequência deste projeto foi desenvolvido um mapa conceptual abrangente que delineia as competências necessárias para compreender estatísticas cívicas. Este mapa inclui as seguintes dimensões:

- Compromisso e Ação: compreensão do significado social das estatísticas e disposição para agir com base nelas.
- Conhecimento: compreensão da Estatística, representações, metodologias e contextos cívicos.
- Processos Facilitadores: habilidades em TIC, comunicação e raciocínio quantitativo.

Por seu lado, Schiller e Engel (2023) descrevem uma componente importante da formação dos professores de matemática denominada "Questionamento crítico de declarações baseadas em dados nos media", que se centra na desconstrução de títulos dos media através da avaliação de afirmações utilizando os dados originais e informações sobre a conceção da investigação. A conceção desta formação baseia-se nos princípios associados ao Statistical Reasoning Learning Environment (de Garfield e Ben-Zvi, 2009).

Esta trilogia permite a interligação entre disposição, o conhecimento e as habilidades tecnológicas (pensamento computacional) para lidar com as estatísticas. Este *framework* serve como guia para o desenvolvimento de currículos que promovam a literacia estatística cívica, preparando os alunos para analisar e interpretar dados relevantes para a sociedade, quer no que respeita aos dados (Teixeira, et al., 2023), quer na organização de planos de aulas (Ttrostianitser, Teixeira e Campos, 2023), que ligam pensamento computational com a literacia de dados numa reflexão crítica com dados reais complexos.

Tabela 1

Uma visão integrada das dimensões do pensamento computacional e literacia estatística

	Dimensão	Gal (2002)	ProCivicStat (2022)	Literacia Estatística Crítica e Cívica (Weiland + Schield)	Educação Estatística com Práticas e Tecnologia (Theobold+ Hardin, Fergusson+Hancock, Horton, GAISE + SRLE)	Pensamento Estatístico Empírico (Wild & Pfannkuch)
1	**Conhecimento Estatístico**	Conceitos Estatísticos básicos como variabilidade, probabilidade, inferência	Estatística aplicada a questões cívicas e sociais	Estatística como ferramenta crítica para entender desigualdades e argumentos mediáticos	Foco no raciocínio estatístio com dados reais e sua evolução ao longo do tempo	Quatro componentes do pensamento estatístico: investigação, variação, crítica e contexto
2	**Conhecimento Matemático**	Conhecimento matemático de suporte à estatística	Implícito no uso de dados quantitativos	Relação entre matemática, ética e argumentação informal	Matemática aplicada e integrada em ambientes de aprendizagem significativos	Matemática como base para compreender fenómenos empíricos
3	**Conhecimento Contextual Cívico**	Compreensão do contexto onde os dados se inserem	Ênfase em contextos sociais, políticos, económicos	Ênfase na justiça social, discurso público e contexto sociopolítico	Contextualização de dados em problemas do quotidiano	Ênfase na investigação com dados em contextos reais
4	**Disposições Atitudinais**	Curiosidade, atitude crítica, autoconfiança, resiliência	Compromisso cívico e motivação para usar dados criticamente	Postura crítica, julgamento cívico sobre os dados	Curiosidade, colaboração e envolvimento ativo com os dados	Postura reflexiva e questionadora durante o processo
5	**Competências de Interpretação**	Interpretação de gráficos, tabelas e argumentos com dados	Leitura crítica de representações visuais e estatísticas	Leitura crítica orientada para os impactos sociais e políticos	Visualização e interpretação critica de dados em contextos autênticos	Avaliação contínua e crítica de resultados e métodos
6	**Processos Facilitadores (TIC)**	Não abordado diretamente	TIC, comunicação e raciocínio quantitativo	Importância da linguagem, media e ferramentas digitais para o	Tecnologia como ferramenta essencial para análise e ensino	Tecnologia como meio para viabilizar investigação estatísticas
7	**Pensamento Computacional**	Não incluído	Não incluído diretamente	Não incluído diretamente	Pensamento algorítmico, Programação, Simulações computacionais, construção de modelos e experiências digitais	Uso de ferramentas computacionais como suporte à prática estatística
8	**Compromisso Cívico e Ação**	implícito nas disposições críticas	Componente central: ação baseada em dados	Disposição para agir com base na análise crítica de dados	Estatística aplicada à tomada de decisões reais	Estatística como prática social ativa e significativa

A Tabela 1 apresenta, de forma integrada, as várias abordagens introduzidas aqui, ligando a literacia estatística e o pensamento computacional, usando 8 dimensões: Conhecimento Estatístico,

Conhecimento Matemático, Conhecimento Contextual Cívico, Disposições Atitudinais, Competências de Interpretação, Processos Facilitadores (TIC), Pensamento Computacional e Compromisso Cívico e Ação.

METODOLOGIA

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre projetos pedagógicos com impacto na promoção e medição da literacia estatística, focando no pensamento computacional com impacto social nos estudantes do ensino secundário ou superior e nos cidadãos em geral. Tendo como base numa metodologia de estudos de casos, são utilizados exemplos concretos de hackathons cívicos, exposições itinerantes e inquéritos que permitam aferir a utilização de pensamento computacional para o ensino e aprendizagem da estatística.

Eventos como *hackathons* e *datathons* proporcionam ambientes colaborativos onde os participantes aplicam pensamento computacional e análise de dados para resolver problemas sociais. Estas experiências práticas reforçam a compreensão dos alunos sobre a aplicação da estatística e do pensamento computacional em contextos reais.

Neste âmbito, considera-se vários casos de estudo, baseados em projetos reais em funcionamento e estruturados da seguinte forma: 1) Divulgação de conteúdos; 2) Participação de utilizadores; 3) Interação dos participantes; 4) Medição das capacidades.

Os exemplos apresentados são os seguintes:

A. Divulgar: *CivicStatMap*, desenvolvido no âmbito do projeto *ProCivicStat*
B. Participar: *Hackathons* no âmbito do Eurostat (ESC) e *Poster Competition* (ISLP)
C. Interagir: *Explorística* no âmbito da exposição interativa.
D. Medir: COMPUTE e PULSAR.

Análise dos Estudos de Caso

Divulgar**:** *CivicStatMap e a Aprendizagem Significativa com Dados*

CivicStatMap (https://rstudio.up.pt/shiny/users/pcs/civicstatmap/) é uma base de dados de material didático e pedagógico criada no âmbito do ProCivicStat para aplicar práticas inovadoras em escolas secundárias e universidades usando dados reais alinhados com os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), como a desigualdade social, a migração, a pobreza ou as alterações climáticas (Trostianitser et al., 2023). O CivicStatMap contém planos de aulas com atividades e recursos didáticos com assuntos que motivam os alunos a pensar, estando organizados por língua, tópico estatístico, ferramenta computacional, tema e nível de dificuldade.

Num desses planos de aulas aborda-se o tópico das migrações (ver Figura 1). É usado o software iNZight (livre e gratuito) e os dados são do Inquérito Migratório às Famílias, fornecido pelo Banco Mundial (World Data Bank). Contém a análise de alojamentos com 82 variáveis e mais de 3300 registos, embora, para esta aula, apenas 10 das variáveis mais importantes foram selecionadas, tais como cidade de origem, sexo, idade, motivo para deixar o seu país, estado civil, escolaridade, entre outras.

Os alunos têm que responder a perguntas como esta: “Um jornalista argumentou que a maioria dos imigrantes da Nigéria nem sequer terminou o ensino médio". Concorda com esta afirmação?” A resposta envolve o cálculo dos níveis de educação e outras estatísticas relevantes que mostram o nível de educação dos migrantes nigerianos. Por exemplo, o teste de Qui quadrado pode ser usado para verificar a relação de independência entre a existência de desastres naturais (uma das razões da migração), a região e o ano.

Outros exemplos podem ser encontrados em Trostianitser et al. (2023), usando mapas que permitem ver, por exemplo, que os desastres naturais ocorrem nos países mais perto da linha do equador. Todas estas atividades são úteis para motivar o uso da estatística para explorar os dados e tirar conclusões em assuntos de interesse claro para a sociedade e sempre com base em ferramentas e software para promoção do pensamento computacional.

Participar**:** *Hackathons, Datathons e Educação Participativa*

Eventos como *hackathons* e *datathons* são promovidos por entidades várias como a ONU (Organização das Nações Unidas), o Eurostat (Instituto Europeu de Estatística), o ISLP, universidades e Institutos de Estatística. Nestes espaços, os participantes enfrentam problemas abertos relacionados com os ODS e trabalham em equipa para encontrar soluções através da análise de dados, programação e visualização.

A ESC (European Statistical Competition: https://www.esc2025.eu/) organizada pelo Eurostat com base numa iniciativa original do INE - Espanha, promove a literacia estatística ao desafiar os alunos a analisar, interpretar e comunicar dados reais de forma crítica e fundamentada e a apresentar o resultado dessa investigação em formato vídeo, artigo ou infografia. Os participantes devem lidar com conjuntos de dados oficiais, compreender variáveis, construir indicadores, aplicar técnicas de análise descritiva e inferencial, e apresentar conclusões com base em evidência empírica. Esta abordagem permite desenvolver competências essenciais como a leitura de gráficos e tabelas, o uso correto de conceitos estatísticos e a formulação de argumentos baseados em dados. Ao trabalhar com dados provenientes de fontes oficiais (como o Eurostat), os alunos aprendem também a avaliar a qualidade, a fiabilidade e o contexto dos dados, um aspeto central da literacia estatística.

A International Poster Competition (IPC) do ISLP - International Statistical Literacy Project (https://iase-web.org/islp/Poster_Competition_2024-2025.php) é uma iniciativa global que convida estudantes a criar *posters estatísticos* baseados em dados reais, com o objetivo de comunicar conclusões sobre temas relevantes para a sociedade. Esta competição que envolve dezenas de milhares de participantes em todo o mundo é uma poderosa iniciativa para promover tanto a literacia estatística como o pensamento computacional, especialmente quando orientada pedagogicamente.

Ambas as iniciativas exigem que os alunos processem volumes de informação com recurso a software de análise de dados (por exemplo, Excel, R, Python ou SPSS), e planeiem as etapas de tratamento e visualização da informação. Para resolver os problemas propostos, os alunos devem decompor tarefas complexas, identificar padrões nos dados, criar modelos ou simulações simples e desenvolver soluções automatizadas ou semi-automatizadas, como gráficos dinâmicos ou relatórios interativos. Esta organização do raciocínio em etapas lógicas e estruturadas, típica do pensamento computacional, é treinada ao longo de toda a competição.

Figura 1

Exemplo de um plano de aula sobre Migrações na Nigéria destinado ao ensino superior; Nota: potencia-se o conhecimento de estatística descritiva, gráficos de média, cálculo de variável quantitativa em função de grupo (variável qualitativa); Fonte: CivicStatMap (Trostianitser et al., 2023)

Promoting Civic Engagement via Exploration of Evidence: Challenges for Statistics Education

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

ProCivicStat © - Manual dos Professores, 5.401

Migrantes da Nigéria em Europa

Anna Trostianitser | Iddo Gal
Anna.Trostianitser@gmail.com | iddo@research.haifa.ac.il
Universidade de Haifa, Israel

Pedro Campos | Sónia Teixeira | Paula Lopes
pcampos@fep.up.pt | soniaacteixeira@gmail.com | rosyfogo09@gmail.com
Universidade do Porto, Portugal

O quê?	Material didático para conhecer estatística sobre a sociedade: ***Possíveis razões e consequências da migração para países europeus.***
Porquê?	Aprender estatística com dados reais e temas motivadores de grande relevância para a cidadania informada e o envolvimento cívico..
Tópicos estatísticos	Os alunos serão capazes de investigar as noções básicas de estatística, diferentes tipos de variáveis, medidas de localização e dispersão, estatística descritiva e inferência estatística.
Nível	Universitário
Pré-requisitos	Conhecimento de estatística descritiva, gráfico de média, cálculo de variável quantitativa em função de grupo (variável qualitativa)
Ferramentas digitais	iNZight ouTableau
Recursos necessários	iNZight ou Tableau precisam ser instalados nos PCs.
Tempo de aula	3-5 horas
Comentário adicional	Adequado para trabalho individual / em grupo. A introdução ao software deve ser fornecida anteriormente.

Interagir**:** *Exploristica*

Porque o contacto direto com os alunos é importante, criou-se a Explorística (exploristica.scl.pt), uma exposição itinerante e interativa promovida pelo Instituto Nacional de Estatística de Portugal (INE) e pela Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), inicialmente com o apoio da Ciência Viva e agora pelo Eurostat, com o objetivo de fomentar a literacia estatística e a numeracia entre os alunos do 3.º ciclo do ensino básico, ensino secundário e primeiros anos do ensino superior. A Explorística visa transmitir conceitos fundamentais de Estatística e Probabilidades de forma prática e experimental, através de 7 módulos que são geralmente apresentados em formato de estações interativas com materiais físicos (dados, caixas de amostragem, jogos) ou digitais (simuladores e ferramentas online).

Por exemplo, no módulo do Submarino, os participantes fazem uma exploração através de uma viagem de submarino num lago onde é preciso recolher exemplares de uma nova espécie de réptil predador que está a fazer desaparecer os peixes. Os participantes pesam, medem e identificam o sexo e a idade de cada um dos espécimes que capturam (e que depois devolvem à água). Após essa recolha de dados, é explicado como se elabora um diagrama de extremos e quartis. Por último, com base na informação de que já se dispõe, obtida em expedições anteriores que permitiram identificar a existência de 3 habitats diferentes no lago, os alunos são desafiados a descobrir em qual desses habitats estiveram a recolher espécimes, numa lógica de estimação com base na verosimilhança.

Figura 2

Explorística: Imagem do jogo do Submarino em que através de um capacete de realidade virtual, ou consola, os participantes recolhem uma amostra de répteis no fundo de um lago. Fonte: Exploristica

O módulo do Dr. Odd, inspirado no jogo Cluedo, é um outro exemplo de como o pensamento computacional e a literacia estatística podem ser promovidos de forma integrada, lúdica e educativa. Neste módulo, os alunos enfrentam um problema complexo - descobrir quem é o criminoso e qual a arma utilizada - a partir de um conjunto de probabilidades conhecidas. A resolução do problema exige a decomposição da tarefa em partes mais simples: identificar os suspeitos, listar as possíveis armas, analisar as probabilidades associadas e calcular, com base nesses dados, qual a combinação mais provável. Esta decomposição é uma competência fundamental do pensamento computacional e uma estratégia cognitiva essencial para abordar problemas estatísticos de forma estruturada.

Além disso, o módulo promove diretamente a literacia estatística ao exigir o uso de conceitos como probabilidades condicionadas, interseções de eventos e diagramas de Venn para representar e compreender relações entre variáveis. Ao resolverem o desafio, os alunos aplicam também a abstração e a modelação estatística, concentrando-se nas variáveis essenciais (arma, suspeito, probabilidade) e deixando de lado detalhes menos relevantes - o que corresponde a um processo de abstração típico do pensamento computacional.

A interação com o jogo digital reforça estas competências, pois implica a compreensão implícita de algoritmos: há entradas (dados sobre as probabilidades), um processo (cálculo e comparação de probabilidades) e uma saída (a identificação do suspeito mais provável). Mesmo sem escreverem código, os alunos exercitam a lógica e a estruturação de processos - capacidades centrais no pensamento computacional. Por fim, o módulo culmina na tomada de uma decisão informada com

base em dados e em raciocínio probabilístico, promovendo o pensamento crítico e a capacidade de justificar conclusões estatisticamente fundamentadas.

Medir**:** *COMPUTE e PULSAR*

É muito importante medirmos o pensamento computacional e a sua importância no contexto do ensino da Estatística. O PULSAR (Programming for the Use and Learning of Statistics) é um inquérito internacional que está a ser concebido para medir a integração do pensamento computacional no ensino da matemática e da estatística, com especial foco em como estas competências são promovidas através do uso de software estatístico e linguagens de programação. Direcionado a professores do ensino básico e secundário, o PULSAR pretende recolher dados em múltiplos contextos culturais e geográficos, incluindo Portugal, Espanha, países da Europa, América Latina (com destaque para o Brasil), Estados Unidos, Paquistão, Nova Zelândia, entre outros.

O objetivo central do PULSAR é compreender como o raciocínio estatístico está a ser desenvolvido nas salas de aula através de ferramentas digitais. Especificamente, pretende-se investigar:

- Que tipos de software estatístico (como GeoGebra, Excel, R, Python, SPSS, etc.) estão a ser utilizados no ensino da estatística;
- De que forma os docentes recorrem a linguagens de programação para apoiar a análise de dados, visualização, simulação ou modelação estatística;
- Como estas práticas estão alinhadas com o desenvolvimento do pensamento computacional, incluindo decomposição, reconhecimento de padrões, abstração, modelação algorítmica e automação.

Este inquérito está fortemente alinhado com os princípios do projeto COMPUTE (Computational Thinking in Statistics Education), promovido pela IASE – International Association for Statistical Education, nomeadamente com os objetivos identificados no COMPUTE: Introducing Computational Thinking into Statistics Education (Legacy et al., 2022). O COMPUTE foi concebido para avaliar três domínios principais: práticas de dados, práticas de simulação e práticas de codificação. Através da análise das respostas de 236 professores, os autores identificaram que a estrutura latente das respostas é melhor representada por um modelo multidimensional correlacionado. Os resultados indicam que, embora haja uma ênfase consistente nas práticas de dados e simulação, a ênfase nas práticas de codificação varia significativamente entre diferentes contextos institucionais. Este estudo destaca a importância de integrar práticas computacionais no currículo de estatística introdutória, refletindo as necessidades da era digital e preparando os alunos para os desafios do mundo real.

Tal como o projeto COMPUTE defende a necessidade de integrar o pensamento computacional no ensino da estatística de forma estruturada e curricular, o PULSAR pretende recolher evidência empírica sobre a forma como esta integração já está (ou não) a acontecer nos diversos sistemas educativos, não se focando apenas no ensino secundário (K12) norte americano. Além disso, o PULSAR quer refletir a diversidade de contextos culturais e curriculares, reconhecendo que as estratégias de ensino e os recursos disponíveis variam substancialmente entre regiões e cultura, e que estas variações influenciam tanto o acesso às ferramentas digitais como a valorização curricular do pensamento computacional. Ao captar esta diversidade, o inquérito poderá fornecer recomendações

diferenciadas e apoiar o desenho de linhas orientadoras internacionais para o ensino integrado da estatística e da computação.

CONCLUSÕES E CAMINHOS FUTUROS

A integração do pensamento computacional no ensino da matemática e da estatística oferece estratégias que ampliam a compreensão crítica de dados e algoritmos, essenciais no mundo atual. A abordagem é inspirada em teorias como o construtivismo de Piaget e a aprendizagem situada, defendendo o uso de ferramentas digitais em contextos significativos onde a literacia de dados se transforma num instrumento de empoderamento e leitura crítica do mundo. A aprendizagem torna-se mais significativa quando se baseia na integração entre novos conhecimentos e experiências prévias.

A utilização de linguagens de programação no ensino da estatística oferece vantagens significativas ao nível pedagógico, cognitivo e social. Em primeiro lugar, permite que os alunos compreendam de forma mais profunda os processos estatísticos, ao programarem passo a passo as operações e algoritmos que sustentam medidas como média, variância ou regressão, promovendo assim uma aprendizagem conceitual mais sólida (Garfield e Ben-Zvi, 2009, Theobold e Hancock, 2019, Fergusson e Pfannkuch, 2022). Além disso, facilita a exploração interativa de dados reais, permitindo a realização de simulações, a visualização dinâmica de padrões e a experimentação de hipóteses em contextos autênticos, o que torna a aprendizagem mais significativa (Ausubel, 1968) e situada (Lave e Wenger, 1991).

A programação também estimula o pensamento computacional, entendido como a capacidade de decompor problemas, reconhecer padrões, abstrair e construir algoritmos (Wing, 2006), competências que se articulam fortemente com o raciocínio estatístico. Por outro lado, ao automatizar tarefas e promover a replicação de análises, as linguagens de programação fomentam práticas fundamentais da literacia de dados e da ciência aberta, como a transparência e a reprodutibilidade (Legacy et al., 2022).

Num plano mais amplo, o uso de programação aproxima o ensino da estatística das exigências do mundo contemporâneo, preparando os alunos para o mercado de trabalho em áreas como ciência de dados, saúde pública ou economia, e reforçando o seu papel como cidadãos críticos e informados (Skovsmose, 1994; Weiland e Sundrani, 2022). Finalmente, ao possibilitar a articulação com outras áreas do saber, as linguagens de programação abrem caminho para abordagens interdisciplinares que valorizam a estatística como uma ferramenta para compreender e transformar o mundo.

Por seu lado, o uso de dados públicos promove também a consciência ética e crítica, em linha com as propostas de uma educação estatística crítica. Existe um movimento crescente e estruturado para integrar o pensamento computacional no ensino da estatística, tanto através de iniciativas educativas já existentes, como a Explorística, a European Statistical Competition (ESC) e a International Poster Competition (IPC), como também por meio de investigação empírica como a que suporta o instrumento COMPUTE, desenvolvido por Legacy et al. (2022) e o projeto PULSAR. Estes instrumentos avaliam até que ponto os docentes de estatística introdutória promovem práticas computacionais, nomeadamente no uso de dados, simulação e codificação, fornecendo uma base rigorosa para diagnosticar e orientar práticas pedagógicas.

Os caminhos futuros sugerem um foco especial nas seguintes áreas:

- Desenvolvimento curricular integrado, onde o pensamento estatístico e computacional são ensinados em conjunto, desde os níveis mais iniciais.
- Formação contínua de professores focada em práticas computacionais aplicadas à estatística e desenvolvimento de competências em linguagens de programação como R e Python.

- Criação de recursos pedagógicos abertos e interativos, adaptados a diferentes níveis de literacia digital.
- Expansão da investigação comparativa internacional, para perceber como fatores culturais, institucionais e tecnológicos influenciam a integração do pensamento computacional no ensino da estatística.
- Avaliação do impacto destas práticas na aprendizagem dos alunos, tanto em termos cognitivos como de preparação para a cidadania baseada em dados.

Este conjunto de iniciativas aponta para uma nova fase na educação estatística, mais conectada com os desafios da era digital e centrada na formação de cidadãos críticos, capazes de pensar e de decidir corretamente para um futuro melhor.

Referencias

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. Holt, Rinehart and Winston.

Campos, P., (2016) The Use of Microdata Versus Aggregated Data in Teaching And Learning Migration Statistics, In J. Engel (Ed.), *Promoting understanding of statistics about society. Proceedings of the Roundtable Conference of the International Association of Statistics Education.* IASE.

Fergusson, A., y Pfannkuch, M. (2022). Introducing high school statistics teachers to predictive modelling and APIs using code-driven tools. *Statistics Education Research Journal*, *21*(2), Article 8. https://doi.org/10.52041/serj.v21i2.49

Freire, P. (1972). *Pedagogy of the oppressed* [M. B. Ramos, Trans.]. Herder and Herder.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Springer.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Garfielld, J., y Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, *31*(3), 72-77. https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.2009.00363.x

Horton, N. J., y Hardin, J. S. (2021). Integrating Computing in the Statistics and Data Science Curriculum: Creative Structures, Novel Skills and Habits, and Ways to Teach Computational Thinking. *Journal of Statistics and Data Science Education*, *29*(sup1), S1-S3. https://doi.org/10.1080/10691898.2020.1870416

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Legacy, C. A., Zieffler, A., Fry, E. B., y Le, L. (2022). COMPUTES: Development of an instrument to measure introductory statistics instructors' emphasis on computational practices. *Statistics Education Research Journal*, *21*(1), Article 7. https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.63

Piaget, J. (1972). Psychology and epistemology: Towards a theory of knowledge (Original work published 1970). Penguin Books.

Porciúncula, M. P. M. da S. (2022). *Letramento Multimídia Estatístico – LeME: Projetos de Aprendizagem Estatísticos na Educação Básica e Superior*. Appris.

Ridgway, J. (2022). Why Engage with Civic Statistics? In J. Ridgway (Ed.) *Statistics for empowerment and social engagement: Teaching Civic Statistics to develop informed citizens* (pp. 1-13). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_1

Rosling, H., Rosling, O., y Rosling Rönnlund, A. (2018). *Factfulness: Ten reasons we're wrong about the world – and why things are better than you think*. Flatiron Books.

Schield, M., (2004). Information literacy, statistical literacy and data literacy. *IASSIST Quarterly*, 2004(2/3), 6-11.

Schiller, A., y Engel, J. (2023). Implementing Civic Statistics in Mathematics Teacher Education. In J. Ridgway (Ed.) *Statistics for empowerment and social engagement: Teaching civic statistics to develop informed citizens.* https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_16

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Street, B. V. (1984). *Literacy in theory and practice*. Cambridge University Press.

Teixeira, S., Campos, P., y Trostianitser, A. (2023), Data Sets: Examples and Access for Civic Statistics. In J. Ridgway (Ed.). (2023). *Statistics for empowerment and social engagement: Teaching civic statistics to develop informed citizens.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8

Theobold, A., y Hancock, S. (2019). How environmental science graduate students acquire statistical computing skills. *Statistics Education Research Journal*, *18*(2), 68–85. https://doi.org/10.52041/serj.v18i2.141

Thomas, J. W. (2000). A review of research on project-based learning. The Autodesk Foundation, disponível em: https://tecfa.unige.ch/proj/eteach-net/Thomas_researchreview_PBL.pdf

Trostianitser, A Teixeira, S., y Campos, P. (2023), Lesson Plan Approaches: Tasks That Motivate Students to Think. In J. Ridgway, J. (Ed.). (2023). *Statistics for empowerment and social engagement: Teaching civic statistics to develop informed citizens.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8

Weiland, T., y Sundrani, A. (2022). Towards A Framework For Developing A Critical Statistical Literacy. In S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, & A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS11 2022).* International Association for Statistical Education.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

RETOS DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN PROYECTOS STE(A)M DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Challenges of research about stochastic sense in STE(A)M projects in Secondary Education

Berciano, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Resumen

Se presenta una reflexión sobre el estado actual de la investigación sobre el sentido estocástico en la Educación Secundaria, y en concreto, en contextos de aprendizaje STE(A)M. Para ello, en primer lugar, se muestra la importancia de los contextos o proyectos STE(A)M en la Educación actual; en segundo lugar, una visión holística de qué se entiende por sentido estocástico, especialmente en Educación Secundaria; y, en tercer lugar, se describen algunas de las corrientes de investigación en esta etapa educativa sobre sentido estocástico, en particular, se analiza la realidad de la inserción de dicho sentido en algunos ejemplos de proyectos STE(A)M implementados en el aula de Educación Secundaria. Finalmente, se plantean retos para avanzar en una educación de calidad que favorezca la adquisición del sentido estocástico en Educación Secundaria en contextos o proyectos STE(A)M.

Palabras clave: STE(A)M, sentido estocástico, educación secundaria, actitud del profesorado de secundaria.

Abstract

This paper presents a reflection on the current state of research on stochastic sense in Secondary Education, and specifically, in STE(A)M learning contexts. To this end, it firstly shows the importance of STE(A)M contexts or projects in current education; secondly, it provides a holistic view of what is meant by stochastic sense, especially in Secondary Education; and thirdly, it describes some of the research currents at this educational stage on stochastic sense; in particular, the reality of the inclusion of stochastic sense in some examples of STE(A)M projects implemented in the Secondary Education classroom is analysed. Finally, it raises challenges for advancing quality education that favours the acquisition of stochastic sense in Secondary Education in STE(A)M contexts or projects.

Keywords: *STE(A)M, stochastic sense, secondary education, secondary school teachers' attitudes.*

EDUCACIÓN STE(A)M

El término STEM (de su siglas en inglés Science, Technology, Engineering, Mathematics) surge a mediados del siglo XX para referirse a los cuatros ámbitos de conocimiento científico-tecnológicos antes mencionados, debido a una demanda económica global asociada a trabajos más técnicos, basados en desarrollos tecnológicos y, por tanto, la necesidad de impulsar las carreras tecno-científicas se convierte en prioritaria, donde la integración del conocimiento disciplinar de todas ellas es primordial (Kelley y Knowles, 2016). En este sentido la National Science Foundation (NSF) establece como uno de sus objetivos el de lograr "una ciudadanía bien formada y diversificada

Berciano, A. (2025). Retos de la investigación sobre sentido estocástico en proyectos STE(A)M de educación secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

laboralmente en estos ámbitos" (NSF, s.f.), y, por ende, plantea la necesidad de realizar un cambio en el enfoque educativo a uno que responda a estos requisitos, fomentando la Educación STEM.

Posteriormente, el término STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics), acuñado por la NSF en los años noventa del siglo XX, se debe a la evolución del acrónimo STEM, como resultado de la integración de las artes a la educación STEM, con el fin de, entre otros, romper con la división entre artes y ciencias; avalada por investigaciones que concluían que las actividades de humanidades y artes fomentan la creatividad, la resolución de problemas y las competencias de análisis (Sousa y Pilecki, 2013). Y, desde entonces, desde distintos ámbitos políticos y educativos, en las últimas décadas, el acrónimo STEAM ha sido promovido, adquiriendo cada vez más relevancia e impregnando distintos ámbitos de la sociedad actual, con el fin de poner en valor, tanto a nivel laboral como educativo, una cultura científico-tecnológica más amplia en la población.

Así, distintos países han definido e implementado estrategias políticas que abordaran con éxito los retos de una sociedad cada vez más científico-tecnológica y, paulatinamente, pudieran establecer líneas de acción educativas unificadas. A nivel europeo, esta tendencia ha dado lugar a la creación de una red conformada por 49 entidades, EU STEM Coalition (https://www.stemcoalition.eu), con el objetivo de mejorar la educación STEM europea y "promover nuevas formas de impartir educación y encontrar y compartir soluciones basadas en pruebas para el desajuste de competencias en STEM".

A nivel estatal, el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deporte (sf) tiene una estrategia STEAM en la que plantea tanto la integración de la educación STEAM en las aulas, como la superación de la brecha de género en puestos laborales asociados a carreras científico-tecnológicas. Igualmente, en las distintas comunidades autónomas se han diseñado e implementado progresivamente estrategias STEAM específicas a cada una de estas regiones, el primer plan fue creado en 2017 (STEMCat plan), y en todos ellos se hace hincapié en la necesidad del enfoque STEAM en la Educación (Lupión-Cobos et al., 2023).

Estas estrategias sociopolíticas se ven plasmadas en los currículos educativos actuales, tanto en los modos de adquirir las competencias clave como en el planteamiento de estas, por medio de los objetivos de etapa. Así, para el caso de Educación Secundaria, con la implantación del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, encontramos un primer cambio asociado al tipo de competencia que el alumnado debe adquirir, pues, en el currículo anterior se debía desarrollar la competencia matemática, como competencia básica o fundamental de etapa, mientras que actualmente está integrada en la competencia clave *competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería*, *competencia STEM*, como:

> La competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (competencia STEM por sus siglas en inglés) entraña la comprensión del mundo utilizando los métodos científicos, el pensamiento y representación matemáticos, la tecnología y los métodos de la ingeniería para transformar el entorno de forma comprometida, responsable y sostenible.
>
> La competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos. […]" (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 28).

Dicha competencia viene descrita por los descriptores de cierre de etapa, en el que el alumnado debe haber adquirido las habilidades necesarias para ser capaz de… (ver Tabla 1).

Además, las distintas materias que conforman el currículo deben aportar y ayudar al desarrollo de las competencias clave, por medio de sus distintas competencias específicas. Para el caso de la competencia STEM, la matemática juega un papel especial, la cual tiene diez competencias específicas (CE) asociadas, que, a su vez, están agrupadas en bloques competenciales. Así, tenemos (ver Tabla 2).

Tabla 1

Descriptores de la competencia STEM al acabar Educación Secundaria (pp. 28-29)

Código	Descripción
STEM1	Utilizar métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y seleccionar y emplear diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
STEM2	Utilizar el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
STEM3	Plantear y desarrollar proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.
STEM4	Interpretar y transmitir los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
STEM5	Emprender acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplicar principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.

Tabla 2

Bloques competenciales de la matemática en Educación Secundaria (pp.142-145)

Bloques competenciales	CE	Descripción de la CE	Descriptores STEM
Resolución de problemas	CE1	Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	STEM1 STEM2 STEM3 STEM4
	CE2	Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	STEM1 STEM2
Razonamiento y prueba	CE3	Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.	STEM1 STEM2

	CE4	Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.	STEM1 STEM2 STEM3
Conexiones	CE5	Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.	STEM1 STEM3
	CE6	Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.	STEM1 STEM2
Comunicación y representación	CE7	Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	STEM3
	CE8	Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.	STEM2 STEM4
Destrezas socioafectivas	CE9	Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.	STEM5
	CE10	Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.	STEM3

Un análisis del posible origen de la definición de estos bloques competenciales nos lleva a plantear una retrospectiva histórica y tener que hablar de los estándares de procesos matemáticos, definidos por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) como el medio para poder trabajar de modo significativo los estándares de contenidos matemáticos en todas las etapas educativas (NCTM, 2003).

En concreto, la NCTM define cinco estándares de procesos matemáticos y, si analizamos estos, encontramos un paralelismo entre la mayoría de los bloques competenciales y los estándares de procesos matemáticos (EPM), como se muestra en la Tabla 3:

Tabla 3

Bloques competenciales y su relación con los Estándares de Procesos Matemáticos (EPM)

Bloque competencial	EPM	Características de los EPM
Resolución de problemas	Resolución de problemas	1) Construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas; 2) Resolver problemas derivados de las matemáticas y en otros contextos; 3) Aplicar y adaptar una variedad de estrategias adecuadas para la resolución de problemas; 4) Supervisar y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos.
Razonamiento y prueba	Razonamiento y prueba	1) Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; 2) Formular e investigar conjeturas matemáticas; 3) Desarrollar y evaluar argumentos y pruebas; 4) Seleccionar y utilizar diversos tipos de razonamiento y métodos de demostración.
Conexiones	Conexiones	1) Reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas; 2) Comprender cómo se relacionan y organizan las ideas matemáticas en un todo coherente; 3) Reconocer y aplicar ideas matemáticas en contextos no matemáticos.
Comunicación y representación	Comunicación	1) Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación; 2) Comunicar su pensamiento matemático de forma coherente y clara a compañeros, profesores y otras personas; 3) Analizar y evaluar el pensamiento y las estrategias matemáticas de los demás; 4) Utilizar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.
	Representación	1) Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas; 2) Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; Utilizar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.
Destrezas socioafectivas	-	

Además de los bloques competenciales, tenemos que las competencias específicas de la matemática deben ser adquiridas por medio de la movilización de los saberes básicos, que, a su vez, están estructurados entorno a los distintos sentidos matemáticos: sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial, sentido algebraico, sentido socioafectivo y *sentido estocástico*.

Por todo ello, vemos que para poder desarrollar con éxito la competencia STEM están involucradas la matemática (con todo lo que esto implica: sentidos matemáticos, bloques competenciales, competencias específicas) y otras materias, entre ellas, las de ámbitos científico-tecnológicos con un peso relativo alto en el desarrollo de esta competencia. Igualmente, entre los objetivos de la etapa encontramos que el alumnado debe desarrollar destrezas de trabajo en equipo, rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, desarrollar destrezas tecnológicas básicas y concebir el conocimiento científico como un saber integrado [...] (pp. 8-9); aspectos claramente vinculados con la estrategia STE(A)M definida por Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deporte (s.f).

SENTIDO ESTOCÁSTICO

Centrando nuestro interés en el sentido estocástico, como acabamos de mencionar, este aparece en el currículo actual de Educación Secundaria como uno de los sentidos matemáticos necesarios para el desarrollo de la competencia STEM.

> El sentido estocástico comprende el análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una amplia variedad de situaciones cotidianas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 142).

A su vez, el sentido estocástico se desglosa en tres grandes apartados (ver Tabla 4):

Tabla 4

Componentes del sentido estocástico en Educación Secundaria (1-3 cursos, pp. 149-150)

Apartado	Componentes del sentido estocástico (cursos 1-3)
Organización y análisis de datos	− Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales.
	− Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales.
	− Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones, …) y elección del más adecuado.
	− Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales.
	− Variabilidad: interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales.
	− Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.
Incertidumbre	− Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación.
	− Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada.
	− Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.
Inferencia	− Formulación de preguntas adecuadas que permitan conocer las características de interés de una población.
	− Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales.
	− Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.

En esta descripción vemos cómo hay tres dimensiones (denominados apartados en el currículo): la primera, organización y análisis de datos, relacionada en mayor medida con el tratamiento de datos de modo descriptivo, esto es, lo habitualmente entendido como estadística descriptiva; las dos siguientes dimensiones, incertidumbre e inferencia, se relacionan directamente con la probabilidad y la estadística inferencial; por lo que la inclusión de las tres dimensiones del sentido estocástico plantea

y requiere de un conocimiento profundo de cada una de ellas por separado y, a su vez, de los puentes de conexión entre todas ellas.

Este planteamiento, aunque novedoso en el currículo educativo actual, no es ajeno a la realidad de la investigación en educación matemática; por lo que para poder entender cómo el currículo ha llegado a la definición de este sentido con sus tres dimensiones, veamos una pequeña evolución histórica de su tratamiento y un análisis de los marcos teóricos más relevantes que describen en qué consiste.

Evolución histórica del sentido estocástico en la Educación

En 1989, el NCTM publica el libro "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics"; documento en el que se explicita que uno de los estándares de contenidos que debe trabajarse desde las primeras edades, como parte fundamental de la matemática, es la estadística y la probabilidad (Vásquez, 2022). Desde entonces son varios los documentos e iniciativas internacionales que han puesto de relieve la necesidad de la alfabetización estocástica en la ciudadanía, con el fin de que esta tenga una formación integral.

En 2010, la Asamblea General de las Naciones Unidas, en su reunión del 3 de junio decidió nombrar el 10 de octubre de 2010 el primer Día Mundial de la Estadística (INE, s.f.). El tema general de ese día fue la Celebración de los numerosos logros de las estadísticas oficiales, y pretendía, entre otros, poner en valor la relevancia y utilidad de la estadística en el desarrollo social y económico. Desde entonces, dicha celebración se lleva a cabo cada 5 años con el fin de difundir la relevancia de la estadística y de la probabilidad y de poner en valor la necesidad de fomentar una alfabetización estadística en la ciudadana. Además, esta alfabetización, estadística y probabilista, se ha ido incorporando en distintas pruebas internacionales estandarizadas relacionadas con la medición del desarrollo competencial matemático de estudiantes de distintas edades.

A modo de ejemplo, la prueba PISA, conocida por evaluar el desempeño competencial del alumnado de 15 años, plantea desde sus comienzos tareas relacionadas con la estadística y de la probabilidad. El marco teórico de evaluación de la competencia matemática de 2003 incorpora cuatro ideas principales para "adaptarse a los requisitos del desarrollo histórico, la cobertura del área y la plasmación de las líneas principales del currículum escolar" (OCDE, 2003, p.37) y, entre estas ideas, se encuentra la incertidumbre. Esta inclusión está en línea con las directrices de investigaciones internacionales, en las que se pone de manifiesto que la ciudadanía necesita estar formada para saber interpretar y poder evaluar conclusiones extraídas de situaciones donde la incertidumbre está presente (Gal, 2005). Posteriormente, la OCDE (2022) incorpora la probabilidad como saber básico imprescindible en el marco teórico de evaluación de la competencia matemática en las pruebas PISA y, esta realidad, como ya hemos visto, se ha visto transferida a los documentos curriculares actuales por medio del sentido estocástico.

Marcos teóricos sobre sentido estocástico en investigación

Como hemos visto en el apartado anterior, el sentido estocástico debe ser trabajado desde una visión holística, donde además de los estándares de procesos matemáticos asociados (bloques competenciales) a dicho sentido, se debe trabajar la componente socioafectiva del alumnado; todos ellos en cada una de sus tres dimensiones: organización y tratamiento de datos, incertidumbre e inferencia. Este planteamiento, como veremos a continuación, se alinea con los distintos marcos teóricos descritos en los últimos años sobre qué dimensiones involucra el sentido estocástico.

Un primer acercamiento al análisis de los marcos teóricos que definen el sentido estocástico nos obliga a aclarar que, en primer lugar, encontramos planteamientos separados para el sentido estadístico y el sentido probabilístico en los trabajos de investigación internacionales.

Uno de los primeros marcos de referencia para entender en qué consiste el sentido estocástico es el trabajo de Wild y Pfannkuch (1999) sobre pensamiento estadístico. En dicho artículo plantean el

razonamiento estadístico como el pensamiento clave en la resolución de problemas que involucren aplicar la estadística en su resolución. Así, el razonamiento estadístico es la unión de cuatro dimensiones: i) el ciclo de investigación PPDAC (ver Figura 1), ii) los modos fundamentales de razonamiento estadístico; iii) el ciclo de interrogación y iv) la actitud.

Figura 1

Ciclo de investigación PPDAC de Wild y Pfannkuch (1999, p. 226)

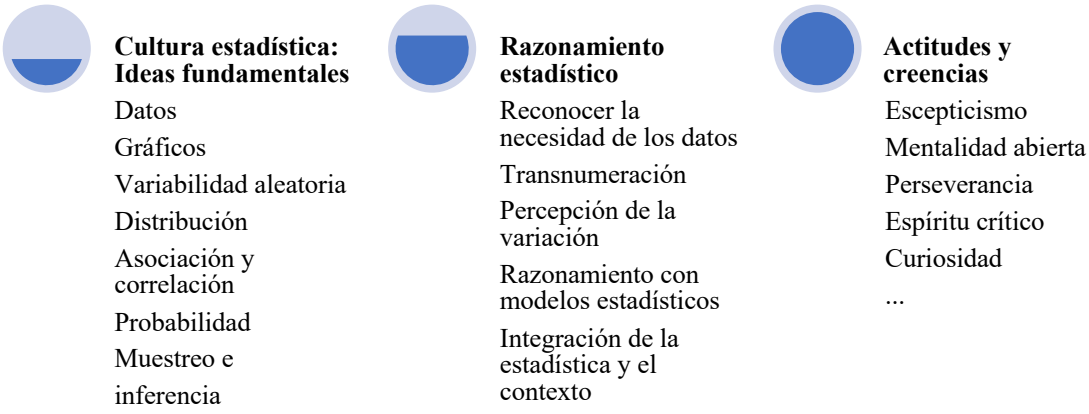
Por otro lado, Borovcnik (2011) aborda la descripción del sentido probabilístico analizando qué aspectos involucra este sentido en la toma de decisiones, concluyendo que para que una persona pueda decidir de modo correcto probabilísticamente debe: a) encontrar un equilibrio entre elementos psicológicos y formales de la probabilidad cuando se utiliza una escala personal de probabilidad; b) comprender que no hay modo de garantizar el éxito en situaciones aleatorias; c) discriminar entre aleatoriedad y causalidad; y d) diferenciar entre reflexionar sobre un problema y tomar una decisión. Además, la adquisición de este sentido también requiere que la persona entienda: i) la influencia de un juicio previo de probabilidad, ii) la asimetría de probabilidades condicionadas, iii) el carácter teórico de independencia, iv) el problema asociado a las probabilidades pequeñas, y v) la correlación como dependencia probabilística (Borovcnik (2011), citado en Batanero y Borovcnik, 2016, p. 20).

Posteriormente, se han hecho avances en la definición e interpretación de qué es el sentido estocástico y cuáles son las dimensiones que lo componen, integrando componentes tanto asociadas al sentido estadístico como al sentido probabilístico.

Batanero et al. (2013) describen el sentido estocástico (en dicho trabajo, denominado sentido estadístico) como la unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico (definido por Wild y Pfannkuch, 1999); donde la primera "implica la comprensión adecuada de las ideas estadísticas fundamentales" y el segundo "permite tomar decisiones adecuadas o efectuar predicciones a partir de datos y en presencia de incertidumbre" (p. 8). Así, dicho sentido se conforma por medio de las siguientes tres dimensiones (ver Figura 2):

Figura 2

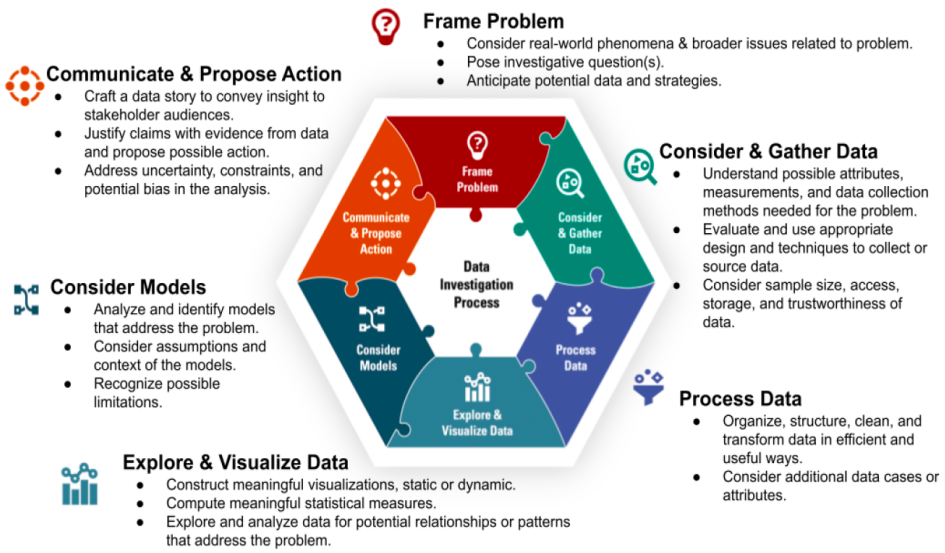
Dimensiones del sentido estocástico (Batanero et al., 2013)



En la misma línea, con el fin de describir qué tareas involucra el sentido estocástico, Lee et al. (2022) analizan la literatura publicada sobre los procesos de investigación estadística planteados para trabajar el sentido estocástico en Educación Secundaria, estableciendo un paralelismo con la ciencia de datos como campo de investigación y las prácticas de las personas que se dedican a dicha ciencia. Tras este estudio plantean un marco teórico de seis dimensiones para trabajar el sentido estocástico, donde cada de las dimensiones tiene definidas unas prácticas, para poder desarrollarla con éxito. En este caso, tenemos (ver Figura 3):

Figura 3

Dimensiones del sentido estocástico (Lee et al., 2022, p.11)



Así, una comparación de los dos últimos marcos teóricos aquí expuestos nos lleva a encontrar las mismas prácticas necesarias para poder desarrollar el sentido estocástico, ubicadas o categorizadas de distinto modo, aunque en el segundo modelo la importancia de la dimensión afectiva quede más implícita que en el modelo previo (Batanero et al., 2013).

En conclusión, teniendo en cuenta los marcos teóricos internacionales sobre lo que conlleva el sentido estocástico y el planteamiento del currículo actual de Educación Secundaria con la inclusión del sentido estocástico como sentido clave de la competencia matemática, es claro que, para conseguir un desarrollo del sentido estocástico del alumnado, tanto el tratamiento y organización de datos como la comprensión y aplicación correcta del significado de la inferencia e incertidumbre son cruciales; donde los conceptos básicos de probabilidad y su relación con los datos y su posible carácter de aleatoriedad cobran especial atención.

INVESTIGACIONES SOBRE SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Una vez vista la relevancia que tiene a nivel teórico el sentido estocástico en Educación Secundaria, en este apartado queremos mostrar la realidad del tratamiento de este en las aulas, por medio de las investigaciones realizadas. Como la definición de sentido estocástico es bastante reciente, lo primero que debemos tener en cuenta es que las investigaciones previas publicadas analizan la situación de la estadística o de la probabilidad, principalmente de modo independiente.

Con respecto la estadística, encontramos que, a pesar de estar en el currículo de Educación Secundaria, no tiene el tratamiento docente que le correspondería, resultando escaso e incluso llegando a no darse; debido a que el profesorado no se siente a gusto con su enseñanza (Gea et al., 2016, citado en Lorenzo Valentín y Juan Verdoy, 2017). Igualmente, la probabilidad no se trabaja en el aula de Educación Secundaria como se debería, dedicándole poco tiempo y, en parte, este hecho puede deberse a que el profesorado muestra cierta resistencia a enseñarla (Serradó et al., 2006). Además, Veloo y Chairhany (2013) afirman que la actitud del profesorado hacia la materia que debe impartirse es fundamental, debido a que una actitud positiva de éste se reflejará en el rendimiento del alumnado y la actitud del profesorado puede estar condicionada por la falta de conocimiento sobre una materia, creando inseguridad.

Así, en este apartado analizamos: 1) las investigaciones recientes sobre actitud del profesorado de secundaria hacia el sentido estocástico y su enseñanza; 2) las investigaciones sobre sentido estocástico en implementaciones de proyectos o contextos STE(A)M: panorama europeo; 3) las investigaciones sobre sentido estocástico en implementaciones de proyectos o contextos STE(A)M: panorama estatal.

Actitud del profesorado hacia el sentido estocástico y su enseñanza

Uno de los temas de interés de investigación relacionados con el sentido estocástico ha sido, y es, la actitud del profesorado hacia este y su enseñanza. Como ya hemos mencionado previamente, en este caso también encontramos trabajos que analizan la actitud hacia la estadística y su enseñanza, o la actitud hacia la probabilidad y su enseñanza.

Con respecto a las investigaciones realizadas, la mayoría de los estudios publicados se centran en analizar la actitud hacia la estadística y su enseñanza. Los primeros instrumentos de medición usados se remontan a las décadas de los ochenta y de los noventa del siglo XX: Statistics Attitude Survey (Roberts y Bilderback, 1980), Attitudes Toward Statistics (Wise, 1985), la Escala de Actitudes hacia la Estadística (Auzmendi, 1992) y el Survey of Attitudes Toward Statistics (Schau et al., 1995; Schau, 2003), el cual sigue siendo ampliamente utilizado internacionalmente (Persson et al., 2019; Rodríguez-Santero y Gil-Flores, 2019) y en este cuestionario se proponen cuatro componentes de la actitud: 1) afectivo (sentimientos positivos o negativos hacia la estadística), 2) competencia cognitiva (percepción de las capacidades propias sobre conocimientos y habilidades en estadística), 3) valor (utilidad, relevancia y valor conferido a la estadística en la vida personal y profesional) y 4) dificultad (percepción de facilidad o dificultad de la materia de estadística).

La mayoría de los estudios posteriores se centran en considerar como población objeto de estudio el profesorado de Educación Primaria (en formación o en activo), donde los resultados muestran una actitud neutra o moderadamente positiva hacia la estadística y su enseñanza (Estrada et al., 2004, Anasagasti et al., 2023). Además, en estos trabajos se tienen en cuenta distintas variables sociodemográficas que puedan dar una visión más clara de este comportamiento. Así, en Estrada et al. (2004) se analiza la importancia de la experiencia laboral, concluyendo que las actitudes hacia la estadística del profesorado en formación de Educación Primaria y en ejercicio tienen características muy similares, si bien encuentran una mayor puntuación media en el profesorado en ejercicio, aunque en ambos casos la actitud del profesorado es neutra con una ligera tendencia positiva. Respecto a la perspectiva de género, hay estudios que indican que, a pesar de contemplar pequeñas diferencias respecto a los componentes de la actitud o a la hora de analizar el proceso de aprendizaje (Anasagasti et al., 2023), en general, no hay diferencias significativas entre hombres y mujeres (Dauphinee et al., 1997; Estrada et al., 2004). Con respecto al conocimiento estadístico, Estrada et al. (2017) afirman que "El efecto mostrado de los conocimientos sobre las actitudes sugiere que la mejor preparación de los profesores es un requisito imprescindible si queremos mejorar sus actitudes" (p. 87).

Con respecto a investigaciones que abordan la actitud del profesorado de Educación Secundaria hacia la estadística y su enseñanza, Mills (2007) explora la actitud del profesorado de primaria y secundaria hacia la estadística con un cuestionario creado ad-hoc; con una muestra de 185 profesores de 34 centros distintos, 30 de educación primaria y 155 de Educación Secundaria y Bachillerato. Sus resultados ponen de manifiesto que la mayoría del profesorado tiene, en general, una actitud positiva sobre la estadística, pero señala que la elaboración y evaluación de inferencias y predicciones basadas en datos es lo más difícil de aplicar y que, para mejorar su conocimiento, necesita preparación y formación adicionales. Sin embargo, no encontramos trabajos que hayan usado alguno de los instrumentos antes mencionados y, en este sentido, Estrada, Batanero y Lancaster (2011) enfatizan la carencia de investigaciones que aborden la actitud del profesorado de Educación Secundaria hacia la estadística y su enseñanza.

Por otro lado, en los últimos años encontramos estudios centrados en analizar la actitud del profesorado hacia la probabilidad y su enseñanza. En este caso, el número de publicaciones todavía no es muy amplia y, además, la mayoría de las publicaciones están relacionadas con el profesorado en formación. Todas las investigaciones realizadas se basan en los trabajos de Estrada y Batanero (2015) y Estrada et al. (2018), en los que se describe el instrumento de medición de la actitud hacia la probabilidad y su enseñanza y las siete componentes asociadas a esta. Los trabajos posteriores son: 1) Estrada y Batanero (2020), con población objetivo el futuro profesorado de educación primaria, los resultados son que la actitud en general es positiva hacia la probabilidad y su enseñanza en las siete componentes del cuestionario; 2) Vásquez et al. (2019), con población objetivo futuras maestras de Educación Infantil (Chile), los resultados muestran una actitud levemente negativa, con media global inferior al valor medio esperado; 3) Ruz et al. (2023), con población objetivo futuro profesorado de matemáticas de Educación Secundaria en España y Chile. En este caso, la actitud es mayormente positiva hacia la probabilidad y su enseñanza.

También tenemos investigaciones que consideran como población diana el profesorado en activo. Entre estos últimos, el trabajo de Sukunza-Pagola y Berciano-Alcaraz (2025) analiza la actitud de profesorado de Educación Primaria en activo, con una muestra conformada por 252 participantes de la Comunidad Autónoma Vasca (CAV). Los resultados muestran que la actitud es moderadamente positiva y ligeramente mejor entre hombres. La formación parece ser un elemento clave para generar actitudes más positivas y las personas más experimentadas son las que muestran peores actitudes, con diferencias estadísticamente significativas de comportamiento. Para el caso de Educación Secundaria, Alvarado et al. (2018) usan una muestra mixta compuesta por 70 docentes en activo de matemáticas de la enseñanza media y 51 docentes en formación de Chile y los trabajos de Anasagasti et al. (2024a)

e Izagirre et al. (2025) consideran una muestra conformada por 185 docentes en activo de Educación Secundaria de la CAV.

En el primer estudio, la muestra analizada tiene una actitud positiva hacia la probabilidad y su enseñanza, aunque es ligeramente mejor entre el profesorado en activo, y mejora con la experiencia docente. En cuanto al sexo, el promedio de la actitud de los hombres es levemente superior al de las mujeres (Alvarado et al., 2018).

En el segundo estudio, la actitud del profesorado participante, en general, es moderadamente positiva. Con respecto a la perspectiva de género, no hay diferencias estadísticamente significativas, aunque la percepción del profesorado masculino es algo mejor que la del femenino. La formación previa del profesorado en matemáticas resulta ser una variable determinante; esto es, el profesorado con formación en matemáticas, física o económicas muestra actitudes positivas, mientras que el de ingeniería, ciencias experimentales y arquitectura presentan actitudes positivas leves. Además, las diferencias son estadísticamente significativas a favor de la formación matemática, la cual se asoció con un efecto medio en las actitudes del profesorado. En cuanto a la experiencia laboral, la antigüedad resulta tener un efecto moderado hacia la enseñanza de la probabilidad, incrementando la positividad de la percepción según incrementan los años de experiencia (Anasagasti et al. 2024a; Izagirre et al., 2025).

Investigaciones sobre sentido estocástico en Proyectos STE(A)M: panorama europeo

Volviendo al tema planteado en el título de este trabajo, el tratamiento del sentido estocástico en proyectos STE(A)M en Educación Secundaria, a pesar de no pretender hacer un estudio exhaustivo de los trabajos publicados a nivel internacional, sí consideramos relevante analizar los trabajos publicados a nivel europeo y dar una visión clara de las líneas actuales de investigación en ellos. En este sentido, hemos decidido ver cuáles son los trabajos que se presentan en el congreso bianual de la European Society for Research in Mathematics Education (ERME), conocido por su acrónimo CERME.

ERME incorporó el grupo TWG26 (Mathematics in the context of STEM Education) al CERME11, en 2019, como reconocimiento a su importancia en la Educación Matemática (Ubuz et al., 2019). Desde entonces, en el congreso bianual de dicha sociedad se han presentado investigaciones que dieran respuesta a distintos focos de interés, donde uno de ellos es, o debería ser, el sentido estocástico.

En la primera reunión del grupo temático, en el CERME 11, de los 14 trabajos presentados, sólo uno analiza la relevancia del sentido estocástico en contextos STEM. Oliveira, Henriques y Batista (2019) estudian la percepción del profesorado en formación inicial para trabajar la estadística con alumnado de octavo grado, en un contexto STEM que pretendía integrar la física y la estadística, concluyendo que el éxito de la integración STEM dependía de la percepción del profesorado y de su competencia en la elección de materiales adecuados en este contexto. Además, el profesorado en formación puso en valor el conocimiento profundo de la estadística como base para realizar procesos de pensamiento de alto nivel.

En la segunda reunión, en el CERME12, se presentaron y discutieron 14 comunicaciones y 4 pósteres (Ubuz et al., 2022). En este caso, ningún trabajo analiza la inclusión del sentido estocástico en contextos STEM, pero sí se menciona de nuevo la importancia del desarrollo profesional del profesorado. En este sentido, en Diego-Mantecón et al. (2022), se describe un proyecto Erasmus+ destinado a examinar y superar los principales problemas que obstaculizan la aplicación de la educación STEAM en la enseñanza en Educación Secundaria. Erbasan y Çakıroğlu (2022) analizan la experiencia del profesorado de Educación Secundaria en la enseñanza de las matemáticas dentro de un enfoque integrado STEM, destacando que el profesorado se queja de obstáculos (como las limitaciones de tiempo, la falta de experiencias de trabajo en equipo, la falta de conocimientos y

experiencia, la falta de material para las actividades, etc.) que dificultan el éxito de la enseñanza integrada.

En CERME13, se presentaron 17 trabajos (Ubuz et al., 2024). De nuevo, el desarrollo profesional del profesorado aparece como una de las líneas clave. Con respecto al sentido estocástico en Educación Secundaria, encontramos un único trabajo, Kurudirek y Arslan (2024), donde se analiza la importancia del nivel de razonamiento covariacional de 3 estudiantes voluntarios de séptimo grado, participantes en una implementación, demostrando que los niveles de razonamiento (co)variacional del alumnado son de vital importancia en la interpretación de conceptos científicos, así como en el uso de tablas y construcción de gráficos al razonar cuantitativamente.

Esto es, solo dos trabajos de un total de cuarenta y nueve (un 4% escaso) plantean analizar la inclusión o el desarrollo del sentido estocástico en proyectos STE(A)M y un análisis de los posibles porqués de este hecho.

Investigaciones sobre sentido estocástico en Proyectos STE(A)M: panorama estatal

Como ya hemos mencionado en la introducción, las estrategias educativas STE(A)M hace años que se han ido implementado gradualmente en España y, con ello, los proyectos STE(A)M han llegado a las aulas de distintos modos. En este sentido, estudios como el de Diego-Mantecón et al. (2021) plantean dudas acerca de si los proyectos interdisciplinarios son adecuados para explotar las matemáticas escolares de forma eficaz; por lo que en este apartado nos interesamos por saber cuál es el grado de evaluación realizado en estos proyectos, y, en especial, con respecto al sentido estocástico. Con el fin de ver el grado de evaluación de estos proyectos y qué aspectos eran los más relevantes, encontramos dos trabajos recientes que nos describen la realidad del análisis del sentido estocástico en estos casos.

En Berciano et al. (2024), se analizan los artículos publicados sobre proyectos STE(A)M implementados en el aula de Educación Primaria en España en las últimas 3 décadas (1993-2022), con un especial énfasis en ver qué evaluación competencial matemática y científica se lleva a cabo en ellos. Para ello, se realiza una revisión sistemática de la literatura, aplicando el protocolo PRISMA 2020 (Page et al., 2021), mostrando que de todos los artículos publicados que evalúan en algún sentido una implementación llevada a cabo en el aula de Educación Primaria (53 trabajos), solo siete de ellos ponen el foco en la competencia matemática desarrollada por el alumnado a lo largo de dicha implementación; y, en concreto, para el caso del sentido estocástico solo uno lo evalúa, centrándose exclusivamente en el modo que tiene el alumnado de organizar y representar los datos, por medio del uso de gráficos estadísticos.

En esta misma línea, en el trabajo en fase final de realización de Berciano et al. (preprint), se analizan los artículos publicados en Web of Science (WoS) y Scopus sobre de proyectos STE(A)M implementados en Educación Secundaria en España en las últimas 3 décadas (1995-2024), con el fin de saber el tipo de evaluación que se hace sobre las competencias matemática y científica. Para ello, se realiza una revisión sistemática de la literatura, aplicando el protocolo PRISMA 2020 (Page et al., 2021) y un análisis preliminar de los resultados muestra que solo 34 artículos evalúan distintos aspectos relacionados con las implementaciones de aula realizadas. De estos, 17 se centran en evaluar la competencia matemática, pero ninguno de ellos evalúa el desarrollo del sentido estocástico.

Esta realidad pone de relieve, de nuevo, la necesidad de ahondar en las bondades y dificultades del desarrollo de estos proyectos STE(A)M en las aulas de Educación Secundaria y la incidencia de estos en el desarrollo del sentido estocástico del alumnado.

Para poder ilustrar esta situación, acabamos esta sección con un ejemplo, extraído del trabajo de Berciano et al. (en prensa). En dicho trabajo, se analizan tres proyectos STE(A)M llevados a cabo en tres centros de Educación Secundaria públicos del País Vasco. El objetivo es ver, en primer lugar, qué sentido matemático ha sido incorporado en el diseño teórico y, en segundo lugar, cuáles son los

estándares de procesos matemáticos que emergen de las actividades desarrolladas en el aula. Para poder dar respuesta al primer objetivo, se procede con un análisis de contenido y una serie de entrevistas semiestructuras a los equipos docentes participantes en el diseño de los proyectos. Para responder el segundo objetivo, se analizan los trabajos escritos del alumnado. Los resultados indican que sólo uno de los proyectos incluye el sentido estocástico en su diseño teórico y, en este caso, durante la implementación, los estándares de procesos matemáticos que emergen asociados a este sentido son la comunicación y la representación (ver Tabla 5, proyecto 3).

Tabla 5

Sentidos matemáticos y estándares de procesos matemáticos asociados a 3 proyectos STE(A)M

	Sentido matemático en el diseño	Estándares de procesos matemáticos en la implementación
Proyecto 1	Sentido numérico	Resolución de problemas, conexión, razonamiento y prueba, comunicación y representación
Proyecto 2	Sentido espacial	Comunicación y representación
Proyecto 3	Sentido estocástico	Comunicación y representación

En concreto, el proyecto 3 se centró en entender el aparato circulatorio humano, más en concreto, la importancia de la presión arterial y su variabilidad. Para ello, en una de las actividades programadas, se analizó la presión arterial en reposo, después de realizar ejercicio físico o ingerir productos como la sal, refrescos azucarados o café. En grupos de 3-5 personas, las y los estudiantes recopilaron datos del pulso y la presión arterial tanto de forma manual como utilizando dispositivos de medición precisos, utilizando tablas estadísticas que después debían interpretar. Finalmente, prepararon pósteres en los que plasmar los resultados de los distintos experimentos.

De las 11 presentaciones entregadas por los distintos grupos, 9 exponían los resultados mediante tablas que mostraban las diferentes mediciones realizadas (ver Figura 4). Además, 2 de ellas también incluyeron gráficos estadísticos para mostrar dichos datos de manera visual (ver Figura 5).

Figura 4

Representaciones de los datos por medio de tablas

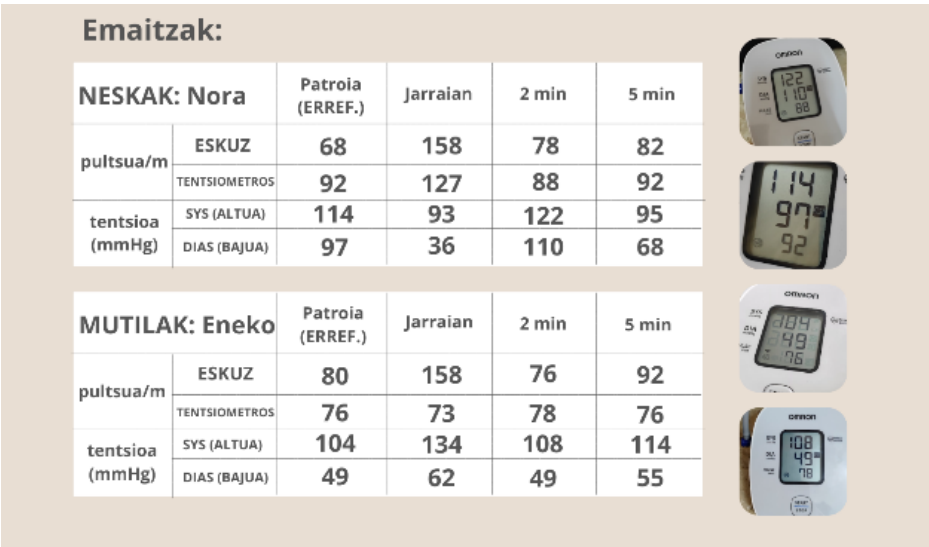
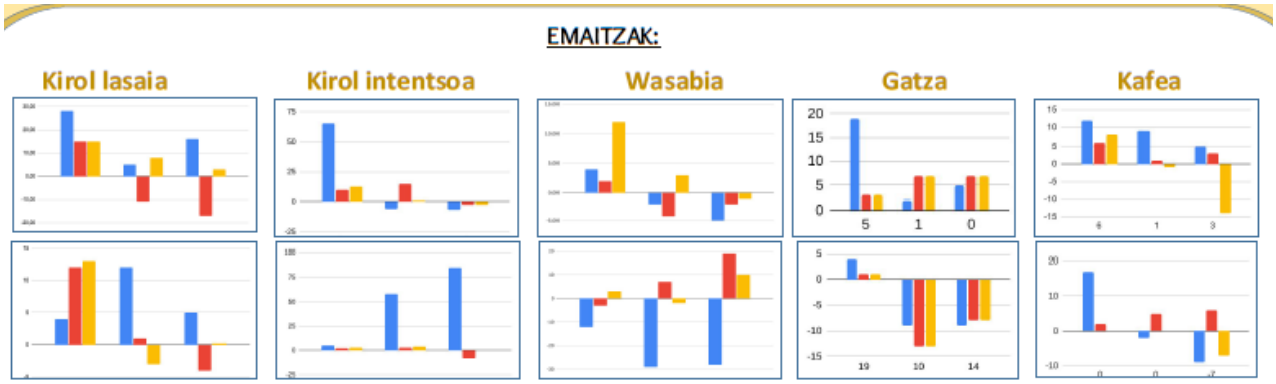


Figura 5

Representaciones de los datos gráficamente



Es claro que en este caso se plantea el tratamiento de datos por medio del uso de tablas y gráficos (Anasagasti et al., 2024b), tarea relacionada con la dimensión tratamiento y organización de datos del sentido estocástico.

Sin embargo, tal como indica el profesorado en las entrevistas, los contenidos estadísticos se trabajaron a partir de los conocimientos previos del alumnado o de manera intuitiva, sin establecer nexos explícitos con los contenidos recogidos dentro del currículo de matemáticas. Esto implicó que, en cuanto a una posible inferencia de los resultados obtenidos, la argumentación basada en datos estadísticos presentara limitaciones considerables, puesto que en prácticamente ningún caso se fue más allá de la interpretación de datos aislados; en línea con lo que indican Berciano et al. (2021) y poniendo de manifiesto que las dimensiones incertidumbre e inferencia no han sido tratadas.

REFLEXIONES FINALES SOBRE LA INVESTIGACIÓN ACERCA DEL SENTIDO ESTOCÁSTICO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Hace ya más de dos décadas, Batanero y Díaz (2004) indicaban que los proyectos de investigación eran herramientas que permitían mostrar la utilidad y aplicar los conocimientos estadísticos durante todo su proceso, e igualmente, estos podían ser usados para trabajar los conocimientos probabilísticos. Así, en cuanto al sentido estocástico, los proyectos STE(A)M podrían ser experiencias educativas con una potencialidad única para trabajar este sentido de modo significativo, pero la realidad parece mostrar que la situación actual del despliegue de estos proyectos todavía debe recorrer un largo camino para abordar con éxito este objetivo. Así, en esta parte final de este trabajo, se describe una serie de reflexiones finales sobre los retos que la investigación acerca del sentido estocástico en Educación Secundaria en contextos STE(A)M debe abordar y responder.

Creación y medición de estrategias de fomento de la actitud del profesorado hacia el sentido estocástico y su enseñanza

Tras el análisis de las investigaciones sobre la actitud del profesorado hacia el sentido estocástico y su enseñanza, una de las carencias que encontramos es la casi nula investigación sobre la actitud del profesorado de Educación Secundaria hacia la estadística y su enseñanza, preocupación ya mostrada por Estrada, et al., (2011), destacándola como una de las líneas de investigación prioritarias para el área de conocimiento. Igualmente, las investigaciones sobre la actitud del profesorado de Educación Secundaria hacia la probabilidad y su enseñanza son también muy escasas, por lo que se ve necesario medir de modo más holístico la actitud y los porqués de dicha actitud.

Otro de los hallazgos que se derivan de las investigaciones previas es la importancia de la formación disciplinar del profesorado, debido a que esta variable influye estadísticamente tanto en su actitud hacia la estadística y su enseñanza (educación primaria), como en su actitud hacia la probabilidad y

su enseñanza (educación primaria y educación secundaria). Así, otras de las líneas prioritarias del área sería ver qué tipos de formaciones muestran beneficios en la actitud del profesorado y cuáles con las características que las conforman.

A modo de ejemplo, encontramos trabajos previos en los que se ha pilotado una formación basada en el Aprendizaje Basado en Proyectos, con la inclusión del ciclo de investigación de Wild y Pfannkuch (1999), y han concluido que este tipo de formación ayuda a que el profesorado en formación de Educación Primaria mejore su actitud hacia la estadística y su enseñanza (Anasagasti et al. 2023), donde algunos de los principios más destacados de esta metodología son percibidos positivamente por el profesorado en formación, entre ellos, la introducción de contextos reales, la posibilidad de generar hipótesis propias y la dinamización de los equipos de trabajo (Anasagasti-Aguirre et al., 2022). Igualmente, Batanero y Borocknik (2016) detallan distintas actividades para trabajar el sentido estocástico en el aula de Educación Secundaria, donde se describen los descriptores principales asociados a cada actividad acordes a los marcos teóricos de Batanero et al. (2013) y Borovcnik (2011).

Por tanto, estas actividades podrían servir de base para la creación de módulos formativos que ayudaran al profesorado a mejorar su conocimiento didáctico y disciplinar y medir si estos repercuten en su mejora actitudinal.

De estas líneas de investigación y resultados previos con otros colectivos, se ve la necesidad de encontrar estrategias que fomenten la actitud del profesorado hacia el sentido estocástico y su enseñanza y medir en qué aspectos mejora, si es el caso. De este modo, el objetivo final sería que el profesorado adquiriera una mejor formación disciplinar y un mayor apoyo afectivo y, por ende, valorara en mayor medida el sentido estocástico y su enseñanza en Educación Secundaria (acorde con Estrada, Batanero y Lancaster, 2011).

Medición y fomento del grado de integración del sentido estocástico en los diseños de los proyectos STE(A)M y evaluación del desarrollo del sentido estocástico en sus implementaciones

Otra de las líneas de investigación que emerge de las investigaciones previas realizadas sobre proyectos STE(A)M es, por un lado, la necesidad de medir la integración de la competencia matemática (acorde con Diego-Mantecón et al., 2021) y, en especial, del sentido estocástico en los diseños teóricos de los proyectos STE(A)M que, posteriormente, son implementados en las aulas de Educación Secundaria. A priori, de las investigaciones analizadas, parece derivarse que no es uno de los sentidos matemáticos más elegidos en los diseños teóricos de los proyectos STE(A)M y, por tanto, un objetivo debería ser establecer un criterio de inclusión equilibrado inter-sentidos matemáticos. Por otro lado, se pone de manifiesto que la evaluación del desarrollo de la competencia matemática en las implementaciones de proyectos STE(A)M en Educación Secundaria todavía tiene un largo recorrido por hacer, y, como no podía ser de otro modo, el sentido estocástico no es ajeno a esta situación (Berciano et al., preprint). Además, un estudio de caso nos ha permitido ver cómo, en este caso, las tareas relacionadas con el sentido estocástico muestran un planteamiento muy intuitivo de éste, donde el alumnado debe tratar y comunicar datos (Anasagasti et al., 2024b) y, por tanto, en aquellos casos en los que se incluye el sentido estocástico en el diseño, habría que analizar cuál es el tratamiento real del sentido estocástico, con el fin plantear mejoras en su diseño.

Análisis de las variables que determinan e influyen en el tratamiento que hace el profesorado del sentido estocástico en proyectos STE(A)M en el aula de Educación Secundaria

Finalmente, otro de los grandes retos del área que ha emergido de las investigaciones previas sobre los Proyectos STE(A)M en Educación Secundaria está vinculado con la toma de decisiones del profesorado en la fase del diseño de los proyectos STE(A)M. Así, Erbasan y Çakıroğlu (2022) mencionan que el profesorado se queja de obstáculos que dificultan el éxito de la enseñanza integrada, entre ellas, limitación de tiempo, la falta de experiencias de trabajo en equipo, la falta de conocimientos y experiencia. Ortiz-Laso et al. (2024) afirman que, para que se dé un aprendizaje

integrado de la matemática en un diseño que involucra biología-geología-matemáticas, este requeriría de una formación continua del profesorado o una enseñanza conjunta en la que participaran docentes de distintas especialidades.

En esta línea, Ortuzar-Iragorri et al. (2024) profundizan en los retos, desafíos y dificultades que tiene el profesorado de secundaria de un centro de Educación Secundaria en las fases de diseño, implementación y evaluación de proyectos STEM, destacando que durante la fase de diseño del proyecto STEM, el profesorado considera difícil seleccionar y desplegar las tareas para equilibrar las áreas curriculares de conocimiento correspondientes y las dificultades están asociadas con la integración de las matemáticas en el proyecto STEM y la temporalidad de algunos docentes.

Así, estas primeras investigaciones nos plantean una dificultad añadida en el tratamiento del sentido estocástico en los proyectos STE(A)M de Educación Secundaria: el trabajo interdisciplinar del profesorado. Al fin y al cabo, el diseño recae en un equipo docente variado, con formaciones disciplinares muy diversas y, por tanto, la pregunta clave es analizar las variables que determinan e influyen en el tratamiento del sentido estocástico en el diseño de los proyectos por parte del profesorado implicado y si una formación disciplinar ayudaría en los diseños de estos proyectos.

Finalmente, se acaba este documento con un planteamiento positivista de los retos actuales que debe asumir el área de conocimiento con respecto a la investigación sobre el sentido estocástico en proyectos STE(A)M de Educación Secundaria. Es claro que los proyectos STE(A)M forman parte de la realidad actual de la Educación Secundaria y, en línea de Bogdan-Toma y García-Carmona (2021), vemos necesario "emprender investigaciones didácticas que arrojen pruebas y conclusiones de su implementación en las aulas, con vistas a determinar fortalezas, debilidades y aspectos a mejorar" (p. 75); por tanto, en estos párrafos finales hemos planteado algunas de las líneas de investigación que consideramos principales y que, a nuestro entender, el área de conocimiento debería establecer como prioritarias para dar respuestas claras a la problemática planteada y ayudar a que los diseños y despliegues de los proyectos STE(A)M sean lo más eficientes posibles para desarrollar de modo significativo el sentido estocástico del alumnado.

Agradecimientos

Trabajo parcialmente financiado por el grupo de investigación GIU21/031 de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (KOMATZI) y el proyecto de investigación Hezkuntza23/01 del Gobierno Vasco/Eusko Jaurlaritza.

Referencias

Alvarado, H., Andaur, G. y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: Un estudio exploratorio con profesores de matemáticas en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma, 39*(2), 36-64. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2018.p36-64.id700

Anasagasti-Aguirre, J., Berciano-Alcaraz, A. y Murillo-Ramón, J. (2022). Estadística por proyectos en el Grado de Educación Primaria: Un estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(1), 125-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3235

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. (2023). A comparison of the effects of different methodologies on the statistics learning profiles of prospective primary education teachers from a gender perspective. *Journal on Mathematics Education, 14*(4), 741-756. http://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp741-756

Anasagasti, J., Izagirre, A. y Berciano, A. (2024a). Actitud hacia la probabilidad y su enseñanza del profesorado de Educación Secundaria, *Educación Matemática, 36*(3), 143-172, https://doi.org/10.24844/EM3603.06

Anasagasti, J. Landa, J. y Berciano, A. (2024b). Educación estadística en proyectos STEAM: un estudio de casos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 551). SEIEM.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Características y medición. Ediciones Mensajero.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Brill. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), Aspectos didácticos de las matemáticas (pp. 125-164). ICE.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18. https://scpmluisbalbuena.org/revista_numeros/083/

Berciano, A., Anasagasti, J., Landa, J. (2025, en prensa). Presence of mathematical processes in STEAM high school projects: a case study. En M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, y M. Gaidoschik (Eds.), Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14). Free University Bozen-Bolzano and ERME.

Berciano, A., Anasagasti, J. y Zamalloa, T. (2021). Sentido estadístico en la formación de las y los estudiantes del Grado de Educación Infantil. Una aproximación desde un contexto de aprendizaje STEAM. *PNA, 15*(4), 289-309. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22510

Berciano, A., Uskola, A. y Zamalloa, T. (2024). Evaluation of Mathematical and Scientific Competences in Primary Education STEAM Projects in Spain: A Systematic Review. *Education Sciences, 14*(12), 1349. https://doi.org/10.3390/educsci14121349

Berciano, A., Uskola, A. y Zamalloa, T. (preprint). Evaluation of Mathematical and Scientific Competences in Secondary Education STEAM Projects in Spain: A Systematic Review.

Bogdan-Tomá, R. y García-Carmona, A. (2021) «De STEM nos gusta todo menos STEM». Análisis crítico de una tendencia educativa de moda. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 65-80. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3093

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. In C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 71–83). New York, NY: Springer.

Dauphinee, T., Schau C. y Stevens, J. (1997). Survey of attitudes toward statistics: Factor structure and factorial invariance for women and men. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 4*(2), 129-141. https://doi.org/10.1080/10705519709540066

Diego-Mantecón, J-M., Ortiz-Laso, Z., Diamantidis, D., Kynigos, C. (2022). Toward a STEAM professional development program to exploit school mathematics. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 4579-4580). Free University Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03745490v1

Diego-Mantecón, JM., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. y Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1137–1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

Erbasan, E., Çakıroğlu, E. (2022). Investigating middle school mathematics teachers' views on innovative learning activities. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, (pp. 4589-4596), Free University Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03745372

Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). SEIEM.

Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' Attitudes towards Probability and its Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(1), em0559. https://doi.org/10.29333/iejme/5941

Estrada, A., Batanero, C. y Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics,* (pp. 313-332). Springer.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 263-274. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3888

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2017). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado. *Tarbiya, Revista de investigación e innovación educativa*, *38*, 79-90. https://revistas.uam.es/tarbiya/article/view/7201

Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teacher's attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163- 174), https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J.A. y Arteaga, P. (2016). Interpretación de resúmenes estadísticos por futuros profesores de educación secundaria. *Redimat, 5*(2), 135-157, 2016. https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1902

Instituto Nacional de Estadística (INE). Día Mundial de la Estadística. https://www.ine.es/diamundesta/diamundesta_inicio.htm (accedido 13 de febrero de 2025).

Izagirre, A., Anasagasti, J. y Berciano, A. (2025). Determinants of secondary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *Statistics Education Research Journal, 24*(2), 1-20. https://doi.org/10.52041/serj.v24i2.751

Kelley, T. R. y Knowles, J. G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, *3*, 11. https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z

Kurudirek, P.T., Arslan, S. (2024). The relationship between students' variational and covariational reasoning levels and their quantitative reasoning in a STEM environment. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (pp. 4721-4728). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest and ERME. https://hal.science/hal-04420558v1

Lee, H., Mojica, G., Thrasher, E. y Baugmartner, P. (2022). Investigating data like a data scientist: key practices and processes. *Statistics Education Research Journal, 21*(2), Article3. https://doi.org/10.52041/serj.v21i2.41

Lorenzo Valentín, G y Juan Verdoy, P. (2017). La Estadística en Educación Secundaria y Grados de Ciencias Sociales (Relaciones Laborales y Recursos Humanos y Gestión y Administración Pública). Necesidades, perfiles y realidades. *REDU. Revista de Docencia Universitaria, 15*(1), 105-125. https://doi.org/10.4995/redu.2017.5988

Lupión-Cobos, T., Lagarón, D.C., Ariza, M.R. y Domènech-Casal, J. (2023). STEM Education in the Spanish Context: Key Features and Issues. In Al-Balushi, S.M., Martin-Hansen, L., Song, Y. (Eds.). *Reforming Science Teacher Education Programs in the STEM Era. Palgrave Studies on Leadership and Learning in Teacher Education* (pp. 181-198). Palgrave Macmillan. https://doi.org/10.1007/978-3-031-27334-6_11

Mills, J.D. (2007). Teacher Perceptions and Attitudes About Teaching Statistics in P-12. *Education. Educational Research Quarterly*, *30*(4), 16-33.

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes (sf). *Estrategia STEAM del Ministerio*. https://www.educacionyfp.gob.es/mc/intercambia/mujeres-steam/estrategia-steam-mefp.html

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria* [LOMLOE]. https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-4975-consolidado.pdf

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

National Science Foundation [NSF]. https://www.nsf.gov

Oliveira, H., Henriques, A., Baptista, M. (2019). Pre-service teachers' perspectives on the role of statistics in a learning scenario for promoting STEM integration. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4783-4790). Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02410418v1

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE]. (2003*). Marcos teóricos de PISA 2003: la medida de los conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas. OCDE.* https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/dam/jcr:48372b5c-de62-4b50-b8a7-0e0a1c2c8cb4/marcoteoricopisa2003.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE]. (2022). *PISA 2021: Mathematics Framework (Draft)*. https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa-2021-mathematics-frameworkdraft.pdf

Ortiz-Laso, Z., Diego-Mantecon, J-M., García-Fernández, S., Sanz-Ruiz, M. (2024). Integrating mathematics and science in secondary education classrooms: numbers and algebra. Paul Drijvers; Csaba Csapodi; Hanna Palmér; Katalin Gosztonyi; Eszter Kónya. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Eötvös Loránd University of Budapest and ERME. https://hal.science/hal-04420497

Ortuzar-Iragorri, M.A., Seijas, N., Berciano, A. (2024). Challenges, difficulties and strengths of a stem project in the first year of secondary education: teachers' perception, *ICERI2024 Proceedings*, (p. 2753). https://doi.org/10.21125/iceri.2024.0725

Page, M.J., McKenzie, J.E., Bossuyt, P.M., Boutron, I., Hoffmann, T.C., Mulrow, C.D. et al. (2021). The PRISMA 2020 statement: an updated guideline for reporting systematic reviews, *BMJ*, 372(71). https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Persson, I., Kraus, K., Hansson, L. y Wallentin, F.Y. (2019). Confirming the structure of the survey of attitudes toward statistics (sats-36) by swedish students. *Statistics Education Research Journal, 18*(1), 83-93. https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ18(1)_Persson.pdf

Roberts, D.M. y Bilderback, E.W. (1980). Realiability and validity of a statistics attitudes surve. *Educational and Psychological Measurement*, *40*, 235-238.

Rodríguez-Santero, J. y Gil-Flores, J. (2019). Actitudes hacia la estadística en estudiantes de ciencias de la educación. Propiedades psicométricas de la versión española del Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). *Relieve, 25*(1), 1-17. https://doi.org/10.7203/relieve.25.1.12676

Ruz, F., Berciano Alcaraz, A., Martínez-Ortiz, F. y Contreras García, J.M. (2023). Perspectiva de género en actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza en futuro profesorado chileno, *Revista Educação e Pesquisa*, 49, e254527, 1-23, https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349254527es

Schau, C. (2003). *Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36).* Extraído de: http://evaluationandstatistics.com

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the Survey of Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement, 55*(5), 868-875.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, (pp.1-6).

Sousa, D. A. y Pilecki, T. (2013). *From STEM to STEAM: Using brain-compatible strategies to integrate the arts*. Sage.

Sukunza-Pagola, M. y Berciano-Alcaraz, A. (2025). Explorando la actitud del profesorado de Educación Primaria hacia la probabilidad y su enseñanza: formación, antigüedad y género, en el foco de interés. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado [RIFOP]*, 100(39.1), 225-250. https://doi.org/10.47553/rifop.v100i39.1.102574

Ubuz, B., Braber, N., Cascella, C., Stephan, M. (2024). An introduction to TWG26: Mathematics in the context of STEM education. Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (pp.4633-4638), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest and ERME. https://hal.science/hal-04416795v1

Ubuz, B., Gravemeijer, K., Stephan, M., Capraro, P. (2019). Introduction to TWG26: Mathematics in the context of STEM education. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4713-4720). Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02410294v1

Ubuz, B., Stephan, M., Cascella, C., den Braber, N. (2022). Introduction to the papers of TWG26: Mathematics in the context of STEM education. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, Feb 2022, (pp. 4536- 4542), Free University Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03808822v1

Vásquez, C. (2022). Caracterización de la estadística y la probabilidad en el currículo de educación infantil y primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 579-587). SEIEM.

Vásquez, C., Alvarado, H. y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. (2019). *Educación Matemática*, *31*(3), 177-202. https://doi.org/10.24844/em3103.07

Veloo, A. y Chairhany, S. (2013). Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93*, 59-64. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.09.152

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Wise, S.L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *45*, 401-405

LA INVESTIGACIÓN SOBRE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EDADES TEMPRANAS: IMPACTO EN LA ESCUELA

Statistics and probability research in early ages: impact on schools

Alsina, Á.

Universidad de Girona

Resumen

Se presentan los avances de la investigación sobre estadística y probabilidad en edades tempranas (3-8 años) y de qué manera estos resultados impactan en la escuela. Por un lado, los resultados de estos estudios inciden en cuestiones asociadas a las fases del ciclo de investigación estadística (formulación de una pregunta, recolección, organización, representación e interpretación de datos) y al significado intuitivo de la probabilidad (distinción entre sucesos deterministas y aleatorios, uso de lenguaje probabilístico en una escala cualitativa desde imposible hasta seguro); por otro lado, las investigaciones que han analizado el impacto de estos datos en la escuela revelan diversos desafíos como algunas lagunas conceptuales y omisiones, que se deberán ir subsanando en los próximos años a partir del desarrollo profesional docente, tanto en el marco de la formación inicial como continua.

Palabras clave: *investigación en educación matemática temprana, enseñanza y aprendizaje de la matemática temprana, estadística, probabilidad, desarrollo profesional docente.*

Abstract

Research advances on statistics and probability at early ages (3-8 years) and how these results impact on schools are presented. On the one hand, the results of these studies address issues associated with the phases of the statistical investigation cycle (formulation of a question, collection, organization, representation and interpretation of data) and the intuitive meaning of probability (distinction between deterministic and aleatory events, use of probabilistic language on a qualitative scale from impossible to sure); on the other hand, research that has analyzed the impact of these data in schools reveals a number of challenges such as some conceptual gaps and omissions, which will need to be addressed in the coming years through professional development of teachers, both in pre-service and in-service education.

Keywords: *research in early mathematics education, early mathematics teaching and learning, statistics, probability, teacher professional development.*

INTRODUCCIÓN

La mayor parte de la ciudadanía del siglo XXI recibirá, a lo largo de su vida, una gran cantidad de datos que deberá interpretar críticamente y, a la vez, necesitará tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, considerando la gran complejidad del mundo. Para dotarles de conocimientos y habilidades que permitan hacer frente a estos retos, uno de los grandes aciertos del sistema educativo en las últimas décadas ha sido, precisamente, incorporar la estadística y la probabilidad en los currículos de los primeros niveles. El organismo que, con visión de futuro, impulsó esta transformación curricular fue el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) de Estados Unidos, cuando propuso estándares de contenido de estadística y probabilidad a partir de los 3 años (NCTM, 2003). Si bien esta incorporación se ha producido a distintas velocidades en los diferentes

Alsina, A. (2025). La investigación sobre estadística y probabilidad en edades tempranas: impacto en la escuela. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

países, y en la actualidad todavía hay algunos currículos que no consideran explícitamente los conocimientos de estadística y probabilidad (sobre todo en el período 3-6 años), la tendencia a integrar estos contenidos en los currículos de las primeras edades va en aumento (Vásquez y Alsina, 2022; Vásquez y Cabrera, 2022).

En honor a la verdad, y como ocurre casi siempre que se produce algún cambio relevante, este cambio curricular no ha estado exento de voces críticas. Sin embargo, desde la observación y la documentación de lo que hacen (y lo que no hacen) los niños de las primeras edades, Alsina y Bosch (2023) plantean diversos interrogantes: ¿toman decisiones cuando juegan?, ¿se dan cuenta de que hay algunas situaciones imposibles, otras seguras… mientras juegan?, ¿descubren progresivamente que hay distintos tipos de juegos?, ¿discriminan que algunos juegos son los preferidos por la mayoría, mientras que otros juegos gustan menos? Las respuestas a estas preguntas evidencian que, en las experiencias cotidianas, emergen los primeros conocimientos asociados a la estadística y la probabilidad, como por ejemplo un primer acercamiento a la idea de espacio muestral (los distintos tipos de juegos), la identificación de la moda (el juego preferido), o la posibilidad de ocurrencia y el comportamiento del azar en algunas situaciones lúdicas (por ejemplo, que al jugar al parchís cuesta que salga un cinco).

Aquí se asume que la escuela, atenta a los resultados que provienen de la investigación, es la institución responsable de dar continuidad y de consolidar estos conocimientos emergentes para promover el desarrollo de la alfabetización en estadística y probabilidad (Gal, 2002, 2005, 2012), considerando que "la conexión más importante en los primeros aprendizajes matemáticos es el existente entre las matemáticas intuitivas, informales, que los niños han aprendido a través de sus experiencias, y las que están aprendiendo en la escuela" (NCTM, 2003, p. 136). Con base en estos planteamientos, y desde el convencimiento de que es esencial promover dicho desarrollo desde edades tempranas (Alsina, 2012, 2017, 2018, 2021a, 2021b, 2024; Alsina y Vásquez, 2016; Batanero, 2013; Batanero et al., 2021), a continuación, se presentan los principales avances de la investigación sobre estadística y probabilidad en las primeras edades (3-8 años) y de qué manera impactan en una escuela que presta atención a estos aportes.

AVANCES DE LA INVESTIGACIÓN EN ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (3-8 AÑOS)

La investigación en estadística y probabilidad tiene un largo recorrido en las etapas de secundaria y últimos niveles de primaria (9-16 años), mientras que en el segundo ciclo de educación infantil y primeros niveles de primaria (3-8 años) es mucho más reciente y limitada (Alsina, 2021a).

Sin entrar a fondo en las causas, es evidente que uno de los principales factores ha sido la ausencia hasta hace relativamente pocos años de estos saberes en el currículo, asumiendo que el currículo no es un conjunto neutral de contenidos, sino una construcción social que refleja relaciones de poder (Apple, 2006; Bernstein, 2000) y es atravesado por intereses ideológicos, contradicciones internas y omisiones intencionadas (Ball, 2008).

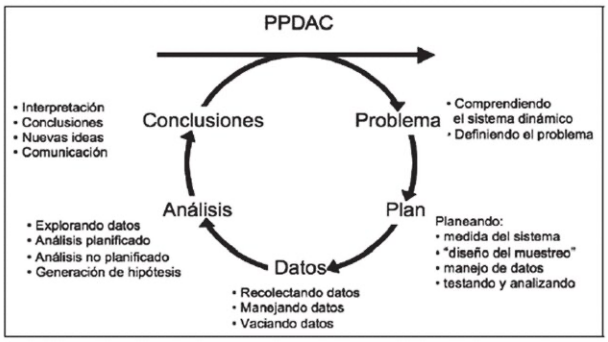
Resulta evidente, pues, que la investigación en estadística y probabilidad (3-8 años) ha ido en aumento a medida que se ha ido explicitando su presencia en el currículo de los primeros niveles. En lo que sigue, se presenta una breve síntesis de los principales avances en esta agenda.

Investigaciones sobre el aprendizaje de la estadística (3-8 años)

Desde una perspectiva genérica, una de las aportaciones que más ha contribuido a ampliar la visión de lo que implica alfabetizar estadísticamente es, sin duda, la descripción de las fases del ciclo de investigación estadística propuesto por Wild y Pfannkuch (1999). Este ciclo, que no es exclusivo de las primeras edades, considera cinco fases: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones, razón por la que se conoce con el acrónimo de PPDAC (Figura 1).

Figura 1

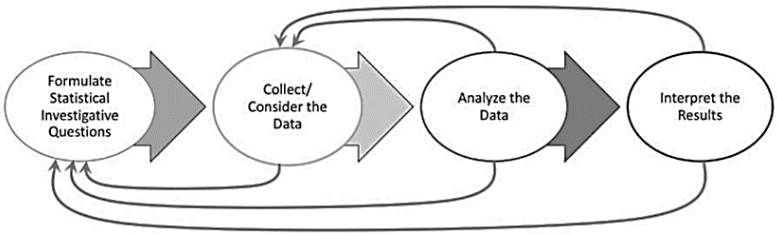
Fases del ciclo de investigación estadística PPDAC (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 226)



En el marco del Proyecto GAISE (Guía para la Evaluación e Instrucción en la Educación Estadística), también se proporcionó un ciclo que tenía cuatro componentes principales (Figura 2): formular preguntas, recopilar datos, analizar datos e interpretar los resultados (Bargagliotti et al., 2020). Como señala Estrella (2017), estas fases comparten las ideas del modelo PPDAC, aunque en el Proyecto GAISE no hay una fase específica para planear las estrategias para resolver las preguntas de investigación; sin embargo, la fase de recolección de datos involucra un plan.

Figura 2

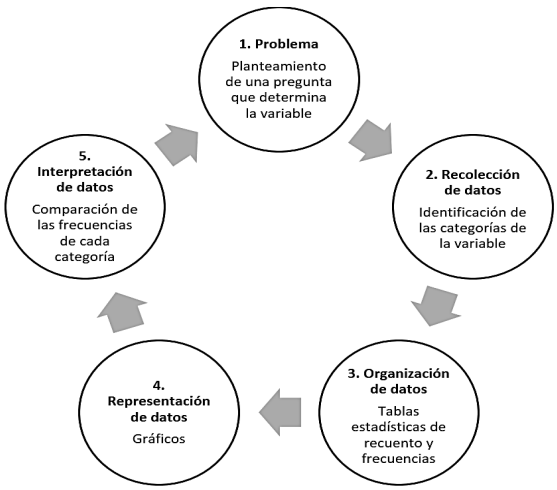
Fases del ciclo de investigación estadística del Proyecto GAISE (Bargagliotti et al., 2020, p. 13)



Más adelante, Alsina (2022) ha propuesto una adaptación a las primeras edades de estos ciclos de investigación estadística. Esta adaptación pretende comunicar de la forma más sencilla posible cuál es la esencia de cada fase del ciclo, aquello realmente relevante y que debe ser tenido en cuenta en la práctica docente (Figura 3).

Figura 3

Ciclo de investigación estadística para las primeras edades (Alsina, 2022)



Adicionalmente, la presentación de este ciclo pretende romper con el estereotipo que asocia la estadística exclusivamente a la representación gráfica de datos y, en su lugar, pretende dar valor a los procesos previos de recogida y organización de datos, a partir de su clasificación (Alsina, 2021b). Estos procesos incluyen tanto la definición de categorías (valores de la variable objeto de estudio) como la elaboración de tablas estadísticas de recuento y el tránsito hacia las tablas de frecuencias mediante la transnumeración, que permite pasar de un modo de representación habitualmente más concreta o pictórica a otra más abstracta para promover la comprensión (Rodríguez-Muñiz et al., 2021).

Considerando que la omisión de estas fases preliminares en el ciclo de investigación estadística tiene importantes repercusiones, a continuación, se describen los avances de la investigación en cada una de las cinco fases.

Fase 1. Planteamiento del problema (pregunta)

Alsina (2022) señala que los niños de las primeras edades sienten una curiosidad natural acerca del entorno que les rodea, razón por la que con frecuencia plantean una gran cantidad de preguntas que les ayuden a descubrirlo: ¿qué color es el preferido?, ¿cuántos dientes te han caído?,… Estas preguntas sobre cosas cercanas a su experiencia, proporcionan la oportunidad para empezar a introducir la estadística ya que, sin pregunta, no hay investigación.

Para este autor es muy importante pensar bien la pregunta que se quiere plantear. Para ello, es necesario observar mucho a los niños, sus acciones, sus intereses… para poder anticiparse a sus pensamientos y formular cuestiones que sean relevantes para ellos: por ejemplo, si se observa que un grupo de niños tienen interés por los vehículos que pasan por una rotonda cerca del patio del colegio, se puede aprovechar para plantear una buena pregunta de investigación sobre esta situación.

Otra cuestión relevante que se debe tener presente es que la pregunta planteada determina el tipo de variable de la investigación. Así, por ejemplo, la pregunta ¿qué tiempo atmosférico predominó desde el lunes al viernes de la semana pasada? da lugar a una variable cualitativa (el tiempo atmosférico) cuyas categorías no se pueden ordenar numéricamente (sol, nublado, lluvia, etc.); mientras que la pregunta ¿cuál es la cantidad más frecuente de dientes que han caído a los niños de nuestra clase? genera el estudio de una variable cuantitativa (cantidad de dientes) a partir de categorías que toman valores numéricos (ninguno, uno, dos, tres…). En este sentido, Alsina (2021a) señala que es recomendable que los niños de las primeras edades lleven a cabo las primeras investigaciones estadísticas con variables cualitativas de su entorno cercano, principalmente.

Fase 2. Recogida de datos

En esta fase debe considerarse el conjunto de elementos (o individuos) que son de interés para realizar la investigación estadística y definir bien las categorías de la variable de estudio. De acuerdo con Rodríguez-Muñiz et al. (2021), hay dos estrategias posibles: definir las categorías previamente o bien analizar los datos recogidos y decidir, entre todos, las categorías.

Fase 3. Organización de los datos

Para la organización de los datos es imprescindible prestar atención a la definición de las categorías y a la comprensión de las tablas estadísticas de recuento y de frecuencias, asumiendo que la comprensión incluye la confección y la interpretación de dichas tablas.

Las tablas estadísticas son un tipo de representación estadística que tienen un papel muy relevante en la recogida y organización de datos. Estrella (2014, p. 6) define dichas tablas como:

> […] un arreglo rectangular con una estructura que comprende un conjunto de filas y columnas […], permite presentar los datos correspondientes a una o más variables (características del fenómeno bajo estudio) en forma clasificada y resumida, para permitir la visualización del comportamiento de los datos y facilitar la comprensión de la información que se puede extraer.

Podemos considerar las tablas estadísticas de dos tipos (Figura 4): las tablas de recuento, que se asocian principalmente a las fases concreta y pictórica expresadas por Hoong et al. (2015), y las tablas de frecuencias, que se asocian a la fase abstracta de esta misma categorización. Esta última fase implica el tránsito a los números mediante la transnumeración, que es una forma de obtener una nueva información al cambiar de un sistema de representación a otro (Wild y Pfannkuch, 1999).

Figura 4

Ejemplo de tablas estadísticas de recuento y de frecuencias (Alsina, 2021b, p. 64)

Tabla de recuento con signos no organizados	
Valor 1	XX
Valor 2	///
Valor 3	
Valor 4	++++
Valor 5	^
Valor 6	

→

Tabla de recuento con signos organizados, en bloques de dos	
Valor 1	XX
Valor 2	++/
Valor 3	
Valor 4	++ ++
Valor 5	^
Valor 6	

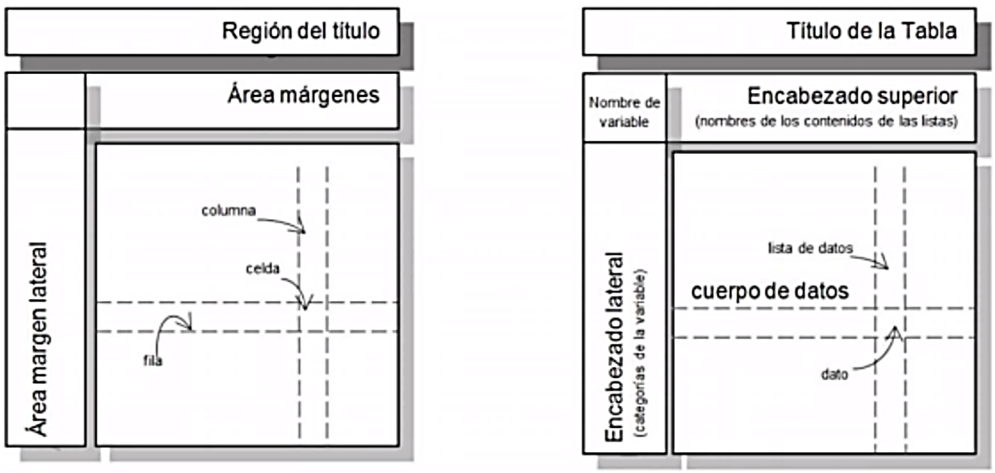
→

Tabla de frecuencias	
Valor del dado	Frecuencia
Valor 1	2
Valor 2	3
Valor 3	0
Valor 4	4
Valor 5	1
Valor 6	0

Aunque en la práctica existe bastante variabilidad, Estrella (2014) señala algunos de los elementos que deberían contener las tablas estadísticas (Figura 5).

Figura 5

Elementos de las tablas estadísticas. (Estrella, 2014, p. 5)

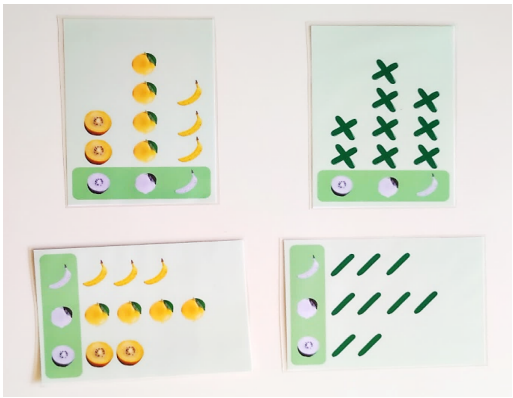


El título transmite la idea principal sobre la información representada y su contexto; el cuerpo de datos, que corresponde al bloque rectangular interior compuesto por el grupo de celdas formadas por la intersección de filas y columnas; el encabezado lateral (primera columna), que refleja las categorías de la variable; el encabezado superior, que presenta el nombre del contenido de las columnas, por ejemplo, las frecuencias y los totales, relativos a las sumas por fila o columna y/o totales.

Las primeras tablas estadísticas son de recuento concretas, en las que inicialmente se pueden usar los propios niños u objetos asociados a ellos, aunque lo más habitual es utilizar dibujos y signos diversos (palitos, cruces, etc.) como marcas de recuento (Figura 6). Estos signos, como señalan Rodríguez-Muñiz et al. (2021), pueden ser no organizados y organizados. Después de la tabla de recuento es necesario transitar a la tabla de frecuencias, que se obtienen mediante la agrupación o recuento de datos iguales y se corresponden con las categorías de las variables.

Figura 6

Ejemplos de tablas estadísticas de recuento concretas y pictóricas (Alsina, 2024, p. 243)



Fase 4. Representación de datos

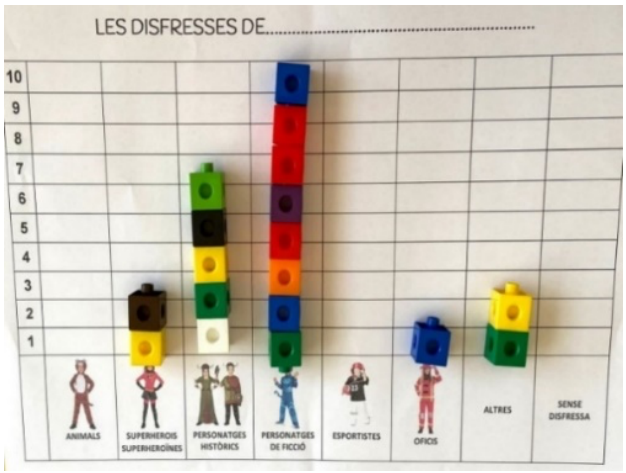
Las representaciones estadísticas son una de las ideas estadísticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011), pues permiten llevar a cabo la transnumeración (Pfannkuch y Wild, 2004). Este componente del pensamiento estadístico consiste en obtener nueva información, respecto de las características de un conjunto de datos, a partir del uso de diversas representaciones que permitan identificar diferentes aspectos de los datos con el fin de promover la comprensión de una situación real. En esta línea, Vásquez et al. (2018) consideran que las tablas y los gráficos estadísticos son un elemento clave para el desarrollo de la alfabetización estadística a partir de las primeras edades, puesto que su trabajo en el aula facilita la conexión entre disciplinas y contextos de vida cotidiana.

Rodríguez-Muñiz et al. (2021) subrayan que lo que caracteriza a un gráfico estadístico es la representación de información estadística, que pasa por clasificar, organizar y, en su caso, agrupar los datos y resumirlos; en otras palabras, la generación de información a partir de datos.

Debe considerarse que los primeros gráficos que se pueden empezar a realizar a finales de infantil o inicios de primaria son concretos, normalmente con material y respetando una correspondencia término a término (Figura 7).

Figura 7

Gráfico concreto, con material (Alsina y Annexa, 2021, p. 85)



Diversos autores han tratado de describir y caracterizar los diferentes niveles de comprensión para tablas y gráficos estadísticos. Curcio (1989) y Friel et al. (2001) proponen cuatro niveles respecto a la lectura de tablas y gráficos estadísticos, los que van desde una lectura elemental (lectura literal) hasta una más compleja (análisis críticos). Estos niveles son:

- Leer los datos: requiere una lectura literal de la información presentada en la tabla o gráfico, como por ejemplo leer una frecuencia, una categoría o el título general de la misma. No requiere interpretación.
- Leer dentro de los datos: requiere encontrar un valor por medio de comparaciones u operaciones aritméticas sencillas, además, incluye la interpretación de la información contenida en ella, como por ejemplo calcular la cantidad total de estudiantes que participaron en la encuesta, entre otras.
- Leer más allá de los datos: requiere determinar una información ausente en la tabla o gráfico por medio de predicciones o estimaciones, como por ejemplo hacer una inferencia estadística (inferir la temperatura máxima a partir de las temperaturas máximas de una ciudad mostradas en la tabla o gráfico).
- Leer detrás de los datos: requiere valorar críticamente la manera en que se recogieron los datos, interpretar la crítica que otras personas hacen del mismo o bien cuestionar la calidad de los datos. Supone una reflexión del conocimiento matemático y del contexto. Por ejemplo, analizar si la pregunta utilizada para recoger los datos es la apropiada o no.

Fase 5. Interpretación de datos

En infantil y primeros cursos de primaria, se pueden interpretar los datos haciendo comparaciones de las frecuencias de cada categoría, usando los comparativos “más…que”, “menos…que”, etc.; se pueden ordenar; etc.

Con base en estos avances, Alsina y Vásquez (en prensa) han señalado los conocimientos clave de estadística de 3 a 8 años (Tabla 1).

Tabla 1

Conocimientos clave de estadística (3-8 años)

3-6	Plantear preguntas sencillas relativas al entorno y recoger datos necesarios para poder responderlas. Identificar datos y hechos sencillos a partir de variables cualitativas y discretas. Recolectar datos simples a partir de observaciones directas del entorno. Ordenar y clasificar datos de acuerdo con sus atributos utilizando objetos, dibujos, tablas y gráficos sencillos. Recuento manipulativo de datos. Noción de frecuencia absoluta (por medio del recuento de casos). Construir e interpretar representaciones gráficas sencillas de manera visual a partir de los datos utilizando objetos, dibujos, tablas y gráficos sencillos como pictogramas. Identificar y describir patrones simples de los datos recolectados, a partir del uso de representaciones observando "qué elemento aparece más veces" o "cuál es el objeto más común". Comparar datos y hechos sencillos. Comprobación de conjeturas sencillas a partir del análisis de los datos.
6-8	Formular preguntas de investigación más estructuradas que guíen la recolección de datos. Recolección de datos a través de encuestas sencillas, observaciones o pequeños experimentos en el aula. Reconocer la importancia de la organización de datos, que luego se representará gráficamente. Construir e interpretar tablas estadísticas. Reconocer las diferencias en la representación de datos cualitativos y cuantitativos. Usar

	representaciones gráficas sencillas (pictogramas y gráficos de barras simples). Interpretar y describir los datos considerando su distribución e identificando conceptos simples como valores más comunes y diferencias entre los conjuntos de datos.

Investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad (3-8 años)

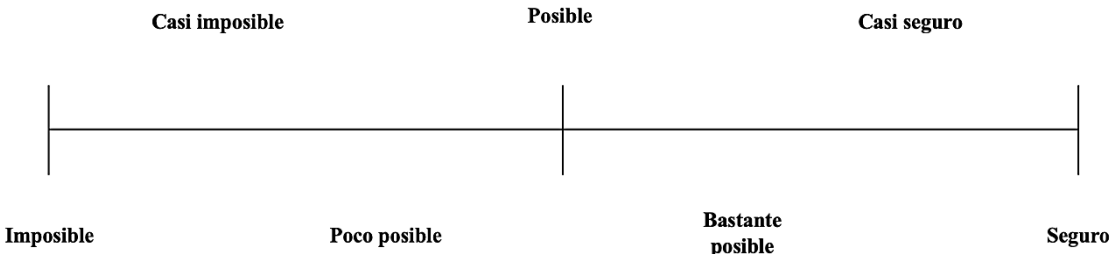
En estos primeros niveles, la probabilidad puede considerarse, de forma sencilla, como la medida de la posibilidad de ocurrencia de los hechos. Su desarrollo histórico-epistemológico ha dado lugar a la coexistencia de diversos significados (Batanero, 2005): intuitivo, frecuencial, clásico o laplaciano, subjetivo y axiomático. Diversos organismos y autores (Alsina, 2021a; Alsina y Vásquez, 2016, 2024; Batanero et al., 2021; HodnikČadež y Škrbec, 2011; NCTM, 2003; Nikiforidou, 2019; Nikiforidou y Pange, 2010) subrayan que los niños de las primeras edades ya pueden empezar a comprender el significado intuitivo de la probabilidad que, a partir de situaciones de la vida real, se focaliza en el uso de términos estocásticos y la expresión de grados de creencia para la ocurrencia de sucesos, a partir de una escala cualitativa con diferentes grados de posibilidad de ocurrencia que van desde lo imposible a lo seguro (Figura 8).

Desde este punto de vista, cabe señalar que en la vida real existen numerosos hechos que dependen del azar, razón por la cual es imprescindible que el alumnado empiece a observarlos. En este sentido, Godino et al. (1988) señalaron que:

> la presencia de fenómenos imprevisibles en sus resultados o manifestaciones en la realidad que nos rodea es bien patente. El carácter aleatorio de un fenómeno será apreciado por el niño a través de la observación de múltiples aspectos de su entorno, así como por medio de la realización de actividades y juegos, que son fáciles de generar en el aula (lanzamiento de dados, fichas, extracción de bolas en urnas, etc.) (p. 15)

Figura 8

Escala cualitativa desde imposible hasta seguro (Alsina, 2022)



Así, pues, la investigación en esta agenda señala que, desde las primeras edades, los niños pueden diferenciar entre fenómenos deterministas (donde el resultado siempre es el mismo) y no deterministas (donde el resultado puede variar). Este es un aspecto fundamental en el aprendizaje de la probabilidad porque ayuda a desarrollar una comprensión básica e intuitiva de los conceptos de azar e incertidumbre, que son esenciales para entender cómo funciona la probabilidad en el mundo real (Batanero, 2013; Vásquez, 2018). Asimismo, la diferenciación entre fenómenos deterministas y no deterministas favorece no solo el desarrollo del pensamiento lógico y crítico, promoviendo el concepto de causalidad, sino que también permite acercar a los niños a situaciones en las que los resultados no se pueden anticipar con certeza, aproximándoles a la incertidumbre. También contribuye a la diferenciación entre lo seguro y lo probable, lo que es crucial para el razonamiento probabilístico (Batanero et al., 2021). Esta diferenciación actúa como un puente hacia la comprensión de conceptos más formales de probabilidad, como la probabilidad teórica y experimental, sentando

las bases para un aprendizaje más avanzado en etapas posteriores. Adicionalmente, los avances de la investigación sobre el aprendizaje de la probabilidad (3-8 años) apuntan que los niños de estas edades empiezan a adquirir lenguaje probabilístico elemental asociado al significado intuitivo de la probabilidad, usando términos tales como seguro, posible o imposible (escala cualitativa de grados de posibilidad de ocurrencia).

Lo anterior implica que los niños comiencen a distinguir gradualmente los fenómenos que determinan los sucesos aleatorios, en la línea ya indicada por Fischbein (1975). Finalmente, se deben plantear situaciones que permitan a los niños aproximarse a la estimación y comparación de probabilidades. Con base en estos avances, Alsina y Vásquez (en prensa) presentan una síntesis de los conocimientos clave de probabilidad de 3 a 8 años:

Tabla 2

Conocimientos clave de probabilidad de 3 a 8 años

3-6	Proporcionar experiencias iniciales sobre el azar, la incertidumbre y la probabilidad que permitan a los niños observar resultados impredecibles en un contexto lúdico. Diferenciar un experimento aleatorio de otro determinista. Manejar el lenguaje probabilístico referente a la posibilidad de ocurrencia (seguro, posible, imposible). Reconocer la posibilidad/imposibilidad de que ocurran los hechos. Comparar y discutir sobre la posibilidad de ocurrencia de hechos sencillos, sin realizar cálculos, utilizando por ejemplo la escala cualitativa de posibilidades.
6-8	Utilización y comprensión de vocabulario formal para describir eventos utilizando términos tales como: probable, improbable, seguro e imposible. Formular predicciones sobre eventos que involucran eventos simples basados en experiencias previas, como el resultado de lanzar una moneda, para fortalecer su comprensión intuitiva de la probabilidad.

IMPACTO EN LA ESCUELA DE LA INVESTIGACIÓN SOBRE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD EN EDADES TEMPRANAS

En los últimos años, diversos estudios focalizados en las primeras edades han analizado el impacto de los datos procedentes de la investigación sobre estadística y probabilidad en la práctica escolar. A continuación, se presentan algunos resultados de diversas investigaciones centradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Análisis de la implementación de las fases del ciclo de investigación estadística en edades tempranas

Dalmau y Alsina (2015), por ejemplo, a partir de la implementación de la experiencia "¿Qué vehículos pasan por la rotonda?" en un grupo de 41 niños de 5-7 años, analizan sus producciones en las diferentes fases del ciclo de investigación estadística. En términos generales, concluyen que los niños de estas edades son capaces de identificar las categorías de una variable a partir de la formulación de una pregunta y realizar el correspondiente recuento, aunque sin considerar las características que debe reunir una tabla estadística de recuento, como indicar las categorías de la variable en uno de los ejes de la tabla (Estrella, 2014). Para realizar el recuento, se apoyan en el uso de materiales manipulativos como piezas de madera (Figura 9), y usan estos recuentos para interpretar los datos y extraer conclusiones, sin necesidad de realizar un gráfico concreto.

Desde el punto de la vista de la práctica docente, se observa cierta confusión entre tabla de recuento y gráfico estadístico, de manera que en las acciones que se muestran en la Figura 9 la maestra alude a la construcción de un gráfico, a pesar de que se omite tanto la información en el eje horizontal (categorías) como en el eje vertical (intervalo frecuencial).

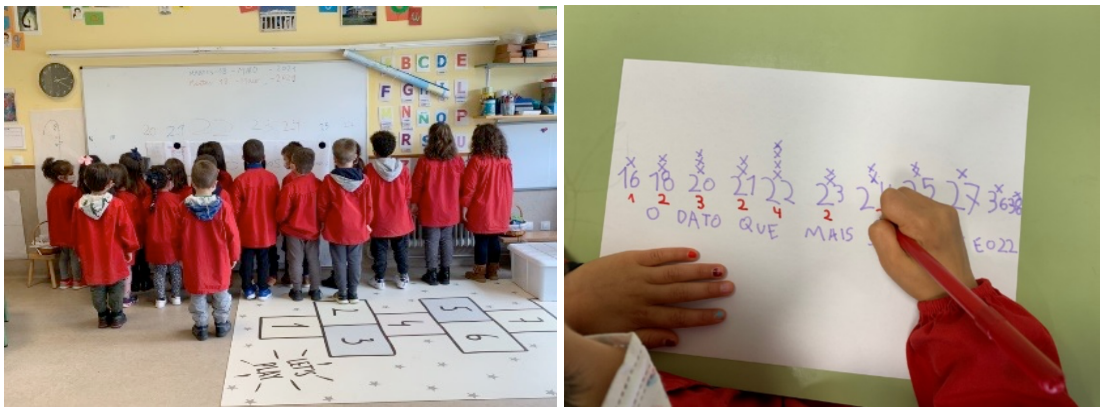
Figura 9

Recuentos con el apoyo de materiales (Dalmau y Alsina, 2015, pp. 72-73)

En la experiencia "Registramos nuestro peso" en un grupo de 39 niños de 5 años, Alsina et al. (2021a) analizan los niveles de comprensión de las tablas de recuento y de frecuencias, siguiendo los niveles de Curcio (1989). Los resultados muestran evidencias principalmente del nivel 1 (leer los datos) y del nivel 2 (leer dentro de los datos), junto con algunas anomalías y errores en la construcción de las tablas, como por ejemplo la falta de correspondencia entre las categorías y los datos al confeccionar una tabla de recuento concreta, con los propios niños (Figura 10, izquierda). Para subsanar el error, la maestra invita a los niños a registrar el recuento de manera individual (Figura 10, derecha).

Figura 10

Gestión docente frente a la falta de correspondencia entre las categorías y los datos al realizar un recuento (Alsina et al., 2021a, pp. 14-16)

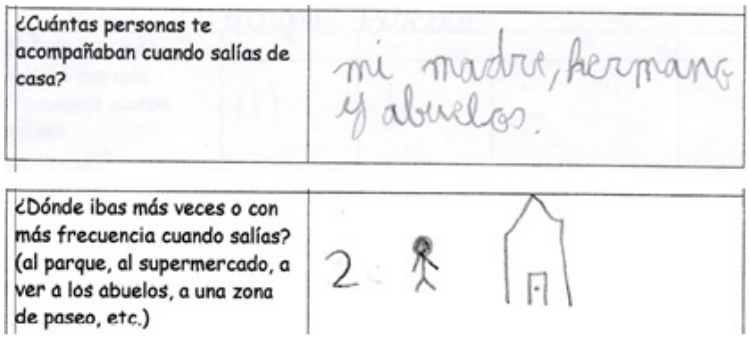


Alsina et al. (2023), a partir de la implementación de la experiencia "¿Qué actividades hemos hecho durante el confinamiento?" analizan la comprensión de tablas estadísticas junto con la transnumeración en 78 alumnos de 7-8 años de tres centros escolares. A partir de un enfoque mixto, descriptivo y exploratorio, basado en un análisis del contenido de tipo convencional, diseñan y analizan una actividad estructurada en cuatro fases: diálogo inicial, trabajo individual, en pequeño grupo y en gran grupo. Los datos revelan que la mayoría del alumnado ha sido capaz de elaborar tablas de recuento y la mitad ha realizado la transnumeración a tablas de frecuencias, detectando algunas dificultades y errores tanto en la realización como en la interpretación posterior. Los principales errores identificados se refieren a:

- Falta de correspondencia en situaciones en las que el alumnado ha contestado a preguntas cualitativas con respuestas cuantitativas, o viceversa (Figura 11).

Figura 11

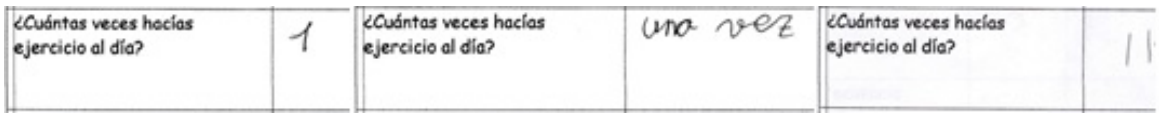
Falta de correspondencia entre el tipo de pregunta y la respuesta (Alsina et al., 2023, p. 102)



- Mayor variedad en la tipología de respuestas de las preguntas cuantitativas: números, lenguaje escrito o marcas de conteo (Figura 12).

Figura 12

Tipos de respuestas (Alsina et al, 2023, p. 103)



- Gran diversidad en la tipología y disposición de las marcas de recuento: palitos, barras, figuras de personas… (Figura 13).

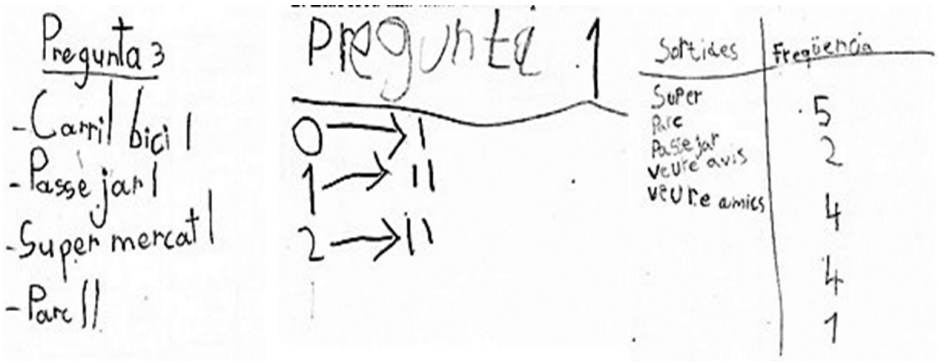
Figura 13

Uso de diferentes marcas de recuento (Alsina et al., 2023, pp. 103-105)

- Anomalías en relación con la representación tabular de la tabla de recuento o de frecuencias, como por ejemplo no usar propiamente tablas o distribuir de forma incorrecta las categorías y las correspondientes frecuencias absolutas (Figura 14).

Figura 14

Errores en el uso de tablas para hacer recuentos (Alsina et al., 2023, p. 105)

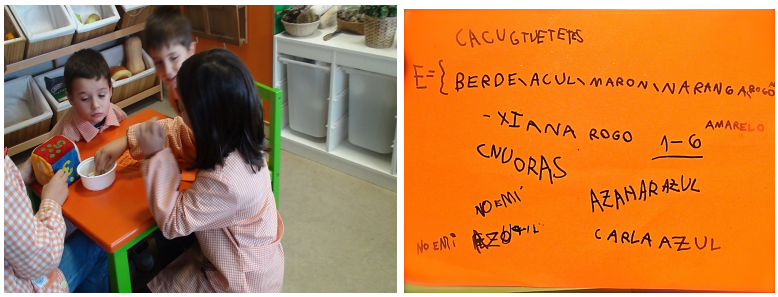


Análisis de la implementación del significado intuitivo de la probabilidad en edades tempranas

Tomando en consideración los resultados descritos sobre la investigación acerca del significado intuitivo de la probabilidad en edades tempranas, Alsina y Salgado (2019) implementan y analizan la experiencia "Probabilidad con cacahuetes" en un grupo de 22 niños de 5 años. Los resultados revelan que son capaces de usar lenguaje probabilístico elemental en una escala cualitativa desde imposible hasta seguro, a la vez que empiezan también a definir el espacio muestral (Figura 15).

Figura 15

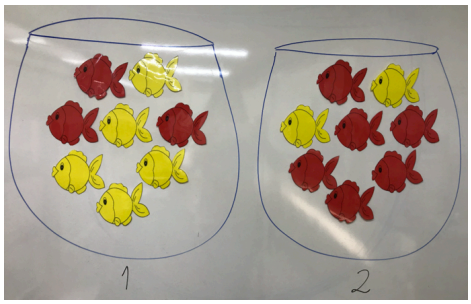
Definición del espacio muestral (Alsina y Salgado, 2019, pp. 236)



Paralelamente, Vásquez y Alsina (2019) implementan la experiencia "Mes del Mar" para explorar la compresión del azar y la probabilidad en 23 niños de 4 a 6 años. Para ello, realizan un estudio exploratorio a partir de siete preguntas para identificar cómo los niños de estas edades logran comparar probabilidades en situaciones donde el número de los casos posibles es igual, y el número de casos favorables cambia (Figura 16).

Figura 16

Apoyo visual presentado por la maestra (Vásquez y Alsina, 2019, p. 140)



Muy sintéticamente, los principales resultados de esta investigación confirman que los niños son capaces de usar comprensivamente lenguaje probabilístico elemental y activan un primer conocimiento informal acerca de otras nociones como el espacio muestral o la posibilidad de ocurrencia y la comparación de probabilidades, en sintonía con los datos de estudios preliminares (HodnikČadež y Škrbec, 2011; Nikiforidou, 2019; Nikiforidou y Pange, 2010).

Más adelante, Alsina et al. (2021b) implementan un experimento estocástico con dados propuesto *online* a 19 niños y niñas de 4 años durante el período de confinamiento en España. Mediante un estudio de caso múltiple, analizan cómo, para qué y sobre qué argumentan los niños en el marco de la probabilidad intuitiva. En concreto, implementan dos actividades: a) hacer dos rondas de 10 lanzamientos de un dado, registrar y comparar qué número sale más, cuál sale menos, cuáles son imposibles/posibles que salgan; b) lanzar dos dados, sumar los dos números, registrar e indicar qué resultados son imposibles/posibles (Figura 17).

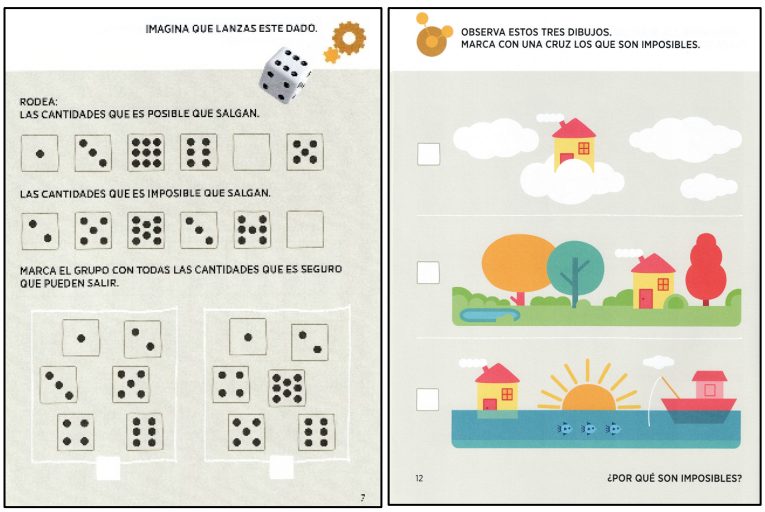
Figura 17

Recuento de los lanzamientos obtenidos a partir de los dos dados (Alsina et al., 2021b)

Como se aprecia en la Figura 17, el niño ha sido capaz de registrar el resultado de los 20 lanzamientos y, seguidamente, hacer una tabla de recuento para señalar el resultado más bajo y más alto, el que ha salido más veces o algunos resultados que son imposibles, evidenciándose que usa comprensivamente conocimientos elementales asociados a la probabilidad intuitiva.

Figura 18

Tareas de proyectos editoriales de las primeras edades (Alsina y Vásquez, 2024, pp. 64-65)



Otra cuestión relevante en este ámbito es el análisis de proyectos editoriales utilizados en las aulas. Cuida et al. (2021), por ejemplo, analizan la presencia tanto de la estadística como de la probabilidad en nueve proyectos editoriales para alumnos españoles de 3 a 6 años, concluyendo que dicha presencia es escasa y que no ofrecen suficiente información al profesorado para promover la alfabetización estadística y probabilística. Alsina y Vásquez (2024) profundizan en el tipo de tareas planteadas para enseñar probabilidad en los primeros niveles, identificando que algunas se focalizan propiamente en la posibilidad de ocurrencia de sucesos aleatorios (Figura 18, izquierda), mientras que otras inciden en el lenguaje probabilístico (seguro, imposible…) a partir de situaciones imaginarias que no dependen del azar (Figura 18, derecha).

Los autores subrayan que es necesario que, en la práctica escolar, estos dos tipos de tareas se distingan bien y, sobre todo, que se tenga muy presente cuál es su finalidad, para no generar confusiones en los niños.

CONSIDERACIONES FINALES

La investigación sobre la estadística y la probabilidad en las primeras edades es reciente. Como se ha señalado, los estudios sobre esta agenda aumentan sobre todo con el inicio del S. XXI, cuando en Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) se indican estándares de contenido de "Análisis de datos y probabilidad" a partir de los 3 años. Desde entonces, algunos países han empezado a incluir la estadística y la probabilidad de forma explícita en los currículos de las primeras edades, a medida que se han ido dando cuenta de la necesidad de que los niños, desde pequeños, empiecen a desarrollar progresivamente los primeros conocimientos para interpretar los datos de manera crítica y tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, que son habilidades imprescindibles para la ciudadanía del siglo XXI.

Sin embargo, tal como indica Alsina (2021a), por un lado, hay que tener presente que la mera presencia de la estadística y la probabilidad en algunos currículos de matemáticas de los primeros niveles no garantiza que su enseñanza en el aula sea óptima y se promueva la alfabetización estadística y probabilística; por otro lado, la omisión de estos saberes en el currículo no implica necesariamente que no se implementen en el aula, aunque la falta de orientaciones puede generar algunas dificultades. En este sentido, en las prácticas de enseñanza analizadas se han identificado diversos desafíos:

- La tendencia más generalizada es no considerar suficientemente las primeras fases del ciclo de investigación estadística: pensar cómo se recolectan los datos, definir las categorías de la variable previamente, etc.
- Cuando se incide en estas primeras fases, se plantean preguntas asociadas a variables cualitativas y se pasa directamente a representar datos en tablas estadísticas de recuento de manera concreta y/o pictórica, a partir de categorías previamente dadas.
- Se omite la rectificación de algunos errores evidentes en la construcción de las tablas estadísticas de recuento y de frecuencias, tanto de tipo matemático como estético.
- Existe una confusión entre tabla estadística (de recuento/de frecuencias) y gráfico estadístico. Adicionalmente, no se profundiza en las características estéticas y matemáticas de ambos tipos de representación.
- La interpretación de los datos tiende a realizarse principalmente a partir de dichas tablas estadísticas de recuento, más que a partir de gráficos concretos.
- El uso de proyectos editoriales en los que se presentan tareas a partir de situaciones imaginarias para trabajar el lenguaje probabilístico puede generar falsas interpretaciones acerca de lo que es la probabilidad.

En conclusión, el análisis del impacto en la práctica docente de la investigación sobre estadística y probabilidad en edades tempranas permite comprender mejor los desafíos asociados al desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística del alumnado, por lo que los datos obtenidos son el punto de partida para poder diseñar programas de formación inicial y permanente del profesorado más eficaces, que permitan superar las dificultades y errores identificados.

Referencias

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas*, *7*, 4-22.

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon, 95,* 25-48.

Alsina, Á. (2018). El número natural para organizar, representar e interpretar la información (estadística, azar y probabilidad). En M. C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 173-211). Paraninfo.

Alsina, Á. (2021a). "Ça commence aujourd'hui": alfabetización estadística y probabilística en la educación matemática infantil. *PNA, 15*(4), 243-266. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.21357.

Alsina, Á. (2021b). ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemática. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 108,* 49-74.

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años).* Graó.

Alsina, Á. (2024). Nuevos materiales manipulativos para mejorar la comprensión de las fases del ciclo de investigación estadística en Educación Infantil. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 118,* 229-249.

Alsina, Á. y Annexa, E. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram - Revista de Educação Matemática, 4*(1), 71-98.

Alsina, Á. y Bosch, E. (2023). Estadística y probabilidad en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido estocástico. *TANGRAM - Revista de Educação Matemática, 6*(3), 24-59.

Alsina, Á. y Salgado, M. (2019). Ampliando los conocimientos matemáticos en Educación Infantil: la incorporación de la probabilidad. *REXE - Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *18*(36), 225-240.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 48,* 41-58.

Alsina, Á y Vásquez, C. (2024). La probabilidad en educación infantil: finalidades, aplicaciones y prácticas de enseñanza. *Revista Científica Ecociencia*, *11*(4), 45-70. https://doi.org/10.21855/ecociencia.114.961

Alsina, Á. y Vásquez, C. (en prensa). *Estadística y probabilidad: itinerarios de enseñanza para Educación Infantil.* Graó.

Alsina, Á., Cornejo-Morales, C. y Salgado, M. (2021a). ¿Cómo, para qué y sobre qué se argumenta en el marco de la probabilidad intuitiva? Un estudio de caso múltiple en Educación Infantil. *Revista Paradigma, 12*(1), 285-312. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p285-312.id1026

Alsina, Á., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L., García-Alonso, I., Vásquez, C., y López-Serentill, P. (2023). Alfabetizando estadísticamente a niños de 7-8 años a partir de contextos relevantes. *Revista Complutense de Educación, 34*(1), 95-108. https://doi.org/10.5209/rced.77186

Alsina, Á., Salgado M., Toalongo-Guamba, X. y Trelles-Zambrano, C. (2021b). Estadística en Educación Infantil: recomendaciones previas a la representación de datos. *RIDEMA, Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática, 5*(1), 1-21. https://doi.org/10.34019/2594-4673

Apple, M. W. (2006). Educação, mercado e cultura de controle. *E-curriculum, 2*(1), 1-31.

Ball, S. (2008). *El sentido de las reformas educativas.* Universidad de Santiago de Compostela.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II).* American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics. https://www.amstat.org/docs/default-source/amstat-documents/edu-set.pdf

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho y F. Viseu (Eds.), *Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola* (pp. 1-13). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A., Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA, 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, Symbolic Control and Identity: Theory, Research, Critique*. Rowman & Littlefield.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in trainingteachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.

Cuida, A., Espina, E., Alsina, Á. y Novo, M.ª L. (2021). La educación estadística y probabilística en proyectos editoriales de Educación Infantil. *Bolema, 35*(69), 389-412. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a18

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension.* National Council of Teachers of Mathematics.

Dalmau, F. y Alsina, Á. (2015). Matemàtiques i entorn a l'educació infantil. *Noubiaix, 36,* 66-79.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14*(2), 1-23.

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173-194). Universidad Central de Venezuela.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* (Vol. 85). Springer Science & Business Media.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S.J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-7).

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Editorial Síntesis.

HodnikČadež, T. y Škrbec, M. (2011). Understanding the concepts in probability of pre-school and early school children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 7*(4), 263-279.

Hoong, L.Y., Kin, H.W. y Pien, C. L. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator, 16*(1), 1-18.

National Council of Teachers of Mahematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nikiforidou, Z. (2019). Probabilities and preschoolers: Do tangible versus virtual manipulatives, sample space, and repetition matter? *Early Childhood Education Journal, 47,* 769-777. https://doi.org/10.1007/s10643-019-00964-2.

Nikiforidou, Z. y Pange, J. (2010). The notions of chance and probabilities in preschoolers. *Early Childhood Education Journal, 38*(4), 305-311. https://doi.org/10.1007/s10643-010-0417-x.

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds) *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_2

Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L. y Aguilar, Á. (2021). El recuento y las representaciones manipulativas: los primeros pasos de la alfabetización estadística. *PNA, 15*(4), 331-338. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22511

Vásquez, C. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de Educación Primaria. *REnCiMa*, *9*(2), 374-389.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Revista Acta Scientiae, 21*(3), 131-154. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215

Vázquez, C. y Alsina, Á. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 189-214). Universidad Católica del Maule.

Vásquez, C. y Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Revista Educación Matemática, 34*(2), 245-274.

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C., y Alsina, A. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec*, *8*(1), 154-179.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223–248

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II: BUENAS PRÁCTICAS EN TRANSFERENCIA DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Coordina: Nuria Climent Rodríguez

Ponentes:

- Cristina Ayala Altamirano (Universidad de Málaga) y José Ramón Cortiñas (CEIP Mediterráneo de Melilla): *De la Investigación al Aula: Caminos y Desafíos para una Transferencia Efectiva en Educación Matemática.*
- Pedro Gómez (Universidad de Los Andes): *De la Investigación a la Formación Masiva del Profesorado: Una Experiencia con Cursos MOOC.*
- Carlos de Castro Hernández (Universidad Autónoma de Madrid): *Los Sistemas Inteligentes en Educación Matemática: Un Contexto de Investigación para el Desarrollo del Currículo de Matemáticas.*

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO "BUENAS PRÁCTICAS EN TRANSFERENCIA DE LOS RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Introduction to the seminar "Good practices in transferring research results in mathematics education"

Climent, N.

Universidad de Huelva

Resumen

En este seminario nos hacemos eco de la importancia, cada vez mayor, de que la investigación en educación matemática impacte en cambios en la sociedad. Para empezar a construir un discurso compartido sobre qué entendemos por tal transferencia, cuál es su naturaleza y posibilidades, se presentan tres ponencias que abordan la formación del profesorado, la formación de formadores de dicho profesorado, los cambios en la práctica de aula y la formación matemática del alumnado. Dos de ellas se refieren a transferencia masiva a través de sistemas online y la tercera recoge las necesidades y posibilidades que identifican en la transferencia de la investigación en educación matemática profesorado y formadores de este profesorado. Este seminario coincide con la reciente creación de la Red de Investigación en Educación Matemática, RED-IEMaT.

Palabras clave: transferencia, implementación, aplicación, impacto, educación matemática

Abstract

This seminar reflects the growing importance of research in mathematics education having an impact on changes in society. To begin to build a shared discourse on what we mean by such transfer, what is its nature and possibilities, three papers are presented that address teacher education, teacher educator training, changes in classroom practices and student mathematics education. Two of them refer to mass transfer through online systems, and the third one try to capture the needs and possibilities identified by teachers and teacher educators. This seminar coincides with the recent creation of the Mathematics Education Research Network, RED-IEMaT.

Keywords: *transfer, implementation, application, impact, mathematics education*

INTRODUCCIÓN

La consciencia de la importancia de que los resultados de investigación trasciendan el terreno académico y lleguen a la sociedad, es cada vez mayor tanto en la comunidad investigadora como en la política educativa. En España, desde las administraciones que apoyan y evalúan la investigación, esto se traduce en el reconocimiento de méritos de transferencia como resultados del proceso de investigación. La creación en 2021 de la revista *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education Journal* es una muestra de la relevancia, cada vez mayor, de esta transferencia. En la descripción de la revista en la web, pueden identificarse algunos de los aspectos claves que se asocian a la implementación de la investigación en educación matemática: uso activo de dicha investigación en la práctica, aplicación y escalamiento de sus hallazgos, y acercamiento de la comunidad académica y la comunidad de responsables en política educativa. La finalidad de esta

implementación es mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas usando conocimiento que proviene de la investigación en educación matemática y re-implementándolo en nuevos contextos.

De este modo, la transferencia o implementación de la investigación se relaciona con la problemática de la escala, entendida como el tamaño de la población sobre la que impacta. Citando a Burkhardt y Schoenfeld (2020), Jankvist et al. (2021) señalan que la aplicabilidad de la investigación debe darse a una escala significativa. La necesidad de aumentar la escala de las investigaciones empíricas y de que estas lleguen al profesorado son parte de las necesidades de la investigación en educación matemática en el siglo XXI señaladas por Coles et al. (2020). Ya Schoenfeld (2016) apuntaba a que, si bien el aumento de la comprensión de cuestiones de educación matemática había sido enorme en las últimas décadas, quedaba mucho por hacer en los ámbitos académico, práctico y sociopolítico. Gran parte de los retos pendientes se referían a escalar los resultados, para que llegaran a transformar las prácticas e impactaran en decisiones políticas.

Además, la transferencia o implementación de los resultados de la investigación supone reducir las distancias entre la comunidad investigadora y la comunidad de educación matemática, al requerir de la colaboración de ambas. Aguilar et al. (2019), se refieren a un proceso de adaptación y puesta en práctica de un determinado recurso que ocurre en la colaboración de la comunidad de los proponentes y la comunidad de los adaptadores del recurso. El control sobre el recurso va trasladándose de la comunidad de los proponentes, en un primer momento, a la comunidad de los adaptadores, que es la que realiza cambios en la práctica. Los investigadores deben trabajar estrechamente con los adaptadores para posibilitar una implementación creativa (Jankvist et al., 2021).

Si bien el título del seminario alude a la transferencia de los resultados de la investigación, estos resultados incluyen todas las posibles aportaciones de la investigación a la sociedad. Pueden aplicarse, además de resultados propiamente dichos, marcos teóricos, herramientas formativas o metodológicas, materiales didácticos, intervenciones en la práctica (Koichu et al., 2014) y cualquier otro tipo de hallazgo que pueda ser útil para propiciar un cambio educativo fundamentado. La investigación en educación matemática puede aportar conocimiento científico que contribuya a avanzar hacia una sociedad matemáticamente competente. En particular, su contribución puede orientarse hacia la mejora de la formación matemática escolar y del profesorado.

La implementación, transferencia o aplicación es un proceso situado, que como señalaban Jankvist et al. (2021) supone usar conocimiento proveniente de la investigación y re-implementarlo en nuevos contextos. Así, las adaptaciones de los recursos procedentes de la investigación consideran las necesidades y contextos donde estos serán aplicados. La cuestión, más que qué es aplicable y funciona, es qué es aplicable y funciona para quién, dónde, cuándo y por qué (Honig, 2006, p. 2, citado en Koichu et al., 2014). Esta naturaleza situada de la transferencia apoya la necesidad de comunidades colaborativas que desarrollan conjuntamente propuestas locales fundamentadas de mejora.

La SEIEM ha realizado actuaciones para propiciar la transferencia de la investigación en educación matemática. Así, por citar algunas recientes, en 2022 promovió y financió un libro de acceso libre para contribuir al desarrollo de los nuevos currículos, apoyando al profesorado en su implementación (Blanco et al., 2022). Igualmente ha elaborado documentos de sugerencias y propuestas en relación con la política educativa, como el documento que pretendía contribuir al debate sobre la reforma de la mejora de la profesión docente, en 2023, y participado, a través del Comité Español de Matemáticas, en el Plan de Mejora en Competencia Matemática del Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes, que nace como reacción a los resultados españoles en evaluaciones internacionales.

Este seminario enlaza con el que se desarrolló en el Simposio de la SEIEM del 2024 en la sesión de formación y docencia universitaria, titulado “Tendiendo puentes, derribando muros: de la investigación a la transferencia”. Esta sesión trataba de explorar las ideas, necesidades y experiencias

de los investigadores de la SEIEM sobre dicha transferencia y cómo mejorarla, así como mostrar un ejemplo de prácticas de transferencia. Entre las ideas sobre transferencia, obtenidas a través de un cuestionario, destacaba que se daba fundamentalmente a través de la formación inicial y continua del profesorado, con mucho menor peso del que se consideraba deseable y mayoritariamente por iniciativa de los investigadores.

En el seminario que nos ocupa pretendemos contribuir a la construcción de nociones compartidas de buenas prácticas en transferencia en investigación en educación matemática. Hemos querido mostrar experiencias de "buenas prácticas de transferencia" y que estas puedan ser el medio para este acercamiento a la problemática, incluyendo la discusión sobre qué consideramos por tal transferencia.

LA RED-IEMaT

Para impulsar la colaboración en transferencia, 17 grupos de investigación asociados a proyectos del Plan Estatal de I+D+i solicitamos el apoyo para crear una red de investigación en la convocatoria de 2024 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (Gobierno de España). Una vez concedida, la Red de Investigación en Educación Matemática, RED-IEMaT, está empezando a andar.

La RED-IEMaT se propone ampliar el alcance actual del impacto de cada grupo, permitiendo que actuaciones de éxito (o buenas prácticas), que afecten a un contexto local, puedan ser extrapolables a una mayor variedad de contextos a nivel estatal. Para ello, se proyecta impulsar nuevo conocimiento sustentado en la investigación en educación matemática, mediante la creación de contenidos y recursos en distintos formatos. De esto modo, buscamos proponer e informar sobre problemáticas sociales como las necesidades del alumnado detectadas en pruebas internacionales, las brechas (de género, clase social y diversidad funcional) en el desarrollo de la competencia matemática o la formación del profesorado para la implementación de los nuevos currículos. Se trata de aumentar la influencia en la política educativa y la práctica profesional, a partir de los resultados de investigación. En este sentido, disponemos de los productos obtenidos en investigaciones en relación con el aprendizaje matemático del alumnado, las prácticas de enseñanza, la formación del profesorado, el uso de tecnologías, el fomento de cuestiones de equidad, diversidad e inclusión, el desarrollo de materiales de enseñanza y la interpretación del currículo, entre otros. La hipótesis subyacente a la RED-IEMaT es que la colaboración, coordinación y complementariedad en la comunidad investigadora de educación matemática en España, redundará en un aumento de la visibilidad de resultados de la investigación y en la mejora de la fluidez de interlocución con agentes educativos y administraciones, favoreciendo que la investigación impacte en la sociedad.

Vemos imprescindible en este proceso articular la relación entre agentes involucrados en la educación matemática (profesorado, alumnado, familias, administraciones educativas, editoriales, etc.) e incorporar su voz al debate sobre la mejora de la formación matemática. En este sentido, además de hacer comunicables los resultados más allá de la comunidad de investigación, incluimos la bidireccionalidad a la hora de identificar problemas y necesidades, así como buscar soluciones.

Los grupos de la RED-IEMaT hemos desarrollado acciones de transferencia, en el marco de los proyectos de investigación, referidos a la formación del profesorado, la formación de los formadores de dicho profesorado, el cambio de las prácticas de aula, el desarrollo de materiales curriculares, el asesoramiento educativo y la divulgación. Estas acciones han tomado distinta forma: constitución de comunidades de investigación con profesorado no universitario, desarrollo de talleres y seminarios formativos para profesorado, creación de contenidos de divulgación en soportes audiovisuales, diseño de libros de texto y guías didácticas, asesoramiento y colaboración en el diseño y aplicación de políticas educativas, entre otros. Este es un punto de partida para identificar posibilidades y demandas para mejorar esta transferencia a través de acciones coordinadas.

Los objetivos generales de la RED-IEMaT concretan los propósitos referidos anteriormente:

- Crear estructuras y dinámicas que faciliten la colaboración entre grupos para elaborar un repositorio con resultados de investigación en educación matemática que favorezca su difusión al profesorado, a la comunidad educativa y a las administraciones.

- Reforzar el impacto educativo y social de la investigación en educación matemática en España mediante la mejora de su difusión y actuaciones sostenibles.

- Promover un cambio en la cultura de la comunidad investigadora en educación matemática en España con la finalidad de promover la transferencia de resultados.

El tercer objetivo atañe especialmente a la SEIEM, como sociedad que aglutina a la mayor parte de la comunidad de investigadores en educación matemática. Este seminario responde a ese impulso para que integremos la transferencia como parte de nuestra práctica investigadora. Para ello, necesitamos también dar cabida a la transferencia en la propia SEIEM, como parte constituyente de la investigación y como objeto de estudio.

ALGUNOS CUESTIONAMIENTOS

Con este seminario nos acercamos a la naturaleza de la transferencia de la investigación en educación matemática, a partir de la reflexión de los ponentes sobre sus experiencias y posibles elementos comunes en ellas.

Por un lado, pretendemos identificar ámbitos de transferencia, comprender las claves de la transferencia en esos ámbitos, así como posibles estrategias, y detectar demandas en ellos. Teniendo en cuenta los diferentes agentes o actores involucrados en el diseño e implementación de la transferencia de la investigación, nos interesa identificar mecanismos para la colaboración, posibles roles y necesidades de los implicados. Por otro lado, buscamos reflexionar sobre qué elementos de la investigación en educación matemática (resultados, metodologías, modelos y conceptos teóricos…) son transferibles, qué tratamiento o reinterpretación requieren y cómo pueden ser útiles. Además de este proceso de tratamiento del contenido de la transferencia, pueden ser necesarios mecanismos de mediación que permitan que la acción consiga el resultado esperado.

Nos preguntamos, asimismo, cómo hacer transferencia que tenga impacto social y amplíe la escala del efecto de las investigaciones en educación matemática. Queremos comprender también cómo desarrollar acciones de transferencia de la investigación que puedan ser sostenibles temporalmente y cómo pueden propiciar cambios sostenibles en los ámbitos de actuación (como en el desarrollo profesional del profesorado - Zehetmeier y Krainer, 2011).

El propio proceso de transferencia puede ser objeto de investigación desde la educación matemática. Cabe preguntarse, en este sentido, si se están desarrollando investigaciones al respecto y si la transferencia puede plantear nuevas problemáticas a la investigación en educación matemática. Esto generaría preguntas de investigación relevantes, dado que abordarían problemas de enseñanza del profesorado (Cai et al., 2019) o problemas de otros agentes educativos. En el sentido inverso, las evaluaciones de los resultados de la transferencia de la investigación en educación matemática podrían arrojar luz sobre límites de acción de un resultado, constructo teórico o metodología de investigación en educación matemática. Así, pudiera ser que la transferencia de un resultado en determinados contextos, en ocasiones diferentes de en los que fueron generados, pudiera mostrar algunos en los que son aplicables y otros en los que no, permitiendo profundizar en la naturaleza de esos resultados.

Al igual que la investigación, entendemos que la transferencia de la investigación en educación matemática plantea dilemas y cuestiones éticas, relativas a los actores implicados, a sus fines y a sus resultados. Adicionalmente, surgen cuestiones sobre la fidelidad de la transferencia a los resultados de la investigación que aplica (Jankvist et al., 2022) y los límites de esta fidelidad.

En su conjunto, tratamos de propiciar la reflexión sobre qué pretende y puede aportar la investigación en educación matemática a problemáticas sociales y culturales, y cómo propiciar esas aportaciones.

APORTACIONES EN EL SEMINARIO

Dos de las ponencias en el seminario se refieren a experiencias en la transferencia de la investigación en educación matemática en dos ámbitos: la formación de profesorado y la formación matemática del alumnado. En ambos casos, esta formación se desarrolla a través de sistemas online y tiene un impacto masivo. Esto puede permitirnos reflexionar sobre las condiciones de acciones de transferencia mediadas por tecnologías digitales y sobre las implementaciones a gran escala de los resultados de la investigación en educación matemática.

Por otro lado, hemos querido implicar a algunos agentes, actores y adaptadores de esta transferencia. Así, una formadora novel de Didáctica de la Matemática y un maestro de Primaria, que a su vez es director de un centro educativo, presentan, en una tercera ponencia, las necesidades y posibilidades que identifican en la transferencia de la investigación en educación matemática. Esto responde, por una parte, a la necesidad de abordar la transferencia de manera conjunta con los agentes involucrados. Por otra, se relaciona con la necesidad de que las acciones de transferencia sean factibles para los profesionales implicados (Levine y Cooper, 1991).

Con las cuatro ponencias citadas, pretendemos, además de conocer sus experiencias de transferencia, identificar problemas y necesidades a los que pueda contribuir la investigación en educación matemática, así como explorar posibles claves en esa transferencia. Esperamos que estas ponencias nos permitan entender cómo desde cada experiencia se entiende la transferencia de la investigación en educación matemática. Presentamos, a continuación, brevemente cada ponencia.

Cristina Ayala y José Ramón Cortinas reflexionan, desde su papel como agentes educativos, sobre la transferencia de la investigación en educación matemática a la formación inicial y continua del profesorado, a la formación de formadores de este profesorado y a la práctica de aula en relación con la enseñanza de las matemáticas. De este modo, abogando por la necesaria bidireccionalidad de la transferencia entre quienes la proponen y quienes las adaptan, sugieren necesidades concretas en las que la investigación en educación matemática podría implicarse.

La ponencia de Pedro Gómez y Carlos Velasco también se ocupa de la transferencia a la formación de profesorado. Así, nos relatan cómo una herramienta de investigación como el análisis didáctico es usada como referente en el diseño e implementación de un modelo formativo masivo.

Carlos de Castro, por su parte, con su ponencia sobre sistemas inteligentes en educación matemática, sitúa su transferencia en el desarrollo del currículo de matemáticas. Así, a través de su implicación en el desarrollo de la aplicación para el aprendizaje Smartick Matemáticas, ejemplifica cómo se han considerado elementos metodológicos y constructos teóricos de la investigación en educación matemática y pone de relieve la complejidad de la transferencia desde la investigación a sistemas de aprendizaje en línea.

Consideramos que, en su conjunto, los cuatro ponentes aportan a la idea de buenas prácticas de transferencia de la investigación en educación matemática. Así, nos permitirán aproximarnos a experiencias de transferencia bien valoradas por los usuarios, cuidadosamente diseñadas por investigadores reconocidos en el área y amplia experiencia en el campo en el que transfieren, que llegan a muchos usuarios y que atañen a ámbitos relevantes de la posible transferencia de la investigación en educación matemática. Además, inician el diálogo con los agentes implicados sobre qué entendemos por transferencia y posibles buenas prácticas.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado en la RED-IEMaT (RED2024-153756-T, Ministerio de Ciencia e Innovación, Gobierno de España).

Referencias

Aguilar, M. S., Kuzle, A., Wæge, K. y Misfeldt, M. (2019). Introduction to the papers of TWG23: Implementation of research findings in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van der Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4355–4362). Freudenthal Group & Freudenthal Institute; Utrecht University; ERME.

Blanco, L. J., Climent, N., González-Astudillo, M. T., Moreno, A., Sánchez-Matamoros, G., de Castro, C., y Jiménez, C. (Eds.) (2022). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*. SEIEM.

Burkhardt, H. y Schoenfeld, A. H. (2020). Not just "implementation": The synergy of research and practice in an engineering research approach to educational design and development. *ZDM Mathematics Education*, 53, 991–1005. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01208-z

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., y Hiebert, J. (2019). Research pathways that connect research and practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *50*(1), 2–10. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.1.0002

Coles, A., Black, L., y Jones, K. (2020). Towards the next 21 years of Research in Mathematics. Education, *Research in Mathematics Education*, *22*(1), 1–2. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1744477

Jankvist, U. T., Aguilar, M. S., Misfeldt, M., y Koichu, B. (2021). Launching Implementation and Replication Studies in Mathematics Education (IRME). *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *1*(1), 1-19. https://doi.org/10.1163/26670127-01010001

Jankvist, U. T., Sánchez Aguilar, M., Misfeldt, M., y Koichu, B. (2022). How about Fidelity? *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *2*(2), 131-148. https://doi.org/10.1163/26670127-02012020

Koichu, B., Misfeldt, M., Sánchez Aguilar, M., y Jankvist, U. T. (2024). About Implementability. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *4*(2), 161-176. https://doi.org/10.1163/26670127-00402001

Levine, D. U., y Cooper, E. J. (1991). The change process and its implications in teaching thinking. In L. Idol y B. Jones (Eds.), *Educational values and cognitive instruction* (pp. 387–408). Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2016). Research in mathematics education. *Review of Research in Education*, *40*(1), 497–528. http://doi:10.3102/0091732X16658650

Zehetmeier, S. y Krainer, K. Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers' professional development. *ZDM Mathematics Education*, *43*, 875–887. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0358-x

DE LA INVESTIGACIÓN AL AULA: CAMINOS Y DESAFÍOS PARA UNA TRANSFERENCIA EFECTIVA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

From Research to the Classroom: Pathways and Challenges for Effective Transfer in Mathematics Education

Ayala-Altamirano, C.[a] y Cortiñas, J. R.[b]

[a]Universidad de Málaga, [b] CEIP Mediterráneo de Melilla

Resumen

En esta ponencia se expone la reflexión sobre la transferencia del conocimiento desde la investigación en educación matemática hacia la formación inicial docente y las aulas de educación primaria, desde la mirada de una formadora novel y un maestro en ejercicio. Se plantea que transferir no significa aplicar modelos, sino generar condiciones para que quienes se forman y para el profesorado en ejercicio construyan conexiones significativas entre la teoría y práctica profesional. El trabajo aborda tensiones observadas en cada uno de los contextos y se ofrecen propuestas para mejorar la transferencia. Se concluye que una transferencia efectiva requiere prácticas colaborativas, entornos formativos reflexivos y recursos que visibilicen la complejidad del aula. Solo así es posible ampliar el impacto social de la investigación y acompañar a las futuras maestras y maestros y al profesorado en ejercicio en la construcción de una mirada profesional fundamentada y crítica.

Palabras clave: Investigación educativa, transferencia, formación docente, educación primaria

Abstract

This paper reflects on the transfer of knowledge from research in mathematics education to initial teacher training and primary education classrooms, from the perspective of a novice teacher trainer and a practising teacher. It is argued that transferring does not mean applying models but rather generating conditions for those in training and for the practising teacher to build meaningful connections between theory and professional practice. The paper addresses tensions observed in each of the contexts and offers proposals for improving transfer. It concludes that effective transfer requires collaborative practices, reflective learning environments and resources that make the complexity of the classroom visible. Only in this way is it possible to broaden the social impact of research and to accompany future teachers and practising teachers in the construction of an informed and critical professional outlook.

Keywords: *Educational research, transfer, teacher training, primary education*

El objetivo de esta ponencia es compartir una reflexión conjunta sobre lo que se espera de una transferencia efectiva de la investigación a distintos ámbitos de la educación matemática, a partir de dos trayectorias profesionales complementarias: la de una formadora novel universitaria y la de un maestro en ejercicio en la escuela primaria. Dos perspectivas que, desde lugares distintos, convergen en una misma pregunta: ¿qué se necesita para que la investigación en Educación Matemática sea un aporte efectivo y significativo en la formación y la enseñanza de las matemáticas? A continuación, presentamos las dos reflexiones.

Ayala-Altamirano, C. y Cortiñas, J. R. (2025). De la investigación al aula: caminos y desafíos para una transferencia efectiva en Educación Matemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

REFLEXIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE UNA FORMADORA NOVEL

En primer lugar, es necesario detenerme a clarificar mi comprensión de lo que significa transferencia. Para mí la transferencia implica ir más allá de la idea de aplicar. Transferir significa promover condiciones para la construcción de conexiones entre el saber investigativo y la propia práctica profesional, esto a través de la *labor conjunta*[1]. Siguiendo las ideas de Lobato (2003, 2012) la transferencia debe ser orientada al actor o sujeto (*Actor-oriented transfer)*. Cuando la transferencia del conocimiento generado por la investigación en educación matemática (IEM) se dirige a la formación de docentes, asumo el rol de formadora, y las y los futuros docentes se constituyen en los actores principales del proceso. En cambio, cuando la transferencia se orienta a la formación de formadoras y formadores, soy yo quien adopta el rol de actriz que reflexiona críticamente sobre lo que necesita, valora y resignifica dicha transferencia. En ambos casos, el foco está en comprender cómo las personas que participan en el proceso construyen conexiones entre experiencias pasadas y nuevas situaciones, cómo interpretan y reconstruyen el conocimiento en función de sus experiencias, necesidades y contextos.

Lobato (2012) subraya la importancia de reconocer la agencia del sujeto en la transferencia y repensar los entornos formativos como escenarios que la favorezcan a través de la reflexión, el análisis situado y la exploración de múltiples interpretaciones. Complementariamente, Goldstone y Day (2012) nos invitan a reconocer que la transferencia del conocimiento también depende de factores como la motivación, la perspectiva del aprendiz y el diseño pedagógico. En esta conceptualización de lo que es la transferencia para mí, por último, también es muy importante reconocer que la transferencia puede tener distintos niveles de profundidad. Perkins y Salomon (1992), distinguen entre transferencia de bajo nivel (*low-road transfer*), que ocurre de manera automática en contextos similares, y transferencia de alto nivel (*high-road transfer*), que requiere esfuerzo consciente, reflexión y abstracción de principios generales para ser aplicados en situaciones nuevas. Esta distinción me anima a reflexionar sobre cuál es el alcance esperado de la transferencia.

La formadora o el formador como agente en la transferencia de la IEM

Hablar de formación inicial docente implica, necesariamente, comenzar por quien forma. Antes de mirar a las y los futuros docentes, es preciso mirar a la persona que forma: a sus saberes, decisiones y modos de practicar la docencia universitaria. Esto no responde a una cuestión de protagonismo, sino a la convicción de que las condiciones que habilitan aprendizajes de calidad se configuran, en primera instancia, desde quien los facilita o las hace visibles y muestra a las y los futuros docentes. Como señalan Ball et al. (2009), la calidad de la formación está estrechamente ligada al trabajo de quienes la imparten, y su desarrollo profesional requiere también de reflexión, diálogo y colaboración. Por eso, al pensar en la transferencia del conocimiento generado por la investigación hacia la formación inicial de docentes, resulta necesario detenerse en el rol la persona formadora, como nexo entre el conocimiento generado por la IEM y las prácticas.

Esta necesidad se vuelve aún más evidente en el ámbito universitario, donde los perfiles profesionales de quienes imparten las asignaturas sobre didáctica de la matemática son diversos. Algunos formadores cuentan con formación específica en didáctica de la matemática, mientras que otros provienen de campos afines y deben construir su identidad profesional sobre la marcha. En muchos casos, las tareas de formación se abordan desde la propia experiencia como estudiantes, y no necesariamente desde una perspectiva didáctica especializada. Esto genera tensiones y objetivos dispares para una misma asignatura, lo que evidencia la urgencia de consolidar una identidad compartida que oriente la enseñanza de la didáctica de manera coherente.

1 La labor conjunta se refiere al trabajo compartido entre docentes y estudiantes para construir saberes de manera colaborativa, en un ambiente de diálogo, respeto y participación activa (Radford, 2020).

Desde esta perspectiva, considero que la investigación en didáctica de la matemática tiene un papel clave en la construcción de dicha identidad. Sería valioso que, desde comunidades académicas y distintos grupos de investigación de la SEIEM, se impulsaran materiales, recursos y espacios de discusión que permitan a los formadores analizar sus prácticas, compartir experiencias, exitosas o no, y construir colectivamente modelos de referencia sobre lo que se espera en una clase de didáctica de la matemática. Actualmente existen espacios para compartir los resultados de investigaciones, pero falta mayor difusión de reuniones en las que se discutan prácticas llevadas a cabo sin un carácter investigativo, lo que no quita que estén fundamentadas en la investigación. Foros en los que se discuta cómo enseñar ciertos elementos y compartir actividades que a juicios de los formadores han sido exitosas. En esta línea, el libro *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (Blanco et al. 2022), incluye un capítulo sobre formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas (Llinares et al., 2022), ofreciendo ejemplos potentes sobre cómo organizar discusiones didácticas y presentar tareas contextualizadas para la educación primaria y secundaria. Estas propuestas, que articulan referentes teóricos con ejemplos prácticos, constituyen modelos que podrían replicarse y adaptarse a otras temáticas.

Desde mi experiencia como formadora novel, enfrentarme por primera vez a la preparación de una asignatura supuso un desafío tan estimulante como complejo. En ese proceso, recurrí con frecuencia a los ejemplos y orientaciones de colegas con mayor experiencia, así como a la literatura actual en didáctica de la matemática, en busca de inspiración para diseñar mis clases. Sin embargo, advertí que contar con acceso a materiales y tareas no siempre garantizaba una comprensión profunda de su sentido pedagógico. Una cosa es disponer de recursos sin contexto, y otra muy distinta es contar con materiales que integren reflexiones sobre su implementación: las reacciones del alumnado, las dificultades frecuentes, los aspectos que suelen generar confusión y los enfoques más efectivos para abordarlos.

A partir de mi experiencia, he identificado algunos vacíos en los recursos disponibles para la formación inicial docente. Si bien muchas investigaciones describen el conocimiento que poseen las y los futuros docentes, se podrían complementar con otras que aborden cómo ese saber se moviliza y se transforma en conocimiento especializado para la enseñanza. Se requiere, por tanto, más producción de materiales contextualizados que incluyan orientaciones claras sobre la gestión de tareas en el aula universitaria, así como sobre las respuestas reales del estudiantado en formación. Resultan valiosos los recursos que permiten interpretar y adaptar experiencias concretas, como tareas comentadas, estudios de caso, secuencias didácticas con sugerencias de implementación y registros en video.

Además, se podrían crear oportunidades sistemáticas y colaborativas para que quienes formamos docentes podamos también aprender a enseñar la enseñanza. Esto implica promover espacios de formación continua, observación entre pares, análisis conjunto de prácticas y procesos de mentoría. Documentar y compartir estas experiencias contribuiría a construir una memoria profesional accesible, especialmente útil para quienes inician su trayectoria como formadoras o formadores. En este marco, la transferencia del conocimiento académico a la práctica requiere modelos de enseñanza que puedan analizarse, adaptarse y ensayarse en contextos diversos. Sé que esto puede ser complejo y costoso, pero como sostienen Ball et al. (2009), este proceso no puede depender solo de iniciativas individuales, sino que exige condiciones institucionales, curriculares y pedagógicas que lo hagan posible.

Una mirada personal de la transferencia de la IEM a la formación inicial docente

Tal como se planteó al inicio de esta ponencia, la transferencia del conocimiento está estrechamente ligada a las experiencias previas, por tanto, la transferencia que realizo como formadora de maestras y maestros está condicionada a mi propia experiencia. En mi caso, mi trayectoria comienza cuando inicio mis estudios en el grado de maestra de Educación Primaria con especialización en Educación

Matemática en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Esa formación inicial me permite hoy, como formadora universitaria, ponerme en el lugar de mis estudiantes y preguntarme críticamente: ¿qué aspectos de mi formación me fueron realmente útiles al enfrentar la profesión docente? ¿Qué saberes sostuvieron mis decisiones pedagógicas y cuáles sentí que me faltaban?

Transferir para comprender(se). Al igual que muchas y muchos de mis estudiantes actuales, mi experiencia escolar estuvo marcada por un enfoque tradicional de la enseñanza, e incluso cursé parte de mi formación en el marco de las denominadas *matemáticas modernas*, ampliamente cuestionadas por la literatura didáctica. Mi primer desafío, entonces, fue transformar mi visión sobre lo que significa enseñar y aprender matemáticas. Uno de los referentes clave en esa etapa fue el libro *Didáctica de las matemáticas para primaria* de Chamorro (2003), que se convirtió en la puerta de entrada a una mirada más profesional y fundamentada del quehacer docente. A este se sumaron otras obras que me ofrecieron no solo claridad conceptual y propuestas prácticas, sino también un lenguaje profesional compartido que enriquecía el diálogo con mis compañeras, compañeros y profesoras, entre ellas algunos títulos de la colección *Matemáticas, Cultura y Aprendizaje* de la editorial Síntesis: Fracciones (Llinares y Sánchez, 1988), Numeración y cálculo (Gómez, 1987), Azar y probabilidad (Godino et al., 1987), e Invitación a la didáctica de la geometría (Alsina et al., 1987).

Es así como el primer nivel de transferencia desde la investigación a mi formación consistió en adquirir ese lenguaje especializado, que me permitió comenzar a observar la práctica de la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva de la didáctica de la matemática. Pero leer, por sí solo, no garantiza una transferencia auténtica; fue a través de las experiencias prácticas vividas en el aula universitaria donde ese conocimiento cobró verdadero sentido. Recuerdo con especial gratitud a mis profesoras Ivette León y Pierina Zanocco, quienes lograron mostrarme cómo se aprende matemáticas tanto desde la experiencia como desde la teoría, mediante actividades concretas, el uso de materiales didácticos variados y discusiones fundamentadas en la didáctica de la matemática. Con ellas, lo que leía en los textos cobraba vida en la práctica: no se trataba solo de estudiar enfoques didácticos, sino de vivenciarlos y analizarlos críticamente desde la reconstrucción de los propios conocimientos matemáticos. Por eso, en mi caso, la transferencia del conocimiento no fue simplemente la lectura de textos especializados en didáctica de la matemática, sino más bien un proceso dialógico y experiencial, en el que teoría y práctica se entrelazaron.

Hoy, como formadora, reconozco la importancia de ofrecer a las y los futuros docentes experiencias similares. Sin embargo, en el contexto que me ha tocado desempeñarme, observo que muchos llegan con un conocimiento matemático fragmentado y con emociones negativas hacia la disciplina. Mi primer objetivo, entonces, es ayudarlos a reconstruir esa relación con las matemáticas, mostrándoles que pueden comprenderlas, hacerlas suyas y enseñar desde esa comprensión. Este tipo de transferencia, que considero propia de un nivel inicial de transferencia, implica adquirir un vocabulario didáctico, reflexionar sobre el propio aprendizaje y conocimiento matemático, y, sobre todo, desarrollar una disposición positiva hacia la construcción de herramientas que puedan proyectarse en la futura práctica docente.

Es importante señalar que, con el tiempo, y a medida que mi formación se ha ampliado al cursar dos másteres en didáctica de la matemática, uno de ellos en la Universidad de Granada, y al desarrollar mi tesis doctoral en esta misma institución y área, mis referentes teóricos también se han ampliado y actualizado. Por mencionar algunos, destaco las contribuciones de Alsina (2019), Carrillo et al. (2016), Castro y Castro (2016), Clements y Sarama (2015) y Flores y Rico (2015). Ahora bien, aunque mi expectativa sería que las y los futuros docentes pudieran leer estos trabajos con profundidad y espíritu crítico, tal como me fue exigido durante mi formación, he constatado que existen dificultades reales para acceder a estos textos y comprenderlos en su totalidad. Esto me ha llevado a seleccionar fragmentos clave que permitan introducir gradualmente las ideas centrales.

Considero necesario seguir buscando estrategias para mediar estos contenidos y, a la vez, valoro profundamente las experiencias de quienes han logrado fomentar lecturas más completas y reflexivas en sus estudiantes. En este sentido, abrir espacios para compartir dichas experiencias entre formadores puede enriquecer colectivamente nuestras prácticas y la transferencia de la investigación.

En este apartado he descrito un primer nivel de transferencia, creo que sin esta base resulta difícil avanzar hacia transferencias más complejas, como aquellas que exigen comprender los procesos de aprendizaje de sus futuros estudiantes y tomar decisiones pedagógicas fundamentadas. Esto implica apertura para cuestionar creencias previas, revisar las propias experiencias como estudiantes y construir herramientas conceptuales y pedagógicas que puedan proyectarse en la futura práctica docente.

Transferir para comprender a quien aprende. Un siguiente nivel de transferencia, desde mi perspectiva, exige la capacidad de comprender los procesos de aprendizaje que viven otras personas, en mi caso niñas y niños de educación infantil y primaria. Esto implica no solo conocer teorías o resolver tareas desde la propia comprensión, sino también desarrollar sensibilidad hacia el contexto educativo real y hacia las experiencias concretas del alumnado.

¿Por qué considero que no superar el primer nivel de transferencia obstaculiza la posibilidad de avanzar hacia una transferencia en este nivel? Lo ilustraré con un ejemplo. En una de las asignaturas de formación inicial de maestros, trabajamos con distintas estrategias para sumar y restar con llevadas con el objetivo de comprender y darle sentido a los algoritmos. Mis estudiantes no solo lograron resolver la tarea, sino que, en muchos casos, reconocieron que se habían detenido a pensar en el significado de expresiones como “llevar” o “pedir prestado”. Ese momento de comprensión fue valioso. Sin embargo, surgieron dudas: algunas personas manifestaron escepticismo sobre si una niña o un niño podría comprender algo que, a ellas y ellos, como adultos, les había resultado difícil.

Esta reacción no fue aislada, sino que se ha repetido en diferentes asignaturas y con distintos contenidos del grado en educación infantil y primaria. A lo largo de mi trayectoria, primero como estudiante y ahora como formadora, he observado que cuando una tarea se percibe como compleja o ajena, muchas veces se recurre a explicaciones tradicionales que forman parte de las experiencias previas y se desechan propuestas innovadoras fundamentadas en la didáctica de la matemática. La lógica que subyace es simple, pero limitante: si a una persona adulta le cuesta comprender una idea, se asume que no es apropiada para niñas o niños. Es en ese punto donde se interrumpe el proceso de transferencia.

Estas inseguridades revelan una brecha entre el conocimiento matemático y la capacidad de proyectar su enseñanza en contextos reales. No basta con proponer tareas desafiantes respaldadas por la investigación. Es necesario contar con materiales que ayuden a visualizar su implementación y a anticipar las posibles respuestas del estudiantado. Aquí es donde la investigación didáctica puede aportar más.

Superar este obstáculo requiere visibilizar ejemplos concretos. Ver cómo niñas y niños piensan, razonan y construyen sentido matemático permite reconocer que ese aprendizaje es posible. Por eso, es clave que la investigación ofrezca representaciones contextualizadas de la práctica docente: no solo datos cuantitativos, sino también registros narrativos, producciones del alumnado, secuencias de aula y análisis de casos reales. Para que el conocimiento sea transferible, las situaciones de aula deben poder reconstruirse, especialmente para quienes tienen escasa o nula experiencia directa con los niveles educativos que aspiran a enseñar. Desde mi rol como formadora, he constatado lo difícil que puede resultar acceder a este tipo de casos con fines formativos. Aunque en la actualidad existen muchas experiencias compartidas en plataformas digitales, con frecuencia carecen de una intencionalidad didáctica clara, lo que dificulta su aprovechamiento en contextos de formación inicial.

En definitiva, el análisis de representaciones de la práctica, tales como videos, relatos de aula o producciones del alumnado, permite vincular la teoría con situaciones reales de enseñanza. Según lo planteado por Llinares et al. (2022) este tipo de recursos facilita que el profesorado en formación centre su atención en aspectos esenciales del aprendizaje del estudiantado y desarrolle una comprensión más situada y reflexiva de la práctica docente. Por este motivo, necesitamos más evidencia que permita entender qué ocurrió en el aula, cómo se respondió desde la docencia y qué se aprendió en ese proceso. Esto enriquecerán nuestras prácticas formativas y nos permitirá acompañar a futuros docentes en la construcción de una mirada profesional fundamentada, capaz de tomar decisiones sensibles a la diversidad de sus estudiantes. Porque no se trata solo de romper barreras personales frente a las matemáticas, sino también de construir una mirada pedagógica que reconozca, valore y entienda al alumnado.

En lo personal, este último aspecto me costó desarrollarlo en mis primeros años como docente en educación primaria. Llegué al aula con expectativas altas y con el deseo de aplicar todo lo que había leído y estudiado. Sin embargo, pronto comprendí que la realidad escolar es más compleja. Fue necesario observar y entender el contrato didáctico ya instaurado en el aula antes de poder proponer nuevas formas de enseñar. No fue un proceso sencillo. Supuso reconocer los límites de mis saberes iniciales y desarrollar una mirada pedagógica más sensible y contextualizada. Con el tiempo entendí que, de haber contado con más oportunidades para analizar casos reales y observar prácticas concretas durante mi formación, posiblemente habría adquirido herramientas más sólidas para tomar decisiones pedagógicas ajustadas a las características de cada grupo y situación.

Transferir para crear experiencias de aprendizaje. Un nivel más complejo de transferencia se manifiesta cuando el conocimiento didáctico proveniente de la investigación no solo se comprende o se aplica en contextos de enseñanza en el aula universitaria, sino que se utiliza para diseñar y secuenciar nuevas experiencias de aprendizaje. Este tipo de transferencia requiere tomar decisiones fundamentadas sobre qué enseñar, cómo enseñarlo y en qué momento, considerando el contenido, el contexto y las características del estudiantado. Como han señalado Llinares et al. (2022), esta capacidad de reconocer el potencial didáctico de las tareas y de gestionar secuencias coherentes es un componente central del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas.

Desde mi experiencia, este nivel de transferencia ha estado presente en distintos momentos de mi trayectoria. Uno de los más exigentes ha sido mi labor como editora y autora de textos escolares de matemáticas. Esta tarea implica diseñar propuestas completas para distintos niveles educativos, estructurar progresiones de aprendizaje y tomar decisiones pedagógicas alineadas con el currículo. El desafío no radica solo en seleccionar tareas apropiadas, sino en hacerlo para un grupo hipotético de estudiantes, asumiendo que han avanzado de forma casi homogénea. Además, las limitaciones editoriales, como el número de páginas o el diseño gráfico, obligan a crear materiales que, sin perder rigor didáctico, sean adaptables a las distintas circunstancias del aula.

Hablar de este tipo de transferencia implica, ante todo, asumir una postura crítica frente al currículo. No se trata solo de implementarlo, sino de analizarlo, cuestionarlo y transformarlo en situaciones de aprendizaje que sean desafiantes, contextualizadas y coherentes con los aportes de la investigación en educación matemática. Tanto en la creación de textos escolares como en el diseño de propuestas para el aula, es necesario interrogar el currículo vigente, identificar vacíos, repeticiones innecesarias o desarticulaciones y construir una progresión de contenidos que promueva aprendizajes significativos. Esta mirada crítica es fundamental para poder adecuarlo a las características reales de cada nivel educativo.

En mi rol actual como formadora, propongo instancias para que el alumnado diseñe situaciones de aprendizaje. En general, de manera espontánea parten de actividades que les resultan interesantes y desde ellas intentan ajustar objetivos. Aún me resulta difícil mostrarles, en el tiempo disponible, cómo partir de una intención didáctica clara y planificar actividades que se articulen en torno a un objetivo

común. También cuesta que tomen decisiones sobre lo que es apropiado para un curso u otro. Estas dificultades también se observan en docentes en ejercicio. En mi experiencia editorial, muchas maestras y maestros destacados en la enseñanza de la matemática tenían dificultades al crear materiales educativos. Aunque se les invitaba a actuar como autores de propuestas didácticas, no siempre lograban traducir su experiencia en materiales de calidad, y por lo general sus decisiones se basaban en la observación de otros textos escolares, y no en la investigación didáctica.

Considerando que el primer recurso a consultar tiende a ser otro texto escolar, en la Figura 1 presento ejemplos de guías didácticas para el aula de infantil y primaria, diseñadas en 2006 para escuelas chilenas que me inspiraron en mi formación inicial y en mi labor editorial. Su creación contó con el apoyo de un equipo de investigadores en didáctica de la matemática: Guy Brousseau, Mariana Bosch y Josep Gascón. Destaco este recurso porque sus propuestas para la enseñanza me permitieron visualizar la progresión del conocimiento matemático, identificar variables didácticas relevantes, analizar con mayor claridad las decisiones pedagógicas implicadas y tener ejemplos de evaluación del conocimiento matemático. Parte de este material también lo he compartido con mi alumnado de los grados de Educación Infantil y Primaria, y he podido observar que les resulta útil para comprender los principios que orientan el diseño de tareas. Aunque la creación de nuevas propuestas didácticas sigue siendo un desafío complejo, contar con modelos bien fundamentados facilita la reflexión y fortalece los procesos de diseño.

Figura 1

Ejemplo de guías didácticas proyecto Asesoría a la Escuela para la Implementación Curricular en Lenguaje y Matemática, LEM

Un reto para avanzar en este nivel de transferencia es que la investigación haga explícitas las intenciones didácticas que sustentan las tareas. No se trata de ofrecer un marco teórico extenso, sino de proporcionar orientaciones claras que permitan comprender el sentido de las propuestas y cómo se ha evaluado el conocimiento matemático. Esto no solo facilita su aplicación, sino que favorece su adaptación a distintos contextos y la creación de nuevas tareas con características similares. Mi llamado es a buscar instancias de creación de materiales y textos escolares que cuenten con sustentos didácticos sólidos, compartir y validar estos materiales en distintos centros educativos.

Para finalizar mi reflexión

A lo largo de este recorrido, he comprendido que la transferencia no puede reducirse a aplicar conocimientos o replicar prácticas. Tal como planteo al inicio, transferir implica promover condiciones para que el conocimiento investigativo se articule con la práctica profesional de forma situada, reflexiva y compartida. Reflexionar sobre la transferencia desde la mirada de una formadora novel, que a la vez fue formada para ser maestra de primaria, me ha permitido identificar aspectos esenciales para reflexionar sobre su profundidad y alcance. En este recorrido, destaco:

- La transferencia, en relación con la formación inicial de profesorado, comienza por quien forma: es necesario que el formador reconstruya su propio conocimiento desde la investigación para poder generar experiencias formativas significativas.
- Es crucial atender a las emociones y creencias previas de las y los futuros docentes, ya que pueden condicionar la posibilidad de incorporar enfoques didácticos en su quehacer docente.
- La visibilización de la práctica real, mediante producciones del alumnado, secuencias de aula o estudios de caso, resulta indispensable para favorecer una comprensión más sensible y profesional del aprendizaje matemático.
- Finalmente, la transferencia más compleja ocurre cuando el conocimiento no solo se comprende, sino que se transforma en nuevas propuestas de enseñanzas, creadas de manera contextualizada y fundamentadas en principios didácticos que implican la interpretación del currículo de matemática vigente.

Desde esta perspectiva, la investigación en Educación Matemática puede ampliar su impacto social cuando genera recursos accesibles, articulados con la práctica y sensibles al contexto. Una buena práctica de transferencia implica acompañar procesos, no imponer modelos; mediar entre teoría y aula; y, sobre todo, reconocer al otro como constructor activo del conocimiento a transferir.

REFLEXIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE UN MAESTRO EN EJERCICIO

Como maestro de educación primaria en ejercicio (soy maestro y jefe de estudios de Educación Primaria), mi día a día está marcado por el desafío constante de enseñar matemáticas de manera significativa y efectiva a niños y niñas en una etapa fundamental de su desarrollo cognitivo. Intento, sobre todo, que, de manera reflexiva y manipulativa, sean capaces de entender el entorno más inmediato, interpretarlo y resolver los problemas que puede acarrear su propio descubrimiento.

En este empeño, a menudo es bueno parar y preguntarse cómo la cantidad de conocimiento generado por la investigación en Educación Matemática puede realmente mejorar mi práctica en el aula. Esta comunicación surge pues de una reflexión personal sobre la distancia que a veces percibo entre el mundo académico de la investigación y la realidad palpable del aula, y sobre los caminos y desafíos necesarios para construir puentes sólidos que permitan una transferencia efectiva del conocimiento. Basado en una serie de interrogantes a los que intento “darme” respuesta, exploraré mi visión sobre este proceso de mejora de la educación matemática aplicada a mi día a día.

Qué “es eso” de la transferencia de la investigación en Educación Matemática y dónde estoy

Para mí, la transferencia de la investigación en Educación Matemática no es un acto unidireccional de "verter" conocimiento desde las instituciones o personas que puedan llevarla a cabo hacia el aula. La concibo como un proceso dinámico, complejo y, fundamentalmente, bidireccional. Creo que implica la traducción, adaptación y contextualización de los hallazgos, teorías y metodologías desarrolladas en el ámbito de la investigación para que sean comprensibles, relevantes y aplicables en los diversos contextos educativos, especialmente en el aula de primaria.

Pero, esa transferencia efectiva también pienso que implica que las preguntas, los desafíos y las innovaciones que surgen de la práctica docente informen y enriquezcan las agendas de la investigación. Es un ciclo de retroalimentación mutua, donde la teoría da luz a la práctica y ésta genera nuevas preguntas para la teoría. No se trata de que yo, maestro, simplemente "aplique" recetas, sino de que me apropie de “lo sustancial”, lo adapte a la realidad y reflexione críticamente sobre su impacto. Es un proceso de construcción mutua de conocimiento pedagógico y matemático.

Situados ya en este contexto, mi ámbito de transferencia por excelencia es el aula de educación primaria, un espacio vibrante y cambiante a diario. Aquí, la investigación se encuentra con la heterogeneidad de un grupo de estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje, estilos cognitivos,

experiencias previas con las matemáticas y contextos sociofamiliares diversos, al menos en mi centro de trabajo. Es un entorno donde la gestión del tiempo es crucial, los recursos, a veces, son limitados y las demandas curriculares son amplias y van "con el cronómetro". La transferencia en este ámbito no puede ser abstracta; debe ser concreta, práctica y adaptable. Implica considerar cómo las ideas de investigación pueden implementarse en actividades que capturen el interés de niños de 6 a 12 años (estos últimos en mi caso). Se plantea, entonces, cómo pueden estas ideas aplicarse a la gestión de las interacciones en el aula y a la diferenciación para atender a la diversidad, y cómo pueden integrarse en la planificación diaria y semanal. En este ámbito la investigación debe ser una herramienta para resolver problemas reales del aula, no una carga adicional o un conjunto de ideas desconectadas de la práctica y de la aplicación en los entornos más inmediatos, que es donde el verdadero aprendizaje tiene sentido.

¿Qué necesito pues que me aporte la investigación en Educación Matemática?

Yendo al grano, como maestro de primaria, necesito de la investigación en Educación Matemática aportaciones que sean directamente relevantes y aplicables para mi práctica. Esto incluye:

Una Comprensión profunda de cómo aprenden matemáticas los niños: Necesito saber cómo se desarrollan conceptos clave como el número, las operaciones, el espacio, la medida, la probabilidad en diferentes edades. La investigación puede ofrecer modelos de progresión del aprendizaje y ayudarme a identificar las ideas intuitivas (y a veces erróneas) que los niños construyen.

Del mismo modo, necesito estrategias didácticas basadas en evidencias, enfoques de enseñanza que hayan demostrado ser efectivos para abordar dificultades comunes, fomentar el razonamiento matemático, promover la resolución de problemas y desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas.

Otra de las aportaciones importantes para mi práctica docente es encontrar criterios para seleccionar y utilizar recursos y materiales, ante la gran cantidad de estos disponibles en la red. Necesito saber cuáles son más efectivos para determinados objetivos de aprendizaje y cómo utilizarlos de manera que potencien la comprensión conceptual, no solo la memorización de procedimientos.

Herramientas para la evaluación formativa. Es preciso saber con certeza, cómo diseñar tareas de evaluación que me proporcionen información rica sobre el pensamiento matemático de mis estudiantes, más allá de si la respuesta final es correcta o incorrecta.

La investigación puede ofrecerme marcos para analizar las producciones de los niños y adaptar mi enseñanza en consecuencia.

Algo que a veces queda en un segundo plano, es cómo afrontar la transmisión de conocimientos a mis alumnos/as y cómo gestionar el aula para el aprendizaje matemático. Para ello debería tener en cuenta cómo fomentar la discusión matemática, cómo gestionar el error de manera constructiva, y cómo promover la autonomía y la colaboración entre los estudiantes.

En resumen, necesito que la investigación me ayude a ser un maestro más informado, reflexivo y efectivo, capaz de tomar decisiones pedagógicas que optimicen el aprendizaje de mis estudiantes.

¿Y si colaboramos?

Tanto los que investigan en entidades "superiores" como aquellos que nos vemos inmersos en la vorágine y el reto diario de enseñar matemáticas, deberíamos tener un acceso fácil y directo que permitiese la transferencia de conocimientos eficaz. Para que maestros e investigadores colaboren en la detección de necesidades, pienso que se necesita crear espacios y estructuras que faciliten el diálogo y el trabajo conjunto que en mi opinión podrían desgranarse en los siguientes:

- Proyectos de Investigación-Acción Colaborativa: Esta es quizás una de las vías más interesantes. Investigadores y maestros se unen para identificar un problema real en el aula

(por ejemplo, dificultades con la comprensión de las fracciones o el pensamiento estocástico, que a veces crean muchas dificultades en el alumnado) y diseñan conjuntamente una intervención basada en la investigación, la implementan en el aula, recogen datos y analizan los resultados de manera colaborativa. Esto asegura que la investigación aborde problemas relevantes para la práctica y que los resultados sean directamente aplicables.

- Seminarios y Talleres de "ida y vuelta" Organizar encuentros donde los investigadores presenten sus trabajos de manera accesible, pero también donde los maestros tengan un espacio protagonista para exponer sus desafíos, compartir ejemplos de producciones de estudiantes que les generan preguntas, y plantear las problemáticas que enfrentan en su día a día. Estos espacios deben fomentar la discusión abierta y el intercambio de ideas.
- Crear grupos estables donde maestros e investigadores se reúnan periódicamente para discutir temas de interés común, analizar casos de aula, leer y debatir artículos de investigación (adaptados para la ocasión) y planificar acciones conjuntas.
- Estancias o Visitas Cruzadas: Facilitar que los investigadores pasen tiempo en las aulas, observando la práctica docente y las interacciones de los estudiantes, y que los maestros visiten los centros de investigación para conocer de cerca el trabajo que se realiza y plantear sus preguntas directamente.
- Plataformas Digitales: Desarrollar espacios online donde maestros e investigadores puedan compartir recursos, plantear preguntas, participar en foros de discusión y acceder a resúmenes de investigación adaptados.
- Mesas de Diálogo, Foros Permanentes o Intercambios de experiencias: Establecer encuentros regulares a nivel institucional (entre universidades y centros educativos o administraciones) para identificar prioridades de investigación que respondan a las necesidades del sistema educativo.

La clave creo que está en pasar de un modelo donde la investigación "informa" a la práctica, a un modelo donde la investigación y la práctica se ayudan mutuamente. A lo largo de más de veinte años de experiencia docente, he constatado que el aula de primaria requiere alimentarse, de forma directa y funcional, de los aportes de la investigación en Educación Matemática. No obstante, esta conexión no siempre se manifiesta de manera explícita ni resulta fácilmente accesible para el profesorado. Por ello, estimo fundamental que los resultados de la investigación, en sus diversos formatos y canales de difusión, lleguen a los docentes con un enfoque claro y una aplicabilidad concreta. Es necesario facilitar tanto el acceso a estos conocimientos como su transferencia efectiva al contexto escolar.

Los currículos de matemáticas a menudo se basan en modelos de progresión del aprendizaje y en resultados de investigación sobre cómo los niños desarrollan el pensamiento matemático en diferentes etapas y esto hace que, por ejemplo, cada vez más, los *materiales educativos* se diseñan siguiendo principios pedagógicos y didácticos derivados de la investigación, aunque la calidad y la fidelidad a estos principios pueden variar.

Seguramente otra de las claves, y en la que particularmente he incidido durante todos los años del ejercicio de mi profesión, ha sido la *Formación del docente* en el área de matemáticas. Los programas de enseñanzas universitarias en el ámbito de la Educación Primaria incluyen asignaturas de didáctica de las matemáticas que, idealmente, deberían estar fuertemente fundamentadas en la investigación actual. Y no sólo este aspecto, sino que es preciso que el docente adquiera conocimientos suficientes, claros y concisos de todas las áreas de las matemáticas, para que ello le permita reflexionar de manera clara todos los productos de la investigación, y ser capaz de transferirlos con éxito al aula.

Por eso, igualmente se hace fundamental el desarrollo de cursos, talleres y seminarios para maestros en activo que a menudo presentan estrategias y enfoques que provienen de la investigación ya que

muchas de las metodologías y enfoques innovadores que se promueven en las escuelas (como el aprendizaje basado en problemas o proyectos, el uso de determinados materiales manipulativos o tecnologías) tienen su origen o están respaldados por la investigación.

Sin embargo, también pienso que, la efectividad de "esta nutrición" depende en gran medida de la calidad de la "traducción" de la investigación a formatos accesibles para los maestros y de las oportunidades que tienen los docentes para acceder a estos recursos y reflexionar sobre ellos.

Y es que, para un maestro de primaria, los resultados de investigación más necesarios y útiles son aquellos que ofrecen una comprensión más profunda de los procesos de aprendizaje de los niños y que proporcionan orientaciones claras y prácticas para la enseñanza. ¿Cuándo no hemos pensado si algo lo estamos enseñando bien o mal desde el punto de vista no sólo de los contenidos, si no del nivel de comprensión de nuestros alumnos/as? Se podría incidir en muchos aspectos del área.

La investigación educativa puede y debe aportar respuestas a estas inquietudes, al brindar marcos que permitan anticipar las posibles dificultades de aprendizaje, interpretar los errores como oportunidades, y tomar decisiones didácticas fundamentadas. Por ejemplo, investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico, el uso de modelos como bloques multibase o regletas, o el valor de las representaciones visuales como diagramas y esquemas, han demostrado su potencial para ayudar al alumnado a construir significados conceptuales sólidos antes de enfrentarse a algoritmos abstractos. Del mismo modo, los estudios sobre resolución de problemas, sobre cómo abordar los errores de aprendizaje o sobre el papel de los factores socioafectivos ofrecen herramientas esenciales para una enseñanza más informada y sensible a la diversidad de formas en que los niños y niñas se acercan a las matemáticas. Estos son solo algunos ejemplos, pero en general, cualquier investigación que ofrezca una ventana al pensamiento matemático infantil y proporcione herramientas para interactuar con él de manera efectiva, pienso que es de un gran valor para los maestras y maestras que impartimos esta asignatura.

Tras este planteamiento, en el que hasta ahora he intentado plasmar el sentir de cómo entiendo la investigación y la transferencia de conocimiento en Educación Matemática a mi aplicación directa en el aula, quisiera hacer referencia a una serie de cuestiones que entiendo que pueden ser claves o importantes para que exista una transferencia efectiva y funcional de conocimiento.

- Relevancia Práctica: La investigación debe abordar preguntas y problemas importantes y urgentes para los maestros en su día a día. Si un resultado de investigación no me ayuda a entender mejor a mis alumnos o a mejorar mi enseñanza de manera tangible, es poco probable que lo incorpore.
- Accesibilidad y Comprensibilidad: Los resultados de la investigación deben ser presentados en un lenguaje claro, libre de "un lenguaje académico excesivo", y a través de canales que los maestros utilicen habitualmente.
- Contextualización y Flexibilidad: Las estrategias o recomendaciones derivadas de la investigación deben ser lo suficientemente flexibles como para ser adaptadas a la diversidad de contextos de aula (entornos escolares, diferentes niveles socioeconómicos, alumnos con distintas capacidades, etc.). No existen soluciones universales.
- Apoyo y Acompañamiento: La simple difusión de resultados no es suficiente. Los docentes necesitan oportunidades para discutir, experimentar, recibir feedback y resolver dudas a medida que intentan implementar nuevas ideas basadas en la investigación. La formación continua y el apoyo en el centro son cruciales.
- Valoración del Saber del Maestro: La transferencia debe ser un diálogo entre iguales, donde se valore tanto el conocimiento generado por la investigación como el saber práctico,

experiencial y contextualizado del maestro. Los maestros no son meros receptores, son agentes activos en la construcción y adaptación del conocimiento.

Por tanto… ¿Cómo sería una buena práctica de transferencia de investigación en Educación Matemática?

A modo de resumen, en coherencia con lo expuesto con anterioridad, creo que una buena práctica de transferencia de investigación en Educación Matemática, desde mi perspectiva, sería un proyecto que encarne los principios de colaboración, relevancia, accesibilidad, apoyo y sostenibilidad mencionados anteriormente. Imagino algo parecido a lo que expongo a continuación:

Equipos de investigación (ya sean de las propias escuelas de enseñanza del profesorado o entidades dedicadas a la divulgación Matemática, FESPM, por ejemplo) colaboran estrechamente con grupos de docentes coordinadores de los centros educativos de una determinada ciudad (en mi caso, Melilla). El proyecto comienza con sesiones de diálogo donde los maestros exponen las dificultades que observan en sus estudiantes (sirva a modo de ejemplo, al pasar del pensamiento aritmético al algebraico). Los Profesores investigadores presentan resultados clave de sus estudios sobre este tema, utilizando ejemplos y un lenguaje claro.

A continuación, investigadores y maestros trabajan conjuntamente para diseñar una secuencia didáctica y materiales manipulativos y visuales basadas en la investigación para abordar estas dificultades. Los maestros implementan estas actividades en sus aulas, mientras los investigadores realizan observaciones y recogen datos (trabajos de estudiantes, grabaciones de clase).

Regularmente, el grupo se reúne para analizar conjuntamente los datos, discutir los éxitos y desafíos de la implementación, y ajustar las estrategias. Los investigadores ofrecen *feedback* basado en su conocimiento teórico, mientras los maestros aportan su experiencia del aula y proponen adaptaciones.

El proyecto culminaría, por ejemplo, con la elaboración conjunta de una guía didáctica que recoja las estrategias y materiales desarrollados, validada por la investigación y la práctica. Además, se organizarían formaciones, donde los maestros participantes en el proyecto actúan como formadores, compartiendo su experiencia y los resultados obtenidos. Así, de aquí se puede interpretar que esta situación:

- Aborda una necesidad real y sentida por los maestros.
- Se basa en la colaboración y el respeto mutuo entre investigadores y maestros.
- Traduce la investigación a estrategias y recursos concretos y aplicables.
- Incluye apoyo y acompañamiento durante la implementación.
- Genera conocimiento práctico y validado que puede ser compartido con otros.
- Potencialmente, sienta las bases para futuras colaboraciones y para la creación de una comunidad de aprendizaje profesional.

Terminando y a modo de conclusión

Tras 20 años como docente de manera ininterrumpida, muchas veces he reflexionado sobre cómo somos capaces de recibir, la "a menudo", gran cantidad de investigaciones matemáticas que puedan surgir sobre áreas concretas de conocimiento y su aplicación efectiva.

Y seguramente no es una utopía, sino una necesidad imperante para mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje.

Requiere un esfuerzo consciente y colaborativo por parte de investigadores, maestros, centros educativos y administraciones. Desde mi posición como maestro, veo un enorme potencial en la investigación para enriquecer mi práctica, pero también identifico barreras significativas que deben

ser abordadas. Construir caminos sólidos para la transferencia implica derribar muros entre la teoría y la práctica, fomentar el diálogo y la colaboración y reconocer el valor del conocimiento que reside en la Universidad como centro productor importante.

Solo así podremos asegurar que los avances en la investigación se traduzcan en experiencias matemáticas más ricas, y con éxito para todos nuestros alumnos.

CONCLUSIONES

A lo largo de esta ponencia hemos compartido dos miradas complementarias sobre los desafíos de la transferencia de conocimiento desde la investigación en Educación Matemática hacia la formación docente y la práctica en el aula de primaria. Desde ambas perspectivas hemos coincidido en varios puntos que consideramos necesarios para avanzar hacia una transferencia más efectiva.

En primer lugar, se ha subrayado la necesidad de atender a la complejidad del aula de infantil y primaria, lo que exige una sensibilidad especial hacia los contextos reales en los que se enseña y aprende matemáticas. En este sentido, tanto la formación inicial como la investigación deben partir de las necesidades de las escuelas, trabajando en colaboración con quienes están inmersos en la práctica cotidiana. Además, se ha destacado la importancia de ofrecer ejemplos concretos y contextualizados que permitan a los futuros docentes visualizar a sus futuros estudiantes, comprender cómo piensan y aprenden matemáticas, y anticipar posibles dificultades.

En segundo lugar, se ha valorado el diálogo entre los distintos agentes implicados: investigadores, docentes (en activo y en formación) y formadores. Esta interacción no solo enriquece la producción de conocimiento, sino que también potencia su apropiación, reinterpretación e implementación en el aula. La transferencia de conocimiento debe sustentarse en canales accesibles para los docentes, acompañada de un asesoramiento continuo a lo largo del tiempo, a través de medios y espacios que ya hemos mencionado anteriormente. Es fundamental, además, que dicha transferencia resulte verdaderamente funcional para la práctica docente y que los conocimientos compartidos encuentren un encuadre coherente y pertinente en el currículo de la etapa educativa correspondiente.

En síntesis, coincidimos en que una transferencia efectiva no se limita a difundir resultados, sino que requiere canales accesibles, asesoramiento continuo y una clara conexión con la práctica docente. No se trata solo de que la investigación informe la práctica, sino de que ambas se nutran mutuamente. Desde nuestra experiencia, concebimos la transferencia como un proceso profundamente situado y orientado al sujeto que aprende. Nuestro aporte es humilde y se nutre de nuestras trayectorias profesionales particulares. Somos conscientes de que esta concepción puede ser enriquecida, cuestionada y mejorada desde otras miradas y experiencias profesionales, así como desde la voz de otros agentes educativos. Abrimos, por tanto, esta reflexión al diálogo y a la construcción colectiva.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.

Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis.

Ball, D. L., Sleep, L., Boerst, T. A., y Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of development in teacher education. *The Elementary School Journal, 109*(5), 458–474. https://doi.org/10.1086/596996

Blanco, L. J., Climent, N., González, M. T., Moreno, A., Sánchez-Matamoros, G., de Castro, C. y Jiménez, C. (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática.* SEIEM-Universidad de Granada. https://editorial.ugr.es/media/ugr/files/sample-139289.pdf

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D. I. y Flores, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Paraninfo.

Castro, E. y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en edad infantil.* Pirámide.

Chamorro, M. del C. (Coord.). (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Pearson Educación.

Clements, D. y Samara, J. (2015*). El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad.* Learning Tools LLC.

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.* Pirámide.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Síntesis.

Goldstone, R. L. y Day, S. B. (2012). Introduction to "New conceptualizations of transfer of learning." *Educational Psychologist, 47*(3), 149–152. https://doi.org/10.1080/00461520.2012.695710

Gómez, P. (1989). *Numeración y cálculo*. Síntesis.

Grossman, P., Hammerness, K., y McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 15*(2), 273–289. https://doi.org/10.1080/13540600902875340

Llinares, S., Breda, A., Climent, N., Fernández, C., Font, V., Lupiáñez, J. L., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 481–506). SEIEM-Universidad de Granada. https://editorial.ugr.es/media/ugr/files/sample-139289.pdf

Llinares, S. y Sánchez, V. (1988). *Fracciones: La relación parte-todo.* Síntesis.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and viceversa. *Educational Researcher, 32*(1), 17–20. https://doi.org/10.3102/0013189X032001017

Lobato, J. (2012). The actor-oriented transfer perspective and its contributions to educational research and practice. *Educational Psychologist, 47*(3), 232–247. https://doi.org/10.1080/00461520.2012.693353

Perkins, D. N. y Salomon, G. (1992). Transfer of learning. En T. Husén y T. N. Postlethwaite (Eds.), *International encyclopedia of education* (2nd ed., Vol. 11, pp. 6452–6457). Pergamon Press.

Radford, L. (2020). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 15–31.

DE LA INVESTIGACIÓN A LA FORMACIÓN MASIVA DEL PROFESORADO: UNA EXPERIENCIA CON CURSOS MOOC

From Research to Large-Scale Teacher Education: An Experience with MOOC-Based Training

Gómez, P.[a] y Velasco, C.[a]

[a]Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Resumen

En este documento, presentamos una experiencia de transferencia del conocimiento generado por la investigación en Educación Matemática hacia programas masivos de formación de profesores en línea. Basado en el modelo del análisis didáctico, en su versión de la Universidad de los Andes, diseñamos PRIMAT, un diplomado compuesto por tres cursos MOOC dirigido a profesores de primaria. Describimos cómo adaptamos marcos conceptuales a contextos digitales abiertos y masivos mediante estrategias específicas de mediación y acompañamiento tutorial. El análisis resalta que una transferencia efectiva requiere reelaborar el conocimiento de forma situada, involucrando activamente a investigadores, formadores y profesores. Los resultados evidencian el potencial del modelo del análisis didáctico para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos diversos y masivos.

Palabras clave: *análisis didáctico*, *educación matemática*, *formación de profesores*, *MOOC*, *transferencia de la investigación*

Abstract

In this document, we present an experience of transferring knowledge generated by research in Mathematics Education to large-scale online teacher education programs. Based on the didactic analysis model, as developed at Universidad de los Andes, we designed PRIMAT, a program consisting of three MOOC aimed at primary school teachers. We describe how conceptual frameworks were adapted to open and massive digital contexts using specific strategies for mediation, and tutorial support. The analysis emphasizes that effective transfer requires context-specific re-elaboration of knowledge, actively involving researchers, teacher educators, and practicing teachers. Results demonstrate the didactic analysis model's potential to enhance mathematics teaching and learning in diverse, large-scale contexts.

Keywords: *didactic analysis*, *mathematics education*, *MOOC*, *teacher education*, *transfer of research*

INTRODUCCIÓN

¿Cómo transferir los resultados de la investigación en Educación Matemática a programas de formación de profesores que logren un impacto amplio y sostenido? Esta pregunta ha orientado nuestro trabajo durante más de una década (Gómez et al., 2009), y cobra hoy especial relevancia ante los retos de ampliar el acceso a la formación continua en contextos en los que el déficit estructural es evidente. En Colombia y en muchos países de América Latina, la mayoría de los profesores de primaria que enseñan matemáticas no cuentan con formación específica en esta área, ni con acceso a programas formativos pertinentes.

Gómez, P. y Velasco, C. (2025). De la investigación a la formación masiva del profesorado: una experiencia con cursos MOOC. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

En este documento, relatamos una experiencia de transferencia de conocimiento desde el ámbito académico hacia entornos de formación de profesores en gran escala, mediada por tecnologías digitales. A partir del modelo del análisis didáctico, consolidado en el marco de la formación de profesores de secundaria, hemos diseñado e implementado un programa en línea dirigido a profesores de primaria, estructurado en torno a tres dimensiones: contenido, aprendizaje y enseñanza. Más allá de su diseño curricular, nuestro interés es mostrar cómo esta experiencia concreta permite reflexionar sobre los procesos de transferencia de la investigación en Educación Matemática, las condiciones que los hacen posibles y los desafíos que implica su sostenibilidad en contextos masivos.

TRANSFERENCIA DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La transferencia de la investigación en Educación Matemática se refiere al proceso en virtud del cual los conocimientos, teorías y modelos generados en contextos académicos de investigación se integran, adaptan y usan en escenarios educativos reales, como la formación de profesores, el diseño curricular y las prácticas de aula. Esta transferencia no consiste en una simple aplicación de resultados, sino en una reelaboración situada, que requiere mediación, interpretación pedagógica y toma de decisiones profesionalmente fundamentada. Como afirman Burkhardt y Schoenfeld (2003, p. 3), "Debe haber una coordinación mucho más estrecha entre la investigación, el diseño, el desarrollo, la política y la práctica".

Diversos estudios definen la transferencia como un proceso de construcción situada en el que investigadores y profesores colaboran para adaptar y reelaborar esos conocimientos en contextos reales de enseñanza. Por ejemplo, Gripton et al. (2025, p. 16) critican el enfoque lineal de "diseminación" y abogan por un intercambio bidireccional de conocimiento: los profesores no son receptores pasivos, sino agentes que interpretan y transforman la investigación para ajustarla a su contexto. De manera semejante, un informe de la OCDE sobre asociaciones investigación-práctica destaca que estas alianzas enfatizan la comunicación mutua y el co-diseño de proyectos, de modo que los profesores acceden a herramientas y formación para identificar y aplicar resultados de investigación en sus aulas, mientras los investigadores incorporan la experiencia práctica al desarrollo de su trabajo (Schlicht-Schmälzle et al., 2024, pp. 24-25).

Los conocimientos, teorías y modelos de la investigación didáctica se integran en los currículos y materiales educativos adaptándolos a las necesidades locales. Beltrán-Pellicer et al. (2024, pp. 63-64) señalan que esta integración exige colaboración entre académicos y profesores para adaptar las innovaciones educativas al aula, reconociendo que los recursos producidos por la investigación deben ser modificados para ser viables en la práctica.

Transferir investigación requiere mediación pedagógica. No basta con "entregar" resultados; es necesario traducirlos a prácticas didácticas significativas. Como explican Gripton et al. (2025), los hallazgos deben presentarse "no como soluciones definitivas sino como posibles formas de trabajar y pensar la práctica" (p. 16), de modo que los profesores se involucren críticamente, cuestionen y ajusten las ideas según su experiencia. De este modo, el conocimiento investigador permanece dinámico y es continuamente reformulado por medio de la acción docente.

Finalmente, la transferencia se sustenta en la toma de decisiones profesional. Los maestros valoran y adaptan la evidencia investigativa según sus valores educativos y el contexto de aprendizaje. El informe de la OCDE destaca que las asociaciones de tipo investigación – práctica (RPP —Research-Practice Partnerships—) preparan a los profesores para aplicar la investigación en el aula, mientras que la práctica docente informa de vuelta a la investigación, creando un bucle de retroalimentación que enriquece ambos campos (Schlicht-Schmälzle et al., 2024, p. 5). En resumen, la implementación de la investigación en el aula es un proceso dialógico y situado, no una transferencia automática de resultados.

En el ámbito de la formación de profesores de matemáticas, el trabajo de Ball y sus colegas sobre una "teoría del conocimiento matemático para la enseñanza basada en la práctica" distingue las diversas facetas del conocimiento que los profesores utilizan en el aula, desde el conocimiento especializado del contenido hasta el conocimiento del horizonte y el conocimiento del pensamiento de los estudiantes (Hill et al., 2008, p. 377). Como este, hay diversos modelos que describen el conocimiento del profesor y que pretenden guiar la formación inicial y permanente de profesores de matemáticas (p. ej., Carrillo-Yañez et al., 2018; Godino et al., 2007). En este trabajo, centramos nuestra atención en el modelo del análisis didáctico originado en la Universidad de Granada (Gómez, 2007; Rico et al., 2013) y desarrollado después en su versión de la Universidad de los Andes (Gómez, 2018b).

Estos marcos conceptuales ofrecen una base sólida para interpretar el conocimiento del profesor y lo que sucede en las aulas, pero, por sí solos, no son suficientes para cambiar la práctica. Traducirlos en un aprendizaje profesional concreto exige diseñar tareas y actividades que permitan a los profesores "vivir" el marco en su propio aprendizaje (da Ponte et al., 2009, p. 187). Como proponen Burkhardt y Schoenfeld (2003, p. 8), se requiere una investigación de ingeniería ("engineering research") que combine diseño imaginativo y pruebas empíricas de procesos hasta su implementación a gran escala. En lo que sigue, describimos nuestra experiencia en la transformación del modelo del análisis didáctico en un esquema de formación de profesores de primaria en matemáticas a gran escala.

CONTEXTO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE PRIMARIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En Colombia y en buena parte de América Latina, la formación de maestros de educación primaria enfrenta retos estructurales que inciden de manera directa en la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Uno de los más relevantes es que una proporción significativa de estos maestros no cuenta con formación específica en Educación Matemática (Senk et al., 2012) y, además, tiene un acceso muy limitado a oportunidades de formación continua en esta área. Esta situación se agrava especialmente en zonas rurales o en contextos escolares de bajo nivel socioeconómico, donde es común encontrar maestros sin formación en matemáticas o con escasa preparación didáctica (Figueroa et al. , 2018, pp. 35-36).

En este contexto, el modelo del análisis didáctico, desarrollado en su versión de la Universidad de los Andes, se ha consolidado como una herramienta potente para la formación de profesores de matemáticas, particularmente en los niveles de secundaria y media (Gómez, 2002, 2006, 2012). Este modelo ha sido producto de múltiples estudios realizados durante más de dos décadas, y constituye una propuesta estructurada para que los profesores aprendan a planificar, implementar y evaluar unidades didácticas de manera reflexiva, fundamentada y coherente con los principios del currículo.

Este enfoque ha sido la base para la creación de programas de formación como la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, y ha orientado propuestas innovadoras como el programa PRIMAT, un conjunto de tres MOOC que buscan acercar a los maestros de primaria al conocimiento matemático y didáctico necesario para enseñar matemáticas en la escuela. A pesar de que el modelo fue originalmente pensado para profesores de secundaria, los trabajos realizados en el marco de PRIMAT han mostrado su potencial para aplicarse en la formación de maestros de primaria, en tanto permite abordar los contenidos desde una perspectiva didáctica que articula el saber matemático con los procesos de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2018a).

Además, otros estudios han permitido caracterizar cómo son los profesores al iniciar su proceso de formación, cómo aprenden durante este proceso y qué dificultades enfrentan (González et al., 2020; Pinzón y Gómez, 2020; Pinzón et al., 2024). Entre los principales hallazgos se encuentra la dificultad para articular el conocimiento matemático con los conceptos pedagógicos, la tendencia a planificar desde la intuición más que desde la fundamentación teórica, y las limitaciones para prever las dificultades de los estudiantes o seleccionar tareas adecuadas para sus niveles de comprensión.

En conjunto, estos estudios no solo han contribuido a definir un modelo formativo, sino que también han generado conocimiento relevante sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En un contexto en el que la mayoría de los maestros de primaria no han tenido oportunidades sistemáticas de formación matemática y didáctica, el modelo del análisis didáctico representa una propuesta valiosa para apoyar su crecimiento profesional, mejorar su capacidad de reflexión sobre la enseñanza y, en última instancia, incidir en la calidad del aprendizaje matemático de sus estudiantes.

MODELO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

El modelo del análisis didáctico ofrece una perspectiva estructurada sobre los procesos que el profesor de matemáticas debe desarrollar para planificar, implementar y evaluar su enseñanza. Este modelo ha sido formulado y refinado a partir de estudios en el contexto de la formación inicial y continua de profesores de matemáticas, y propone una visión funcional del conocimiento profesional profesor.

El modelo del análisis didáctico se organiza alrededor de las cuatro dimensiones del currículo: conceptual, cognitiva, formativa y social. Cada una de estas dimensiones se asocia a un tipo de análisis que el profesor realiza para abordar de manera fundamentada un tema específico de las matemáticas escolares. Estos análisis permiten al profesor generar información relevante sobre el tema, anticipar el aprendizaje de los estudiantes, diseñar estrategias de enseñanza, y establecer procedimientos para evaluar tanto a los estudiantes como su propia práctica (Gómez, 2018b).

El análisis de contenido, correspondiente a la dimensión conceptual, implica la identificación y organización de los conceptos, procedimientos, sistemas de representación y fenómenos que estructuran un tema matemático. Este análisis permite al profesor construir una descripción rica y detallada del significado del tema en el contexto escolar, como base para tomar decisiones informadas sobre su aprendizaje y enseñanza (Cañadas et al., 2018).

Sobre la base del análisis de contenido, el profesor realiza el análisis cognitivo, asociado a la dimensión del aprendizaje. Este análisis le permite caracterizar las expectativas de aprendizaje, prever errores y dificultades comunes en los estudiantes y anticipar trayectorias hipotéticas de aprendizaje. El análisis cognitivo es fundamental para que el profesor pueda diseñar intervenciones didácticas que respondan a las necesidades reales de sus estudiantes (González y Gómez, 2018).

El análisis de instrucción, vinculado a la dimensión formativa del currículo, permite seleccionar y organizar las tareas de aprendizaje. Este análisis considera aspectos como la formulación de las tareas, su secuencia, los materiales y recursos necesarios, el tipo de interacción esperada en el aula y el agrupamiento de los estudiantes. El objetivo es diseñar una enseñanza coherente con los objetivos de aprendizaje y capaz de movilizar los significados relevantes del tema (Gómez et al., 2018).

Finalmente, el análisis de actuación, correspondiente a la dimensión social, se orienta a la evaluación. Aquí el profesor diseña instrumentos y procedimientos para recopilar información sobre el progreso de los estudiantes, la efectividad de la secuencia de enseñanza y el logro de los objetivos de aprendizaje. Esta evaluación no solo cumple una función de verificación, sino que también retroalimenta el proceso de planificación (Romero y Gómez, 2018).

Este modelo no se presenta como una receta, sino como una herramienta conceptual y metodológica que permite al profesor reflexionar sobre su práctica desde una perspectiva profesional y sistemática. Su valor radica en articular teoría e intervención, y en ofrecer una estructura clara para el desarrollo del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. Al poner en relación las diferentes dimensiones del currículo —contenido, aprendizaje, enseñanza y evaluación—, el análisis didáctico se configura como una propuesta integral para la formación y el desarrollo profesional profesor.

Conocimiento teórico, técnico y práctico

En el contexto de los programas de formación de profesores de matemáticas, particularmente aquellos basados en el modelo del análisis didáctico, el aprendizaje de conceptos pedagógicos puede

caracterizarse a partir de tres tipos de conocimiento: teórico, técnico y práctico (González y Gómez, 2014). Por ejemplo, los sistemas de representación y la noción de error son conceptos pedagógicos. El conocimiento teórico corresponde al significado del concepto pedagógico tal como es seleccionado y definido por los formadores en función de su utilidad para la planificación. Este conocimiento incluye las propiedades fundamentales del concepto, su relación con otros conceptos, y su definición intensional y extensional. El conocimiento técnico se refiere al conjunto de técnicas que permiten al profesor analizar un tema específico de las matemáticas escolares utilizando el concepto pedagógico. Estas técnicas deben estar fundamentadas en el conocimiento teórico y ser capaces de producir información relevante que pueda ser utilizada para fines didácticos. Finalmente, el conocimiento práctico comprende las técnicas que permiten tomar decisiones didácticas a partir de la información producida en el análisis técnico, ya sea para diseñar una unidad didáctica, seleccionar tareas o formular estrategias de evaluación. Estos tres tipos de conocimiento son distintos pero interdependientes: el desarrollo de uno puede provocar ajustes o avances en los otros. Además, estos conocimientos no se adquieren de manera lineal, sino que emergen y se fortalecen en procesos simultáneos, en los que la acción concreta del profesor en formación reconfigura su comprensión teórica y técnica del concepto (Gómez y González, 2013).

Papel del formador-investigador en el desarrollo del conocimiento profesional

Los programas de formación diseñados desde el modelo del análisis didáctico asumen una concepción social del aprendizaje profesional, en la que el conocimiento didáctico del profesor se construye en la práctica, en interacción con otros, y en torno al análisis sistemático de un tema matemático concreto (Gómez y González, 2013; Pinzón y Gómez, 2020). En este marco, los formadores e investigadores desempeñan un papel central: son ellos quienes se hacen responsables de seleccionar los significados teóricos de los conceptos pedagógicos y de organizar el discurso tecnológico que da sentido a las técnicas que configuran el uso técnico y práctico de esos conceptos. Es decir, los formadores asumen la responsabilidad sobre el conocimiento teórico y, desde allí, diseñan y proponen las técnicas que permitirán a los profesores en formación analizar temas matemáticos y tomar decisiones de planificación fundamentadas. Este proceso exige que los formadores identifiquen los aspectos clave del significado de cada concepto, diseñen tareas que activen su uso técnico y práctico, y acompañen a los grupos de profesores en la construcción progresiva de ese conocimiento. Así, el modelo no propone una enseñanza directa del conocimiento didáctico, sino una construcción situada y guiada, en la que el conocimiento profesional del profesor emerge como una amalgama de teoría, técnica y acción. Esta perspectiva reconoce la complejidad del aprendizaje del profesor y ofrece un marco estructurado para acompañarlo y evaluarlo en contextos reales de formación.

Esta concepción implica que la transferencia de la investigación no se limita a trasladar conocimiento, sino a diseñar condiciones para que ese conocimiento se reconstruya en la práctica docente, convirtiéndose así en una forma de mediación que articula teoría, técnica y acción en el desarrollo del conocimiento didáctico (Gómez, 2009, p. 103).

A lo largo de casi 15 años, el modelo del análisis didáctico y el diseño de los programas de formación basados en ese modelo han sido evaluados, revisados y modificados por los investigadores que han asumido, también, el rol de formadores. Este ha sido un proceso cíclico de revisión, mejora e implementación en el que los profesores en formación han jugado un papel fundamental. Son ellos quienes informan a los investigadores – formadores (con sus producciones en clase, comentarios y críticas) sobre la validez y utilidad que ellos perciben que las herramientas conceptuales y metodológicas propuestas tienen en su práctica, tanto al interior del programa, como en sus aulas (Pinzón, 2021; Pinzón y Gómez, 2023). De esta manera, el modelo y los programas de formación son el producto de una cooperación permanente y cíclica entre investigadores, formadores y profesores en formación.

FOCO

El foco de este documento es la formación de maestros de matemáticas de educación primaria, desde una perspectiva que reconoce el valor de la investigación en Educación Matemática y la necesidad de transferir sus resultados a contextos reales de formación. En este ámbito, la transferencia se expresa por medio de la incorporación de modelos de conocimiento profesional profesor —como el conocimiento teórico, técnico y práctico—, y de métodos de formación estructurados que permiten a los profesores apropiarse de herramientas para planificar, implementar y evaluar su enseñanza. A diferencia de modelos de formación más generales o instrumentales, aquí se asume que el conocimiento didáctico del profesor debe construirse desde el análisis sistemático de los objetos de enseñanza, y que esa construcción requiere no solo acceso a marcos conceptuales rigurosos, sino también oportunidades de participación en prácticas reflexivas, guiadas por formadores e investigadores.

Este enfoque genera desafíos concretos cuando se intenta ampliar el alcance de la formación a contextos masivos y digitales. Un problema central que abordamos en este documento es cómo adaptar el modelo del análisis didáctico —diseñado originalmente para contextos presenciales, colaborativos y prolongados— a entornos virtuales de tipo MOOC, en los que las condiciones de interacción, acompañamiento y evaluación son muy diferentes. En particular, examinamos las tensiones que emergen al intentar articular este modelo con la lógica de plataformas como Coursera, en la que el objetivo es ofrecer formación a gran escala, pero se enfrentan limitaciones como la baja retención de estudiantes y la dificultad para generar procesos formativos profundos y sostenidos. Proponemos que estas dificultades no deben abordarse como simples restricciones técnicas, sino como problemas de transferencia, que exigen repensar la forma en que se estructura la relación entre teoría, técnica y práctica en formatos abiertos y masivos.

PRIMAT

El programa PRIMAT (Educación Matemática para profesores de primaria) es una propuesta de formación continua en línea dirigida a profesores de educación primaria interesados en fortalecer su enseñanza de las matemáticas. Diseñado en la Universidad de los Andes y ofrecido en la plataforma Coursera, este programa responde a una problemática ampliamente documentada en Colombia y América Latina: la escasa formación específica en educación matemática de muchos profesores de primaria, y la limitada oferta de oportunidades de desarrollo profesional accesibles y sostenidas.

El diseño de PRIMAT se fundamenta en el modelo del análisis didáctico. A partir de este modelo, se reconocen y movilizan tres tipos de conocimiento que el profesor necesita desarrollar: el conocimiento teórico, relativo al significado de los conceptos pedagógicos; el conocimiento técnico, asociado al uso de esos conceptos para analizar y producir información sobre los temas matemáticos; y el conocimiento práctico, que permite usar la información producida para tomar decisiones en la planificación y desarrollo de la enseñanza.

El programa está constituido por tres cursos MOOC, cada uno dedicado a una de tres de las dimensiones del modelo (conceptual, cognitiva y formativa). El primer curso se centra en el análisis del contenido de cinco temas de las matemáticas escolares de primaria y utiliza los conceptos pedagógicos de estructura conceptual, sistemas de representación, fenomenología e historia. El segundo curso aborda las dificultades de aprendizaje asociadas a esos temas, explorando errores frecuentes de los estudiantes, limitaciones cognitivas y formas de anticipar y acompañar el aprendizaje por medio de expectativas, hipótesis y ayudas didácticas. El tercer curso se ocupa de la enseñanza, abordando la planificación por medio del diseño, análisis y secuenciación de tareas, entendidas como el núcleo estructurador del proceso de enseñanza y aprendizaje.

PRIMAT no se limita a ofrecer contenidos. En coherencia con el modelo de análisis didáctico, cada curso propone al profesor una secuencia de actividades (tareas de aprendizaje, tareas prácticas y

evaluaciones) que ponen en juego sus concepciones previas, abordan sus dificultades y lo involucran activamente en el análisis, la planificación y la toma de decisiones didácticas. Además, el programa ofrece acompañamiento tutorial permanente, una estrategia que busca contrarrestar los altos niveles de deserción típicos de los MOOC y crear condiciones de interacción formativa. Los profesores en formación deben completar todas las actividades, ver los videos y aprobar las evaluaciones con un mínimo del 80%. Aquellos que finalizan el programa obtienen una certificación expedida por Coursera y la Universidad de los Andes.

PRIMAT representa, así, una experiencia concreta de transferencia de la investigación en educación matemática a gran escala. A partir de un modelo conceptual consolidado y de conocimientos acumulados sobre la formación de profesores, hemos logrado adaptar y operacionalizar una propuesta formativa en un entorno abierto y masivo, sin perder de vista los principios fundamentales del aprendizaje del profesor.

RESULTADOS DE PRIMAT

El programa PRIMAT ha tenido un impacto significativo en la formación de profesores de educación primaria en matemáticas, tanto en Colombia como en otros países de América Latina. A mayo de 2025, en los tres cursos en línea del programa, se habían inscrito más de 82.000 personas en la plataforma Coursera. El programa de educación continua tiene una tasa de retención del 80 %, muy superior al promedio habitual de los MOOC. Estimamos que más de 3.000 profesores de primaria en Colombia han completado la formación de manera efectiva.

Uno de los logros más notables del programa ha sido su alcance: PRIMAT ha llegado a regiones rurales y apartadas en las que no existen oportunidades estructuradas de formación en educación matemática. Gracias a su diseño flexible, asincrónico y gratuito (gracias a becas de nuestros aliados), ha permitido que miles de profesores accedan a conceptos, herramientas y técnicas para mejorar su práctica pedagógica sin importar su ubicación geográfica o situación laboral.

Los comentarios de los participantes destacan de forma reiterada la claridad conceptual, la calidad del material didáctico, y la aplicabilidad inmediata en el aula. Muchos subrayan que el programa ha cambiado su manera de entender y enseñar las matemáticas, que ahora reconocen errores comunes en sus estudiantes y cuentan con estrategias para abordarlos, y que han fortalecido su capacidad de planificación y reflexión didáctica. En palabras de un profesor: “Con este curso, cada día me apasiona más la enseñanza de las matemáticas”.

Además, el acompañamiento tutorial y la estructura del programa, articulada en torno al modelo del análisis didáctico, han contribuido a que los profesores no solo accedan a contenidos, sino que desarrollen conocimiento técnico y práctico profesional en torno a su quehacer. La experiencia de PRIMAT constituye, por tanto, una evidencia concreta de cómo es posible transferir conocimiento producido en investigación a gran escala, manteniendo el rigor académico y adaptándolo a los formatos masivos en línea.

DISCUSIÓN

Nuestra experiencia con el programa PRIMAT constituye una aportación concreta al campo de la transferencia de la investigación en Educación Matemática, desde una perspectiva que busca articular teoría, técnica y práctica en contextos de formación masiva mediados por tecnologías digitales. Hemos logrado diseñar e implementar una propuesta formativa que, partiendo de un modelo consolidado como el del análisis didáctico, ha sido adaptada a los formatos y condiciones propias de los cursos MOOC. Esta adaptación no ha sido simplemente instrumental, sino que ha requerido de una reconstrucción reflexiva de los significados teóricos y de las estrategias didácticas, en diálogo constante con los resultados de nuestras propias investigaciones y con las necesidades de los profesores en ejercicio.

Cuando hablamos de transferencia de la investigación en Educación Matemática, nos referimos a un proceso situado, deliberado y estructurado, mediante el cual el conocimiento producido en contextos académicos se transforma en insumos útiles para la formación profesional profesor. No se trata de aplicar modelos de manera directa, sino de generar condiciones para que dichos modelos sean reinterpretados, apropiados y utilizados por los profesores en función de su contexto, sus necesidades y su estilo de enseñanza. Esta transferencia implica traducción, mediación y acompañamiento, y exige una comprensión profunda tanto del conocimiento que se transfiere como del contexto en el que se inserta.

El ámbito en el que nos situamos es el de la formación continua de profesores de educación primaria, en modalidades abiertas, masivas y en línea. Se trata de un espacio marcado por la heterogeneidad de los participantes, por la desigualdad en el acceso a oportunidades formativas, y por la necesidad urgente de fortalecer las capacidades pedagógicas y didácticas de quienes enseñan matemáticas en condiciones muchas veces precarias. En este contexto, los profesores necesitan marcos conceptuales claros, herramientas técnicas útiles y experiencias formativas que reconozcan su conocimiento previo y promuevan su reflexión profesional.

La investigación en Educación Matemática ofrece al ámbito de la formación de profesores un conjunto amplio de aportes: modelos de conocimiento profesional, estudios sobre errores frecuentes de los estudiantes, propuestas para el diseño de tareas significativas, y criterios para anticipar trayectorias de aprendizaje. En nuestro caso, conceptos pedagógicos como estructura conceptual, fenomenología o expectativas de aprendizaje han sido fundamentales para diseñar actividades formativas que permiten a los profesores analizar, planificar y evaluar sus propias prácticas. Estos conceptos, lejos de ser elementos teóricos abstractos, se han convertido en recursos profesionales accesibles y útiles, gracias a su incorporación cuidadosa en las secuencias instruccionales de los cursos.

Desde nuestra experiencia, una estrategia de transferencia eficaz combina un modelo conceptual claro y operativo, un diseño instruccional progresivo que guíe el desarrollo del conocimiento técnico y práctico, y un sistema de mediación tutorial que acompañe a los participantes a lo largo del proceso. Estos elementos, articulados coherentemente, permiten transformar el conocimiento académico en recursos de formación que los profesores pueden usar para mejorar su enseñanza.

A partir de esta experiencia, hemos identificado algunas cuestiones clave que deben considerarse al diseñar procesos de transferencia en este ámbito: la necesidad de asegurar la coherencia entre teoría, técnica y práctica en el diseño formativo; la importancia de que los contenidos transferidos respondan a problemas reales de la práctica; el reto de mantener la profundidad conceptual en entornos abiertos y masivos; y el papel de la mediación para generar aprendizajes sostenidos. Estos factores no solo afectan la calidad del proceso, sino que también condicionan su impacto y su posibilidad de replicación.

El concepto de escalamiento en Educación Matemática se refiere a la expansión sistemática de innovaciones pedagógicas desde contextos específicos hacia una adopción amplia, profunda y sostenible en múltiples entornos educativos (Coburn, 2003, pp. 4-8). Escalar no implica solo aumentar la cobertura, sino también provocar cambios cualitativos duraderos en las prácticas docentes y promover la adaptación contextual de las intervenciones (Pegg y Krainer, 2007, pp. 274-276). Su éxito requiere apoyo institucional, políticas alineadas, liderazgo pedagógico y comunidades profesionales que mantengan la esencia conceptual de la innovación (Elmore, 1996, pp. 318-325). El programa PRIMAT constituye un ejemplo concreto de escalamiento en formación docente masiva en matemáticas.

La investigación en Educación Matemática puede ampliar su impacto social en la medida en que se articule con programas como PRIMAT, que democratizan el acceso a la formación profesional y llegan a territorios donde tradicionalmente no ha habido oferta estructurada. El alcance de este

impacto es potencialmente nacional e incluso internacional, dado que las condiciones de formación de los profesores de primaria son similares en muchos países latinoamericanos. Pero más allá de la escala, el impacto se mide también en la transformación de las prácticas de los profesores, en la mejora de las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes y en la consolidación de comunidades profesionales que se apropian del conocimiento transferido. Nosotros tenemos pendiente establecer, de manera sistemática, en qué medida PRIMAT logra estas expectativas.

Para que este impacto sea sostenible, es necesario establecer alianzas institucionales que garanticen la continuidad de las ofertas formativas, mantener una relación estrecha entre investigación y formación, actualizar periódicamente los contenidos y los formatos, y generar comunidades de práctica que den vida y proyección a lo aprendido. Una buena práctica de transferencia en Educación Matemática no se limita a reproducir contenidos académicos: se construye en el encuentro entre la teoría y la práctica, en la pertinencia del diseño formativo y en el acompañamiento respetuoso y riguroso a los profesores que, desde su aula, buscan enseñar mejor.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Fondo Puentes de Caña y United Way Colombia por su apoyo para la concepción e implementación del programa PRIMAT y para las becas que permiten que este programa sea gratuito para los profesores latinoamericanos.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P., Bosch, M. y Farrás, B. B. (2024). Estableciendo puentes entre la investigación y su transferencia al aula. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas, 104*, 58-67.

Burkhardt, H. y Schoenfeld, A. H. (2003). Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise. *Educational researcher, 32*(9), 3-14.

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Universidad de los Andes.

Carrillo-Yañez, J., Climent Rodríguez, N., Montes Navarro, M. Á., Contreras González, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., et al. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Coburn, C. E. (2003). Rethinking Scale: Moving Beyond Numbers to Deep and Lasting Change. *Educational Researcher, 32*(6), 3-12.

da Ponte, J. P., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M. d. C., van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., et al. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 185-209). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_20

Elmore, R. F. (1996). Getting to scale with successful educational practices. En S. Furhman y J. O'Day (Eds.), *Rewards and reform: Creating educational incentives that work* (pp. 294-329). Jossey Bass Publishers.

Figueroa, M., García, S., Maldonado, D., Rodríguez, C., Saavedra, A. M. y Vargas, G. (2018). La profesión docente en Colombia: normatividad, formación, selección y evaluación. *Documentos de Trabajo EGOB, 54*, 1-90.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zdm, 39*, 127-135.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Instituto de Estudios Aragoneses.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, Spain: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, P. (2009). Mathematics Educators' Activities and Knowledge. En D. Ball y R. Even (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 103-104). Dordrecht: Springer.

Gómez, P. (2012). Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 1-18). Universidad de los Andes.

Gómez, P. (2018a). Análisis didáctico en la práctica de la formación de profesores de matemáticas. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 1-9). Universidad de los Andes.

Gómez, P. (Ed.). (2018b). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Universidad de los Andes.

Gómez, P. y González, M. J. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121-139). Comares.

Gómez, P., Molina, M. y González, M. J. (2009). Escalamiento en Educación Matemática. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 237-246). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Universidad de los Andes.

González, M. J. y Gómez, P. (2014). Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(12), 13-30.

González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Universidad de los Andes.

González, M. J., Gómez, P. y Pinzón, A. (2020). Characterising lesson planning: a case study with mathematics teachers, *Teaching Education, 31*(3), 260-278.

Gripton, C., Bates, K. E., Gifford, S., Gilligan-Lee, K. A., Williams, H. J., Borthwick, A., et al. (2025). Navigating 'the bumpy road'from research to practice: Improving the impact of research on spatial reasoning practice with young children. *Early Years*, 1-19. https://doi.org/10.1080/09575146.2025.2463666

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal For Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Pegg, J. y Krainer, K. (2007). Studies on regional and national reform initiatives as a means to improve mathematics teaching and learning at scale. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 3, pp. 255-280). Sense Publishers.

Pinzón, A. (2021). *Evaluación de un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria y media: prácticas de planificación e implementación.* Tesis de Ph. D. no publicada, Universidad de los Andes, Bogotá.

Pinzón, A. y Gómez, P. (2020). A collaboration model for the training of in-service secondary mathematics teachers. En H. Borko y D. Potari (Eds.), *ICMI Study 25. Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 396-403). National and Kapodistrian University of Athens.

Pinzón, A. y Gómez, P. (2023). Study of the Effects of a Mathematics Teacher Education Program: What Went Wrong? *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 3*, 1-24.

Pinzón, A., Gómez, P. y González, M. J. (2024). Effects of a professional development program on teachers' classroom practices in Colombia. *Oxford Review of Education, 50*(5), 607-625.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Comares.

Romero, I. y Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Universidad de los Andes.

Schlicht-Schmälzle, R., Hill, J., Folkvord, K. A., Tharaldsen, K. B., Wargo, J., Hartmann, U., et al. (2024). Bridging the research-practice gap in education: Initiatives from 3 OECD countries. *OECD Education Working Papers, 319*, 1-59.

Senk, S., Tatto, M., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R. y Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: an international comparative study. *ZDM, 44*(3), 307-324.

LOS SISTEMAS INTELIGENTES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UN CONTEXTO DE INVESTIGACIÓN PARA EL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

Intelligent systems in Mathematics Education: A context for research into the development of mathematics curriculum

De Castro, C.

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Los sistemas educativos adaptativos e inteligentes basados en la web plantean retos específicos para la transferencia de resultados de investigación en Educación Matemática debido a la especificidad de su contexto. Tras explicar las necesidades y restricciones propias del ámbito de transferencia, se describe cómo se han aplicado la metodología de la investigación basada en el diseño y la teoría de las trayectorias de aprendizaje en matemáticas. También se expone cómo se han aplicado principios, basados en la investigación, de un alcance bastante general en Educación Matemática, como el andamiaje, el uso de representaciones, la retroalimentación, los ejemplos resueltos y las comparaciones de estrategias, con ejemplos de la aplicación Smartick Matemáticas.

Palabras clave: educación matemática, desarrollo del currículo de matemáticas, sistema adaptativo inteligente basado en la web, investigación basada en diseño, trayectorias de aprendizaje.

Abstract

Web-based adaptive and intelligent educational systems pose specific challenges for the transfer of research findings in Mathematics Education due to the specificity of their context. After outlining the specific requirements and constraints of this transfer domain, the application of design-based research methodology and the theory of learning trajectories in mathematics is described. The use of broadly applicable, research-based principles in Mathematics Education—such as scaffolding, the use of representations, feedback, worked examples, and strategy comparisons—is also discussed. All of this is illustrated through the Smartick Math application.

Keywords: *mathematics education, mathematics curriculum development, web-based adaptive intelligent educational system, design-based research, learning trajectories in mathematics.*

UN CONTEXTO DE TRANSFERENCIA DE INVESTIGACIÓN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Este trabajo aborda la problemática de la transferencia de resultados de investigación en Educación Matemática. El enfoque que seguiré será plantear el tema desde la perspectiva de la transferencia a un *sistema educativo adaptativo e inteligente basado en la web* (STI). Como espero mostrar, el contexto de transferencia condiciona notablemente las posibilidades y las características de esta.

En los planteamientos clásicos del aprendizaje por analogía, se considera el razonamiento analógico como la transferencia de parte de un conocimiento de un dominio fuente a un dominio meta mediante procesos de recuperación de la información relevante y de aplicación o extrapolación de dicha información al nuevo contexto (González, 1997, p. 21). El uso de analogías y metáforas conlleva riesgos de que se produzcan transferencias negativas, conducentes a la obtención de inferencias

De Castro, C. (2025). Los sistemas inteligentes en Educación Matemática: un contexto de investigación para el desarrollo del currículo de matemáticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

erróneas (González, 1997, p. 35). Esto ya lo advertía Bachelard (1938/1999) al escribir sobre el "conjunto impuro de las intuiciones básicas", los "obstáculos amontonados por la experiencia cotidiana", o al indicar que "El equilibrio de los cuerpos flotantes es objeto de una intuición familiar que es una maraña de errores" (p. 21). Lave (1991) dedica un capítulo de su libro a criticar la cultura de los experimentos de transferencia de aprendizaje, surgida a partir de las críticas de Thorndike y la doctrina de la disciplina formal, según la cual la mente funciona como una caja de herramientas multipropósito. Como resultado de esa concepción sobre el aprendizaje, se consideraba que la geometría, otras ramas de las matemáticas, el latín, o el ajedrez, constituían formas de disciplina formal que mejoraban el intelecto de los escolares (Lave, 1991, p. 40). Lave (1991, p. 56) sostiene que, en los estudios clásicos de transferencia de aprendizaje, resumidos en González (1997), se disocia la cognición de su contexto. A partir de ahí, comienza su programa de investigación sobre la práctica aritmética en el mundo cotidiano tratando de comprender las relaciones entre personas, actividades y entornos.

He comenzado con este párrafo sobre el aprendizaje por analogía, en la revisión de Gonzalez (1997), y con las críticas de Lave (1991), para tratar de argumentar mi postura de que la transferencia de resultados de investigación a un sistema de aprendizaje en línea, desde un entorno de laboratorio, en el caso de investigaciones psicológicas, o desde un contexto de aula, en investigaciones educativas, está muy lejos de ser un proceso sencillo o evidente.

Por ello, voy a comenzar proporcionando información básica sobre el contexto de transferencia. *Smartick Matemáticas* es un método online para el aprendizaje de las matemáticas. Dicho con mayor precisión, es un sistema educativo adaptativo e inteligente basado en la web (Brusilovsky y Peylo, 2003; Kahraman et al., 2010; Zapata-Ross, 2018), expresión sinónima de sistema tutor inteligente (Burns y Capps, 2013; Zapata-Ross, 2018), de mayor uso en la actualidad. Smartick funciona en sesiones diarias de 15 minutos de duración. Algunas de las analogías que podrían utilizarse, para comprender los usos principales que dan a Smartick sus usuarios, serían la de una clase de refuerzo para alumnos con dificultades en matemáticas o para estimular el talento matemático, dependiendo del nivel de competencia matemático de los usuarios. También se podría decir que Smartick modeliza un profesor particular de matemáticas o incluso un "club de matemáticas" donde se intenta estimular la actividad matemática. Desde esta perspectiva, se pueden entender algunas de las restricciones en el diseño y el desarrollo de Smartick:

- Es un *método de aprendizaje individual*. Existen situaciones de simulación de comunicación, pero se evita la comunicación entre usuarios para garantizar un entorno seguro. Esto hace que no pueda haber situaciones de aprendizaje cooperativo o colaborativo.
- *Unos contenidos bloquean otros*. No es posible acceder a los problemas de estructura multiplicativa si no se han superado el tema del concepto de multiplicación y la iniciación a las tablas de multiplicar. Esto lo hace muy diferente del entorno escolar, donde el alumnado pasa de un tema a otro, sin asegurar que se hayan producido los aprendizajes necesarios.
- Al ser un método que aspira a complementar y potenciar el aprendizaje matemático escolar, *no puede adoptar planteamientos muy disruptivos*, como emplear algoritmos alternativos.
- Es un método muy marcado por la necesidad de dar una *atención personalizada* en aspectos matemáticos, y cognitivos, pero también socioafectivos. Esta necesidad guía la mayoría de las líneas de desarrollo del producto, como la atención a niños con discalculia, o con altas capacidades, el trabajo sobre las creencias sobre las matemáticas, etc. Mientras que los tres puntos anteriores podrían verse como limitaciones, el aspecto de la personalización del aprendizaje constituye la mayor potencialidad de los sistemas educativos *adaptativos*.

BUSCANDO FUNDAMENTACIÓN PARA EL DISEÑO Y EL DESARROLLO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN ENTORNOS EN LÍNEA

Smartick sigue un modelo de desarrollo de investigación basada en el diseño (Prediger y Zwetschler, 2013; Molina et al., 2011). Desde su primera versión completa, en 2011, se han ido introduciendo cambios en el sistema de forma continua. El proceso es el siguiente: (1) En primer lugar, al introducir un contenido nuevo, partimos del conocimiento de una trayectoria de aprendizaje (Clements y Sarama, 2016; Confrey, 2019; Confrey et al., 2014; Maloney et al., 2014) que integra conocimientos provenientes de la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de un tópico matemático; (2) Analizamos cómo integrar el contenido nuevo dentro de la estructura de contenido general del sistema; (3) Aplicamos principios de diseño de distintas disciplinas, sobre andamiaje, práctica distribuida, usabilidad, etc., para implementar el camino de enseñanza en el sistema. Esta fase incluye la virtualización de recursos manipulativos y la adaptación de tipologías de actividades, inicialmente pensadas para la interacción entre humanos, a un STI; (4) Revisamos la implementación de las trayectorias en el sistema con los datos recogidos, incluyendo la retroalimentación proporcionada por alumnos y tutores; (6) Completamos la "primera vuelta" de este ciclo, punto en que toda la información recibida sobre el funcionamiento de la nueva trayectoria de aprendizaje en el sistema, y el análisis de la misma, da lugar a un rediseño de la trayectoria. Cuando no se introduce contenido nuevo en el sistema, el ciclo se reduce a fases de análisis y rediseño, en las que es importante el desarrollo y contrastación de hipótesis sobre teorías locales que expliquen las actuaciones de los alumnos, para optimizar el funcionamiento de la trayectoria en el sistema. Esto incluye indagar sobre el conocimiento adquirido por los alumnos al ir evolucionando a través de las trayectorias de aprendizaje, a través de pruebas, entrevistas, y tareas específicamente diseñadas para valorar las cualidades de su aprendizaje matemático. Este ciclo de investigación basada en el diseño aparece representado en la Figura 1.

Figura 2

Investigación basada en diseño (adaptado de Prediger y Zwetschler, 2013)

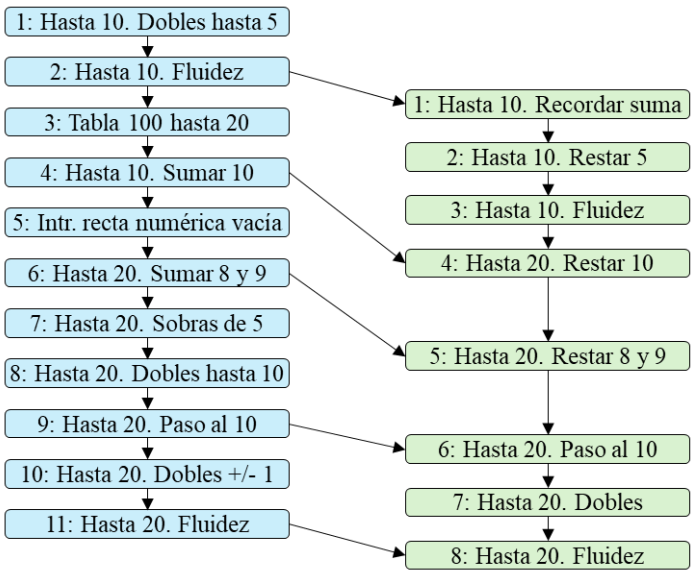
El otro elemento fundamental para articular un currículo online de matemáticas lo constituyen las trayectorias de aprendizaje. Una trayectoria de aprendizaje en matemáticas incluye tres aspectos: "el objetivo de aprendizaje, las progresiones de desarrollo del pensamiento y aprendizaje, y las secuencias de tareas instruccionales" (Clements y Sarama, 2004, p. 84; Clements y Sarama, 2009, p. 2). Los objetivos matemáticos de aprendizaje son las *ideas matemáticas importantes*, que son los

conceptos y destrezas matemáticas centrales y coherentes, consistentes con el pensamiento de los niños, y generativas de futuros aprendizajes. Las progresiones de desarrollo o *caminos de aprendizaje* son los niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior, que conducen o guían a alcanzar los objetivos matemáticos. Estas progresiones de desarrollo describen el camino típico que siguen los niños en la comprensión de un contenido matemático. Los diseños instruccionales son los *caminos de enseñanza*, que se componen de un conjunto de tareas en cada uno de los niveles de pensamiento de los caminos de aprendizaje, diseñadas con el fin de que los niños aprendan las ideas y destrezas necesarias para lograr ese nivel de pensamiento y que promueven el paso al siguiente nivel (Clements y Sarama, 2009, 2016).

Todo el currículo matemático de Smartick está diseñado partiendo, para cada *idea matemática importante*, de una revisión de la investigación para realizar un esbozo del *camino de aprendizaje*. A partir de ahí, se elabora el *camino de enseñanza*, que está compuesto por unidades y lecciones. En la Figura 2 observamos dos *caminos de enseñanza* para el cálculo mental de suma, en azul, y resta, en verde, con números de una cifra (con resultados "hasta 20"). Las flechas indican el orden de presentación de las unidades y las conexiones de "bloqueo" entre trayectorias, que implican que, hasta que no se supera una unidad, no se pasa a la unidad que esta bloquea. En cada trayectoria (suma y resta) las unidades vienen numeradas en la Figura 2. Las unidades van tratando el cálculo mental primero con resultados hasta 10, luego hasta 20, y finalmente hasta 100, que ya no aparecen en la Figura 2. Dentro de cada tamaño de número, la enseñanza de diferentes estrategias va evolucionando: (a) Uso de dobles, 3+3, 4+4, con recursos como el rekenrek o las configuraciones del dado; (b) Sumar 10, 6+10, 3+10, con la tabla 100; (c) Sumar 8 y 9, como sumar 10 y restar 2 o 1 en cada caso; (d) Sumar las sobras de 5, como 8+7=(5+3)+(5+2)=10+(3+2); y (e) Suma de dobles hasta 10, del tipo 8+8, como 10+(3+3), sumando las sobras de 5 (*using fives*, Thompson, 1999, Figura 3). Las unidades correspondientes a estrategias se alternan con unidades para aprender a utilizar recursos como la tabla 100 y la recta numérica vacía (Figura 5), el rekenrek (Figura 3), y con unidades para alcanzar la fluidez en el cálculo (unidades 2 y 11 en la trayectoria de suma).

Figura 2

Trayectorias de aprendizaje para el cálculo mental aditivo de números de una cifra



IDEAS EMERGENTES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA QUE IMPACTAN EN EL APRENDIZAJE

Booth et al. (2017) realizan una revisión sobre factores que han demostrado que pueden mejorar el aprendizaje matemático de los alumnos. En una línea similar en cuanto a la organización de las

investigaciones está también el trabajo de Barton (2018). He utilizado esta organización (Tabla 1), por tratarse de ideas especialmente relevantes debido a su aplicabilidad en los STI.

Tabla 1

Principios cognitivos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas

Principio	*Descripción*
Andamiaje	Tener una ayuda que va desapareciendo gradualmente facilita la resolución de problemas con fluidez
Representaciones abstractas y concretas	Las conexiones entre representaciones abstractas y concretas producen un mayor aprendizaje y transferencia
Retroalimentación	Recibir retroalimentación sobre las respuestas mejora el rendimiento
Ejemplos resueltos	Estudiar (o explicar) ejemplos resueltos, junto con la resolución de problemas, mejora el conocimiento frente a solo resolver problemas
Práctica distribuida	Espaciar la práctica conduce a una mejor memorización que practicar todas las tareas del mismo tipo a la vez
Práctica intercalada	La resolución de diferentes tipos de problemas mezclados (con otros tipos de problemas) es mejor para la habilidad de resolución de problemas que practicar el mismo tipo de problemas en bloque (juntos, sin mezclar con otros).
Reflexión sobre el error	Pensar sobre los errores mejora la representación del problema y aumenta la comprensión conceptual
Comparación analógica	Comparar y contrastar varios casos particulares (procedimientos, estrategias) conduce a una mejor comprensión que estudiar un único caso particular

* Tabla adaptada de Booth et al. (2017).

Andamiaje

El término "andamiaje" fue introducido por Wood et al. (1976, p. 90) para referirse al proceso que permite a un aprendiz resolver una tarea que no sería capaz de completar sin ayuda. Mediante el andamiaje, el experto "controla" los aspectos de la tarea que están fuera del alcance del niño, permitiéndole concentrarse en aquellos dentro de su rango de competencia. El andamiaje requiere que el aprendiz reconozca algo como solución a una cierta clase de problemas, para llegar a resolver la tarea sin ayuda. Además, se espera que el ritmo de aprendizaje sea mayor con andamiaje que sin él. Suele asumirse que el andamiaje: (1) depende del nivel de comprensión del alumno, al que hay que ajustar la ayuda, (2) debe retirarse gradualmente y (3) debe permitir que se transfiera la responsabilidad del maestro al aprendiz (Bakker et al., 2015; Booth et al., 2017). Para Bakker et al. (2015) es importante que no se considere cualquier tipo de ayuda o interacción adulto-niño como andamiaje, si no se dan estas tres condiciones de diagnóstico, retirada de la ayuda y responsabilización, o transición a la independencia.

El andamiaje ha mostrado ser efectivo en un amplio rango de edades y de dominios, aunque aún abundan más los estudios cualitativos observacionales que los cuantitativos que muestren la efectividad del enfoque (Bakker et al., 2015). Booth et al. (2017) indican que la definición de andamiaje todavía no se ha ampliado para aplicarse a los andamios empleados en un sistema tutor inteligente, en que el sistema diagnostica los conocimientos previos de los alumnos o el modo en que va desapareciendo la ayuda, en un contexto diferente a la interacción entre humanos (pp. 300-301).

En cuanto al tipo de andamiaje facilitado a los aprendices, en el trabajo original de Wood et al. (1976), se proponen: (1) "reclutar" al alumno, captando su interés e implicación en los requisitos de la tarea; (2) reducir los grados de libertad, simplificando la tarea; (3) mantener la dirección del alumno, incitando y corrigiendo mediante el lenguaje, hacia el objetivo; (4) marcar las características críticas de la tarea; (5) controlar la frustración, respondiendo al estado emocional del alumno; y (5) demostrar, o resolviendo el adulto mediante modelado (p. 98).

Anghileri (2006) organiza los andamios en tres niveles. En el nivel 1, propone "las disposiciones ambientales", a través de la organización del aula o de la sesión, infografías, materiales manipulativos, tareas estructuradas, tareas autocorrectivas, la secuenciación y el ritmo, el juego libre, la colaboración entre compañeros, o la retroalimentación emocional. El nivel 2 es el de "explicación, revisión y restructuración", cuyos andamios típicos serían la explicación del profesor, la revisión (pidiendo a los alumnos que expliquen y justifiquen, o mediante el modelado en paralelo, e interpretando las acciones y las explicaciones de los alumnos) y la restructuración (proporcionando contextos significativos, simplificando el problema, reformulando las explicaciones de los alumnos o negociando significados). Por último, el nivel 3 de andamiaje está orientado al "desarrollo del pensamiento conceptual", e incluye el trabajo de establecer conexiones, el desarrollo de herramientas de representación y la generación de discurso conceptual.

En la Figura 3, podemos observar un tipo de andamio que se utiliza mucho en *Smartick*, de un alcance muy general: el problema guiado, una ayuda que se ofrece al principio, cuando se enseña un contenido nuevo. En este caso, la estrategia de sumar "las sobras de 5" (*using fives*, Thompson, 1999). En los problemas guiados, en la línea del trabajo de Wood et al. (1976), se simplifica la tarea, se mantiene la dirección del alumno hacia el objetivo, y se enfatizan las características críticas de la tarea. En este caso, se enfatiza la descomposición aditiva del 9 y el 6 en el rekenrek virtual utilizando el 5 como una parte, realzado por el color. Después se marca la reorganización de la suma, dando sumados los dos cincos y mostrando dentro de un recuadro las cantidades que a cada número (9 y 6) les "sobra de 5" (4 y 1) y pidiendo que se sumen. Una vez realizados distintos ejemplos del problema guiado, el andamio se va desvaneciendo, y los alumnos pueden practicar la estrategia de forma menos dirigida.

Figura 3

Ejemplos de andamios en Smartick

En el contexto de un sistema tutor inteligente para aprender matemáticas, se pueden hacer dos precisiones sobre los tipos de andamios. En primer lugar, el listado de Anghileri (2006) propone prácticas didácticas que proporcionan una ayuda a los alumnos. Se trata de "ayudas", que no serían propiamente andamios, por no cumplir las condiciones de ajuste a la comprensión del alumno, retirada gradual y transferencia de la responsabilidad. Si una ayuda se proporciona a todos los alumnos, sin ningún grado de personalización en su presentación, y no está planificada de antemano su retirada progresiva, tendrá la consideración de una ayuda, pero no de un andamio. En segundo lugar, los procesos de andamiaje deben adaptarse al entorno en que se utiliza el sistema tutor inteligente, al menos en tres cuestiones básicas: (a) En la propia definición de andamiaje, pensada originalmente para una interacción entre humanos (Booth et al., 2017), (b) Hay andamios que no tienen aplicabilidad en el contexto de un STI, como el juego libre, la organización del aula, o gran parte del trabajo oral, de discusión en el aula; y (c). Por el contrario, hay andamios que sí pueden tener sentido en un entorno online, pero no en el aula[i].

Ejemplos de “ayudas” generales en un STI podrían ser la estructura y organización de la propuesta, el uso de tareas estructuradas o la retroalimentación emocional. Estos elementos están presentes en los caminos de aprendizaje de todos los estudiantes, y no tiene sentido su retirada progresiva. Sin embargo, las locuciones de las actividades, que aparecen según el nivel de lectura del alumno y van desapareciendo gradualmente, los manipulativos virtuales, o incluso los tutoriales interactivos, son ayudas personalizadas que van desapareciendo gradualmente, y sí tendrían la consideración de “andamios”.

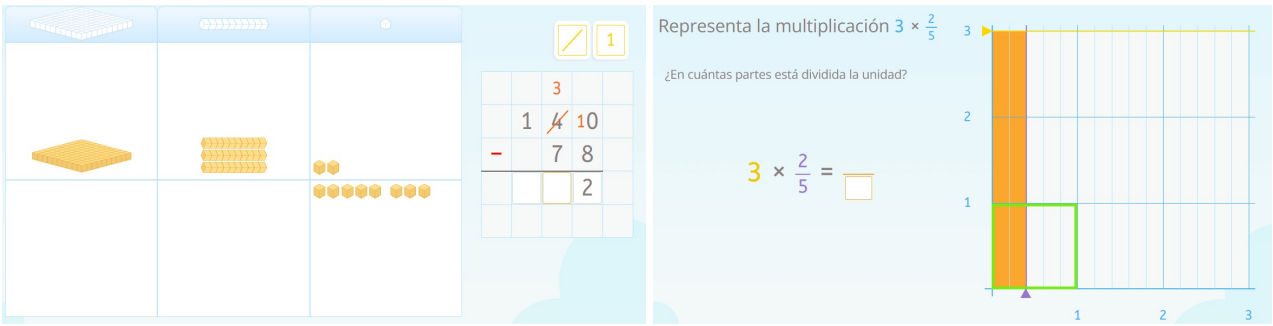
Representaciones abstractas y concretas: Analogías, metáforas, manipulativos virtuales, comparación y múltiples representaciones

Tanto el uso de representaciones concretas como abstractas tiene beneficios para el aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones concretas con objetos físicos (materiales manipulativos) asientan los conocimientos nuevos sobre el conocimiento anterior, y promueven la comprensión conceptual, pero pueden no favorecer la transferencia; mientras, las representaciones abstractas contribuyen a transferir el conocimiento a otras situaciones, pero no siempre favorecen la comprensión. Ambos tipos de representaciones se complementan. En general, comenzar con representaciones concretas que van paulatinamente desapareciendo en favor de representaciones más formales que facilitan la transferencia parece ser el mejor enfoque (Booth et al., 2017). El metaanálisis de Sokolowski (2018) concluye que es beneficioso para el aprendizaje de las matemáticas dar a los alumnos oportunidades de construir varios tipos de representaciones y de explorar las transiciones de unas a otras.

En la Figura 4, observamos, para dos operaciones aritméticas diferentes, la conexión entre las operaciones escritas y las representaciones manipulativa y gráfica. A la izquierda, el material manipulativo virtual, los bloques de base 10 de Dienes, se usan para modelizar el algoritmo de la resta. A la derecha, el modelo de área representa la multiplicación de fracciones.

Figura 4

Manipulativos y representaciones gráficas



La eficacia de los manipulativos físicos y virtuales

Dos cuestiones clave que se deben considerar en el desarrollo de un STI para matemáticas son el papel de los materiales manipulativos virtuales y el uso de múltiples representaciones. Los metaanálisis sobre la eficacia de los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas han encontrado efectos positivos de su uso. Sowell (1989), analizando 60 estudios, concluye que las intervenciones con manipulativos, de al menos un curso de duración en Educación Primaria, comparadas con enseñanza “simbólica”, producen efectos significativos de tamaño medio y alto. Queda abierta la cuestión sobre en qué situaciones el uso de manipulativos es apropiado o cuál es el manipulativo más adecuado para una situación particular (p. 504). Hodgen et al. (2018) revisan 5 metaanálisis sobre el uso de manipulativos en matemáticas, encontrando una evidencia alta en favor de su uso y señalando, como condiciones necesarias para que este sea efectivo: (1) que los profesores se aseguren de que los alumnos conectan adecuadamente el trabajo con manipulativos con las ideas

matemáticas que estos representan; (2) que el uso sea suficientemente extenso, pero no demasiado prolongado en el tiempo; y (3) que los profesores ayuden a los alumnos, partiendo de los manipulativos, a desarrollar representaciones más abstractas. El metaanálisis de Carbonneau et al. (2013) concluye que el uso de manipulativos, al compararse con la enseñanza con símbolos escritos, produce un efecto en el aprendizaje de tamaño pequeño a medio, pero el tamaño del efecto depende de variables de enseñanza como el nivel de orientación que se ofrece a los alumnos en el uso de manipulativos. Finalmente, en una investigación más aplicable al contexto de los STI, Moyer-Packenham y Westenskow (2013), en su metaanálisis sobre materiales manipulativos virtuales, con 66 estudios, indican que el uso de estos materiales produce efectos moderados en el rendimiento de los alumnos al comparar con otros enfoques de enseñanza (p. 47).

Fundamento de las analogías y del uso de manipulativos

Más allá del impacto de los manipulativos físicos y virtuales en el aprendizaje matemático cuantificado en la investigación a través de estudios y metaanálisis, deben adoptarse criterios para su uso. La manipulación en matemáticas, el uso de analogías y metáforas está basado en las teorías de aprendizaje por analogía. El razonamiento analógico consiste en la transferencia de parte de un conocimiento de un dominio conocido (fuente) a un dominio nuevo (meta u objetivo). Algunas cuestiones clave en este aprendizaje son: (1) el éxito de la transferencia depende del grado de semejanza entre ambos dominios; (2) resulta fundamental tener una buena base de conocimiento del dominio fuente que permita detectar las semejanzas entre los dominios; y (3) existe el riesgo de transferencia negativa, es decir, de realizar una transferencia que conduzca a un error, atribuible a una tendencia natural a asociar rasgos superficiales con estrategias de resolución (González, 1997). Bohan y Shawaker (1994), al aplicar el aprendizaje por analogía a las matemáticas, hablan del trabajo para adquirir un buen conocimiento del dominio fuente como "etapa concreta", del trabajo de identificación de semejanzas entre dominios, entre los manipulativos y los símbolos, como "etapa puente" y del momento en que se retiran los manipulativos y ya, solo con símbolos escritos, los alumnos recuperan su conocimiento manipulativo y lo transfieren, como "etapa simbólica".

Baroody (2017), en línea con la idea de resaltar la importancia de tener un conocimiento del dominio fuente adecuado, traslada el foco de los materiales manipulativos a las experiencias concretas, poniendo el énfasis en la familiaridad. Estas pueden implicar manipulativos, pero también analogías verbales o imágenes virtuales. El uso de manipulativos no garantiza que se produzca una experiencia educativa, que será valiosa en la medida en que consiga extender el conocimiento matemático informal para mejorar la comprensión de conocimientos formales. Integrar el uso de manipulativos en trayectorias de aprendizaje puede sacar el máximo provecho educativo de estos.

Barton (2018) resalta, como criterios fundamentales para usar analogías, la familiaridad (con balanzas de dos platillos, termómetros, dados, etc.), coincidiendo con Baroody (2017); la visibilidad, referida al uso real o virtual en el aula del manipulativo o del modelo; evidenciar la convergencia, es decir, hacer evidente la conexión entre ambos dominios, como los elementos de una balanza y de una ecuación; y reforzar la analogía, refiriéndonos a ella de forma continuada. Pero también enfatiza[ii] la necesidad de que haya un verdadero encaje en la analogía, entre las características centrales del contenido matemático y su análogo "realista", y el rango o alcance de aplicación de la analogía, que se refiere a la cantidad de conocimientos matemáticos que podemos aprender a través de esa analogía (Barton, 2018, pp. 124-125).

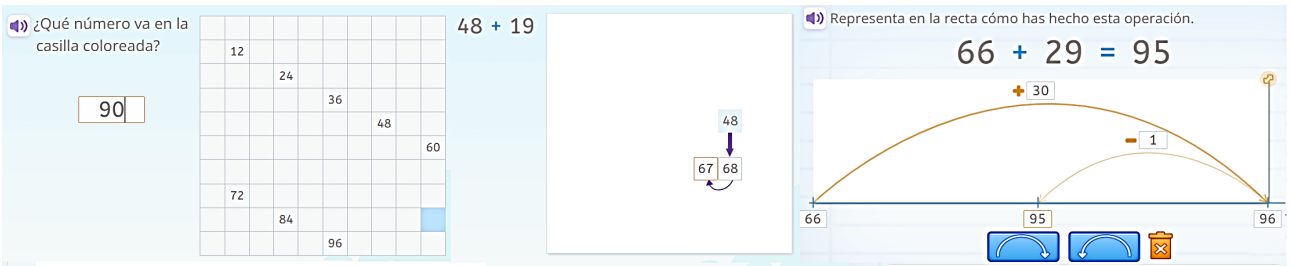
El uso de múltiples representaciones

Otro tema clave es el papel del uso de múltiples representaciones en matemáticas. Los trabajos de Ainsworth (1999, 2006 y 2014) ayudan a comprender dos aspectos contrapuestos del tema. Por un lado, usar múltiples representaciones de un mismo concepto favorece un conocimiento más profundo, pero, por otro lado, también es un aprendizaje que requiere un esfuerzo muy superior. Esto se debe a las tres funciones que tiene el uso de múltiples representaciones en matemáticas: de

complementariedad, de restricción y de construcción. La complementariedad consiste en que varias representaciones pueden transmitir distintas informaciones o la misma información de una forma diferente. Esto hace que la combinación de representaciones pueda facilitar que los alumnos se beneficien de las propiedades únicas de cada una. Por ejemplo, los diagramas favorecen los procesos perceptivos, mientras que las tablas facilitan la lectura de datos concretos. La restricción se produce cuando se relaciona una representación nueva con otra más familiar. Las representaciones nuevas pueden producir dificultades de comprensión. Establecer vínculos con una representación más familiar puede ampliar la comprensión de la representación nueva y, a su vez, la nueva representación puede restringir, en el sentido positivo de "afinar", la comprensión de la representación inicial del concepto. Este juego de ampliación-restricción en las comprensiones facilitadas por las representaciones será posible solo si se comprende la relación existente entre ambas. Por último, usar múltiples representaciones tiene la función de construir una comprensión más profunda. Integrar información de múltiples representaciones puede favorecer la identificación de las características invariantes del dominio y las propiedades particulares de cada representación, y comprender cómo se relaciona una representación con otra. Como señala Ainsworth (2014, pp. 469-470), "Esta comprensión no es automática ni directa y, en muchos casos, la construcción de una comprensión más profunda con múltiples representaciones requiere que los alumnos dediquen mucho tiempo y esfuerzo para desarrollar este conocimiento." En la Figura 5, se aplican tres representaciones diferentes dentro de la trayectoria de cálculo mental hasta 100. La primera es una actividad con la tabla 100, en la que se trata de ir interiorizando la posición de cada número en la tabla para poder prescindir poco a poco de la misma. La segunda imagen corresponde a la estrategia N10C aplicada en una tabla 100 ya vacía, actividad adaptada de Beishuizen (1993, p. 298). La tercera actividad pide a los alumnos que representen la misma estrategia en una recta numérica interactiva, en la que se pueden poner arcos, ajustar su dirección y su tamaño, y escribir los números tanto en la recta, para indicar resultados intermedios, como en los arcos para señalar las cantidades que se van añadiendo o restando en esta estrategia de salto.

Figura 5

Tres actividades con uso de múltiples representaciones



Retroalimentación

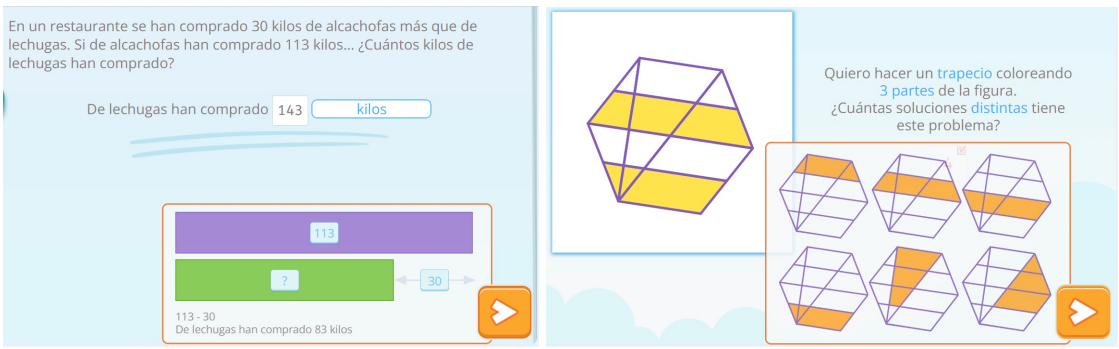
La retroalimentación (*feedback*) es cualquier información que se da a un alumno, ante su respuesta a una tarea o una pregunta, con el fin de mejorar la capacidad del alumno en la resolución de problemas o la comprensión de un tema. El feedback tiene un gran potencial educativo y ha demostrado su eficacia en matemáticas. Es más efectivo cuando se orienta al proceso que a través de una calificación, más cuando es inmediato que diferido y beneficia más a los alumnos de habilidad baja que a sus compañeros con mejor nivel en matemáticas (Booth et al., 2017). En cuanto al formato del *feedback*, la revisión sistemática de Söderström y Palm (2024) indican que, aunque en matemáticas gran parte de este se da a través de palabras, notaciones y números (en 124 estudios), en los entornos online cada vez se usan más los gráficos y figuras (26 investigaciones) para el *feedback* (Figura 6). Santos y Pinto (2009) han llegado a la conclusión de que un feedback breve ayuda al alumno a centrarse en los aspectos esenciales de la tarea. Por otra parte, a veces incluso un único feedback puede tener un gran impacto, como en la investigación sobre representación mental en tareas de estimación en recta

numérica (Opfer y Siegler, 2007). En el aula, no es sencillo proporcionar a cada alumno un feedback inmediato, detallado y orientado al proceso. En este punto, los STI parecen tener cierta ventaja sobre el aula (Barana et al., 2021).

En la Figura 6, en caso de error, el feedback es inmediato y va orientado al proceso. A la izquierda, un alumno ha resuelto un problema de comparación con incógnita en la referencia. Este problema es difícil, pues la expresión "30 kilos de alcachofas más" parece apuntar a una suma, si se hace una lectura superficial del enunciado. Como vemos en la respuesta de la Figura 6, izquierda, (113+30=143), el alumno ha cometido el error de sumar las dos cantidades. La retroalimentación inmediata se da mediante una modelización del enunciado del problema con barras de Singapur. En el modelo de barras se puede apreciar que la operación que resuelve el problema es una resta. En la imagen de la derecha de la Figura 6, observamos un problema de enumeración de figuras. El hexágono de la izquierda se puede colorear haciendo clic en cualquiera de sus regiones. Después de los tanteos que sean necesarios, el alumno debe enumerar los trapecios compuestos por tres regiones e indicar cuántas soluciones diferentes tiene el problema. Ante un error en la respuesta, el *feedback* muestra las seis soluciones posibles. En ambos casos, el feedback va orientado al proceso porque proporciona, en un caso, una modelización del problema que se enseña en problemas anteriores y que ayuda a hacer una lectura profunda del enunciado y, en el segundo caso, una organización de las soluciones que facilita ejemplos y un orden para orientar la enumeración.

Figura 6

Ejemplos de feedback en Smartick



Ejemplos resueltos

El estudio de los alumnos de ejemplos resueltos de resolución de problemas es más efectivo que pedir a los alumnos que resuelvan los problemas por sí mismos. Esto se debe a que los alumnos pueden concentrarse en comprender cada uno de los pasos del proceso de resolución en el ejemplo. Pedir a los alumnos que expliquen un ejemplo resuelto también tiene beneficios, debido a que permite explicitar conocimientos y conectar la información nueva con los conocimientos previos. Muchas de las investigaciones sobre la efectividad del uso de ejemplos resueltos se han realizado en situaciones de instrucción con apoyo de ordenadores, aunque también se ha probado la eficacia de esta estrategia docente en matemáticas en aulas más tradicionales (Booth et al., 2017). Zhu y Simon (1987) encontraron, además, que el efecto que producen los ejemplos resueltos en matemáticas no se reduce a la memorización, sino que influye en la decisión sobre en qué situaciones es más adecuado el uso de una estrategia y cómo usarla. Van Loon-Hillen y Brand-Gruwel (2010) indican que el uso de ejemplos resueltos puede ser beneficioso para alcanzar el mismo rendimiento matemático con menor tiempo de trabajo. En la Figura 7, una tarea con la dupla "ejemplo resuelto-ejercicio propuesto" muestra cómo se aplican en Smartick los ejemplos resueltos. En la línea de aproximarnos a lo que Barton (2018/2019) llama "ejemplos recargados", se intenta que cada paso de la resolución de la ecuación encierre en sí una explicación de dicho paso. Así, se evitan pasos mecanizados del tipo "lo que está multiplicando, se pasa dividiendo" y se sustituye por "dividir cantidades iguales por el mismo

número" en la línea de justificar el paso de forma coherente con la explicación de un tutorial anterior sobre ecuaciones. A la derecha, vemos que el proceso de resolución puede desarrollarse con escritura a mano o con el editor de fórmulas de *Wiris* integrado en la aplicación.

Figura 7

Ejemplos resueltos en resolución de ecuaciones

La reflexión sobre el error también ha probado tener un efecto positivo en el aprendizaje de las matemáticas. Este efecto suele justificarse por el deseo de los alumnos de superar la tensión o el malestar que produce la disonancia cognitiva al albergar dos pensamientos inconsistentes entre sí. Así, crear un conflicto cognitivo puede, potencialmente, facilitar cambios en el pensamiento matemático del alumno, a fin de que este sea más consistente. En matemáticas, se han realizado investigaciones en las que se han presentado a los alumnos ejemplos de tareas matemáticas resueltas con errores, propios o de otros compañeros. Resulta especialmente beneficioso analizar qué características del problema hacen que un determinado paso en el proceso de resolución sea erróneo (Booth et al., 2017).

Comparación de estrategias para resolver un problema

La comparación, propia del razonamiento analógico, permite a los alumnos conectar y contrastar dos o más representaciones y conducir a la generalización de un conocimiento. En matemáticas, comparar múltiples ejemplos, facilita la formación de esquemas. En particular, para el desarrollo de la comprensión conceptual, resulta más beneficioso comparar múltiples soluciones a un mismo problema que comparar varios tipos de problemas similares con una misma estrategia de resolución. La comparación ha resultado una estrategia eficiente en áreas de las matemáticas como el álgebra, la estimación en cálculo, la geometría, el razonamiento proporcional, o la división de números naturales y decimales (Booth et al., 2017; Rittle-Johnson y Star, 2009; Star y Rittle-Johnson, 2009).

Figura 8

Comparación de estrategias en cálculo mental

En la Figura 8, se pueden ver dos actividades de *Smartick* en las que se pretende que los alumnos comparen entre dos estrategias de cálculo mental. En la izquierda, se proponen las estrategias del

paso al 10, conteo, uso de hechos numéricos básicos, sumar las "sobras de 10" (*using fives*), estrategia que consiste en hacer: 9 + 6 = (5 + 4) + (5 + 1) = (5 + 5) + (4 + 1), y finalmente sumar 9, como sumar 10 y quitar 1. Esta actividad se da siempre por correcta. Se espera que ayude a los niños a valorar que existen distintas estrategias que se pueden aplicar y la respuesta de los niños se guarda para comparar las respuestas que dan con las de otras tareas. En la actividad de la derecha, si se pulsa el botón de "ejecutar", se escucha una locución con el niño explicando cada estrategia. La estrategia de la izquierda, sumar 9 aumentando una decena y restando una unidad, es más rápida que la estrategia de la derecha, basada en el conteo por unidades con el apoyo de la tabla 100.

La distribución de la práctica: Intercalada vs. por bloques

Uno de los principios cognitivos más ampliamente estudiados se refiere a la distribución de la práctica. Establece que extender o distanciar temporalmente las actividades de un tipo, dentro de la misma sesión, o en sesiones diferentes -sin aumentar la cantidad de práctica global- (práctica espaciada) mejora la retención del aprendizaje a largo plazo con respecto a realizar toda la práctica en un único bloque o momento en el tiempo (práctica masiva). Es decir, es mejor, si estamos aprendiendo a resolver problemas de ecuaciones de primer grado, hacer dos problemas diarios durante 5 días, que hacer 10 problemas el mismo día. Además, intervalos de tiempo mayores entre las tareas producen mayor beneficio. Este efecto de la práctica espaciada se ha contrastado en el dominio de la recuperación de hechos numéricos básicos en sumas y en las tablas de multiplicar, pero también en tareas matemáticas más complejas (Booth et al., 2017).

La práctica intercalada (*Interleaved practice*) consiste en presentar a los alumnos las tareas, o los problemas, mezclados, de modo que los problemas relacionados con un concepto, o resolubles mediante una estrategia, se vayan alternando con otros de distinto tipo. La práctica intercalada se opone a la práctica por bloques, en la que los problemas relacionados con un contenido matemático se resuelven juntos. Las investigaciones (Rohrer et al., 2015; Rohrer et al., 2020) muestran que la práctica intercalada es más efectiva que la práctica por bloques y que, no obstante, la práctica por bloques es la más habitual en los libros de texto de matemáticas. La práctica intercalada hace que los alumnos reflexionen sobre qué estrategia es más apropiada para resolver cada problema, mientras que la práctica por bloques facilita que los alumnos piensen que todos los problemas que se hacen juntos se resuelven aplicando lo que se estudia en ese momento.

En Smartick los resultados de investigación sobre la distribución de la práctica (por bloques frente a intercalada) se han ido incorporando como principios para el diseño y modificación de las trayectorias de aprendizaje. En las tareas matemáticas que Smartick propone a sus alumnos, se establece una distinción entre ejercicios, 12 minutos de los 15 de la sesión diaria, y problemas, 3 minutos. La resolución de problemas ya tenía una distribución de práctica intercalada, pues los problemas aritméticos verbales se planteaban mezclando categorías con un nivel similar de dificultad. El objetivo era incorporar la práctica intercalada a la parte de la sesión de ejercicios. Los contenidos de Smartick se organizan en trayectorias de aprendizaje compuestas por unidades y lecciones diarias dedicadas a un contenido concreto. Por ejemplo, el contenido puede ser la simetría, la subitización, las series con un patrón de repetición, etc. Así pues, la parte de ejercicios de Smartick tenía una organización por bloques. Esta era la parte por optimizar con la inclusión de práctica intercalada.

Para valorar como hacer la aplicación, en los ejercicios de Smartick, de la práctica intercalada, se planteó un estudio experimental en que los alumnos fueron distribuidos aleatoriamente en un grupo de control (6405 alumnos), en que se seguía haciendo la sesión diaria por bloques, y en un grupo experimental (6209 alumnos), en que se introducía una variación para introducir la práctica mezclada en los ejercicios, como se explica a continuación.

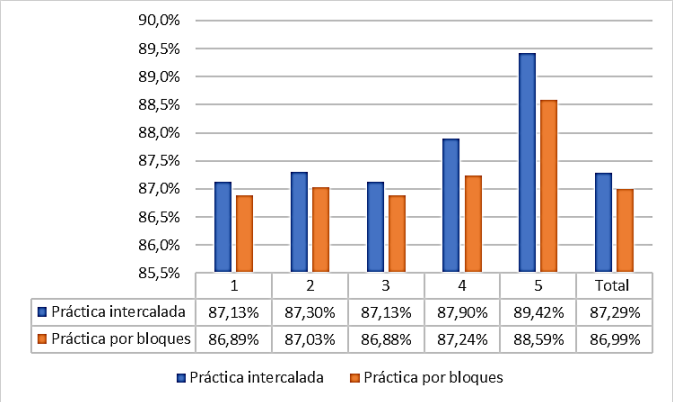
Dentro de la sesión diaria de 15 minutos, cada día se hace una lección. Dado que cada alumno trabaja a su ritmo, en un día se puede llegar a superar una lección, o no. Los análisis estadísticos de las sesiones indicaban que, en media, los alumnos que superaban una lección tenían 3 minutos de sobra

en la sesión. En el grupo de control, estos 3 minutos se dedicaban a comenzar una lección nueva, siguiendo con la práctica por bloques; mientras tanto, en el grupo experimental, a los alumnos se les presentaba, en estos 3 minutos, una selección de ejercicios mezclados correspondientes a lecciones superadas en los 90 días anteriores.

Para comparar el rendimiento de los grupos experimental y de control, utilizamos como instrumento las sesiones de repaso, realizadas cada 15 o 20 días, en las que se plantea a cada alumno una combinación de problemas mezclados que éste ha resuelto incorrectamente desde su anterior sesión de repaso. Recogemos el porcentaje de acierto en estas sesiones y el tiempo medio de respuesta. Durante los más de 2 meses de este estudio experimental, se recogieron datos de 28.247 sesiones de revisión y comparamos los porcentajes de acierto y los tiempos de respuesta. En la Figura 9, se muestran las puntuaciones que recogen los porcentajes de acierto, junto con el tiempo de respuesta. Como vemos, en las 5 sesiones de repaso, los porcentajes de acierto fueron superiores en el grupo de práctica intercalada a las del grupo de control. Y este resultado es consistente en todas las sesiones de repaso, durante el periodo de más de 2 meses de recogida de datos en este estudio.

Figura 9

Porcentaje de acierto por tipo de práctica, por bloques o intercalada, en las 5 sesiones de repaso



	1	2	3	4	5	Total
Práctica intercalada	87,13%	87,30%	87,13%	87,90%	89,42%	87,29%
Práctica por bloques	86,89%	87,03%	86,88%	87,24%	88,59%	86,99%

Un estudio así tiene como objetivo principal proporcionar una información para la toma de decisiones en la introducción de cambios en la forma de administrar el contenido matemático en un STI. El estudio tenía limitaciones evidentes: (1) Usar los ejercicios de sesiones de repaso como instrumento; (2) Mezclar en una puntuación (FS) los porcentajes de acierto y el tiempo de respuesta, aunque por separado se produjo el mismo efecto en ambas puntuaciones en favor de la práctica mezclada; (3) Comparar un grupo en que los alumnos "avanzan más", pues en los 3 minutos que "sobran" comienzan la lección siguiente, con un grupo que repasa con práctica intercalada las lecciones anteriores.

En la gráfica de la Figura 9, se observa que la puntuación va subiendo en cada sesión de repaso. Esto se debe a que, de las 28.247 sesiones de repaso recogidas durante el periodo del estudio, 11.542 sesiones correspondieron a la primera sesión de cada alumno, 8.655 sesiones a la segunda sesión de repaso, 5.238 a la tercera, 2.284 a la cuarta, y 528 a la quinta. A medida que avanzan las sesiones de repaso, cada vez hay menos alumnos que llegan a dicha sesión, y estos son, precisamente, los alumnos que mayor asistencia tienen en Smartick y los que avanzan más deprisa. De ahí que en la cuarta sesión y en la quinta los resultados superiores a los de las primeras sesiones.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo he querido enfatizar la aportación de la investigación en Educación Matemática a los SI en tres aspectos complementarios: (1) Por una parte, el modelo de la *Investigación Basada en el Diseño* proporciona un paradigma metodológico ideal para el desarrollo de entornos tecnológicos de aprendizaje, que pueden evaluarse y rediseñarse con ayuda de la información que facilitan los propios

alumnos al realizar las actividades del sistema; (2) Por otra parte, las trayectorias de aprendizaje en matemáticas constituyen una teoría capaz de articular la aportación de la investigación precedente en el área con la organización de un currículo de matemáticas; (3) Finalmente, cada tema específico del currículo a veces requiere una profundización en aspectos muy particulares, como hemos visto con ejemplos dentro del camino de enseñanza del cálculo mental, con la estrategia de *using fives* (Thompson, 1999) o con el recurso de la tabla 100 vacía (Beishuizen, 1993).

Finalmente, el pequeño estudio inédito sobre práctica intercalada ilustra bien varias cuestiones relacionadas con la transferencia de investigación. En primer lugar, transferir no es casi nunca aplicar directamente, en el sentido de hacer en un contexto algo que ha dado buen resultado en otro. La realidad es siempre más compleja y las restricciones que impone el contexto, al igual que sus necesidades, son diferentes. Por otra parte, en los contextos en los que buscamos transferir la investigación, surgen cuestiones que no se han planteado o, al menos, que no están en las agendas de investigación habituales en Educación Matemática. Por ejemplo, en un STI es habitual preguntarse por la *posología didáctica*, o la cantidad de práctica necesaria para dominar un tema, o para decidir que alguien domina un contenido y está en condiciones de pasar al siguiente. De modo que, como sugería al inicio, transferir se parece más a pensar los problemas en un contexto, con la humildad de saber que rara vez puedes aplicar directamente soluciones provenientes de otro contexto, pero con la certeza de que ese problema puede pensarse con las herramientas, conceptuales y metodológicas, que proporciona la investigación en Educación Matemática.

Referencias

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education, 33*(2-3), 131-152. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction, 16*(3), 183-198. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001

Ainsworth, S. (2014). The multiple representation principle in multimedia learning. En R.E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 464-484). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369.024

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 33-52. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9005-9

Bachelard, G. (1938/1999). *La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (22ª ed.). Siglo XXI.

Bakker, A., Smit, J. y Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM Mathematics Education, 47*, 1047-1065. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8

Barana, A, Marchisio, M. y Sacchet, M. (2021). Interactive Feedback for Learning Mathematics in a Digital Learning Environment. *Education Sciences, 11*(6), 279. https://doi.org/10.3390/educsci11060279

Baroody, A. J. (2017). The use of concrete experiences in early childhood mathematics instruction. *Advances in Child Development and Behavior, 53*, 43–94. https://doi.org/10.1016/bs.acdb.2017.03.001

Barton, C. (2018). *How I wish I'd taught maths: Lessons learned from research, conversations with experts, and 12 years of mistakes*. John Catt. Traducido al español: Barton, C. (2019). *Cómo me gustaría haber enseñado matemáticas: Lecciones aprendidas de la investigación, conversaciones con expertos y 12 años de errores*. Editorial Aptus.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(4), 294-323. https://doi.org/10.2307/749464

Bohan, H. J. y Shawaker, P. B. (1994). Using manipulatives effectively: A drive down rounding road. *The Arithmetic Teacher, 41*, 5, 246-248. https://doi.org/10.5951/AT.41.5.0246

Booth, J.L., McGinn, K.M., Barbieri, C., Begolli, K.N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L.K. y Davenport, J.L. (2017). Evidence for Cognitive Science Principles that Impact Learning in Mathematics. En D.C. Geary, D.B. Berch, R.J. Ochsendorf y K.M. Koepke (Eds.), *Mathematical Cognition and Learning: Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts* (pp. 297-325). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805086-6.00013-8

Brusilovsky, P., y Peylo, C. (2003). Adaptive and Intelligent Web-based Educational Systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 13*, 159-172. https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00197315/document

Burns, H. L., y Capps, C. G. (2013). Foundations of intelligent tutoring systems: An introduction. En M. C. Polson y J. J. Richardson (Eds.), *Foundations of intelligent tutoring systems* (pp. 1-19). Psychology Press. https://doi.org/10.4324/9780203761557

Carbonneau, K. J., Marley, S., y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380-400. https://doi.org/10.1037/a0031084

Clements, D.H. y Sarama J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Clements, D.H. y Sarama J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. Nueva York: Routledge. Traducción al español en: Clements, D.H. y Sarama, J. (2016). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a edad temprana: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools LLC.

Confrey J. (2019). *Future of education and skills 2030: Curriculum analysis: A synthesis of research on learning trajectories/progressions in mathematics*. OECD. http://www.oecd.org/education/2030/A-Synthesis-of-Research-on-Learning-Trajectories-Progressions-in-Mathematics.pdf

Confrey, J., Maloney, A.P., y Nguyen, K.H. (2014). Introduction: Learning trajectories in mathematics. En A.P. Maloney, J. Confrey y K.H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. xi-xxii). Information Age Publishing.

González, M.J. (1997). *Aprendizaje por analogía: Análisis del proceso de Inferencia Analógica para la adquisición de nuevos conocimientos*. Editorial Trotta.

Hodgen, J., Foster, C., Marks, R. y Brown, M. (2018). *Evidence for review of mathematics teaching: improving mathematics in key stages two and three: Evidence review*. Education Endowment Foundation.

Kahraman, H. T., Sagiroglu, S., y Colak, I. (2010). Development of adaptive and intelligent web-based educational systems. En T. Unwin, D. Kleine y K. Toyama (Eds.), *ICTD '10: Proceedings of the 4th ACM/IEEE International Conference on Information and Communication Technologies and Development* (pp. 1-5). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1109/ICAICT.2010.5612054

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Paidós.

Maloney, A.P., Confrey, J. y Nguyen, K.H. (Eds.) (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Information Age Publishing.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 29*(1), 75-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Moyer-Packenham, P. S., y Westenskow, A. (2013). Effects of Virtual Manipulatives on Student Achievement and Mathematics Learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments* (IJVPLE), *4*(3), 35-50. http://doi.org/10.4018/jvple.2013070103

Opfer, J.E., y Siegler, R.S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology, 55*(3), 169-195. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2006.09.002

Prediger, S., y Zwetzschler, L. (2013). Topic-specific Design Research with a focus on learning processes: The case of understanding algebraic equivalence in grade 8. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *Educational*

Design Research: Illustrative Cases (pp. 407-424). SLO, Netherlands Institute for Curriculum Development. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/13-EDR-Prediger-Zwetzschler-Topic-Specific-Design-Research.pdf

Rittle-Johnson, B., y Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 529-544. https://doi.org/10.1037/a0014224

Rohrer, D., Dedrick, R. F., y Stershic, S. (2015). Interleaved practice improves mathematics learning. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 900-908. https://doi.org/10.1037/edu0000001

Rohrer, D., Dedrick, R.F., y Hartwig, M.K. (2020). The Scarcity of Interleaved Practice in Mathematics Textbooks. *Educational Psychology Review, 32*, 873-83. https://doi.org/10.1007/s10648-020-09516-2

Santos, L., y Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 49-56). PME.

Skolowski, A. (2018). The Effects of Using Representations in Elementary Mathematics: Meta-Analysis of Research. *IAFOR Journal of Education, 6*(3), 129-152.

Söderström, S., y Palm, T. (2024). Feedback in mathematics education research: a systematic literature review. *Research in Mathematics Education*, 1-22. https://doi.org/10.1080/14794802.2024.2401488

Sowell, E.J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 498-505. https://www.jstor.org/stable/749423

Star, J. R., y Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: instructional strategies that deepen student understanding, within and between algebraic representations. *ERS Spectrum*, *27*(2), 11-18. https://dash.harvard.edu/handle/1/4889486

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in school*, *28*(5), 2-4. http://www.jstor.org/stable/30215422

van Loon-Hillen, N., van Gog, T., y Brand-Gruwel, S. (2010). Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. *Interactive Learning Environments, 20*(1), 89-99. https://doi.org/10.1080/10494821003755510

Wood, D., Bruner, J. S., y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 17*, 89-100. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x

Zapata-Ross, M. (2018). La universidad inteligente. *Revista de Educación a Distancia (RED), 18*(57). https://revistas.um.es/red/article/view/327431

Zhu, X., y Simon, H.A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction, 4*(3), 137-166. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0403_1

[i] Por ejemplo, en un geoplano virtual, se puede colorear el interior de la figura. Esto no es posible en un geoplano físico con gomas elásticas, y puede ser un andamio que ayude a diferenciar entre el área y el perímetro de una figura plana.

[ii] Barton toma esta idea de: William, D. (1997). Relevance as MacGuffin in mathematics education. *British Educational Research Association Conference*, York.

COMUNICACIONES

MIRAR PROFESIONALMENTE LOS RAZONAMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES Y LAS ACCIONES DEL PROFESOR

Teachers' noticing on students' reasoning and teachers' actions

Aguiar, M.[a] y Fernández C.[b]

[a]Universidad Federal del ABC, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo es explorar cómo profesores de matemáticas de secundaria miran profesionalmente los razonamientos matemáticos usados por estudiantes en una tarea matemática y las acciones del profesor de aula, al analizar un vídeo de su propia práctica durante un curso de formación. Los participantes fueron siete profesores de matemáticas de escuelas de Brasil. El diseño del curso de formación se basa en el modelo PLOT. En este curso, una las Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP) fue la reflexión sobre episodios de vídeo sobre la implementación de clases que fueron planificadas por los profesores en el curso. Los resultados muestran que los profesores fueron capaces de identificar los razonamientos matemáticos usados por los estudiantes y las acciones de la docente que promovían los razonamientos matemáticos.

Palabras clave: mirada profesional, aprendizaje profesional, formación de profesores, tareas de aprendizaje profesional, razonamiento matemático.

Abstract

The aim is to explore how secondary school mathematics teachers notice students' mathematical reasoning in a mathematical task and the teachers' actions, by analysing a video of their own practice during a training course. The participants were seven mathematics teachers from schools in Brazil. The design of the training course is based on the PLOT model. In this course, one of the Professional Learning Tasks (TAP) was the reflection on video episodes about the implementation of a lesson plan made by the teachers in the course. The results show that the teachers were able to identify the mathematical reasoning used by the students and the actions of the teacher in the video that promoted mathematical reasoning.

Keywords: *professional noticing, professional learning, teacher education, professional learning tasks, mathematical reasoning.*

INTRODUCIÓN

En Brasil, las últimas décadas han visto un aumento en el número de cursos de formación continua (Gatti et al., 2019); sin embargo, existe la necesidad de explorar si estos cursos de formación continua están desarrollando las competencias docentes en los profesores de matemáticas para su práctica de enseñar matemáticas. Una de estas competencias es la competencia docente de mirar profesionalmente, que en las dos últimas décadas las investigaciones han señalado que es una competencia relevante a ser desarrollada en los programas de formación inicial y continua (Didnyal et al., 2021; Fernández et al., 2018; Weyers et al., 2024).

La competencia mirar profesionalmente se vincula a prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2019) como: (i) dotar de sentido el pensamiento matemático de los estudiantes; (ii) analizar y seleccionar tareas matemáticas; (iii) planificar una lección o (iv) gestionar la discusión sobre los procedimientos usados por los estudiantes en el aula. Por lo que los

Aguiar M. y Fernández, C. (2025). Mirar profesionalmente los razonamientos de los estudiantes y las acciones del profesor. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVIII (pp. inicial-final). SEIEM.

cursos de formación o procesos formativos de los profesores deberían enfatizar el desarrollo de la competencia vinculada a las prácticas profesionales.

En esta comunicación, se describe un curso de formación continua con profesores de matemáticas de educación secundaria, cuyo foco es el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente vinculada a distintas prácticas profesionales. En particular, nos centramos en explorar cómo los profesores de matemáticas de secundaria miran profesionalmente los razonamientos usados por estudiantes en una tarea matemática y las acciones del profesor de aula, cuando analizan un vídeo de su propia práctica durante el curso de formación en el que estaban participando. A continuación, se describe el modelo teórico que organiza el diseño del curso de formación continua y la conceptualización de la competencia docente mirar profesionalmente en este estudio.

MARCO TEÓRICO

El modelo Professional Learning Opportunities for Teachers (PLOT)

El diseño del curso de formación sigue el modelo PLOT (Ribeiro y Ponte, 2020), que es un modelo teórico-metodológico cuyo propósito es organizar el diseño de procesos de formación para generar oportunidades de aprendizaje para la práctica profesional. El modelo se organiza en torno a tres dominios: Tareas de Aprendizaje Profesional (TAP); Rol y Acciones del Formador (PAF) e Interacciones Discursivas entre Participantes (IDP). En las TAP se subraya que los profesores necesitan oportunidades para aprender a través de experiencias relacionadas con sus propias prácticas profesionales. Por tanto, las TAP se componen de tareas matemáticas y registros de la práctica de enseñar matemáticas. Las TAP deben permitir movilizar y (re)construir el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008) por tanto deben de contener preguntas con este foco. En relación con el PAF, cabe destacar la gestión del proceso formativo, valorando su organización y desarrollo a través de un enfoque exploratorio (Ponte y Quaresma, 2016) y que promueva la orquestación de discusiones didácticas y matemáticas entre los participantes (Stein et al., 2008). En el IDP, se tiene en cuenta que las discusiones promovidas en el proceso de formación incluyan discusiones matemáticas y didácticas (Ponte y Quaresma, 2016) que favorezcan la argumentación y justificación (Mata-Pereira y Ponte, 2017).

Desarrollo de la competencia mirar profesionalmente

La competencia mirar profesionalmente se entiende como la capacidad del profesor para identificar aspectos relevantes en una situación de enseñanza-aprendizaje, e interpretar dicha situación a partir de sus conocimientos profesionales para tomar decisiones (Fernández et al., 2018; Llinares y Fernández, 2021). Investigaciones previas han mostrado algunos contextos y herramientas que favorecen el desarrollo de esta competencia en los programas de formación inicial o continua. Una de estas herramientas es el uso de registros o representaciones de la práctica (Buchbinder y Kuntze, 2018; Fernández et al., 2018). Se consideran registros de la práctica materiales, planificaciones de clase, resoluciones de los alumnos a una tarea matemática o un diálogo entre un profesor y diferentes estudiantes y estos registros pueden estar en diferentes formatos (video, escritos o cómic). Además, el uso de preguntas guía que ayuden a los profesores a centrar su mirada sobre un aspecto específico del registro de la práctica y el uso de lentes teóricas (documentos teóricos con información sobre la enseñanza y aprendizaje de un determinado concepto matemático procedente de investigaciones previas) también favorece el desarrollo de la competencia (Fernández y Choy, 2020; Llinares y Fernández, 2021).

En nuestro estudio, el foco de atención de la competencia mirar profesionalmente es la práctica de dotar de sentido el razonamiento de los estudiantes y las acciones del profesor. Conceptualizamos el razonamiento matemático en la línea de Lannin et al. (2011), que conciben el razonamiento "como un proceso evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar el por qué y desarrollar y evaluar argumentos" (p.10). Este razonamiento implica una serie de procesos, entre los que consideramos

fundamentales en este estudio conjeturar, generalizar y justificar. Conjeturar implica razonar sobre relaciones matemáticas con el fin de hacer afirmaciones que se asumen provisionalmente como verdaderas (Lannin et al., 2011). Para Mata-Pereira y Ponte (2017), la construcción de una generalización matemática implica una afirmación sobre una propiedad, concepto o procedimiento que se pretende validar. La justificación puede definirse como un argumento lógico basado en ideas que ya se comprenden y, por tanto, justificar implica evaluar la validez de los argumentos (Lannin et al., 2011). Por otra parte, para las acciones del profesor nos centramos en cómo orquestar discusiones matemáticas en el aula según Stein et al. (2008).

MÉTODO

Los participantes fueron siete profesores de matemáticas de escuelas de los estados de São Paulo y Minas Gerais (Brasil) que se habían inscrito en un proceso de formación que fue ofrecido por la universidad para la comunidad de profesores de matemáticas. En este grupo de profesores había dos mujeres, una de las cuales enseñaba en una escuela pública del estado de Minas Gerais, y la otra no enseñaba en ese momento. Los demás eran cinco hombres, tres de los cuales eran profesores en escuelas públicas de São Paulo y dos estaban en formación inicial con experiencia en la enseñanza de las matemáticas.

El proceso de formación se realizó a lo largo de 15 reuniones presenciales de 4 horas cada una (1 reunión por semana). Las reuniones fueron organizadas por tres formadores, uno de los cuales era el primer autor. El proceso de formación basado en el modelo PLOT se dividió en cuatro etapas: (1) acogida y recogida de información previa de los profesores participantes, (2) talleres de formación con los profesores participantes, (3) experiencias en y sobre la práctica docente con los profesores participantes, y (4) sistematización del aprendizaje de los profesores participantes. En la etapa 3, donde se centra este estudio, los profesores participantes se dividieron en dos grupos y cada grupo desarrolló un ciclo de planificación, desarrollo y reflexión (PDR, Trevisan et al., 2020). El ciclo PDR tenía tres TAP, cada una asociada a uno de los momentos del ciclo: planificación conjunta de una lección, implementaron en un aula real y reflexión conjunta a partir de lo observado en el aula.

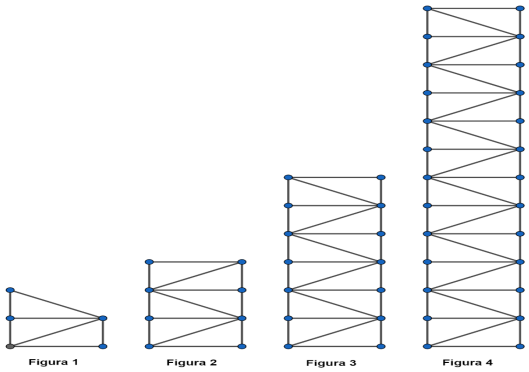
En la TAP de planificación, los grupos recibieron un guion adaptado de Serrazina (2017): (i) seleccionar una tarea matemática exploratoria que promueva el desarrollo de los procesos de razonamiento y los objetivos de aprendizaje relacionados; (ii) anticipar las dificultades de los alumnos y sus posibles estrategias para resolver la tarea y (iii) anticipar las posibles preguntas del profesor y las respuestas de los alumnos. Durante los talleres de formación (etapa 2 del proceso de formación), los participantes habían reflexionado y discutido sobre el guion de Serrazina (2017), sobre el enfoque de enseñanza exploratoria (Canavarro, 2011), considerando sus tres momentos específicos: apertura de la lección, trabajo autónomo de los alumnos -individualmente y/o en grupos- y discusión en grupo sobre cómo orquestar discusiones matemáticas en el aula, según Stein et al. (2008).

La TAP asociada a la reflexión conjunta tenía como objetivo: (i) comprender las estrategias de resolución de los alumnos; (ii) identificar los procesos de razonamiento matemático utilizados por los alumnos; (iii) identificar y comprender las actuaciones del profesor ante las estrategias de resolución de los alumnos; (iv) reflexionar sobre otras posibles actuaciones del profesor en el aula. En particular, en esta comunicación nos centramos en la tarea de reflexión conjunta. En esta TAP, los formadores elegían episodios de las lecciones implementadas por los profesores (vídeos de entre 2 y 5 minutos) que podían generar reflexión acerca de los objetivos previamente descritos de la TAP. Se muestra, a modo de ejemplo, uno de los episodios usados en el que uno de los profesores (Bela) implementa la tarea matemática de la Figura 1 en un aula de 3º de ESO. Esta tarea pretendía repasar las progresiones geométricas mediante una tarea exploratoria. Este episodio, llamado "Conversando sobre la figura 5", se eligió porque un grupo de estudiantes había utilizado una estrategia de resolución para contar el número de triángulos de la figura 5 que no se había anticipado en la planificación. Las preguntas sobre las que tienen que reflexionar los profesores participantes están relacionadas con la

competencia mirar profesionalmente los razonamientos de los estudiantes y las acciones del profesor de aula: (i) ¿Creen que los alumnos fueron capaces de explicar la forma en que razonaron? Comenta. Y (ii) ¿Cómo intentó ayudarles el profesor? Comenta.

Figura 1

Tarea matemática realizada en la clase de Bela



Observa las figuras y responde.
a) Dibuja la figura 5. ¿Cuántos triángulos tiene? Explica tu razonamiento.
b) Escribe el número de triángulos de las 10 primeras figuras. ¿Cómo los has obtenido?
c) ¿Qué relación hay entre el número de triángulos de la figura 4 y la figura 3? ¿Y entre la figura 4 y la figura 2? ¿Y entre la figura 4 y la figura 1? Describe la relación entre el número de triángulos de una figura determinada y el número de triángulos de la figura anterior.
d) Describe la relación entre el número de triángulos de una figura cualquiera y el número de triángulos de la figura 1.
e) Escribe una expresión que represente la relación anterior.

En el episodio (video), Bela solicita a un grupo de alumnos que comuniquen cómo lo han resuelto. En la Figura 2 incluimos el diálogo transcrito del vídeo de clase (episodio).

Figura 2

Diálogo transcrito del episodio "Conversando sobre la figura 5" (traducido al español)

Alumno: Es que hemos considerado también los triángulos equiláteros, no sólo los triángulos rectángulos.

Bela: Lo que dicen es que han considerado los triángulos de aquí [señala una de los triángulos rectángulos de la figura 1 que está proyectada en la pizarra] que posiblemente serían rectángulos y este de aquí [con el dedo en el triángulo isósceles de la figura 1 que están llamando los alumnos, equilátero] que tiene los mismos tres lados. Así que contaron así [la maestra cuenta con el dedo, señalando los triángulos de la figura 1] 1 triángulo equilátero y 1, 2, 3 [señalando los triángulos] triángulos rectángulos. ¿Cómo han llegado en la Figura 2?

El alumno tiene dificultades en verbalizar la relación entre los triángulos de la figura 1 respecto de la 2. Bela se da cuenta y se dirige a la pizarra y empieza a escribir el número de triángulos de cada figura.

Bela: Pues venga [Bela empieza a escribir en la pizarra] en la figura 1 hay 1 triángulo equilátero y 3 rectángulos. Y en la figura 2, ¿cómo lo han hecho? (...). Los rectángulos son el doble [escribe esta cantidad en la pizarra], así que son el doble y hay 6 rectángulos. Y los equiláteros, ¿cómo lo has hecho?

Alumno: Entonces la figura 1 no tiene un patrón, porque el número de triángulos equiláteros es impar, así que va a ser diferente.

Bela: Así que la figura 1 es una excepción. Entonces, [en la figura 2] ¿cuántos triángulos equiláteros hay?

Alumno: ¡Habrá dos! Y el total [de triángulos en la figura 2] será 8 [6 + 2]. (...)

Bela: Entonces, de la figura 2 a la figura 3, ¿dicen que hay un patrón?

Alumno: Hay un patrón que funcionó para el resto [de las figuras] (...). [En la figura 3] los triángulos rectángulos se van a duplicar.

Bela: En la figura 3 son 2x6 igual a 12 triángulos rectángulos [Bela lo anota en la pizarra].

Alumno: Los equiláteros, ¡van a aumentar otros tres!

Bela: Entonces, [los equiláteros] serían [el número de triángulos de la figura] de la anterior ¡más 3! 2 + 3 son 5. [Bela hace anotaciones en la pizarra]. En total, 17 [triángulos].

Alumno: Sí, eso es.

Bela: ¿Funcionó para el siguiente [figura 4]?

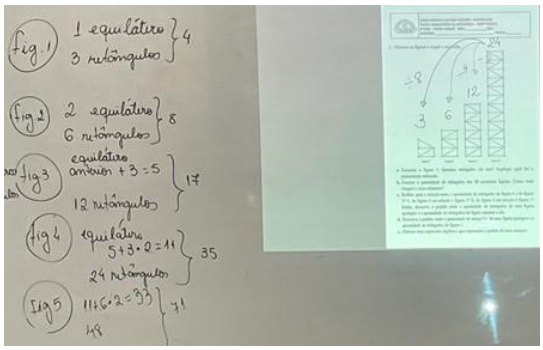
Alumno: ¡Sí! Salvo que este "más tres" [el número de triángulos equiláteros, que es el anterior más 3] se convertiría en otro 3x2 [en la figura 4]. Entonces sería 6x2 [en la figura 5].

Bela: Entonces el equilátero [en la figura 4] sería 5 + 3x2 igual a 11. ¿Es así?

Alumno: ¡Sí!

Bela: Aquí es el doble [Bela anota en la pizarra el número de triángulos rectángulos de la figura 4], así que hay 24 [número de triángulos totales, Bela anota en la pizarra]. Entonces, ¿hay 11 aquí? [Bela va a la figura 4 y cuenta los 11 triángulos equiláteros]. Con un total de [11 + 24 = 35 triángulos en la figura 4] de 35. Tenemos una excepción en la figura 1. (...). ¿Han encontrado un patrón aquí? ahora tenemos que pensar cómo relacionamos este patrón con la figura 1.

Al final de esta conversación, la pizarra tiene el siguiente aspecto:



Los datos de esta investigación proceden de la discusión colectiva del grupo de profesores en el curso de formación que fueron grabadas en vídeo. En el análisis, dos investigadores nos centramos en identificar si los profesores fueron capaces de comprender las estrategias de resolución de los estudiantes identificando los procesos de razonamiento matemático (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira y Ponte, 2017), y si fueron capaces de identificar las acciones de Bela (y otras acciones) en relación con la orquestación de discusiones matemáticas que promuevan el desarrollo de los procesos de razonamiento matemático en los estudiantes. El análisis fue realizado individualmente por los dos investigadores, y las discrepancias fueron discutidas hasta alcanzar un consenso.

RESULTADOS

Mirar profesionalmente las estrategias de resolución de los estudiantes

Los profesores fueron capaces de identificar errores en las resoluciones de los estudiantes. Por ejemplo, en el episodio descrito, identificaron el error cometido por el grupo de estudiantes con relación a la identificación de triángulos isósceles como equiláteros:

Tito: Pensaron en triángulos equiláteros que en realidad son isósceles.

Lui: Es otro problema, no la habíamos previsto [se refiere a esta resolución]. No habíamos previsto este triángulo isósceles que llamaron equilátero, fue una sorpresa. No hubo un momento [en clase] en que se les dijera [a los alumnos] que lo que estáis llamando equilátero es un triángulo isósceles.

Por otra parte, también fueron capaces de identificar procesos de razonamiento desarrollados por el grupo de estudiantes. Por ejemplo, en el episodio fueron capaces de identificar que el grupo de estudiantes estaban identificando un patrón (en los triángulos "equiláteros") y por tanto estaban conjeturando. También identificaron que el grupo de estudiantes no fue capaz de generalizar:

Tom: Sí, están viendo un patrón. Pero no pueden generalizar.

Formadora: ¿Cuál es su proceso de razonamiento?

Lui: Conjeturar.

Formadora: ¿Cuál es el razonamiento que no pueden hacer?

Tom: Generalizar.

La discusión con foco en la estrategia usada por los estudiantes (no anticipada en la planificación) les permitió reflexionar sobre las características de la propia tarea y sus posibles modificaciones. En la discusión, discuten sobre la posibilidad de incluir los triángulos isósceles en las preguntas de la tarea y sobre si este cambio estaría fuera del objetivo de la tarea y sería otra tarea nueva.

Tito: Se me ocurrió dejar las figuras y modificar las preguntas así: Tratar de encontrar una relación para la formación de triángulos rectángulos, otra para triángulos isósceles y luego la relación de formación de todos los triángulos en general.

Lui: Pero con esta idea nos estamos alejando del objetivo de la tarea. Cuando planteamos esta tarea, nuestro objetivo era que al final llegaran al término general de la progresión geométrica. Que encuentren este nuevo camino, por mucho que haya enriquecido las discusiones, aleja al grupo del objetivo de la tarea, que era llegar al término general de la progresión geométrica.

Mirar profesionalmente las acciones del profesor (Bela)

En la discusión sobre la segunda pregunta ¿cómo intentó ayudarles el profesor?, los profesores fueron capaces de identificar varias acciones de Bela, como la organización del discurso y el uso de la representación simbólica para registrar la respuesta de la alumna en la pizarra:

Tom: [La profesora] organizó su discurso [en la pizarra].

Lima: La profesora ayudaba no sólo al grupo, a la chica que estaba hablando, sino a los otros grupos (...). Así que más o menos mediaba su diálogo [el de la alumna del grupo que hablaba] con los demás compañeros, utilizando la pizarra para registrar. Esto mostró a los alumnos otro tipo de representación de la situación. Así pudieron ver y oír al mismo tiempo.

Por otra parte, discutieron la acción tomada por Bela ante la resolución no anticipada en la planificación del grupo de estudiantes. Profesores como Tom o Tito lo vieron su acción como una oportunidad para explorar más allá del objetivo de la tarea inicial. Teo en cambio comentó que se tendría que haber matizado al inicio que únicamente se contaban los triángulos rectángulos. Con esta discusión, los profesores se dieron cuenta de la importancia y necesidad de anticipar las estrategias de resolución de los alumnos en la planificación.

Teo: Otra cosa que generó un poco de discusión en nuestro grupo es si en el inicio de la tarea ella debería haber matizado si contar o no contar los triángulos "equiláteros". Creemos que debería haber dejado claro qué triángulos se tenían que contar al principio de la tarea (...).

Bela: En realidad, en relación con lo que nos ha señalado Teo, fue una sorpresa en su momento. Por más que hicimos [en la planificación], cambiamos la forma de la figura, nosotros no pudimos visualizar la forma de los triángulos "equiláteros". Así que [la resolución de este grupo] fue una sorpresa en su momento.

Tom: ¡Es bonito! Demuestra que lo veían de otra manera (...).

Tito: La calma [de la profesora Bela en la pizarra] fue interesante porque la falta de previsión de esta resolución en la planificación resultó en una discusión que fue más allá de lo previsto.

Además, los profesores identificaron otras posibles acciones del docente, como solicitar a la propia alumna que saliera a la pizarra a explicar y escribir su resolución.

Lima: Otra forma era pedirle a la propia alumna que saliera a la pizarra a explicar su solución. (...).

Bela: Ellas salen a la pizarra a explicar, porque yo hago eso con ellas. (...) ¿Por qué decidí mediar y no llamarlas? Porque no había tiempo, tardarían mucho más en llegar a su razonamiento.

Lima: Creo que esto [que los alumnos salgan a la pizarra a explicar su solución] podría ser una práctica en otras tareas (...). Porque tenemos mucho potencial para desarrollar su comunicación. Es muy rico, que vayan a la pizarra y empiecen a sentir esta dificultad de cómo lo escribo, de cómo lo explico. Esto les planteará dificultades que les ayudarán a desarrollar otras habilidades que son importantes para el desarrollo matemático. Pero en este momento concreto, estoy de acuerdo. Quizá haya sido la mejor decisión.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Durante las discusiones colectivas, los profesores identificaron errores en las estrategias de resolución de los estudiantes y los procesos de razonamiento matemático (Lannin et al., 2011). Además, sus discusiones también tuvieron el foco en que la no anticipación de una estrategia en la planificación dificulta la actuación del profesor en el aula (Serrazina, 2017), y, por tanto, reflexionaron sobre la importancia de la anticipación en sus planificaciones. Por otra parte, los profesores reflexionaron sobre las características de la tarea matemática y las posibles modificaciones. Por tanto, los profesores participantes en el curso de formación fueron capaces de mirar profesionalmente las estrategias de los estudiantes identificando errores y los procesos de razonamiento matemático utilizados por los estudiantes y tomar decisiones sobre la tarea utilizada.

Con relación a las acciones del docente de aula para promover el razonamiento matemático de los estudiantes, los profesores fueron capaces de identificar acciones del docente con este objetivo; por ejemplo, el uso de la representación simbólica para registrar la respuesta de la alumna en la pizarra o la organización de su discurso. También destacaron la actitud tranquila de la docente ante la situación no anticipada en la planificación y reflexionaron sobre la acción tomada de no haber corregido el error (el uso de triángulos equiláteros) o de continuar usando los triángulos no anticipados en la planificación. Además, los profesores pensaron en otras posibles acciones como solicitar a los estudiantes que expliquen y escriban su resolución en la pizarra. Por tanto, los profesores fueron capaces de mirar profesionalmente las acciones de la profesora, identificando acciones de esta para promover el razonamiento matemático y otras acciones que podría haber ayudado a los estudiantes.

Los resultados muestran que los profesores fueron capaces de mirar profesionalmente las estrategias de resolución identificando los procesos de razonamiento matemático de los estudiantes, así como las acciones del profesor. Creemos que el diseño del curso de formación usando el modelo PLOT (Ribeiro y Ponte, 2020), en el que se utilizan TAP que están formadas por episodio de vídeo de su propia práctica y unas preguntas para su reflexión, y donde se discuten documentos teóricos que apoyan la reflexión de los profesores podría haber facilitado el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente, al igual que se ha mostrado en otros programas de formación inicial donde se han usado representaciones de la práctica, preguntas guía y lentes teóricas (Fernández et al., 2018; Llinares y Fernández, 2021).

Agradecimento

Este estudio fue financiado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico – CNPq - Brasil. Proceso: 403031/2021-4.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (2018). Representations of practice in teacher education and research – Spotlights on Different Approaches. En O. Buchbinder y S. Kuntze, (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving Feld* (pp. 1–8). Springer. https://doi.org/10.1007/ 978-3-319-70594-1_1

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação e Matemática*, *115,* 11 - 17.

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education, 53*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological and social perspectives. En S. Llinares, y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Proceses in Mathematics Teacher Education* (*Second Edition)* (pp. 337–360). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM), 13,* 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Gatti, B. A., Barretto, E. S. S., Andre, M. E. D. A. y Almeida, P. C. A. (2019). *Professores do Brasil: Novos cenários de formação*. UNESCO.

Lannin, J. K., Ellis, A. B. y Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston: NCTM.

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18*, 30–43.

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación em Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, *24*(1), 185-205.

Mata-Pereira, J. y Ponte, J. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Ponte, J.P. y Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Ribeiro, A.J. y Ponte, J.P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar Matemática. *Zetetiké*, *28*, 1-20. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072

Serrazina, L. (2017). Planificação do ensino-aprendizagem da Matemática. En GTI (Ed.). *A prática dos professores: planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 9-32). APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Trevisan, A. L., Ribeiro, A. J. y Ponte, J. P. (2020). Professional learning opportunities regarding the concept of function in a practice-based teacher education program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), 1-14. https://doi.org/10.29333/iejme/6256

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R. y Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education, 56,* 249-264. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CONTEXTUALIZADO QUE INVOLUCRA LA FUNCIÓN F(*N*)= 2*N* CON NIÑOS Y NIÑAS DE 5 AÑOS

Solving a contextualized problem involving the function f(*n*)= 2*n* with 5-year-old children

Anglada, L[a]., Cañadas, M. C[b]., Fuentes, S[b].

[a] Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, [b] Universidad de Granada

Resumen

En este estudio nos centramos en el enfoque funcional como aproximación al pensamiento algebraico en alumnado de 5 años. Nuestros objetivos de investigación son: (1) describir las respuestas de este alumnado a preguntas sobre un problema contextualizado que involucraba la función f(n)=2n en sus formas directa e inversa, (2) describir las justificaciones a sus respuestas, y (3) describir cómo construyeron una tabla para representar casos particulares del problema. Recogimos información de una sesión de trabajo con una clase de 13 niños y niñas de 5 años. Los resultados muestran que en las respuestas del alumnado podemos evidenciar que estos identifican regularidades para casos particulares, tanto para la forma directa como la inversa de la función, y la mayoría, justificó sus respuestas. Además, construyeron una tabla de funciones, distinguiendo las variables y la relación entre ellas.

Palabras clave*: educación infantil, estructuras, función inversa, pensamiento funcional, tablas de funciones.*

Abstract

In this study, we focused on the functional approach as an approach to algebraic thinking in 5-year-old students. Our research objectives were: (1) to describe these students' responses to questions about a contextualized problem involving the function f(n)=2n in its direct and inverse forms, (b) to describe the justifications for their responses, and (c) to describe how they constructed a table to represent particular cases of the problem. We collected data from a work session with a class of 13 5-year-old children. The results show that the students' responses revealed that they identified regularities for particular cases, both for the direct and inverse forms of the function, and the majority justified their responses. Furthermore, they constructed a table of functions, distinguishing the variables and the relationships between them.

Keywords: *early childhood education, function tables, functional thinking, inverse function, structures.*

INTRODUCCIÓN

Una de las aproximaciones al álgebra escolar recomendada para los alumnos en edad temprana es el pensamiento funcional (Carraher y Schliemann, 2007). El pensamiento funcional se centra en la relación entre dos cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2004). Establecer estas relaciones supone identificar la regularidad en el comportamiento entre variables (Blanton, 2008). De manera general, la regularidad es lo que se repite y, a partir de una regularidad observada, se prueba que esta sea válida para más casos particulares y, finalmente, para cualquier caso perteneciente a una situación dada (Pólya, 1966). Autores como Blanton y Kaput (2011) enfatizan la importancia de introducir el pensamiento funcional en la educación infantil, ya que el establecimiento de relaciones funcionales

Anglada, L., Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2025). Resolución de un problema contextualizado que involucra la función f(*n*)= 2*n* con niños y niñas de 5 años. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

surge intuitivamente en estos años. En nuestro trabajo asumimos que el alumnado de infantil tiene capacidad para establecer relaciones entre cantidades que covarían (e.g., Blanton y Kaput, 2004).

La representación de ideas algebraicas es una de las prácticas esenciales que Blanton et al. (2011) consideraron para el trabajo del pensamiento algebraico en el aula. En el contexto del pensamiento funcional, las representaciones permiten a los estudiantes expresar la relación entre cantidades que covarían. En particular, en este trabajo nos centramos en la representación mediante tablas. Las tablas son una representación que ayuda a organizar las ideas y el pensamiento a medida que el alumno las utiliza para documentar resultados y datos (López y Brizuela, 2024). Nos interesa esta representación ya que, a pesar de que es una representación con potencial en los primeros cursos, no ha sido muy explorada en estos niveles (Brizuela et al., 2021).

Otra de las prácticas esenciales del álgebra que vamos a considerar en este trabajo, y que es novedosa en estudios sobre pensamiento funcional en educación infantil, es la justificación. La justificación ayuda a determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación (Blanton et al., 2011). También permite a los niños desarrollar argumentos para defender o refutar la validez de una idea matemática (Brizuela y Strachotta, 2024). Diseñamos una tarea en nuestro equipo de investigación en un entorno de resolución de problemas contextualizados, en forma de historia-problema[i], que involucraba la función $f(n) = 2n$ en sus formas directa e inversa. Trabajamos con materiales concretos, para que los propios niños pudieran validar sus respuestas.

Con este trabajo pretendemos contribuir a la investigación sobre pensamiento funcional de niños de educación infantil. Establecemos tres objetivos de investigación, con el foco puesto en el trabajo conjunto de toda la clase: (1) describir las respuestas de alumnado de último curso de educación infantil (5 años) a preguntas sobre un problema contextualizado que involucraba la función $f(n)=2n$ en sus formas directa e inversa, (2) describir las justificaciones a sus respuestas y (3) describir cómo construyeron una tabla para representar casos particulares del problema.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico, que se ocupa de la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Desde la perspectiva del contenido matemático, nos centramos en las funciones lineales con dos variables, cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. En este contexto, contemplamos dos tipos de relaciones entre las variables, la directa (de la variable dependiente con la variable independiente) y la inversa (en la que se intercambian los roles de las variables respecto a la relación directa), existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004). La relación entre las variables de las funciones puede involucrar diferentes representaciones: (a) lenguaje natural-oral; (b) lenguaje natural-escrito; (c) pictórica; (d) numérica; (e) tabular y (f) notación algebraica (Carraher et al., 2008). En este trabajo nos centramos en la representación tabular. Las tablas son organizaciones gráficas donde la información se organiza según un doble eje que ordena y sistematiza datos de información relacionados entre sí (Campbell-Kelly et al., 2003). Llamamos tablas de funciones a las que permiten representar la relación entre variables. Las tablas de funciones son herramientas que apoyan el desarrollo temprano del pensamiento funcional (Tanisli, 2011).

En el pensamiento funcional es fundamental el estudio de regularidades (estructuras). Para que los niños identifiquen una regularidad, realizamos preguntas sobre casos particulares, de manera que a partir de algunos ejemplos hallen los valores de la variable dependiente y para nuevos valores específicos de la variable independiente x. Cañadas et al. (2016) en un estudio con alumnado de 2º de Educación Primaria (7 años) trabajaron con un problema contextualizado que involucraba la función $f(n)=2n$. Los niños y niñas expresaron la regularidad en sus respuestas mediante recurrencia "sumando dos cada vez" y mediante una estructura aditiva "sumando cada número consigo mismo".

Los estudios sobre pensamiento funcional en educación infantil que abordan el trabajo con la función inversa son escasos. Anglada et al. (2022) diseñaron y aplicaron una tarea que involucraba las funciones f(n) =n, f(n)=n+2, f(n)=n –1 y f(n) = 2n. Analizaron las respuestas de ocho niños de 5 años. En los resultados apreciamos que siete de los niños identificaron una estructura adecuada en preguntas relativas a las tres primeras funciones, para las formas directa e inversa. Para f(n) = 2n, dos estudiantes identificaron una estructura correcta, tanto para la función directa como para la inversa. Fuentes y Cañadas (2024), en un estudio con una niña de 4 años, describieron los pasos que esta realizó para resolver dos tareas que involucraban las funciones f(n)=n y f(n) =3n y sus respectivas funciones inversas. Esta niña trabajó con las formas directa e inversa de las dos funciones sin dificultad.

Respecto a la justificación, Pinto (2021), en un estudio de caso, analizó las justificaciones de un niño de 5 años al resolver problemas que involucraban funciones lineales. Acosta et al. (2024) realizaron un estudio longitudinal con estudiantes de tres, cuatro y cinco años, sobre el tipo de justificaciones empleadas al trabajar con patrones repetitivos. Ambos estudios destacan la importancia de animar a los estudiantes a justificar sus respuestas.

Algunos autores enfatizan la importancia de indagar sobre cómo los niños interactúan con las tablas de funciones (e.g., Brizuela et al., 2021). Blanton y Kaput (2004) abordaron cómo niños de esta edad resolvieron un problema contextualizado que implicaba las funciones f(n)=n y f(n)=2n. Estos autores describieron que los niños, con ayuda, utilizaron una tabla para organizar datos y establecieron relaciones entre variables. Brizuela et al. (2021) realizó un estudio de caso con un niño de 5 años, centrado en cómo este usaba y comprendía las tablas cuando resolvía problemas que involucraban las funciones f(n)=n, f(n)=n+1 y f(n)=2n. Estas tablas sirvieron al niño de andamiaje para la identificación de relaciones funcionales y de la generalización. Estos autores concluyeron que los niños y niñas pueden usar tablas como herramientas de organización y no solo “mirarlas”, sino también “mirar a través” de las tablas para desarrollar la comprensión de las relaciones funcionales.

En nuestro trabajo, a partir de un problema contextualizado que involucraba la función f(n)=2n en sus formas directa e inversa, describimos las regularidades que evidenciamos en las respuestas de los niños y las justificaciones que dan a estas respuestas. También describimos cómo construyeron una tabla de funciones.

MÉTODO

Este estudio es cualitativo, de tipo exploratorio y descriptivo. La recogida de datos se llevó a cabo con una clase de13 escolares del último curso de educación infantil (5 años) en el curso 2024/2025. Los niños y niñas pertenecían a un centro educativo público de Granada. La selección del centro educativo fue intencional, según la disposición del centro y de los docentes. Los niños y niñas habían trabajado en clase, en ambos casos, con algunos tipos de tablas como tablas de doble entrada, con elementos cualitativos y cuantitativos. Además, desde los 3 años, estos han participado en experiencias relativas al pensamiento algebraico, realizadas dentro del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo (https://www.pensamiento algebraico.es), durante las cuales tuvieron contacto con tablas de funciones utilizando material manipulativo (Anglada et al., 2024). La participación fue voluntaria y contamos con el permiso por parte del Comité de Ética de la Universidad de Granada (ref. 3468/CEIH/2023).

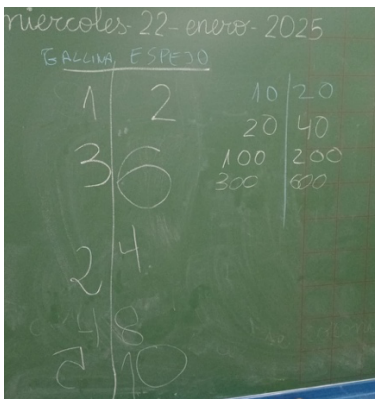
Para los objetivos planteados, diseñamos una sesión de 50 minutos con toda la clase. Diseñamos la tarea en el seno del proyecto de investigación en el que se enmarca este trabajo. Las tareas se basaron en la resolución de problemas contextualizados, presentados en forma de historia-problema. Dos de las autoras de este trabajo entraron al aula. Una actuó como investigadora docente y otra grabó y sirvió de apoyo. Ambas tomaron notas de sus observaciones en el aula. La tutora del grupo ayudó en la gestión del aula, pero no se implicó en nuestra propuesta.

Presentamos la historia-problema de forma oral y establecimos un diálogo continuo con los niños, basado en preguntas y respuestas. Utilizamos una gallina y huevos de juguete, y un espejo. La investigadora comenzó diciendo: "Esta gallina se llama Lina, es una gallina presumida y tramposa. Siempre quiere ser la que pone más huevos de todo el gallinero. ¡Oh!, es el momento de que nuestra gallina ponga huevos – la gallina desapareció y volvió con un huevo- ¿Veis cuántos huevos ha puesto nuestra gallina Lina?". La investigadora continuó diciendo que Lina estaba triste por poner solo un huevo, entonces a Lina se le ocurrió una idea, poner el huevo delante de un espejo y así engañar a las demás gallinas y al granjero. Luego, preguntó a los niños: "¿qué es lo que ocurre al poner el huevo delante del espejo?". La investigadora repitió el proceso con tres huevos. Después con dos, pero anticipando la respuesta de los niños para luego colocar los huevos frente al espejo y corroborar si estaban en lo correcto. Y así continuó con otros casos particulares con números entre 1 y 10. Luego, pasamos a trabajar la forma inversa de la función, planteándoles: "Si quiero que se vean en total 4 huevos, ¿cuántos huevos deberá poner la gallina?". Repitió esta pregunta con distintos casos particulares. A continuación, preguntó qué es lo que ocurría al poner huevos delante de un espejo. Orientamos las preguntas para que fueran un ente facilitador del diálogo y de la justificación por parte de los alumnos. Algunas de las preguntas realizadas fueron: "¿Cómo pensaste que era [un número cualquiera]?", "¿Cómo lo has hecho?", "¿Por qué?".

Después de esto, la investigadora dibujó los ejes de una tabla en la pizarra y puso el primer par de valores: "si la gallina pone un huevo, al ponerlo delante del espejo veremos dos". A continuación los niños salieron por turnos a la pizarra añadiendo pares de valores de la función (ver Figura 1). Tuvimos presente proponerles valores no consecutivos para evitar la recursividad. Además, siguiendo recomendaciones de López y Brizuela (2024) formulamos preguntas que ponían la atención en las relaciones por filas de la tabla. Cada vez que un niño escribía una pareja de valores, le preguntábamos qué quería decir con lo que había escrito. Se abría una discusión en clase y se confirmaba si todos los niños lo consideraban correcto o no. En caso de discrepancia lo comprobaban con el material.

Figura 1

Tabla Construida por los Niños en la Pizarra



En este escenario, la variable independiente es el número de huevos que pone la gallina y la variable dependiente el número de huevos que se ven en total cuando acercamos el espejo. Para la forma inversa, se invierten los roles de las variables (i.e., se conoce el número de huevos que se ven en total al poner el espejo y se desconoce el número de huevos que ha puesto la gallina).

Análisis de datos

Transcribimos las videograbaciones de las sesiones y realizamos un análisis de los datos a partir de estas transcripciones. Analizamos las respuestas de los niños a las preguntas de la investigadora referidas a casos particulares, para las formas directa e inversa de la función (objetivo 1 y 2). Nos centramos en cómo fueron estas respuestas y describimos: (a)si eran correctas o incorrectas, (b) si se apoyaron en el uso de material, (c) si las justificaron, (d) cómo eran estas justificaciones.

Por otro lado, analizamos la construcción por los niños de una tabla en la pizarra para representar la relación entre las variables (objetivo 3). Las categorías consideradas se basan en las de Torres et al. (2022), siendo: (a) ubicación de los pares de valores en las columnas adecuadas, (b) lectura de los pares de valores indicando a qué variable correspondía cada una y (c) representación de casos particulares distintos a los utilizados en la sesión de clase en la tabla.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Observamos que las respuestas del alumnado a las preguntas de la investigadora eran correctas, para las formas directa e inversa de la función, desde los primeros casos particulares. La mayoría de las veces, el alumnado respondía al unísono y de forma casi inmediata. Cuando la investigadora-docente les preguntaba cómo sabían la respuesta, recurrían a sumar el número de huevos que puso la gallina consigo mismo. Algunos ponían incluso otros ejemplos de parejas de casos particulares para justificar sus respuestas, utilizaron números mayores que 10, incluso números como 300, 400, 1000 etc. La estrategia de ir sumando un número consigo mismo, evidencia que identificaron una regularidad. No dieron una expresión de esta regularidad, pero tenían claro que debían sumar la cantidad de huevos que ponía la gallina con el mismo número que era el que se reflejaba y lo evidenciaban a través del trabajo con casos particulares. Para los primeros cuatro casos particulares usaron materiales para ratificar sus respuestas, pero después no.

A continuación, presentamos un extracto de la clase cuando trabajan con la función directa. Destacamos la interacción que se generó en el aula, donde la mayor parte de los alumnos aportó a la conversación. Para mantener el anonimato de los niños, les asignamos su número de lista habitual acompañado de una A (de "alumno").

Investigadora (I): ¿Cuántos huevos ha puesto la gallina?

Todos (T): Tres.

I: Pero ella sigue queriendo más.

A8: Sigue haciendo trampa.

I: Cuando los ponga delante del espejo, ¿cuántos vamos a ver?

T: Seis, cuatro, ocho…

I: Vamos a comprobarlo.

A3: Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis.

I: A8 dice que sabía que iba a ser seis. A ver, cuéntame cómo.

A8: Es que tres más tres es seis.

I: ¿Alguien sabe por qué dijo tres más tres?

A1: Seño, una cosa. Veinte más veinte es cuarenta.

A6: Y cien más cien es doscientos.

A1: Y mil más mil dos mil.

A8: Mira, trescientos más trescientos es seiscientos.

A12: Infinito más infinito es infinito.

A13: Infinito más infinito. Es infinito y más allá.

Del fragmento anterior extraemos varias ideas interesantes en relación con nuestros objetivos. La primera es que los alumnos construyeron las respuestas en común. Al principio, al preguntarles por lo que vemos cuando la gallina pone 3 huevos, las respuestas varíaban y danban como respuesta diferentes números pares (seis, cuatro, ocho). A continuación, con el material concreto, A3 contó los

huevos y sus reflejos, uno a uno. A8 intervino en la clase comentando que sabía que eran seis porque es tres más tres, evidenciando una estructura aditiva. Luego, varios compañeros pensaron números al azar y fuera de su ámbito numérico conocido y duplicaron el valor sumándolo consigo mismo (por ejemplo, 300+300=600). Aquí dejaron de hacer referencia a las cantidades involucradas, de forma que recontextualizaron el problema (Carraher y Schliemann, 2002) de un contexto físico a uno matemático. Destacamos también la mención al infinito como número muy alto y que expresen "infinito más infinito", que refuerza la idea de que han identificado una regularidad.

En cuanto a preguntas sobre la función inversa, extraemos el siguiente diálogo:

I: Yo quiero que cuando ponga los huevos en el espejo se vean cuatro huevos. ¿Cuántos huevos debe poner la gallina?

T: Dos, dos, dos…

I: Vamos a comprobarlo [lo comprueba con el material]. Muy bien.

I: Ahora quiero que se vean dos ¿Cuántos huevos debe poner la gallina?

T: Uno (responden rápidamente y al unísono).

I: ¿Y si ahora quiero ver seis?

T: Tres.

I: ¿Y si quiero ver ocho?

T: Cuatro.

A5: Cuatro y cuatro son ocho [sacando cuatro dedos en cada mano y poniendo una frente a la otra].

Observamos que el cambio en la forma de la función no generó dificultad. Como comentó A5, consiste en pensar ese ocho como una suma de números iguales, uno correspondiente a los huevos que puso la gallina y otro a su reflejo, lo que evidencia emparejando cuatro dedos de cada mano.

Respecto a la construcción de una tabla en la pizarra para representar la relación entre las variables, observamos que los niños desde el primer momento colocaron los datos en las columnas adecuadas. La investigadora escribió las dos primeras parejas de valores y trazó los ejes. Luego, continuaron los niños y niñas escribiendo en la tabla otras parejas. Al principio, las columnas no tenían encabezado, les preguntamos qué nombre podríamos ponerle y ellos mismos sugirieron llamarlas "gallina" a la de los huevos que esta ponía (a la izquierda) y "espejo" a la de lo que veían al poner los huevos frente al espejo (columna de la derecha). Cada vez que un niño añadía valores en la tabla, le pedíamos que nos dijera qué significaba lo que representaban en la tabla y lo hicieron correctamente. En varias ocasiones, paramos y leímos entre todos lo recogido en la tabla. Esto indica que reconocían los valores de las variables y la relación entre ellos. Algunos niños representaron en la tabla algunos valores distintos a los utilizados en la sesión de clase, como podemos ver en la Figura 1.

CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos dado respuesta a tres objetivos de investigación. Hemos mostrado fragmentos del trabajo del alumnado en el aula que evidencian la relación entre las variables al trabajar con casos particulares, para las formas directas e inversa de la función, cómo justifican sus respuestas y cómo construyen y utilizan una tabla para organizar valores de una función.

La expresión verbal a estas edades es limitada, puede que esto justifique que no han llegado a dar una expresión de la regularidad para la relación entre las variables, pero por sus respuestas podemos evidenciar que la han identificado. Si comparamos el presente estudio con el de Cañadas et al. (2016) con alumnado de 7 años, observamos algunas diferencias, por ejemplo, en este los niños y niñas justificaron sus respuestas mediante recurrencia "sumando dos cada vez". Esto podría deberse al tipo de tarea o a la presentación de valores de la variable independiente consecutivos. Otra diferencia es

que, usaban la expresión "duplicar" para expresar la regla seguida. A pesar de usar la expresión seguían una estructura aditiva sumando cada número consigo mismo, no llegaron a usar la estructura multiplicativa del doble. A parte de esto los resultados de los dos estudios son muy similares.

En línea con Brizuela et al. (2021) observar cómo los niños de 5 años construyen una tabla ayuda a profundizar en cómo estos relacionan los valores de dos variables. Parte de nuestros resultados confirman los de estudios previos (e. g., Anglada et al., 2024; Brizuela et al., 2021), evidenciando la capacidad de los niños y niñas de esta edad para construir y leer tablas de funciones. Consideramos una limitación el hecho de haber utilizado una función multiplicativa específica, habría que indagar sobre lo que ocurre con otras funciones lineales y sus inversas. Coincidimos con investigaciones previas donde se destaca que incluir cuestiones que involucren a la función inversa es viable en estas edades siempre y cuando el contexto y las tareas sean adecuadas (Anglada et al. 2022, Fuentes y Cañadas, 2024). En futuros trabajos sería interesante seguir indagando sobre esto y estudiar el uso de las tablas para descubrir relaciones entre variables.

Como aporte a la docencia, destacamos la inclusión de tareas de pensamiento funcional en un contexto en el que el alumnado puede anticipar respuestas y autovalidarlas. Además, utilizar la historia-problema como recurso permite una mejor gestión de las preguntas dirigidas a la función.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Computational thinking and repetition patterns in early childhood education: Longitudinal analysis of representation and justification. *Education and Information Technologies*, 1-26. https://doi.org/10.1007/s10639-023-12051-6

Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.

Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). Identificación y descripción de cambios cualitativos por niños de tres años. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González y A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 191-200). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-19

Anglada, L., Pinto, E., Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2024). Five-year-olds expressing relationships while working with a function machine: approaches to the use of function tables. En A. Twohill, I. Isler-Baykal, E. Knuth, A. J. Ribeiro y J. Miller (Eds.), *Proceedings from ICME 15, Topic Study Group 1.2: Teaching and learning of early algebra* (pp. 1-4). ICME 15.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Heinemann Educational Books.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Brizuela, B. M., Blanton, M. y Kim, Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

Brizuela, B. M. y Strachota, S. (2024). When algebra makes you smile: Playful engagement with early algebraic practices. *Learning and Instruction, 92*, 101933. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.101933

Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. y Robson, E. (Eds.) (2003*). The history of mathematical tables: From Sumer to spreadsheets*. Oxford University Press.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87-103. https://doi.org/10.1016/ j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM–Mathematics Education, 40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2002). Is everyday mathematics truly relevant to mathematics education? En J. Moshkovich y M. Brenner (Eds.), *Everyday mathematics. Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education* (11) (pp. 131-153). X

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-05). NCTM.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). Direct and Inverse Functions in Pre-School: A case study on functional thinking with a 4 year-old. *Early Childhood Education Journal*. https://doi.org/10.1007/s10643-024-01826-2

López, M. y Brizuela, B. M. (2024). Las tablas como herramientas algebraicas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas 106*, 23-28.

Pinto, E. (2021). La construcción y justificación de ideas matemáticas generales por un niño de 5 años: el rol de las representaciones manipulativas. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, 6*(2), 144-164. https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.1601

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223. https://doi.org/10.1016/ j.jmathb.2011.08.001

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking Context. *Mathematics 10*, 56. https://doi.org/10.3390/math10010056.

[i] Una historia-problema es una narración o relato que presenta una situación concreta y significativa, diseñada para motivar y contextualizar un problema matemático. Autores como Radford (2018) analiza cómo estas pueden servir para estructurar problemas y mejorar su comprensión.

ANÁLISIS DE RAZONAMIENTOS ABDUCTIVOS POR DOCENTES EN FORMACIÓN: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Analysis of abductive reasoning by preservice teachers: an exploratory study

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

La formación inicial de docentes de matemáticas ha de contemplar tareas formativas para revisar y desarrollar un adecuado conocimiento de los procesos de razonamiento y prueba. Se presentan resultados de la implementación con estudiantes para maestro de un experimento de enseñanza sobre la conjetura y demostración del teorema del ángulo inscrito. En concreto, se usa el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y el marco REP (Role of Examples in Proving) para analizar los comportamientos al validar o refutar una posible justificación del teorema, basada en una relación falsa, propuesta como razonamiento abductivo. Se caracteriza el trabajo de cuatro parejas, de las que todas ellas fueron capaces de detectar contraejemplos de la relación con el guion proporcionado, pero solo una pareja evidenció comprender su rol para refutar la misma.

Palabras clave: estudiantes para maestro, ejemplos y contraejemplos, razonamiento abductivo, MTSK.

Abstract

The training of pre-service mathematics teachers must include formative tasks to revise and develop an adequate knowledge of reasoning and proving processes. This text presents results from the implementation of a teaching experiment with pre-service teachers on the conjecture and proof of the inscribed angle theorem. Specifically, MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) model and the REP (Role of Examples in Proving) framework are used to analyse behaviours when validating or refuting a possible justification of the theorem, based on a false relationship, that is proposed as an abductive reasoning. It is characterized the work of four pairs, all of whom were able to identify, with the provided script of questions, counterexamples to the relationship, but only one pair showed an understanding of their role in refuting the relationship.

Keywords: *preservice teachers, examples and counterexamples, abductive reasonings, MTSK.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Hay un consenso sobre la importancia de los procesos de razonamiento y prueba en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como uno de los procesos matemáticos clave (NCTM, 2000), y que se refleja en las competencias específicas en matemáticas que establece el actual currículo de la LOMLOE, también en Educación Primaria (MEFP, 2022). Como detallan Jeannotte y Kieran (2017), los procesos de razonamiento y prueba, que involucran tanto la indagación para detectar y establecer conjeturas como la validación o no de las mismas, ponen en juego muchas acciones y subprocesos distintos que justifican su importancia. En concreto, los razonamientos abductivos son fundamentales como generadores de hipótesis que se deben analizar y evaluar si son válidas o no (Meyer, 2010).

Los docentes tienen un papel fundamental en el diseño, implementación y gestión de actividades sobre los procesos de razonamiento y prueba, en las que existan momentos tanto de generación de hipótesis y conjeturas como de análisis de su validez y de construcción de justificaciones. Modelos como el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) destacan la

Arce, M. y Conejo, L. (2025). Análisis de razonamientos abductivos por docentes en formación: un estudio exploratorio. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

necesidad de un adecuado conocimiento del docente de las prácticas propias del quehacer matemático. Por ello, para hacer una adecuada gestión de este tipo de actividades, en su formación inicial deben enfrentarse a tareas formativas que permitan revisar y desarrollar ese conocimiento.

Esta comunicación está vinculada a la implementación de una tarea formativa con estudiantes para maestro de Educación Primaria (en adelante, EPM) basada en conjeturar y demostrar el teorema del ángulo inscrito en un entorno de geometría dinámica (Arce et al., 2023). En implementaciones previas, los EPM detectaron, a modo de razonamiento abductivo, una posible relación de distancias entre el ángulo inscrito y su central correspondiente que pudiera explicar la relación angular (Arce y Conejo, 2023), lo que nos llevó a incluir en la tarea un nuevo apartado para que los EPM analizaran la validez o no de esta hipótesis a través de un guion de preguntas. Cómo analizan futuros docentes la validez de posibles hipótesis es una línea de investigación poco explorada, pero este análisis es una habilidad necesaria para gestionar procesos de conjeturación y prueba en el aula. El objetivo de este trabajo es describir y caracterizar comportamientos representativos de EPM al analizar un razonamiento abductivo vinculado al teorema del ángulo inscrito a través de un guion de preguntas.

MARCO TEÓRICO

Dentro de las investigaciones sobre el profesor de matemáticas, una línea principal es la del conocimiento del profesor para poder desarrollar su labor docente (Skott et al., 2018). Skott et al. (2018) presentan varios modelos consolidados. En este trabajo usaremos uno de ellos, el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo et al., 2018), como marco analítico. El MTSK, como otros modelos, distingue dos grandes dominios de conocimiento: el matemático y el didáctico del contenido matemático. En particular, haremos uso de dos de los tres subdominios establecidos dentro del conocimiento matemático, surgidos a partir de tomar como referencia las propias matemáticas; en concreto, el conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) y el conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM).

El conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) se asocia al conocimiento disciplinar de los contenidos matemáticos curriculares (Carrillo et al., 2018). En él se establecen cuatro categorías: las definiciones, propiedades y fundamentos matemáticos; los procedimientos asociados a los contenidos; los registros de representación y la fenomenología y aplicaciones de los contenidos.

El conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM) se asocia al conocimiento sobre las propias matemáticas, es decir, de aquellas actividades que, llevadas a cabo de un modo sistemático, suponen un pilar para hacer y construir conocimiento matemático y que conforman una base lógica de la que pueden extraerse reglas (Carrillo et al., 2018). Una de las categorías del KPM es la vinculada a la práctica de demostrar (Delgado-Rebolledo et al., 2022). Dentro de ella, el modelo MTSK incluye tanto el conocimiento sobre cómo desarrollar demostraciones (detección de patrones y regularidades, construcción de conjeturas, rol de ejemplos y contraejemplos) así como el conocimiento de diferentes métodos y tipos de demostración y su validez, y el conocimiento de las funciones de la demostración (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

Tanto Meyer (2010) como Jeannotte y Kieran (2017), partiendo de las ideas originales del filósofo Charles S. Pierce, reconocen la existencia de tres grandes tipos de razonamiento en matemáticas: abductivo, inductivo y deductivo. Los razonamientos inductivo y deductivo han recibido mayor atención investigadora que el razonamiento abductivo, cuya caracterización ha evolucionado a lo largo de la historia y desde diferentes aproximaciones (Meyer, 2010). Una concepción amplia de los procesos de razonamiento y prueba, que involucren tanto los procesos de detección y establecimiento de posibles conjeturas como los procesos de desarrollo de una cadena lógica de razonamiento que permita validar o refutar conjeturas, ponen en valor al razonamiento abductivo, que entenderemos aquí como el proceso de formulación de posibles hipótesis que pudieran explicar y justificar una conjetura. Meyer (2010) y Komatsu y Jones (2022) destacan su rol de generación y descubrimiento

de nuevas ideas e hipótesis explicativas que sirvan de punto de partida para poder construir y verificar conocimiento matemático, con la ayuda de razonamientos tanto inductivos como deductivos.

En la fase de análisis de conjeturas y de posibles hipótesis que puedan explicar o no las mismas, juegan un papel muy importante los ejemplos y contraejemplos. Buchbinder y Zaslavsky (2019) proponen el marco REP (*Role of Examples in Proving*), posteriormente refinado por Vallejo-Vargas (2025), para analizar ese rol en la justificación de diferentes enunciados. En concreto, en enunciados universales (del tipo "Todo X es Y"), un ejemplo que satisfaga el enunciado es un ejemplo de apoyo (*supporting example*), que es insuficiente para probar la validez del enunciado (salvo que el dominio sea finito y se comprueben todos los casos); y un ejemplo que no satisfaga el enunciado es un contraejemplo (*counter-example*), que es suficiente para refutar el enunciado.

El marco MTSK recoge, dentro del subdominio KPM, el conocimiento de estos roles como parte del conocimiento que un docente de matemáticas necesita movilizar en el diseño y gestión de tareas con presencia de los procesos de razonamiento y prueba. Así, se hace necesario diseñar e implementar tareas formativas con el objetivo de revisar y desarrollar estos conocimientos durante la formación inicial del profesorado. En particular, en el marco de una tarea formativa vinculada a la relación angular del ángulo inscrito, se diseñó un applet GeoGebra y un guion de preguntas para que los EPM analizasen una posible hipótesis que en implementaciones anteriores de la tarea (Arce y Conejo, 2023) había surgido como posible explicación, a modo de razonamiento abductivo, a la relación angular conjeturada: el ángulo inscrito tiene la mitad de amplitud que su central correspondiente porque el vértice del ángulo inscrito está al doble de distancia del arco subtendido que el centro. Se pretende que los estudiantes, con la ayuda de la geometría dinámica como favorecedora de la producción de contraejemplos (Komatsu y Jones, 2022), puedan refutar la existencia de esta relación de distancias, y a partir de ahí rechazar que esta hipótesis implique el cumplimiento de la relación angular. No obstante, el manejo lógico de la implicación entre hipótesis y tesis al construir justificaciones también es algo complejo y que genera algunas dificultades habituales, como la *negación del antecedente* (considerar equivalente $p \Longrightarrow q$ y no $p \Longrightarrow$ no q) y la *afirmación del consecuente* (considerar equivalente $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$) (Herrera-Alva y Rodríguez, 2025).

MÉTODO: TAREA FORMATIVA, CONTEXTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

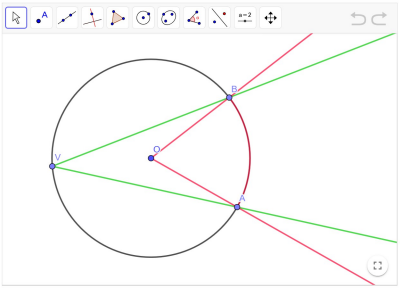
La investigación en la que está inmersa esta comunicación ha seguido una metodología de investigación basada en diseño (Molina, 2021); en concreto, se desarrolla un *experimento de enseñanza*, que consta de una tarea formativa con una secuencia de episodios de enseñanza donde pueden participar un docente-investigador, estudiantes e investigadores-observadores. La tarea formativa completa estaba centrada en el teorema del ángulo inscrito, y se diseñó siguiendo los principios de Lin et al. (2012) para actividades con foco en los procesos de conjeturar y demostrar. En concreto, contaba con dos fases para detectar y conjeturar la relación angular (con lápiz y papel y con GeoGebra). Posteriormente, se incitaba la transición de conjeturar a probar buscando generar la necesidad intelectual de explicar por qué la conjetura podía ser cierta. En la última fase, se buscaba que construyeran una justificación con la ayuda también de GeoGebra y una serie de preguntas guía (más información sobre la tarea formativa en Arce et al., 2023, y en Arce y Conejo, 2023).

En varios ciclos de implementación de la tarea emergió como posible hipótesis la relación de distancias del vértice al arco como posible explicación para el cumplimiento de la relación angular (Arce y Conejo, 2023), pero la estructura de la tarea no explotaba el análisis de estas posibles hipótesis. Buscando superar esto, introdujimos una parte nueva en la tarea asociada al análisis de posibles hipótesis, a modo de razonamientos abductivos, que pudieran explicar la relación angular, a través de un applet GeoGebra y un guion de preguntas para guiar el análisis de su validez o no. Nos centramos justamente en la relativa a la relación de distancias, hipótesis que resulta falsa, lo cual buscamos que detecten los EPM a partir de la generación de contraejemplos con GeoGebra.

Esta parte comenzaba con la siguiente afirmación: “La amplitud de un ángulo inscrito es la mitad que la del ángulo central correspondiente porque la distancia entre el vértice del ángulo inscrito y el arco de circunferencia contenido dentro de dicho ángulo es el doble que la distancia entre el vértice del ángulo central correspondiente al ángulo inscrito y dicho arco”, y en la primera pregunta (P1) se pedía contestar si creían que era cierta y por qué. Debajo, se situaba un applet GeoGebra (ver Figura 1), denominado Applet 1, en el que podían explorar la relación, crear puntos nuevos, medir, etc.

Figura 1

Imagen inicial del Applet 1 que acompaña la afirmación que deben explorar para validar o refutar



Tras ello, se les planteaban las siguientes preguntas para orientar la exploración hacia la refutación de dicha afirmación y de la hipótesis que contiene, a través de la búsqueda de contraejemplos:

- (P2) Basándote en el Applet 1, ¿cómo medirías la distancia que hay del vértice O del ángulo central correspondiente al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AOB? ¿Es siempre la misma? Explica tu razonamiento.
- (P3) De acuerdo con tu respuesta a P2, escribe ejemplos de las mediciones que puedas hacer del vértice O al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AOB.
- (P4) Basándote en el Applet 1, ¿cómo medirías la distancia que hay del vértice V del ángulo inscrito al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AVB? ¿Es siempre la misma? Explica tu razonamiento.
- (P5) De acuerdo con tu respuesta a P4, escribe ejemplos de las mediciones que puedas hacer del vértice del ángulo inscrito V al arco de circunferencia contenido dentro del ángulo AVB.
- (P6) Teniendo en cuenta el análisis realizado, contesta a las siguientes preguntas: ¿Es cierta la Afirmación 1? ¿Por qué?

La tarea formativa se planteó en un grupo de 38 EPM, en una asignatura del Grado en Educación Primaria de 2.º curso, sobre geometría y su didáctica, en la primera parte de la asignatura. Los estudiantes contaron con 100 minutos para la tarea completa, destinando unos 15 minutos para la parte que aquí se describe. Los EPM conocían y habían usado GeoGebra en la asignatura, y habían trabajado en clase los diferentes tipos de ángulos en la circunferencia, pero no sus relaciones angulares. No hubo instrucción previa sobre procesos de razonamiento y prueba en esta asignatura. Durante la tarea, los EPM trabajaron en parejas, y los datos se recogieron mediante GeoGebra Classroom, lo que permitía tener las respuestas escritas a cada una de las preguntas planteadas, así como el resultado final de la manipulación del Applet 1 de cada pareja de EPM. Se aplicó una metodología de análisis de contenido para el análisis y la verificación de los contenidos de datos escritos. Las producciones de cada EPM fueron analizadas por ambos autores, para identificar elementos de conocimiento movilizados en cada pregunta del guion propuesto (aplicando el marco MTSK), así como el uso que realizan de los ejemplos y contraejemplos (con la ayuda del marco REP), con el fin de caracterizar los comportamientos de las diferentes parejas de EPM. Tras ello, se compartieron los resultados hasta llegar a un consenso en la descripción, caracterización e interpretación de lo desarrollado por cada pareja de EPM.

RESULTADOS: COMPORTAMIENTOS DE EPM ANTE UNA AFIRMACIÓN FALSA

De las 19 parejas, 14 respondieron que la afirmación era cierta en P1, y solo 6 de ellas refutaron la afirmación tras la experimentación guiada. Se muestran los resultados del análisis de las respuestas, utilizando los marcos MTSK y REP, de cuatro parejas (se usan seudónimos) de EPM, seleccionadas por su riqueza y representatividad dentro de los comportamientos detectados en el análisis del razonamiento abductivo proporcionado, al refutarlo o al expresar que mantienen su validez.

Caso de Leonor y Laura

Esta pareja de EPM responde a P1 indicando que la afirmación es cierta, con esta justificación:

> Leonor y Laura: Sí porque el ángulo central empieza desde el centro de la circunferencia, entonces la distancia hasta el arco del ángulo central es el radio mientras que la distancia del ángulo inscrito es la diagonal, por lo que al estar más cerca el central su apertura es mayor con lo cual su ángulo es más grande que el inscrito cuya distancia es el doble y la amplitud del ángulo es la mitad al igual que su distancia que es el doble, es decir, es lo contrario.

La pareja identifica la distancia entre centro y arco como el radio (KoT movilizado: definiciones) y parece reconocer la distancia entre vértice del ángulo inscrito y arco como un diámetro, aunque lo llaman "diagonal" (debilidad del KoT: definiciones), lo que les lleva a reformular la afirmación propuesta añadiendo, con la expresión "es lo contrario" y su mención al doble-mitad, un patrón de proporcionalidad inversa entre distancia y amplitud angular (KPM movilizado: detección de patrones y regularidades). En P2 y P3, la pareja remarca que la distancia centro-arco es la misma al ser el radio de la circunferencia y no cambia al movernos sobre ella (KoT movilizado: definiciones, propiedades), pero precisan del respaldo de los ejemplos para asegurarse ("Para averiguar si estamos en lo cierto de que siempre mide lo mismo, hemos medido la distancia del vértice OA y la del vértice OB y, en ambas, nos sale 3,5 [...]"). Esto es una debilidad del KPM (rol de los ejemplos y contraejemplos) si se usa el ejemplo no como ejemplo de apoyo sino para complementar la validación de la afirmación.

En P4, la pareja, marcando en el Applet 1 las medidas de los segmentos VA (6,69 cm) y VB (6,71 cm), se da cuenta de que dependiendo de dónde estén el vértice del ángulo inscrito (V) y los lados del ángulo inscrito, esa distancia varía: "vemos que no es la misma debido a que influye dónde esté colocado cada lado del ángulo inscrito y no tiene por qué ser el mismo ya que no pasa por el centro y, por tanto, no es ni radio ni diagonal". La pareja plasma únicamente los ejemplos de VA y VB para concluir que la distancia vértice-arco no se mantiene, lo que puede mostrar una fortaleza del KPM en relación con el uso de ejemplos y contraejemplos al considerar que con esos dos ya es suficiente. Tras contestar a estas preguntas, la pareja indica en P6 que la afirmación inicial no es correcta ("ya que hemos comprobado que la distancia de los vértices AVB y los vértices AOB no están relacionados entre sí"), al haber refutado la hipótesis de la relación de distancias con los contraejemplos detectados. El guion de preguntas planteado y el hecho de que la pareja comprenda que, si se encuentran contraejemplos de una afirmación, entonces dicha afirmación es falsa, ha servido para que refuten la afirmación dada inicialmente tras haber dicho en un principio que sí era correcta (fortaleza en el KPM: rol de ejemplos y contraejemplos), mostrando al final un rol alineado con el marco REP.

Caso de Úrsula y Aroa

Esta pareja escribe en P1 que cree que la afirmación es cierta, aunque en su respuesta tan solo aluden a la relación de distancias, y no a su vinculación con la relación angular: "Sí es cierta, ya que si medimos las distancias una es el doble de la otra". En P2 y P3, la pareja afirma que la distancia del centro O al arco es siempre la misma, al ser el radio y justificándolo a partir de la definición de circunferencia ("Sería siempre la misma, ya que la medida del radio nunca cambia en una misma circunferencia, todos los puntos de una circunferencia están a la misma distancia del radio"), por lo que se movilizan adecuadamente los conocimientos necesarios (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez).

Al pasar a la distancia del vértice del ángulo inscrito al arco, en P4 la pareja propone crear el diámetro que pasa por V y O para medir esa distancia, e indica que, si se usa el diámetro para ello, la distancia se mantendrá (KoT movilizado: definiciones, propiedades). Sin embargo, al solicitarles ejemplos de mediciones en P5, indican que: "De acuerdo con nuestra respuesta anterior [la respuesta en P4], solo existe una única opción, ya que el diámetro no tiene la misma medida que los segmentos VA y VB" tras marcar en el applet el segmento VA y su distancia (6,69 cm, distinta a los 7 cm que mide el diámetro, también marcado). Es decir, la pareja detecta segmentos de V al arco de menor amplitud que el diámetro, pero no detectan su rol como contraejemplos de la medición constante a través del diámetro y parecen descartarlos, manteniendo su respuesta en P4 (debilidad del KPM movilizado: rol de ejemplos y contraejemplos). Esto se aprecia de nuevo al final, con su respuesta en P6: "Sí, ya que el radio cuya medida es 3,5 cm es la mitad que la medida del diámetro que es 7 cm".

En esta pareja, el KPM movilizado no se alinea con el marco REP (Buchbinder y Zaslavsky, 2019) mostrado en el marco teórico. La pareja mantiene su creencia inicial, sin cambiarla tras completar el guion de preguntas, usando el ejemplo del diámetro no como ejemplo de apoyo sino como ejemplo que justifica su afirmación. Además, no consideran los contraejemplos obtenidos (distancias VA y VB) como casos que refutan que la distancia de V al arco sea igual al diámetro, sino que los dejan fuera de su argumentación y no parecen darles valor frente a los ejemplos de apoyo.

Caso de Aitana y Lidia

Esta pareja contesta en P1 que la relación de distancias es cierta, basándose en la comprobación, a través de la medición, de algunos ejemplos en papel construidos en la primera fase de la tarea formativa. Esta respuesta evidencia una debilidad en el KPM movilizado (diferentes métodos y tipos de demostración y su validez), al considerar los ejemplos como medio para validar la hipótesis. En P2 y P3, esta pareja afirma que la distancia centro-arco es siempre la misma al ser una circunferencia (KoT movilizado: definiciones, propiedades) y reflejan varios ejemplos en el Applet 1, creando tres puntos sobre el arco y los segmentos correspondientes. En dicho applet, esta pareja también ha creado otros tres puntos sobre el arco para dibujar las cuerdas que los unen con V (KoT movilizado: procedimientos), lo que les permite afirmar que las distancias vértice-arco no se mantienen porque el vértice no está en el centro de la circunferencia. Sin embargo, en P6 escriben:

> Aitana y Lidia: Sí que es cierta, porque la amplitud del ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente por lo que la distancia del vértice del ángulo inscrito al arco de la circunferencia es el doble que la distancia del ángulo inscrito al arco de la circunferencia.

Esta pareja no solo no ha interpretado adecuadamente el rol de los ejemplos tomados en P4 y P5 como contraejemplos de la afirmación planteada, sino que sigue indicando que es cierta y al justificarlo invierte el sentido de la implicación (error de *afirmación del consecuente*, Herrera-Alva y Rodríguez, 2025). Inferimos, a partir de su comportamiento inicial, que pueden estar considerando como justificada la relación angular del ángulo inscrito a partir del proceso realizado previamente en la tarea formativa de conjeturar esta relación y comprobarla con GeoGebra (debilidad del KPM: rol de ejemplos y contraejemplos, diferentes métodos y tipos de demostración y su validez).

Caso de Miriam y Leila

En la pregunta P1, esta pareja cree que es válida la afirmación, puesto que encuentra sentido a la relación planteada entre la hipótesis (relación de distancia) y la tesis (relación angular): "Sí, ya que tiene sentido que al estar el vértice más lejos, el ángulo sea menor, y si está el doble de lejos pues el ángulo será justo la mitad de pequeño". En P2, la pareja afirma que la distancia del centro a cualquier punto del arco es siempre la misma por ser el radio de una circunferencia (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez). En P3 añaden tres ejemplos de apoyo para lo afirmado en P2 (distancias OA, OB y OC iguales a 3,5 cm), aunque no están explícitamente marcadas esas distancias en el applet.

En la pregunta P4, la pareja describe lo que hace con GeoGebra para poder obtener la distancia del vértice al arco, a través de algún punto del arco (KoT movilizado: procedimientos): "Creamos un segmento desde V hasta un punto del arco para que al calcular la medida no seleccione la medida del arco". Entre esta pregunta y P5, la pareja recoge la medición de cuatro segmentos (VA = 6,69 cm, VB = 6,71 cm, VC = 6,94 cm, VD = 6,98 cm), obtenidos con diferentes puntos del arco (extremos y puntos interiores). Sin embargo, no añaden nada más a su respuesta a estas preguntas, y en la pregunta final P6 indican que "Mantenemos nuestra opinión al respecto". Es decir, el guion de preguntas no ha servido a la pareja para avanzar en el análisis del razonamiento abductivo planteado, puesto que no evidencian interpretar el rol que tienen los ejemplos obtenidos en P5 como contraejemplos de la hipótesis proporcionada (relación de distancias al arco), sobre la cual mantienen su impresión de que la explicación que aporta esta hipótesis tiene sentido para ellas. Esto supone una debilidad del KPM movilizado sobre el rol de los ejemplos y contraejemplos en los procesos de razonamiento y prueba.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta comunicación se muestran ejemplos de uso del marco REP, vinculado a la epistemología de las propias matemáticas, para complementar y refinar el uso analítico del marco MTSK (en particular, de su subdominio KPM, Delgado-Rebolledo et al., 2022) dentro del conocimiento del rol de ejemplos y contraejemplos en la práctica de demostrar. En particular, el fragmento de tarea formativa aquí analizado buscaba el análisis por EPM de una hipótesis de distancias que resulta falsa, para lo cual el rol de los contraejemplos resultaba crucial. En esta investigación se constata, como en Komatsu y Jones (2022), el potencial del entorno de geometría dinámica como facilitador del análisis y búsqueda de contraejemplos. Sin embargo, mientras que el estudio de Buchbinder y Zaslavsky (2019) con estudiantes de secundaria mostró que la interpretación del rol de los contraejemplos resultó ser una fortaleza para gran parte del alumnado, en este estudio varias parejas de EPM (como las de Aitana y Lidia, Úrsula y Aroa, Miriam y Leila) mostraron dificultades para interpretar el rol de los contraejemplos encontrados para poder refutar la posible hipótesis explicativa, lo que impacta en el efecto de esta parte de la tarea formativa frente a otras parejas de EPM (como Leonor y Laura) que sí aplicaron adecuadamente ese rol para revisar su concepción inicial sobre la validez de la hipótesis.

No obstante, las tres parejas mostradas con debilidades para interpretar el rol de los contraejemplos mostraron comportamientos diferentes en la pregunta P6, que pueden también estar relacionados con la mayor dificultad lógica de la situación global, en la que se busca refutar una posible hipótesis explicativa de la relación de distancias, a modo de razonamiento abductivo, pero no la propia tesis de del teorema del ángulo inscrito. En dos de ellas, interpretamos que el rol de los ejemplos no como ejemplos de apoyo sino como ejemplos que validan el resultado (dificultad persistente en los procesos de razonamiento y prueba, como indican Buchbinder y Zaslavsky, 2019; y Arce y Conejo, 2023) puede provocar esas dificultades. En un caso (Úrsula y Aroa), parece darse más valor a esos ejemplos de apoyo que a los contraejemplos. En otro (Aitana y Lidia), el error de afirmación del consecuente que cometen puede provenir de entender que la tesis de la relación angular ya está justificada a partir del trabajo empírico previo en la tarea formativa, e invierten el rol de hipótesis y tesis.

Por último, una tercera pareja (Miriam y Leila) no cambia en nada su respuesta sobre la validez de la afirmación antes y después de desarrollar el guion de preguntas, indicando que "tiene sentido" que la relación de distancias explique la relación angular y manteniendo su opinión aunque detectaran contraejemplos en las preguntas previas. Esta pareja puede estar dando más valor a tener una posible hipótesis explicativa para la tesis que a verificar su validez, un comportamiento también detectado en Arce y Conejo (2023) en una pareja que propuso la relación de distancias como posible explicación.

Agradecimientos

El trabajo está vinculado a la red MTSK, red de investigación de la AUIP, y ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Referencia PID2021-122180OB-I00).

Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2023). Comportamientos de estudiantes para maestro al enunciar razonamientos abductivos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 139–146). SEIEM.

Arce, M., Conejo, L. y Flores-Medrano, E. (2023). Knowledge mobilised in a teaching experiment about conjecturing and proving by elementary preservice teachers. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3695–3702). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME.

Buchbinder, O. y Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 129–147. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.010

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. Á. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57–69). Dykinson. http://doi.org/10.14679/1454

Herrera-Alva, J. G. y Rodríguez, A. (2025). Trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la inferencia lógica negación del antecedente. *Enseñanza de las Ciencias, 43*(1), 119-138. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6046

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96,* 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Komatsu, K. y Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 567-591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Lin, F-L., Yang, K-L., Lee, K-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13

Meyer, M. (2010). Abduction—A logical view for investigating and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics, 74*, 185-205. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9233-x

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Autor.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83–97). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Autor.

Skott, J., Mosvold, R. y Sakonidis, C. (2018). Classroom practice and teachers' knowledge, beliefs and identity. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 162-180). Routledge.

Vallejo-Vargas, E. A. (2025). The role of examples in proving and disproving: extending an existing framework. *Educational Studies in Mathematics, 119,* 101-116. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10378-6

RECONOCIMIENTO DE TRIÁNGULOS EN ESTUDIANTES DE 1º A 6º DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Recognition of triangles in students from 1st to 6th grade of primary education

Bernabeu, M., Saorín, A., Buforn, À. y Sancho, M.

Universidad de Alicante

Resumen

Una limitación del pensamiento geométrico de los estudiantes, en concreto de los triángulos, es no reconocer estos por sus atributos relevantes, sino por la semejanza con el ejemplo prototípico. El objetivo del estudio es caracterizar qué reconocen los estudiantes de 1º a 6º de Educación Primaria como ejemplos y no-ejemplos de triángulo. Participaron 1.047 estudiantes de todos los cursos de Educación Primaria, que realizaron una tarea de reconocer triángulos. Los resultados muestran que conforme avanzan los cursos, los estudiantes reconocen mayor cantidad y variedad de triángulos. Sin embargo, los estudiantes tienen dificultades para reconocer los no-ejemplos de triángulos, evidenciando una inadecuada formación de este concepto. Estos resultados subrayan la importancia de abordar los conceptos geométricos mostrando variedad de ejemplos y no-ejemplos, para que los estudiantes aprendan a discriminar entre atributos relevantes y no-relevantes de un concepto.

Palabras clave: Educación Primaria, formación del concepto, reconocimiento de triángulo, ejemplos y no-ejemplos, ejemplo prototípico.

Abstract

A limitation of students' geometrical thinking, specifically triangles, is that they do not recognise triangles by their relevant attributes, but by their similarity to the prototypical example. The aim of the study is to characterise what students from 1st to 6th grade of Primary Education recognise as examples and non-examples of triangles. A total of 1,047 students from all grades of Primary Education participated in the study and performed a task of recognising triangles. The results show that as students advance through the grades, they recognise a greater number and variety of triangles. However, students have difficulties in recognising non-examples of triangles, showing an inadequate concept formation. These results underline the importance of approaching geometric concepts by showing a variety of examples and non-examples, so that students learn to discriminate between relevant and non-relevant attributes of a concept.

Keywords: *Primary Education, concept formation, recognition of triangle, examples and non-examples, prototype example.*

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes empiezan a formar su comprensión conceptual de las figuras geométricas en los primeros años de su infancia (Dağlı y Halat, 2016) y la van desarrollando y consolidando a través de experiencias a lo largo de su etapa educativa. Las figuras geométricas se suelen mostrar a través de representaciones físicas que evidencian la relación de los atributos que componen los conceptos geométricos a los que pertenecen (Duval, 1995). El triángulo, junto con el cuadrado, el rectángulo y el círculo, es una de las primeras figuras geométricas que los estudiantes conocen y exploran a través de la manipulación y visualización en las etapas educativas iniciales. Las representaciones físicas del triángulo son frecuentes en diversos recursos como fichas, libros, juguetes o incluso en vídeos. Sin embargo, en la mayoría de los casos suele aparecer el mismo tipo de triángulo: el triángulo equilátero apoyado sobre su base, considerado como un ejemplo prototípico de este concepto. De esta forma, la

Bernabeu, M., Saorín, A., Buforn, À. y Sancho, M. (2025). Reconocimiento de triángulos en estudiantes de 1º a 6º de Educación Primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

escasa variedad de ejemplos de triángulos utilizados en los recursos influye negativamente en el pensamiento geométrico de los estudiantes. En particular, en la construcción y adquisición adecuada del concepto de triángulo, al limitar los ejemplos de dicho concepto a este caso particular (triángulo prototípico). Este hecho, supone un obstáculo para que los estudiantes sean capaces de reconocer figuras geométricas a partir de los atributos que las caracterizan y no por su apariencia (Aslan & Aktaş-Arnas, 2007; Bernabeu et al., 2017), llegando a presentar dificultades en este sentido, incluso, en su etapa adulta (Korkmaz y Şahin, 2020). Investigaciones previas han destacado que estas dificultades surgen al presentar un número limitado de ejemplos de figuras geométricas para explicar un determinado concepto geométrico (Verdine et al., 2016); y por el uso abusivo de libros de texto o fichas, en lugar de crear material que propicie el desarrollo de la comprensión de dicho concepto geométrico (Buforn y Bernabeu, 2023). Otro aspecto que influye en el reconocimiento de figuras geométricas es la disposición en la que se presentan, mostrando mayor dificultad cuando la disposición de estas es compleja (en las que las figuras geométricas pueden presentar intersecciones o lados compartidos) a cuando estas presentan una disposición simple (las figuras geométricas aparecen separadas entre ellas) (Eylon et al., 1990). Por ello, es fundamental utilizar un amplio abanico de ejemplos y no-ejemplos (prototípicos y no prototípicos) de los conceptos geométricos durante la instrucción. La exposición a los estudiantes de una mayor cantidad y variedad, en forma y posición, de este tipo de figuras geométricas favorece un desarrollo más sólido de su pensamiento geométrico (Aslan & Aktaş-Arnas, 2007; Bernabeu et al., 2022; Buforn y Bernabeu, 2023; Tsamir et al., 2008).

En cuanto a las investigaciones que han abordado el concepto de triángulo, estas se han centrado, en gran medida, en la etapa de Educación Infantil (Clements et al., 1999; Dağlı y Halat, 2016; Verdine et al., 2016). Sin embargo, los estudios que abordan este concepto en la etapa de Educación Primaria son más escasos y, además, no consideran el reconocimiento de ejemplos y no-ejemplos de triángulos. En su lugar, se centran en conocer qué saben los estudiantes sobre el concepto de triángulo mediante el dibujo de ejemplos de estos o solicitando una definición (Vighi, 2003) o mediante el reconocimiento de atributos para su clasificación (Bernabeu et al., 2017). Por este motivo, en esta investigación queremos caracterizar en qué medida los estudiantes de 1º a 6º de Educación Primaria son capaces de reconocer ejemplos y no-ejemplos (prototípicos y no-prototípicos) de triángulo.

MARCO TEÓRICO

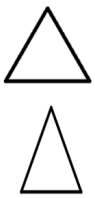
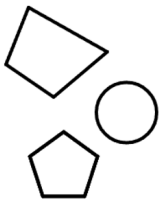
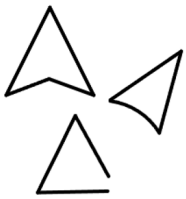
La formación de un concepto implica saber discriminar atributos relevantes de los no-relevantes para considerar una figura como un ejemplo o no de un concepto geométrico (Hershkowitz, 1990). En el caso del concepto de triángulo, son atributos relevantes el ser polígono (figura plana cerrada con lados rectos y no-cruzados) y tener tres lados. Por el contrario, atributos no relevantes podrían ser que tenga sus lados y ángulos iguales (regularidad), que esté en una determinada posición, que sea simétrica, etc. Los ejemplos del concepto de triángulo son aquellos que presentan, al menos, los atributos relevantes y los no-ejemplos son los que no presentan alguno de los atributos relevantes. Además, cada concepto geométrico puede asociarse a uno o más ejemplos prototípicos, que son los primeros en adquirirse. Estos presentan atributos no-relevantes en cuanto a su forma (como puede ser la regularidad) y posición, y suelen tener fuertes características visuales para el reconocimiento de figuras geométricas, llegando a considerarlos relevantes para determinarlo como ejemplo de un concepto (Hershkowitz, 1990). Por tanto, los estudiantes pueden no reconocer un triángulo escaleno obtusángulo en posición no-prototípica (que no esté sobre su base) como un ejemplo de triángulo al no parecerse al triángulo prototípico, es decir, al triángulo equilátero sobre su base.

Para que un estudiante sepa discriminar entre ejemplos y no-ejemplos de un concepto, sin apoyarse en los atributos no-relevantes para determinar la pertenencia del ejemplo a su clase, debe haber visto una variedad considerable de representaciones de dicho concepto. Según Clements et al. (2018), existen diversos tipos de ejemplos y no-ejemplos (Figura 1). En el caso de los ejemplos tenemos los

(a) ejemplares, que son los considerados prototípicos de una clase (triángulo equilátero e isósceles acutángulo en posición prototípica) y (b) variantes, que son otros ejemplos de la clase que no son prototípicos (p. ej., triángulos isósceles obtusángulos o escalenos en diferentes posiciones). En cuanto a los no-ejemplos, tenemos los (c) distractores palpables, que no tienen parecido a los ejemplos de la clase (p. ej., un cuadrilátero convexo o un pentágono regular) y los (d) distractores difíciles, que se parecen en la forma a los ejemplos de la clase, pero no cumplen algún atributo relevante de la definición (p. ej., una figura de tres lados abierta).

Figura 1

Representación de los tipos de ejemplos y no-ejemplos del concepto de triángulo (Fuente: elaboración propia, adaptado de Clements et al. (2018))

Ejemplos		**No-ejemplos**	
Ejemplares	Variantes	Distractores palpables	Distractores difíciles
			

Una manera de conocer si los estudiantes presentan una buena formación del concepto de triángulo es mediante la resolución de tareas que impliquen reconocer ejemplos de triángulos. Es decir, tareas que contengan diversidad de ejemplos (tanto ejemplares como variantes) y no-ejemplos (tanto distractores palpables como difíciles). De este modo, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cómo la formación del concepto de triángulo de estudiantes de 1º a 6º de Educación Primaria influye en el reconocimiento de ejemplos y no-ejemplos de este concepto?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

Los participantes de este estudio fueron 1.047 estudiantes de diferentes centros de Educación Infantil y Primaria de la provincia de Alicante y de la Región de Murcia que cursaban entre 1º y 6º de Educación Primaria. En concreto, 152 estaban matriculados en 1º, 159 en 2º, 179 en 3º, 182 en 4º, 190 en 5º, y 185 en 6º de Educación Primaria. En el momento de la recogida de datos los participantes se encontraban en el primer trimestre del curso académico, por lo que no habían recibido instrucción sobre geometría durante ese curso.

Instrumento de recogida de datos

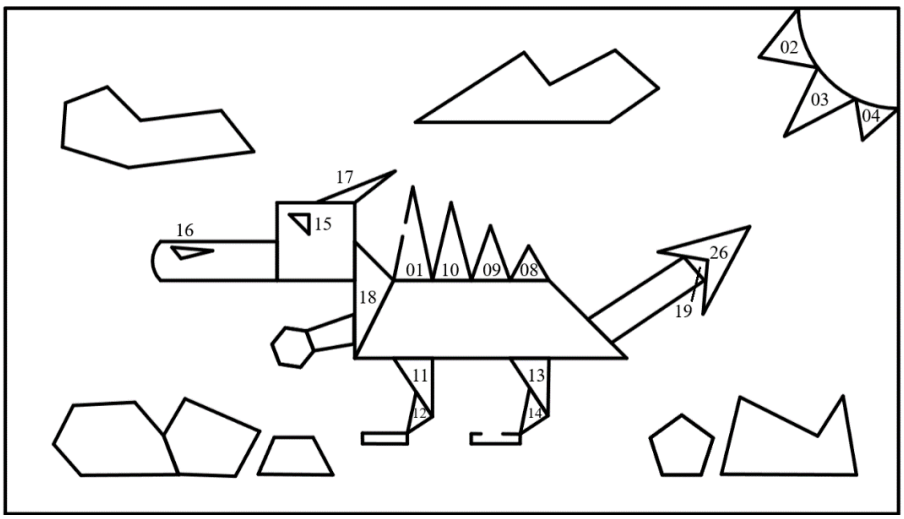
Como instrumento de recogida de datos, se diseñó una tarea similar a la propuesta por Edo (1999) para trabajar el concepto de triángulo. A la tarea propuesta por esta autora, se le añadió más variedad de cuadriláteros, otras clases de polígonos según sus lados (pentágonos, hexágonos y heptágonos) y no-ejemplos de triángulos y cuadriláteros (Figura 2). La tarea que se les proporcionó a los estudiantes no contenía los números que están en la Figura 2. En adelante, para referirnos a una determinada Figura Geométrica de las que aparecen en la Figura 2, lo haremos como FG y su número correspondiente, por ejemplo, FG01 es la Figura Geométrica 01.

Como se puede observar en la Figura 2, la tarea presenta triángulos ejemplares (FG08 hasta FG10), triángulos variantes (el resto de triángulos), distractores palpables (la mayoría de los cuadriláteros, pentágonos y hexágonos, y los no-ejemplos de polígono) y distractores difíciles (la figura abierta, FG01; las figuras con dos lados rectos y uno curvo, FG02-FG04; y el cuadrilátero cóncavo, FG26). Los estudiantes tuvieron que pintar de color verde aquellas figuras geométricas que consideraban que

eran ejemplos de triángulo. La tarea fue completamente anónima y solo debían indicar el curso escolar al que pertenecían. Los estudiantes tuvieron entre 15 y 20 minutos para realizar la tarea. Previo a ello, un miembro del grupo de investigación explicó el objetivo de la tarea y resolvió dudas que pudiesen surgir.

Figura 2

Tarea propuesta a los estudiantes desde 1º a 6º de Educación Primaria (Fuente: elaboración propia, basada en la tarea de Edo (1999))



Análisis

El análisis de los datos se realizó atendiendo a si el estudiante había reconocido correctamente los triángulos que aparecían en la tarea, y sí había discriminado los no-ejemplos de triángulo (para el análisis de este estudio se consideró solamente los no-ejemplos que eran distractores difíciles del triángulo según Clements et al. (2018)), es decir, FG01, FG02, FG03, FG04 y FG26.

Para los ejemplos de triángulo (figuras de FG08 a FG19), se codificó como 1 si el estudiante había pintado de verde el ejemplo de triángulo, es decir, si lo consideraba como ejemplo de esta clase; y como 0 si el estudiante no lo había pintado de verde, es decir, si no lo consideraba como un ejemplo de esta clase.

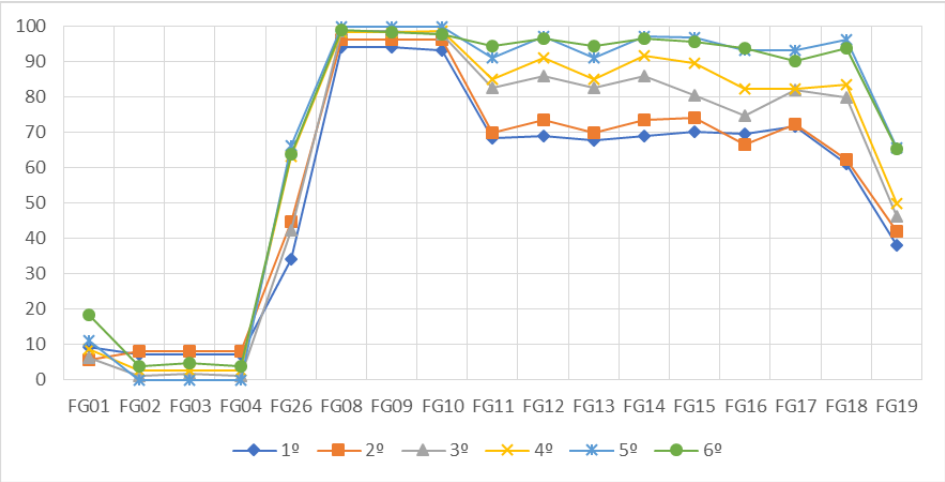
Respecto a los no-ejemplos de triángulo considerados para el análisis (FG01, FG02, FG03, FG04 y FG26), se codificó como 1 si no habían pintado de verde el no-ejemplo de triángulo, es decir, si lo consideraban como un no-ejemplo de esta clase; y como 0 si habían pintado de verde el no-ejemplo de triángulo, es decir, si lo consideraban erróneamente como ejemplo de esta clase.

RESULTADOS

La Figura 3 muestra los porcentajes de los estudiantes de Educación Primaria participantes (desde 1º hasta 6º curso) en el reconocimiento de ejemplos de triángulos (FG08 hasta FG19), tanto ejemplares como variantes, y no-ejemplos de triángulos (FG01 hasta FG04 y FG26), en concreto los considerados como distractores difíciles. En dicha figura, podemos observar trayectorias similares, separadas únicamente por el porcentaje de éxito según el curso escolar seleccionado. Además, estos resultados muestran el escaso reconocimiento de los no-ejemplos de triángulo en todos los cursos de Educación Primaria en comparación con el éxito en el reconocimiento de los ejemplos de triángulo. Es decir, los triángulos de esta tarea son reconocidos como ejemplos de esta clase por la mayoría de los estudiantes de todos los niveles educativos. Sin embargo, gran parte de los estudiantes, independientemente del curso escolar, ha considerado erróneamente los no-ejemplos de triángulo al considerarlos como ejemplos de esta clase.

Figura 3

Porcentajes de reconocimiento de las figuras geométricas por curso escolar (Fuente: elaboración propia)



Reconocimiento de ejemplos de triángulo

En cuanto a los ejemplos de triángulos ejemplares (FG08, FG09 y FG10), en todos los cursos, observamos porcentajes de reconocimiento cercanos al 100%. En 1º de Educación Primaria, estos triángulos ya son reconocidos correctamente por más del 93% de los estudiantes. A medida que consideramos cursos superiores, se muestra una evolución positiva (mejora en los porcentajes de éxito), aunque sin diferencias destacables.

Respecto al reconocimiento de los triángulos variantes (FG11 hasta FG19), la gráfica muestra diferencias entre los estudiantes de los diferentes cursos escolares. Los cursos de 1º y 2º presentan una trayectoria similar en cuanto a porcentajes de éxito en todos los triángulos, en torno al 70% en los triángulos de FG11 hasta FG17, produciéndose un descenso brusco para FG18 (sobre el 60%) y FG19 (sobre el 40%). En 3º y 4º, observamos un aumento en el reconocimiento correcto de todos los triángulos respecto a los dos cursos anteriores. Estos estudiantes presentan un porcentaje de éxito entre el 80% y el 92% en el reconocimiento de estos, menos con FG16 en 3º que presenta un 75% de éxito; y con FG19, que desciende de forma notable en ambos cursos (un 50%). Para 5º y 6º, más del 90% de los estudiantes son capaces de reconocer de forma correcta todos los triángulos, excepto FG19. Para esta última figura geométrica, el porcentaje de éxito vuelve a descender a un 65% en ambos cursos. Aunque los porcentajes en este tipo de triángulos son bastante altos en estos dos últimos cursos, sigue estando por debajo del reconocimiento de los triángulos ejemplares.

Estos resultados señalan que, a medida que avanzan los cursos, los estudiantes mejoran en el reconocimiento de triángulos, independientemente del tipo o posición. Como ya se ha comentado anteriormente, los triángulos equiláteros e isósceles en posición prototípica (triángulos ejemplares, FG08 hasta FG10) son los que mayor éxito de reconocimiento han tenido, pasando de un 93-94% en 1º a un 98-100% en 5º y 6º. Así, el reconocimiento de triángulos rectángulos en diferentes posiciones y no apoyados sobre uno de sus catetos (FG11 hasta FG15), pasó de aproximadamente un 70% en 1º, a un 95% en 6º. Del mismo modo, los estudiantes también mejoran en el reconocimiento de triángulos obtusángulos en distintas posiciones (FG16 hasta FG18), obteniendo porcentajes de éxito similares, es decir, pasando de entre 60-70% en 1º, a 90-96% en 6º. Sin embargo, considerando FG19, si bien se produce una mejora considerable desde 1º hasta 6º (de un 38% en 1º, a un 65% en 6º), su reconocimiento presenta unos porcentajes de éxito notablemente más bajos en todos los cursos que el resto de triángulos.

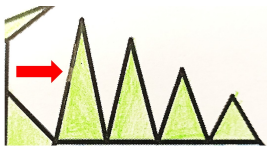
Reconocimiento de no-ejemplos de triángulos

El reconocimiento de no-ejemplos de triángulo (FG01 hasta FG04 y FG26) es extremadamente baja en todos los cursos en comparación con el reconocimiento de los ejemplos de triángulo.

En relación con FG01 (figura abierta), de 1º a 5º, el porcentaje de reconocimiento de esta figura como un no-ejemplo de triángulo se sitúa entre el 5% y 11%. En 6º de Educación Primaria, este porcentaje aumenta notablemente a un 18%. En esta figura, algunos estudiantes la cerraron para convertirla en triángulo y pintarlo de verde (Figura 4), por lo que se ha considerado como correcta esta respuesta.

Figura 4

Ejemplo de respuesta en la que el estudiante cierra la figura para transformarla en triángulo (Fuente: respuesta del E_5_149)



Respecto a FG02, FG03 y FG04 (figuras con dos lados rectos y uno curvo), su reconocimiento se sitúa entre 7-8% en 1º y 2º, mientras que en el resto de cursos, desciende este porcentaje, obteniendo entre el 0% y el 4%. Cabe comentar que en 1º y 2º, algunos estudiantes pintaron estas figuras geométricas de color naranja o amarillo (o utilizando ambos colores), debido a lo que la figura en su conjunto les sugería, es decir, para estos estudiantes representaba el Sol (Figura 5). Esto puede justificar dicho porcentaje en cuanto al reconocimiento de la figura como no-ejemplo de triángulo al no pintarla de verde.

Figura 5

Ejemplo de respuesta en la que el estudiante pinta con colores asociados al Sol (Fuente: respuesta del E_2_129)

Para FG26 (cuadrilátero cóncavo), se observa una mejora en cuanto a su reconocimiento como no-ejemplo de triángulo con respecto a los otros no-ejemplos de triángulo (FG01 hasta FG04). El reconocimiento de esta figura como no-ejemplo de triángulo se sitúa entre el 34% y el 45% para los cursos de 1º a 3º para ascender en los tres últimos cursos, obteniendo un éxito de entre el 63-66%.

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

El objetivo de este estudio era caracterizar cómo la formación del concepto de triángulo de estudiantes de 1º a 6º de Educación Primaria influye en el reconocimiento de ejemplos y no-ejemplos de este concepto. Los resultados muestran que los porcentajes en el reconocimiento de ejemplos de triángulos aumenta conforme avanzan los cursos. Por el contrario, en el caso de los no-ejemplos de triángulos, los porcentajes en el reconocimiento de estos se mantienen bajos, independientemente del curso escolar, mostrando las dificultades que estos tienen para reconocerlos, y evidenciando una inadecuada formación de este concepto.

En cuanto al reconocimiento de ejemplos de triángulos, los resultados han mostrado que los triángulos prototípicos, considerados como ejemplares, son los que mayor éxito han tenido en el reconocimiento como ejemplos de esta clase, sea cual sea el curso escolar. Este hecho, es indicativo de que, desde etapas educativas tempranas, los estudiantes están habituados a trabajar con triángulos prototípicos. En concreto, con triángulos equiláteros e isósceles apoyados sobre uno de sus lados (posición prototípica), por lo que, para ellos, el concepto de triángulo se basa fundamentalmente en este tipo de

ejemplos (Vighi, 2003), induciendo, de este modo, una formación del concepto limitada (Hershkowitz, 1990).

Respecto a los ejemplos de triángulos variantes, se han observado variaciones en el porcentaje de éxito de reconocimiento según el curso, siendo los cursos más avanzados los de mayor éxito. Esto puede deberse al haber visualizado mayor variedad de ejemplos de triángulos a lo largo de su etapa educativa. Sin embargo, el triángulo FG19 ha sido el que los estudiantes, independientemente del curso escolar, menos han reconocido como ejemplo de triángulo. Este bajo porcentaje podría deberse a su tamaño (Halat y Yesil-Dağli, 2016) y su posición en la tarea diseñada, al estar situado entre dos cuadriláteros cuyo contorno forma parte de estos (disposición compleja (Eylon et al., 1990)). A pesar de esto, los resultados indican que los estudiantes aprenden y mejoran su capacidad para extraer una figura en un contexto visualmente complejo conforme avanzan los cursos.

Con respecto a los no-ejemplos de triángulo, el porcentaje de éxito obtenido ha sido bajo, aunque no nulo. Muchos estudiantes, incluso de las etapas superiores (5º y 6º), consideran no-ejemplos con distractores difíciles (figuras parecidas al triángulo prototípico pero abierta o con un lado curvo o un cuadrilátero cóncavo) como ejemplos de triángulo. Si bien es cierto que son figuras con fuertes características visuales que pretenden sugerir que son triángulos (contorno y forma), los estudiantes de los cursos superiores, que ya han estudiado los polígonos y sus clases atendiendo al número de lados en los cursos previos, no son capaces de excluirlas del concepto de triángulo. Es decir, los estudiantes parecen basar sus respuestas en la semejanza con ejemplos prototípicos, no siendo capaces de analizar atributos como contorno abierto-cerrado, lado recto-curvo o número de lados, hecho que se podría considerar propio de los cursos inferiores. Este hecho indica un reconocimiento de las figuras basado en su apariencia y no en sus atributos (Clements et al., 1999), es decir, que no llegan a ver las características que contradicen la definición del concepto (Aslan y Aktaş-Arnas, 2007; Bernabeu et al., 2017). Por ejemplo, que un triángulo es una "figura cerrada", mientras que FG01 no lo es, o que un triángulo tiene "tres lados", mientras que FG26 tiene cuatro. En concreto, en esta última, parece ser que no llegan a contar el vértice de la concavidad al no estar acostumbrados a visualizar este tipo de figuras (polígonos cóncavos como ejemplos de cuadriláteros). Solo analizando el contorno de estas figuras, podría considerarse que no son triángulos. En relación con los atributos de los no-ejemplos de triángulos y sus porcentajes de éxito, podemos decir que los distractores no influyen por igual en el reconocimiento de estos. En concreto, en este estudio, el distractor que más dificultad ha representado para los estudiantes ha sido el lado curvo (FG02-FG04), seguido de ser una figura abierta (FG01). Por el contrario, el que menos, el número de lados (FG26).

Para concluir, el bajo porcentaje de reconocimiento de los no-ejemplos, nos lleva a considerar que la instrucción previa que han recibido los estudiantes se basa principalmente en mostrar ejemplos de triángulos, mayoritariamente prototípicos, pero no en mostrar no-ejemplos de triángulos, por lo que los estudiantes no presentan una buena formación de este concepto. Hubiese sido interesante saber cuál fue la formación recibida sobre geometría de los maestros/as de los estudiantes participantes y cómo implementan sus clases. Esta conclusión, quizás podría estar ligada a que la enseñanza prioriza enseñar "qué es un triángulo" sobre "qué no lo es", limitando el desarrollo del concepto de triángulo en toda su extensión. Esta inferencia podría ser trasladada a los cursos de formación inicial y continua de los maestros para que estos diseñen buenas tareas y que sus estudiantes de Educación Infantil o Primaria sean capaces de discriminar qué atributos son relevantes de los que no lo son para que los estudiantes tengan una buena formación del concepto de triángulo, o cualquier otro concepto geométrico (Hershkowitz, 1990).

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo del proyecto CIGE/2023/197 de la Conselleria de Educación, Cultura, Universidades y Empleo.

Referencias

Aslan, D. y Aktaş-Arnas, Y. (2007). Three-to six-year-old children's recognition of geometric shapes. *International Journal of Early Years Education, 15*(1), 83–104. https://doi.org/10.1080/09669760601106646

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). SEIEM.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 49-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Buforn, À. y Bernabeu, M. (2023). La formación del concepto de polígono en estudiantes de 3 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 163–170). SEIEM.

Clements, D. H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D. y Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning geometry: Early foundations. *Quadrante*, *27*(2), 7-31. https://doi.org/10.48489/quadrante.22970

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for research in Mathematics Education*, *30*(2), 192-212. https://doi.org/10.2307/749610

Dağlı, Ü. Y. y Halat, E. (2016). Young children's conceptual understanding of triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(2), 189-202. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1398a

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Springer.

Edo, M. (1999). Reflexiones para una propuesta de geometría en el parvulario. *Suma, 32*, 53-60.

Eylon, B., Rosenfeld, S., Razel, M., Ben-Zvi, A. y Somech, A. (1990). *Cultivating visual cognition in young children. A Research and Development Report of the Agam Project*. The Weizmann Institute of Science.

Halat, E. y Yesil-Dağli, Ü. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 830-848. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a25

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge University Press.

Korkmaz, H. I. y Şahin, Ö. (2020). Preservice preschool teachers' pedagogical content knowledge on geometric shapes in terms of children's mistakes. *Journal of Research in Childhood Education*, *34*(3), 385-405. https://doi.org/10.1080/02568543.2019.1701150

Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 81–95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5

Verdine, B. N., Lucca, K. R., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K. y Newcombe, N. S. (2016). The shape of things: The origin of young children's knowledge of the names and properties of geometric forms. *Journal of Cognition and Development*, *17*(1), 142-161. https://doi.org/10.1080/15248372.2015.1016610

Vighi, P. (2003). The triangle as a mathematical object. En M. A. Mariotti (Ed.), *European Research in Mathematics Education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 3) (pp. 1-10). University of Pisa and ERME.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS Y TALENTO MATEMÁTICO: UN ESTUDIO DE CASO

Geometric patterns problem solving and mathematical talent: A case study

Burgos, M. y Lastra-Gil, D.

Universidad de Granada

Resumen

Desarrollar el razonamiento algebraico desde las primeras edades, se ha convertido en un objetivo prioritario en las recientes reformas curriculares. Además, diversas investigaciones indican el potencial de las tareas algebraicas no sólo para identificar rasgos propios del talento matemático, sino también como oportunidades para estudiantes con estas características de satisfacer sus necesidades de aprendizaje. En este trabajo comparamos por medio de un estudio de caso, el razonamiento algebraico (en términos de la generalización) evidenciado por un grupo de estudiantes de quinto de primaria y por un estudiante de tercero de primaria diagnosticado con altas capacidades, al resolver un problema que involucra un patrón geométrico.

Palabras clave: *Razonamiento algebraico, argumentación, talento matemático, educación primaria.*

Abstract

Developing algebraic reasoning from an early age has become a priority objective in recent curricular reforms. In addition, various studies indicate the potential of algebraic tasks not only to identify traits associated to mathematical talent, but also as opportunities for students with these characteristics to meet their learning needs. In this paper we compare, by means of a case study, the algebraic reasoning (in terms of generalization) evidenced by a group of fifth grade students and by a 3rd grade student diagnosed with high abilities, when solving a problem involving a geometric pattern.

Keywords: *Algebraic reasoning, argumentation, mathematical talent, primary education*.

INTRODUCCIÓN

Los estudiantes con talento matemático comprenden rápidamente nuevos contenidos matemáticos, muestran rasgos más complejos de razonamiento matemático y estrategias más eficientes de resolución de problemas que las de los alumnos medios de su edad o curso (Leikin, 2018). Tradicionalmente, las investigaciones sobre talento matemático se han centrado más en identificar al alumnado con estas peculiaridades y sólo en los últimos años ha crecido la preocupación por determinar cómo atenderlos en la práctica docente. Estos estudiantes muestran características específicas como la creatividad, flexibilidad, habilidad para organizar la información, el uso de procedimientos eficientes de resolución de problemas o la inversión de procesos de resolución. Por este motivo, más allá de llevar a estudiantes con talento matemático a cursos superiores para atender sus necesidades, interesa garantizarles el acceso a tareas desafiantes que estimulen su talento (Castro et al., 2015). En este sentido, investigaciones recientes reconocen el potencial de la generalización, la exploración y representación de las generalizaciones y la justificación en tareas algebraicas como una oportunidad para profundizar en la identificación y potenciar rasgos característicos del talento matemático (Arbona et al., 2019; Ureña et al., 2024).

En todo caso, el interés por el desarrollo del razonamiento algebraico no es exclusivo para la atención al talento matemático, sino que su importancia general en edades tempranas disfruta de un amplio

Burgos, M. y Lastra-Gil, D. (2025). Resolución de problemas de patrones geométricos y talento matemático: Un estudio de caso. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

consenso en la comunidad de investigadores en educación matemática (Kieran, 2022). Numerosas investigaciones destacan además la posibilidad de escolares de educación primaria (4 a 12 años) de afrontar con éxito tareas algebraicas (Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Pinto y Cañadas, 2021). Para autores como Blanton et al. (2018) las prácticas algebraicas escolares implican: generalizar, representar, justificar, y razonar con estructuras y relaciones matemáticas. La generalización en el contexto del álgebra escolar supone el reconocimiento de estructuras para la descripción y expresión de regularidades. En esta práctica, los niños actúan sobre las generalizaciones que han observado, representándolas y justificando su validez; las generalizaciones se convierten en objetos matemáticos en sí mismos (Blanton et al., 2018).

En este trabajo se presentan parte de los resultados de una investigación más amplia con estudiantes de educación primaria, destinada a potenciar y evaluar su razonamiento algebraico por medio de tareas específicas y momentos de discusión y justificación colectiva. El objetivo de esta comunicación es mostrar y comparar, por medio de un estudio de caso, el nivel de razonamiento algebraico elemental a través de la generalización alcanzado por un grupo de estudiantes de quinto de primaria y por un estudiante de tercero de primaria diagnosticado con altas capacidades, al resolver un problema que involucra el estudio de un patrón geométrico.

TALENTO MATEMÁTICO

En la literatura científica el uso de términos como alta capacidad, talento y talento matemático es controvertido (Mora et al., 2013; Ureña et al., 2024). En línea con Ureña et al., (2024) se considera que un alumno con *altas capacidades* presenta un rendimiento intelectual superior en diversas capacidades y aprende con facilidad cualquier área, mientras que el término *talento* hace referencia a habilidades superiores específicas propias de un área. Un estudiante con *talento matemático* exhibe un alto nivel de rendimiento matemático, y dispone de habilidades matemáticas características como la memoria matemática, resolución atípica de los problemas, fluidez, originalidad, habilidad para establecer relaciones entre elementos y crear problemas, o afectivas, como la perseverancia y el interés por tareas desafiantes (Espinoza et al., 2024; Mora et al., 2013; Ureña et al., 2024).
Los problemas de patrones geométricos presentan una representación de los primeros términos de una sucesión creciente de números naturales y solicitan los valores o posiciones de términos específicos de la sucesión. Estos problemas son especialmente útiles para facilitar el acceso de estudiantes con altas capacidades al razonamiento algebraico, pues involucran procesos de generalización, abstracción y simbolización, más desarrollados en estudiantes con talento matemático que en la mayoría de los estudiantes del mismo nivel escolar (Arbona et al., 2019). Los estudiantes con talento matemático tienen características particularmente relevantes para resolver problemas de patrones, como establecer conexiones, generalizar y transferir ideas entre contextos numéricos y algebraicos, localizar la clave de los problemas, abreviar los procesos de solución, invertir procedimientos mentales durante el análisis o justificar adecuadamente la generalización evitando respuestas directas (Ureña et al., 2024).

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL Y NIVELES DE GENERALIZACIÓN

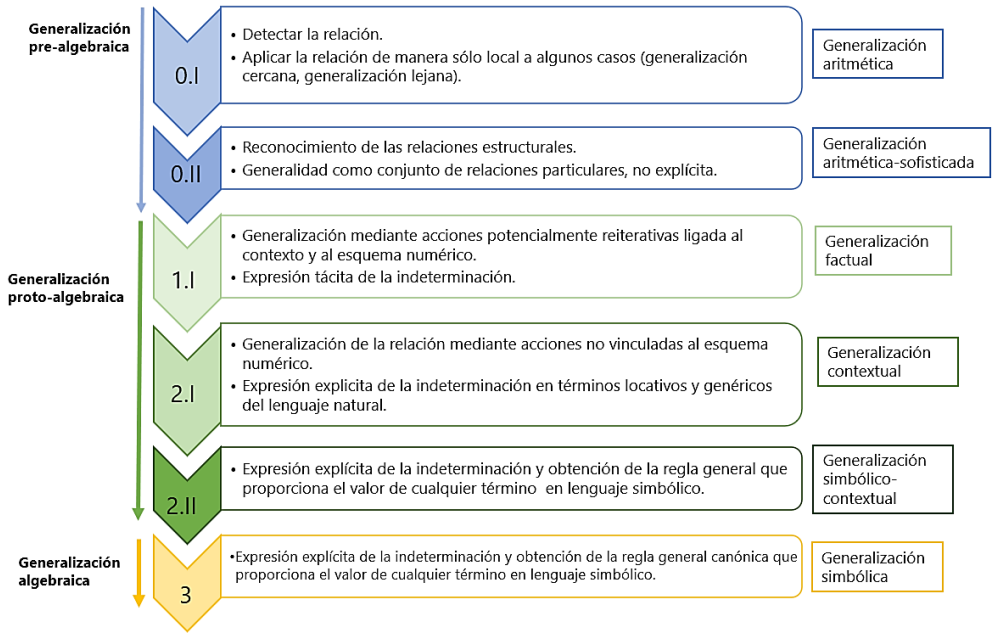
El modelo de los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2014) describe la actividad matemática en términos la presencia de objetos de naturaleza algebraica (relaciones binarias y sus propiedades; operaciones y sus propiedades; funciones, sus operaciones y propiedades; estructuras, sus tipos y propiedades), el grado de generalidad de estos objetos y el cálculo analítico implicado. La generalización se considera en términos de la identificación de objetos intensivos (es decir, generales, clases de objetos particulares) involucrados en las prácticas (Godino et al., 2014). El objeto intensivo se reconoce cuando el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto.

Recientemente, Burgos et al (2024) amplían el modelo de niveles de RAE propuesto por Godino et al. (2014), estableciendo subniveles que facilitan una visión más microscópica de las estructuras

implicadas. Para ello consideran diferentes grados de sofisticación en rasgos esenciales del razonamiento algebraico como son la generalización (Figura 1), el razonamiento estructural y la analiticidad. Para que la generalización sea algebraica, debe haber una deducción de una expresión que permita calcular el valor de cualquier término en una secuencia. Así distinguen tres formas de generalización (Figura 1): *pre-algebraica*, cuando no hay deducción ni tratamiento analítico, la abducción genera un procedimiento, pero no una expresión directa de la generalidad; *proto-algebraica*, cuando lo que se deduce, lo común, se expresa a través de instancias particulares de la variable y se observan rasgos analíticos incipientes; *algebraica*, cuando la fórmula generada necesariamente proporciona el valor de cualquier término y es usada de manera analítica para deducir formas canónicas de expresión.

Figura 3

Estratos de generalización pre-, proto- y algebraica (Burgos et al., 2024)



METODOLOGIA

En este trabajo se describen parte de los resultados derivados de una investigación más amplia de diseño instruccional (Kelly et al., 2014), que focaliza la atención en el aprendizaje en contexto. Se adopta un estudio de caso en el que, se consideran las características que afectan a los sujetos en un contexto natural a través de la interacción, y el diálogo, bajo la perspectiva de los intereses de cada agente. La investigación es de naturaleza exploratoria y descriptiva pues se pretende recopilar información, por medio de actividades específicas, que fundamente posteriores estudios con relación al razonamiento algebraico de estudiantes, considerando el colectivo con talento matemático.

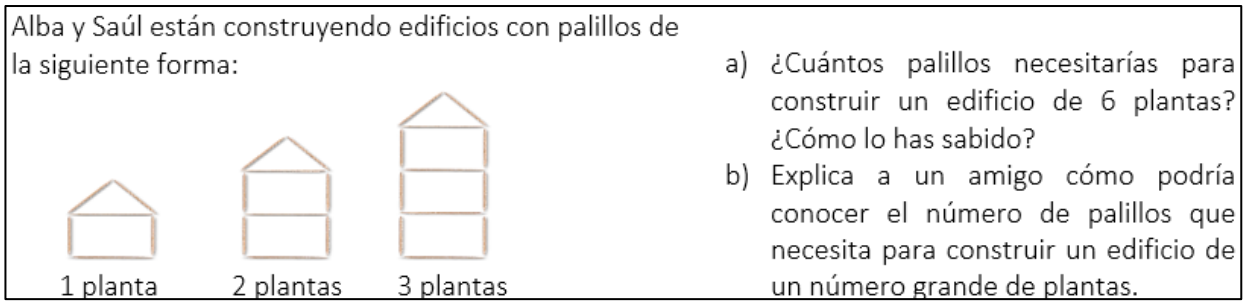
La información recogida procede de las respuestas de cuatro estudiantes de primaria, tres de ellos de quinto de primaria (10-11 años), curso en el que se implementó la experiencia y con desempeño estándar y otro estudiante que cursa tercero de primaria (9 años) y diagnosticado con altas capacidades. Ninguno de los estudiantes había trabajado antes tareas de generalización, ni de patrones geométricos en particular. Los estudiantes de quinto de primaria (E1, E2, E3 en adelante) fueron elegidos intencionalmente de entre el grupo-clase por su interés para participar en la puesta en común de las soluciones a los problemas y por ofrecer respuestas representativas de las observadas en el grupo completo. El estudiante con talento matemático (ET) fue seleccionado por su interés (así como el de su familia y tutor) por participar en la resolución de las actividades propuestas a sus compañeros de cursos superiores. ET está diagnosticado con altas capacidades, cursa la asignatura de Matemáticas

de un nivel superior al que le corresponde como adaptación curricular, y muestra interés y compromiso con la resolución de problemas matemáticos destinados a estudiantes de cursos superiores.

La recogida de la información se realiza a través de las respuestas individuales escritas de los alumnos y las grabaciones de audio de la puesta en común en el grupo de quinto, así como de la entrevista a ET. ET abordó la tarea en solitario y aunque empezó a escribir la respuesta en papel de manera previa, el tiempo necesario para su resolución fue mínimo, por lo que de manera inmediata se procedió a la entrevista. A continuación, se incluye en la Figura 2 la tarea de patrones propuesta a los estudiantes:

Figura 4

Problema propuesto a los estudiantes. Patrones (Adaptado de Arbona et al., 2017)



La tarea propuesta incluye un patrón geométrico. Los alumnos deben determinar un término próximo a los conocidos, siendo posible utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores y después describir con una expresión no necesariamente algebraica cómo se podría obtener un término cualquiera de la secuencia.

Los datos se analizan desde el punto de vista de los niveles de generalización y RAE establecidos en el marco teórico y sintetizados en la Figura 1.

RESULTADOS

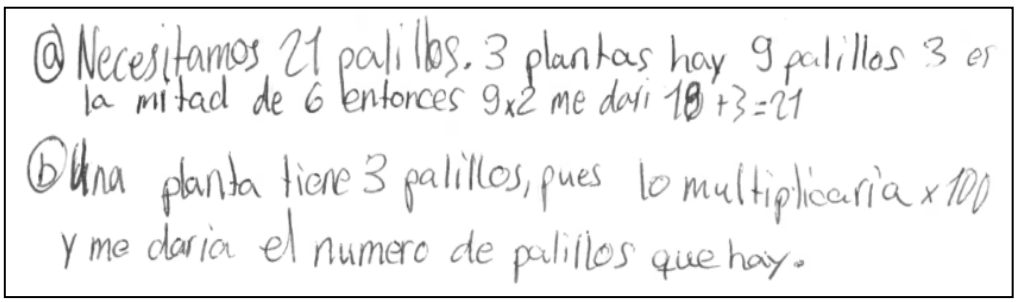
A continuación, describimos los resultados derivados del análisis de contenido de las respuestas escritas de los alumnos, así como de la transcripción de los audios obtenidos en las puestas en común o entrevista.

Nivel de generalización observado en alumnos de quinto de primaria

Fue frecuente, como se observa en la Figura 3, que los alumnos respondieran a la primera pregunta relacionando el término 6 con el término 3 del patrón.

Figura 5

Respuesta escrita de E1



Como vemos en la Figura 3, E1 considera como número grande, un edificio con 100 palillos. Reconoce la característica común "una planta tiene 3 palillos" y la relación multiplicativa, pero olvida sumar los tres palillos del tejado, algo que mantiene en la puesta en común:

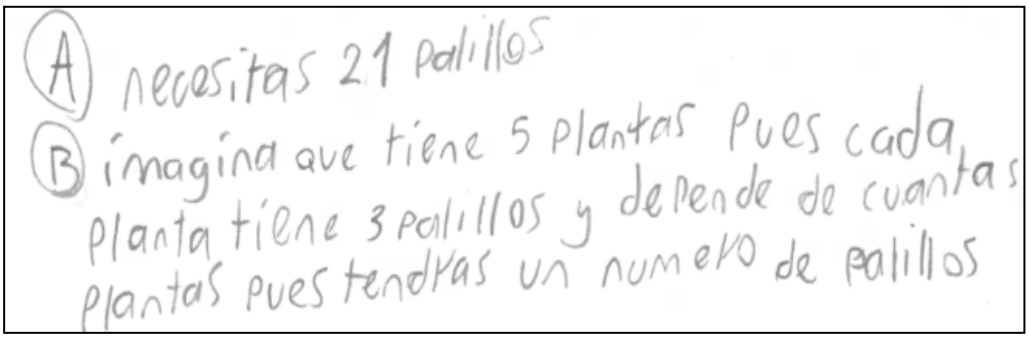
E1: En la a) serían veintiún palillos. Si en tres plantas hay nueve palillos, entonces se multiplicaría por dos porque tres es la mitad de seis y hay que hacer uno de seis plantas entonces pues lo multiplico por dos. Después al 18 le sumo más los tres palillos del techo.
Prof: vale, y ¿para una de cincuenta [plantas] igual que tu compañero o de lo que sea?
E1: Pues, si, por ejemplo, si son de cien, pues si una planta tiene tres, multiplicaría cien por tres y me daría el número.
Prof: Y si llueve se moja, ¿no?
E1: Sí, ah, no, más tres del techo.

E1 muestra un razonamiento proto-algebraico incipiente (nivel 1.I, Figura 1). Lo indeterminado no llega a enunciarse de forma explícita, sino que se expresa a través de acciones concretas. Se produce una generalización factual (Radford, 2018), ligado al nivel concreto de los valores numéricos particulares.

En otros casos, los estudiantes identifican como E2 (Figura 4) que la construcción requiere 3 palillos por planta, observando que el techo de una planta intermedia es el suelo de la siguiente, y que luego se le deben añadir otros tres palillos del tejado.

Figura 6

Respuesta escrita de E2



Aunque E2 se apoya en su respuesta escrita en una cantidad cercana para responder al apartado b, reconoce que el número de palillos "depende de cuantas plantas" se tengan.

E2: Yo quería responder la pregunta [apartado b].
Prof.: Ah, que querías responder. ¿El primero lo has hecho, cómo lo has hecho?
E2: Lo he hecho como el [Refiriéndose a un compañero que acababa de comentar con relación al apartado a) "Aquí hay 3, este no se cuenta porque es el suelo de la siguiente planta... entonces tres, tres y tres, serían para 6 plantas son otras tres, tres por seis me da 18. Más las otras tres del tejado son 21"]
Prof.: Veintiún palillos, igual que él. ¿Y el de b?
E2: Imagina que tiene cinco plantas, pues cada planta tiene tres palillos. Entonces, haces tres por cinco me da 15, más los tres palillos del tejado 18.
Prof: Vale, ¿y si tengo 50 plantas?
E3: Tres por 50, 150, más los tres del tejado, 153.

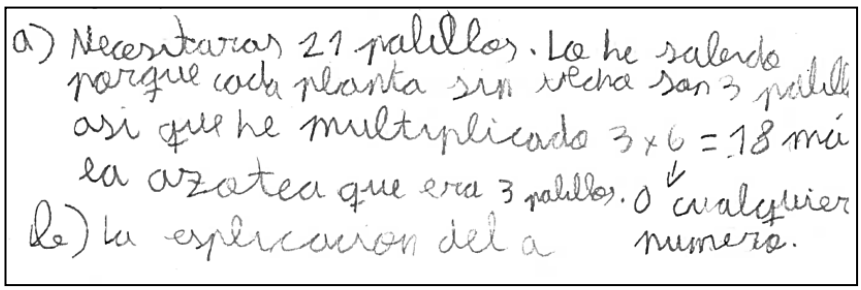
Como en el caso de E1, lo que se generaliza es el esquema operacional que permite determinar el número de palillos, por lo que corresponde también a un nivel 1.I de RAE. El enunciado de la tarea preguntaba por "un número grande de plantas".

En sus respuestas escritas los estudiantes no habían dado una explicación general de cómo se podría conocer el número de palillos necesarios para construir un edificio de un número grande de plantas.

Aunque usualmente se apoyaban en cantidades que consideraban elevadas, en otros casos como el de E3 (Figura 5) asumían que la respuesta dada al apartado a permite explicar el procedimiento ("la explicación del a"), reconociendo que el número de plantas puede variar ("o cualquier número").

Figura 7

Respuesta escrita de E3



E3: Lo he sabido [refiriéndose a la respuesta al apartado a)] porque cada planta sin su techo son 3 palillos, así que he multiplicado 3 por 6 que es igual a 18, bueno el 6 o cualquier número, más la azotea que era 3 palillos.

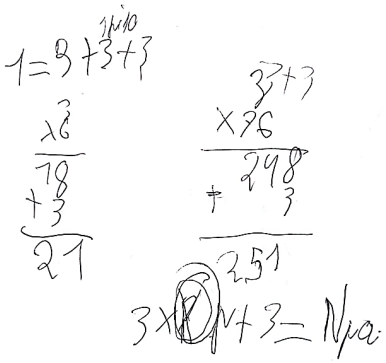
El profesor intenta que E3 explique que interpreta por "cualquier número" con relación al apartado b. En este momento E3 se refiere a que "[Si tienes que calcular para edificio de 50 plantas] en vez del 6 pones 50".

Nivel de generalización observado por el estudiante de talento matemático

A pesar de no estar familiarizado con este tipo de problemas, ET se mostró interesado por resolver y compartir su solución con el profesor-investigador.

Figura 8

Solución de ET al problema propuesto



Transcripción

Ipiso

$1 = 3 + 3 + 3$

$3 \times 6 = 18$

$18 + 3 = 21$

$3 \times 76 = 248$

$248 + 3 = 251$

$3 \times Xp + 3 = Npa$

A diferencia de lo observado en las respuestas escritas de los alumnos de quinto, ET sólo expresó las operaciones y la relación final sin incluir ninguna otra explicación o descripción en lenguaje natural. Mostramos un extracto de la entrevista a ET:

ET: Primer piso. Igual a 3. Y todo lo que vayas añadiendo son más 3. Si son 6 plantas más el tejado, que es más otros 3. ... Los 6 pisos más el tejado, 3 por 6, 18 más 3 del tejado, 21.

Prof: Vale, pues ahora el apartado b.

ET: Explica a un amigo cómo podría conocer el número de palillos que necesita para construir un edificio de un número muy grande de plantas. Calculando 3 por piso más 3 del tejado.

El profesor pide a ET que describa su razonamiento y que intente explicarlo a un amigo:

ET: Imagínate que hay que construir un edificio de 76 pisos. 3 por 76. Vamos a calcularlo. […] Más 3 del tejado. 251.

Se observa que ET para explicar su razonamiento recurre a un ejemplo, un caso lejano en el patrón. Pese a que ET no estaba familiarizado con el uso de símbolos literales, el profesor plantea a ET la

posibilidad de usar letras con la intención de ver su capacidad para obtener la expresión general sin necesidad de recurrir a un ejemplo.

Prof.: Vale. ¿Y cómo podrías llamar tú al número de pisos?
ET: Plantas.
Prof: Pero puedes usar una letra, ¿no?
ET: Sí, p.
Prof: Entonces, ¿cómo lo escribirías? Si el número de plantas es p, ¿cómo escribirías la expresión?
ET: 3 por el número de p, 3 por x por p.
Prof.: ¿Por qué xp?
ET: El número de plantas es x.
Prof.: Ah, vale, vale. Pero no hace falta. Si pones x, no hace falta que pongas p.
ET: 3xp más 3 igual número palillos.

Para ET "p" es la etiqueta que representa "plantas" o pisos, mientras que la cantidad, el número de éstas lo representa por "*x*". Esto le lleva a escribir "3xp" como 3 veces el número de plantas. Finalmente, obtiene la expresión general (Figura 6) *3xp+3=Npa*, donde "Npa" es la variable número de palillos. ET expresa en lenguaje simbólico una fórmula general para determinar el número de palillos necesarios para construir un determinado edificio, aunque conserva la dimensión contextual. Corresponde a un nivel 2.II (generalización simbólico-contextual, Figura 1) en el modelo de Burgos et al. (2024).

CONCLUSIONES

En este trabajo, a través de un estudio de caso, hemos analizado y comparado el nivel de razonamiento algebraico desarrollado por estudiantes de quinto de primaria con un desempeño dentro de la normalidad, y por un estudiante con talento matemático, cuando resuelven una tarea de patrones. Los alumnos de quinto de primaria hicieron un uso pseudo-estructural de los números (Burgos et al., 2024) en el que las relaciones numéricas tenían la intención de expresar generalidad. En todo caso, su razonamiento fue proto-algebraico incipiente (nivel 1.I de RAE) y la generalización fue de tipo factual, aunque en la puesta en común se observó cierto avance hacia la indeterminación. Por otro lado, el estudiante con talento mostró un razonamiento proto-algebraico sofisticado (nivel 2.II de RAE). Además, desde el punto de vista del razonamiento funcional, llegó a reconocer la relación funcional y expresa la transformación entre cantidades, vinculando la relación al contexto (razonamiento funcional parcial en Burgos et al., 2024).

Los resultados muestran, por un lado, la importancia de generar espacios para que los alumnos generalicen relaciones, usen y discutan sobre cantidades indeterminadas (Kieran, 2022). Por otro, apuntan a la necesidad de desarrollar nuevas investigaciones para clarificar la relación entre el talento matemático y el nivel de razonamiento algebraico que logran estudiantes con estas características cuando resuelven tareas algebraicas, no sólo en el contexto de los patrones y la generalización (Arbona et al., 2019) sino también en el de la aritmética generalizada o el pensamiento funcional (Ureña et al., 2024). Consideramos que estos contextos también pueden facilitar la exploración de las características propias del talento señaladas por la literatura, como la flexibilidad, la tendencia a la generalidad o el interés por simplificar o reformular soluciones dadas.

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto PID2022-139748NB-100, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER, UE.

REFERENCIAS

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, A. (2019). Strategies exhibited by good and average solvers of geometric pattern problems as source of traits of mathematical giftedness in grades 4-6. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (pp. 534-541). ERME. https://hal.science/hal-02416010v1

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de patrones geométricos. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 86*, 39-46.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(7), em2475. https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula, 21*, 85-104. https://doi.org/10.14201/aula20152185104

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2024). Análisis de la riqueza de los problemas planteados por estudiantes con talento matemático. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 217-224). SEIEM

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2014). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM–Mathematics Education, 54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Leikin, R. (2018). Giftedness and high ability in mathematics. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_65-4

Mora, M., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2023). Descriptores para analizar la flexibilidad en la resolución de problemas como indicador de talento matemático. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 395–402). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Ureña, J., Beltrán-Meneu, M. J. y Ramírez, R. (2024). Rasgos de talento matemático en estudiantes de secundaria. Generalización en un contexto funcional. *PNA, 19*(1), 53-79. http://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28279

METODOLOGÍAS LÚDICAS Y SU IDONEIDAD EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN SECUNDARIA: UN ANÁLISIS DE TRABAJOS DE FIN DE MÁSTER

Game-based methodologies and their suitability for teaching algebra in secondary school: a master's theses analysis

Cortes, A. Breda, A. Sánchez, A. Font, V. Sala-Sebastià, G.

Universidad de Barcelona

Resumen

Este estudio analiza la idoneidad didáctica de metodologías lúdicas, en especial la gamificación y el aprendizaje basado en juegos, en la enseñanza del álgebra de secundaria. Para realizar el estudio se han analizado trabajos de fin de máster de futuros docentes de matemáticas. Los resultados muestran que las metodologías lúdicas promueven además de la idoneidad afectiva, también la epistémica y cognitiva. Las justificaciones de los futuros docentes apuntan a que el álgebra es un área adecuada para las metodologías lúdicas debido a su dualidad sintáctico-semántica, ya que las reglas de los juegos proporcionan un área para desarrollar las reglas del álgebra y la abstracción de esta puede aprovecharse del significado contextual de los juegos.

Palabras clave: Gamificación, aprendizaje basado en juegos, álgebra, futuros profesores, Criterios de Idoneidad Didáctica

Abstract

This study analyses the didactic suitability of playful methodologies, especially gamification and game-based learning, in algebra's secondary teaching. To conduct the study, master's theses of preservice mathematics teachers were analysed. The results show that playful methodologies promote not only affective suitability but also epistemic and cognitive suitability. Preservice teacher's reasonings point to algebra being an appropriate area for playful methodologies due to its syntactic-semantic duality, since games' rules provide an area to develop algebra rules and algebra's abstraction can take benefit from games' contextual meaning.

Keywords: *Gamification, game-based learning, algebra, preservice teachers, Didactic Suitability Criteria*

INTRODUCCIÓN

La potencialidad de los juegos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado ha sido estudiada por diversas teorías psicopedagógicas (Cornellà et al., 2020). En el caso de las matemáticas, la investigación sobre el aprendizaje basado en juegos (ABJ) ha evidenciado la reducción de la ansiedad matemática en comparación con métodos tradicionales (Sabourin y Lester, 2014), además, ha evidenciado que su uso mejora el aprendizaje de las matemáticas (Herreros y Sanz 2020; Muñiz-Rodríguez et al. 2014). La gamificación también aporta beneficios en el desarrollo de habilidades matemáticas (Delgado Palacios et al., 2022; García Collantes, 2020; Holguín García et al., 2020), por lo que estas metodologías lúdicas son una alternativa para mejorar el aprendizaje.

Este estudio se basa en Trabajos de Fin de Máster (TFM) de un máster en formación del profesorado de secundaria en matemáticas. En estos TFM, los futuros docentes analizan la implementación de una unidad didáctica durante sus prácticas, aplicando los criterios de idoneidad didáctica (CID) y

Cortes, A., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. (2025). Metodologías lúdicas y su idoneidad en la enseñanza del álgebra en secundaria: un análisis de trabajos de fin de máster. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

proponiendo mejoras. Se han seleccionado aquellos que estudian secuencias didácticas de álgebra e incorporan metodologías basadas en juegos, como la gamificación y el ABJ.

En estudios anteriores se halló que las ramas de la probabilidad y la geometría presentaban un gran número de actividades relacionadas con juegos en comparación con otras. Ambas ramas se prestan especialmente a este tipo de metodologías debido a la gran cantidad de juegos existentes que se relacionan con ellas (Cortés et al., en prensa). A pesar de las diferencias con las anteriores ramas, también se destacó que el álgebra es una de las ramas con mayor presencia de actividades lúdicas. Este artículo busca analizar las razones que dan los futuros profesores para utilizar estas metodologías en álgebra.

Los objetivos de este estudio son: 1) Analizar cómo la gamificación y el ABJ son empleadas en los TFM y evaluar su impacto en la idoneidad didáctica. 2) Explorar las razones que ofrecen los futuros profesores por las cuales emplean la gamificación y el ABJ al enseñar álgebra.

MARCO TEÓRICO

Metodologías basadas en juegos

En esta investigación, para determinar qué actividades utilizan gamificación, adoptamos la definición de Deterding et al. (2011) quienes la describen como el uso de elementos del diseño de juegos en contextos no lúdicos, sin implicar el uso de juegos completos. Werbach y Hunter (2015) plantean un modelo con tres niveles de elementos del diseño de juego que cualquier actividad de gamificación debe tener: a) las dinámicas, aspectos generales que guían la motivación de los participantes y representan el elemento más abstracto; b) las mecánicas, procesos básicos que impulsan la acción y fomentan la implicación de los jugadores; y c) los componentes, manifestaciones específicas de las dinámicas y mecánicas, representando los elementos visibles del juego. Los componentes son la "primera línea" de contacto del jugador con la gamificación y el nivel menos abstracto.

Para identificar actividades que utilizan ABJ, seguimos la definición de Pho y Dinscore (2015), que lo describen como la aplicación de principios de juego en escenarios reales para involucrar a los usuarios, y la de Al Fatta et al. (2018), que lo definen como un juego completo con contenido educativo o habilidades esenciales. Bajo estas definiciones, plataformas como Kahoot! se consideran ABJ (Balaskas et al., 2023; Dellos, 2015), ya que son juegos completos.

La gamificación se diferencia del ABJ en que aplica técnicas de diseño de juegos en contextos no lúdicos, mientras que el ABJ utiliza juegos completos con fines educativos. Esta distinción ayuda a evitar confusiones con metodologías como "jugar en el aula" o "aprender jugando" (Torres-Toukoumidis y Romero-Rodríguez, 2019). No se considera gamificación el uso de actividades manipulativas o tecnologías con estética de juego, sino únicamente una presentación distinta de actividades tradicionales. Además, este estudio incluye actividades con diseño lúdico que no encajan en estas definiciones, a las cuales se les denomina problemas evocados en un contexto lúdico. En este estudio se asume que una metodología lúdica es un enfoque didáctico que incorpora juegos completos (ABJ), elementos del diseño de juegos (gamificación) o contextos narrativos y recreativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Criterios de idoneidad didáctica

Para este estudio, se analizaron extractos de secuencias didácticas que emplean gamificación y ABJ, utilizando los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID). Los CID son herramientas analíticas que evalúan la idoneidad de un proceso de instrucción, compuestos por seis criterios. Cada criterio se desglosa en componentes e indicadores específicos, permitiendo una evaluación detallada. Un proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas alcanza un alto grado de idoneidad didáctica cuando articula coherentemente estos seis criterios en sus distintos componentes (Font et al., 2010).

Tabla 1

CID, descripción y componentes. Fuente: Adaptado de Ledezma et al. (2024, p. 1062).

Criterio	Descripción	Componentes
Epistémico	Valora si las matemáticas que se enseñan son matemáticas de calidad	-Errores en el contenido. -Ambigüedades en las explicaciones. -Riqueza de procesos matemáticos utilizados. -Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Valora, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, si el tema a impartir se adapta a lo que los estudiantes ya saben y, tras este proceso, si el aprendizaje conseguido se aproxima a lo pretendido	-Conocimientos previos de los estudiantes. -Adaptación curricular a las diferencias individuales. -Nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes. -Alta demanda cognitiva de las actividades propuestas.
Interaccional	Valora si la interacción resuelve las dudas o dificultades de los estudiantes	-Interacción entre profesor y estudiante. -Interacción entre estudiantes. -Nivel de autonomía fomentado en los estudiantes. -Uso de evaluaciones formativas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.
Mediacional	Valora la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje	-Disponibilidad y calidad de los recursos materiales. -Número de estudiantes, horarios y condiciones del aula. -Gestión del tiempo durante las actividades de enseñanza-aprendizaje.
Afectivo	Valora la implicación del estudiante (intereses y motivación) durante el proceso de enseñanza y aprendizaje	-Intereses y necesidades de los estudiantes. -Actitudes mostradas por los estudiantes. -Emociones expresadas por los estudiantes durante el proceso de aprendizaje.
Ecológico	Valora la adaptación del proceso instruccional al proyecto educativo escolar, a las directrices curriculares, a las condiciones del entorno social y profesional, etc.	-Adaptación al currículo establecido. -Conexiones intra e interdisciplinares en el contenido. -Utilidad social y laboral de los contenidos enseñados. -Nivel de innovación didáctica aplicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

METODOLOGÍA

Este estudio analizó todos los Trabajos de Fin de Máster (TFM) del curso 2015-2016 hasta 2022-2023 del Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad en Matemáticas coordinado por la UAB. Estos TFM, si bien no hay un repositorio institucional accesible para consultarlos, se pueden consultar previa solicitud. Para el estudio se realizó una revisión exhaustiva de todos los TFM, haciendo especial énfasis en aquellos apartados en los que se describen y justifican el uso de las actividades implementadas o propuestas para la mejora de la implementación de una secuencia didáctica, de ahí se extrajeron las justificaciones de aquellas actividades que utilizaban alguna de las metodologías lúdicas. Entre los TFM, se seleccionaron aquellos que propusieron y valoraron secuencias didácticas de álgebra e implementaran metodologías basadas en juegos. Se registraron los siguientes datos: autor, título, curso, nivel educativo, justificación del uso de la metodología, clasificación según los componentes del CID, tipo de metodología lúdica y nombre del juego. Los datos se organizaron en tablas siguiendo el método de Ledezma et al. (2024).

Tabla 2

Ejemplo de los datos registrados para un extracto de un TFM

Título	Propuesta de mejora de una situación de aprendizaje sobre ecuaciones de primer y segundo grado, dentro del contexto de un curso preparatorio para acceder a una escuela de magia
Nombre del futuro docente	Rodríguez. C.
Curso	2022-2023
Nivel educativo	3º secundaria (14-15 años)
Extracto	Como he comentado anteriormente, traje al aula el tema de las ecuaciones de primer y segundo grado, pero no de forma tradicional sino a través de una situación de aprendizaje que giraba en torno a la magia del álgebra a través de un "Curso preparatorio para acceder a la Escuela de Magia Hogwarts". Dentro de la situación de aprendizaje presentaba a los alumnos una serie de retos o actividades para prepararse para acceder a la escuela de magia, de este modo pretendía que tanto el contexto como las actividades despertaran la motivación para los alumnos. (Rodríguez, 2023, p.24)
CID	Intereses y necesidades (idoneidad afectiva) +
Metodología	Gamificación
Actividad	*Roleplay*

De cada extracto se analizó a que CID y componente hacía referencia según el contexto. Por ejemplo, en el extracto de la tabla 2, al justificar el uso de la gamificación para que el contexto y las actividades despertaran la motivación de los alumnos, se está haciendo referencia al componente de intereses y necesidades de la idoneidad afectiva, además lo está haciendo de manera positiva, dado que la motivación del alumnado es un aspecto deseable en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Cada TFM puede presentar más de una metodología lúdica, dado que en una secuencia didáctica se describen múltiples sesiones y actividades, y cada actividad puede emplear una metodología distinta.

En un estudio anterior (Cortés et al., en prensa), también se demostró que la mayoría de los futuros docentes no utilizaron los términos gamificación o ABJ a pesar de haber empleado dichas metodologías, así como que el término gamificación no siempre se utilizó adecuadamente. Por lo que se clasificó cada actividad según la metodología utilizada considerando las definiciones presentadas.

Para la clasificación de actividades, se agruparon por similitudes, especialmente si se empleaban el mismo tipo de juego, como Kahoot! y otras dinámicas tipo quiz, aunque abordaran temas diferentes.

RESULTADOS

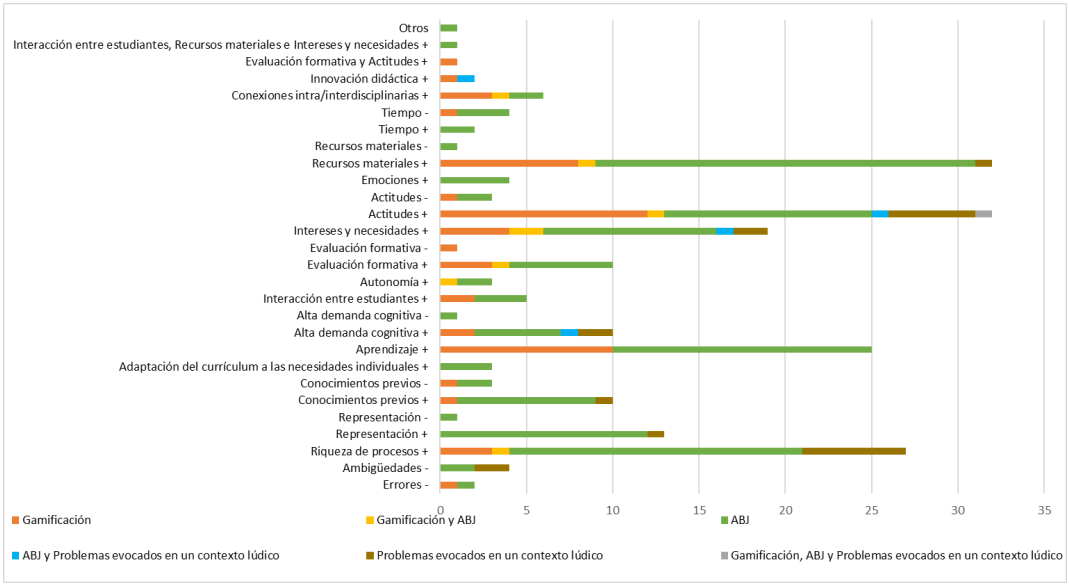
Impacto en la idoneidad didáctica de las metodologías lúdicas

Como primer resultado, se hallaron 61 TFM diferentes de álgebra en los que se justifica el uso de actividades que emplean metodologías lúdicas. La metodología más frecuente es el ABJ, con 52 TFM, seguida por los problemas contextualizados en un entorno lúdico, con un total de 31 TFM, y finalmente la gamificación, con 25 TFM. Aun así, aunque haya más problemas contextualizados en un entorno lúdico, se encontraron menos extractos que justifiquen su uso que en la gamificación.

Las metodologías lúdicas, como se observa en la Figura 1, promueven la idoneidad didáctica debido a que, en general, todos los CID tienen una valoración positiva, aunque algunos destacan más que otros como el afectivo gracias al componente de actitudes y el mediacional con el componente recursos materiales. Sin embargo, dado que estas metodologías por sus características enfatizan lo afectivo, hay que destacar la valoración positiva de la riqueza de procesos y el aprendizaje. Dicho de otra manera, el uso de estas metodologías no solo incide en los aspectos afectivos y emocionales, sino que incide también en el aprendizaje y en la calidad de las matemáticas enseñadas ya que proponer tareas que fomenten la riqueza de procesos es un indicador clave de una enseñanza de calidad (NCTM, 2000).

Figura 1

Extractos clasificados según los componentes de los CID. Fuente: Elaboración propia.



Justificaciones del uso de la gamificación y el ABJ en la enseñanza del álgebra

Para responder el segundo objetivo se halló que el empleo de estrategias didácticas basadas en el juego ha sido justificado por los futuros docentes como una posibilidad para fomentar la riqueza de procesos matemáticos. Actividades como la creación de algoritmos en la actividad "Matemagia" permiten desarrollar el pensamiento computacional y la algoritmización, ya que los estudiantes diseñan procesos matemáticos y los programan para resolver problemas (Anguita, 2023, p. 9). Además, se halló que las actividades de gamificación facilitan la resolución de problemas, como en los "escape rooms" matemáticos, donde el alumnado conecta distintos contenidos y aplica estrategias de resolución de problemas en un entorno dinámico y motivador (Pérez, 2023, p. 11). Estos enfoques además de fomentar el aprendizaje activo, también refuerzan la exploración y formulación heurística. Asimismo, se encontró que los juegos manipulativos, como el "Dominó de ecuaciones", fomentan la argumentación y el razonamiento, ya que los estudiantes deben verificar la equivalencia entre expresiones algebraicas, estableciendo conexiones entre diferentes representaciones matemáticas y justificando sus elecciones (Fernández Porta, 2022, p. 8). Por otro lado, la institucionalización del conocimiento se ve favorecida a través de actividades de reflexión grupal y revisión de estrategias empleadas en los juegos, consolidando el aprendizaje en un marco compartido de significados.

Algunos futuros docentes, justifican el uso de juegos en el álgebra, para modelar las convenciones y reglas sintácticas estrictas propias del área. Actividades de ABJ propuestas por futuros docentes, como el "Dominó de ecuaciones de segundo grado" (Arnaiz, 2021, p. 23), o de gamificación, como el "Concurso de patrones" (Casado, 2022, p. 16), exploran esta dimensión, haciendo que los estudiantes manipulen expresiones algebraicas para encontrar equivalencias. De este modo, el uso repetido de reglas fomenta la formalización y abstracción. Asimismo, los futuros docentes justifican el uso de actividades basadas en juegos para dotar de contexto a la vez que se trabajan las reglas y convenciones. La combinación de ambas perspectivas resulta evidente en actividades en algunas actividades de ABJ propuestas por futuros docentes, como el "Bingo de expresiones equivalentes" que propone Basallote (2021, p. 12), quien justifica la implementación de la actividad para trabajar las expresiones algebraicas desde un punto de vista semántico y sintáctico. La actividad de gamificación "KiKeOn" de Lleixa (2021, p. 11-12), una mezcla de roleplay y juego de pistas para investigar un robo, a través de esas pistas da significado al estudio del álgebra, a la vez que se trabajan las reglas y convenciones del álgebra. Estas tareas no solo requieren manejar las reglas, sino también exigen interpretar los resultados en un contexto dado.

Considerando lo expuesto, se puede inferir que la gamificación y el ABJ mejoran la adquisición de conocimientos debido a que fomentan los procesos descritos.

DISCUSIÓN

La inclusión de juegos en el proceso de enseñanza-aprendizaje no solo contribuye a mejorar la motivación y la implicación del alumnado, sino que también amplía y diversifica los procesos matemáticos que los estudiantes activan en su desarrollo cognitivo. Estos resultados refuerzan y amplían los hallados por Kanobel et al. (2022), quienes encontraron que los juegos digitales promueven el desarrollo del razonamiento lógico-matemático, el análisis y el planteo de hipótesis y la exploración de diversos caminos para encontrar soluciones creativas.

El NCTM (2000) establece cinco procesos que representan formas clave de adquirir y utilizar el conocimiento matemático: Resolución de Problemas, Razonamiento y Prueba, Comunicación, Conexiones y Representación. A estos procesos se pueden añadir otros, como exploración, formulación, institucionalización o algoritmización, también relevantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje matemático. En los resultados, los futuros docentes citaron estos procesos para justificar el uso de actividades lúdicas, sugiriendo que las actividades fomentan la riqueza de procesos.

Para profundizar más en por qué estas metodologías pueden fomentar la riqueza de procesos, se atiende al estudio de Chalé-Can et al. (2017), quienes resaltan la necesidad de integrar en la enseñanza del álgebra, para mejorar la comprensión y el razonamiento matemático, una perspectiva sintáctica centrada en reglas y transformaciones algebraicas, y una semántica basada en el significado contextual de las expresiones. Esta dualidad fue analizada por Hiebert y Lefevre (1986), quienes distinguen entre dos tipos de conocimiento matemático: el conceptual, rico en relaciones y conforma una red de significados; y el procedimental, definido por el uso del lenguaje formal (símbolos y reglas sintácticas) y por algoritmos o procesos para resolver tareas matemáticas. Este enfoque es esencial en el álgebra, en especial cuando las expresiones no se relacionan directamente con fenómenos del mundo real. Juegos como los citados en los resultados ayudan al alumnado a conectar las expresiones algebraicas con problemas significativos, promoviendo una mejor comprensión de su uso.

Finalmente, los enfoques lúdicos hallados en los TFM abordan, tanto las reglas formales del álgebra como la interpretación semántica, lo que se alinea con lo propuesto por Chalé-Can et al. (2017).

CONCLUSIONES

El presente estudio ha permitido analizar la implementación de metodologías lúdicas en la enseñanza del álgebra a partir de la revisión de TFM de futuros docentes de secundaria. Los hallazgos confirman que las metodologías no solo fomentan la motivación y la implicación del alumnado, según los futuros profesores, sino que también pueden potenciar la riqueza de procesos en la enseñanza del álgebra.

En primer lugar, se ha evidenciado que el ABJ es la metodología lúdica más utilizada en los TFM analizados, seguida de los problemas evocados en un contexto lúdico y la gamificación. Esto sugiere que el uso de juegos completos con contenido educativo resulta especialmente atractivo para los futuros docentes al momento de diseñar estrategias didácticas. En términos de idoneidad didáctica, los datos muestran que las metodologías promueven un ambiente de aprendizaje que refuerza tanto los componentes afectivos como los epistémicos y cognitivos en la enseñanza. Destaca, el impacto positivo en la riqueza de procesos matemáticos y el aprendizaje, aspectos clave en una enseñanza de calidad. Actividades como el "Dominó de ecuaciones" o los "Escape Rooms matemáticos" no solo generan un entorno dinámico y motivador, sino que también favorecen la resolución de problemas, la argumentación y la exploración matemática.

Desde una perspectiva disciplinar, los resultados revelan que el álgebra se presta especialmente bien al uso de metodologías lúdicas por su dualidad sintáctico-semántica. Por un lado, los juegos ayudan a reforzar las reglas y transformaciones algebraicas mediante retos y desafíos estructurados. Por otro,

permiten dar significado contextual a las expresiones algebraicas, facilitando la comprensión de su utilidad y aplicación. Esta combinación de enfoques se alinea con lo propuesto por Chalé-Can et al. (2017), quienes destacan la importancia de integrar ambas dimensiones en la enseñanza del álgebra.

En conclusión, el uso de metodologías basadas en juegos en la enseñanza del álgebra se presenta como una estrategia idónea para mejorar la motivación y el aprendizaje de los estudiantes. Además de proporcionar una experiencia más atractiva, estas metodologías permiten abordar tanto el pensamiento formal y abstracto como la interpretación contextual del álgebra, enriqueciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Futuras investigaciones podrían profundizar en la efectividad de estas estrategias a largo plazo y su impacto en diferentes niveles educativos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido elaborado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00(MICIU/AEI/10.13039/501100011033) "FEDER Una manera de hacer Europa" y con la ayudaPRE2022-104951 por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y el FSE+.

Referencias

Al Fatta, H., Maksom, Z., y Zakaria, M. H. (2018). Game-based Learning and Gamification: Searching for Definitions. *International Journal of Simulation: Systems, Science & Technology*, *19*(6). https://doi.org/10.5013/IJSSST.a.19.06.41

Anguita, J. (2023). *Anàlisi i millora d'una unitat didàctica sobre equacions de primer grau a 2n d'ESO* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Arnaiz, J. (2021). *Proposta de millora de la unitat didàctica d'equacions de segon grau implementada en el pràcticum* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Balaskas, S., Zotos, C., Koutroumani, M., y Rigou, M. (2023). Effectiveness of GBL in the Engagement, Motivation, and Satisfaction of 6th Grade Pupils: A Kahoot! Approach. *Education Sciences*, *13*(12), 1214. https://doi.org/10.3390/educsci13121214

Basallote, J. (2021). *Variables y expresiones algebraicas en primero de eso: Propuesta de mejora* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Casado, M. (2022). *Proposta de millora de la Unitat Didàctica sobre Introducció a l'Àlgebra i Equacions de Primer Grau* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Cornellà, P., Estebanell, M., y Brusi, D. (2020). Gamificación y aprendizaje basado en juegos. *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra*, 18(1), 5-19. Extraído el 8 de mayo del 2024 de https://raco.cat/index.php/ECT/article/view/372920

Chalé-Can, S., Font, V., & Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Cortés, A., Sánchez, A., Breda, A., & Font, V. (en prensa). Didactic suitability criteria to organise mathematics teachers' reflection aimed at improving instructional processes in mathematics: The case of gamification and game-based learning. En C. Fernández, S. Llinares, & B. H. Choy (Eds.), *Innovations in initial mathematics teacher education*. Springer.

Delgado Palacios, M. L., Ángel Reyes, C. E., Saltos Palacios, G. I., y Del Castillo Espinal, J. R. (2022). La gamificación en la educación: Una estrategia didáctica, en el colegio Dr. Luis Celleri Avilés. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *6*(4), 3116-3131. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i4.2816

Dellos, R. (2015). Kahoot! A Digital Game Resource for Learning. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, *12*(4), 49-52.

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., y Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness: Defining «gamification». *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments*, 9-15. https://doi.org/10.1145/2181037.2181040

Fernández Porta, M. (2022). *Quadrem el sistema. Revisió de la unitat didàctica* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243.

García Collantes, D. E. (2020). *Gamificación y competencias matemáticas en los estudiantes de 6to grado de la I. E. 2071 César Vallejo, Los Olivos 2019* [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio Digital Institucional Universidad César Vallejo. https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/41937

Herreros, D., y Sanz, M. T. (2020). Estadística en educación primaria a través del aprendizaje basado en juegos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *3*(1), 33-47.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Holguin García, F. Y., Holguin Rangel, E. G., y Garcia Mera, N. A. (2020). Gamificación en la enseñanza de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Telos*, *22*(1), 62-75. https://doi.org/10.36390/telos221.05

Kanobel, M. C., Galli, M. G., y Chan, D. M. (2022). El uso de juegos digitales en las clases de Matemática: Una revisión sistemática de la literatura. *Revista Andina de Educación*, *5*(2).

Ledezma, C., Breda, A., & Font, V. (2024). Prospective Teachers' Reflections on the Inclusion of Mathematical Modelling During the Transition Period Between the Face-to-Face and Virtual Teaching Contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *22*(5), 1057-1081. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8.

Lleixa, M. (2021). *Introducció a l'àlgrebra a primer d'eso. Anàlisi de la UD i proposta de millora* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: Estudio de una experiencia innovadora. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *10*(39), 19-33.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Pérez, J. (2023). *L'INS La Riera resol el repte de Ca l'Arnús. Proposta de millora* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Pho, A., y Dinscore, A. (2015). Game-based learning. *Tips and trends*, *2*.

Puig, A. (2023). *Valoració i proposta de millora de la unitat didàctica impartida: El llenguatge algebraic* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Rodríguez, C. (2023). *Proposta de millora d'una situació d'aprenentatge sobre equacions de primer i de segon grau, dintre del context d'un curs preparatori per accedir a una escola de màgia* [Trabajo de fin de máster]. Universidad Autónoma de Barcelona.

Sabourin, J. L., y Lester, J. C. (2014). Affect and Engagement in Game-BasedLearning Environments. *IEEE Transactions on Affective Computing*, *5*(1), 45-56. https://doi.org/10.1109/T-AFFC.2013.27.

Torres-Toukoumidis, A. L., y Romero-Rodríguez, L. M. (2019). Gamificación, Simulación, Juegos Serios y Aprendizaje Basado en Juegos. En *Juegos y Sociedad: Desde la Interacción a la Inmersión para el cambio social* (pp. 113-120). Mcgraw Hill.

Werbach, K., y Hunter, D. (2015). *The gamification toolkit: Dynamics, mechanics, and components for the win.* University of Pennsylvania Press.

EL CONTEXTO DE LAS SITUACIONES-PROBLEMAS DE PROBABILIDAD EN TEXTOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Context of problem-situations in compulsory secondary education

Elgueda-Ibarra, M., Batanero, C. y Gea, M. M.

Universidad de Granada

Resumen

El libro de texto es un recurso útil en la planificación e intervención docente y sirve al estudiante de apoyo al estudio, lo que explica el interés de la investigación centrada en el mismo. El objetivo de este trabajo fue analizar el contexto en que se presentan las situaciones-problemas de probabilidad en dos series de libros de texto españolas de Educación Secundaria Obligatoria de publicación reciente. Se clasifican las situaciones-problemas de acuerdo a los contextos sugeridos en los estudios PISA, añadiendo el contexto de juegos de azar, que es el de mayor frecuencia. Aunque crecen los contextos personales y sociales respecto a trabajos previos con textos españoles, se recomienda incidir en contextos ocupacionales y científicos, especialmente en cursos superiores.

Palabras clave: contexto, situaciones-problemas, probabilidad, libros de texto.

Abstract

The textbook is a useful resource in teaching intervention and serves the student as a support for study, which explains the interest of the research focused on textbooks. The aim of this paper was to analyse the context in which probability problem-situations are presented in two series of recently published Spanish textbooks for Compulsory Secondary Education. The problem-situations were classified according to the contexts suggested in the PISA studies, adding the context of games of chance, which is the most frequent. However, personal and social contexts were more frequent than in previous studies with Spanish textbooks. It is recommended to emphasise occupational and scientific contexts, especially in higher grades.

Keywords: *context, problem-situation, probability, textbook.*

INTRODUCCIÓN

La probabilidad recibe cada vez mayor atención, por la necesidad de educar el razonamiento probabilístico del ciudadano para enfrentarse a información probabilística y toma de decisiones (Batanero y Borovcnik, 2016; Sriraman y Chernoff, 2020). Como consecuencia, el currículo español de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (MEFP, 2022) incluye los siguientes contenidos: a) Incertidumbre: Fenómenos deterministas y aleatorios, experimentos simples y compuestos, asignación de probabilidades mediante frecuencia relativa y regla de Laplace, técnicas de recuento (diagramas de árbol, tablas…) y aplicación a la toma de decisiones fundamentadas; b) Inferencia: Formulación de preguntas, identificación de datos relevantes y estrategias de deducción de conclusiones y su alcance para tomar decisiones a partir de una muestra.

El estudio que nos precede (Ortiz, 2002) se llevó a cabo con dos textos del Bachillerato Unificado Polivalente que no era obligatorio, dirigidos al primer curso de este nivel (14-15 años). Para el primer curso se introduce el tema de probabilidad escuetamente en los siguientes términos ((MEC, 1975): "Introducir la teoría combinatoria y noción de probabilidad para el caso de un universo finito" sin describir contenido detallados (Ortiz, 2002, p. 32).

Elgueda-Ibarra, M., Batanero, C. y Gea, M. M (2025). El contexto de las situaciones-problemas de probabilidad en textos de educación secundaria obligatoria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

En este trabajo nos interesamos por los libros de texto, que son instrumentos mediadores para el docente, quien debe implementar prácticas innovadoras en reformas curriculares, lo que explica el interés de la investigación sobre el tema (Qi, 2025; Schubring y Fan, 2018). Al elegir convenientemente el libro de texto, se influye en la práctica en el aula e indirectamente en el aprendizaje de los estudiantes (Rezat et al., 2021). Este papel es especialmente relevante en el estudio de la probabilidad, donde muchos profesores se sienten inseguros por no haber sido suficientemente preparados en la materia (Batanero, 2022).

El objetivo del trabajo fue analizar el contexto de las situaciones-problemas de probabilidad en dos series completas recientes de libros de texto de la ESO. En lo que sigue se describen los fundamentos, método, resultados y conclusiones del estudio.

FUNDAMENTOS

Situación-problema

La caracterización de los problemas escolares durante más de 50 años (Liljedahl y Cai, 2021) debe su papel reconocido en el currículo de matemáticas y el aprendizaje de los estudiantes (Santos-Trigo, 2024). La enseñanza basada en resolución de problemas enfatiza el razonamiento matemático de los estudiantes, cuando trabajan diferentes tipos de tareas en una variedad de contextos (Cai y Hwang, 2023). Ello se debe a que la aplicación de los conceptos matemáticos implica la coordinación e integración de sus diversos significados y la práctica de los procedimientos matemáticos asociados (Toh et al., 2023).

Según Verschaffel et al. (2000), los problemas verbales son descripciones de situaciones reales simplificadas, presentadas en la enseñanza, en las que se plantean preguntas, cuya respuesta se obtiene mediante la aplicación de operaciones matemáticas a los datos disponibles. No se requiere que la situación sea un verdadero problema para el estudiante, es decir, una tarea para la que no se dispone de una solución rutinaria. En el Enfoque Onto Semiótico (Godino, 2024), las situaciones-problemas juegan un papel fundamental, pues la actividad de las personas para resolverlos es el elemento central en la construcción del conocimiento matemático (Godino et al. 2019). Una situación-problema es cualquier situación que genera actividad matemática y el significado de los objetos matemáticos surge de las prácticas matemáticas realizadas al resolverlas (Godino et al., 2019). La trama compleja de objetos y procesos requeridos en su resolución explica muchas dificultades de aprendizaje. Por ello, de la riqueza y variedad de dichas situaciones, se desprenden las oportunidades de aprendizaje matemático brindadas al estudiante (Godino. 2024). Como consecuencia, el análisis de las variables didácticas de las situaciones-problemas proporciona criterios para estructurar las tareas a proponer a los estudiantes y en los procesos de evaluación.

Papel del contexto en matemáticas

El interés del contexto en la investigación didáctica se debe a que la comprensión y resolución de problemas contextualizados forma parte de la cultura científica (Rosales et al., 2020) y a que los contextos variados atraen la atención de los estudiantes y conectan la escuela con la sociedad (Sanmartí y Márquez, 2017). Montejo-Gámez et al. (2018) señalan el papel de los problemas contextualizados en el desarrollo de procesos matemáticos y competencias de modelización. Por todo ello, los contextos variados contribuyen al aprendizaje y la activación del conocimiento matemático (Font, 2007) e influyen en la comprensión de los problemas y en el método de resolución. Dentro de la enseñanza de la matemática, la importancia del contexto ha crecido debido a las pruebas PISA (OECD, 2019), que están teniendo una notable influencia en la preparación de los estudiantes en matemática en la mayoría de los países (She et al., 2018). En dichas pruebas, más que evaluar los conocimientos de los estudiantes, se analiza su competencia para resolver problemas contextualizados en diversos tipos de situaciones cotidianas (Niss y Højgaard, 2019).

Rodríguez-Muñiz et al. (2022) señalan la importancia y dificultad del contexto en la enseñanza de la

estadística, que es la ciencia de los datos, y los datos son números en un contexto (Moore, 2005), jugando un papel crucial en la práctica profesional y razonamiento estadístico (Pfannkuch et al., 2016), así como en el diseño de experiencias didácticas (Zapata-Cardona, 2023). Además,

Antecedentes

Diferentes autores han analizado las situaciones-problemas de probabilidad en los libros de texto. Tanto Gómez-Torres et al. (2014) como Vásquez y Alsina (2015) analizan los tipos de problemas, y significado de la probabilidad implícito en los problemas propuestos en libros de texto de educación primaria en España y Chile respectivamente. Las situaciones más frecuentes en el trabajo de Vásquez y Alsina (2015) fueron las alusivas al significado intuitivo, seguidas de los significados frecuencial y clásico, siendo escasas las relacionadas con el significado subjetivo. Mientras en Gómez-Torres et al. (2014) fueron más frecuentes las relativas al significado intuitivo, integrándose en la segunda mitad del ciclo educativo las correspondientes a los significados clásicos y subjetivo.

Díaz-Levicoy et al. (2019) estudian el contexto de las situaciones-problemas en una serie de libros de texto chilenos de Educación Primaria, según los considerado en las pruebas PISA (OECD, 2019), abundando el contexto personal (63,9%), con solo una actividad con contexto profesional en sexto curso. Los contextos social y científico corresponden respectivamente al 16,7% y el 11,1%, y el 6,9% son ejercicios descontextualizados. En el estudio de Ortiz (2002) el contexto del 70% de los ejercicios fue los juegos de azar. Posteriormente Ortiz (2014) analiza cuatro libros de texto de segundo curso de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (MEC, 2007), encontrando muchos problemas descontextualizados (entre el 42,7% y 27,4% dependiendo del libro y que siendo el contexto más utilizado los juegos de azar (entre el 49% y 35,8%).

Otras investigaciones sobre la probabilidad en los libros de texto se describen en Batanero et al. (2024), cuyo objetivo fue sintetizar la investigación realizada desde el EOS sobre los contenidos de probabilidad en los libros de texto de diferentes niveles educativos y en Muñiz y Díaz (2018), quienes analizan las investigaciones relativas a la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. Ambos trabajos indican que, aunque el número de trabajos sobre el tema es creciente, todavía se requieren nuevas investigaciones.

MÉTODO

Muestra de textos y situaciones-problemas

Se analizaron todos los textos de ESO de dos editoriales completas (cursos 1º a 4º y dentro de éste, opciones A y B). En el análisis, se han considerado como situaciones-problemas todas las actividades que induzcan práctica matemática, sean ejemplos resueltos antes o después de introducir un concepto o procedimiento, o actividades que debe resolver el estudiante.

Tabla 1.
Número de actividades analizadas por curso y editorial

	Curso					
Editorial	1º	2º	3º	4ºA	4ºB	Total
Anaya	3	194	235	179	261	872
Santillana	111	115	101	236		563
Total	114	309	124	626	261	1435

Cuando una situación-problema consta de varios apartados, cada uno de ellos se ha considerado separadamente, pues cada consigna pide una actividad diferente al estudiante. El número total de situaciones-problemas analizadas en cada texto se presenta en la Tabla 1. Puesto que Santillana repite exactamente las mismas actividades en 4ªA y 4º B, no se han vuelto a codificar las actividades de 4ºB en esta editorial.

Análisis y categorías

Se ha utilizado el análisis de contenido (Zapico, 2007), que permite investigar la naturaleza del discurso en documentos escritos, como los libros de texto. Elegidas las lecciones con contenidos de probabilidad en cada libro, se consideró cada actividad como unidad de análisis. Con un proceso inductivo y cíclico, se realizó una lectura detallada, para dar sentido al análisis y relacionar con las categorías definidas. Se revisó la codificación sucesivamente para dar mayor fiabilidad a la codificación. Para clasificar los contextos de las situaciones-problemas se adoptó las categorías implementadas en PISA (OECD, 2019), que permiten clasificar los contextos del mundo cotidiano en que se desenvuelven los estudiantes. Adicionalmente, proponemos los juegos de azar, que surge con frecuencia a partir del análisis. A continuación se describen las categorías utilizadas.

C1. Personal: Se considera que el contexto del problema es personal cuando las situaciones-problemas describen un escenario que se pueden desarrollar en el área individual, familiar o amistosa del estudiantado. Es decir, se describen contextos cercanos a su experiencia, sobre temáticas cotidianas de su entorno inmediato. Un ejemplo para esta categoría aparece en la situación problema presentada en la Figura 1, sobre el signo del zodiaco del estudiante.

Figura 9

Ejemplo de contexto personal en 2º curso (Colera et al., 2023a, p.316)

3 Mi signo del zodiaco es leo. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona que va sentada a mi lado en el autobús sea también leo?

C2. Ocupacional: Corresponde a las situaciones-problemas enmarcadas en ambientes laborales de oficios o profesiones en ámbitos diversos, incluyendo datos de ventas, demandas, salario, empleo, producción y otras variables similares y que permiten familiarizar al estudiante con el mundo laboral. Un ejemplo se presenta en la Figura 2.

Figura 2

Ejemplo de contexto ocupacional en 2º curso (Colera et al., 2023a, p.323)

28 La tabla recoge las ventas de una agencia inmobiliaria durante el mes pasado.

€ →	MENOS DE 100 000 €	ENTRE 100 000 Y 300 000 €	MÁS DE 300 000 €
CASAS	1	2	5
PISOS	3	10	3

Según esos datos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima venta supere los trescientos mil euros?

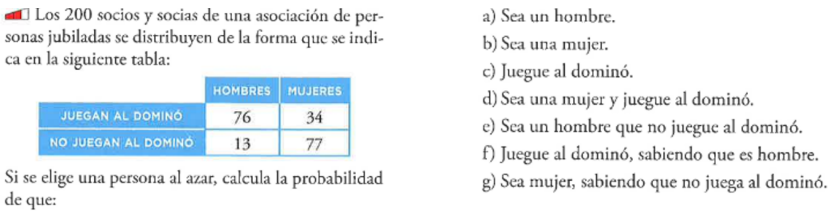
b) ¿Y de que sea un piso de menos de trescientos mil?

C3. Social: Son situaciones-problemas que se refieren a una comunidad más amplia que la personal del estudiante, a nivel local, nacional, global o aquellas a las que se puede acceder por los medios de comunicación. Un ejemplo es la reproducida en la Figura 3, en que se presenta una situación de probabilidad compuesta en el contexto de las aficiones de una sociedad de personas jubiladas.

C4. Científico: corresponde a situaciones-problemas donde se describe la aplicación interdisciplinar de las matemáticas a variedad de áreas de ciencia o tecnológicas. Puede también incluir problemas estrictamente matemáticos. Un ejemplo es el apartado d) de la Figura 4 a) sobre previsión meteorológica donde es habitual dar datos en términos de estadística o de probabilidad.

Figura 3

Ejemplo de contexto social en 4º curso opción A (Colera et al., 2023b, p.321)



Los 200 socios y socias de una asociación de personas jubiladas se distribuyen de la forma que se indica en la siguiente tabla:

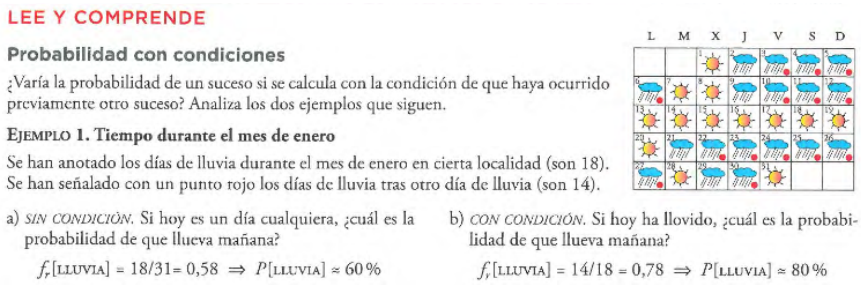
	HOMBRES	MUJERES
JUEGAN AL DOMINÓ	76	34
NO JUEGAN AL DOMINÓ	13	77

Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un hombre.
b) Sea una mujer.
c) Juegue al dominó.
d) Sea una mujer y juegue al dominó.
e) Sea un hombre que no juegue al dominó.
f) Juegue al dominó, sabiendo que es hombre.
g) Sea mujer, sabiendo que no juega al dominó.

Figura4

Ejemplo de contexto científico en 3º curso (Colera et al., 2023c, p.324)



LEE Y COMPRENDE

Probabilidad con condiciones

¿Varía la probabilidad de un suceso si se calcula con la condición de que haya ocurrido previamente otro suceso? Analiza los dos ejemplos que siguen.

EJEMPLO 1. Tiempo durante el mes de enero

Se han anotado los días de lluvia durante el mes de enero en cierta localidad (son 18). Se han señalado con un punto rojo los días de lluvia tras otro día de lluvia (son 14).

L M X J V S D

a) *SIN CONDICIÓN.* Si hoy es un día cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

$f_r[\text{LLUVIA}] = 18/31 = 0{,}58 \Rightarrow P[\text{LLUVIA}] \approx 60\,\%$

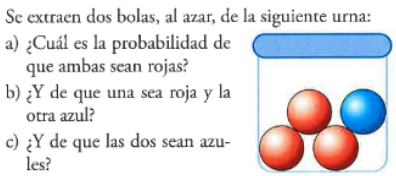
b) *CON CONDICIÓN.* Si hoy ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

$f_r[\text{LLUVIA}] = 14/18 = 0{,}78 \Rightarrow P[\text{LLUVIA}] \approx 80\,\%$

C5. Dispositivo que genera aleatoriedad (DA): A esta categoría, no contemplada en PISA, pertenecen situaciones-problemas que provienen del lanzamiento de dispositivos que generan aleatoriedad, como ruletas, dados, etc. Son contextos muy familiares para el estudiantado, quien ha utilizado algunos de estos dispositivos en sus juegos y se plantean sin especificar un contexto más que la experimentación (Ver Figura 5).

Figura 5

Ejemplo de contexto con dispositivo que genera aleatoriedad en 2º curso (Colera et al., 2023a, p.325)



Se extraen dos bolas, al azar, de la siguiente urna:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?
b) ¿Y de que una sea roja y la otra azul?
c) ¿Y de que las dos sean azules?

NOTA: ¿Te serviría un diagrama en árbol?

RESULTADOS

Los resultados se presentan en las Tablas 1 y 2.

Tabla 2

Frecuencia y porcentaje de contexto de las situaciones-problemas por curso en Anaya

	Curso											
	1º		*2º*		*3º*		*4ºA*		*4ºB*		*Total*	
Contexto	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*
C1. Personal	3	100	37	19,1	22	9,4	24	13,4	33	12,6	119	13,7
C2. Ocupacional			11	5,7	6	2,5	0	0,0	0	0,0	17	2,0
C3. Social			15	7,7	32	13,6	51	28,5	68	26,1	166	19,0
C4. Científico			8	4,1	15	6,4	1	0,6	5	1,9	29	3,3
C5. DA			123	63,4	160	68,1	103	57,5	153	58,6	539	61,8
Descontextualizadas									2	0,8	2	0,2
Total	3		194		235		179		261		872	

Hacemos notar, en primer lugar, que en Anaya no se incluye apenas situaciones-problemas de probabilidad en primer curso y que en Santillana no se diferencian las situaciones-problemas en las opciones A y B; aunque esta última observación no es tan grave como la anterior, considerando que los saberes sobre sentido estocástico en ambas opciones (A y B) son idénticos (MEFP, 2022). El contexto que aparece con más frecuencia es el relacionado con los dispositivos aleatorios, con una proporción global cercana a los 2/3 de las situaciones-problemas en Anaya y de casi la mitad en Santillana. También en Ortiz (2002; 2014) este fue el contexto más frecuente. Esta alta proporción se explica por el peso que se da al significado clásico de la probabilidad, pero impide mostrar todas las aplicaciones de la probabilidad y puede dar a creer a estudiantes y profesores que la probabilidad forma parte de la matemática recreativa. Una diferencia importante con los resultados del citado autor es que apenas se proponen problemas descontextualizados.

Tabla 2

Frecuencia y porcentaje de contexto de las situaciones-problemas por curso en Santillana

	Curso									
	1º		*2º*		*3º*		*4ºA y B*		*Total*	
Contexto	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*	*N*	*%*
C1. Personal	28	25,2	29	25,2	52	51,5	63	26,7	172	30,6
C2. Ocupacional	1	0,9	1	0,9			5	2,1	7	1,2
C3. Social	8	7,2	4	3,5	1	1,0	21	8,9	34	6,0
C4. Científico	5	4,5	7	6,1	2	2,0	15	6,4	29	5,2
C5. DA	63	56,8	73	63,4	44	43,5	104	44,1	284	50,4
Descontextualizadas	6	5,4	1	0,9	2	2,0	28	11,8	37	6,6
Total	111		115		101		236		563	

Las situaciones-problemas de tipo social constituyen en 19% en Anaya y 6,0% en Santillana, siendo las de tipo personal el 13,7% y 30,6% y las de tipo científico el 3,3% y 5,2% respectivamente. En Anaya las situaciones sociales son más frecuentes en 4º curso en las dos especialidades. Apenas se presentan contextos ocupacionales, lo que coincide con Díaz-Levicoy et al. (2019). Por último, aunque las situaciones descontextualizadas son más considerables en Santillana (en pequeño número), algunas se corresponden a la invención de problemas o promocionan el significado axiomático de la probabilidad.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio realizado para cumplir el objetivo de la investigación mostró que la distribución de los contextos en las situaciones-problemas no es uniforme en las editoriales analizadas, siendo el más utilizado los dispositivos aleatorios, enfatizando en exceso el significado clásico de la probabilidad, aunque el frecuencial se plantea en los decretos curriculares desde primer curso (MEFP, 2022). Se reducen las aplicaciones de la probabilidad en los contextos considerados en el informe PISA (OECD, 2019), mejor contemplados en Díaz-Levicoy et al., (2019) y Díaz-Levicoy y Roa (2014), pero peor en Ortiz (2002, 2014). Hay pocas diferencias al avanzar el curso, pero sí entre las editoriales, siendo las más notables, que Anaya apenas considera la probabilidad en primer curso y Santillana no plantea diferencia alguna entre las dos opciones (A y B) del cuarto curso (MEFP, 2022). Sería necesario disminuir el número de contextos basados en dispositivos aleatorios, para tener en cuenta los recomendados en el informe PISA, especialmente el científico, por la importancia recomendada en el currículo de proponer contextos STEM ligando ciencias, tecnología y matemáticas, así como para mostrar las aplicaciones de los significados frecuencial y subjetivos de la probabilidad, en que raramente los sucesos son equiprobables (Batanero y Borovcnik, 2016).

Aunque reconocemos la limitación de haber analizado únicamente dos editoriales y la consecuente necesidad de ampliar el estudio con nuevos textos, los resultados del análisis pueden informar al profesorado de la importancia del contexto al proponer situaciones-problemas de probabilidad a lo

largo de la ESO. También pueden ser utilizados por los escritores de libros de texto para mejorar sus propuestas didácticas sobre probabilidad.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER,UE. Beca de Doctorado de la ANID, Chile. Beca Folio: 72220183.

Referencias

Batanero, C. (2022). Training teachers to teach probability: A promising research area. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(3), 729-734. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00234-1

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Brill/Sense Publishers.

Batanero, C., Elgueda,, M. y Vera, O. (2024). La probabilidad en los libros de texto: investigación desde el enfoque ontosemiótico. En D. Díaz-Levicoy y A. Salcedo (Eds.), *Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística* (pp. 13-39). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Universidad Católica del Maule.

Cai, J. y Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in classroom. En R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all, Research in mathematics education* (pp. 115-145. Springer: https://doi. org/10.1007/978-3-031-18868-8_7.

Colera, J., Gaztelu I. y Colera R. (2023a). *Matemáticas Trimestre 3, 2 ESO*. ANAYA.

Colera, J., Oliveira M.J., Gaztelu I., Colera R y Aicardo A. (2023b) *Matemáticas A Trimestre 3, 4 ESO.* ANAYA.

Colera, J., Oliveira M.J., Gaztelu I., Colera R y Aicardo A. (2023c) *Matemáticas Trimestre 3, 3 ESO*. ANAYA.

Díaz-Levicoy, D., Ferrada, C., Salgado-Orellana, N. y Vásquez, C. (2019). Análisis de las actividades evaluativas sobre estadística y probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Premisa, 21*(80), 5-21.

Díaz-Levicoy, D. y Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica, 13*(1), 9-19.

Drisko, J. W. y Maschi, T. (2016). *Content analysis.* Oxford university press.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Gómez-Torres, E., Contreras, J. M. y Batanero, C. (2015). Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 73-87). Alicante: SEIEM. http://hdl.handle.net/10045/51378

Liljedahl, P. y Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education, 53*(4), 723-735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Ministerio de Educación y Ciencia (1975). *Decreto 160/1975, de 23 de enero, por el que se aprueba el Plan de Estudios del Bachillerato.* Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Autor.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 368-377). Gijón: SEIEM.

Muñiz, L. J. R. y Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer?. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14,* 65-81. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.218

Niss, M., y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited*. Educational Studies in Mathematics, 102,* 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

OECD (2019). *PISA 2018 Mathematics Framework.* OECD, https://doi.org/10.1787/13c8a22c-en

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503-511). SEIEM

Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., & Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal, 15*(2), 11-37. https://doi.org/10.52041/serj.v15i2.238

Qi, C., Fan, L., Liu, J., Liu, Q. y Dong, L. (Eds.) (2025). *Recent advances in mathematics textbook research and development: Proceedings of the 4th International Conference on Mathematics Textbook Research and Development.* Springer.

Rezat, S., Fan, L. y Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1189-1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Rosales, E. M., Rodríguez, P. y Romero, M. (2020). Conocimiento, demanda cognitiva y contextos en la evaluación de la alfabetización científica en PISA. *Eureka 17(*2), 2302. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2020.v17.i2.2302.

Sanmartí, N. y Márquez, C. (2017). Aprendizaje de las ciencias basado en proyectos: del contexto a la acción. *Ápice, 1*(1), 3-16.

Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM Mathematics Education 56,* 211–222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8

She, H. C., Stacey, K. y Schmidt, W. H. (2018). Science and mathematics literacy: PISA for better school education. International *Journal of Science and Mathematics Education, 16*(1), 1-5. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9911-1

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: An overview. *ZDM Mathematics Education, 50*(5), 765-771. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0979-4

Sriraman, B. y Chernoff, E. J. (2020). Probabilistic and statistical thinking. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 675-681). Springer.

Toh, T. L., Santos-Trigo, M., Chua, P. H., Abdullah, N. A. y Zhang, D. (2023)*. Problem posing and problem solving in mathematics education: International research and practice trends.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0.

Vásquez, C. y Alsina. A. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, 19(*2), 441-462.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. et al. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM Mathematics Education 52*, 1–16 https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Zapata-Cardona, L. (2023). The role of contexts in supporting early statistical reasoning in data modeling. *Statistics Education Research Journal*, *22*(2), 5-5. https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.448

CARACTERIZACIÓN DE PERFILES MOTIVACIONALES SOBRE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS Y SOBRE EL USO DE IA EN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA

Characterization of motivational profiles on problem posing and on AI use in pre-service elementary school teachers

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J.

Universidad de La Laguna

Resumen

Este estudio explora posibles configuraciones en los perfiles motivacionales de 175 futuros maestros de primaria en relación con la formulación de problemas matemáticos (FP) y el uso de inteligencia artificial (IA) generativa. Para ello, se consideran sus percepciones de autoeficacia, utilidad y costes al enfrentar cada una de estas dos prácticas. Utilizando el cuestionario ForPro-IA y un análisis de clusterización mediante el algoritmo k-medias con distancia euclídea, se identificaron tres perfiles motivacionales para la FP y cuatro perfiles para la IA generativa. Como aporte adicional, se propone diseñar acciones formativas grupales integrando participantes de cada perfil para favorecer el desarrollo de disposiciones más favorables hacia ambas prácticas.

Palabras clave: *inteligencia artificial, formulación de problemas, creencias motivacionales.*

Abstract

This study explores possible configurations in the motivational profiles of 175 prospective elementary school teachers related to mathematical problem posing (PP) and the use of generative artificial intelligence (GenAI). For this purpose, their perceptions of self-efficacy, usefulness, and costs when facing each of these two practices are considered. Using the ForPro-IA questionnaire and a clustering analysis with the k-means algorithm, three motivational profiles were identified for PP and four profiles for GenAI. As an additional contribution, it is proposed to design group training actions integrating participants of each profile to favor the development of more favorable dispositions towards both practices.

Keywords: *artificial intelligence, problem posing, motivational beliefs*

INTRODUCCIÓN

Los docentes recurren con frecuencia a libros de texto para seleccionar problemas, aunque también los crean o adaptan en función de las necesidades de sus estudiantes (Son y Diletti, 2017). En estos procesos de formulación de problemas (FP), la inteligencia artificial (IA) generativa puede convertirse en un aliado (Kim et al., 2025). Factores como la formación previa del docente, su experiencia profesional o sus creencias influyen en su manera de relacionarse con los recursos (Lupiáñez et al., 2024). Entre las creencias que intervienen se encuentran las creencias motivacionales (Giaconi et al., 2018), que se asientan en aspectos como la percepción de autoeficacia, de utilidad o de los costes asociados a enfrentar una tarea concreta (Bandura, 1997; Eccles y Wigfield, 2002). Así, el compromiso y la disposición a adoptar tanto la FP como el uso de IA generativa e integrarlas en el aula dependerán de las creencias motivacionales del docente acerca de estas dos prácticas. En el caso de la FP, la investigación sobre creencias motivacionales es todavía limitada, aunque se han identificado factores que vinculan la autoeficacia con la calidad de los problemas formulados

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. (2025). Caracterización de perfiles motivacionales sobre la formulación de problemas y sobre el uso de IA en futuros maestros de primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

(Krawitz et al., 2025). Respecto al uso de IA generativa, los estudios se centran en su aplicación para la FP (Embid y Perdomo-Díaz, 2024; Kim et al., 2025), con escasa atención al dominio afectivo. El objetivo de este trabajo es estudiar los perfiles motivacionales de futuros maestros de educación primaria en relación con la FP y el uso de IA generativa. Esto permite profundizar en los resultados obtenidos en un trabajo previo sobre las creencias motivacionales de maestros en formación acerca de estas prácticas (Embid et al, aceptado).

MARCO CONCEPTUAL

El dominio afectivo engloba el conjunto de creencias, actitudes y emociones de un individuo (McLeod, 1989). Cada una de estas dimensiones constituye a su vez un subdominio con una complejidad propia. Dentro de este ámbito, las creencias motivacionales representan un tipo específico de creencias vinculadas a la percepción que el individuo tiene sobre distintos aspectos de una tarea, especialmente en relación con su autoeficacia, la utilidad que le atribuye y los costes que percibe al realizarla (Giaconi et al., 2018).

Nuestra investigación se articula en dos marcos teóricos complementarios que guían la conceptualización de la autoeficacia, la utilidad y los costes percibidos: la Teoría de Expectativa-Valor (Eccles y Wigfield, 2002) y la Teoría Social Cognitiva (Bandura, 1997). Desde la Teoría Social Cognitiva, la autoeficacia se entiende como la confianza en la propia capacidad para ejecutar una tarea con éxito (Bandura, 1997). Por su parte, la Teoría de Expectativa-Valor define la utilidad como el valor asignado a una tarea en función de su relevancia para alcanzar metas personales o profesionales, y los costes percibidos como las posibles pérdidas asociadas a la realización de dicha tarea, tales como el esfuerzo requerido, el tiempo invertido o el riesgo de fracaso (Eccles y Wigfield, 2002). Estos tres componentes —autoeficacia, utilidad y costes percibidos— interactúan entre sí y condicionan la disposición del sujeto a implicarse en tareas concretas. En el caso de nuestro estudio, dichas tareas son la formulación de problemas matemáticos y el uso de herramientas de inteligencia artificial generativa. Así, las decisiones profesionales de los futuros docentes pueden explicarse a través de dichas componentes que forman parte de sus creencias motivacionales (Giaconi et al., 2018). Por ejemplo, una elevada autoeficacia suele relacionarse con una mayor persistencia frente a los desafíos; una alta percepción de utilidad actúa como incentivo para la acción; y unos costes percibidos elevados pueden actuar como barreras inhibitorias (Bandura, 1997; Eccles y Wigfield, 2002). Así, características asociadas a una tarea, como la utilidad percibida, pueden adquirir un valor positivo, y otras como los costes percibidos, negativo (Eccles y Wigfield, 2002).

Las creencias motivacionales constituyen el núcleo de nuestro análisis y nos permiten identificar distintos perfiles motivacionales en función de los tres componentes teóricos definidos.

OBJETIVOS

A partir de lo anterior, se establecen los siguientes objetivos específicos para esta investigación:

1. Identificar y caracterizar perfiles motivacionales de futuros docentes de educación primaria en función de sus percepciones de autoeficacia, utilidad y coste percibido respecto a la formulación de problemas matemáticos.
2. Identificar y caracterizar perfiles motivacionales de futuros docentes de educación primaria en función de sus percepciones de autoeficacia, utilidad y coste percibido respecto a la aplicación de inteligencia artificial generativa en educación matemática.

METODOLOGÍA

Presentamos un estudio descriptivo, exploratorio, no experimental, en el que empleamos métodos cuantitativos de análisis (Creswell, 2012).

Participantes e instrumento

La investigación se llevó a cabo con una muestra por conveniencia no probabilística, conformada por 175 alumnos de último año del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. La formación inicial de los participantes en formulación de problemas se circunscribe a un taller de 4 horas impartido durante el grado. En relación con el uso de la inteligencia artificial, no se tiene constancia de que estos alumnos hayan obtenido capacitación formal, ya sea para un uso general o particular en la enseñanza de las matemáticas. La información aportada por los participantes indica que el 56,6% usa ChatGPT al menos una vez por semana y el 18,9% a diario.

Los participantes respondieron voluntariamente al cuestionario ForPro-IA, instrumento que presenta evidencias de validez para su uso en esta muestra (Embid et al., aceptado). Este cuestionario ad hoc se diseñó en el marco de un proyecto aprobado por el comité de ética de la universidad. Los participantes firmaron un consentimiento informado que garantizaba la confidencialidad de sus respuestas y su uso exclusivo con fines de investigación. El estudio se centra en las respuestas de los futuros docentes a una parte de dicho cuestionario que abarca 6 dimensiones (Tabla 1), tres relacionadas con la formulación de problemas (AUFP, CPFP, UTFP) y las otras tres con la aplicación de inteligencia artificial en educación matemática (AUIA, CPIA, UTIA). Las dimensiones se corresponden con la autoeficacia (AU), los costos percibidos (CP) y la utilidad (UT). Cada ítem se evaluó con una escala Likert (1 = totalmente en desacuerdo, 2 = en desacuerdo, 3 = de acuerdo y 4 = totalmente de acuerdo).

Tabla 3

Ítems con evidencias de validez de las seis dimensiones del cuestionario ForPro-IA

	Ítem	Descripción
AUFP	-	Considero que sabría formular problemas de primaria a partir de...
	1	datos numéricos.
	2	operaciones.
	3	contextos reales o imaginarios.
	4	viñetas o imágenes.
	5	otros problemas.
CPFP	-	Para un docente, formular problemas matemáticos de educación primaria...
	1	es muy difícil.
	2	supone demasiado esfuerzo.
	3	requiere mucho tiempo.
	4	genera inquietud por miedo a fracasar.
UTFP	-	Formular problemas matemáticos es útil para...
	1	conectar ideas matemáticas.
	2	desarrollar el razonamiento matemático.
	3	detectar dificultades de los estudiantes.
	4	trabajar dificultades de aprendizaje.
	5	atender a la diversidad del aula.
	6	trabajar las emociones de los estudiantes en relación con las matemáticas.
AUIA	-	Considero que sabría usar chatbots para...
	2	resolver dudas sobre conceptos matemáticos.
	3	resolver ejercicios de matemáticas.
	4	resolver problemas matemáticos.
	5	comprobar soluciones de problemas matemáticos.
	6	formulación de problemas matemáticos.
CPIA	-	Para un docente de educación primaria, usar chatbots con fines educativos en matemáticas...
	1	es muy difícil.
	2	supone demasiado esfuerzo.
	3	requiere mucho tiempo.

UTIA	-	En la formulación de problemas matemáticos para educación primaria, los chatbots son útiles para...
	3	incluir contextos personalizados.
	4	atender a los objetivos del currículo.
	5	elaborar adaptaciones a distintos niveles.
	6	desarrollar el razonamiento matemático.

Nota. La numeración no es correlativa por exclusión de ítems no validados (Embid et al., aceptado).

Proceso de análisis de los datos

Para identificar los perfiles motivacionales, se utilizaron seis variables continuas construidas a partir del promedio de las puntuaciones de los ítems que componen cada una de las dimensiones evaluadas (Embid et al., aceptado). Los perfiles se generaron mediante la creación de clústeres con el método k-medias (*k-means*) y distancia euclídea (Flynt y Dean, 2016). El número óptimo de clústeres, con k entre 2 y 6, se determinó siguiendo la regla de la mayoría (*majority rule*) propuesta por Charrad et al. (2014), contrastando los valores más frecuentes entre los índices evaluados por el paquete NbCluster en R 4.4.2. Para discriminar entre soluciones con diferente número de clústeres, se comparó la suma total de cuadrados intraclúster (*tot.withinss*), donde valores más bajos indican más similitud entre individuos dentro de un clúster, y la suma de cuadrados interclúster *(betweenss*), donde valores más altos reflejan una mayor diferenciación entre clústeres (Flynt y Dean, 2016).

Por último, se aplicó la prueba no paramétrica ANOVA de Kruskal-Wallis para comparar las puntuaciones por dimensión entre los perfiles identificados, con un nivel de significación de 0,05. El tamaño del efecto en la comparación (ε^2) se interpretó según los criterios de Cohen (1988), considerando efectos pequeños ($0{,}01 \leq \varepsilon^2 < 0{,}06$), moderados ($0{,}06 \leq \varepsilon^2 < 0.14$) y grandes ($\varepsilon^2 \geq 0{,}14$). Los análisis y gráficos estadísticos, así como la descripción detallada de los ítems para su estudio, se llevaron a cabo utilizando el software Jamovi en su versión 2.6.26 y Excel versión 2502.

RESULTADOS

Perfiles motivacionales respecto de la formulación de problemas matemáticos

Para las tres dimensiones asociadas a la FP, los índices evaluados por NbCluster sugirieron soluciones con 3 y 2 clústeres (35% y 30%, respectivamente). La solución con 3 clústeres mostró una mayor cohesión interna (*tot.withinss* = 72,54) y una mejor separación entre grupos (*betweenss* = 54,06) que la solución con 2 clústeres (*tot.withinss* = 88,07; *betweenss* = 38,52), por lo que se eligió como solución óptima. Estos tres perfiles mostraron diferencias significativas en las tres dimensiones evaluadas, con efectos grandes en todos los casos (Tabla 2).

Tabla 2

Perfiles identificados en las dimensiones de formulación de problemas

	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	χ^2 (gl)	p	ε^2
AUFP	3,50 (0,40)	3,17 (0,36)	2,97 (0,46)	39,0 (2)	<0,001	0,224
CPFP	1,55 (0,37)	2,54 (0,39)	2,42 (0,37)	87,9 (2)	<0,001	0,505
UTFP	3,45 (0,38)	3,68 (0,23)	2,91 (0,34)	104,3 (2)	<0,001	0,599

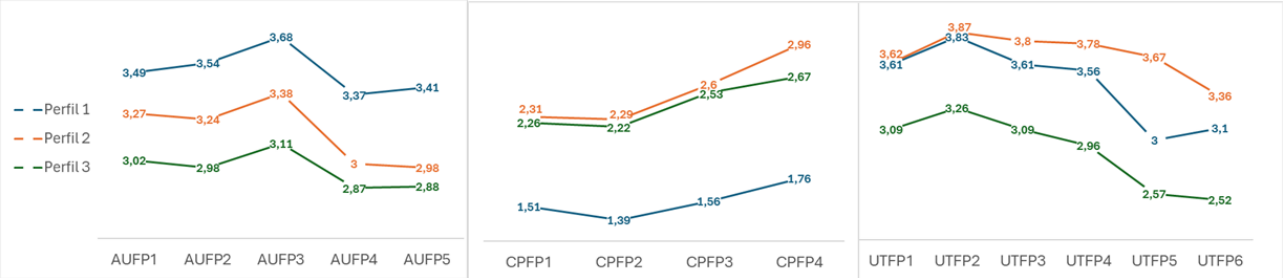
Nota. Se presenta la media y la desviación estándar (entre paréntesis) para cada dimensión.

El Perfil 1 (n=41) se caracteriza por presentar las puntuaciones más elevadas y homogéneas en relación con la autoeficacia en formulación de problemas y las más bajas en cuanto al coste percibido (Figura 1). En relación con la percepción de utilidad, las puntuaciones en varios de los ítems son similares al Perfil 2. Los participantes que componen el Perfil 1, asignan una mayor puntuación a los ítems de autoeficacia para formular problemas en contextos reales ($M_{AUFP3} = 3{,}68$, $DE_{AUFP3} = 0{,}47$) y a la utilidad percibida para desarrollar el razonamiento matemático ($M_{UTFP2} = 3{,}83$, $DE_{UTFP2} = 0{,}47$).

Por otro lado, muestran la menor percepción de costes asociados a la FP, especialmente en relación con el esfuerzo (M_{CPFP2} = 1,39, DE_{UTFP2}= 0,49).

Figura 1

Promedios por ítems según los perfiles identificados en las dimensiones de formulación de problemas



Los participantes del Perfil 2 (n=45) presentan puntuaciones más elevadas y homogéneas en relación con la percepción de utilidad de la FP, valorando especialmente la utilidad para detectar dificultades de aprendizaje (M_{UTFP3} = 3,80, DE_{UTFP3}= 0,46) y trabajarlas (M_{UTFP4} = 3,78, DE_{UTFP4}= 0,47). También son quienes perciben un mayor coste, especialmente en cuanto al tiempo que requiere (M_{CPFP3} = 2,60, DE_{CPFP3}= 0,58). En relación con su percepción de autoeficacia, se mantienen en un nivel intermedio entre los otros dos perfiles.

Por último, el Perfil 3 (n=89) se caracteriza por una percepción inferior de autoeficacia y de utilidad de la FP y una percepción casi tan alta del coste asociado como el Perfil 2. Las puntuaciones más bajas se dan en los ítems que evalúan la autoeficacia para formular problemas a partir de viñetas o imágenes (M_{AUFP4} = 2,87, DE_{AUFP4}= 0,64) y a partir de otros problemas (M_{AUFP5} = 2,88, DE_{AUFP5}= 0,62), así como los ítems sobre la utilidad para atender a la diversidad (M_{UTFP5} = 2,57, DE_{UTFP5}= 0,66) y para trabajar emociones en relación con las matemáticas (M_{UTFP6} = 2,52, DE_{UTFP6}= 0,69).

Perfiles motivacionales respecto del uso de inteligencia artificial generativa

En el caso de la IA, los índices calculados por NbCluster nos sugirieron soluciones con 2 clústeres (30,4%) y 4 clústeres (26,1%). La solución con 4 clústeres presentó la mayor diferenciación entre grupos (*betweenss* = 65,28 vs *betweenss* = 58,66) y la mayor similitud entre individuos dentro de un mismo grupo (*tot.withinss*= 61,32 vs *tot.withinss*= 123,22) por lo que se eligió como solución óptima. Estos perfiles mostraron diferencias significativas en dos de las tres dimensiones, autoeficacia y costes, con efectos moderados en ambas (Tabla 3).

Tabla 3

Perfiles identificados en las dimensiones de inteligencia artificial generativa

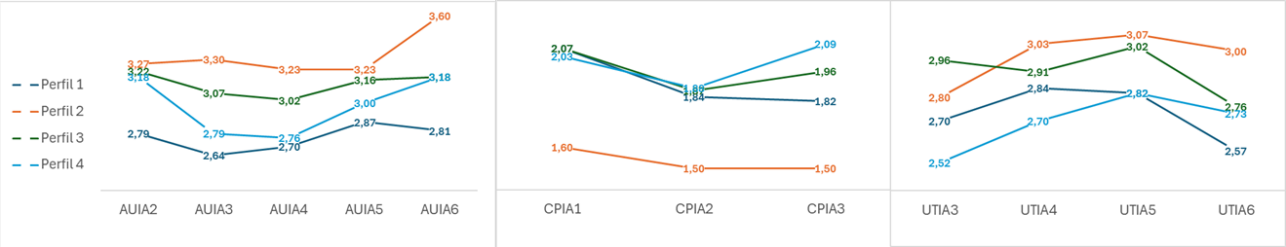
	Perfil 1	Perfil 2	Perfil 3	Perfil 4	χ^2 (gl)	p	ε^2
AUIA	2,76 (0,65)	3,33 (0,65)	3,13 (0,64)	2,98 (0,50)	15,04 (3)	0,002*	0,0865
CPIA	1,91 (0,48)	1,53 (0,50)	1,96 (0,58)	2,00 (0,54)	14,45 (3)	0,002*	0,0830
UTIA	2,73 (0,44)	2,98 (0,60)	2,91 (0,68)	2,69 (0,60)	6,44 (3)	0,092	0,0370

Nota. Se presenta la media y la desviación estándar (entre paréntesis) para cada dimensión.

La principal característica que diferencia al Perfil 1 (n=67) del resto es que presenta las puntuaciones más bajas en relación con la autoeficacia en el uso de la IA (Figura 2), estando la mayor diferencia con el resto de los perfiles en la autoeficacia para comprobar soluciones de problemas matemáticos (M_{AUIA2} = 2,79, DE_{AUIA2} = 0,75) y para formular problemas matemáticos (M_{AUIAA6} = 2,81, DE_{AUIA6} = 0,74).

Figura 2

Promedios por ítems según los perfiles identificados en las dimensiones de inteligencia artificial



El Perfil 2 (n=30) presenta puntuaciones ligeramente favorables al resto de perfiles en la mayoría de los ítems, destacando el referido a autoeficacia en el uso de IA para la formulación de problemas (M_{AUIA6} = 3,60, DE_{AUIA6} = 0,50). Los costes percibidos son los más bajos entre los perfiles, con el mismo promedio de puntuaciones en esfuerzo (M_{CPIA2} = 1,50, DE_{CPIA2} = 0,51) y tiempo requerido (M_{CPIA3} = 1,50, DE_{CPIA3} = 0,57).

El Perfil 3 (n=45) es cercano al Perfil 2 en términos de autoeficacia y utilidad, pero sus integrantes asocian un coste mayor al uso de la IA. El coste promedio asociado a la dificultad coincide con el de los participantes del perfil 1, siendo el más elevado (M_{CPIA1} = 2,07, DE_{CPIA1} = 0,80). También el promedio de percepción de utilidad para incluir contextos personalizados al formular problemas es el más elevado entre los perfiles identificados (M_{UTIA3} = 2,96, DE_{UTIA3} = 0,82).

Finalmente, el Perfil 4 (n=33) se distingue del resto por ser el que presenta las puntuaciones más bajas en los ítems de utilidad, destacando la utilidad para incluir contextos personalizados (M_{UTIA3} = 2,52, DE_{UTIA3}= 0,83) y atender a los objetivos del currículo (M_{UTIA4} = 2,70, DE_{UTIA4}= 0,77). También presenta la percepción más alta en relación con el promedio de coste en el tiempo que requiere el uso de chatbots con fines educativos en matemáticas (M_{CPIA3} = 2,09, DE_{CPIA3} = 0,68).

REFLEXIONES FINALES

Este estudio ha permitido identificar perfiles motivacionales a partir de las percepciones de autoeficacia, de utilidad y de los costes asociados a formular problemas y usar inteligencia artificial de 175 futuros docentes de primaria. La información obtenida puede orientar el diseño de programas formativos donde se tengan en cuenta las características afectivas y particularidades de estos futuros docentes a la hora de relacionarse con cualquiera de estas dos prácticas.

Respecto a la práctica de formulación de problemas (objetivo 1), se identificaron tres perfiles motivacionales. El Perfil 1 destaca por puntuaciones favorables en todos los aspectos, mostrando una alta percepción de autoeficacia y utilidad de la formulación de problemas, junto con una baja percepción de los costes asociados a esta práctica. Estos resultados indican que los participantes de este perfil tienen una visión muy positiva de la formulación de problemas, lo que podría facilitar su adopción y sostenibilidad en el futuro, como sugiere el modelo de Eccles y Wigfield (2002). Sin embargo, son el grupo menos numeroso de los tres, componiendo un 23,43% de la muestra. El Perfil 2, aunque también percibe la formulación de problemas como altamente útil, muestra una mayor percepción de los costes, especialmente en relación con el tiempo y la ansiedad por el fracaso. Esto podría implicar un desafío en términos de perseverancia, ya que la relación coste-beneficio no necesariamente favorece el mantenimiento de la práctica. La autoeficacia presenta valores intermedios, sin ser tan altos como los del Perfil 1. Por último, el Perfil 3, que representa a casi la mitad de los futuros maestros de primaria que participaron en este estudio, se caracteriza por tener las puntuaciones más bajas en utilidad y autoeficacia. Este grupo, en particular, podría ser el más susceptible a la desmotivación, dado que presenta la menor confianza en su capacidad para formular problemas matemáticos, la menor utilidad percibida y los costes asociados son moderados (Bandura,

1997; Eccles y Wigfield, 2002). Desde una perspectiva formativa, la identificación de estos perfiles permite diseñar estrategias que fomenten la interacción entre futuros docentes con diferentes niveles de motivación (Krawitz et al., 2025). Una opción es promover el trabajo colaborativo en grupos heterogéneos, integrando participantes de cada perfil para favorecer el desarrollo de disposiciones más favorables hacia la FP. Los participantes del Perfil 1 pueden transmitir sus percepciones de autoeficacia, utilidad y costes a quienes pudiesen presentar menor predisposición, el Perfil 3. A su vez, los integrantes del Perfil 2 pueden sensibilizar a los integrantes de los otros dos perfiles sobre la importancia del esfuerzo y la perseverancia en esta práctica. En este sentido, reforzar el dominio afectivo en la formación docente puede ayudar a consolidar disposiciones favorables hacia las matemáticas, como destacan Marbán et al. (2020).

En cuanto al uso de inteligencia artificial (objetivo 2), los resultados sugieren la existencia de cuatro perfiles con diferencias significativas en autoeficacia y costes percibidos, aunque no en utilidad (Tabla 3). El Perfil 2 reúne a los futuros maestros de primaria con mayor confianza en sus capacidades, mayor percepción de utilidad y menor percepción de costes asociados. En el extremo opuesto, el Perfil 4 presenta los valores más bajos en utilidad, lo que podría derivar en una mayor reticencia hacia el uso de IA generativa. Los Perfiles 1 y 3, que representan a la mayoría de la muestra, reflejan posturas intermedias. El Perfil 1 muestra una autoeficacia y utilidad moderadas, con costes percibidos en un nivel intermedio, mientras que el Perfil 3 se distingue por una percepción de utilidad relativamente alta, acompañada de una autoeficacia moderada y una percepción variable de los costes. La distribución de los perfiles sugiere que la mayoría de los participantes mantiene una postura cautelosa frente a la IA, posiblemente debido a experiencias previas que generan dudas sobre su eficacia o fiabilidad (Embid y Perdomo-Díaz, 2024). Desde la formación inicial, podría fomentarse una percepción más positiva proporcionando experiencias guiadas y estructuradas que permitan explorar el potencial de la IA, tal como proponen Krawitz et al. (2025). Además, el trabajo colaborativo entre participantes con diferentes perfiles podría facilitar la integración gradual de estas herramientas, especialmente si se refuerzan los beneficios asociados a su uso para la personalización del aprendizaje y la atención a la diversidad.

Esta investigación se suma a otras que manifiestan la necesidad de diseñar tareas formativas que permitan desarrollar habilidades de formulación de problemas (Chico et al., 2022; Leavy y Hourigan, 2022), aportando una reflexión sobre el trabajo colaborativo entre perfiles motivacionales opuestos y la posible incorporación de inteligencia artificial en el proceso. Sin embargo, existen limitaciones metodológicas que afectan el alcance de los resultados. Entre estas limitaciones se encuentra el uso de la escala Likert de cuatro puntos, que restringe la captación de matices en las respuestas, o la elección del método k-medias para la formación de clústeres, que presenta sensibilidad a valores extremos (Charrad et al., 2014). También el tamaño y las características específicas de la muestra a la que se aplicó el cuestionario ForPro-IA (Embid et al., aceptado). Además, las respuestas en cuestionarios autorreportados pueden estar sesgadas por deseabilidad social, una tendencia documentada en estudios previos (Woolfolk Hoy et al., 2009). Futuras investigaciones deberían incorporar variables adicionales para una caracterización más precisa de los perfiles motivacionales. Esto permitiría el refinamiento del instrumento de medición, mejorando el análisis de creencias motivacionales en la formación inicial docente en FP e IA generativa.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto PID2022-139007NB-I00 y al contrato predoctoral PREP2022-000959 financiados por MCIN/AEI /10.13039/501100011033 /FEDER, UE y FSE+.

Referencias

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* Nueva York, W. H. Freeman.

Charrad, M., Ghazzali, N., Boiteau, V. y Niknafs, A. (2014). NbClust: An R Package for Determining the Relevant Number of Clusters in a Data Set. *Journal of Statistical Software, 61*(6), 1–36. https://doi.org/10.18637/jss.v061.i06

Chico, J., Montes, M. y Badillo, E. (2022). Transformaciones de la información en la formulación de problemas: una mirada hacia los futuros maestros. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 219-227). SEIEM.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences.* Routledge.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson.

Eccles, J. S. y Wigfield, A. (2002). Motivational Beliefs, Values, and Goals. *Annual Review of Psychology, 53*, 109-132. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153

Embid, S. y Perdomo-Díaz, J. (2024). Evaluación del potencial de distintos chatbots para la formulación de problemas matemáticos. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, Vol. XVI* (pp. 41-58).

Embid, S., Perdomo-Díaz, J. y Giaconi, V. (aceptado). Formulación de problemas y uso de IA: Creencias motivacionales en futuros docentes de primaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática*

Flynt, A. y Dean, N. (2016). A Survey of Popular R Packages for Cluster Analysis. *Journal of Educational and Behavioral Statistics, 41*(2), 205-225. https://doi.org/10.3102/1076998616631743

Giaconi, V., Perdomo-Díaz, J., Cerda, G. y Saadati, F. (2018). Prácticas docentes, autoeficacia y valor en relación con la resolución de problemas de matemáticas: Diseño y validación de un cuestionario. *Enseñanza de las ciencias, 36*(3). https://doi.org/10.5565/REV/ENSCIENCIAS.2351

Kim, Y. R., Park, M. S. y Joung, E. (2025). Exploring the integration of artificial intelligence in math education: Preservice Teachers' experiences and reflections on problem-posing activities with ChatGPT. *School Science and Mathematics*, 1–15. https://doi.org/10.1111/ssm.18336

Krawitz, J., Schukajlow, S. y Hartmann, L. (2025). Does problem posing affect self-efficacy, task value, and performance in mathematical modelling? *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-025-10385-1

Leavy, A. y Hourigan, M. (2022). The Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE): Supporting Teachers to Evaluate and Select Problems for Use in Elementary Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 111*(1), 147-176. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10155-3

Lupiáñez, J. L., Olivares, D. y Segovia, I. (2024). Examining the role played by resources, goals and orientations in primary teachers' decision-making for problem-solving lesson plans. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1153–1167. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01614-7

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, *18*, 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, Attitudes, and Emotions: New Views of Affect in Mathematics Education. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* (pp. 245-258). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17

Son, J. W. y Diletti, J. (2017). What Can We Learn from Textbook Analysis? En J.-W. Son, T. Watanabe y J.-J. Lo (Eds.), *What Matters? Research Trends in International Comparative Studies in Mathematics Education* (pp. 3-32). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51187-0_1

Woolfolk-Hoy, A., Hoy, W. K. y Davis, H. A. (2009). Teachers' self-efficacy beliefs. En K. R. Wentzel y A. Wigfield (eds.), *Handbook of motivation in school* (pp. 627-653). Routledge.

USO DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE INTERDISCIPLINAR

Use of didactic suitability criteria in an interdisciplinary learning situation

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Breda, A., Font, V., Vanegas, Y.

Universitat de Barcelona

Resumen

Se presenta un estudio sobre los criterios que manejan docentes de disciplinas no matemáticas para valorar una situación de aprendizaje interdisciplinar que incluye matemáticas y cómo se relacionan con los Criterios de Idoneidad Didáctica del Enfoque Ontosemiótico. Para ello se implementó una situación de aprendizaje que promueve el uso de la indagación y la modelización matemática en un contexto histórico-arqueológico, realista y auténtico, e incluye contenidos de los currículos de ciencias sociales, física y química, y tecnología. Se realizó un grupo focal donde los docentes valoraron la implementación. Los resultados indican que los criterios que usaban los docentes se podían relacionar con diversos de los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica. Asimismo, se identificaron algunos aspectos específicos de las situaciones de aprendizaje interdisciplinares que actualmente no están contemplados en los Criterios de Idoneidad Didáctica.

Palabras clave: situación de aprendizaje interdisciplinar, criterios de idoneidad didáctica, indagación, modelización matemática.

Abstract

We present a study on the criteria that teachers from non-mathematical disciplines use to assess an interdisciplinary learning situation and how these criteria are related to the Didactic Suitability Criteria of the Ontosemiotic Approach. To this end, a learning situation was implemented, promoting the use of inquiry and mathematical modelling in a historical-archaeological, real and authentic context, also involving content from the curricula of social sciences, physics and chemistry, and technology. A focus group meeting was held where the teachers evaluate the implementation. The results show that the criteria used by the teachers could be related to various Didactic Suitability Criteria components. Additionally, some specific aspects of interdisciplinary learning situation that are currently not considered in the Didactic Suitability Criteria were identified.

Keywords: *interdisciplinary learning situation, didactic suitability criteria, inquiry, mathematical modelling.*

INTRODUCCIÓN

Son diversos los estudios que señalan los beneficios de la implementación en las aulas de situaciones de aprendizaje interdisciplinar, destacando especialmente el protagonismo que los alumnos adquieren en este tipo de procesos de enseñanza-aprendizaje, donde la situación les exige poner en práctica los conocimientos correspondientes a distintas materias en un contexto real para la resolución de problemas concretos (Macancela-Coronel et al., 2020; Medina-Nicolalde y Tapia-Calvopiña, 2017). Estos beneficios han sido recogidos por algunas de las recientes reformas de los currículos educativos en las etapas de educación primaria y secundaria, tal como ocurre con el currículo educativo de Catalunya (Generalitat de Catalunya, 2022).

Teniendo en cuenta este contexto y la tendencia educativa en aumento hacia la implementación de situaciones de aprendizaje interdisciplinares, surge la necesidad en la didáctica de las matemáticas de

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Breda, A., Font, V. y Vanegas, Y. (2025). Uso de los criterios de idoneidad didáctica en una situación de aprendizaje interdisciplinar. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

desarrollar nuevas herramientas que faciliten el diseño y la valoración de este tipo de situaciones de aprendizaje cuando incluyan contenidos matemáticos. De esta manera se podrá garantizar la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas cuando éstos se dan en el contexto del aprendizaje interdisciplinar. Atendiendo a esta necesidad, el presente estudio se centra en identificar qué criterios manejan los docentes de especialidades distintas a las matemáticas que han participado en la implementación de una situación de aprendizaje interdisciplinar y estudiar cómo se relacionan (o no) con los Criterios de Idoneidad Didáctica del Enfoque Onto-Semiótico (CID). Los CID son una herramienta útil para el diseño y la valoración de situaciones de aprendizaje de las matemáticas, pero ¿cómo funciona para la valoración de las matemáticas en una situación interdisciplinar?

Los objetivos que plantea la investigación son: (1) identificar los criterios utilizados por docentes de especialidades distintas a las matemáticas para valorar una tarea interdisciplinar que hace uso de la indagación y modelización matemáticas; (2) estudiar cómo se relacionan los criterios identificados en el primer objetivo con los criterios de idoneidad didáctica.

MARCO TEÓRICO

Criterios de idoneidad didáctica

El Enfoque Onto-Semiótico (EOS), que parte de una perspectiva consensual, propone los denominados Criterios de Idoneidad Didáctica. Éstos constituyen pautas de actuación para diseñar, valorar y mejorar actividades de aprendizaje con alta idoneidad didáctica, noción que "responde a interrogantes relacionados con qué criterios seguir en el diseño de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática del alumnado y qué cambios realizar para alcanzar metas de aprendizaje superiores" (Breda, Font, Lima, et al., 2018, p. 163).

Los CID son un constructo que surge de los consensos existentes en la comunidad educativa sobre cómo debería ser una buena enseñanza de las matemáticas. Por tanto, se ha observado en numerosos casos que docentes que no han sido formados previamente en el uso de los CID reflexionan sobre su propia práctica docente usándolos de manera implícita (Breda, Font, y Pino-Fan, 2018). Puede decirse, entonces, que los CID son criterios que orientan la práctica del profesorado, pudiendo usarse a priori (para diseñar una tarea) o a posteriori (para valorar la implementación de una tarea) y que encajan con lo que los docentes entienden, de manera intuitiva y guiados por su experiencia profesional, como una buena práctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Los CID valoran la idoneidad didáctica de una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas teniendo en cuenta seis aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, poniendo especial énfasis en el equilibrio entre ellos al diseñar una secuencia didáctica: criterio de idoneidad epistémica (que las matemáticas que se enseñan sean de calidad), criterio de idoneidad cognitiva (que los conceptos matemáticos sean significativos para el alumnado y adecuados a sus conocimientos previos), criterio de idoneidad interaccional (que la enseñanza promueva interacciones para identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales), criterio de idoneidad mediacional (que la enseñanza se adecue a los recursos disponibles), criterio de idoneidad afectiva (que se promueva la motivación e implicación del estudiante) y criterio de idoneidad ecológica (que la enseñanza se adecue al proyecto educativo y al currículo) (Godino y Burgos, 2020).

Cada uno de estos criterios se divide en componentes e indicadores, que especifican el criterio y que sirven de guía efectiva para el diseño y la valoración de una actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En la Tabla se pueden observar, a modo de ejemplo, los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 1

Componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (Breda, Font, Lima, et al., 2018).

COMPONENTES	INDICADORES

Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o diversos significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o diversos significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

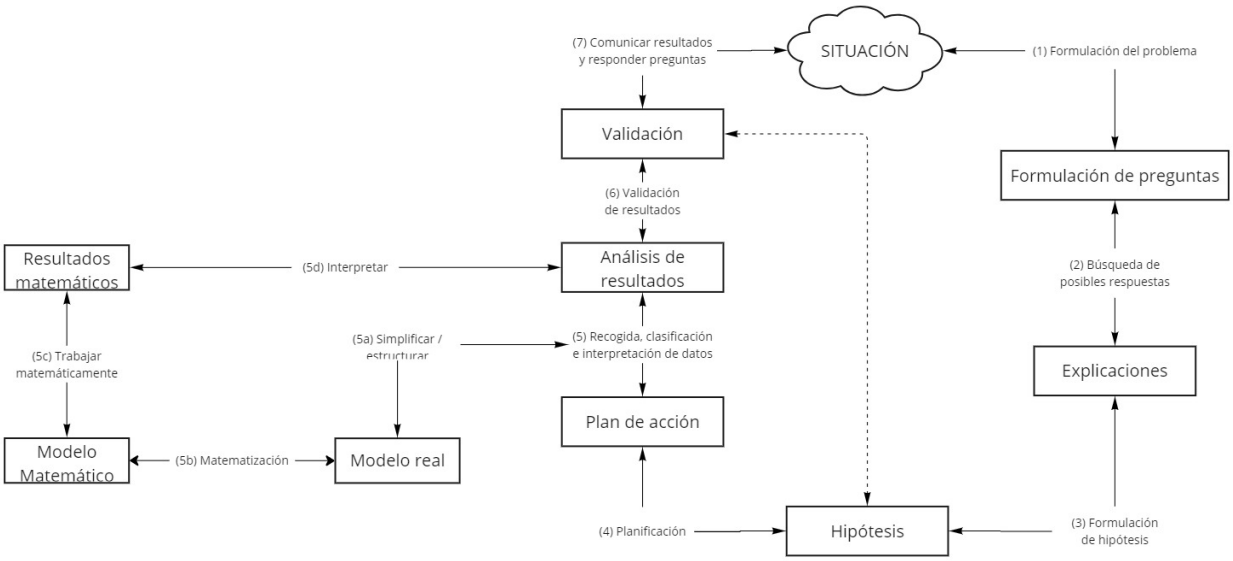
Modelo integral de indagación y modelización matemática

La situación de aprendizaje que se ha implementado para llevar a cabo esta investigación, y que será descrita en profundidad al explicar la Metodología usada, ha sido diseñada expresamente para promover los procesos de indagación y de modelización matemática siguiendo el modelo de ciclo integral de indagación y modelización matemática de Falcó-Solsona et al. (2024), y propone un tipo de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que ponen en juego conocimientos de distintos ámbitos (Rocard et al., 2007).

El proceso de indagación y modelización matemática (véase la Figura 1) parte de la voluntad de resolver una situación-problema que requiere más información de la disponible de forma inmediata; desde este punto de partida, los estudiantes, para llevar a cabo este proceso, deben pasar por todos (o por algunos) de los subprocesos del ciclo, y lo pueden hacer progresando o retrocediendo a lo largo del ciclo (por este motivo las flechas son bidireccionales). Partiendo de la situación inicial, los estudiantes formulan el problema (indicado con [1] en la Figura 1), que luego debe ser comprendido; para lograr dicha comprensión, los estudiantes llevan a cabo una investigación preliminar y buscan posibles respuestas [2]; esta primera investigación les provee de unas primeras explicaciones que usan para formular hipótesis [3] a través de las cuales abordar el problema. Posteriormente, los estudiantes planifican [4] los pasos que deben llevar a cabo para resolver el problema en base a sus hipótesis. Hecho esto, los estudiantes recolectan los datos que tienen a su alcance e interpretan [5] si son útiles o no para resolver el problema. En el caso de tener que trabajar con datos matematizables, los estudiantes simplifican y estructuran [5a] los datos obtenidos para obtener un modelo real con los datos que son relevantes para la resolución del problema; una vez obtenido el modelo real, los estudiantes matematizan [5b] los datos para obtener un modelo matemático con el que poder trabajar matemáticamente [5c], obteniendo resultados matemáticos que deben ser interpretados [5d] en el contexto del problema. Una vez obtenidos los resultados, ya sea pasando por un modelo matemático o no, los estudiantes los validan [6] para garantizar su veracidad y adecuación al contexto del problema. Finalmente, los estudiantes elaboran sus informes para comunicar sus resultados [7]. Hay que resaltar el carácter dinámico y cíclico de este proceso, en el cual los estudiantes constantemente validan sus hipótesis y construyen nuevas hipótesis.

Figura 1

Modelo integral de indagación y modelización matemática (Falcó-Solsona et al., 2024).



METODOLOGÍA

El primer autor diseñó una situación de aprendizaje interdisciplinar para promover el desarrollo de los procesos de indagación y modelización (Falcó-Solsona et al., 2024), teniendo en cuenta en el diseño la satisfacción, a priori, de los CID. Fue implementada en los cursos 2022-23 y 2023-24 en una escuela de Badalona, participando en ella 93 y 87 alumnos de primer curso de secundaria, respectivamente, así como 4 docentes de especialidades distintas a las matemáticas: ciencias naturales, ciencias sociales, tecnología y orientación psicopedagógica.

La situación planteada al alumnado fue el descubrimiento de unas piezas de cerámica de posible valor arqueológico durante unas obras y dentro de los muros del recinto escolar (una situación verosímil dada la localización de la escuela); el reto de los estudiantes era cumplir con el encargo realizado por el museo de la ciudad de investigar las piezas. El Museu de Badalona es conocido en la ciudad de Badalona por contener los restos de la ciudad romana de *Baetulo*, y se dijo que había cedido a la escuela temporalmente las piezas a estudiar. Durante su investigación, los estudiantes debían elaborar hipótesis, buscar información y datos, aplicar métodos matemáticos para lograr conocer la datación exacta de las piezas utilizando gráficos de Carbono 14 y para reconstruir la fórmula original de las piezas con métodos geométricos, elaborar modelos 3D de las piezas originales con el ordenador, y contrastar sus descubrimientos en una visita final al Museu donde exponían sus conclusiones a las arqueólogicas. Cabe destacar que los estudiantes trabajaban por primera vez con este tipo de problemas abiertos y que no conocían previamente los procesos de indagación y modelización matemática, así como el hecho de que, pese a que el pretendido descubrimiento que da lugar a la situación inicial no es real, sí es verosímil dado que las obras se llevaron a cabo y el material cerámico con el que trabajaron los estudiantes eran realmente piezas de cerámica del siglo I d.C. cedidas por el Museu de Badalona. El lector puede encontrar una descripción detallada de la situación de aprendizaje utilizada y de su implementación en Falcó-Solsona et al. (2024).

Una vez implementada la situación de aprendizaje se llevó a cabo una reunión con los docentes implicados y los dos primeros autores para obtener datos acerca de los criterios que usaban para valorar dicha implementación; cabe destacar que ninguno de los cuatro docentes implicados era especialista en matemáticas, tal como ya se ha indicado previamente, y que ninguno de ellos tenía formación previa en los CID. Se optó por desarrollar la reunión con los docentes siguiendo la técnica de los grupos focales dado que los docentes no tenían por qué estar necesariamente de acuerdo en

todas sus valoraciones. La técnica del grupo focal permite que los participantes intercambien ideas que pueden ser contestadas por otros participantes, pero no busca consensos, de modo que se pueden contraponer las opiniones iniciales, cambiarlas o adoptar opiniones nuevas durante el proceso a partir de la reflexión del grupo (Silveira Donaduzzi et al., 2015).

El primer autor también había participado en la implementación de la situación de aprendizaje como docente, pero participó en el grupo focal como investigador sin aportar valoraciones. Se adaptó el método cualitativo *Photovoice*, que permite, a partir de una fotografía o imagen realizada por los participantes, acceder a aquellos asuntos, preocupaciones y dilemas que son relevantes para ellos, y genera diálogo crítico y nuevo conocimiento a través de las reflexiones sobre el significado de dichas imágenes (Ceballos-López et al., 2021). La intención fue la de iniciar la conversación y el debate de valoración entre los docentes minimizando en la medida de lo posible las preguntas directas de los investigadores hacia los docentes. La reunión del grupo focal se grabó y se transcribió, constituyendo los datos que serían posteriormente analizados utilizando una adaptación del método de análisis temático de Braun y Clarke (2006) teniendo en cuenta que los temas buscados eran los componentes de los distintos CID. También se realizó una triangularización entre los autores para consensuar la categorización hecha en el análisis y otra, posterior, para consensuar los resultados.

RESULTADOS

Los resultados muestran que los docentes han utilizado criterios que pueden considerarse indicadores de cada uno de componentes de los CID pese a no conocerlos previamente Cabe destacar que el criterio de idoneidad epistémica solo se ha podido identificar en un único comentario del docente de tecnología que valora positivamente el papel de los elementos arqueológicos, como los fragmentos de platos, para estudiar los cuerpos de revolución a partir de la realidad y no de forma abstracta como se acostumbra a hacer. No siempre se han podido identificar todos los indicadores de cada criterio: algunos indicadores han aparecido recurrentemente y otros no han sido tenidos en cuenta en las valoraciones que los docentes. Finalmente, hay que reseñar que algunas de las valoraciones hechas por los docentes que a priori se encuadrarían en el criterio de idoneidad mediacional no se corresponden de forma exacta con ningún indicador de este criterio de idoneidad tal como éstos están descritos. Destacan de forma especial los criterios de idoneidad cognitiva y mediacional, que han sido aquellos que los docentes han tenido en cuenta con más frecuencia

En referencia al criterio de idoneidad cognitiva los docentes han hecho un énfasis especial al valorar que la implementación facilitaba la adquisición de nuevos conocimientos significativos a los estudiantes a partir de lo que ya conocían. Un ejemplo es la valoración del Docente 1 (especializado en tecnología), quien vinculó la dificultad de los alumnos al trabajar con GeoGebra con el hecho de que era una plataforma desconocida para ellos, ya que no la habían utilizado con anterioridad:

> Yo creo que la práctica del Carbono 14 con GeoGebra les costó, pero principalmente no conceptualmente, sino porque era una plataforma que aquí en esta escuela trabajamos poco, yo creo. Y que quizá si la tuvieran más dominada lo habrían hecho más fácilmente. Creo que falta un trabajo previo nuestro, como colegio, de trabajar este tipo de herramientas. Y digo, vale, ¿puede ser el momento para empezar a usarla, la excusa para usarla? Sí, pero entonces sepamos que tendrán dificultades a la hora de hacer esta actividad dentro de la situación de aprendizaje, porque primero tuvieron que aprender a usarla, tuvieron que seguir un tutorial, ir siguiendo paso a paso... que si ya sabes cómo funciona, pues te ahorras eso. Quizá, como parte que dificultaba el aprendizaje, es lo único que podría interpretar así, a grandes rasgos.

El lector puede observar un resumen de las veces que cada uno de los docentes hace referencia a alguno de los componentes de los CID en la Tabla 2, así como, el total de evidencias de cada uno de los CID que han aparecido a lo largo del análisis.

Tabla 2

Frecuencia de evidencias de los CID y en relación con cada docente que los nombra. (Elaboración propia)

Docente	Idoneidad epistémica	Idoneidad cognitiva	Idoneidad afectiva	Idoneidad relacional	Idoneidad mediacional	Idoneidad ecológica
Docente 1 (tecnología) 34 interv.	1	4	3	1	5	2
Docente 2 (ciencias) 35 interv.	0	5	2	5	8	1
Docente 3 (orientación) 33 interv.	0	3	1	4	4	2
Docente 4 (ciencias sociales) 14 interv.	0	4	3	1	3	2
Total	1	16	9	11	20	7

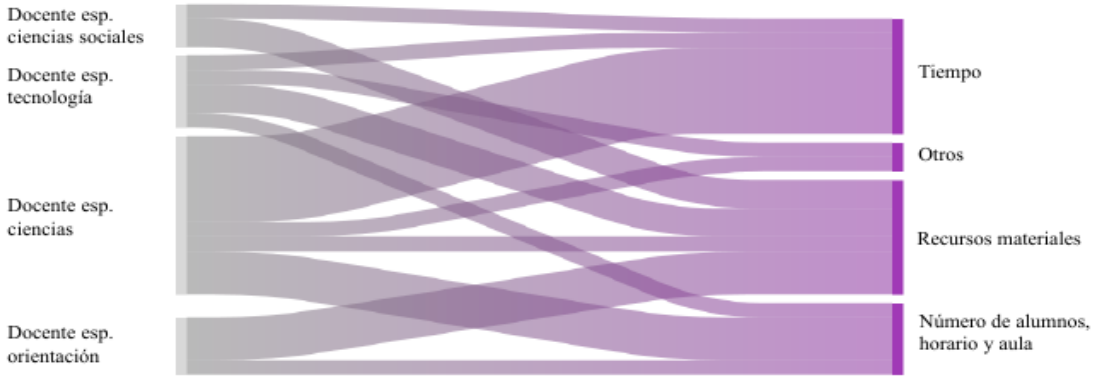
Por lo que respecta a las valoraciones hechas por los docentes en referencia al criterio de idoneidad mediacional, que valora la adecuación y disponibilidad de recursos temporales y materiales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, ha sido al que más se han referido los docentes. Dentro de estas valoraciones hay que destacar dos, ya que, aunque consideramos que se corresponden con criterio de idoneidad mediacional, no se encuadran en ninguno de los tres componentes definidos en la literatura para este CID: recursos materiales; número de alumnos, horario y condiciones del aula; y tiempo. Uno de estos comentarios es el hecho por el Docente 1, especialista en tecnología, cuando comenta que:

> (…) los que estamos aquí [los cuatro docentes] somos los que hemos desarrollado los proyectos en conjunto, y por lo tanto los cuatro sabemos qué tenemos que hacer, cómo lo tenemos que hacer, cuándo lo tenemos que hacer… En este caso quien ha desarrollado el proyecto es el Investigador 1, y a nosotros se nos ha explicado y tenemos mucha información, y nos lo hemos podido mirar [los documentos con el desarrollo y los materiales de la situación de aprendizaje] más o menos cada uno de nosotros a título individual, pero al final no somos partícipes, no? No somos co-creadores de todo esto, y por lo tanto ya no es sólo que necesitamos un "pregúntale al Investigador 1 porque yo esto de mates no lo domino", sino que yo quizás te tengo que decir "haz una gráfica" y en ese momento me pillas a contrapié, y no sé si va la gráfica o va el GeoGebra o qué va, no? Entonces es lo que hemos estado hablando: la organización, marcar tempos, tenerlo todo más claro… y esto ayudará a que los alumnos también lo tengan más claro. Tiempo y organización.

Se puede observar que, al hacer estos comentarios, el docente está valorando un recurso temporal que considera positivo para un mejor desarrollo de la situación de aprendizaje: el poder disponer de momentos en los que los docentes se puedan encontrar, fuera del aula, para coordinarse y asegurarse de que todos ellos llevan a cabo correctamente la situación de aprendizaje con los distintos grupos clase, valorar conjuntamente el funcionamiento de las sesiones y corregir lo que se considere necesario, y para resolver las dudas que puedan tener teniendo en cuenta que la actividad planteada abarca diversas disciplinas y ellos son especialistas de una única de éstas. Los docentes, pues, están haciendo unas valoraciones que encajan con el criterio de idoneidad mediacional, ya que tienen en cuenta la disponibilidad y adecuación de un recurso temporal que consideran necesario para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Figura 10

Valoración de los componentes del criterio de idoneidad mediacional. (Elaboración propia)



Estas valoraciones, no obstante, no se pueden encuadrar en el componente de recursos materiales, ya que no se refieren a la disponibilidad o el uso de materiales manipulativos o informáticos; tampoco en el componente de número de alumnos, horario y condiciones del aula, ya que no hacen mención a estos indicadores; finalmente, tampoco se pueden encuadrar en el componente de tiempo, ya que en ningún caso se están refiriendo al tiempo invertido con los estudiantes, ni a la adecuación de los significados trabajados al tiempo disponible con los alumnos, ni a la inversión de ese tiempo disponible con los alumnos a los contenidos más importantes o que presenten más dificultad.

CONSIDERACIONES FINALES

Pese a que el criterio de idoneidad epistémica ha sido tenido en cuenta una única vez por parte de los docentes —y, además, el docente que lo menciona es el especialista en tecnología, que es el único que por titulación podría impartir la asignatura de matemáticas (aunque no la estuviese impartiendo)—, sí ha habido evidencias del uso del resto de los CID por parte de los docentes aunque en sus valoraciones no se estuvieran refiriendo necesariamente a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, al valorar los conocimientos previos de los estudiantes para abordar los problemas planteados y poder construir nuevo conocimiento a partir de estos conocimientos previos, los docentes no estaban considerando que estos conocimientos previos fuesen necesariamente matemáticos, sino los relacionados con cualquiera de las materias con las que estaba relacionada la situación de aprendizaje (matemáticas, ciencias sociales, tecnología).

Los resultados muestran, pues, que los criterios de idoneidad cognitiva, afectiva, relacional, mediacional y ecológica son fácilmente adaptables a procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de tipo interdisciplinar con contenidos de otras materias, como es el caso de la situación de aprendizaje implementada para llevar a cabo esta investigación. De este modo, podemos observar que los CID, pese a estar diseñados para el diseño y la valoración de situaciones de aprendizaje de matemáticas, pueden ser una herramienta útil en el fomento del trabajo interdisciplinar hacia el cual se dirigen las tendencias educativas actuales (Generalitat de Catalunya, 2022) y pueden facilitar la inclusión de las matemáticas en este enfoque interdisciplinar.

Es el reto de futuras investigaciones el estudiar de qué manera puede garantizarse que el diseño y las valoraciones de este tipo de actividades interdisciplinares tengan en cuenta el criterio de idoneidad epistémica para asegurar que, aunque se desarrollen en el contexto de una tarea interdisciplinar, las matemáticas que se enseñen sean de calidad y representen adecuadamente la riqueza de procesos y de significados de los objetos matemáticos; asimismo, estudiar cómo garantizar que pueda valorar que los contenidos no matemáticos que se enseñan en una situación de aprendizaje interdisciplinar, que pone en juego docentes de distintas especialidades, también son de calidad.

Por otro lado, los resultados también arrojan el reto de dar respuesta con la herramienta CID a las valoraciones de los docentes en referencia a la necesidad de espacios de coordinación entre ellos, ya que lo consideran un elemento básico para poder garantizar la calidad de su acción docente en el aula, teniendo en cuenta que deben trabajar con docentes de especialidades distintas y combinar adecuadamente sus conocimientos para asegurar un buen proceso de enseñanza-aprendizaje de todas las materias que se trabajan de forma interdisciplinar. Por ello, sería interesante, en una futura investigación, proponer un nuevo componente del criterio de idoneidad mediacional que tenga en cuenta esta necesidad para procesos de enseñanza-aprendizaje que requieran de codocencia.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. do R. y Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Ceballos-López, N., Saiz-Linares, Á., Ceballos-López, N. y Saiz-Linares, Á. (2021). Metodologías cualitativas participativas en educación: Photovoice, viñetas y Ketso. *Psicoperspectivas*, *20*(1), 56-69. https://doi.org/10.5027/psicoperspectivas-vol20-issue1-fulltext-2003

Falcó Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Ledezma, C. y Font, V. (2023). Relaciones entre indagación y modelización matemática en un contexto arqueológico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 235-242). SEIEM.

Falcó-Solsona, P. J., Ledezma, C., Sala-Sebastià, G. y Font, V. (2024). Inquiry and Mathematical Modelling with Real-Archaeological Objects in Secondary Education. *Education Sciences*, *14*(3), 304. https://doi.org/10.3390/educsci14030304

Generalitat de Catalunya. (2022). Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, *8762*, 491.

Godino, J. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Paradigma*, *XLI*(e), 80-106. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p80-106.id872

Macancela-Coronel, G. F., García-Herrera, D. G., Erazo-Álvarez, C. A. y Erazo-Álvarez, J. C. (2020). Comprensión del aprendizaje interdisciplinar desde la educación STEM. *Episteme Koinonia*, *3*(1), 117. https://doi.org/10.35381/e.k.v3i1.995

Medina-Nicolalde, M. A. y Tapia-Calvopiña, M. P. (2017). El aprendizaje basado en problemas una estrategia para el trabajo interdisciplinar en el aula. *Olimpia. Revista de la Facultad de Cultura Física de la Universidad de Granma*, *14*(46), 142-153.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. y Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. European Commission, Directorate-General for Research, Science, Economy and Society.

Silveira Donaduzzi, D. S. da, Colomé Beck, C. L., Heck Weiller, T., Nunes da Silva Fernandes, M. y Viero, V. (2015). Focal group and content analysis in qualitative research. *Index de Enfermería*, *24*(1-2), 71-75. https://doi.org/10.4321/S1132-12962015000100016

ERRORES EN LA IDENTIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS Y ALGEBRAICAS DE LAS PROPIEDADES ARITMÉTICAS

Errors in the identification of geometric and algebraic representations of arithmetic properties

Flores-Lamolda, L., Ramírez-Uclés, R.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca en una investigación sobre la identificación que hacen los estudiantes de Educación Primaria de representaciones geométricas y algebraicas de propiedades aritméticas en relación con su representación verbal. Nos centramos en los errores observados en las justificaciones al identificar dichas propiedades. Se han analizado las respuestas de 185 estudiantes de 3º a 6º de primaria, estableciendo una categorización de los errores. Se observa una disminución de la proporción de errores respecto al número de respuestas conforme avanzan de curso, una mayor cantidad de errores en la identificación de representaciones algebraicas y una prevalencia de errores en justificaciones incompletas.

Palabras clave: representaciones geométricas y algebraicas, propiedades aritméticas, errores.

Abstract

This work is part of a research on the identification by primary school students of geometric and algebraic representations of arithmetic properties in relation to their verbal representation. In this study we focused on the errors observed in the justifications given by students when identifying these properties. The answers of 185 students from 3rd to 6th grade of primary education were analyzed, establishing a categorization of the errors. A decrease in the proportion of errors in relation to the number of answers was observed as the students advanced from grade to grade, a greater number of errors in the identification of algebraic representations and a prevalence of errors in incomplete justifications.

Keywords: *geometric and algebraic representations, arithmetic properties, errors.*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Las conexiones y la representación son dos ejes fundamentales en la educación matemática. Según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), constituyen dos de los estándares para la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, forman parte de los ejes sobre los que se sustentan las competencias específicas en el currículum actual, es decir en el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Este estudio se enmarca en la aritmética generalizada, que conforma una dimensión del álgebra escolar que se refiere al "estudio de estructuras y sistemas abstraídos de operaciones y relaciones, incluidas aquellas procedentes de la aritmética" (Kaput, 2008, p.11). Esto supone una de las vías de acceso al álgebra (Kaput, 2008), y en ella está incluido el trabajo con propiedades aritméticas. Se pretende relacionar en este caso la representación verbal de las propiedades aritméticas con las representaciones algebraicas y geométricas asociadas al sentido algebraico y espacial respectivamente, incluidos en el currículum de Educación Primaria (Real Decreto 157/2022).

Flores-Lamolda, L. y Ramírez-Uclés, R. (2025). Errores en la identificación de representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades aritméticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

Por otro lado, el estudio de los errores en educación matemática resulta de gran importancia puesto que ayuda a conocer la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales y de la construcción del conocimiento matemático (Rodríguez-Domingo et al., 2015).

Como forma de evidenciar la identificación que hacen de las representaciones, se han estudiado las justificaciones del alumnado. Desde la perspectiva del álgebra temprana, la justificación tiene interés como práctica en la que se construyen argumentos acerca de la veracidad o no de afirmaciones sobre relaciones generales (Blanton et al., 2022, p. 4). Los errores que se han encontrado han sido en la emisión de estas justificaciones.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Este trabajo se centra en las conexiones internas en matemáticas, es decir, aquellas que se dan dentro de la propia disciplina (Businsnkas, 2008). En este caso, se reflejan en el uso de distintas representaciones de un mismo concepto. Para analizar la relación entre el sentido espacial y algebraico, se estudian las conexiones entre representaciones geométricas, algebraicas y verbales de propiedades aritméticas. Coxford (1995) señala que experimentar estas conexiones favorece una comprensión más profunda de las matemáticas.

Castro y Castro (1997, p. 96) definen las representaciones como “anotaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes”. En este trabajo las representaciones empleadas son las externas, puesto que son distintas formas de representar las propiedades aritméticas de forma escrita. Más concretamente, se consideran las siguientes representaciones:

- Verbales: aquellas que hacen referencia al lenguaje cotidiano (Molina, 2014).
- Geométricas: representaciones gráficas, que muestran la información de forma visual y están compuestas por elementos geométricos cuya organización espacial es relevante (Torres et al., 2024).
- Simbólicas: representaciones que emplean “elementos numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra" (Molina, 2014, p. 561).

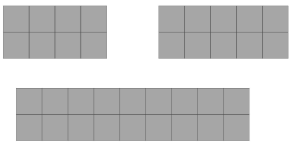
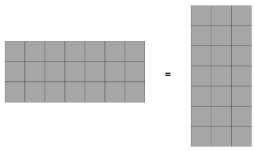
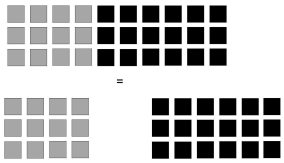
Se han analizado las justificaciones para ver la identificación de las representaciones. En el contexto del álgebra temprana, este análisis es relevante, ya que implica la construcción de argumentos sobre la veracidad de afirmaciones relacionadas con relaciones generales (Blanton et al., 2022, p. 4). Pinto y colaboradoras (2023) destacan la importancia de priorizar esta construcción de argumentos, más allá de enfocarse únicamente en los cálculos numéricos, y de generar espacios en el aula en los que el alumnado interactúe con cantidades expresadas de forma abstracta.

Al ser una investigación acerca de propiedades de las operaciones aritméticas, se encuadra dentro de la aritmética generalizada. Esta dimensión del álgebra escolar incluye la generalización de propiedades aritméticas además del razonamiento acerca de relaciones generales y sus formas (Kaput, 2008). Para separar el álgebra de la aritmética, se han considerado estas propiedades de forma general, más allá de su expresión en casos particulares (Kaput, 2008, p. 13).

Las propiedades aritméticas empleadas en este trabajo son: la conmutativa de la multiplicación, la paridad de la suma de dos números pares y la distributiva. Se presentan en la Tabla 1 algunas de las representaciones empleadas de estas propiedades:

Tabla 1

Representaciones algebraicas, verbales y geométricas de las propiedades

Propiedad	Repr. algebraica	Repr. verbal	Repr. geométrica
Paridad de la suma de dos números pares	$2 \times a + 2 \times b = 2 \times (a + b)$	La suma de dos números pares es un número par	
Conmutativa de la multiplicación	$a \times b = b \times a$	Cuando se multiplican dos números, el orden no altera el resultado	
Distributiva	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	Para multiplicar un número por una suma, se multiplica por cada sumando y luego se suman los resultados.	

Estas propiedades y representaciones han sido empleadas en otros estudios. Benson y colaboradores (2010), usaron el modelo de matrices rectangulares como representación geométrica de la distributiva, además de representaciones numéricas para ver si el empleo de múltiples representaciones contribuye a una comprensión más profunda de la propiedad. Por otro lado, la representación geométrica de la suma de dos números pares proviene de un estudio de Stephens y colaboradores (2015) en el que se emplea dicha representación como forma de ilustrar visualmente el razonamiento.

Este trabajo se centra en los errores presentes en las respuestas del alumnado en un cuestionario en el que se pretende ver la relación entre distintas representaciones de las propiedades aritméticas. El estudio de errores forma parte del análisis cognitivo en la planificación de enseñanza y ofrece oportunidades para adquirir y consolidar el conocimiento (Rico, 1998).

Existen numerosas categorías de errores en educación matemática. En este caso, nos interesan los errores referentes a la geometría y el álgebra. Nos basamos en las siguientes categorías:

- Errores en la interpretación de gráficos: involucra la interacción entre un sistema de símbolos visuales, y procesos perceptuales y cognitivos (Diezman y Lowrie, 2009)
- Errores técnicos: incluyen errores de cálculo, la manipulación de signos algebraicos, la ejecución de algoritmos básicos y los errores al tomar datos de una tabla. (Movshovizt et al., 1987)
- Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo: surgen por una comprensión inadecuada de las consignas de trabajo, sean orales o escritas (Astolfi, 1999).

En lo que se refiere a los errores en el uso de las variables, hay distintas investigaciones que exploran la complejidad del empleo de letras para representar cantidades (por ejemplo, Bolaños-González y

Lupiañez-Gómez, 2021). Las letras pueden tener distintos significados en matemáticas y el significado que se asigne afectará al empleo que se haga de las mismas (Ayala-Altamirano y Molina, 2018). Al usar letras en primaria, se han observado, por ejemplo, asignaciones numéricas según su posición en el abecedario o de forma arbitraria, ya que las letras "pueden ser cualquier número" (Ayala-Altamirano y Molina, 2018).

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo descriptivo a partir de las respuestas de los sujetos a un cuestionario. El objetivo es identificar y categorizar los errores que manifestó el alumnado de 3º a 6º de primaria al relacionar la representación verbal de las propiedades aritméticas con las representaciones algebraicas y geométricas y justificar esta relación. Para analizar la identificación de las representaciones, se analizan las respuestas presentadas en el cuestionario.

Sujetos

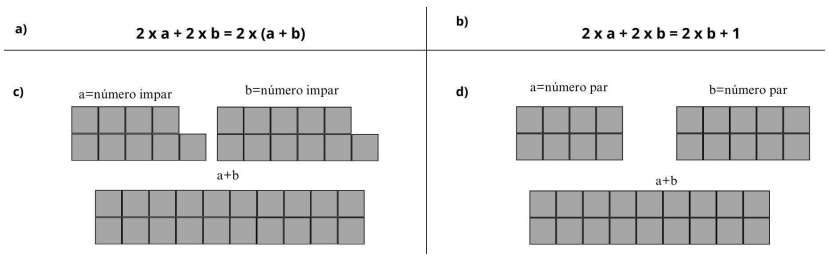
Los sujetos que han participado en la investigación son estudiantes de 3º a 6º de primaria de un colegio concertado de Granada. En total participaron 185 sujetos, distribuidos en 44 de tercero, 46 de cuarto y quinto, y 49 de sexto, puesto que había dos clases por curso. Estos sujetos no recibieron instrucción específica sobre las representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades trabajadas.

Instrumento

El instrumento empleado fue un cuestionario de elaboración propia. Este cuestionario se realizó a partir de representaciones de las propiedades aritméticas empleadas en algunos de los trabajos que han servido como antecedentes de esta investigación. El cuestionario cuenta con 5 preguntas, de las cuales se analizan la segunda, tercera y cuarta. Las dos primeras preguntas se han excluido en este caso porque presentan una estructura distinta. En cada pregunta se muestra una representación verbal de la propiedad y dos representaciones geométricas y algebraicas de las propiedades empleadas. Las propiedades son la conmutativa de la multiplicación (pregunta 3), la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (pregunta 4) y la paridad de la suma de dos números pares (pregunta 2). El alumnado ha de identificar las representaciones algebraicas y geométricas de las propiedades representadas de forma verbal y justificar esta elección. En la figura 1 se muestra un ejemplo de la pregunta 2 del cuestionario donde se pedía relacionar las representaciones que aparecen con la propiedad “la suma de dos números pares es un número par”. En el cuestionario original, hay un espacio para que los estudiantes escriban la justificación acerca de si las representaciones se corresponden o no con el enunciado.

Figura 1

Ejemplo de pregunta del cuestionario



Análisis de los datos

Se analizaron los errores de los sujetos al relacionar la representación verbal de una propiedad con sus formas geométrica y algebraica, así como justificaciones basadas en premisas falsas o incompletas. La unidad de análisis son las justificaciones en cada apartado de las tres preguntas. Se han considerado respuestas erróneas aquellas en las que el alumnado no relaciona correctamente la representación verbal con la algebraica o geométrica de la propiedad, y también aquellas que se basan

en justificaciones incorrectas al establecer la relación. A partir de las respuestas erróneas observadas, se han establecido unas categorías de errores que se presentan en el apartado de resultados.

Los errores identificados en las respuestas del alumnado se han clasificado mediante un sistema de categorías establecido a posteriori. Para su definición, se empleó la triangulación con tres expertos/as, con el objetivo de garantizar que las categorías fueran mutuamente excluyentes. En primer lugar, se establecieron unas categorías a partir del análisis de los cuestionarios de un curso. Posteriormente, otro experto aplicó estas categorías al análisis de un curso, con el fin de consensuarlas entre ambos. Una vez alcanzado el consenso, un tercer experto realizó un nuevo análisis para contrastar y validar la clasificación. El análisis se ha hecho empleando una hoja de cálculo en la que se han recogido los tipos de justificaciones y errores que ha dado cada alumno y alumna para cada uno de los apartados de las tres preguntas. A continuación, se han recogido todos los datos referentes a los errores.

RESULTADOS

A partir de los errores detectados en las justificaciones basadas en premisas falsas o incompletas, se han determinado las siguientes categorías, que se relacionan con los elementos del marco teórico:

1. Errores en los elementos de la representación: Se evidencian en errores de interpretación de los significados en las representaciones. Esto se manifiesta como confusión entre operaciones (suma con multiplicación), producto cartesiano (filas por columnas), consideración parcial de la representación (es decir, se tomen en cuenta sólo algunos elementos), no reconocimiento de las expresiones algebraicas o dificultades en las habilidades de visualización (no identificar que una figura no varía tras un cambio de posición). Relacionado con errores en la interpretación de gráficos (Diezman y Lowrie, 2009).
2. Veracidad del resultado: El estudiante reconoce como correcta la expresión, pero no comprueba que sea la misma que la que se representa verbalmente en la pregunta correspondiente. Relacionado con errores debido a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo (Astolfi, 1999). Esto sucede, por ejemplo, si se argumenta que el apartado c de la figura 1 es correcta, ya que lo que se representa es verdad, pero no corresponde con la propiedad del enunciado.
3. Argumento incompleto: Son argumentos incomprensibles, no pertinentes o con información que no se explicita derivados de justificar (Blanton et al., 2022; Pinto et al., 2023). Un ejemplo de error es la respuesta del alumno 422 (es decir, el alumno codificado con el número 22 de cuarto curso), que afirma que $2a+2b=2(a+b)$ representa que la suma de dos pares es par, pero justifica con "el 8 es múltiplo de 2" sin mostrar sustitución de valores ni la equivalencia algebraica.
4. Error de cálculo: Se realiza una sustitución inadecuada en la representación algebraica o cuenta mal los elementos de la representación geométrica. Está relacionado con errores técnicos (Movshovizt et al., 1987).
5. Errores con las variables: muestra una mala comprensión de las variables como forma de representar cantidades desconocidas como si fueran conocidas. También se incluyen en esta categoría errores en la manipulación de expresiones algebraicas. Esto se relaciona con la complejidad del concepto de variable (Ayala-Altamirano y Molina, 2018; Bolaños-González y Lupiañez-Gómez, 2021)

En la siguiente tabla se muestran la cantidad de errores encontrados en las respuestas de las tres preguntas, organizados por los apartados de las preguntas y la cantidad de respuestas que había en esos apartados. Se ha calculado el porcentaje de errores en base a la cantidad de respuestas presentadas, organizado por cursos.

Tabla 2

Proporción de errores con respecto al número de respuestas por curso

Curso	Apartados en blanco	Respuestas	Errores	Porcentaje de errores/respuestas
3º	650	230	184	80%
4º	128	424	249	58.72%
5º	128	424	220	51.89%
6º	190	398	139	34.92%

Se observa una disminución entre la cantidad de apartados en blanco de tercero al resto de cursos, aunque en cuarto y quinto haya menos apartados en blanco que en sexto. Por otro lado, en lo referente al porcentaje de errores, hay una clara tendencia descendente por cursos, de mayor porcentaje de errores en tercero a uno menor en sexto. Como los apartados a y b de cada pregunta corresponden con los apartados que tienen representaciones algebraicas y los apartados c y d con los que tienen representaciones geométricas, se ha recogido en la siguiente tabla la cantidad de errores que se han encontrado dependiendo de si la representación era algebraica o geométrica.

Tabla 3

Proporción de errores en álgebra y geometría

	Álgebra			Geometría		
Cursos	Respuestas	Errores	Porcentaje	Respuestas	Errores	Porcentaje
3º	107	101	94,39	123	91	73,98
4º	218	176	80,73	206	134	65,05
5º	218	191	87,61	206	109	52,91
6º	198	147	74,24	200	111	55,5

Se observa que en todos los cursos el porcentaje de error en las representaciones algebraicas es mayor que en las representaciones geométricas. Además, hay una tendencia descendente, es decir, en los cursos más bajos el porcentaje de error es mayor en ambas disciplinas. Por último, se ha hecho un recuento de la cantidad de errores de cada categoría que se han encontrado en las respuestas organizadas por cursos. A partir de esto, en la tabla 4, se ha calculado el porcentaje de veces que se ha encontrado ese error con relación a la cantidad de respuestas presentadas en ese curso. Por ejemplo, en tercero hubo un porcentaje de error del 6,09% en el error 1, en relación a las 230 respuestas de ese curso.

Tabla 4

Proporción de errores por tipo

Errores		1	2	3	4	5	Total errores/curso	Respuestas
Cursos	3º	6,09	6,96	60,43	1,74	4,78	184	230
	4º	9,2	18,63	25,47	0,71	4,72	249	424
	5º	7,55	16,98	17,45	1,18	8,73	220	424
	6º	8,79	16,83	1,76	1,01	6,53	139	398

Se observa que el error más frecuente es el tipo 3, presente en todos los cursos, aunque con una tendencia descendente a medida que se avanza de curso. Le sigue el error tipo 2, cuya incidencia disminuye de tercero a quinto, pero sin cambios remarcables de quinto a sexto. El error tipo 1 es más común en cuarto sin mostrar una tendencia clara. Los errores tipo 1 y 5, más vinculados a las representaciones algebraicas y geométricas, son menos frecuentes, pero tienen interés para el trabajo puesto que son los más relacionados con las representaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Según lo observado en el apartado de resultados, se destacan tres evidencias. En primer lugar, hay un aumento de la cantidad de respuestas emitidas conforme se avanza de curso, y una disminución del porcentaje de errores presentados. Además, se han observado más errores en la identificación de propiedades representadas algebraicamente. Se puede interpretar que la complejidad para justificar la relación de las propiedades ha sido mayor en los cursos inferiores y que están más familiarizados con relacionar la representación verbal con la geométrica que con la algebraica. Por otro lado, la disminución de errores y respuesta en blanco por cursos puede estar relacionado con un aumento de conocimiento acerca de las propiedades aritméticas y sus representaciones.

En cuanto a los tipos de errores hallados, los que se han encontrado con más frecuencia en las respuestas de los alumnos son de la categoría 3, que es “argumento incompleto”. Esto puede explicarse puesto que es una categoría bastante amplia que recoge todas las justificaciones que hacen referencia a información que no se explicita, argumentos que quedan incompletos o estudiantes que escriben mensajes como “no lo sé”. Pinto y colaboradoras (2023) destacan la importancia de la práctica de la justificación como un medio para favorecer una comprensión más profunda de los problemas y estructuras matemáticas

Además, la presencia de este tipo de error puede deberse a la escasa práctica de la justificación en educación elemental (Blanton et al., 2022) y a la dificultad en la comprensión de la variable, como señalan Bolaño-González y Lupiañez-Gómez (2021). De este modo, se sugiere el interés de realizar tareas en el aula que se basen en la práctica de la justificación.

El segundo error más frecuente, de tipo 2 (veracidad del resultado), surge cuando los estudiantes eligen opciones correctas, pero que no corresponden a la propiedad enunciada de forma verbal. Esto podría estar influido por el diseño del cuestionario y se relaciona con los “errores por redacción y comprensión de instrucciones” descritos por (Astolfi, 1999). Este autor determina que se presentan estos errores cuando el alumnado no comprende correctamente las consignas de trabajo.

Por otro lado, los errores menos frecuentes son los de tipo 4 y 5. El error de cálculo (tipo 4) es poco común porque depende del uso de estrategias específicas, como la sustitución de valores o el conteo. El error con las variables (tipo 5) solo aparece en apartados con representaciones algebraicas, presentes en aproximadamente la mitad de los casos.

Es destacable que los errores de tipo 1, referidos a los elementos que conforman la representación han sido poco frecuentes, mientras que se han evidenciado mayores dificultades en el proceso de justificar. Este resultado, junto con las mayores dificultades encontradas en los cursos inferiores y en las representaciones algebraicas puede aportar información al profesorado con implicaciones directas al aula: la utilización de múltiples representaciones al introducir las propiedades (verbales, geométricas y algebraicas), estableciendo conexiones entre ellas y la implementación de tareas de justificación aumentando gradualmente la complejidad a lo largo de los cursos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del grupo FQM-193, y en el marco de los proyectos PID2020-117395RB-I00 y PID2020-113601GB-I00.

Referencias

Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Diada.

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2018). Representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de tercero de primaria: El caso de la variable dependiente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, A. Aguilar González, P. Alonso, F. J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 141-150). SEIEM.

Benson, C. C., Wall, J. J. y Malm, C. (2013). The distributive property in Grade 3? Are third graders ready to connect procedures to concepts of area conservation, distribution, and geometric interpretation?. *Teaching children mathematics*, *19*(8), 498-505. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.8.0498

Blanton, M., Gardiner, A. M., Ristroph, I., Stephens, A., Knuth, E. y Stroud, R. (2022). Progressions in young learners' understandings of parity arguments. *Mathematical Thinking and Learning*, *26*(1), 90-121. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2053775

Bolaños-González, H. y Lupiañez-Gómez, J. L. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia, 35*(1), 1-18. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Businskas, A. M. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections [Tesis Doctoral, Simon Fraser University].

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico. (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. En P. A. House y A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). National Council of Teachers of Mathematics.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: An evidence base for instruction. En *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 2,* (pp. 417–424). PME.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What is Algebraic Reasoning?. En J. J. Kaput., D. W. Carraher., M. L. Blanton. (Eds.), *Algebra in the Early Grades*, (pp. 5-17). Routledge.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavski, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14. https://doi.org/10.2307/749532

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. SAEM Thales.

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M.C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las ciencias,41*(1), 149-173.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (*BOE, num 52,* de 2 de marzo de 2022). https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/02/pdfs/BOE-A-2022-3296.pdf

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick., P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática, (pp. 69-108).* Grupo Editorial Iberoamérica.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciado algebraicos entre los sistemas de representación simbólica y verbal. *PNA, 9*(4), 273-293.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra!. *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Torres, M. D., Ayala-Altamirano, C. y Ramírez-Uclés, R. (2024). Growing patterns invention by primary education students. *Research in mathematics education*. *1*(26), 1-21, https://doi.org/10.1080/14794802.2024.

PERCEPCIÓN DE LOS FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE LA REALIZACIÓN DE ACTIVIDADES MATEMÁTICAS CONSTRUCTIVISTAS PARA LA INCLUSIÓN DE PERSONAS CON DEFICIENCIAS VISUALES

Perception of future primary school teachers on the implementation of constructivist mathematical activities for the inclusion of visually impaired people

García-Manrubia, B., Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A.

Universidad de Murcia

Resumen

Hoy en día, pese a la implantación y concienciación sobre la educación inclusiva, sigue existiendo la necesidad de formar a los futuros docentes en este ámbito. El objetivo del presente trabajo fue estudiar la percepción de los futuros maestros de Educación Primaria sobre su participación en la realización de actividades constructivistas desde el enfoque de la inclusión matemática. Bajo un diseño exploratorio no experimental de corte cuantitativo descriptivo, un total de 142 estudiantes cumplimentaron una encuesta tipo escala Likert con cuestiones cerradas y abiertas. Los resultados mostraron que una gran mayoría de los participantes confirmó que este tipo de actividades contribuyen a mejorar la enseñanza de las matemáticas entre alumnado con dificultades cognitivas y muestran a los futuros maestros herramientas para la inclusión matemática. La gran mayoría muestra su satisfacción con la experiencia y su predisposición a seguir formándose en este ámbito.

Palabras clave: deficiencia visual, inclusión matemática, constructivismo, futuros maestros, Educación Primaria.

Abstract

Nowadays, despite efforts to implement and promote awareness of inclusive education, there remains a need to train future teachers in this area. This paper aims to study the perception of future Primary Education teachers regarding their participation in the implementation of constructivist activities from the approach of mathematical inclusion. Under a descriptive quantitative non-experimental exploratory design, a total of 142 students completed a Likert-scale survey that included both closed and open-ended questions. The results indicated that the vast majority of participants believed these activities enhance mathematics teaching for students with cognitive difficulties while also providing future teachers with valuable tools for mathematical inclusion. Most participants expressed satisfaction with the experience and showed a strong willingness to continue training in this field.

Keywords: *visual impairment, mathematical inclusion, constructivism, future teachers, Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el sistema educativo está asumiendo el reto de dar respuesta a la diversidad del alumnado, buscando adaptarse a las necesidades específicas de cada estudiante (González-Gil et al., 2014; UNESCO, 2009). En este sentido, la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE), aprobada en 2020 en España, se comprometió de manera explícita a desarrollar un plan conforme a la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (CDPD) de Naciones Unidas y a cumplir con el cuarto Objetivo de Desarrollo Sostenible de la Agenda 2030: "Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad". No obstante, este compromiso supone importantes implicaciones para el sistema educativo y, en particular, para los

García-Manrubia, B., Ibáñez-López, F. J. y Maurandi-López, A. (2025). Percepción de los futuros maestros de Educación Primaria sobre la realización de actividades matemáticas constructivistas para la inclusión de personas con deficiencias visuales. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

docentes que desempeñan un papel crucial adaptando la enseñanza a la diversidad desde la primera línea educativa (González-Gil et al., 2019). Esta investigación presenta la valoración de los estudiantes y futuros docentes de Educación Primaria sobre la realización de actividades constructivistas para la inclusión en el aula de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Para que la educación inclusiva se materialice en las aulas, el profesorado no solo debe presentar una actitud positiva hacia la misma, sino que además debe estar formado para ser capaz de implementar las prácticas inclusivas necesarias en el aula (Santos-González, 2022). Sin embargo, diversos estudios cuestionan este segundo punto, reconociendo incluso la necesidad de mejorar la formación recibida por el profesorado desde las universidades (Gonzalez-Gil et al., 2019; Molina y Holland, 2010; Rodríguez, 2019).

Centrándonos en la formación de docentes de Educación Primaria y en el área de matemáticas en particular, el enfoque de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1998), que promueve la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas basándose en una pedagogía constructivista, podría facilitar al docente la tarea de personalizar el aprendizaje a las características individuales de cada estudiante (Houdement y Petitfour, 2020). Si bien esta teoría no se ocupa específicamente de la discapacidad, los trabajos de Brousseau contemplan la heterogeneidad que caracteriza a los estudiantes (Broitman y Sancha, 2021).

Por otro lado, la implicación de los futuros docentes en la realización de actividades constructivistas se constituye como una oportunidad para la adquisición de metodologías y herramientas eficientes, así como para la detección de necesidades del estudiante, experimentando directamente el proceso de aprendizaje (Aragón et al., 2021; Ibáñez-López et al., 2024).

En este sentido, las actividades propuestas en este estudio se centran en la enseñanza de la visualización matemática y el desafío que esto supone cuando el estudiante presenta discapacidad visual (Martínez y Ordaz, 2015). Se asume que visualización no es sinónimo de ver (Gómez-Chacón, 2012), pues esta capacidad puede desarrollarse no solo a través de la vista, sino también desde lo percibido por el resto de los sentidos. Asimismo, se recoge la adaptación de las habilidades específicas de visualización identificadas por Del Grande (1990) y realizada por Martínez y Ordaz (2015), centrándose en una categoría en concreto: la memoria táctil. Esta se refiere a la capacidad de recordar con exactitud objetos o propiedades y relacionarlos con otros.

Llegados a este punto, surgen algunas cuestiones como: ¿qué opinan los futuros docentes sobre la realización de este tipo de actividades? ¿Cómo se sienten y qué dificultades identifican trabajando la visualización sin el sentido de la vista los futuros docentes? Este trabajo busca dar respuesta a estas interrogantes.

METODOLOGÍA

Objetivo

El objetivo de este trabajo fue comprender y analizar la opinión de los estudiantes de segundo curso del Grado en Educación Primaria y de tercer curso de la Doble Titulación con Itinerario Específico de Grado en Educación Primaria y Grado en Ciencias de la Actividad Física y del Deporte sobre su participación en actividades constructivistas implementadas en las asignaturas de *Matemáticas y su didáctica I y II* para adaptar la enseñanza de la visualización matemática a estudiantes con discapacidad visual.

Diseño

Para dar respuesta a este objetivo de investigación, se optó por emplear un enfoque descriptivo de corte cuantitativo con un diseño de investigación exploratoria, transversal y no experimental

(Creswell y Clark, 2018). Se utilizaron, por lo tanto, técnicas e instrumentos de recogida de información de carácter cuantitativo. Más concretamente, se empleó la técnica del cuestionario y una encuesta tipo escala Likert con cuestiones abiertas como instrumento.

Participantes

En este estudio, los participantes fueron 142 estudiantes matriculados en las asignaturas de *Matemáticas y su didáctica I y II* del segundo curso del Grado en Educación Primaria y del tercer curso de la Doble Titulación con Itinerario Específico de Grado en Educación Primaria y Grado en Ciencias de la Actividad Física y del Deporte de una universidad pública estatal, durante el curso académico 2024/2025. Por un lado, 90 estudiantes de un grupo de segundo curso del Grado en Educación Primaria (63.38%) matriculados en la asignatura de *Matemáticas y su didáctica I* y 52 estudiantes de tercero de la Doble Titulación matriculados en la asignatura de *Matemáticas y su didáctica II.* Concretamente, fueron 84 mujeres (59.15%) y 58 hombres (40.84%), con una edad media de 20.8 años (*DE* = 1.33 años).

De entre el alumnado participante, 113 estudiantes (79.58%) cursaron alguna asignatura de matemáticas cuando realizaron el Bachillerato, frente a 29 que no la cursaron (20.42%), y un total de 111 estudiantes (78.17%) hicieron el examen de matemáticas en su Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU) frente a 31 estudiantes (21.83%) que no lo hicieron.

Instrumento

Para la recogida de información, tras la revisión de la literatura y de los estudios previos realizados en esta línea, se diseñó *ad hoc* un cuestionario tipo escala Likert que constaba de siete preguntas con cinco valores de respuesta (donde 1 significaba “Totalmente en desacuerdo”, 2 “En desacuerdo”, 3 “Indiferente”, 4 “De acuerdo” y 5 significaba “Totalmente de acuerdo”) y cuatro preguntas abiertas, relativas a los sentimientos percibidos en el desarrollo y la implementación de actividades de corte constructivista para fomentar la inclusión educativa de estudiantes con discapacidad visual, con el objetivo de mejorar la visualización matemática y la comprensión de conceptos geométricos abordados en las asignaturas de las titulaciones indicadas. Las cuestiones tipo escala Likert fueron:

1. La actividad me ha permitido comprender mejor las dificultades que enfrentan las personas con discapacidad visual en el aprendizaje de la geometría
2. Considero que el uso del geoplano / de los poliedros es un recurso apropiado para la enseñanza de polígonos y sus propiedades a personas con discapacidad visual
3. Me he sentido cómodo/a trabajando la memoria táctil como habilidad de la visualización sin el sentido visual
4. La actividad favorece la enseñanza de las matemáticas desde otra perspectiva
5. Muestra otra forma de enseñar matemáticas más eficiente que la clase teórica tradicional
6. Creo que podría incorporar este tipo de estrategias de enseñanza de visualización para estudiantes con discapacidad visual en mi futura práctica docente
7. Me gustaría seguir aprendiendo sobre estrategias inclusivas en la enseñanza de las matemáticas

Las preguntas abiertas fueron:

1. ¿Cómo te has sentido trabajando la visualización sin el sentido visual?
2. ¿Qué dificultades has encontrado?
3. ¿Qué estrategias podrían facilitar el aprendizaje de la geometría en personas con discapacidad visual?

4. ¿Cuáles crees que son los principales desafíos al enseñar geometría a estudiantes con discapacidad visual?

Con las respuestas obtenidas en la escala Likert se calculó la fiabilidad y consistencia interna del cuestionario mediante el *Alfa de Cronbach,* obteniéndose un resultado de .751, considerado como aceptable (Kennedy, 2020), el índice de *Fiabilidad Compuesta* y el índice de *Varianza Media Extractada*, resultando unos valores de .724 y .299 respectivamente, considerados como buenos (Hair et al., 2021) y la *Omega de McDonald*, obteniéndose un valor de .723, considerado también bueno (Kalkbrenner, 2021). También se realizó una validez de constructo mediante un *Análisis Factorial Exploratorio* (AFE), con método de extracción de *Componentes Principales* y rotación *Varimax*, previo estudio de la no existencia de variables que no correlacionaran entre ellas o que pudieran causar multicolinealidad. Se obtuvo un valor significativo en el *Test de Bartlett* con $\chi 2\ (21) = 194.454$ y p-valor = .000, que rechazó la hipótesis nula consistente en que la matriz fuera similar a la matriz identidad. Se obtuvo un Índice de *Kaiser-Meyer-Olkin* (KMO) para la adecuación factorial de .751 considerado excelente (bueno a partir de .5), con un 30% de la varianza total explicada.

Procedimiento

Tomando como referencia el aprendizaje constructivista por adaptación al medio que plantea la TSD (Brousseau, 1998), se diseñaron y planificaron dos actividades, que a continuación se detallan, en las que el alumnado participante debía abordar diferentes fases de acción que desembocaran en la generación de conocimiento. Así, inicialmente, se les presentaba un momento de acción (en el que tenían que buscar respuestas a las cuestiones y problemas planteados), tras el que afrontaban un momento de formulación (en el que intentaban transmitir y comprender la acción realizada, y formular soluciones), seguido de un momento de validación (para tratar de justificar la validez de la respuesta), para finalizar la actividad con un momento de institucionalización (en el que el conocimiento que se ha construido en el aula se reconoce como saber).

Con un enfoque inclusivo, la primera de las actividades se llevó a cabo con los estudiantes de la asignatura *Matemáticas y su didáctica I* y se centró en elementos básicos de geometría (características y propiedades de triángulos y cuadriláteros) empleando el geoplano como material manipulativo. Por otra parte, la segunda actividad que se realizó con los estudiantes de *Matemáticas y su didáctica II* se enfocó en poliedros (características y propiedades de prismas y pirámides) a través de la manipulación de modelos de prismas y pirámides. La finalidad de ambas actividades fue conseguir que los futuros docentes experimentaran la visualización táctil y la comprensión de estos contenidos como lo haría un estudiante con discapacidad visual.

En primer lugar, se explicó la dinámica de las actividades y se realizaron los agrupamientos de los estudiantes en grupos de tres o cuatro personas. Por turnos, uno de los participantes de cada grupo debía vendarse los ojos y prescindir del sentido visual. En ese momento, sus propios compañeros de grupo le ayudaban a reconocer de forma táctil el polígono que se presentaba con el uso de un geoplano o el poliedro tridimensional sobre el que se estaba planteado un problema determinado, relacionado con sus elementos básicos. Durante un tiempo limitado, el estudiante vendado reconocía el polígono o el poliedro en cuestión y debía formular hipótesis de resolución a partir de los elementos percibidos con el resto de sus sentidos. Las actividades proporcionaban a los participantes nuevas vías y herramientas de generación y comprensión del conocimiento (cómo perciben los estudiantes con discapacidad visual; qué sensaciones experimentan; otras formas de visualizar y resolver un problema determinado; nuevos instrumentos para abordar un problema…), que posteriormente debían ser validadas (o desechadas) con ayuda del resto del grupo de compañeros.

El equipo docente cerraba las actividades llevando a cabo el proceso de institucionalización del conocimiento, remarcando las fases que se habían seguido en su consecución y afianzándolo para su conservación en el estudiantado.

Finalmente, se administró el cuestionario sobre las actividades al alumnado vía correo electrónico, siendo cumplimentado de forma individual y anónima a través de la aplicación web *Encuestas* de la universidad.

Análisis de la información

La información recogida con el cuestionario administrado fue tratada y analizada con el paquete estadístico de software libre R (R Core Team, 2023). Para la búsqueda de diferencias significativas en los ítems según variables sociodemográficas (titulación, sexo, haber cursado matemáticas en bachillerato y haber realizado el examen de matemáticas en EBAU), se empleó la *U de Mann-Whitney* para variables independientes con dos niveles de respuesta (se tomó p-valor inferior a .05 y nivel de significación $\alpha = .05$). Aunque estos test no paramétricos actúan sobre la mediana de los datos, también se presentan en las tablas de estadísticos descriptivos la media y la desviación típica de los mismos.

RESULTADOS

Los estadísticos descriptivos obtenidos en las preguntas de la escala Likert acerca de la percepción de los estudiantes sobre la realización de la actividad indicaron, en general, opiniones muy favorables sobre la utilidad y el uso de estrategias inclusivas en la clase de matemáticas (Tabla 1 y Figura 1). Es muy llamativo que casi la totalidad de los participantes manifestó estar de acuerdo o totalmente de acuerdo con la gran mayoría de cuestiones: comprender las dificultades de los estudiantes con discapacidad visual (100% en ítem 1), uso del geoplano y los poliedros con personas con discapacidad visual (97.89% en ítem 2), enseñanza de las matemáticas desde otra perspectiva (98.59% en ítem 4), otra forma de enseñar más eficiente (97.89% en ítem 5), incorporación de este tipo de actividades en mi futura labor docente (99.3% en ítem 6) y voluntad de seguir aprendiendo estrategias inclusivas (97.18% en ítem 7). Por otro lado, un 19.72% de los informantes indicó no sentirse cómodo trabajando con la memoria táctil (cuestión 3).

Tabla 1

Estadísticos descriptivos y porcentajes de respuesta en cuestiones sobre percepción de la actividad

Cuestión	*N*	*Mín*	*Máx*	*Media*	*Mediana*	*Sd*	%1	%2	%3	%4	%5
P1	142	4	5	4.86	5	0.35	0.00	0.00	0.00	14.08	85.92
P2	142	2	5	4.70	5	0.56	0.00	1.41	0.70	23.94	73.94
P3	142	1	5	4.15	4	0.89	0.70	4.93	14.08	39.44	40.85
P4	142	3	5	4.72	5	0.48	0.00	0.00	1.41	25.35	73.24
P5	142	3	5	4.71	5	0.50	0.00	0.00	2.11	24.65	73.24
P6	142	3	5	4.72	5	0.47	0.00	0.00	0.70	26.76	72.54
P7	142	2	5	4.64	5	0.59	0.00	1.41	1.41	28.87	68.31

En el análisis de inferencia en estas cuestiones respecto de la titulación que se cursaba, solo se detectaron diferencias estadísticamente significativas en el ítem 1, que afirmaba que la actividad ayuda a comprender las dificultades que tienen los estudiantes con discapacidad visual ($W = 2743.0$, *p-valor* = .005, $d = .51$; $\overline{\boldsymbol{x}} = 4.92$ y mediana = 5 en Educación Primaria frente a $\overline{\boldsymbol{x}} = 4.75$ y mediana = 5 en DTIE). También se detectaron diferencias significativas según sexo en prácticamente todas las cuestiones (Tabla 2).

Tabla 2

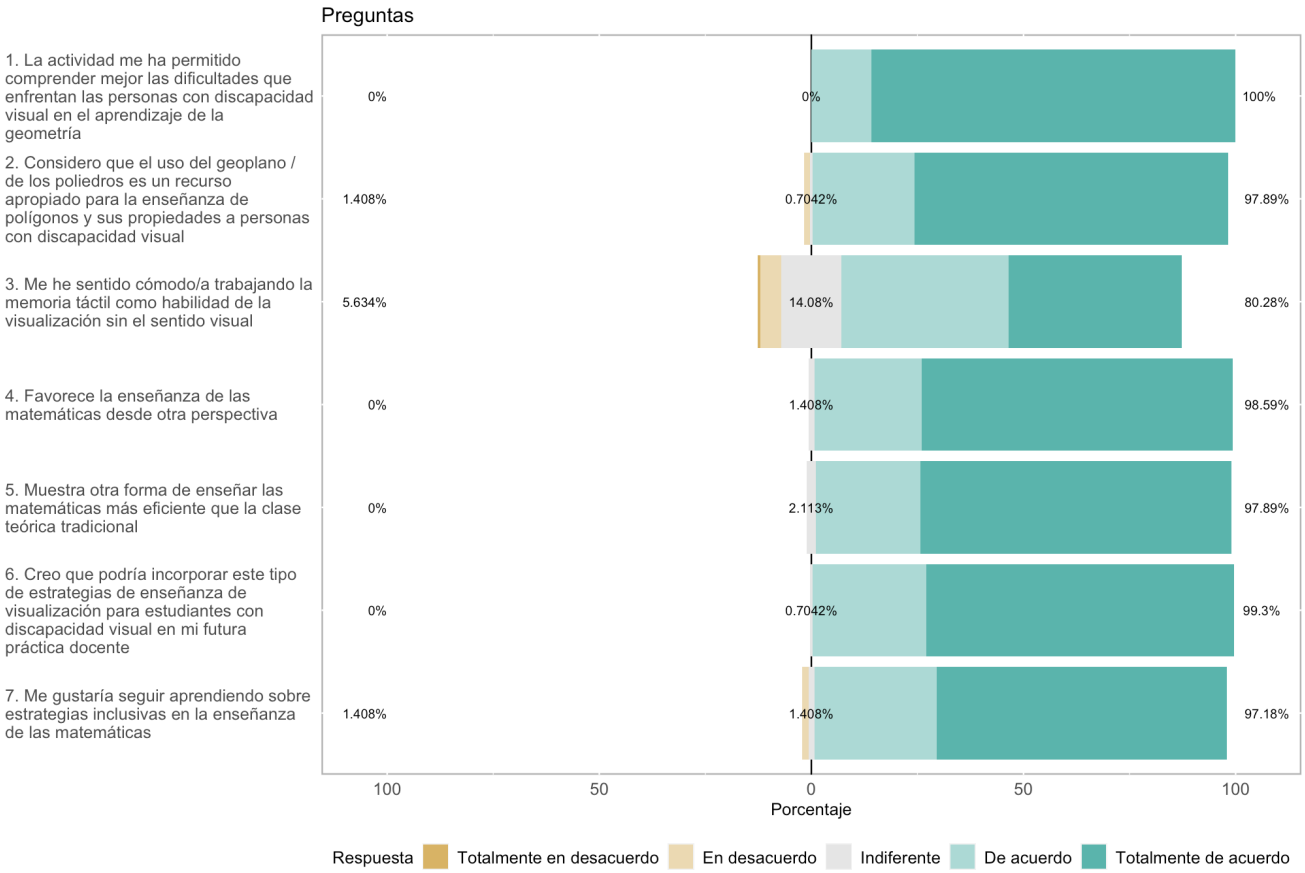
Diferencias significativas en las cuestiones respecto de la variable sexo

Cuestión	*W*	*p-valor*	*d*	Hombre		Mujer	
				Media	*Mediana*	*Media*	*Mediana*
P1	2708.0	.062	-	4.79	5	4.90	5

P2	2979.0	.003	.37	4.59	5	4.79	5
P3	2350.5	.705	-	4.2	4	4.10	4
P4	2823.0	.037	.35	4.62	5	4.79	5
P5	3021.0	.002	.50	4.57	5	4.81	5
P6	3208.5	.000	.71	4.53	5	4.85	5
P7	3291.0	.000	.81	4.38	5	4.82	4

Figura 1

Descriptivo de las cuestiones sobre percepción de la actividad



Finalmente, se obtuvieron diferencias significativas en la cuestión 2, sobre el uso del geoplano y los poliedros en la actividad, respecto a la variable haber cursado matemáticas en Bachillerato (W = 2061.0, *p-valor* = .005, d = .77; $\bar{x}$ = 4.79 y mediana = 5 los que sí frente a $\bar{x}$ = 4.38 y mediana = 5 los que no) y respecto a la variable haber realizado el examen de matemáticas en la EBAU (W = 2175.5, *p-valor* = .003, d = .77; $\bar{x}$ = 4.79 y mediana = 5 los que sí frente a $\bar{x}$ = 4.39 y mediana = 5 los que no).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue analizar la opinión de los estudiantes futuros maestros sobre su participación en actividades constructivistas para adaptar la enseñanza de la visualización matemática a estudiantes con discapacidad visual. Los resultados del trabajo de campo demuestran que, de forma general, el alumnado valoró muy positivamente la realización de esta propuesta constructivista (Aragón et al., 2021; Ibáñez-López et al., 2024), no solo por la experiencia de comprobar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes con discapacidad visual (Martínez y Ordaz, 2015), sino también como la herramienta adicional que estas propuestas aportan en la enseñanza en general de las matemáticas y en la enseñanza de los elementos y conceptos básicos de geometría en particular.

Los participantes confirmaron que este tipo de actividades supone otra forma de enseñar las matemáticas más inclusiva e incluso más eficiente que la metodología tradicional de enseñanza (Aragón et al., 2021; Houdement y Petitfour, 2020; Saá et al., 2024). Además, destacan el proceso seguido hasta la generación del conocimiento y su institucionalización. Resaltan que utilizarían actividades matemáticas inclusivas en su futuro como docentes y se muestran receptivos a seguir aprendiendo estrategias que redunden en la inclusión educativa de todos los estudiantes, en consonancia con los resultados obtenidos por González-Gil et al. (2019), Molina y Holland (2010), Rodríguez (2019) y Santos-González (2022).

En cuanto a las limitaciones de este estudio, es importante señalar que, pese a la incorporación de algunas preguntas abiertas, el diseño empleado en la recogida de datos se basa únicamente en un enfoque cuantitativo. Por lo tanto, para seguir avanzando e indagando en la enseñanza de las matemáticas desde un punto de vista inclusivo en investigaciones futuras, se debería plantear un diseño mixto con la realización de grupos de discusión o entrevistas con los futuros docentes o incluso con docentes que tengan alumnado con este tipo de dificultades visuales, con el fin de contrastar y reforzar los resultados obtenidos en esta investigación.

Finalmente, este estudio contribuye a señalar la importancia del uso de actividades constructivistas para mejorar, de forma general, la adquisición de conocimientos matemáticos y el acercamiento de las metodologías docentes a la inclusión educativa de todos los estudiantes. En este enfoque el estudiante se sitúa como protagonista del aprendizaje, promoviendo el pensamiento crítico, la deducción y la búsqueda de soluciones, adaptándose a sus necesidades y limitaciones, mientras que el docente asume un rol de guía o facilitador. Por lo tanto, constatadas las bondades de su aplicación, se debe animar a seguir aplicando este tipo de actividades entre estudiantes con diferentes dificultades de aprendizaje.

Referencias

Aragón, L., Jiménez-Tenorio, N., Vicente-Martorell, J. J. y Eugenio, M. (2021). ¿Progresan las concepciones sobre la ciencia de futuros maestros/as tras la implementación de propuestas constructivistas para la alfabetización científica? *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias, 16*(1), 78-95. https://doi.org/10.14483/23464712.15589

Broitman, C. y Sancha, I. (2021). Diálogos ineludibles entre Didáctica de la Matemática y Educación Inclusiva. En P. Cobeñas, V. Grimaldi, C. Broitman, I. Sancha y M. Escobar (Coords.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad* (pp. 163-206). EDULP.

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des Situations Didáctiques*. La Pensée Sauvage.

Creswell, J. W. y Clark, V. L. P. (2017). *Designing and Conducting Mixed Methods Research*. Sage Publications.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, *37*(6), 14-20.

Gómez-Chacón, I. M. (2012). Visualización matemática: Intuición y razonamiento. En M. Castrillón, M. I. Garrido, J. A. Jaramillo, A. Martínez y J. Rojo, *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés* (pp. 201-219.)

González-Gil, F., Martín-Pastor, M. E., Flores Robaina, N. E. y Jenaro Río, C. (2014). Evaluación de la formación para la inclusión en el profesorado de España, Costa Rica y República Dominicana. *REICE: Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *12*(3), 27-39.

González-Gil, F., Martín-Pastor, E. y Poy, R. (2019). Educación inclusiva: barreras y facilitadores para su desarrollo. Análisis de la percepción del profesorado. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *23*(1), 243-263. https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i1.9153

Hair, J. F., Hult, G. T. M., Ringle, C. M., Sarstedt, M., Danks, N. P. y Ray, S. (2021). *Partial Least Squares Structural Equation Modeling (PLS-SEM) Using R*. Springer.

Houdement, C. y Petitfour, É. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 40*(2). https://revue-rdm.com/2020/la-manipulation-dans-lenseignement-specialise-aide-ou-obstacle-%e2%80%a8une-etude-de-cas-autour-de-la-numeration-decimale/

Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Saá-Rojo, M. D. (2024). Perspectiva de los futuros maestros de Educación Infantil sobre la realización de actividades constructivistas en matemáticas. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 313-320). SEIEM.

Kennedy, I. (2022). Sample Size Determination in Test-Retest and Cronbach Alpha Reliability Estimates. *British Journal of Contemporary Education, 2*(1), 17-29. https://doi.org/10.52589/BJCE-FY266HK9

Kalkbrenner, M. T. (2021). Alpha, Omega, and H Internal Consistency Reliability Estimates: Reviewing These Options and When to Use Them. *Counseling Outcome Research and Evaluation, 14*(1), 77–88. https://doi.org/10.1080/21501378.2021.1940118

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (2020). *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, *340*, de 30 de diciembre de 2020, pp. 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Martínez Chi, L. A. y Ordaz Arjona, M. G. (2015). Las habilidades de visualización en geometría: El caso de una niña con discapacidad visual. En J. M. López Mojica (Ed.), *Educación especial y matemática educativa: Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (pp. 97-123).

Martínez, A. M. y González, F. E. (2017). Aspectos didácticos para la enseñanza de la matemática a personas con discapacidad visual. *Paradigma*, 385-404. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2017.p385-404.id637

Molina Roldán, S. y Holland, C. (2011). Educación especial e inclusión: aportaciones desde la investigación. *Revista Educación Y Pedagogía*, (56), 31–43.

R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing.

Rodríguez, H. (2019). La Formación inicial del profesorado para la inclusión. Un urgente desafío que es necesario atender. *Publicaciones*, *49*(3), 211–225. https://doi.rog/10.30827/publicaciones.v49i3.11410

Santos-González, C. (2022). Atención a la diversidad e inclusión educativa: formación inicial del profesorado y autopercepción de competencias. *Ciencia y Educación*, *6*(3), 7-20. https://doi.org/10.22206/cyed.2022.v6i3.pp7-20

UNESCO (2009). *Directrices sobre políticas de inclusión en la educación*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000177849_spa

TIPOLOGÍA DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA

Typology of Secondary Mathematics Teachers

Garrido-Rojas, J.[a],Moreno, A.[a], Ruiz-Hidalgo, J.F.[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este estudio es analizar la relación entre las características del profesorado de matemáticas de secundaria y su valoración de la formación inicial y continua. Se parte de la hipótesis de que la especialización matemática del profesorado ha disminuido debido a la menor presencia de egresados en Matemáticas que se dedican docencia. Se evaluaron 19 variables relacionadas con datos personales, formación y experiencia profesional y se realizó un análisis de clases latentes a los datos obtenidos de una encuesta respondida por 401 docentes de Matemáticas de ESO y Bachillerato. Los resultados muestran la existencia de distintos perfiles con patrones diferenciados en las respuestas relativas a la percepción de su formación, necesidades formativas y situación laboral. Este estudio aporta información clave para mejorar la planificación de la formación del profesorado, adaptándola a las debilidades de cada uno de los perfiles detectados.

Palabras clave: didáctica matemática, formación continua, formación docente, formación inicial del profesorado, educación secundaria.

Abstract

The aim of this study is to analyse the relationship between the characteristics of secondary school mathematics teachers and their assessment of initial and in-service training. It is based on the hypothesis that the mathematical specialisation of the teaching staff has decreased due to the lower presence of Mathematics graduates who are dedicated to teaching. Nineteen variables related to personal data, training and professional experience were evaluated and a latent class analysis was carried out on the data obtained from a survey answered by 401 teachers of Mathematics in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate. The results show the existence of different profiles with differentiated patterns in the responses regarding the perception of their training, training needs and work situation. This study provides key information to improve the planning of teacher training, adapting it to the weaknesses of each of the profiles detected.

Keywords: *didactic of mathematics, continuing education, preservice teacher training, Secondary Education, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

En la educación secundaria y bachillerato, el profesorado de matemáticas no solo transmite conocimientos, sino que también fomenta el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Como consecuencia, la investigación en educación matemática ha puesto el foco durante años en el estudio del profesorado de matemáticas y su formación debido a su influencia directa en el aprendizaje del alumnado (Wu et al., 2017), sosteniendo algunos autores que el perfil de los docentes predice el logro estudiantil (Holzberger et al., 2019). Sin embargo, la especialización matemática del profesorado de secundaria, en teoría más completa la del de primaria, se ha visto afectada por la llegada de docentes sin un conocimiento sólido del contenido que deben enseñar (Martín de Diego, 2020), generando una notable diferencia entre la formación disciplinar en futuros docentes (Muñiz-Rodríguez et al., 2015). Para Font (2011), éste es el principal problema del diseño del Máster de Profesorado (en adelante, MAES): el desfase entre lo que se supone que el futuro profesorado sabe de matemáticas y lo que

Garrido-Rojas, J., Moreno, A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2025). Tipología del profesorado de Matemáticas en secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

realmente sabe. Esto podría deberse a la disminución progresiva de los egresados del Grado de Matemáticas que se dedican a la docencia, que ha disminuido desde un 32,31 % en 2003 (ANECA, 2005) hasta el 16,10 % en 2020 (Martín de Diego, 2020). En esta situación, la formación inicial del profesorado de matemáticas preocupa a las autoridades educativas y responsables políticos (Barquero et al., 2024; Muñiz-Rodríguez et al., 2016), siendo de su interés la caracterización de los perfiles existentes y los motivos esgrimidos para ser docente por su importancia tanto en la selección del alumnado como en la planificación de la formación del profesorado (Muñoz-Fernández et al., 2019).

En este contexto, la identificación de perfiles docentes ha cobrado especial importancia en la investigación educativa porque permite abordar las diversas formas en que el profesorado combina creencias, actitudes y prácticas, lo que influye directamente en la calidad de la enseñanza (Holzberger et al., 2019). Sin embargo, los mismos autores reconocen que investigaciones previas no han aclarado la existencia y características de estos perfiles y su influencia en la calidad de la docencia, por lo que es un interesante campo de estudio.

Para abordar estas carencias, desarrollamos una investigación cuya finalidad es identificar la relación, si existe, entre el perfil del profesorado de matemáticas de secundaria y su valoración de la formación recibida como parte de la construcción de su identidad profesional, entendida esta como el conjunto de autocomprensiones relacionadas con las formas de ser, vivir y proyectarse en la profesión docente frente a las voces, demandas y condiciones sociales y políticas de la práctica docente (Losano, 2018). Como parte de esa investigación más amplia, en el caso de esta comunicación, el objetivo es identificar perfiles de profesorado de matemáticas y su relación con la valoración de su formación inicial y continua. Para ello se ha llevado a cabo una encuesta seguida de un análisis de clases latentes para identificar subgrupos de docentes atendiendo a sus creencias, formación y experiencia.

De forma general, se espera que los resultados pongan de manifiesto la existencia de diversos perfiles con patrones de respuesta diferenciados en cada grupo, lo que puede servir como punto de partida para futuras mejoras estratégicas en los planes de formación docente.

ANTECEDENTES

Este estudio se basa en uno anterior realizado por García-Longoria y Blanco (2005) cuyo objetivo era estudiar el profesorado de matemáticas de ESO y bachillerato extremeño. En aquella ocasión, se recogió información relativa a datos personales, formación de base, Curso de Aptitud Pedagógica (en adelante, CAP), otra formación y desarrollo profesional.

Posteriormente, en un análisis sobre perfiles del futuro profesorado de matemáticas, Muñiz-Rodríguez et al. (2020) señalaron tres perfiles que tienen diferentes correlaciones con la percepción de haber adquirido las competencias de conocimiento matemático y pedagógico-matemático.

Un estudio cuantitativo previo (Garrido-Rojas y Moreno, enviado), identificó posibles categorías de formación previa según los estudios de origen de las personas encuestadas, clasificándolas en función del uso que hacen de las matemáticas. El análisis reveló que el perfil mayoritario del profesorado de matemáticas en secundaria corresponde a una mujer de entre 41 y 50 años, con formación en la licenciatura o el grado en Matemáticas, cuya motivación principal para elegir esta carrera fue la vocación docente. La mayoría repetiría estos estudios si tuvieran la oportunidad. En cuanto a la percepción sobre su preparación, consideran que su formación inicial fue suficiente para su labor, aunque demandan una mayor preparación didáctica, preferentemente a través de estudios de posgrado, así como una mejora en el periodo de prácticas. La vía de acceso más común a la docencia fue el CAP. En términos laborales, la mayoría ocupa una plaza como funcionaria de carrera, trabaja en un centro público y cuenta con más de una década de experiencia en la enseñanza.

Por otro lado, Garrido-Rojas et al. (2024) demostraron asociaciones estadísticamente significativas entre la titulación del profesorado y variables como la edad, percepción de la formación inicial, experiencia profesional, situación administrativa y realización del MAES.

METODOLOGÍA

Este trabajo se encuadra dentro de los llamados estudios centrados en la persona (Holzberger et al., 2019), estudiando lo que estos autores denominan perfil latente, que permite identificar grupos naturales dentro de diferentes patrones de relación entre las variables incluidas.

Para la identificación de estos perfiles se ha optado por realizar un análisis de clases latentes debido a su flexibilidad para descubrir patrones en los datos sin necesidad de hacer suposiciones previas sobre las relaciones entre las variables (Hartl y Holzberger, 2022). Este tipo de estudio, de naturaleza probabilística, postula la existencia de una variable subyacente no observada que divide la población en clases latentes mutuamente exclusivas y exhaustivas (Herrero et al., 2025), en función de los patrones de respuesta en variables observadas. El método sugiere que la muestra analizada podría estar formada por varias subpoblaciones distinguidas por un grupo diferente de parámetros (Howard y Hoffman, 2017).

Se ha partido de las categorías de estudio propuestas por García-Longoria y Blanco (2005), actualizadas conforme a los planes de estudio actuales en el marco del **Espacio Europeo de Educación Superior (**Real Decreto 1393/2007**)** y reorganizadas en cinco epígrafes: datos personales, formación de base, máster de profesorado, otra formación y desarrollo profesional. El resultado es un cuestionario con 28 preguntas, que generan 35 variables debido a que algunas de ellas contienen varios apartados.

De estas 35 variables, se han utilizado 19 para el análisis que se presenta en este estudio, ya que el resto corresponden a preguntas específicas para los encuestados que habían cursado el MAES, o bien a preguntas de respuesta abierta. Estas 19 variables se muestran codificadas en la Tabla 1.

Tabla 1

Codificación de las preguntas del cuestionario

Código	*Variable*
V01	Edad
V02	Sexo
V03	Indique su titulación universitaria
V04	¿Cuál fue el motivo principal por el que eligió sus estudios universitarios?
V05	Con su experiencia, ¿volvería a elegir de nuevo esos estudios universitarios?
V07	Explique si ha cursado otros estudios universitarios
V08	¿Cree que su formación inicial es suficiente para su trabajo?
V09	¿Cree que habría que ampliar la formación didáctica de los profesores de matemáticas?
V10	¿Cuándo cree conveniente que se desarrolle la formación didáctica?
V11	Desde su experiencia, ¿cuándo deberían realizarse las prácticas?
V12	¿Ha realizado el Máster de Profesorado (MAES)?
V27	Utilidad formación funcionarios en prácticas
V28	Utilidad formación ofrecida por los Centros del Profesorado
V29	Indique su experiencia profesional
V30	¿En qué tipo de centro trabaja actualmente?
V31	¿Cómo accedió a su primer trabajo como docente?
V32	Indique su situación administrativa actual
V33	Indique los problemas que con más frecuencia se ha encontrado en su profesión

Población y muestra

El estudio se centró en docentes de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en Andalucía, pertenecientes a centros públicos o privados (concertados o no). Para la recopilación de datos, se envió el cuestionario a todos los centros andaluces. Metodológicamente, este procedimiento se enmarca en el muestreo por conveniencia o accidental, según la clasificación de Cohen et al. (2018).

En total, se recogieron 401 cuestionarios. Si bien la muestra por conveniencia implica limitaciones en cuanto a la representatividad estadística, su amplitud y la diversidad geográfica y tipológica de los centros participantes refuerza la validez contextual de los resultados obtenidos.

Método de análisis

En un estudio anterior (Garrido-Rojas et al., 2024), las variables del cuestionario fueron sometidas a la prueba de hipótesis χ^2 de Pearson para comprobar la representatividad de la muestra. Dentro de este análisis, mediante la prueba de distribución, se comprueba si las frecuencias que se observan en la muestra difieren de las que cabría esperar.

A continuación, se ha realizado un análisis de clases latentes. Para ello, se han evaluado diferentes modelos con distinto número de clases, partiendo de una estructura inicial con 2 grupos e incrementando progresivamente su número (hasta 6) para identificar el modelo óptimo. Los indicadores de ajuste empleados han sido el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio de información bayesiano (BIC) combinados con valores de la entropía que indiquen una buena asignación de individuos a las clases. Se consideran modelos con un mejor ajuste aquellos que presentan valores menores de AIC y BIC mientras que, en el caso de la entropía, son preferibles valores más cercanos a la unidad, siempre que superen un mínimo de 0,80 (Herrero et al., 2025).Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2

Valores de BIC, AIC y entropía según modelo

Modelo	*BIC*	*AIC*	*Entropía*
2 clases latentes	14968	14541	0,904
3 clases latentes	14927	14284	0,959
4 clases latentes	15013	14155	0,970
5 clases latentes	15130	14056	0,959
6 clases latentes	15299	14009	0,972

Se observa en la Tabla 2 que el modelo de cuatro clases latentes es el que presenta un equilibrio óptimo entre ajuste y calidad de clasificación. Si bien el modelo con tres clases presenta el menor BIC (14927), el modelo de cuatro clases posee un AIC inferior (14155) combinado con una entropía más elevada (0,970), lo que se interpreta como una mejor asignación de los individuos a las clases sin aumento significativo en la complejidad del modelo. En cambio, si se continúa el aumento de clases, se incrementa el BIC, lo que sugiere sobreajuste. Por ello se eligió el modelo de cuatro clases latentes, atendiendo a su equilibrio entre ajuste y parsimonia.

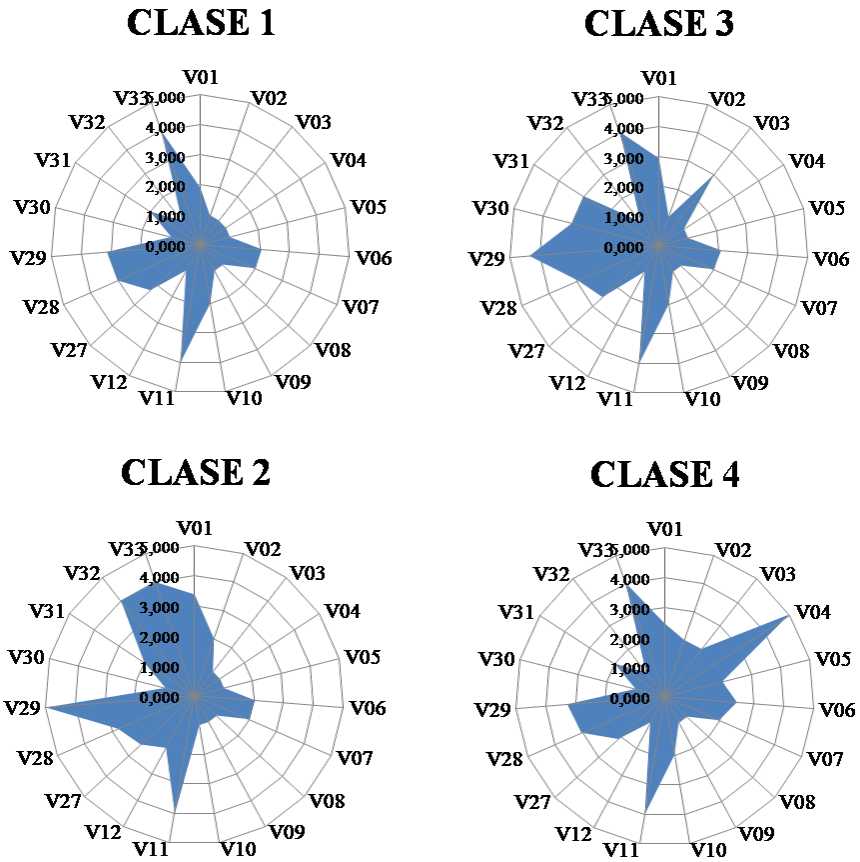
Las prevalencias marginales (probabilidad estimada de que un individuo pertenezca a una determinada clase antes de considerar sus respuestas específicas a las variables observadas) resultaron ser 0,191 para la Clase 1; 0,507 para la Clase 2; 0,137 para la Clase 3 y 0,167 para la Clase 4.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez establecido que el modelo óptimo es el de 4 clases latentes, se analizaron las probabilidades de pertenencia a cada clase, así como las probabilidades condicionales de respuesta en cada una de las variables observadas. Esto permitió caracterizar cada clase en términos biográficos (variables 1—edad—, 2 —sexo—, 3 —titulación universitaria—, 7 —posesión de otros títulos universitarios— y 12 —realización del MAES—) e interpretar sus perfiles de respuesta, de acuerdo con los objetivos de este estudio. Los resultados pueden verse gráficamente en la Figura 1.

Figura 11

Gráficos radiales por clase



La clase 1 se compone mayoritariamente de profesorado cuya edad está comprendida entre 31 y 40 años, hombres, que estudiaron la licenciatura o el grado en matemáticas (siendo esta su única titulación) y que han cursado el MAES. El perfil de respuesta de los integrantes de esta clase establece que la mayor parte eligió sus estudios universitarios porque querían dedicarse a la docencia, considerando además que repetirían dichos estudios, con los que obtuvieron "bastante" satisfacción (V06).Consideran que su formación fue suficiente para el trabajo que desarrollan, pero de una forma más moderada que las clases 3 y 4. El MAES es el lugar idóneo para la realización tanto de la formación didáctica como de las prácticas, aunque en el primer caso hay muy poca diferencia con los que se decantan por realizarla en los estudios de grado (41,90 % frente a 41,10 %). Los docentes que pertenecen a la clase 1 otorgan una puntuación media a la formación ofrecida a los funcionarios en prácticas, ligeramente inferior a la que imparten los centros de formación del profesorado. Son de reciente incorporación al sistema educativo (de 2 a 5 años de experiencia laboral), al que accedieron a través de bolsas de interinos, trabajando actualmente en un centro público (96,10 % de los miembros de esta clase), aún en situación de interinidad.

La clase 2 está formada por docentes de 41 a 50 años, mayoritariamente mujeres, licenciadas o graduadas en matemáticas, sin una segunda titulación y que accedieron a la docencia a través del CAP. En cuanto a su perfil de respuesta al resto de cuestiones, los miembros de esta clase eligieron sus estudios principalmente porque querían dedicarse a la docencia, obteniendo un grado alto de satisfacción al realizarlos, lo que al 89,70 % les hace pensar que volverían a repetir esa elección. En cambio, son la clase que se considera peor formada para el trabajo que realiza, aunque la mayoría opina que su formación es suficiente (54,50 %). Esta clase se desmarca respecto al resto a la hora de elegir el momento idóneo para realizar la formación didáctica, ya que es la única que considera que

debe ser durante los estudios de grado. En cambio, para las prácticas sí se alinean con el resto de clases, eligiendo el MAES como el momento idóneo para su realización. Del mismo modo que la clase anterior, otorgan puntuaciones medias tanto a la formación de funcionarios en prácticas como a la ofrecida por los centros de formación del profesorado. Esta clase la componen los docentes más experimentados, con un 98,92 % de ellos con más de 10 años de ejercicio. Asimismo, son los que trabajan en centros públicos en mayor porcentaje (98,50 %), como funcionarios de carrera (92,70 %), diferenciándose de las clases restantes, que son en su mayoría interinos. Aunque el acceso a la docencia mayoritario (47,40 %) de los componentes de la clase 2 fue a través de bolsas de interinos, presentan el mayor porcentaje de individuos que lo hizo directamente a través de las oposiciones, con un 41,20 %, diferenciándose especialmente de las clases 3 y 4.

En la clase 3 se agrupa profesorado de 41 a 50 años, mayoritariamente hombres, con estudios diferentes a la licenciatura en matemáticas, ingenierías o arquitecturas (y sus grados equivalentes), sin una segunda titulación universitaria y que cursaron el MAES como forma de acceso a la profesión docente. Los motivos que les llevaron a cursar sus estudios están más repartidos que en las clases anteriores, aunque sigue siendo mayoría la docencia (40,00 %). Sin embargo, no necesariamente querían ser profesores de matemáticas ya que cabe recordar que no son, en su mayoría, matemáticos. Aún así, quedaron bastante satisfechos con sus estudios y los repetirían, si tuvieran que volver a elegir. Son los que, por detrás de la clase 4, más valoran su formación inicial como suficiente para el trabajo que desarrollan. Es el grupo más equilibrado en cuanto a la realización del MAES y del CAP (aunque el primero es mayoría) y consideran que tanto la formación didáctica como las prácticas deben realizarse durante el MAES. Son profesores veteranos de más de 10 años de experiencia, sólo por detrás de los de la clase 2. El aspecto diferencial de los que pertenecen a esta clase es que trabajan mayoritariamente en centros concertados (96,36 %), accediendo a la docencia mediante un contrato (98,18 %), situación en la que se mantienen en la actualidad.

Por último, la clase 4 está formada por profesorado de 31 a 40 años, mujer, ingeniera o arquitecta, con una única titulación universitaria y que cursó el MAES. El perfil de respuestas de los integrantes de este grupo se diferencia en varios aspectos de los grupos anteriores. En primer lugar, eligieron sus estudios universitarios principalmente por sus salidas laborales, no contemplando la docencia como una de ellas. El grado de satisfacción que obtuvieron con dichos estudios fue “normal”, el más bajo de las cuatro clases, siendo único grupo que no volvería a repetirlos, lo que parece consecuencia del incumplimiento de las expectativas que les llevó a elegirlos. En cambio, es el grupo que más valora su formación inicial como suficiente para el trabajo que desempeñan, aún reconociendo que se debería ampliar la formación didáctica. Además, consideran que tanto dicha formación como las prácticas deben realizarse en el MAES. Son los que menos valoran la formación que se ofrece a los profesores desde la administración, otorgando la puntuación mínima a la que deben realizar los funcionarios en prácticas. Son docentes de reciente incorporación (2 a 5 años de experiencia) que trabajan en centros públicos a los que accedieron a través de bolsas de interinos, manteniendo esta situación de interinidad en la actualidad.

Independientemente del perfil de los encuestados, hay una percepción generalizada de que la formación didáctica debería reforzarse, respaldada por más del 80 % de los integrantes de cada clase, si bien no hay unanimidad respecto al momento en que debería realizarse. Esto sí ocurre con las prácticas docentes, que para los sujetos de todas las clases debería realizarse en el contexto del MAES. También coinciden todas las clases en los problemas que tienen que afrontar en las aulas, marcando la falta de interés del alumnado como el más relevante, seguido principalmente de problemas disciplinarios.

CONCLUSIONES

El análisis realizado permite definir cuatro clases latentes con características y percepciones distintas, caracterizada cada una de ellas por un patrón de respuesta exclusivo y exhaustivo a las variables

observadas. Se confirma asimismo la tendencia de descenso de los egresados del grado de Matemáticas que se dedican a la docencia y queda patente cómo el MAES ha mejorado la percepción que tienen los docentes sobre su formación inicial, ya que los integrantes de la clase que no lo cursaron (por realizar el CAP) son quienes consideran que su formación inicial es insuficiente en mayor porcentaje.

Dentro de las cuatro clases descritas se identifican, por un lado, docentes con una sólida formación matemática y una percepción positiva de su preparación inicial, quienes tienden a valorar menos la necesidad de formación continua. Por otro, se encuentran docentes con trayectorias formativas más diversas, en ocasiones procedentes de titulaciones afines, que muestran una mayor demanda de actualización y formación específica en didáctica de las matemáticas. Además, se han detectado diferencias en función de la experiencia docente, la estabilidad laboral y el tipo de centro donde trabajan, lo que sugiere que la formación y el desarrollo profesional no pueden abordarse de manera homogénea para todo el profesorado.

Los resultados obtenidos dan continuidad y enriquecen las conclusiones previas de Garrido-Rojas et al. (2024), ya que el método de análisis elegido en esta ocasión permite descubrir patrones en los datos sin necesidad de hacer suposiciones previas sobre las relaciones entre las variables, tal como sostienen Hartl y Holzberger (2022).

El estudio ha logrado el objetivo marcado consistente en identificar los perfiles de profesorado de matemáticas y su relación con la valoración de su formación inicial y continua. Se han identificado y descrito los perfiles latentes predichos por Holzberger et al. (2019), aclarando su existencia y características. Asimismo, la información analizada ayuda a conocer las fortalezas y debilidades del profesorado que sugieren Halpin y Kieffer (2015), ya que se han recogido datos sobre la suficiencia e idoneidad de la formación reglada que recibe, relacionándola con la clase a la que pertenecen. Esto permite mejorar la planificación de la formación docente, adaptándola a las debilidades de cada uno de los distintos perfiles detectados, tal como establecen Muñoz-Fernández et al. (2019).

Los hallazgos refuerzan la necesidad de replantear los modelos de formación docente en matemáticas, asegurando que respondan a las necesidades específicas de cada perfil. La heterogeneidad detectada implica que los planes de formación deben ser más flexibles y adaptados, combinando la profundización en contenidos matemáticos con el desarrollo de competencias didácticas. Además, se hace necesario reflexionar sobre la formación inicial, promoviendo grados en Matemáticas con perfil específico en enseñanza y educación matemática, que integren una sólida base disciplinar con conocimientos didácticos, y refuercen así la preparación docente y la calidad de los MAES.

En conclusión, este estudio identifica y describe los distintos perfiles del profesorado de Matemáticas, destacando la importancia de reconocer y atender la diversidad de clases existentes. La implementación de programas de formación diferenciados y la adaptación de las políticas educativas a estas realidades pueden contribuir significativamente a la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones futuras podrían profundizar en el impacto de estos perfiles en el desempeño docente y en el aprendizaje del alumnado, así como explorar estrategias para optimizar la formación inicial y continua en el área de las matemáticas.

Referencias

Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación [ANECA]. (2005). *Libro Blanco. Título de Grado en Matemáticas.* https://bit.ly/3Q5tcWK

Barquero-Farràs, B., Carriazo, A., de León, M., Moreno-Verdejo, A., Muñoz-Muñoz, J. J., Planas-Raig, N., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). *Estudio diagnóstico sobre la situación en competencia matemática*. CEMat-Ministerio de Educación, Deportes y Formación Profesional. https://hdl.handle.net/10481/101995

García-Longoria, M., y Blanco, L. J. (2005). La formación inicial de profesores de Matemáticas: Una encuesta entre los profesores de secundaria. *Campo Abierto,* (28), 111-128. https://bit.ly/4dvb5Dm

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 7*(26), 9-25. https://bit.ly/3WeZ1zg

Garrido-Rojas, J., Moreno, A., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024). Tendencias en educación matemática: explorando la relación entre el perfil del profesorado y la percepción de la formación en Enseñanza Secundaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 273- 280). SEIEM.

Garrido-Rojas, J. y Moreno, A. (enviado). Transformación del perfil del profesorado de matemáticas de secundaria: formación, identidad profesional y retos actuales.

Halpin, P. F., y Kieffer, M. J. (2015). Describing profiles of instructional practice: a new approach to analyzing classroom observation data. *Educational Researcher, 44*(5), 263–277. https://doi.org/10.3102/0013189X15590804

Hartl, A., y Holzberger, D. (2022). Identifying teachers' motivational profiles and their changes from teacher education into practice: A longitudinal study. *Z Erziehungswiss, 25*, 427–451. https://doi.org/10.1007/s11618-022-01093-0

Herrero-Díez, F. J., Diego-Rodríguez, I. y Bernardo Gutiérrez, A. B. (2025). *Análisis de Clases Latentes con JAMOVI (LatentClassAnalysis, LCA)*. https://bit.ly/4h9zr6h

Holzberger, D., Praetorius, A. K., Seidel, T. y Kunter, M. (2019). Identifying effective teachers: The relation between teaching profiles and students' development in achievement and enjoyment. *European Journal of Psychology of Education, 34*(4), 801-823. https://doi.org/10.1007/s10212-018-00410-8

Howard, M. C., y Hoffman, M. E. (2017). Variable-centered, person-centered, and person-specific approaches: Where theory meets the method. *Organizational Research Methods, 21*(4), 846–876. https://doi.org/10.1177/1094428117744021

Losano, L., Fiorentini, D. y Villarreal, M. (2018). The development of a mathematics teacher's professional identity during her first year teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 287-315. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9364-4

Martín de Diego, D. (Coord.). (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Real Sociedad Matemática Española y Fundación Ramón Areces. https://bit.ly/4bnvqZe

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso-Velázquez, P., Blanco, T. F., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2015). ¿Cuál es el perfil de los futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 575). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). https://bit.ly/3S2XrOm

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Valcke, M. (2016). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros países? *Revista de Educación* (372), 111-140. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-372-317

Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020). Perfiles del futuro profesorado de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(2), 141-161. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3161

Muñoz-Fernández, G. A., Rodríguez-Gutiérrez, P. y Luque-Vílchez, M. (2019). La formación inicial del profesorado de Educación Secundaria en España: perfil y motivaciones del futuro docente. *Educación XX1, 22*(1), 71–92. https://doi.org/10.5944/educXX1.20007

The jamovi project (2024). *Jamovi.* (Version 2.6) [Programa informático]. Recuperado de https://www.jamovi.org

Wu, Y., Hwang, S. y Cai, J. (2017). Being a Mathematics Teacher Educator in China: Challenges and Strategies Responses. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1365–1384. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9752-8

ANÁLISIS DE TÉCNICAS EMPLEADAS POR JÓVENES CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL PARA RESOLVER PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Analysis of techniques used by young people with intellectual disability for solving multiplicative problems

Hidalgo-Herrero, M.[a], Lerma, A. M.[b], García, F. J.[b], Ortega, C.[c], Sierra, T. A.[a]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de Jaén, [c]Asociación Achalay

Resumen

Esta investigación pretende abordar la problemática matemático-didáctica en torno a la comprensión y el sentido o razón de ser de problemas multiplicativos en la formación de jóvenes con discapacidad intelectual, cuya actividad matemática previa ha sido muy rígida y estereotipada. La comprensión de enunciados escritos les supone un hándicap y la validación de sus respuestas casi siempre corre a cargo del profesorado. En este trabajo, se muestran los resultados de una primera experimentación de una secuencia de problemas multiplicativos donde se utilizan materiales y modelos intermedios que favorecen la aparición de diversas técnicas artesanales o primitivas, como las de representación física o pictórica, empleadas por los estudiantes, que facilitan la comprensión de enunciados y la validación de sus resultados por el estudiantado.

***Palabras clave**: discapacidad intelectual, resolución de problemas verbales multiplicativos, modelos intermedios, técnicas artesanales*

Abstract

This research aims to address the mathematical-didactic challenges related to the understanding and the meaning or raison d'être of multiplicative problems in the education of young people with intellectual disabilities. Their previous mathematical activity has been very rigid and stereotyped. The understanding of written statements is a handicap for them and the validation of their answers is often the responsibility of the teachers. In this work, the results of a first experimentation of a sequence of multiplicative problems are shown, using intermediate materials and intermediate models that favour the appearance of various craft-like or primitive techniques, such as those of physical or pictorial representation, used by the students. These methods help facilitate the understanding of statements and enable the students to validate their own results.

Keywords: *intellectual disability, verbal multiplicative problem solving, intermediate models, primitive techniques*

INTRODUCCIÓN

En las instituciones cuyo fin es la construcción de conocimiento matemático, es común el debate sobre la enseñanza de las técnicas de cálculo, su pertinencia y la manera de enseñarlas (Reydy, 2013). Sin embargo, la cuestión trasciende a las técnicas de cálculo cuando la preocupación del profesorado se centra en las dificultades que encuentra el alumnado en el uso de estas en problemas (Sarrazy, 2007). Estas dificultades se ponen de manifiesto, especialmente, con alumnado con discapacidad intelectual (DI) (American Psychiatric Association, 2023). En estos casos, el profesorado, con frecuencia, selecciona problemas con *palabras clave*, de manera que el alumnado pueda asociar una técnica concreta a la aparición de una palabra clave y, así, pueda tener éxito en la resolución del problema. Sin embargo, estaríamos ante un éxito a corto plazo. A largo plazo, el uso de estas palabras

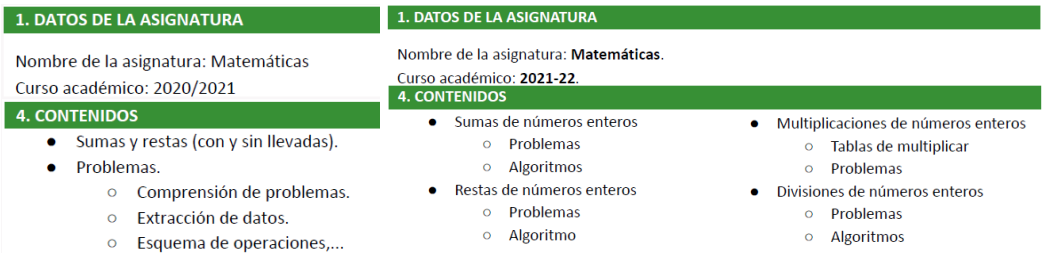
Hidalgo-Herrero, M., Lerma, A. M., García, F. J., Ortega, C. y Sierra, T. A. (2025). Análisis de técnicas empleadas por jóvenes con discapacidad intelectual para resolver problemas multiplicativos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

clave puede constituir un obstáculo didáctico, pues dicha estrategia solo funciona en algún caso, pero en la mayor parte de los casos es inadecuada (Shen, 2023). En esta línea, Powell et al. (2022) proponen que el profesorado debe ayudar al alumnado a comprender el problema, y Hardy et al. (2025) concluyen que, en general, todos los estudiantes, y en particular aquellos con dificultades en matemáticas, podrían beneficiarse de formaciones enfocadas en la resolución de problemas donde las palabras clave del enunciado son inconsistentes con la operación que permite resolver.

En general, el tipo de actividad matemática que se realiza con alumnado con DI cuando se les plantean problemas aritméticos suele tener un carácter rígido y atomizado (Bosch et al., 2004). Es decir, en cada tarea siempre se privilegia el uso de una técnica asociada y antes de proponer la tarea problemática se enseña la estrategia que va a permitir resolverla. Los problemas aritméticos, en general, se tienden a enseñar de forma aislada, o sea, primero se enseñan los de adición, después los de sustracción y así se sigue con los de multiplicación y división. Por ejemplo, en la Figura **12** 1 (curso 2021/2022) se muestran los contenidos relativos a las operaciones elaborados por el profesorado del Diploma Liceo, donde este hecho se asume. Además, se presentan primero las técnicas para después trabajar los problemas donde se aplican (Figura 1, curso 2020/2021). Asimismo, las técnicas utilizadas no aparecen justificadas y los problemas suelen ser validados por el profesorado.

Figura 12

Contenidos sobre las operaciones del Diploma Liceo



Según Peltier (2003), comprender el problema requiere entender que el enunciado está relacionado con una situación y que los datos pueden proporcionar información para dar respuesta a determinadas preguntas. Además, remarca que entender el enunciado implica llevar a cabo una acción que conlleva reflexiones y toma de decisiones. Por ello, la lectura del enunciado debería sugerir, al alumnado, que dicha situación es semejante a una ya tratada previamente (es decir, se debe favorecer que el alumnado reconozca aspectos isomorfos con otros problemas tratados).

Una línea de trabajo actual es la instrucción basada en esquemas (SBI, por sus siglas en inglés) (Polo-Blanco y González López, 2021) o la instrucción basada en esquemas modificados (MSBI, por sus siglas en inglés) (Fernández-Cobos et al, 2023), que, entre otros aspectos, indagan el uso de esquemas para comprender cada tipo semántico de problemas (Clausen et al., 2021).

La mayoría de las investigaciones que abordan la resolución de problemas por personas con DI se centran en estudiantes en edad escolar y a nivel individual. Sin embargo, en este trabajo, los participantes de la experimentación son jóvenes que ya han superado la edad de escolarización. Además, se pone el foco en el contexto institucional y en la construcción colectiva de técnicas de resolución, lo que es característico del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas. Esto supone una novedad frente a otras investigaciones de orientación más cognitiva.

Por todo ello, en este trabajo abordaremos, en el caso de jóvenes con DI, una propuesta didáctica que fomente el uso de materiales o modelos intermedios para la resolución de problemas multiplicativos y de división, en el sentido de Brousseau (1998). Al mismo tiempo, se busca la construcción de una organización matemática, en torno a dicho tipo de problemas, que sea relativamente completa (Bosch et al., 2004), de modo que facilite su comprensión y favorezca su resolución.

A continuación, se presenta el marco teórico que fundamenta el trabajo, seguido del problema de investigación, la descripción de la metodología de investigación, los resultados y primeros análisis, finalizando con una breve discusión y algunas conclusiones.

MARCO TEÓRICO

Para abordar el fenómeno de la pérdida de la *razón de ser* o del *sentido* de las operaciones aritméticas, detallado en la sección que describe el problema de investigación, utilizamos tanto elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

En el marco de la TAD, todo saber matemático en una institución determinada se modeliza mediante una praxeología matemática que consta de dos bloques: a) un bloque práctico que está constituido por tipos de tareas y técnicas (τ) que permiten su resolución; y b) un bloque tecnológico teórico que hace comprensible y justifica el bloque práctico. Asimismo, la realización de un proceso de estudio, en una institución determinada, se modeliza mediante una praxeología didáctica (Bosch et al., 2004).

Dentro de la TSD, un saber matemático se modeliza por una colección de situaciones para las que dicho saber es la mejor solución en una institución determinada. Así, dichas situaciones se convierten en la razón de ser de dicho saber, es decir, dichas situaciones contienen las cuestiones que le dan sentido (Brousseau, 1998).

El aprendizaje de una operación debe considerar dos objetivos: a) construir el sentido de la operación, es decir, explorar el campo de problemas que permite resolver y saber determinar si un problema se resuelve mediante dicha operación; y b) aprender una técnica operatoria oficial, dejando al alumnado que se acerque progresivamente a ella. Para alcanzar estos objetivos, será necesario dedicar primero la mayor parte del tiempo a que el alumnado construya el sentido de la operación, permitiéndole utilizar técnicas artesanales o primitivas que elabore para resolver los primeros problemas planteados. La enseñanza de la técnica oficial debe retrasarse, de modo que su aprendizaje surja, después de un proceso largo, como una evolución de las técnicas primitivas construidas. Así, dicha técnica operatoria llegará a ser percibida por el alumnado como necesaria y útil (Brousseau, 1998).

La adquisición del sentido de un problema está estrechamente relacionada con las técnicas utilizadas por el alumnado, aunque estas sean primitivas o artesanales. Por ello, las técnicas elaboradas por el propio alumnado lo ayudarán a construir el sentido de una operación (Peltier, 2003).

Además, en la construcción del sentido de un problema va a ser necesario que el alumnado se haga una representación del problema. En Brousseau (1998) se propone un proceso de estudio para el aprendizaje de la sustracción. Concretamente, propone un modelo de situación, "el juego de la caja y los cubitos", que se convierte en un modelo que permite que el alumnado construya el sentido de la sustracción y diferentes estrategias de resolución. Es decir, este modelo de situación se convierte en un modelo intermedio de modo que cualquier problema de sustracción se representa y traduce a este sistema de la caja. El uso de un modelo intermedio o de un material puede ayudar a que el alumnado elabore con mayor facilidad una representación del problema, lo que le permitirá dotar de sentido al problema y elaborar diferentes técnicas de resolución.

Ingeniería didáctica y TAD

La metodología de investigación que se ha seguido, aunque no se muestre en su totalidad en este trabajo, ha sido la de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 2014) reinterpretada en términos de la TAD (García et al., 2019). Su primera fase comprende el análisis preliminar, en particular el análisis epistemológico del contenido matemático a enseñar y la identificación de los fenómenos didácticos. En la segunda fase se realiza un diseño y análisis *a priori*, dando lugar a la secuencia de intervención. La tercera fase es el análisis *in vivo*, es decir, la dimensión experimental de la investigación. Finalmente, la cuarta fase es el análisis *a posteriori* en la que se contrastan o validan hipótesis y se da respuesta a los fenómenos didácticos.

En atención a la primera fase de la metodología, en la siguiente sección se aborda el planteamiento del problema de investigación a partir de la identificación de fenómenos didácticos no deseables.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo surge por la observación de forma experimental de fenómenos didácticos en la actividad matemática realizada por grupos de jóvenes con DI cuando resuelven problemas aritméticos. En concreto, 1) la dificultad en la comprensión y sentido de los enunciados (Peltier, 2003) en este alumnado; 2) la actividad matemática rígida y estereotipada (p. ej., no se consideran diferentes técnicas para resolver un mismo problema) (Bosch et al., 2004); y 3) el alumnado siempre espera que el profesorado le valide las respuestas obtenidas (fenómeno de irresponsabilidad matemática del alumnado) (Chevallard et al., 1997).

El problema general que guía esta investigación es: ¿cómo elaborar una propuesta didáctica que permita hacer frente a los fenómenos didácticos observados en la resolución de problemas multiplicativos en formación permanente de jóvenes con DI? En este trabajo, por restricción de espacio, nos limitamos a problemas de isomorfismo de medidas (PIM) y se intenta dar respuesta a las siguientes cuestiones: 1) ¿Cómo hacer comprensibles los PIM a jóvenes con DI?; 2) ¿Qué técnicas utilizan en la resolución de PIM y cómo favorecer el desarrollo colectivo de estas?; y 3) ¿Cómo hacer frente al fenómeno de irresponsabilidad matemática del alumnado?

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Descripción del grupo

El grupo está conformado por 19 individuos de edades comprendidas entre 18 y 30 años. De ellos, 8 presentan diagnóstico de DI leve, 3 de DI moderada, 2 de funcionamiento intelectual límite, 3 de trastorno del lenguaje, 1 de trastorno del desarrollo y 2 presentan signos de DI, pero sin diagnóstico médico. Algunas de las comorbilidades que presentan son: trastorno del aprendizaje, trastorno de ansiedad generalizada, trastorno del espectro del autismo, alteración de la conducta, trastorno por déficit de atención con hiperactividad y mutismo selectivo. Todos ellos cursan el Diploma Liceo, de formación permanente para jóvenes con discapacidad intelectual, impartido en la Universidad Complutense de Madrid.

Descripción de la propuesta

La secuencia completa diseñada incluye todos los problemas de tipo multiplicativo según la clasificación de Vergnaud (Peltier, 2003). Inicialmente, 17 de los 19 sujetos presentaban grandes dificultades a la hora de resolverlos. En esta comunicación, nos centramos en los PIM de multiplicación de la secuencia, dejando pendiente el análisis del resto de tipos para una otros trabajos.

Las sesiones se planificaron según la siguiente estructura: 1) se mostraba el problema en la pantalla; 2) se hacía una lectura colectiva del enunciado; 3) se abordaba de manera individual y autónoma, con intervenciones puntuales y estratégicas del docente; y 4) se realizaba una puesta en común de todas las técnicas empleadas por todo el estudiantado. Además, diferentes tipos de materiales (cubos *Multilink*, palillos…) estaban a disposición del alumnado y los podían utilizar a demanda.

En la Tabla 1 solo se recogen las sesiones 1, 3, 5, 6 y 7 de la propuesta, ya que en ellas se trabajan PIM que se resuelven con técnicas de multiplicación. La notación de los problemas (P_i) indica la posición de cada uno de ellos dentro de la secuencia completa.

Categorización de las técnicas

Dentro del diseño y análisis *a priori*, que dio lugar a la propuesta descrita arriba, se anticiparon las siguientes técnicas, que el alumnado podría utilizar para la resolución de los problemas:

τ_1: Multiplicación – técnica clásica (utilización de las tablas o de la calculadora).

τ_2: Suma reiterada.

τ_3: Representación reiterada con objetos físicos y conteo de 1 en 1.

τ_4: Representación reiterada con objetos físicos y suma reiterada.

τ_5: Representación reiterada con objetos físicos y multiplicación (técnica clásica).

Con representación reiterada de objetos físicos se hace referencia a que el alumnado representa el problema utilizando cubos *Multilink*, que se espera sea usado como modelo intermedio a partir de P_1.

τ_6: Representación pictórica reiterada (analógica o primitiva o numerales) y conteo de 1 en 1.

τ_7: Representación pictórica reiterada (analógica o primitiva o numerales) y suma reiterada.

τ_8: Representación pictórica reiterada (analógica o primitiva o numerales) y multiplicación (técnica clásica).

Cuando hablamos de representación pictórica reiterada, el alumnado representa el problema dibujando. En τ_3, τ_4, τ_5, τ_6, τ_7 y τ_8, para obtener la solución al problema, es necesario obtener el cardinal de la colección total, ya sea contando de 1 en 1, realizando una suma reiterada o una multiplicación (tablas o calculadora). Asimismo, consideramos que, en el caso de la representación pictórica, esta varía según si el alumnado dibuja el objeto del enunciado (representación pictórica analógica) o si emplea un simple trazo (representación pictórica primitiva) o si usa la serie numérica (representación pictórica con numerales) para resolver el problema (por ejemplo, en el problema P_7 el alumnado podría escribir "1, 2, 3, 4, 5" para hacer referencia a las cinco jaulas).

Tabla 1

Problemas multiplicativos similares en diferentes contextos (elaboración propia)

Sesión (S)	Objetivo	Problemas (P)
S_1: Problemas verbales orales con cubos	Construir el modelo intermedio de cubos - validación	P_1: Tenemos estos cubos que se encajan (tipo *Multilink*). Cada barra tiene 5 cubos. Introducimos 4 barras en la caja y la cerramos. ¿Cuántos cubos hay en la caja?
S_3: Problemas verbales escritos con múltiples contextos	Traducir el problema al modelo de cubos	P_7: En cada jaula se meten 3 gallinas. Tenemos 5 jaulas. ¿Cuántas gallinas tenemos?
S_5: Problemas verbales escritos con múltiples contextos	Resolver el problema a partir de una representación gráfica del mismo	P_{11}: En una granja hay 6 gallinas y cada una pone 2 huevos cada semana. ¿Cuántos huevos ponen en total en 3 semanas? P_{12}: Un chef prepara 3 pizzas y las corta en 8 porciones cada una. ¿Cuántas porciones tiene en total?
S_6: Problemas verbales escritos con múltiples contextos		P_{14}: Cada día, los alumnos de una clase meten 8 canicas en una caja. ¿Cuántas canicas habrá en la caja al cabo de 9 días?
S_7: Problemas verbales escritos con múltiples contextos		P_{16}: Un supermercado vende botellas de agua en paquetes de 6 botellas cada uno. Si un cliente compra 5 paquetes, ¿cuántas botellas de agua compra?

RESULTADOS Y PRIMEROS ANÁLISIS

Tras el análisis *in vivo*, que no se detalla aquí por problemas de espacio, se ha realizado un análisis *a posteriori* que incluye el estudio de las técnicas utilizadas por el alumnado con DI en los problemas

descritos en la Tabla 1. Todas las técnicas aparecieron de forma espontánea, excepto la τ_4, que no surgió. A continuación, se describen las técnicas utilizadas por el alumnado y el desarrollo de la puesta en común con institucionalización para cada problema.

Problema P_1

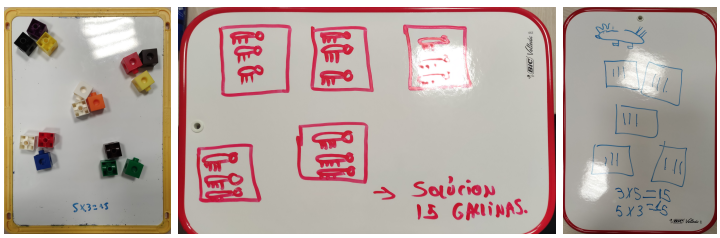
En este problema se esperaba que el alumnado utilizara una multiplicación (τ_1) o una suma reiterada (τ_2). La primera fue empleada por el alumnado que resolvió con éxito el problema. En el caso de la suma reiterada, una persona realizó 5+5, lo que podría deberse a olvidar el número de barras que se introducen o a la creencia personal del estudiante de que "un problema se resuelve con una sola operación". Por último, algunos estudiantes realizaron una operación aritmética sin sentido (suma) con los datos del problema, evidenciando dificultades de comprensión del mismo. En la puesta en común, se abrió la caja y se contaron los cubos introducidos en la caja (validación) y se expusieron las técnicas τ_2 (suma reiterada) y τ_1 (multiplicación clásica) y su relación.

Problema P_7

Aquí destaca cómo el alumnado comenzó a recurrir al modelo intermedio de los cubos, ya que, en la secuencia completa, habían trabajado previamente con dicho modelo intermedio en otros problemas y estaban familiarizados con el modelo. En la Figura 2 se muestran tres técnicas empleadas por el estudiantado. En la imagen de la izquierda, realizaron una representación física con cubos para comprender el problema, que finalizaron con una multiplicación clásica (técnica τ_5). En la imagen del centro y de la derecha, el modelo intermedio pasó de ser físico, con cubos, a pictórico. En la imagen del centro, la representación fue pictórico-analógica, seguida de conteo (τ_6), mientras que en la imagen de la derecha la representación es pictórico-primitiva, seguida de una multiplicación clásica (τ_8). Señalamos que en la resolución de este problema todas las técnicas empleadas por la clase permitían resolver de forma correcta el problema.

Figura 2

Técnicas con representaciones física y pictórica reiteradas empleadas por el alumnado (elaboración propia)



En la puesta en común, se institucionalizaron las técnicas empleadas por el alumnado y la suma reiterada (τ_2) que no fue empleada en este caso. La validación la realizaron contando de 1 en 1.

Problema P_{11}

Este problema involucra dos operaciones, rompiendo la regla que este grupo asumía, implícitamente, de que todo problema se resuelve con una única operación. Un grupo de estudiantes necesitó ayuda del docente en la representación del problema, a pesar de no estar previsto. En el grupo que no necesitó apoyo, las técnicas utilizadas fueron la representación pictórica global de todo el problema (6 gallinas, cada una con 2 huevos por semana) y posterior conteo (τ_6), y otra que combina τ_2 (suma reiterada) para el cálculo de huevos en una semana y τ_1 (multiplicación clásica) para los huevos totales. Tras la puesta en común de las técnicas usadas, validaron el problema usando el conteo en las representaciones.

Problema P_{12}

El uso de un contexto familiar para el estudiantado (pizzería) favoreció la comprensión de este problema. Las técnicas utilizadas por el alumnado se pueden clasificar en dos grupos: la

multiplicación clásica (τ_1) y las que utilizan una representación pictórica analógica (τ_6, τ_7 y τ_8). Se pusieron todas en común, quedando patente que se podía resolver con sumas reiteradas y con multiplicación clásica. La validación se realizó por conteo en una representación pictórico-analógica.

Problema P_{14}

En este caso, se observaron dos hechos. En primer lugar, el alumnado no comprendía el término "al cabo" y el docente lo modificó por "después". En segundo lugar, cuatro estudiantes no utilizaron técnicas que les permitieran resolver el problema. Por ejemplo, representaron de forma pictórica un dato del enunciado o realizaron una operación aritmética distinta de la multiplicación con los datos del enunciado, quizás debido a que el tamaño de las colecciones era mayor.

En cuanto al alumnado que resolvió la tarea con éxito, destacamos el uso parcial del modelo intermedio (representar de forma pictórica de la caja de las 8 canicas y, después, realizar una multiplicación clásica). También se usaron τ_1, τ_7 y τ_8. En la puesta en común, un estudiante sustituyó las cajas con canicas por la escritura de ochos; y después otros sugirieron utilizar la calculadora para sumar los ochos (8+8+8+8+8+8+8+8=72, τ_2) y para multiplicarlos (8x9=72, τ_1). Para validar, un alumno propuso la técnica τ_6, dibujando 9 filas de 8 canicas.

Problema P_{16}

En este problema, fue necesario cambiar el enunciado, reemplazando "un cliente compra 5 paquetes" por "un cliente compra 5 paquetes de botellas". A partir de este cambio, las técnicas que aparecieron fueron representación física (modelo intermedio) seguida de conteo (τ_3) (institucionalizada con representación pictórico-analógica) y representación pictórica seguida de otras acciones (es decir, técnicas τ_6, τ_7 y τ_8). La traducción al modelo físico intermedio de los cubos permitió la validación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Brousseau (2007) señala que "Aislados de su contexto, los algoritmos se convierten en respuestas adquiridas a futuras preguntas de las que, por el momento, no se sabe gran cosa" (p.88). La propuesta experimentada ha abordado a la vez la comprensión de los problemas multiplicativos y las técnicas que permiten resolverlos. El alumnado ha empleado técnicas artesanales o primitivas, basadas en representaciones físicas y pictóricas, pudiendo así articular el sentido y las técnicas de la operación (Peltier, 2003). También ha empleado técnicas diferentes en un mismo problema para resolver dos cuestiones del mismo tipo. Por ello, la actividad matemática que el alumnado ha desarrollado en la experimentación presenta un carácter menos rígido y estereotipado.

El uso del modelo intermedio de los cubos ha mostrado ser eficaz para la comprensión de la operación. Asimismo, el uso posterior de representaciones pictóricas sugiere la comprensión de los enunciados por parte del estudiantado. El uso de técnicas basadas en el conteo también parece indicar una mayor comprensión de los problemas. Así, la secuencia propicia la comprensión de enunciados como sugerían Powell et al. (2022).

En la misma línea que Polo-Blanco et al. (2018), la investigación se ha centrado en el estudio de las técnicas que emplea el alumnado con DI en la propuesta experimentada. En concreto, se ha observado que el uso de técnicas artesanales les permite recurrir a ellas para construir el sentido de la operación, para resolver problemas y para validar su resolución, asumiendo su responsabilidad. Se observa una progresiva tendencia a abandonar el uso de técnicas basadas en materiales físicos manipulativos para comenzar a utilizar representaciones pictóricas y operaciones (sumas reiteradas, multiplicación con calculadora...).

Los modelos intermedios y los materiales utilizados proporcionan ciertos esquemas de resolución, de forma similar a la SBI o MSBI, aunque queda pendiente un análisis más detallado.

Referencias

American Psychiatric Association. (2023). *Guía de Consulta de los Criterios Diagnósticos del DSM-5-TR®*. Panamericana.

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_44

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2–3), 205–250.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE Universitat Barcelona-Horsori.

Clausen, A. M., Tapp, M. C., Pennington, R. C., Spooner, F. y Teasdell, A. (2021). A systematic review of modified schema-based instruction for teaching students with moderate and severe disabilities to solve mathematical word problems. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities*, *46*(2), 94-107. https://doi.org/10.1177/15407969211007561

Fernández-Cobos, R., Polo-Blanco, I., Lebeña Cagigas, A. L. y Rodríguez-Candelero, P. (2023). Estudio preliminar sobre resolución de problemas aditivos en alumnado con autismo mínimamente verbal. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 567). SEIEM.

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75–94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Hardy, A. M., Douglas, G. P., MacLean, K. B., Mason, K. K. y Powell, S. R. (2025). How Keywords Impact Word-Problem Performance: When "More" Does Not Mean to Add. *Learning Disability Quarterly*, https://doi.org/10.1177/07319487251322473

Peltier, M. L. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática*, *15*(3), 29-55. https://doi.org/10.24844/EM1503.02

Shen, Z. (2023). *The effectiveness of concrete-representational-abstract integration framework within word-problem solving for students experiencing mathematics difficulty*. (Tesis doctoral).

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M.J. y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con trastorno del espectro autista: un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva*, *11*(2), 161-180.

Polo-Blanco, I., y González López, M. J. (2021). Instrucción basada en esquemas para la enseñanza de la resolución de problemas aditivos en estudiantes con trastorno del espectro autista: un estudio de caso. *Realidad y Reflexión*, *53*(53), 254-269. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10898

Powell, S. R., Namkung, J. M. y Lin, X. (2022). An investigation of using keywords to solve word problems. *The Elementary School Journal*, *122*(3), 452–473. https://doi.org/10.1086/717888

Reydy, C. (2013). Apprendre à poser les soustractions? Quand l'enseignement spécialisé questionne les pratiques ordinaires sur les opérations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *33*(2), 183–218.

Sarrazy, B. (2007) Sens et algorithmes. Approche historico-critique de l'usage des algorithmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Actes en ligne du congrès international AREF*.

APORTACIONES DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA AL ESTUDIO DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Contributions of the epistemic configuration for the study of the improper integral

Igolnikov, N.a y Rivas, M.b

[a]Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Instituto de Investigaciones en Didáctica de las Ciencias Naturales y la Matemática (CEFIEC), [b]Universidad de Granada

Resumen

Esta comunicación informa sobre un estudio teórico de las configuraciones epistémicas de la integral impropia. Se ha optado por el uso de herramientas propuestas desde el marco teórico-metodológico del Enfoque OntoSemiótico, el cual orienta las acciones de análisis y sustenta la producción de los resultados informados. Desde la perspectiva de este enfoque, se plantean avances en la producción de un posible significado de referencia para el objeto Integral Impropia, a partir de un análisis ontosemiótico de cuatro resoluciones expertas de un problema propuesto en el ámbito de formación de profesores, con el fin de identificar objetos y procesos matemáticos involucrados en los sistemas de práctica correspondientes. Las configuraciones epistémicas producidas permiten poner en relación el uso de los marcos geométrico, analítico y algebraico, el tipo de argumentos empleados y el rol de los procesos de cálculo en los distintos tipos de práctica.

Palabras clave: *didáctica del análisis matemático, enfoque ontoSemiótico, integral impropia.*

Abstract

This paper reports on a theoretical study of the epistemic configurations of the improper integral. We have opted for the use of tools from the theoretical-methodological framework of the OntoSemiotic Approach, which orients the actions of analysis and sustains the production of the reported results. From the perspective of this approach, progress is made in the production of a possible reference meaning for the Improper Integral object, based on an ontosemiotic analysis of four resolutions of a problem proposed in the field of teacher training, in order to identify mathematical objects and processes involved in the corresponding systems of practice. The epistemic configurations produced allow us to relate the use of geometric, analytical and algebraic frameworks, the type of arguments used and the role of calculation processes in the different types of practice.

Keywords: *didactics of mathematical analysis, ontoSemiotic approach, improper integrals.*

INTRODUCCIÓN

Algunos estudios han abordado aspectos del estudio didáctico-matemático del objeto integral impropia. Una de las principales aportaciones encontradas es la de González-Martín (2005), quien realiza en su tesis doctoral un análisis de este objeto en términos de sus dimensiones epistémica, didáctica y cognitiva. En particular, el autor identifica, tanto en el desarrollo histórico del mismo como en los materiales utilizados para su enseñanza, que la integral impropia se caracteriza por ser una generalización del objeto integral definida, en estrecho vínculo con la conceptualización del objeto funcional $f(x) = \int_a^x f(t)dt$. Esta generalización puede tener lugar tanto por vía de considerar intervalos de integración no acotados (integrales impropias de tipo I), como de considerar funciones no acotadas en el dominio de integración (integrales impropias de tipo II).

Igolnikov, N. y Rivas, M. (2025) Aportaciones de la configuración epistémica al estudio de la integral impropia. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

Mateus-Nieves y Font-Moll (2021) realizan una extensa revisión bibliográfica e historiográfica con la intención de caracterizar la complejidad epistemológica del objeto Integral a partir de un análisis historiográfico, reinterpretando fuentes primarias en términos de la clasificación moderna de integrales definida, indefinida e impropia, complementando trabajos como el de Crisóstomo (2012) orientados específicamente al objeto Integral Definida. Así, los autores proponen tres Configuraciones Globales Epistémicas para la integral vista como un objeto en sí. La integral impropia es parte de la Configuración Epistémica 3, asociada a la "fundación del cálculo integral", involucrada entre los distintos objetos primarios que la componen, aunque los autores mencionan que las diferentes configuraciones "are partial displays and explanations of the emergent object, emerging from mathematical practices useful to present and formalize specific situations such as: types of integral, (...) applications of improper integrals in complex analysis, to name a few" (Mateus-Nieves y Font Moll, 2021, p. 21). En este orden de ideas, el presente trabajo pretende profundizar en el estudio de la complejidad del objeto integral, al indagar concretamente el objeto integral impropia y producir configuraciones epistémicas específicas obtenidas a partir del estudio de las prácticas matemáticas asociadas a este objeto.

Mojica et al. (2021) realizan un estudio de caso donde analizan diferentes producciones de estudiantes en las que está involucrado el objeto Integral Impropia, concluyendo que su comprensión no se orienta a una definición formal, sino que se encuentran más próximas a una de tipo intuitivo, destacando la preferencia de estos por el tratamiento algebraico de las mismas (Mojica et al, 2021, p. 49). Esta tendencia de los estudiantes hacia los procedimientos de cálculo algebraico, al resolver integrales impropias, ha motivado el análisis de resoluciones del problema objeto de estudio que posiblemente no se corresponden rigurosamente con lo solicitado en el mismo. Se ha pretendido abordar las posibles soluciones, incluso la del cálculo algebraico que posiblemente, aunque es adecuada, presenta la menor eficiencia.

Esta comunicación, como se ha referido, se propone complementar las aportaciones derivadas de los trabajos referidos a partir de la realización de un estudio de corte teórico con el fin de identificar objetos y significados matemáticos en torno al concepto de integral impropia. Concretamente mediante el estudio de cuatro posibles resoluciones dadas a un problema de integral impropia se producen cuatro configuraciones epistémicas de los objetos matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos) puestos en juego en cada resolución. El foco en el análisis ontosemiótico de las resoluciones del cual emergen para la propuesta de las configuraciones epistémicas, centradas en el concepto de Integral Impropia, constituye uno de los principales ejes de esta complementariedad. Se ha tomado como referencia la guía de problemas de un curso de formación de futuros profesores, en la asignatura "Análisis de una variable: Integración", de la cual ha sido tomado el problema objeto de análisis.

MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

Se asumirá el Enfoque OntoSemiótico (EOS) como marco teórico-metodológico, desde el cual se interpretan las matemáticas como una actividad, un sistema de procesos y objetos culturalmente compartidos, y un sistema de signos (Godino, 2024).

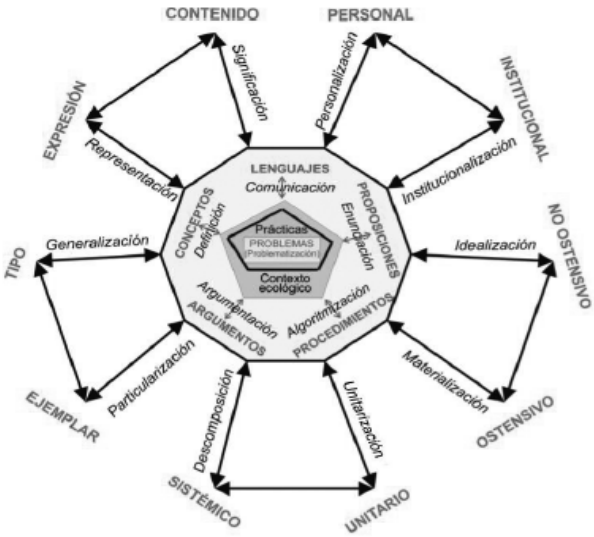
El EOS se posiciona epistemológicamente a partir de considerar la naturaleza pragmática del conocimiento matemático, el cual incluye tanto una familia de prácticas como una red de objetos y procesos interrelacionados. En la Figura 1 se presenta la configuración ontosemiótica de prácticas objetos y procesos, en la que se puede observar la distinción entre objetos primarios (Situaciones-Problema, Lenguajes, Conceptos, Proposiciones, Procedimientos y Argumentaciones) y secundarios, organizados en cinco dualidades (Personal-Institucional, Expresión-Contenido, Extensivo-Intensivo, Sistémico-Unitario, Ostensivo-No ostensivo), las cuales tienen asociadas sus correspondientes procesos.

Así, el sentido de un objeto matemático resulta relativo y dependiente del contexto donde tiene lugar, de modo que el significado global de un objeto matemático es entendido por los tipos de problema en los que participa y los sistemas de práctica empleados para resolverlos, conjuntamente a un ámbito institucional determinado donde ello tiene lugar. Este significado global puede ser comprendido a través de los significados parciales o de referencia.

Esta manera de concebir el significado (global o parcial) de un objeto matemático pone de relieve la necesidad de instrumentar y concebir un segundo nivel de análisis enfocado en un tipo de Situación-Problema y la secuencia de prácticas involucrada para resolverlo.

Figura 1

Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (Godino, 2024, p. 69)



El constructo teórico "Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos" permite realizar análisis ontosemióticos de la resolución de problemas, enfocado en la identificación de objetos y procesos matemáticos involucrados en cada una de las prácticas elementales implicadas en la resolución. Luego, estos análisis dan lugar a la configuración epistémica de la tarea, siendo la Configuración Epistémica una red de objetos emergentes de sistemas de prácticas y las relaciones establecidas entre ellos (Godino, 2024). En esta comunicación, se presentan sistemas de prácticas involucrados en cuatro resoluciones de una Situación-Problema sobre integral impropia, y el análisis ontosemiótico realizado permite identificar estos objetos y procesos emergentes, posibilitando la propuesta de configuraciones epistémicas basadas en ello, lo cual se considera un aporte a la construcción de un significado de referencia y, por ende, una parte del significado global del objeto Integral Impropia.

De manera complementaria, se considera la noción de Registro de Representación, caracterizado como cualquier sistema semiótico en el que se pueden realizar "las tres actividades fundamentales ligadas a la semiosis (Duval, 1993, p.3): representación (del objeto), tratamiento (transformación de una representación en el mismo registro) y conversión (transformación cambiando de registro). Esto permite el análisis de las resoluciones en términos del uso de registros gráfico-cartesiano, algebraico y funcional. Asimismo, se considera la noción de Marco (Douady, 1986), entendido como "un dominio de la matemática que está suficientemente bien identificado por sus objetos, por las relaciones entre ellos, y por los tipos de representación y tratamiento que moviliza" (Balacheff, 2005, p.185). En este contexto, la Integral Impropia puede ser entendida desde el marco geométrico -como el área de una región determinada- y analítico (este último conceptualizado explícitamente en Rogalsky (2001)).

En lo relativo a la metodología, dado que el objetivo de este trabajo es contribuir a una caracterización teórica del objeto matemático "Integral Impropia" haciendo uso de herramientas de análisis teórico-metodológicas propuestas por el EOS, esto supone que la metodología de trabajo se encuentra estrechamente relacionada con la propia estructura del sistema teórico que la sustenta. En este sentido, elementos teóricos y metodológicos se encuentran interrelacionados, puesto que la tarea de caracterizar teóricamente orienta el tipo de estudio a ser realizado, a la vez que este último realiza aportaciones que enriquecen el corpus teórico en el cual tiene lugar. Específicamente se ha implementado para el desarrollo de la investigación en proceso, los siguientes procedimientos: (a) Revisión inicial de la literatura, que ha proporcionado algunos referentes antes mencionados en torno al estudio de la Integral Impropia. (b) Elección del problema a analizar, el cual es parte de una guía de problemas de una asignatura de un curso de formación de futuros profesores de matemáticas. El problema elegido (ver Figura 2) incluye en su consigna la "anticipación" sobre la divergencia o convergencia de las integrales en cuestión, lo que conjuntamente con las características de las mismas habilita no solo una amplia gama de resoluciones sino también de argumentos. Asimismo, la diversidad involucrada, incluye el empleo de diversos marcos, registros, propiedades y relaciones. (c) Diseño de las soluciones expertas (desde la perspectiva de los significados institucionales), las cuales son realizadas por los investigadores. (d) Análisis ontosemiótico de las resoluciones, los cuales son también realizados por los investigadores. Tanto las resoluciones como sus análisis se realizan, en el desarrollo de un proyecto de investigación más amplio aún en proceso. (e) Producción de las configuraciones epistémicas basadas en la revisión de la literatura y en los análisis ontesemióticos realizados. (f) Análisis de las configuraciones epistémicas para identificar sus posibles aportaciones al trabajo docente.

RESULTADOS PRINCIPALES

Presentamos en la Figura 2 el problema elegido.

Figura 2

Problema elegido para el análisis ontosemiótico de resoluciones

Anticipar si las integrales siguientes convergen o divergen.

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$ b. $\int_{-\infty}^{+\infty} (t^4 + 2t^2) dt$ c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{x^2} dx$

El análisis ontosemiótico se centrará en el ítem b., realizado sobre cuatro resoluciones, a partir del cual no solo se resaltan conceptos, representaciones, argumentos y procesos puestos en juego, sino que se extiende el análisis realizado a los otros ítems.

Resoluciones propuestas y configuraciones epistémicas

Llamaremos a las resoluciones R1, R2 (presentadas en la Tabla 1), R3 y R4 (que, por su extensión, se encuentran disponibles junto a los análisis ontosemióticos de cada resolución en https://acortar.link/ywjemz), respectivamente.

R1 es una resolución sintética y formal. R2 se apoya fundamentalmente en el cambio al marco geométrico, aspecto que resulta indisociable del desarrollo del concepto de Integral y de su expresión en diferentes libros de texto (Crisóstomo 2012; González-Martin, 2005; Mateus-Nieves y Font-Moll, 2021). R3 y R4 tienen un carácter predominantemente algebraico, en consonancia con lo identificado por Orton (1983) y Mojica et al. (2021) en las resoluciones de estudiantes.

El análisis ontosemiótico realizado a R1 la enmarca completamente en el marco analítico. Las proposiciones que permiten resolver el problema pueden ser demostradas también en este marco. La estructura y los argumentos empleados se asemejan a una demostración matemática formal. Aunque la idea que subyace a esta resolución es la de la integral impropia como un límite, esto no es

explícitamente empleado. Esta es una resolución adecuada tanto desde el punto de vista de la pertinencia como de la eficiencia para la resolución.

Tabla 1

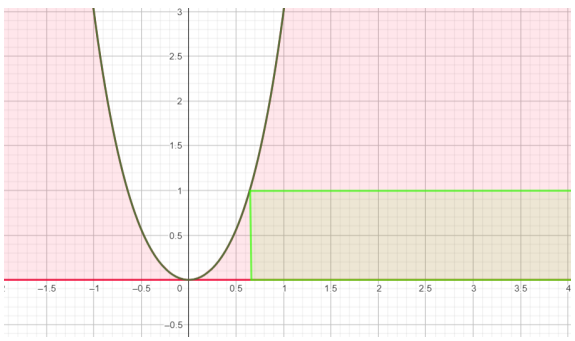
Resoluciones Analítica y Geométrica

R1: Resolución Analítica	R2: Resolución Geométrica
La función integrada $f(x) = x^4 + 2x^2$ es una función no negativa, ya que está expresada como una suma de términos no negativos. Como la función es de tipo polinómico, es continua en toda la recta real, y su límite en el infinito es infinito. En consecuencia, la integral diverge.	Si la función integrada es no-negativa, la pregunta por si la integral converge o diverge puede ser interpretada como la pregunta por si el área bajo la curva es finita o infinita. Si el área bajo la curva es infinita entonces la integral impropia diverge. La función integrada $f(x) = x^4 + 2x^2$es una función no negativa, ya que está expresada como una suma de términos no negativos. Para analizar si el área bajo la curva es o no infinita, se produce un gráfico (ver Figura 3) de la misma donde analizar. A partir del gráfico se puede observar que es posible incluir dentro de la región a analizar un "rectángulo infinito". Como el área bajo la curva es mayor que el área del rectángulo infinito, que es infinita, el área bajo la curva es infinita, por tanto la integral diverge.

El análisis ontosemiótico realizado a R2 permite observar que la positividad de la función posibilita el cambio de marco. Esto habilita la conversión entre el registro simbólico y el gráfico cartesiano, dando lugar a un proceso de materialización y, consecuentemente, al uso de la proposición empleada en la última línea de R2. Todo ello requiere movilizar una red de objetos y procesos de carácter diferente al de R1.

Figura 3

Gráfico de la función integrada en el ítem b., incluyendo un rectángulo infinito (sombreado verde) en la región denotada por la integral impropia (sombreado rojo)



Asimismo, se observa que es posible extrapolar este tipo de argumentos para las integrales propuestas en los ítems a. y c., en la medida en que estos se apoyan esencialmente en el carácter continuo, positivo y no acotado de las funciones integradas, características que son comunes en los ítems mencionados. A partir de las características compartidas por estas resoluciones, se plantea la hipótesis de que esta extrapolación es posible para una clase más amplia de funciones y de problemas. Ello permite proponer las configuraciones epistémicas Analítica y Geométrica, presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2

Configuraciones Epistémicas: Analítica y Geométrica

Configuración Epistémica Analítica (CEAim)	Configuración Epistémica Geométrica (CEGim)

Situaciones-Problema: Estudio de la convergencia integrales impropias de tipo I o sobre toda la recta real para funciones no-negativas. Estudio de propiedades generales de integrales impropias. Procedimientos: Analizar la positividad, el carácter acotado o no de la función integrada, y su límite en infinito. Comparación directa con otras funciones. Lenguaje: Funcional, algebraico y analítico. Conceptos: Función, cota, continuidad, límite, orden. Propiedades: Propiedades de la integral (linealidad, aditividad, orden). Criterios de comparación directa de integrales. Argumentos: deductivos.	Situaciones-Problema: Cálculo de integrales impropias para funciones no-negativas, en cuya región pueda incluirse otra de área infinita, o que esté incluida en otra región cuya área es finita. Procedimientos: Analizar la positividad de la función integrada y la posibilidad de incluir regiones infinitas o incluirla en regiones finitas. Lenguaje: Geométrico y funcional. Conceptos: Inclusión de regiones, borde, área, infinito numérico y geométrico. Propiedades: Comparación de áreas entre regiones incluidas unas en otras, aditividad de áreas. Argumentos: visualización, deductivos.

Los análisis ontosemióticos realizados a R3 y R4 muestran que se caracterizan por el uso de objetos de carácter analítico-algebraico involucrado en el cálculo explícito de $\int_0^{+\infty} (x^4 + 2x^2)dx$ lo que implica resoluciones considerablemente más extensas que las anteriores. Análogamente a lo referido en el caso de R1 y R2, es posible extrapolar el tipo de resolución a los ítems a) y c), toda vez que las funciones integradas tienen primitivas que pueden hallarse en una tabla. En el caso de R3, la argumentación se apoya en una red de conocimientos muy densa, involucrando argumentos y proposiciones considerablemente generales y abstractos como el Teorema Fundamental del Cálculo, la Regla de Barrow, la linealidad del operador integral, entre otros, mientras que R4 se presenta coincidente con R3 a nivel operatorio, pero marcadamente distinta en cuanto al tipo de argumentación, de carácter más bien formal-algorítmico, lo cual guarda coincidencias con el tipo de resoluciones que han encontrado González-Martín (2005), Mojica et al. (2021) y Orton (1983) en sus respectivos estudios. En este sentido, mientras R3 se apoya en un conjunto de argumentos y propiedades generales, para el caso de R4 el propio algoritmo funcionaría autotecnológicamente (Chevallard, 1999, p.225) respecto de la técnica, enfatizando la diferencia a nivel de argumentos entre ambas resoluciones. Como resultado de estos análisis se obtienen las configuraciones epistémicas presentadas en la Tabla 3.

DISCUSIÓN/CONCLUSIÓN

La pertinencia y eficacia de las resoluciones R1 y R2 ha permitido poner de relieve la relevancia del marco analítico y geométrico para la conceptualización de la integral impropia, teniendo en cuenta que la razón de ser del concepto de integral se encuentra íntimamente ligada al problema del cálculo de áreas de regiones de borde curvo (González-Martín, 2005). Los análisis ontosemióticos han conducido a la posibilidad de extrapolación de estas resoluciones a los ítems a. y c. y de esto ha surgido el supuesto de que una clase más amplia de situaciones-problema pueden ser abordadas a partir de considerar este marco (por ejemplo, aquellas cuya función integrada sea continua, positiva y no acotada, para las cuales sea posible comparar sus representaciones gráficas con rectángulos infinitos). Ello ha quedado sugerido en las configuraciones CEAim y CEGim.

Tabla 3

Configuraciones Epistémicas Algebraico-Analítica Impropia y Formal-Algorítmica Impropia

Configuración Epistémica Analíitico-Algebraica Impropia (CEAAim)	Configuración Epistémica Formal-Algorítmica Impropia (CEFAim)

Situaciones-Problema: Cálculo de integrales impropias de funciones con primitiva que se puede obtener mediante técnicas de integración. Procedimientos: Reducir el problema al cálculo de un límite de una integral definida, apelando a relacionar esta última con un proceso de cambio acumulado. Cálculo de primitivas mediante tablas de integrales, método de sustitución y partes. Lenguaje: Algebraico y funcional. Conceptos: Transformación algebraica, función, límite, derivada, integral. Propiedades: Propiedades de la integral (linealidad, aditividad) y del límite. Regla de Barrow. Teorema Fundamental del Cálculo. Argumentos: deductivos.	Situaciones-Problema: Cálculo de integrales impropias de funciones con primitiva obtenible mediante técnicas de integración. Procedimientos: Reducir el problema al cálculo de un límite de una integral definida, apelando para esta última a un procedimiento bien establecido de cálculo. Descomposición de integrales y límites. Lenguaje: Algebraico y funcional (formal) Conceptos: Transformación algebraica, límite, integral. Propiedades: Del proceso de cálculo de límites e integrales. Argumentos: Deductivos y procedimentales.

Por otra parte, los procedimientos de la CEFAim resultan eficaces para situaciones donde se puede calcular la primitiva de una función, involucrando una menor densidad conceptual y carga cognitiva que los de la CEAAim. De hecho, emplear todos los argumentos de la CEAAim cada vez que debe realizarse una tarea de ese tipo no sería lo más eficiente. Esto habilita la manifestación frecuente de una CEFAim en los procesos de resolución de integrales impropias, lo que coincide con los resultados obtenidos por González-Martín (2005), Mojica et al. (2021) y Orton (1983). No obstante, para la experticia que debe tener el profesorado, se requiere el manejo de ambas configuraciones, puesto que ante una hipotética resolución dada por un estudiante a un problema de integral impropia cuyo procedimiento fuese similar a R4, se podría interpretar que la realiza poniendo en juego la CEFAim, incluso cuando ha hecho un uso no ostensivo de las relaciones, propiedades y argumentos característicos de la CEAAim. En cualquier caso, ante la manifestación de una CEFAim, sería necesario interrogar al resolutor para determinar cuál de las dos configuraciones se ha puesto en juego en sí, puesto que la sola observación del proceso de resolución no informa de manera pertinente al respecto. En este orden de ideas, trabajos similares a los de González-Martín (2005), Mojica et al. (2021) y Orton (1983) podrían realizar con mayor precisión sus conclusiones atendiendo al uso de una u otra configuración epistémica por parte del resolutor. Esto coincide con lo señalado por Burgos et al. (2021, p. 34) al referirse a lo que sucede en las prácticas matemáticas, cuyo análisis no debe reducirse a la sola observación de los conceptos y procedimientos puestos en juego.

El posicionamiento al que conduce hacerse consciente de esta red de objetos permite capturar de manera más fina las diferentes interpretaciones que pueden ser dadas a los procesos de resolución de un problema por parte de un sujeto, las cuales pueden ser reconocidas por medio de sus configuraciones epistémicas. Estas consideraciones permiten enfatizar la complementariedad de este trabajo con respecto al de Mateus-Nieves y Font-Moll (2021), en el que la elaboración de configuraciones epistémicas para el objeto Integral se apoya en la identificación de objetos primarios a partir de una vasta indagación historiográfica, en el que la integral impropia es vista en el marco de una configuración epistémica más general. En esta comunicación se informa específicamente sobre la resolución de un problema, lo cual constituye una mirada particular, minuciosa y -por ende- diferente, respecto del mismo objeto, que es parte del complemento requerido para la producción de un significado global u holístico en torno al objeto Integral Impropia. Más aún, en las cuatro configuraciones epistémicas presentadas se han incluido los diferentes objetos primarios inferidos a partir del análisis ontosemiótico de las prácticas empleadas en las resoluciones propuestas (https://acortar.link/ywjemz). A partir de ello, y del análisis desplegado en este trabajo, se observa la incorporación de nuevos objetos primarios en relación con las configuraciones epistémicas propuestas por Crisostomo (2012) y Mateus-Nieves y Font-Moll (2021).

De este modo, dado que el objetivo de realizar un estudio teórico que permita aproximarse a posibles significados parciales del objeto Integral Impropia, las configuraciones epistémicas específicas propuestas permiten tomar en consideración al menos cuatro perspectivas que podrían formar parte de dichos significados parciales: el analítico, el geométrico, el analítico-algebraico y el formal-algorítmico.

Referencias

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J.D., y Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus REDIMAT – *Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las Prácticas Docentes en la teoría antropológica de lo didáctico, *Recherche en Didactique des Mathemátiques, 19*(2), 221-266.

Crisóstomo, E. (2012) Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada], Granada.

Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. *Revista Ema, 9*, 181-204. http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65, IREM de Strasbourg.

Godino, J. D. (2024). Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones. McGraw Hill-Aula Magna.

González-Martín, A. (2005). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos: problemas de enseñanza y aprendizaje. [Tesis doctoral, Universidad de La Laguna].

Mateus-Nieves, E., y Font-Moll, V. (2021). Epistemic Complexity of the Mathematical Object “Integral”. *Mathematics, 9*(19), 2453. https://doi.org/10.3390/math9192453

Mojica, A., Rodríguez, F. M., y Valencia, J. (2020). Understanding of university students about improper integral. *International Journal of Research in Education Methodology, 11*, 36–54. https://doi.org/10.24297/ijrem.v11i.8681

Orton, A. (1983). Students’ Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250. ´

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In: *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. Paris: IREM Paris 7.

CONOCIMIENTO META DIDÁCTICO-MATEMÁTICO EPISTÉMICO DE UNA PROFESORA NOVEL EN LA PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES

Meta didactic-mathematical epistemic knowledge of a novice teacher in planning the teaching of functions

Inglada, N., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Sol, T.

Universitat de Barcelona

Resumen

El objetivo de esta investigación es estudiar cómo una profesora novel usa el conocimiento epistémico aprendido en la formación inicial, cuando planifica un proceso de instrucción sobre funciones para un grupo de alumnado de tercer curso de secundaria de un Instituto público de Barcelona. Para ello, se realiza un análisis temático de: (a) las respuestas de la docente a un cuestionario sobre qué recursos, informaciones o consideraciones utilizará para preparar el tema; (b) la reflexión que hace la profesora sobre las actividades que el Centro le facilita y las propuestas de mejora que ella diseña. Los resultados indican que la profesora posee los conocimientos epistémicos para analizar y mejorar el material usando los aprendizajes de su formación inicial. Pero se constata que su análisis es más profundo cuando usa una pauta de reflexión especializada sobre la Idoneidad Epistémica (IE) de las funciones.

Palabras clave: conocimiento meta didáctico-matemático, Criterios de Idoneidad Didáctica, enseñanza de las funciones, formación del profesorado de matemáticas.

Abstract

The objective of this research is to study how a novice teacher uses the epistemic knowledge learned during initial training when planning an instructional process on functions for a group of third-year secondary school students at a public High School in Barcelona. To this end, a thematic analysis is conducted of: (a) the teacher's responses to a questionnaire about what resources, information, or considerations she will use to prepare the topic; (b) the teacher's reflection on the activities provided by the School and the improvement proposals she designs. The results indicate that the teacher possesses the epistemic knowledge to analyze and improve the material using what she learned from her initial training. However, her analysis is more in-depth when she uses a specialized reflection framework on the Epistemic Suitability (ES) of functions.

Keywords: *meta didactic-mathematical knowledge, Didactic Suitability Criteria, teaching functions, mathematics teacher training.*

INTRODUCCIÓN

Para poder ejercer como docente de matemáticas de educación secundaria en España es necesario superar un Máster de formación del profesorado. Numerosas investigaciones han estudiado la calidad de los planes de estudios de esta formación inicial del profesorado (Amaya et al., 2021; Duarte et al., 2024; Godino et al., 2017; Ledezma et al., 2024; Font et al., 2021; Font et al., 2024; Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023; Sánchez et al., 2022). Pero pocos son los trabajos que muestran evidencias de qué aprendizajes aplican los profesores noveles cuando inician su ejercicio profesional, ni de cómo los aplican. Los resultados de esta investigación serían útiles para modificar los planes de

Inglada, N., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Sol, T. (2025). Conocimiento meta didáctico-matemático epistémico de una profesora novel en la planificación de la enseñanza de las funciones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

estudio de la formación inicial de los docentes de matemáticas de secundaria de manera que los conocimientos adquiridos en el MAES se implementasen de forma más idónea en la práctica docente.

Esta investigación, enmarcada en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino et al., 2007), se centra en el conocimiento meta didáctico-matemático epistémico en relación con la enseñanza de las funciones. Como afirma Font (2011), la noción de función es muy importante en la educación matemática secundaria, debido a su naturaleza unificante y modelizadora, así como por su riqueza y complejidad epistémica. El objetivo de este trabajo es estudiar cómo aplica una profesora novel el conocimiento epistémico adquirido en el MAES, superado justo el curso anterior, a la planificación de un proceso de instrucción sobre funciones para un grupo de tercer curso de secundaria y comprobar si el uso de una nueva pauta de reflexión especializada en funciones mejora la calidad de la planificación. Se pretende responder a las preguntas: 1) ¿Qué componentes e indicadores de la IE pone en juego la profesora en la planificación de una situación de aprendizaje sobre funciones? 2) Profundizar en el conocimiento epistemológico sobre funciones con una pauta especializada, ¿mejora la idoneidad del diseño?

MARCO TEÓRICO

Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos (CCDM)

Dentro del marco teórico del EOS, donde se sitúa esta investigación, con la finalidad de atender el problema relacionado con la formación del profesorado, Pino-Fan et al. (2015) proponen un modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático que interpreta y caracteriza los conocimientos de un profesor o profesora a partir de tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. En esta investigación nos centramos en la tercera de estas dimensiones. Para desarrollar esta dimensión meta didáctico-matemática, en el EOS se han propuesto diferentes constructos teóricos, en particular, para la valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, su herramienta esencial son los Criterios de Idoneidad Didáctica. La IE se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, en la enseñanza de las funciones de 3º de ESO, reducir la enseñanza al aspecto operacional y a su representación algebraica (baja idoneidad) o trabajar diferentes significados de la función, como correspondencia, relación entre variables, relación entre magnitudes, y sus distintas representaciones, verbal, algebraica, tabular, gráfica e icónica (alta idoneidad). En Breda et al. (2017) se configura un sistema de componentes e indicadores que sirven de guía para el análisis y la valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio de cualquier etapa educativa. En la Tabla 1 se presentan los componentes e indicadores de la IE.

Refinamiento de los Indicadores de la IE para Funciones (RIEF)

Inglada et al. (2024) proponen la herramienta (RIEF) con la finalidad de facilitar el análisis de los procesos de instrucción sobre funciones en secundaria. A continuación, se detallan los indicadores agrupados en siete categorías:

> Errores: **(**E1) “Se evita el error de utilizar curvas continuas para funciones discretas” (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (E2) Error de definición. (E3) Error de representación. (E4) Error de resolución o procedimiento. (E5) Error en la proposición de un problema. (E6) Error de argumentación. Ambigüedades:(A1) Se hace uso de metáforas de forma consciente. (A2) Uso de la notación f(x) para representar la función y la imagen de un valor de la x sin especificar los dos significados. (A3) Lenguaje dinámico de funciones. (A4) Imprecisión en el lenguaje. (A5) Uso de la notación (a,b) para representar un punto y un intervalo sin especificar los dos significados. Opción didáctica adecuada: (O1) “El trabajo con funciones no se limita al uso de representaciones algebraicas para evitar que se perciban solo como fórmulas y regularidades” (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O2) Se evita “la creencia de que un cambio en la variable independiente implica necesariamente un cambio en la variable dependiente” (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O3) “Se presentan relaciones funcionales que no son graficables para evitar la creencia de que toda función admite una

representación gráfica" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O4) "Se presentan relaciones funcionales que no tienen asociada una expresión algebraica para evitar la creencia de que toda función admite una representación algebraica" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O5) "Las funciones se presentan con dominios y codominios explícitos para evitar la creencia de que toda función tiene un dominio y un codominio natural o real" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O6) "Se presentan gráficas *irregulares* para evitar la creencia de que toda función representada gráficamente tiene *buen comportamiento*" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O7) "Las definiciones y los procedimientos consideran la arbitrariedad y la univalencia como características clave de la noción de función" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O8) "Se presentan las nociones de dominio y codominio como elementos inherentes a la definición de función" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O9) "Se presentan enunciados y procedimientos fundamentales relativos a la noción de función adecuados al nivel educativo" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (O10) Al introducir el sistema de referencia cartesiano se tienen en cuenta las confusiones que pueden producirse. (O11) Los alumnos carecen de conocimientos previos que dificultan el aprendizaje. Riqueza de procesos: (P1) Se leen e interpretan correctamente los enunciados de los problemas. (P2) Se enuncian conjeturas y proposiciones. (P3) Argumentación: se justifican conjeturas y procedimientos. (P4) Se institucionalizan las definiciones y los procedimientos. (P5) Se identifican las variables y las magnitudes. (P6) Se identifica si una relación es funcional y en caso afirmativo de qué tipo es. (P7) Se aplican algoritmos, rutinas o se realizan cálculos. (P8) Se realizan procesos de generalización y abstracción. Significados: (S1) "La función como correspondencia" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.47). (S2) La función como relación entre variables. (S3) "La función como relación entre magnitudes" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.47). (S4) "La función como correspondencia arbitraria" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.47). (S5) "La función a partir de la teoría de conjuntos" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.47). Representaciones y conversiones: Se moviliza la representación: (R1) verbal. (R2) algebraica. (R3) tabular. (R4) gráfica. (R5) no se especifica el tipo. Se promueven conversiones entre la representación: (R6) verbal y la algebraica. (R7) verbal y la tabular. (R8) verbal y la gráfica. (R9) algebraica y la tabular. (R10) algebraica y la gráfica. (R11) tabular y la gráfica. (R12) no se especifican los tipos. Situaciones problema: Los problemas propuestos: (T1) activan las distintas significaciones de función. (T2) movilizan las distintas representaciones de función y sus conversiones. (T3) "en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje sobre funciones" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (T4) donde se trabajan conexiones intramatemáticas. (T5) "contextualizados provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias" (Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021, p.50). (T6) de modelización. (T7) que impliquen los distintos tipos de funciones trabajadas.

Tabla 1

Componentes e indicadores de la IE. Fuente: Breda et al. (2017)

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático. Se observan prácticas correctas (sin errores) desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	Se observan prácticas sin ambigüedades… No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo). Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas.

	Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

METODOLOGÍA

Para dar respuesta al objetivo de esta investigación analizamos, bajo la perspectiva de un estudio de caso instrumental (Stake, 1995), el conocimiento meta didáctico-matemático epistémico de una profesora en su primer año de ejercicio profesional cuando diseña el proceso de instrucción sobre funciones para un grupo de alumnos de tercer curso de enseñanza secundaria. La docente es graduada en Física y ha cursado recientemente el Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad en Matemáticas (MAES), en el que ha recibido formación sobre los CID pero no de la RIEF.

Los datos se obtienen de dos fuentes: (a) las respuestas de la profesora novel a un cuestionario escrito de ocho preguntas abiertas y (b) la reflexión que esta realiza sobre el material proporcionado por el Centro. La profesora responde por escrito al cuestionario cuando, tres semanas antes de la fecha prevista para iniciar el tema, el Departamento de matemáticas del Instituto en el que trabaja le facilita el material para que lleve a cabo la implementación. A continuación se muestran las cuatro primeras actividades del material facilitado por el Departamento de matemáticas del Instituto:

> 1. Di, razonando la respuesta, si la relación entre las siguientes magnitudes es una función o no: a) La altura de una persona y su peso. b) El peso de un barril y la cantidad de líquido que contiene. c) La longitud de los lados de un rectángulo y su perímetro. d) La cantidad de horas dedicadas a estudiar y la calificación obtenida en un examen. e) El número de máquinas y el tiempo que tardan en acabar un trabajo.
>
> 2. Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 580 € y, por cada mueble que vende cobra 20 € de comisión. a) La relación entre el número de muebles que vende y la ganancia obtenida, ¿es una función? Razona la respuesta. b) Haz una tabla de valores. c) Dibuja la gráfica que expresa la ganancia en función del número de muebles vendidos. ¿Podéis unir los puntos? Justifica la respuesta. d) Halla fórmula correspondiente.
>
> 3. Expresa con un enunciado las siguientes funciones: a) $y = 2x$. b) $y = x + 3$.
>
> 4. Construye una tabla de valores para cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente: a) $y = x + 2$. b) $y = – 3x – 1$. c) $y = 2x + 3$. d) $y = x^2 + 1$. e) $y = x^2$. f) $y = 4x – 4$. g) $y = x^2 + x$. h) $y = –x$.

El cuestionario está estructurado en dos partes para la posterior triangulación de las respuestas: 1ª parte: (1) ¿Cómo valoras el aprendizaje sobre la reflexión sobre la práctica del máster de formación del profesorado de secundaria? ¿Reflexionas individualmente o en grupo sobre tu práctica docente o sobre la de tus compañeros? (2) ¿Qué criterios utilizas para reflexionar sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas? (3) ¿Qué recuerdas sobre los criterios de idoneidad didáctica que utilizaste en tu Trabajo Final de Máster? ¿Los usas en tu práctica docente? (4) La IE se refiere a la calidad de las matemáticas del proceso de enseñanza, ¿recuerdas los componentes e indicadores de esta idoneidad? 2ª parte: (5) Para preparar la unidad didáctica, ¿Por dónde empiezas: miras el material que te facilita el Centro, consultas el currículo, buscas información u otros recursos, tienes en cuenta cómo ha funcionado la implementación del tema anterior con los mismos alumnos, ...? ¿Qué has tenido en cuenta, desde el contenido matemático? (6) ¿La has analizado epistémicamente antes de adaptarla a tu grupo de alumnos? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuál y cómo ha sido tu análisis? ¿Después del análisis qué has modificado? Si la respuesta es negativa, ¿Porqué no lo has hecho? ¿Crees que hacer ese análisis ayudaría a mejorar la situación de aprendizaje? ¿En qué aspectos? (7) ¿Con qué criterios modificarás el material facilitado por las compañeras del Departamento? (8) ¿Qué tiempo dedicas (cuánto tiempo, en qué momentos, con quién…) a realizar análisis epistémicos de tus clases para mejorar tu práctica profesional? ¿Y a reflexionar sobre otros aspectos? ¿Cuáles?La

reflexión de la docente se lleva a cabo por escrito en dos etapas. En la primera se le pide que analice con los indicadores del criterio de IE que aprendió en el MAES el material que el Centro le ha facilitado y que haga propuestas de mejora. En la segunda etapa se pone en conocimiento de la profesora la RIEF y esta la usa como pauta para realizar un nuevo análisis del material y más propuestas de mejora.

Los datos obtenidos de estas dos fuentes se trabajan mediante un análisis temático (Braun y Clarke, 2006). Los datos obtenidos del cuestionario se analizan en dos fases. En la primera se identifican los elementos esenciales en los que la docente pretende fundamentar la preparación del proceso de instrucción. En la segunda fase se comparan los elementos seleccionados en la fase anterior con los indicadores del criterio de IE. Los datos obtenidos de la reflexión de la profesora en la primera etapa se analizan en tres fases. En la primera se determina qué indicadores de la IE están presentes en el análisis de la docente. En una segunda, si estos son usados correctamente y, en la tercera, se valora de qué manera el análisis anterior contribuye a la mejora del material inicial. Los datos obtenidos de la segunda etapa de la reflexión de la profesora se analizan comparándolos con los datos obtenidos en la primera etapa.

Tabla 2

Tabla resumen de la metodología

Obtención de datos		Análisis de datos
Etapas	Instrumentos empleados	Fases del análisis
Exploración formación inicial	Cuestionario	Triangulación respuestas parte 1, parte 2 y los criterios de la IE
Reflexión docente etapa 1	Indicadores criterio IE	Identificación de los indicadores de la IE Evaluación de la reflexión etapa 1 Valoración de la propuesta de mejora
Reflexión docente etapa 2	RIEF	Comparación de la reflexión etapa 2 con la reflexión etapa 1

RESULTADOS

Aplicación de los conocimientos adquiridos en el MAES sobre la IE en el diseño del proceso de instrucción

El aprendizaje epistémico obtenido en el MAES no es aplicado por la docente en la preparación de sus clases ya que prioriza otros aspectos del proceso de instrucción.. Ella da clases en uno de los cuatro grupos de tercer curso, y dos profesoras de matemáticas con mucha experiencia dan clase en los otros tres. Esta situación es un apoyo para ella, pero al mismo tiempo no le invita a diseñar el proceso de instrucción desde su propio criterio forjado por la reciente formación inicial del curso anterior. Por ejemplo, a la pregunta sobre cómo tienen previsto preparar el proceso de instrucción: "¿Por dónde empiezas: miras el material que te facilita el Centro, consultas el currículo, buscas información u otros recursos, tienes en cuenta cómo ha funcionado la implementación del tema anterior con los mismos alumnos, ...?". La docente responde que se basará en el material que le han facilitado ya que las dos profesoras que también dan clase en tercero tienen más experiencia que ella, así aseguran que los cuatro grupos trabajan coordinadamente. Otro aspecto que supedita su actividad docente es su preocupación por mantener a los alumnos motivados. Cuando se le pregunta con qué criterios modificará el material facilitado por las compañeras del Departamento responde:

> Si veo que algunas actividades son muy monótonas o que para el alumnado que hay en el aula no funcionan, busco otros recursos para motivarlos. Estos recursos, normalmente, o bien los busco por

> internet, o bien los tengo por la formación del máster, o bien le pregunto al jefe de Departamento para que me ayude. (Traducido del catalán por las autoras).

La docente no hace ninguna referencia a la IE. Lo que tiene en cuenta es la coordinación con sus compañeras con más experiencia docente y sobre todo la motivación del alumnado.

Reflexión de la docente guiada por los indicadores de la IE sobre el material facilitado por el Instituto

En la primera etapa de la valoración que la profesora realiza usando los indicadores de los componentes de la IE de las actividades que le suministra el Departamento de matemáticas, esta pone de manifiesto que tiene conocimiento de los componentes e indicadores de la IE. Afirma que no ha detectado errores ni ambigüedades. Respecto a la riqueza de procesos, señala que las actividades promueven que los alumnos argumenten y justifiquen sus respuestas, también potencian la resolución de problemas, aunque considera que son demasiado pautadas y no permiten que los alumnos exploren y conjeturen. También observa que no se trabaja la modelización. Propone la siguiente actividad para que los alumnos exploren y conjeturen:

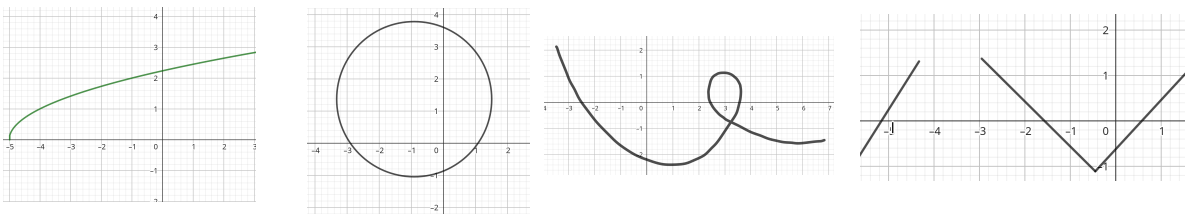
> Un campesino tiene 100 metros de valla para cercar un terreno. Quiere que el terreno sea rectangular. Solo tendrá que usar la valla para construir tres lados del rectángulo ya que aprovechará un rio como el cuarto lado. ¿Qué dimensiones tiene que tener el terreno para que la superficie delimitada sea máxima? Resuelve este problema dibujando la gráfica de una función a partir de considerar algunos rectángulos particulares y calcular su área.

Y finalmente, con relación a la representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos, por ejemplo, valora muy positivamente las actividades que trabajan la definición de función usando la representación de función como enunciado verbal, tabla, expresión algebraica, así como las conversiones entre ellas.

Reflexión de la docente guiada por la RIEF sobre el material facilitado por el Instituto

En la segunda etapa, con la pauta RIEF, la docente vuelve a analizar las actividades. Y, por ejemplo, decide añadir la siguiente actividad para trabajar la definición de función como relación entre variables a partir de la representación gráfica (indicadores S2 i R4):

> Indica si las siguientes gráficas son funciones justificando tu respuesta:
>
> a) b) c) d)



También considera conveniente que los alumnos trabajen la definición de función como correspondencia arbitraria, evitando así que crean que todas las funciones admiten una representación algebraica (indicador O4). Para ello diseña la actividad:

> La siguiente tabla contiene el dorsal de las camisetas de un equipo de hockey sobre patines de la categoría infantil y el día del mes en el que cada uno celebra su cumpleaños. ¿Se trata de una relación funcional? ¿Por qué? Si es posible, escribe una fórmula que exprese el día del mes en función del número de dorsal. En caso contrario explica el motivo.

Dorsal	1	3	4	7	8	9	10
Día de cumpleaños	6	13	22	5	19	6	12

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es responder a las preguntas: 1) ¿Qué componentes e indicadores de la IE pone en juego la profesora en la planificación de una situación de aprendizaje sobre funciones? 2) Profundizar en el conocimiento epistemológico sobre funciones con una pauta especializada, ¿mejora la idoneidad del diseño? En relación con la primera pregunta, una de las conclusiones de esta investigación es que la docente novel cuando diseña el proceso de enseñanza y aprendizaje está condicionada por la realidad del Departamento de matemáticas del Centro donde trabaja y por la gestión del aula donde implementará el proceso de instrucción. Aunque tiene la competencia de analizar la calidad matemática del material, no lo hace, ya que se focaliza en otros factores, también importantes en la enseñanza y aprendizaje. ¿Se tienen en cuenta estas circunstancias en los programas de formación inicial del profesorado de educación matemática de secundaria? También en este análisis constatamos que la profesora no tiene previsto profundizar en la complejidad del concepto de función. Uno de los motivos es que, como graduada en Física, tiene un buen conocimiento de la noción de función y de sus aplicaciones por lo que no cree necesario buscar información para profundizar más en las funciones y su enseñanza en la educación secundaria. Sin embargo, cuando se le pide que aplique los indicadores de la IE, consigue mejorar el material inicial aunque de forma superficial.

Respecto a la segunda pregunta, según Godino y colaboradores (2017) una de las competencias que debe tener el profesorado es la de reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas implementados en la práctica. También Mendes (2021) especifica que el docente ha de aplicar tres capacidades que pueden desarrollarse en conjunto: síntesis, análisis y conversión de las ideas abstractas en realizaciones prácticas. Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández (2023) desde la teoría Espacios de Trabajo Matemático, encuentran evidencias de que la reflexión sobre las tareas que se diseñan para enseñar funciones permite mejorarlas. Cuando la docente novel reanaliza las actividades usando la RIEF, lo hace con más profundidad y el rediseño del material tiene más riqueza epistémica. Por lo tanto, tal como afirman Inglada et al. (2023; 2024), si se dotara al profesorado de este tipo de herramientas, su reflexión sobre los recursos de los que disponen o diseñan, así como sobre su propia práctica podrían mejorar, y como consecuencia su tarea docente también (Figueiredo y Contreras, 2013).

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia en la que está previsto realizar un tercer análisis de la videograbación de la implementación y la reflexión de la profesora sobre su propia práctica docente y el rediseño del proceso de instrucción. A partir de los resultados de este tercer análisis esperamos poder contribuir a la mejora de la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria y, como consecuencia, a que los procesos de enseñanza y aprendizaje tengan una mayor IE.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa.

Referencias

Amaya, T., Castellanos, A. y Pino-Fan, L. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia, 35(2)*, 1-15. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Duarte, N. G., Ponte, J. P. M. y Pinto, H. G. (2024). El estudio de clases como promotor del desarrollo del conocimiento de los futuros profesores sobre la preparación de lecciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 26*, 21–39. https://doi.org/10.35763/aiem26.5428

Figueiredo, C. A. y Contreras, L. C. (2013). La función cuadrática: variación, transparencia y dos tipos de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *(3)*, 45–68. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i3.62

Font, V. (2011). Funciones. Evolución histórica de la noción de función. Algunas ideas clave que nos ofrece la evolución de la noción de función. En J. M. Goñi (Ed.), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-186). Graó.

Font, V., Breda, A., Hummes, V., Díez-Palomar, J. y Seckel, M. J. (2021). Un curriculum por competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En Campos, M. A. (Ed.), *Representaciones, conocimientos y prácticas curriculares en el campo de Matemática Educativa*. México: Instituto de Investigaciones Sobre la Universidad y la Educación, UNAM.

Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G. y Pino-Fan, L. R. (2024). Future Teachers' Reflections on Mathematical Errors Made in Their Teaching Practice. *ZD. The International Journal on Mathematics Education*, *56*(6), 1169-1181. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM - Mathematics Education*, *39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2023). Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función. *Educación Matemática, 35*(3), 178-208. https://doi.org/10.24844/EM3503.06

Inglada, N., Breda, A. y Sala-Sebastià, G. (2023). Una pauta especializada para reflexionar sobre la enseñanza de las funciones en secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 291–298). SEIEM.

Inglada, N., Breda, A. y Sala-Sebastià, G. (2024). Pauta para reflexionar sobre la enseñanza de las funciones y mejorar su docencia. *Alteridad*, *19*(1), 46-57. https://doi.org/10.17163/alt.v19n1.2024.04

Ledezma, C., Breda, A. y Font, V. (2024). Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the transition period between the face-to-face and virtual teaching contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *22*(5), 1057-1081. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8

Mendes, I. A. (2021). Historical Creativities for the Teaching of Functions and Infinitesimal Calculus. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(2), em0629. https://doi.org/10.29333/iejme/10876

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. https//doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2022). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers who are not trained to develop students' creativity. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(4), 863-885. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.

USOS OPERACIONALES Y RELACIONALES DEL SIGNO IGUAL EN ALUMNADO DE TERCERO DE PRIMARIA EN TAREAS DE IGUALDAD NUMÉRICA

Relational uses of the equal sign in justifications provided by third-grade students working on equalities

Jiménez-Gutiérrez, J.[a], Adamuz-Povedano, N. [a], Fernández-Ahumada, E. [a] y Ramos-Rodríguez, E. [b]

[a]Universidad de Córdoba (España), [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Resumen

Este trabajo indaga en los usos operacionales y relacionales del signo igual que los estudiantes de tercero de Primaria evidencian en sus justificaciones al trabajar en tareas sobre la estructura de igualdad con expresiones numéricas abiertas y propiedades aritméticas. La muestra está compuesta por un grupo de seis estudiantes elegidos por diversidad en el desempeño matemático, respuestas destacadas y participación activa. Entre otros hallazgos se observó que el alumnado fue capaz de cuestionarse la suficiencia de sus argumentos operacionales según la tarea y, aunque predominaron los usos operacionales, también se identificaron usos relacionales. Esto revela un contexto favorable para avanzar hacia una comprensión relacional del signo igual en cursos anteriores a los que se sugieren en la literatura.

Palabras clave: Álgebra temprana, pensamiento algebraico, pensamiento relacional, signo igual, estructura de igualdad.

Abstract

This study delves into the operational and relational uses of the equal sign that 3rd graders show in their justifications. Students needed to develop these justifications working on tasks on the equality structure, in open numerical sentences and observing instantiations of the arithmetical properties. The sample is composed of a group of six students chosen for diversity in mathematical performance, outstanding answers and active participation. Among other results, it was observed that students were able to question the sufficiency of their operational arguments according to the task and, although operational uses predominated, relational uses were also identified. This reveals a favourable context for moving towards a relational understanding of the equals sign in earlier grades than suggested in the literature.

Keywords: *Early algebra, algebraic thinking, relational thinking, equal sign, equality structure.*

INTRODUCCIÓN

Durante las dos últimas décadas, las sucesivas contribuciones en el marco del *Early Algebra* han permitido que los estudiantes se inicien en prácticas sobre álgebra a partir de edades más tempranas. En España, esto se ha incluido en las últimas modificaciones del Real Decreto ley por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (2022), pasando de estar reservada la iniciación al álgebra de la etapa de educación secundaria a la de infantil. Adelantar estos contenidos y formas de hacer habituales del álgebra no significa que los estudiantes pasen a utilizar letras para representar números desde el principio (Blanton et al., 2018). Más bien, se persigue asentar una comprensión profunda del concepto de número desde la que se permita hacer natural la transición de un uso concreto de las operaciones y los números hacia formas más generales y abstractas de razonamiento donde el uso de letras como números se incorpore de forma natural a su proceso de

Jiménez-Gutiérrez, J., Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E. y Ramos-Rodríguez, E. (2025). Usos operacionales y relacionales del signo igual en alumnado de tercero de primaria en tareas de igualdad numérica. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

aprendizaje (Stephens et al., 2017). Estas modificaciones curriculares justifican los estudios y propuestas didácticas dentro de esta línea dadas las nuevas necesidades educativas.

Para abordar nuestro estudio consideramos el marco teórico sobre pensamiento algebraico temprano propuesto por Blanton et al. (2018) que presentan según las cuatro prácticas de (i) generalización, (ii) representación de generalizaciones, (iii) justificación de generalizaciones y (iv) razonamiento con generalizaciones. Dichas prácticas derivan de las áreas principales del pensamiento algebraico de Kaput (2008), (i) hacer y expresar generalizaciones utilizando sistemas de símbolos formales y convencionales y (ii) actuando sobre símbolos en un sistema simbólico organizados a través de una sintaxis establecida. Más recientemente, encontramos el trabajo de Kieran (2022) que describe el pensamiento algebraico temprano de forma multidimensional compuesto por las áreas de pensamiento analítico, pensamiento estructural y pensamiento funcional. Ambos marcos explican en algún punto el tratamiento del signo igual y de la forma de interpretarlo que tienen los estudiantes. Blanton et al. (2018) presentan una secuencia didáctica en el mismo trabajo centrándose en las primeras lecciones en el entendimiento del signo igual de forma relacional. Por su parte, en Kieran (2022) se destaca la necesidad de indagar en este campo ya que la forma que se ha visto, tanto en libros de texto como en guías didácticas, de introducir a los estudiantes al uso del signo igual ha sido fundamentalmente instrumental. La comprensión del signo igual desde un sentido relacional se ha vinculado a una comprensión estructural del concepto de las ecuaciones, así como del desempeño en problemas de ecuaciones equivalentes (Knuth et al., 2006).

La pregunta que guía esta investigación es ¿qué usos del signo igual pone de manifiesto el alumnado de tercero de Educación Primaria en tareas sobre estructuras de igualdad y propiedades aritméticas? Así, planteamos como objetivo de este trabajo describir el uso operacional y relacional que mostraron los estudiantes al trabajar estas tareas.

MARCO TEÓRICO

El signo igual, aunque no cuente con una definición unificada (Cañadas, 2023), está relacionado con el conteo, estimación y cálculo, así como el concepto de número y operaciones aritméticas. Permitirse comprender el concepto de número en un sentido amplio deja un espacio abierto a la expresión de este en múltiples formas haciendo uso del signo igual, con el que la relación de equivalencia se sostiene con la igualdad de valor (Rittle-Johnson et al., 2011). En aritmética, las relaciones de equivalencia se establecen por el uso del signo igual y en el caso de mismidad de valor numérico, estaríamos hablando de la igualdad (Bouvier y George, 2000; Molina, 2006).

En el caso de la igualdad en álgebra, Molina (2006) distinguió dos tipos de relaciones: cuando hay una coincidencia del objeto matemático y representante (ej., 1 = 1) o cuando hay una coincidencia de valor numérico de las expresiones aritméticas como 2 + 5 y 3 + 4. La igualdad debe ser vista como un caso específico dentro de la noción de equivalencia donde las expresiones a ambos lados del signo igual se refieren al mismo objeto matemático. Las sentencias numéricas serían expresiones aritméticas que contienen el signo igual y construyen una proposición o argumento declarativo que pueden ser verdaderas o falsas. El uso de igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas fueron sugeridas por Carpenter et al. (2003) para el desarrollo del pensamiento relacional. En Mason et al. (2009) plantean que algunos estudiantes responden sin realizar cálculos aparentes y quizás pensando en casos cercanos o dentro de un rango de posibilidades que les es familiar, de forma que da la impresión de que han interiorizado la generalidad. Estas afirmaciones generales según los autores podrían estar expresando una comprensión estructural limitada. El ejemplo que plantean para las frases numéricas es 173 - 35 + 35 = 173. Los estudiantes podrían responder sin realizar cálculos y de forma general, pero sugieren que la visión puede estar limitada porque no se hayan enfrentado antes, o no consideren al dar esta respuesta, aquellos casos en los que el número que resta es mayor que el primer número, es decir, los casos en los que a>b en a – b + b = a. Otros estudios se han centrado en

cómo lograr una transición firme hacia un pensamiento relacional de manera que los estudiantes estén preparados para ser introducidos a cursos de álgebra más formal.

Para realizar la clasificación de los usos utilizaremos las categorías operacional y relacional basándonos en las definiciones de Matthews et al. (2010). La categoría operacional engloba los niveles operacional rígido y operacional flexible donde los alumnos serían capaces de resolver expresiones con una única operación a la izquierda, en la forma convencional "a + b = c", o en otras formas no convencionales "c = a + b". Y la categoría relacional abarca los niveles relacional con apoyo computacional, donde podrían resolver tareas del tipo "a + b + c = a + _ ", y relacional sin necesidad de cómputo, donde demostrarán una comprensión de propiedades aritméticas de equivalencia. La principal línea que separa estas dos categorías es que, en la categoría operacional, los estudiantes centran toda su atención en el signo igual como símbolo que "pide" realizar un cálculo. Sin embargo, en la categoría relacional la atención estará puesta en que la operación va a tener que satisfacer además una condición de equivalencia con lo que está al otro lado del signo igual.

Finalmente, en estudios previos se han sugerido diferentes momentos para introducir el sentido relacional del signo igual atendiendo a diferentes momentos del aprendizaje de las matemáticas. El estudio de Rodal y Storeli (2023) plantea introducir el sentido relacional una vez que los estudiantes utilizan el signo igual como indicador de equivalencia; Rittle-Johnson et al. (2011) apuntan a cuando los estudiantes comienzan a comparar ambos lados de una ecuación, que sería hacia quinto grado.

MÉTODOS

Esta investigación sigue un paradigma cualitativo de naturaleza exploratoria y descriptiva. El estudio se lleva a cabo en un colegio público de Córdoba elegido intencionalmente dada la colaboración y disponibilidad de los profesores con los investigadores. Los sujetos de estudio fueron todos los estudiantes de tercer curso (N=83) de cuatro clases diferentes. De ellos se extrajo una muestra de seis estudiantes como casos ilustrativos importantes, elegidos según los criterios de homogeneidad, estar en diferentes niveles de desempeño matemático, haber destacado de alguna forma en sus respuestas y razonamientos, y haberse mostrados participativos. Los estudiantes han participado desde el primer curso de Educación Primaria en un programa de desarrollo del sentido numérico, donde el signo igual se ha trabajado a través de diversas tareas como símbolo con polivalencia de significado (lo que queda, lo que falta, el total, resultado de una comparación…) y para construir certezas simbólicas a partir de hechos numéricos manipulando expresiones según las posibles relaciones.

La recogida de datos se llevó a cabo en dos momentos, el primero en una sesión de clase con todo el grupo en una prueba inicial y el segundo, en entrevistas semiestructuradas individualizadas. Ambos momentos de recogida de datos se desarrollaron en el mes de noviembre y en junio del curso académico 2023/2024. Tanto la prueba inicial como las entrevistas se registraron audiovisualmente. El rol de los profesores e investigadores durante la prueba inicial fue de supervisión y, al final, un investigador desarrolló una puesta en común con los estudiantes. La prueba duró aproximadamente 60 minutos, mientras que la puesta en común tomó 15 minutos de otro día. En el caso de las entrevistas, un investigador entrevistaba y al menos uno actuó como observador. El entrevistador guio la entrevista con cada estudiante. La función de la persona que entrevista era facilitar que el estudiante se involucrara en explicar aquello que estaban pensando para acceder a sus razonamientos, donde se hizo uso de fichas complementarias a las tareas que se presentaron. Las tareas que trabajaron los estudiantes durante las entrevistas constaron de seis preguntas extraídas de la prueba inicial. Nos centraremos en dos preguntas que trabajan la estructura de igualdad y propiedades aritméticas que se muestran en la Tabla 1. Una de las preguntas contenía tres tareas que trabajaban la igualdad numérica (Blanton et al., 2018) en sentencias numéricas abiertas (Molina, 2006) con estructuras de adición y multiplicación (Freudhental, 1983) con respuesta cerrada. La otra pregunta contenía seis tareas sobre las propiedades aritméticas de conmutación, elemento neutro, etc. en sentencias numéricas verdaderas (Molina, 2006), en estructuras de adición y multiplicación (Freudhental, 1983), siendo preguntas de

respuesta abierta que permiten trabajar sobre una variedad de casos particulares de las propiedades aritméticas como ejemplificaciones de las propiedades generales (Venkat et al., 2019). Ambas se centran en la práctica de justificación según Blanton et al. (2018).

Tabla 1

Descripción de las tareas extraídas de la prueba inicial para las entrevistas

1. Escribe sobre cada raya los números que hagan que la expresión sea verdadera.	.a $_ + 30 = 34$ .b $30 + 4 = _ + 3$ .g $7 \cdot _ = 0$	
2. ¿Qué se puede observar en las siguientes expresiones? Explícalo.	.a $22 + 3 = 3 + 22$ .b $0 + 20 = 20$ .c $(33 + 2) + 5 = 33 + (2 + 5)$	.d $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$ .e $40 = 40 \cdot 1$ .f $(3 \cdot 5) + (3 \cdot 6) = 3 \cdot (5 + 6)$

La prueba inicial incluía dos preguntas, respondidas por escrito, que se utilizaron posteriormente para guiar la interacción de los estudiantes en las entrevistas. Además, en el momento de las entrevistas, nos ayudamos de unas fichas complementarias que nos permitieron ahondar en sus razonamientos, fomentar la reflexión y permitir la autocorrección, prevaleciendo la respuesta tras la autocorrección. El esquema que se siguió fue dejarles tiempo para que respondiesen por escrito los apartados de la primera pregunta y luego se revisaron sus respuestas con el investigador. Se utilizó una ficha complementaria que mostraba respuestas de compañeros ficticios que eran correctas si habían respondido incorrectamente y viceversa. Esto les permitió argumentar su autocorrección o el error que cometido en las respuestas de estos compañeros ficticios. La pregunta dos se fue analizando apartado por apartado en interacción con los investigadores. Tras la respuesta de los estudiantes, se les mostró otras fichas que incluían ejemplos de las propiedades aritméticas de la pregunta dos. Estos ejemplos combinaban números con figuras, números con letras o solamente números, figuras o letras.

Para analizar los datos, comparamos en una primera fase las respuestas escritas que dieron a la pregunta uno en los momentos de la prueba inicial y luego las de las entrevistas. En este mismo proceso se revisó el registro audiovisual, previamente transcrito, referente a la pregunta uno para asegurarnos de las respuestas finales que dieron los estudiantes. Para el registro escrito de la pregunta uno se utilizó la codificación de respuesta no respondida (NR), incorrecta (I) y correcta (C). Reconocemos que dentro de una respuesta incorrecta puede haber apreciación operacional, u otras, y lo mismo ocurre con las correctas. El registro audiovisual en esta pregunta sirvió para discernir luego el tipo de uso dándose las categorías de no respondida (NR), uso operacional (O), relacional (R) y otras categorías (OC). Entendemos por operacional aquellas respuestas que basen las respuestas en cómputos, y relacional cuando la justificación ponga el foco en otros aspectos de la expresión como el orden, símbolos o signos y conceptos numéricos o propiedades aritméticas donde el cómputo o no está, o solamente se utilizó como apoyo, por ejemplo, para verificar finalmente que el valor operado de las expresiones a ambos lados del signo igual coincide. Utilizamos la misma clasificación para el análisis de las justificaciones tanto escritas como verbales de los estudiantes a la pregunta dos.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Presentamos en esta sección los resultados identificando los usos operacionales y relacionales del signo igual en las respuestas de los estudiantes a las preguntas una y dos de los cuestionarios. Para referirnos a los estudiantes usaremos E1, E2… hasta E6 y para los investigadores que guiaron las entrevistas I1 e I2.

En un primer lugar, se compararon las respuestas escritas que dieron en la prueba inicial con la argumentación final que dieron durante las entrevistas. En la pregunta uno, encontramos que todos los participantes hicieron un uso operacional del signo igual. Solo hubo dos alumnos que el 1.b lo respondieron incorrectamente y en las entrevistas se autocorrigieron. En cuanto a la pregunta dos, es

de destacar que se registraran más justificaciones del tipo relacional en las pruebas escritas que durante las entrevistas. En general, todos llegaron a apreciar el cambio de orden de los números que representaban la propiedad conmutativa tanto para la suma como para la multiplicación. Y en pocas ocasiones utilizaron argumentación relacionada con los cálculos para justificar las tareas. En las otras encontramos que, por un lado, algunos que justificaron en la prueba inicial de forma relacional, en la entrevista dieron solo argumentación centrada en los cálculos. Además, solo se registró un valor del tipo OC durante las entrevistas donde el E2 respondió "es igual" al observar el apartado 2.e. Esta respuesta no se puede clasificar en las categorías que hemos utilizado, y parece que pudiera haberse respondido por azar o sin previa reflexión ya que este alumno se mostró muy callado durante las entrevistas y argumentaba en muchas ocasiones con respuestas tipo sí/no. En los demás casos pudimos codificar en las categorías O y R, lo que podría sugerir que se abandonan niveles inferiores al operacional y podrían comenzar a explorar usos relacionales del signo igual.

El carácter cerrado de la pregunta uno permitió identificar luego en las entrevistas el porqué de los errores, ya que permitió comprobar que todos los que se equivocaron en algún apartado fue debido a un uso operacional. No obstante, aquellos que respondieron correctamente, justificaron también con argumentos operacionales lo que nos lleva a preguntarnos si es porque encuentran más fácil dar argumentos de este tipo o si por el contrario es que tienen interiorizado el signo igual de esta manera. Por otro lado, todos los estudiantes necesitaron autocorregirse en la sección 1.b durante las entrevistas, salvo el E5. Los casos de E1 y E2 son ilustrativos para el tipo operacional.

E1 se autocorrige en 1.b:

I1: ¿Qué te parece que ha hecho? Ah… ¿Sí? ¿Estás de acuerdo con él?... Cuéntame, ¿qué es lo que has visto?

E1: Treinta y uno más tres, da treinta y cuatro.

I1: Porque… ¿tú qué habías hecho antes?

E1: Treinta y cuatro más tres.

El estudiante 2 reacciona de forma similar:

I1: Mira aquí. Cuéntame ¿qué has hecho aquí?

E2: Treinta más cuatro, treinta y cuatro. Sumarle tres.

I1: Ah. Mira lo que ha hecho otra persona de otra clase. ¿Qué te parece? ¿Está bien o está mal?

E2: Está bien. […]

I1: Porque tú has puesto… ¿a qué equivale? ¿cuánto vale eso? […]

E2: Treinta y siete.

Es interesante que todos ellos fueron capaces de encontrar más lógicas o razonables las respuestas dadas por los estudiantes ficticios cuando respondieron incorrectamente. Las expresiones en 1.a y 1.b permitieron detectar usos operacionales del signo igual en las entrevistas. Incluso vimos cómo E4 consideró que en la tarea 1.b a la expresión le faltaba un igual detrás de la expresión y suma de nuevo cuando dijo "el siguiente lo he hecho treinta más cuatro serían treinta y cuatro, pero luego si le sumo este tres me saldrían treinta y siete". Tras ver la respuesta de sus compañeros y reflexionar, su explicación final fue "que treinta más cuatro serían treinta y cuatro, menos tres serían treinta y uno".

Para la segunda tarea, ahondaremos primero en el caso de la E4. Respondió operacionalmente a todos los apartados, sin embargo, cuando revisó las fichas con ejemplos de propiedades que también incluían figuras e incógnitas en 2.a y 2.d, fue capaz de identificar rápidamente qué ejemplos de propiedades se parecían más a la de la tarea. Esto podría llevar a pensar que pudo haber una apreciación relacional ya que le bastó una lectura rápida de los ejemplos para responder. Aun así, por sus justificaciones, el caso de esta estudiante parecía ser sólido operacional.

I2: Y fíjate en esta de aquí. ¿Qué es lo que está pasando?

E4: Ah. Que treinta y tres más dos son treinta y cinco, con cinco, son cuarenta. Y ahora, dos más cinco son siete y treinta y tres más siete son cuarenta.

I2: Vale. Y… ¿qué es lo que está pasando? Porque me lo has dicho de formas diferentes. Me has dicho números diferentes, ¿no?

E4: Pues que de diferentes formas te pueden dar el mismo resultado.

I2: Pero ¿y por qué hay diferentes? ¿cómo lo has reconocido tú que son diferentes? ¿qué es lo que has visto diferentes? […]

E4: […] Sí. Eh. Bueno. Aquí dos más cinco y aquí en vez de que sean treinta y tres más dos, pues hemos sumado directamente el dos más cinco y después se lo han sumado al treinta y tres.

I2: Vale. O sea, que lo que has empezado sumando es diferente el uno del otro. ¿Y en qué te has fijado para hacerlo diferente?

E4: Pues en esta he sumado y en esta he restado.

Esta estudiante computó los números dentro de los paréntesis de forma inconsciente y no fue capaz de determinar lo que le estaba indicando por dónde empezar operando. Hasta que vio las respuestas de sus compañeros. Primero dijo que los ejemplos que más se asemejaban eran los de la ficha que mostraba la propiedad conmutativa, pero cuando vio la que tenía los ejemplos de la asociativa, concluyó que esta última era más similar:

La estudiante confunde la asociativa con la conmutativa:

I2: ¿En qué se parecen?

E4: En que están todas sumando, pero está cambiando el orden. Igual que aquí [señala 2.c] […] Sí, porque treinta y tres más dos, más cinco. Y después, Treinta y tres, más dos más cinco.

Ahora se le muestran ejemplos de la propiedad asociativa:

I2: ¿Qué ves aquí? En esta de aquí. ¿Se parece más? ¿Se parece menos?

E4: Esta se parece más. […]

I2: […] Y entonces, ¿qué diferencias encuentras de una a otra por ejemplo?

E4: En que unas están en paréntesis y otras no.

Observamos algunos casos de respuestas del tipo relacional para la propiedad conmutativa de la suma y multiplicación del E1 “están cambiando los números de sitio” en 2.a en las entrevistas, muy similar a lo que escribió en la prueba inicial. En el caso del estudiante E3, ofreció respuestas tipo relacional en la prueba inicial en 2.b y 2.c a los que respondió “si tiene cero o nada es igual” y “si tiene los números desordenados es igual” respectivamente. El hecho de que luego en las entrevistas ofreciera argumentos operacionales es algo que tener en cuenta.

Durante las entrevistas hemos podido observar que los estudiantes no esperaban que hubiese dos números sumando a la derecha del signo igual en la tarea 1.b. Hubo una alumna que afirmó no haber visto el último sumando y por eso no lo había sumado al principio. En la misma línea, en la tarea 2.e de la prueba inicial la E1 afirmó “que estaba al revés” refiriéndose a que como el resultado aparecía a la izquierda y la operación estaba a la derecha, se había escrito al revés. Esto se vio luego durante las entrevistas en alumnos que podían acercarse a un uso relacional del signo igual, lo que da pistas de que consideran el signo igual de forma operacional o relacional según el caso. La E4 tanto en la prueba inicial como durante las entrevistas pensó que la tarea 1.b estaba incompleta y había que volver a sumar la expresión de la derecha, llegando a añadir un signo igual y un treinta y siete en su respuesta en la prueba inicial. En la entrevista autocorrigió al ver la respuesta de los compañeros ficticios. Al igual que otros estudiantes que respondieron incorrectamente en un principio. Por otro

lado, no se observó ningún caso donde hubiesen respondido correctamente y, posteriormente, hubiesen cambiado su respuesta por la incorrecta de los compañeros ficticios, sino que explicaron el error cometido. Esto nos lleva a preguntarnos ¿por qué han decidido quedarse con la respuesta que es correcta en todos los casos que respondieron incorrectamente? ¿reconocen intuitivamente que la respuesta correcta lo es porque hace que se cumpla la igualdad a ambos lados? Más allá de las tareas de la propiedad conmutativa, vimos una amplia dependencia de estrategias de cálculo para responder a las preguntas. Aunque las fichas incluyesen figuras y letras y pudiesen identificar la ficha de ejemplos que se parecía más a la tarea correspondiente del cuestionario, la estrategia principal que se vio fue la de ir calculando y comprobando a ambos lados. Llamó la atención también el caso del E3, que usó una estrategia que no se vio en los otros participantes. Este estudiante resolvió un ejemplo de la ficha complementaria que trataba la propiedad distributiva de la suma con la multiplicación asignando el valor uno a la figura que se encontraba fuera del paréntesis, esto le facilitó la comprobación de los cálculos a ambos lados del igual.

A modo de resumen, algunas de las estrategias vistas en las respuestas de los estudiantes fueron: sustitución de símbolos por valores numéricos para comprobar veracidad de las propiedades, uso de restas para calcular los valores que faltaban en las sentencias numéricas abiertas, también prestaron atención al orden en que se presentaron los números en las tareas y hubo un caso que, intuitivamente, se fijó en los paréntesis y calculó manteniendo el orden que le indicaban.

En términos generales, encontramos usos tanto operacionales como relacionales del signo igual con mayor peso del operacional. Sin embargo, haber encontrado usos relacionales en tareas concretas y en alumnos de diferente desempeño de nuestra muestra, contrasta con resultados que recogen solo una pequeña minoría maneja un sentido relacional del signo igual en el nivel de tercero, y que se mostraría en mayor medida en cuarto y especialmente en quinto curso de Educación Primaria (Rittle-Jhonson et al., 2011). Por otro lado, los resultados obtenidos en nuestro trabajo están en consonancia con lo sugerido por Rodal y Storeli (2023), cuando apuntan que un desarrollo del sentido numérico en etapas tempranas, como los alumnos de nuestra muestra, sería clave para adquirir una comprensión relacional del signo igual.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio perseguía aportar una descripción detallada de los tipos de usos del signo igual en los estudiantes de nuestra muestra, para dar respuesta a la pregunta sobre cómo son estos usos en los estudiantes de tercero de Educación Primaria. Podemos concluir que el objetivo se ha cumplido satisfactoriamente, donde destacamos como principal resultado haber hallado evidencias de usos relacionales del signo igual en tercero de Educación Primaria. Entre las limitaciones que enfrenta este estudio tenemos que la naturaleza de nuestros datos es de tipo cualitativo únicamente y, además, por el número de participantes no podríamos generalizar nuestros resultados. Esperamos que dichos resultados puedan ser igualmente de utilidad en futuras investigaciones que exploren propuestas específicas y personalizadas orientadas al desarrollo de un sentido relacional del signo igual en los estudiantes, y también aquellos que profundicen en la comprensión de cómo entienden los estudiantes de Educación Primaria el signo igual.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y participando en el “Programa Erasmus+. Movilidad de Estudiantes de Doctorado a terceros países no asociados (KA171). Curso 2023/24” (estancia en la PUCV del primer autor).

REFERENCIAS

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fornger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En M. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27–49). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Bouvier, A. y George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª edición). Ediciones Akal.

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Routledge.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education 54*, 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312. https://doi.org/10.2307/30034852

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating Mathematical Structure for All. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

Matthews, P. G., Rittle-Johnson, B., Taylor, R. S. y McEldoon, K. L. (2010). *Understanding the Equals Sign as a Gateway to Algebraic Thinking* [Resumen]. Society for Research on Educational Effectiveness.

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado (BOE), no. 52, 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada] https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., y McEldoon, K. L. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A Construct-Modeling Approach. *American Psychological Association, 103*(1), 85-104. https://doi.org/10.1037/a0021334

Rodal, C., y Storeli, S. (2023, July). What can an algebra bridge between number sense and equal sign in early childhood look like? *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest. https://hal.science/hal-04422808

Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic Thinking in the Elementary and Middle Grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 386–420). National Council of Teachers of Mathematics.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A., y Mason, J. (2019). Architecture of Mathematical Structure. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 13–17. https://www.jstor.org/stable/26742004z

DIFERENTES NORMATIVAS, DIFERENTES VERSIONES DEL SENTIDO NUMÉRICO

Different Regulations, Different Versions of Number Sense

Jiménez-Rubiano, L.[a], Piñeiro, J. L.[b], Ruiz-Hidalgo, J. F.[a]

[a]Universidad de Granada (España), [b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

Resumen

En este artículo se presenta un análisis descriptivo y comparativo de 4 desarrollos curriculares de matemáticas en España. Este estudio se centra en analizar el tratamiento del sentido numérico en cada uno de ellos, mediante el método del análisis de contenido. Las semejanzas y diferencias entre los cuatro programas ponen de manifiesto que, aunque se busca especificar, no se logra un nivel de detalle suficiente para describir claramente las habilidades específicas como expectativas de aprendizaje que debe desarrollar un sujeto para cada sistema numérico abordado en primaria y que facilitan el desarrollo del sentido numérico.

Palabras clave: habilidades numéricas, currículo, aprendizaje del número, educación primaria.

Abstract

This article presents a descriptive and comparative analysis of four mathematics curricular developments in Spain. The study focuses on examining how numerical sense is addressed in each of them, using the content analysis method. The similarities and differences among the four programs reveal that, although there is an effort to specify, the level of detail achieved is insufficient to clearly describe the specific skills as learning expectations that a student should develop for each numerical system covered in primary education, which are essential for fostering numerical sense.

Keywords: *numeracy skills, curriculum, number learning, primary education.*

INTRODUCCIÓN

La noción de sentido numérico ha experimentado una notable evolución en el ámbito de la investigación educativa, estableciéndose como componente esencial en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y convirtiéndose en uno de los elementos centrales de los desarrollos curriculares, pretendiendo así influir en las prácticas pedagógicas y en los enfoques didácticos adoptados por los docentes en el aula. En el caso de España, desde el 2022, su legislación nacional ha manifestado explícitamente un enfoque funcional de la normativa curricular, incluyendo así al sentido numérico (Ministerio de Educación y Ciencia, 2022), no solo desde la perspectiva general del desarrollo de competencias clave, sino en los aspectos más específicos de las matemáticas, donde los sentidos matemáticos sirven de enlace entre el contenido y el desarrollo de competencias (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022**;** Lupiáñez y Rico, 2015).

Tras el cambio curricular, se establece una serie de saberes básicos para el currículo educativo en España. Sin embargo, cada comunidad autónoma ha ajustado y adaptado el desarrollo nacional a sus elementos idiosincráticos en su normativa curricular. Se espera que, dado el carácter genérico de la regulación nacional, esta se complemente en cada comunidad autónoma con la especificidad reflejada en unos documentos más ricos en detalle y con mayor nivel de descripción, de tal manera que proporcionen a los docentes una herramienta fácil, práctica de interpretar, para planificar, diseñar sus tareas y desarrollen su enseñanza, promoviendo así un óptimo desarrollo del sentido numérico.

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2025). Diferentes normativas, diferentes versiones del sentido numérico. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

Además, sería razonable pensar que todos estos desarrollos curriculares compartan las características básicas del sentido numérico.

Con el objetivo principal de identificar y valorar las semejanzas y diferencias en el tratamiento del sentido numérico en la educación primaria entre diferentes comunidades autónomas, planteamos un trabajo que contribuya a una comprensión profunda de las disparidades y similitudes en los enfoques pedagógicos adoptados en distintas regiones del país. Se trata de un trabajo pertinente ya que, en el proceso de revisión de la literatura, se ha evidenciado una notable escasez de estudios comparativos que examinen el abordaje del sentido numérico en los currículos educativos de distintas administraciones educativas en España. Ante esta falta de información, focalizamos este estudio en cuatro comunidades autónomas y lo contrastamos con la normativa curricular nacional.

SENTIDO NUMÉRICO Y COMPONENTES

Aunque no existe una definición consensuada de sentido numérico (Whitacre et al., 2020; Ghazali et al., 2021), las existentes tienen elementos comunes, sin importar el tipo de perspectivas (psicológicas y educativas) que permiten identificarlo como la comprensión general que va desarrollando una persona del número y las operaciones, la comprensión que le permite generar relaciones entre los conceptos, aplicarlos, razonarlos, emitir juicios para dar solución a situaciones que requieren tratamientos numéricos (Jiménez-Rubiano et al., 2024a). Siguiendo la caracterización de Sowder (1992), subrayamos como fundamental de un buen desarrollo del sentido numérico las capacidades de relacionar, emitir juicios, actuando con flexibilidad, frente a problemas que permiten emplear los números. Tres grupos de componentes permiten organizar las capacidades o habilidades que permiten identificar el sentido numérico (Jiménez-Rubiano et al. 2024a, 2024b). A continuación, se describen en la Tabla 1.

Tabla 1

Componentes de sentido numérico

	Descriptores de las componentes de sentido numérico
Número sin operación	C1. Manipulación de las diferentes representaciones del número. Implica un dominio desde lo simbólico, oral/escrito y modelos/materiales (gráficos, concretos…). C2. Interpretación y uso del número en contexto: Los números (naturales, fracciones, decimales) tienen usos específicos que hacen que la interpretación varíe. Los naturales se usan para contar, ordenar, etiquetar, medir e indicar el cardinal en un conjunto de elementos. Las fracciones se usan e interpretan como operador, etiqueta, todo/ unidad, parte todo- medida, cociente (reparto), razón (probabilidad). Los decimales como medida (extensión de la cuantificación), división entera, aproximación, porcentaje, calculadoras y ordenadores, notación científica, etc. C3. Conocimiento de las estructuras numéricas de cada sistema relacional. Implica el conocimiento de la estructura, propiedades y reglas del cómo funciona cada sistema numérico.
Número con operación	C4. Uso de las operaciones en contextos. Implica asociar las operaciones a las acciones correspondientes, interpretando operaciones en situaciones aplicadas, usualmente a escenarios de la vida cotidiana (o simulaciones de estos escenarios). Por ejemplo, en situaciones de cambio, comparación (+,*), combinación, igualación, reparto, suma reiterada, proporcionalidad, isomorfismo de medida, producto cartesiano, etc. C5. Uso flexible de las propiedades de las operaciones. Se centra en el campo procedimental, lo que implica dominar las propiedades y formas de representar las expresiones (C1, C3), que condiciona la operatoria. Por ejemplo, uso de algoritmos convencionales, propiedades (conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro), mover la coma al multiplicar o dividir entre diez, redondear/truncar un número decimal,

	simplificar y amplificar fracciones, identificar cuándo la fracción es irreducible, expresar la medida de una magnitud continua, etc. C6. Relacionar las operaciones. Implica comprender cada operación (C5), construir una red de conexiones entre las operaciones. Conexión de algoritmos y propiedades, conexión entre representaciones, pasar de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, un aspecto que orientaría más las relaciones que se pretenden establecer, sería, reconocer la relación inversa de una operación que se produce en algunos sistemas numéricos, hacer hincapié en reconocer que no siempre el producto de fracciones o decimal amplifica (o la división reduce).
Aspectos procedimentales de números y operaciones	C7. Crear procedimientos menos convencionales. Incluye la aplicación de las destrezas de cálculo (mental y estimado) (C5, C6), conocimiento del sistema numérico (C3), de hechos y de las representaciones (C1, C2). C8. Razonar sobre los hechos, procedimientos y resultados. implica razonar las acciones para facilitar la toma de decisiones, cuestionarse mediante preguntas claves, antes, durante y después del proceso de solución.

CURRÍCULO

Vamos a considerar el currículo como el conjunto de diversos factores que intervienen en el campo educativo, el cual está organizado en dimensiones y en niveles de reflexión. Explícitamente Rico (2013) lo define como

> "todo plan de formación cuya determinación viene dada por unos sujetos a quienes hay que formar; las finalidades formativas que se pretenden y las necesidades a las que se quiere atender; la institución, el personal y los recursos con los que se lleva a cabo la formación; el tipo de formación que se quiere proporcionar: las normas y códigos, los valores, los conocimientos y capacidades, las habilidades y técnicas, las actitudes y destrezas; finalmente, el sistema de evaluación del plan de formación, determinado por unos criterios e instrumentos" (p.20).

Como el currículo se establece para responder a unos fines educativos, estos fines se convierten en las dimensiones que lo estructuran (cognitiva, cultural, ética y social) que, a su vez, se clasifican en niveles de reflexión (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018). El primer nivel va desde las acciones en el aula de clases, que promueve las normas que regulan, plantean los objetivos específicos, el contenido a abordar, la metodología y los criterios de evaluación; el segundo nivel, va desde la planeación escolar, se proponen metas para los estudiantes, se sistematiza el conocimiento a través de disciplinas y asignaturas, el docente implementa tareas de enseñanza y la escuela socializa y promueve las interacciones entre los estudiantes; tercer nivel, va desde la especificidad de cada área de conocimiento, estudia sus fundamentos teóricos y su implementación técnica; el cuarto nivel, aborda los objetivos generales…

Esta perspectiva permite interpretar el currículo como un marco de referencia, lo que lo convierte en instrumento esencial para planificar, diseñar, implementar y evaluar proyectos educativos dentro del contexto social y las características específicas de una institución. Por lo que facilita la reflexión y el desempeño profesional del docente de matemáticas en el ámbito escolar (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018). Por ello, dentro del currículo, nos centraremos en la normativa curricular, para analizarla desde la dimensión cultural y en su nivel (2) donde se planea y se proponen las metas de cada asignatura, pues se considera que, además de la filosofía con la que se plantean los cambios curriculares, en cada área específica se producen cambios que vienen inducidos por su propia idiosincrasia.

MÉTODO

Para identificar el tratamiento dado al sentido numérico en primaria por la legislación nacional y por comunidad autónoma realizamos un análisis descriptivo y comparativo de cuatro programas de matemáticas de primaria por medio del análisis de contenido (Krippendorff, 2004). Se seleccionaron cuatro Comunidades Autónomas, mediante un muestreo por conveniencia, para representar cierta diversidad geográfica, lo que permitió un análisis más profundo y detallado de cada caso, asegurando

así que el estudio mantuviera rigor y relevancia pese a la muestra reducida. Específicamente se analizaron los "saberes básicos" referentes al sentido numérico en educación primaria. La elección de las comunidades autónomas se realizó por conveniencia, básicamente limitamos el número debido a la extensión del documento y por ser un primer acercamiento. La documentación se descargó del Portal del Sistema Educativo Español (Educagob, 2025). Concretamente, las fuentes analizadas fueron la LOMLOE (MEFP, 2022) y los desarrollos curriculares de la misma:

- Real Decreto 157/2022 de enseñanzas mínimas para Primaria y Secundaria (MEFP, 2022).
- Decreto 66/2022, de 7 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil y de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Cantabria.
- Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.
- Decreto 38/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación primaria en la Comunidad de Castilla y León.
- Decreto 61/2022, de 13 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Primaria.

Las unidades de análisis empleadas son los "saberes básicos" referentes a sentido numérico expresados en los anteriores documentos normativos de primaria. Entiéndase por saber básicos los **"**conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de un área y cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas" (MEFP, 2022, p. 24388). Estos están contemplados en seis apartados: conteo, cantidad, sentido de las operaciones, relaciones, educación financiera y, en algunos ciclos, razonamiento proporcional. Sin embargo, estos saberes no parecen organizados bajo un criterio claro (por ejemplo, las componentes), ya que algunos saberes, como los del apartado "relaciones", parecen incluidos de forma forzada y no encajan completamente en su categoría (p.e. Castilla y León "Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo" siendo esta una relación solo del número más no de la operación no encaja en nuestras componentes). Como sistema de categorías usamos la lista de componentes propuesta por Jiménez-Rubiano et al (2024a, 2024b) descritas anteriormente. El análisis se realiza de acuerdo con cada componente, haciéndolo deductivo por tener categorías a priori. A continuación, ejemplificamos cómo se extraen y categorizan los indicadores de los saberes.

Primero, resaltamos los indicadores o sinónimos en los saberes, que a la luz de las categorías a priori se pueden clasificar, por ejemplo: el saber, "explicación del proceso de resolución y resultado" de Cantabria, se asocia a los indicadores de la componente 8 *"C8. Razonar sobre los hechos, procedimientos y resultados"* porque el saber atiende a los requerimientos de la componente (el sujeto debe dar cuenta de sus acciones, cuestionarse antes, durante y después del proceso de solución. Otro caso que explica la clasificación se da con este tipo de saberes: "sistema de numeración de base diez (números naturales y decimales hasta las milésimas): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones" de Cantabria. Este saber se puede asociar a la componente 3 debido a que refiere al conocimiento de la estructura del sistema del número y también se asocia a la componente 6, por las relaciones explícitas que se establecen en las operaciones de dicho sistema. Este proceso indica que las categorías no son excluyentes.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

A continuación, se describe la incidencia de aparición de saberes asociados a componentes del sentido numérico (Tabla 2), así como las semejanzas, diferencias encontradas entre los documentos de las diferentes CCAAs.

Tabla 2

Organización de saberes por componente y Comunidad Autónoma

	Saberes				
Componente	RD	Can	And	CyL	Mad
C1	6	6	9	6	8
C2	7	7	8	9	9
C3	5	5	5	7	5
C4	6	6	7	6	6
C5	8	8	8	16	15
C6	4	4	4	4	4
C7	3	3	4	4	3
C8	2	3	5	1	1
Total	41	42	50	53	51

Componente 1. Manipulación de las diferentes representaciones del número. Haciendo alusión a lo simbólico, Madrid y Andalucía promueven el uso de los números romanos, esta última asocia las diferentes representaciones con su contexto con enunciados como: "Reconocimiento de los números romanos formando parte de la vida cotidiana como vestigio del Patrimonio Cultural Andaluz", además, promueve el uso de modelos como las representaciones espontáneas. Respecto a lo verbal Madrid promueve implícitamente vocablos como "...mitad, tercera parte, cuarta parte de números pares múltiplos de 3 y 4 respectivamente". En relación con los materiales, Andalucía promueve el uso de recursos como juegos de mesa y materiales manipulativos. Encontramos así desequilibrio entre el número de saberes que asocian Andalucía y Madrid frente a Cantabria y Castilla y León y a la normativa general. Todos atienden a los saberes planteados en la normativa general (Real Decreto), unos más explícitos que otros.

Componente 2. Interpretación y uso del número en contexto. Respecto a las diferentes interpretaciones que tiene un número, encontramos que Castilla y León es el único que hace alusión a la interpretación de fracción como relación entre las partes y el todo. En los 5 documentos, se manifiesta así, un descuido en la interpretación de las fracciones y decimales. Además, existe una aparente desproporción en el reparto de la enseñanza de los diferentes sistemas numéricos a lo largo de la educación primaria. Quizá, esto influye en que gran parte de los saberes básicos de las cuatro normativas autónomas se centra en los números naturales. Esto sugiere que, al abordar nuevos sistemas numéricos, estos no reciben el mismo tiempo de dedicación y énfasis que los naturales en el proceso de enseñanza aprendizaje. Pese a este panorama, Madrid y Andalucía promueven además la interpretación y uso del número entero cuando la normativa general no lo propone.

Componente 3. Conocimiento de las estructuras numéricas de cada sistema relacional. El saber expresado como "Sistemas monetarios. Múltiplos y submúltiplos del euro" de Castilla y León evidencia el hincapié para conocer cómo funciona el sistema y reconocer la estructura desde diferentes representaciones. El saber "Diferencias entre números naturales, enteros, racionales y reales. Número Pi (π)" de la comunidad de Madrid hace alusión a sistemas numéricos que la

normativa general no propone. En síntesis, se evidencia concentración de "saberes" de esta componente en torno al número natural, en este caso en los tres ciclos y los 5 documentos. Además, hay desequilibrio al alza con Castilla y León. Bajo estas circunstancias y considerando las dificultades del paso de un sistema a otro reportadas por la literatura, deberían existir saberes que conecten la transición de números naturales a decimales y fracciones y se centren más en la estructura de decimales y fracciones.

Componente 4. Interpretación de las operaciones en contextos. Se evidencia que la normativa general hace alusión al reconocimiento de las operaciones y representaciones útiles para resolver situaciones contextualizadas, situaciones proporcionales y no proporcionales. Andalucía describe las fases de matematización a tener en cuenta "Comprensión del enunciado, identificando los datos relevantes y relacionándolos con la pregunta; elaboración de un plan de resolución; ejecución del plan siguiendo". Sin embargo, consideramos que en general hacen falta más descriptores en los saberes para que la habilidad de interpretar las operaciones en situaciones aplicadas se desarrolle por completo o en gran parte. Teniendo en cuenta que la resolución de problemas es una habilidad clave en las sociedades actuales. Aunque implementarla de manera efectiva en el aula no es una tarea sencilla (Piñeiro et al., 2021).

Componente 5. Uso flexible de las propiedades de las operaciones. Desde la normativa general es notorio el aumento de saberes. Castilla y León plantean saberes como: "Construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas" "Equivalencias y representación entre números naturales, fracciones y decimales" que vienen siendo indicadores que deben desarrollarse para la parte operatoria del número, elevando así los indicadores a 16. Encontramos así desequilibrio entre el número de saberes que asocian Andalucía y Madrid frente a Cantabria y Castilla y León y a la normativa general.

Componente 6. Relacionar las operaciones. Las comunidades autónomas en su normativa redactan los saberes igual que la normativa general y se mantiene una constante en los saberes. Al respecto y considerando los estudios de (Jiménez-Rubiano et al. 2024a) se podrían redactar saberes que promuevan cómo realizar la conexión entre las operaciones y las propiedades de un sistema numérico, ya que facilitan combinar operaciones y moverse flexiblemente con ellas.

Componente 7. Crear procedimientos menos convencionales para el cálculo mental y estimación. Todas las normativas indican el uso de "estrategias". Por ejemplo, "Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales". Castilla y León es uno de los que más usa este término y añade el saber "Redondeo de números…decimales" Andalucía promueve el saber "Desarrollo de estrategias para tantear soluciones antes de realizar operaciones…". En consecuencia, se considera que, aún faltan descriptores que abarquen un amplio abanico de posibilidades que orienten crear procedimientos no convencionales para ir desarrollando sentido numérico, situación que se evidencia en la Tabla 2.

Componente 8. Razonar sobre los hechos, los procedimientos y los resultados. La normativa general, sugiere un enfoque integrado que busca fomentar el pensamiento crítico y la comunicación efectiva en el aprendizaje matemático desde las competencias específicas cinco y tres. Pero este aspecto es muy ausente en los saberes básicos de todas las normativas (ver Tabla 2). Castilla y León y Madrid sólo hacen alusión a ello cuando se refieren a "decisiones de compra responsable", sin embargo, Andalucía describe más detalladamente los saberes fomentando el "Desarrollo del aprendizaje autónomo y de mecanismos de autocorrección…", "la elaboración de conjeturas y búsqueda de argumentos que las validen o las refuten…", "explicación de la solución…". No obstante, esperábamos encontrar en las otras comunidades y en la normativa general más saberes promoviendo el desarrollo de esta componente, teniendo en cuenta que dicha componente facilita la toma de decisiones y está presente en gran parte de las acciones que realiza el sujeto (p. e. NCTM, 2003).

En síntesis y en general, la revisión de los documentos permite interpretar que se les da más importancia a las componentes 1, 2 y 5. Las comunidades intentan ser más descriptivas que la normativa general, siendo Madrid, Andalucía y Castilla y León las que aumentan sus saberes en más de 8.

REFLEXIONES FINALES

Al contrastar los saberes de las comunidades autónomas con las componentes de sentido numérico, notamos diferencias entre comunidades. Unas son más explicitas que otras, como el caso de Castilla y León, seguido por Madrid y Andalucía y en otras se observa una adopción directa con escasas modificaciones como el caso de Cantabria. En el caso de Castilla y León, podríamos inferir que quizá influya el hecho de que especifica los saberes para cada uno de los seis cursos**.**

A nivel general, los hallazgos nos indican la notoria tendencia a centralizarse en la operación del número y sobre todo del natural (C5) coincidiendo con Gabriel et al. (2013). También destacamos la importancia que se le da a los usos de las diferentes representaciones del número (C1). Coincidiendo con Alzubi (2021) y Sowder (1992), quienes sostienen que el empleo de representaciones depende del contexto en que se presenta la situación y son fundamentales para comunicar ideas matemáticas. Estos hallazgos ratifican el planteamiento de Jiménez-Rubiano et al. (2024b) quienes indican que el sentido numérico no puede concebirse como habilidades de un único sistema numérico, sino que requiere integrar en su descripción las habilidades de los otros sistemas numéricos.

Los saberes incluyen pocos indicadores de las componentes C6 y C8, pese a ser esenciales para facilitar la toma de decisiones y estar presentes en gran parte de las acciones que realiza el sujeto (p. ej., Bütüner, 2018). Sugerimos que los saberes deberían redactarse de manera que conecten el contenido con la competencia, y como señalan Jiménez-Rubiano et al. (2024a) integrando procesos de pensamiento, relaciones y argumentación en el aula (C6 y C8), es decir, consideramos que todos los saberes deberían tener presente estas componentes en su estructura.

CONCLUSIÓN

Al examinar el tratamiento del sentido numérico en la educación primaria entre diversas comunidades autónomas, se observa en este estudio que solo tres de las cuatro estudiadas intentan ser más explicitas e ir al detalle con algunos saberes básicos, aunque sin alcanzar los niveles de detalle y explicitación requeridos para desarrollar el sentido numérico. Es importante aclarar que no se pretendía encontrar un desglose exhaustivo, sino una descripción más precisa por sistema numérico que oriente al docente de primaria sobre cómo interconectar, asociar los diferentes contenidos y desarrollar las habilidades del sentido numérico, así como presentar la jerarquía e importancia de abordar ciertas destrezas/habilidades antes que otras.

Por otro lado, entendemos que la normativa curricular es orientativa, genérica y debe ofrecer una guía clara que responda a las necesidades de toda la población para desarrollar competencias matemáticas. Aunque lograr ese “todo en uno” no es tarea fácil. Si bien, todos estos desarrollos curriculares comparten las características básicas del sentido numérico e intentan desglosar los saberes y ajustarlos a sus necesidades, consideramos en este estudio que los documentos normativos por comunidades deberían proporcionar más detalles para que los docentes comprendan la secuencia, el hilo conductor y los tipos de conexiones a seguir para desarrollar sentido numérico en la educación primaria.

Referencias

Alzubi, K. (2021). Explore Jordanian mathematics teacher’s perception of their professional needs Related to Mathematical Proficiency. *International Journal of Educational Research Review, 6*(2), 93-114. https://doi.org/10.24331/ijere.835492

Bütüner, S. Ö. (2018). Comparing the use of number sense strategies based on student achievement levels. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(6), 824-855. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1410738

Educagob. (2025). Portal del Sistema Educativo Español. *Currículos en las Comunidades Autónomas*. https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/curriculos-ccaa.html

Gabriel, F., Coche, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., y Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, *4*, 715. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715

Ghazali, M., Mohamed, R. y Mustafa, Z. (2021). A systematic review on the definition of children's number sense in the primary school years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 17*(6). https://doi.org/10.29333/ejmste/10871

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024a). Sentido numérico: relación de sus componentes desde el significado del número natural. *Revista De Educación De La Universidad De Granada*, *31*, 19–34. https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30760

Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024b). Transición entre sistemas numéricos para describir el sentido numérico. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 329-336). SEIEM.

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to Its Methodology* (2nd ed.) Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Lupiáñez, J. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En L. Rico y P. Flores (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 41-60). Ediciones Pirámide.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*. https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-3296-consolidado.pdf

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM THALES.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2021). Conocimiento sobre la resolución de problemas de matemáticas manifestado por estudiantes para profesor. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*, 1416-1437. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a09

Rico, L.. (2013). El método del análisis didáctico. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *9*(33).

Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Ideas to work for the curriculum change in school mathematics. En *ICMI Study 24 Conference proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 301-308). ICMI.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L. Blanco (Ed.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 55-77). Editorial Universidad de Granada.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 371-389). NCTM.

Whitacre, I., Henning, B. y Atabaş, Ş. (2020). Disentangling the research literature on number sense: Three constructs, one name. *Review of Educational Research, 90*(1), 95-134. https://doi.org/10.3102/0034654319899706

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE TAREAS CONTEXTUALIZADAS SOBRE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN EMPLEANDO GEOGEBRA

Contextualized task-solving strategies on solids of revolution using GeoGebra

Karkour-Afhim, M. y Albanese, V.

Universidad de Granada

Resumen

La integración de las tecnologías emergentes como los Softwares de Geometría Dinámica en entornos formales e informales ha reportado mejoras evidentes al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría espacial. Desde el enfoque ontosemiótico, se analiza cómo varían las estrategias empleadas por un grupo de estudiantes de un club matemático para resolver unas tareas contextualizadas relacionadas con los sólidos de revolución. Los resultados revelan un cambio hacia un tipo de construcción empírica y una argumentación inductiva a medida que se avanza hacia tareas más complejas y con un mayor grado de generalización, estimulando de este modo la elaboración de conjeturas y la exploración durante la actividad matemática.

Palabras clave: Tareas contextualizadas, Sólidos de revolución, Geometría espacial, Software de Geometría Dinámica, Enfoque Ontosemiótico.

Abstract

The integration of emerging technologies such as Dynamic Geometry Software into formal and informal settings has yielded significant improvements in the teaching and learning process of spatial geometry. Using an ontosemiotic approach, this study analyzes how the solution strategies employed by a group of students in a mathematics club vary when solving contextualized tasks related to solids of revolution. The results reveal a shift toward empirical construction and inductive argumentation as they progress toward more complex tasks with greater degree of generalization, thus stimulating conjecture making and exploration during mathematical activity.

Keywords: *Contextualized tasks, Solids of revolution, Spatial geometry, Dynamic Geometry Software, Ontosemiotic approach.*

INTRODUCCIÓN

La utilización en los centros educativos de las tecnologías emergentes como soporte de la actividad docente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje hace cada vez más necesario un análisis riguroso del potencial impacto que estas tecnologías de la información (TIC) tienen sobre los discentes cuando son llevadas a la práctica en el aula (Marín-Díaz et al., 2022).

El empleo de Softwares de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra permite contextualizar el estudio de la geometría espacial, y en particular el estudio de los sólidos de revolución, en situaciones cotidianas de la vida real (Iparrraguirre-Villanueva et al., 2024). Su uso, cada vez más extendido en diversos campos (De Sousa et al., 2023), ofrece numerosas ventajas directamente relacionadas con la capacidad de relacionar representaciones digitales y el mundo real mediante el uso de tablets, teléfonos inteligentes u ordenadores (Zhang et al., 2023).

En este sentido, son numerosas las investigaciones que han mostrado los beneficios en el uso de softwares tridimensionales e inmersivos (Santos et al., 2014; Escrivá et al., 2018) puesto que reducen la carga cognitiva de la memoria al fomentar la denominada memoria virtual. En este estudio,

Karkour Afhim, M. y Albanese, V. (2025). Estrategias de resolución de tareas contextualizadas sobre sólidos de revolución empleando GeoGebra. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

emplearemos el Software de Geometría Dinámica GeoGebra 2D y GeoGebra 3D durante el diseño de tareas contextualizadas, siguiendo las indicaciones de Palm (2008) para el desarrollo de tareas auténticas, relacionadas con la construcción de sólidos de revolución y sus desarrollos planos, así como durante el registro de las respuestas producidas por un grupo de estudiantes para su posterior análisis cognitivo (Valori et al., 2022).

El objetivo de este trabajo es analizar la actividad matemática de unos estudiantes al resolver tareas contextualizadas relacionadas con los sólidos de revolución empleando el SGD GeoGebra. Para ello, se plantean las siguientes preguntas de investigación: ¿qué tipo de estrategias surgen para la construcción de solidos geométricos de revolución empleando SGD en tareas contextualizadas? y ¿cómo varía la naturaleza de la argumentación empleada a medida que avanza el nivel de complejidad de dichas tareas?

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El enfoque ontosemiótico (EOS) de la actividad matemática aporta de manera integradora una serie de supuestos y herramientas teóricas para el análisis de la actividad matemática, tanto profesional como escolar (Godino, 2024). Entre sus aportes originales, se encuentran tanto los significantes (expresión) de las funciones semióticas como los significados (contenido) que pueden ser objetos tanto ostensivos (materiales) como no ostensivos (constructos). Según esta teoría, en las practicas matemáticas intervienen diversas clases de objetos (situaciones, lenguajes, conceptos y propiedades, procedimientos y argumentos) y procesos (construcción, modelización, visualización, etc.) (Godino, Batanero y Font, 2007). En esta línea, son numerosos los trabajos que han empleado el enfoque ontosemiótico en la resolución de problemas geométricos llevados a cabo mediante la articulación de secuencias de prácticas (Fernández et al., 2012) y, en particular, en su aplicación en la significación de elementos atribuidos a la geometría espacial (Pochulu, 2010; Sbitena et al., 2010). En el marco del EOS, Blanco et al. (2019) analizaron con 400 aspirantes a maestros las principales dificultades y errores relacionados con los procesos de visualización al resolver tareas de generación de sólidos de revolución, poniéndose de relieve la importancia del tratamiento de actividades que movilicen habilidades de visualización como el reconocimiento de posiciones, las relaciones espaciales y la rotación espacial.

Por otra parte, García y Martínez (2022) observaron un uso extendido por parte de unos estudiantes universitarios de la argumentación inductiva en la generación de nociones sobre el Teorema Fundamental del Cálculo al emplear GeoGebra, asociando el manejo de SGD con el proceso de razonamiento inductivo en la resolución efectiva de tareas. Por el contrario, Larios et al. (2017) diseñaron tareas relacionadas con la geometría del triángulo para alumnado de tercer curso de secundaria observando el uso explícito de habilidades de observación de objetos geométricos y de un razonamiento deductivo.

En este trabajo se emplea el enfoque ontosemiótico como herramienta para analizar y categorizar los procesos de construcción y argumentación en la actividad matemática al resolver tareas contextualizadas sobre sólidos de revolución creados con la herramienta GeoGebra.

METODOLOGÍA

La metodología es cualitativa y exploratoria (Cohen et al., 2002; Sierra, 2011). Participaron 12 jóvenes (codificados a continuación como P1, P2, …P12) de edades comprendidas entre los 10 y 14 años integrantes de un club matemático que se lleva a cabo en horario extraescolar.

En una fase inicial de diseño, se crearon 5 tareas relacionadas con el estudio de sólidos de revolución, en las cuales se solicita la construcción de ciertos elementos geométricos y una explicación. Para su contextualización a la vida cotidiana se emplearon latas de refresco de capacidad determinada. En una segunda fase experimental, durante una sesión de dos horas, los participantes resolvieron las tareas individualmente frente al ordenador, reservando un momento inicial a la exploración de los

objetos y medición de sus características más relevantes empleando cinta de medir, papel y lápiz. Finalmente, se ha realizado un análisis de las producciones de los participantes, recogidas empleando los applets del SGD GeoGebra como se muestra en https://www.geogebra.org/m/yzb5ywnx.

Durante el análisis cognitivo se evaluará la actividad matemática de los participantes considerando como categorías el tipo de construcción empleada (algebraico, icónico, empírica, etc.), el tipo de argumentación empleada (deductivo, inductivo, etc.) e identificando estrategias que combinan un determinado tipo de construcción con un determinado tipo de argumentación, así como las posibles similitudes/discrepancias entre las construcciones emergentes producidas por los participantes y las esperadas, a la luz del EOS (Godino, 2024; Ticse et al., 2023).

Descripción de las tareas y resolución esperada (análisis epistémico)

Inicialmente, se realiza una breve introducción a la problemática de los sólidos de revolución y una contextualización real empleando latas de refresco comerciales de capacidad 330ml que el estudiantado explora manipulativamente. Cabe destacar que las tareas diseñadas, codificadas a continuación como T1, T2, …T5, se presentan secuenciadas desde un nivel inferior de generalización en la T1 hasta un nivel superior de generalización en la T5.

En T1, las latas de refresco deben encajar en una máquina expendedora cuyo diámetro es de 6cm. La formulación es: *"Construye una vista en 2D de una de las bases de la lata indicando su área y perímetro*". Posteriormente, se le pregunta sobre el procedimiento seguido durante la construcción. En GeoGebra la expresión algebraica del círculo de centro el origen de coordenadas y radio tres se puede obtener a partir del comando *Circunferencia(punto,radio),* y la medida de la longitud de la circunferencia y su área puede realizarse mediante el comando *Perímetro(cónica)* y *Área(cónica),* respectivamente. Sin embargo, se espera que los alumnos también empleen lenguaje icónico para construir la circunferencia , indicando un punto arbitrario como centro y la distancia entre este y otro punto que se considere como radio, y realice mediciones de áreas

y perímetros

. La construcción esperada se muestra en la Figura 1.

En T2 se pretende progresar en la visualización de la problemática, pasando de la representación plana a una representación tridimensional. La formulación es: "*Construir una vista 3D de la lata de refresco mostrando su superficie y volumen en dicha vista*". Para ello, se espera el empleo de la fórmula del volumen del cilindro de capacidad fija (330ml) para obtener su altura. Este cálculo puede realizarse o bien empleando expresiones algebraicas en la interfaz de GeoGebra, o bien empleando lápiz y papel. Una vez hallada dicha altura, se espera la construcción del cilindro (Figura 2) a partir del comando *Cilindro(circunferencia, altura),* indicando como circunferencia la construida en T1. La medición del volumen puede realizarse, o bien empleando lenguaje algebraico, o bien icónico

, y ha de mostrarse en la vista 3D junto al cilindro.

En T3 se presenta una variación, en esta ocasión la dimensión fijada es la altura de las latas de refresco que deben encajar en unas baldas separadas entre sí a 10cm. De este modo, se espera el cálculo, de manera algebraica, del radio del cilindro de volumen fijo (330ml) dada su altura constante igual a 10cm. La construcción esperada se muestra en la Figura 3.

En T4 se pretende dar cuenta del proceso de generalización durante la resolución de situaciones-problemas y se pide: "*Calcula la expresión que relaciona la altura de la lata con el radio de la base. Construye una simulación en 3D donde se aprecie cómo varía la altura del cilindro con el radio*". Primeramente, se espera obtener la expresión algebraica que relaciona la altura con el radio de un cilindro de volumen constante (330ml). En este caso, se espera la incorporación de un deslizador accesible mediante el icono

, el cual permitirá dar valores arbitrarios al radio, variando, en consecuencia, tanto la altura como la superficie total del cilindro. La construcción esperada se presenta en la Figura 4.

Figura 1

Construcción esperada en la Tarea 1

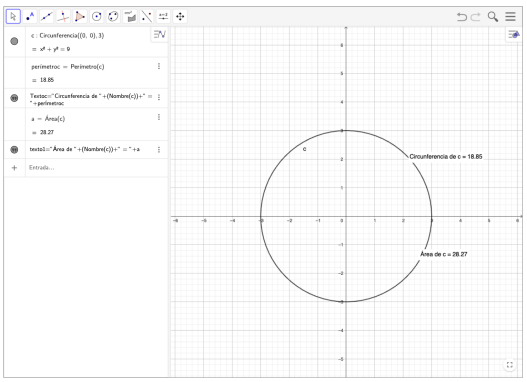


Figura 2

Construcción esperada en la Tarea 2

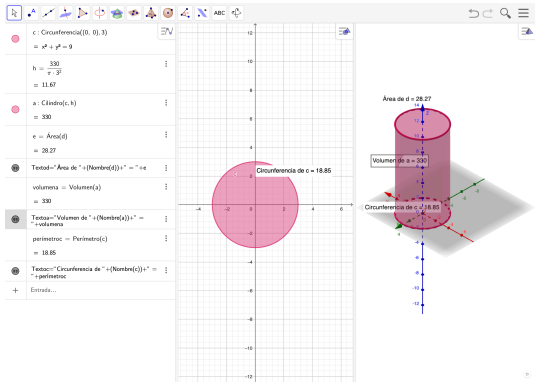


Figura 3

Construcción esperada en la Tarea 3

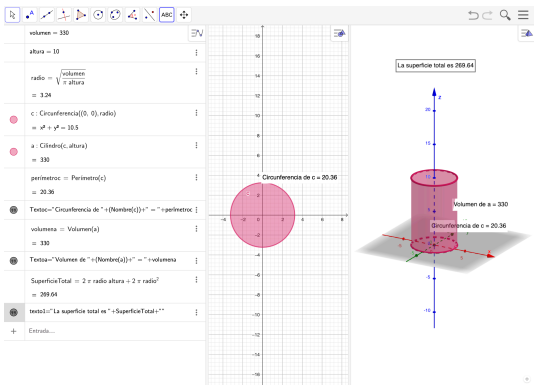


Figura 4

Construcción esperada en la Tarea 4

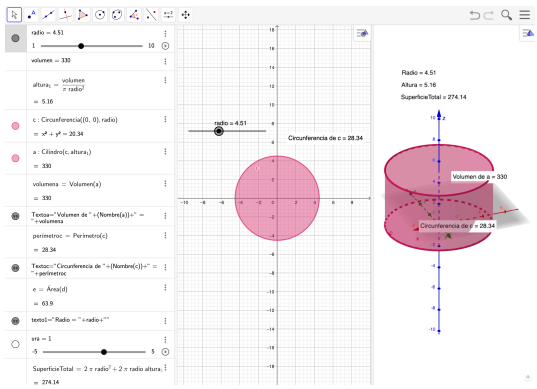


Figura 5

Construcción empírica de la Tarea 5

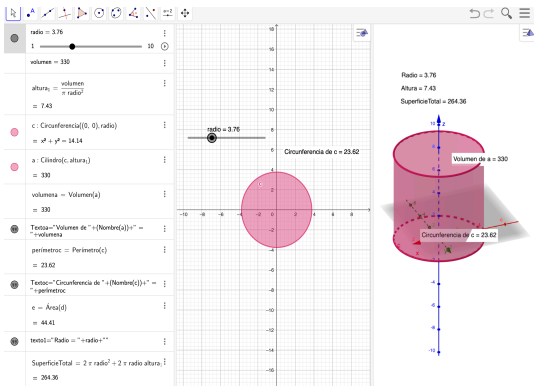
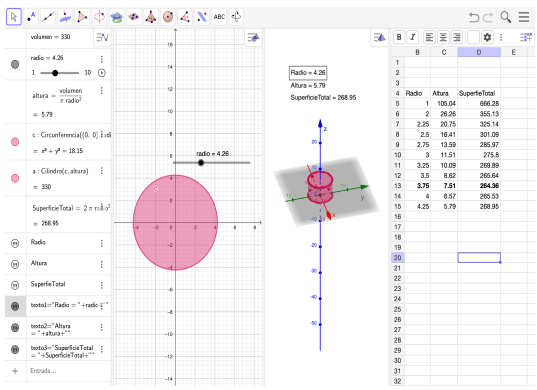


Figura 6

Construcción deductiva de la Tarea 5



Por último, en T5 se pretende optimizar la superficie del sólido de revolución de modo que se emplee la mínima cantidad posible de aluminio en su construcción. En este caso, se espera que se recurra a la tarea anterior para localizar, empíricamente, el cilindro de superficie óptima a partir del valor mínimo (Figura 5). Alternativamente, esta tarea puede realizarse empleando la vista de hoja de cálculo mostrando una tabulación de los distintos valores de radio, altura y superficie total correspondiente, mostrando entre ellas la mínima posible (Figura 6).

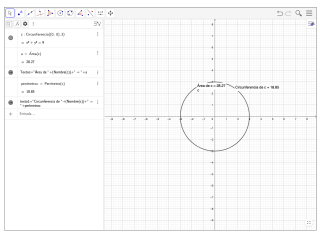
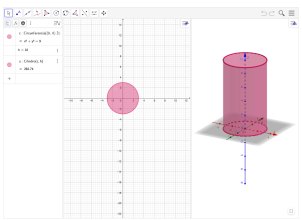
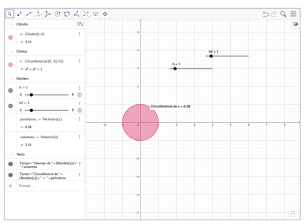
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, se describen las distintas categorías emergentes basadas en el análisis de las producciones matemáticas del estudiantado atendiendo al proceso *tipo de construcción* (empírica o algebraica) y al objeto *argumentación* (inductiva o deductiva) empleados durante la actividad matemática. La *construcción algebraica* se caracteriza por la utilización de un lenguaje analítico, ya sea en forma de comando, o mediante la expresión algebraica del concepto; a diferencia de la *construcción empírica* que emplea deslizadores que confieren a las variables valores ajustables arbitrariamente. Por otra parte, la *argumentación deductiva* se caracteriza por el empleo de reglas generales que, a partir de premisas bien definidas, llevan a una conclusión determinada, en contraste con la *argumentación inductiva*, que se basa en observaciones específicas para extraer conclusiones generales. Atendiendo a lo anterior, se encontraron en las producciones de los participantes las siguientes estrategias derivadas de la combinación de las categorías apenas descritas:

Estrategia Empírica-Inductiva (E-I): el participante realiza construcciones a partir de la creación de un deslizador para cada variable sin tener en cuenta la relación algebraica existente entre ambas variables, aumentando así el número de grados de libertad en la construcción. El argumento es de carácter inductivo en tanto que, si el valor del radio o la altura son datos de la tarea previa, el participante recurre a su generalización en las tareas siguientes. Una ejemplificación de estrategia que se incluye en esta categoría es la elaborada por P10 en T5.

Tabla 1

Categorización de las producciones matemáticas a partir de la construcción y el argumento

Participante - Tarea	Transcripción del Argumento	Construcción	Categoría Emergente
P4-T2	*"Divido 6cm:2= 3cm. Luego he construido primero una circunferencia de 3cm y luego he usado el icono de *medir*"*		*A-D*
P7-T3	*"Primero he construido una circunferencia como la anterior y luego construí un cilindro con una altura de 10 cm."*		*A-I*
P10-T5	*"....una dimensión cilíndrica optima, de la cual he sacado deslizadores para modificar y personalizar ... el cilindro."*		*E-I*

Estrategia Algebraica-Inductiva (A-I): en esta categoría el participante realiza construcciones a partir de la expresión analítica del concepto, ya sea mediante el empleo de su expresión algebraica o bien

empleando su icono. Se emplea un argumento inductivo en la validación de sus resultados, como se muestra por ejemplo en la resolución de P7 a T3.

Estrategia Algebraica-Deductiva (A-D): en esta categoría el participante emplea un argumento deductivo de modo que, partiendo de los datos del enunciado, infiere el resultado de las variables que se piden en una tarea posterior de manera lógica, como se muestra en la resolución de P4 a T2.

Asimismo, en la Tabla 2 se recogen los resultados del análisis de las estrategias empleadas por los participantes en la resolución de cada tarea.

Tabla 2

Estrategias utilizadas por los participantes en cada tarea

Estrategia /Tarea	**Tarea 1**	**Tarea 2**	**Tarea 3**	**Tarea 4**	**Tarea 5**
E-I				P10	P10
A-I			P7, P9	P4, P7, P9	
A-D	P1-P4, P6-P11	P1-P4, P6, P7, P9-P11	P1-P4, P6, P10, P11	P1	
No contesta/ No concluye	P5, P12	P5, P8, P12	P5, P8, P12	P2-P3, P5, P6, P8, P10-P12	P1-P9, P11-P12

Se observa que en la resolución de la T1 la mayoría de participantes (10 sobre 12) construyó la circunferencia de radio 3 centrada en el origen empleando lenguaje algebraico a partir del comando *Circunferencia (punto, radio)*, argumentando de manera deductiva la obtención del radio a partir del diámetro de las latas, que en este caso coincidía con la ranura de la máquina expendedora (Estrategia A-D). En la explicación empleó un lenguaje icónico en la medición del perímetro y el área del círculo al ser más intuitiva su resolución en el applet de GeoGebra.

En cuanto a T2, los participantes P5, P8 y P12 presentaron dificultades a la hora de representar en el espacio el cilindro de capacidad indicada debido al nivel de generalización de la tarea. En este sentido, los que sí contestaron, emplearon un lenguaje algebraico durante la construcción a partir del comando *Cilindro (circunferencia, altura)* y un argumento deductivo (A-D).

Para resolver T3, algunos participantes emplearon un argumento de carácter inductivo en la validación de sus resultados (P7 y P9), cayendo en el error de suponer que, a pesar de variar la altura, el radio de todos los cilindros permanecía constante. En este caso, durante la construcción se empleó un lenguaje algebraico (A-I) mediante el comando *Circunferencia (punto, radio)*. Sin embargo, tal y como se muestra en la Tabla 2, se observó que la mayoría de los participantes que contestaron emplearon una estrategia A-D en su resolución, obteniendo algebraicamente el nuevo radio a partir de la fórmula que relaciona la altura dada con el volumen constante del cilindro.

En T4, se observó que la mayoría de los participantes que contestaron, lo hicieron utilizando un deslizador que les permitía conferir valores aleatorios a la longitud del radio de la base. A pesar de la incorporación del deslizador, se trata de una construcción algebraica y no empírica, puesto que GeoGebra asigna un deslizador por defecto a cualquier variable sin valores específicos asignados (A-I). En este caso, y a medida que aumentaba la dificultad de las tareas, P10 comenzó a emplear una construcción empírica mediante la incorporación de varios deslizadores induciendo valores a partir de los datos facilitados en la tarea anterior (E-I).

La tarea 5 sólo fue resuelta por P10 que empleó dos deslizadores para expresar la variabilidad tanto del radio de la base como de la altura durante la construcción del cilindro de superficie óptima, sin establecer ninguna relación algebraica entre ambos constructos (construcción empírica). Argumenta de manera inductiva (E-I) induciendo valores a parir de los datos facilitados en la tarea anterior.

Durante este estudio se observó un cambio de estrategia en la actividad matemática de los participantes a medida que se progresaba en el grado de generalización de las tareas (Blanco et al., 2019). En este sentido, cabe notar una tendencia a pasar de una estrategia algebraica-deductiva en las tareas T1 y T2 a una estrategia empírica-inductiva en las tareas T4 y T5, haciendo un mayor uso de las prestaciones que ofrecen los deslizadores del SGD durante el proceso de construcción.

Por otra parte, se observó que al emplear estrategias de razonamiento deductivo se estimuló en mayor medida el pensamiento geométrico, así como el desarrollo de la percepción y la visualización geométrica de los estudiantes gracias a la elaboración de conjeturas y a la exploración durante la argumentación en consonancia con lo expuesto en Larios et al. (2017).

Finalmente, a pesar de que se cuidó la progresión gradual en complejidad durante la presentación de las tareas, fueron varios los participantes que no contestaron o no concluyeron las tareas de mayor complejidad (T4 y T5), observándose un cambio en la naturaleza de la argumentación, por aquellos alumnos que sí contestaron, hacia un tipo de argumentación inductivo (García y Martínez, 2022).

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo consistía en analizar la actividad matemática de los participantes de un club matemático durante la resolución de tareas contextualizadas empleando GeoGebra. Este objetivo se ha cumplido al diseñar, primeramente, una serie de tareas sobre sólidos de revolución y realizar un análisis de los resultados esperados de la actividad matemática. Finalmente, se estudiaron las producciones matemáticas a partir un análisis cognitivo realizado a la luz del EOS gracias a una categorización emergente basada en la construcción y argumentación.

Este trabajo presenta ciertas limitaciones debido al reducido número de participantes del club matemático, así como el tiempo asignado para la resolución de las tareas. Tampoco se conocía el nivel de familiarización y desenvolvimiento del alumnado con el SGD GeoGebra.

Como propuesta de futuras líneas de trabajo, cabría incluir diferentes sólidos de revolución en el diseño de tareas y analizar las posibles variaciones en términos de construcción y argumentación al incorporar prototipos virtuales elaborados con Realidad Aumentada.

BIBLIOGRAFÍA

Blanco, T. F., Diego-Mantecón, J. M. y Sequeiros, P. G. (2019). Procesos de visualización en una tarea de generación y representación de cuerpos de revolución. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(64), 768-789. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a16

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.

García, D. y Martínez, M. (2022). Uso de GeoGebra y el Razonamiento Inductivo en un acercamiento al Teorema Fundamental del Cálculo. *REMATEC, 17* (42), 29–43. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p29-43.id449.

De Sousa, R. T. de, Santiago, P. V. da S. y Alves, F. R. V. (2023). Software GeoGebra as a proposal for mathematical modeling problems. *Journal of Research in Science and Mathematics Education, 2*(2), 64–74. https://doi.org/10.56855/jrsme.v2i2.319

Escrivá, M. T., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 7*(1), 42- 62. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2018.42-62

Fernandez, B. T., Godino, J. D. y Cajaraville-Pegito, J. A. (2012). An onto-semiotic approach to geometrical reasoning and spatial visualization. *Bolema-Mathematics Education Bulletin-Boletim De Educacao Matematica, 26*(42A), 39–63. https://10.1590/S0103-636X2012000100004

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna Proyecto clave McGraw Hill.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Iparraguirre-Villanueva, O., Paulino-Moreno, C., Chero-Valdivieso, H., Espinola-Linares, K., y Cabanillas-Carbonell, M. (2024). Integration of GeoGebra calculator 3D with augmented reality in mathematics education for an immersive learning experience. *International Journal of Engineering Pedagogy, 14*(3), 92–107. https://doi.org/10.3991/ijep.v14i3.47323

Larios, O. V., Pino-Fan, L. R. y González, G. N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 39-57.

Marín-Díaz, V., Sampedro-Requena, B. E. y Vega-Gea, E. (2022). La realidad virtual y aumentada en el aula de secundaria. *Campus Virtuales, 11*(1), 225-236. https://doi.org/10.54988/cv.2022.1.1030

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3

Pochulu, D. M. (2010). Significance attached to the resolution of issues with dynamic geometry software during professional development. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime, 13*(3), 307–336.

Santos, M. E. C., Chen, A., Taketomi, T., Yamamoto, G., Miyazaki, J. y Kato, H. (2014). Augmented reality learning experiences: Survey of prototype design and evaluation. *IEEE Transactions on Learning, 7*(1), 38-56. https://doi.org/10.1109/TLT.2013.37

Sbitneva, L., Valdez Delgado, R. y Bulajich Manfrino, R. (Eds) (2010). The Eos-Theory applied to the teaching 3D-geometry course based on the vector algebra approach. En *Edulearn10: International Conference on Education and New Learning Technologies,* pp. 5976-5984. EDULEARN10 Proceedings.

Sierra, V. M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 173–198.

Ticse, M., Salazar, J. V. F. y Vivas-Pachas, J. (2023). Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra. *PNA, 17*(4), 425-452. https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.24258

Valori, G., Giacomone, B., Albanese, V. y Adamuz-Povedano, N. (2022). Approaching Euclidean proofs through explorations with manipulative and digital artifacts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55*(7), 1535–1566. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2055503

Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A. y Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: a meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education, 57*(2), 437–458. https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA PARA EL DESARROLLO INTEGRAL DEL ALUMNADO: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA

Mathematics education as a tool for the integral development of students: A systematic review

Lanza-Escobedo, D.[a] y Hernández-Rodríguez, M. C.[b]

[a]Universidad del Atlántico Medio, [b]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Resumen

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental en el sistema educativo, no solo por su importancia en el desarrollo del pensamiento lógico, sino también por su contribución al desarrollo integral del alumnado. Este trabajo se centra en analizar cómo las matemáticas trascienden su naturaleza técnica y abstracta y se convierten en una herramienta que fomenta otro tipo de habilidades imprescindibles para enfrentarse a los desafíos de la vida contemporánea. Para ello, se analizaron 15 artículos, publicados entre 2014 y 2024, en cuatro bases de datos. Los resultados evidencian que las matemáticas fomentan el pensamiento crítico, la autonomía, la conciencia ética y la empatía. Además, cuando se incorporan elementos culturales en las lecciones, y se usan metodologías activas en clase, mejora la comprensión y se fomenta la inclusión.

Palabras clave: *matemáticas, competencias, ciudadanía, desarrollo individual y metodología.*

Abstract

Mathematics plays a fundamental role in the education system, not only because of its importance in the development of logical thinking, but also because of its contribution to the integral development of students. This paper focuses on analysing how mathematics transcends its technical and abstract nature and becomes a tool that fosters other types of skills that are essential for facing the challenges of contemporary life. To this end, 15 articles, published between 2014 and 2024, were analysed in four databases. The results show that mathematics fosters critical thinking, autonomy, ethical awareness and empathy. In addition, when cultural elements are incorporated into lessons and active methodologies are used in class, understanding improves and inclusion is enhanced.

Keywords: *Mathematics, competences, citizenship, individual development and methodology.*

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, más allá de ser una disciplina abstracta, están conectadas con el entorno en el que viven los estudiantes, permitiéndoles desarrollar las habilidades necesarias para enfrentase con éxito a la vida diaria y participar activamente en la sociedad (Benner et al., 2018; Boaler, 2022; Espinel y Noda, 2012; García-Alonso et al., 2021; Skovsmose, 2011). Por tanto, el aprendizaje de las matemáticas trasciende la alfabetización numérica –en términos de algoritmos y fórmulas– y estimula el desarrollo de la persona desde un plano individual, familiar, cultural y social (Boaler, 2022; D'Ambrosio, 1999). Precisamente, una enseñanza matemática que priorice la comprensión profunda y el pensamiento crítico permite a los estudiantes desarrollar una mentalidad mucho más flexible que les ayudará a abordar los desafíos cotidianos con confianza y creatividad (Boaler, 2022). En este orden de ideas, la familia es un factor clave en el aprendizaje y en el fomento de una actitud positiva hacia las matemáticas. Tanto es así, que el nivel de implicación parental influye en el rendimiento, la motivación y la autorregulación emocional (Hart y Williams, 2018; Rodríguez, 2021). Por otro lado,

Lanza-Escobedo, D. y Hernández-Rodríguez, M. C. (2025). La educación matemática como herramienta para el desarrollo integral del alumnado: Una revisión sistemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

prestar atención a la diversidad cultural puede enriquecer la enseñanza y hacerla más inclusiva y relevante (D'Ambrosio, 1999; Skovsmose, 2011). En este contexto, la mayoría de los currículums, además de subrayar las competencias matemáticas, buscan desarrollar otras que faciliten la integración del alumnado en la esfera pública y en el mercado laboral (Artigue, 2020; Casanova del Ángel y Rosas, 2017). De ahí que las metodologías activas estén ganando mayor protagonismo en las aulas. Ya no se trata solo de transmitir conocimientos teóricos, sino de desarrollar habilidades metacognitivas y sociales que ayuden a los estudiantes a resolver problemas reales y a adquirir una comprensión más profunda de los contenidos matemáticos (Martínez y Camarena, 2015). No obstante, esta sociedad globalizada y tecnológicamente avanzada exige incorporar herramientas digitales en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Unas herramientas que no solo afianzan la afectividad y la motivación hacia las matemáticas (Jorge-Pozo et al., 2017), sino que también mejoran su enseñanza y preparan a los estudiantes para un mercado laboral altamente digitalizado (Alsina et al., 2019; Rodríguez et al., 2020).

MÉTODO

Objetivo

Analizar el papel que tiene la educación matemática en el desarrollo integral del alumnado, atendiendo a la persona, la familia, la cultura y la sociedad.

Procedimiento

Con el propósito de alcanzar el objetivo anteriormente citado, se ha efectuado una revisión sistemática de la literatura siguiendo las indicaciones dadas por Ramírez-Montoya y Lugo-Ocando (2020). Para ello, se han seguido una serie de pasos que van desde la formulación de las preguntas de investigación, al proceso de búsqueda y selección, y posterior análisis de la documentación. En concreto, cuatro preguntas han guiado nuestra revisión:

- ¿Es un artículo de revista?
- ¿El artículo está relacionado con la educación matemática y el desarrollo integral del estudiante?
- ¿El artículo está centrado en la institución escolar, especialmente en las etapas de Educación Secundaria Obligatoria y en Bachillerato?
- ¿Es un artículo publicado entre 2014 y 2024?

Estrategia de búsqueda

La búsqueda se centró en aquellas publicaciones que abordasen la educación matemática y estuvieran relacionados con el desarrollo integral del estudiante. Las bases de datos que se usaron para la búsqueda fueron Dialnet, Eric, Proquest y Google Académico. Como criterio de búsqueda se llevó a cabo la combinación de diferentes descriptores, pero siempre girando alrededor de dos ecuaciones, estas son, "Educación Matemática *en* Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato" y "Educación matemática *y* desarrollo integral del estudiante" en las que los operadores booleanos que se utilizaron para relacionar ambos descriptores fueron «*en*» e «*y*». Asimismo, se contemplaron ciertas palabras clave como "competencias sociales", "contexto cultural" y "metodologías activas". Esta estructura facilitó la identificación de trabajos relevantes y permitió discriminar aquellos que no cumplían con los objetivos de la investigación.

Criterios de inclusión y exclusión

El procedimiento de selección de las publicaciones se desarrolló mediante un doble cribado que seguía una serie de criterios de inclusión y de exclusión que se explican a continuación.

Primeramente, se seleccionaron artículos de revista; escritos en castellano; con el texto completo en acceso abierto; relacionados, únicamente, con el desarrollo integral del estudiante; y que estuviesen publicados entre 2014 y 2024. Por tanto, se descartaron aquellas publicaciones en formato libro, tesis o capítulos de libros, o que no tuvieran el texto completo disponible para su lectura. Igualmente, se omitieron aquellos textos que no estuviesen relacionados con la temática o se hubiesen publicado con anterioridad al año 2014.

La base de datos Dialnet nos devolvió 74 documentos. De estos se seleccionaron los artículos de revista, reduciéndose la muestra a 23. De estos, se excluyen por acotación temporal, aquellos publicados con anterioridad a 2014, dejando 19 documentos / artículos a valorar. De ahí se eliminan 2 porque no están escritos en español. Se hace una lectura general de los 17 que quedan y se comprueba que 10 no están relacionados exactamente con el desarrollo integral del alumnado. Por lo que nos quedamos con un total de 7 en esta base de datos.

Posteriormente, procedemos a intentar buscar más documentos en otra base de datos. Lo que nos lleva a intentarlo en Eric. En este caso, aplicamos los mismos criterios de búsqueda. La base de datos únicamente nos devuelve un resultado que descartamos por no aportar información relevante para el estudio. A continuación, replicamos el procedimiento en la base de datos ProQuest, con el objetivo de conseguir más artículos para poder llevar a cabo una revisión lo más completa posible. Se añaden los mismos términos de búsqueda y se obtienen 29 resultados. De esos 29, se descartan 4 por no tener acceso a texto completo. De ahí se eliminan 3 por el idioma. De los 22 artículos restantes 13 se descartan por no estar relacionados directamente con el tema que se está estudiando y 4 porque ya habían aparecido en búsquedas anteriores. Así que nos quedamos con 5 artículos para el estudio. Por último, recurrimos a Google Académico. Aquí los términos de búsqueda nos devuelven un total de 39.600 resultados. Cuando se filtran a solo artículos publicados en revistas científicas se obtienen un total de 381 resultados. En el momento que se acota a la temporalidad deseada, se obtienen un total de 283 artículos. Llegados a este punto se accede a los resúmenes de los que aparecen y se van descartando los que no están relacionados propiamente con el estudio en cuestión y aquellos que ya han sido dados por las otras bases de datos, recogiendo de esta base de datos un total de 3 artículos que se usarán para esta revisión. Por tanto, contamos con un total de 15 artículos.

RESULTADOS

Formación cívica: Pensamiento crítico, autonomía, valores y resolución de problemas

El aprendizaje de las matemáticas contribuye a la formación de ciudadanos críticos, activos y responsables, al proporcionar las herramientas necesarias para interpretar datos y tomar decisiones informadas en contextos reales. En concreto, las matemáticas fomentan el pensamiento crítico, al requerir que los estudiantes analicen, comparen y evalúen distintas vías para resolver problemas (Camarena, 2014; Peña y Berrio, 2022). Por ello, introducir problemas que conecten las matemáticas con temas sociales y éticos, como la desigualdad económica o el cambio climático, amplía la perspectiva crítica de los estudiantes, preparándolos para analizar información compleja y tomar decisiones informadas (Camarena, 2014). Es más, integrar las matemáticas con la educación cívica o ambiental puede motivar a los estudiantes a participar activamente en la búsqueda de soluciones sostenibles, fomentando una mentalidad proactiva hacia los desafíos globales. Algo que no solo refuerza los aprendizajes, sino que también contribuye al desarrollo de una conciencia ética (Bosch et al., 2017; Morales, 2021; Zamora, 2020). Este enfoque didáctico, que vincula las matemáticas con temas sociales, mejora, además, el rendimiento académico, motivación e interés del alumnado (Peña y Berrio, 2022). Sin embargo, los profesores de matemáticas no siempre plantean temas éticos en sus clases que permitan aprender valores a los estudiantes. Aunque fomentan sobremanera la responsabilidad; la sinceridad; y la tolerancia y el respeto a los demás, temas como la educación del consumidor o la educación sexual apenas son tratados en clase (Díaz y Poblete, 2014).

Por otro lado, las matemáticas también estimulan el razonamiento lógico y la creatividad, habilidades clave para enfrentar situaciones complejas dentro y fuera del ámbito escolar (Zamora, 2020). De igual modo, refuerzan la autonomía personal y la capacidad para tomar decisiones fundamentadas (Litardo-Muñoz, 2023; Morales, 2021). Esta habilidad no solo mejora el rendimiento académico, sino que también fortalece la confianza en las propias capacidades para afrontar retos diversos en la vida cotidiana (Morales, 2021).

El desarrollo emocional y social

Las competencias matemáticas desempeñan un papel crucial en el desarrollo emocional y social individual. La conexión emocional con las matemáticas puede mejorar a través de talleres (Martínez-Sierra et al., 2020) y estrategias pedagógicas inclusivas que consideren las necesidades individuales de los estudiantes. Según Ruiz et al. (2024), el uso de las tecnologías educativas, que personalizan el aprendizaje, permiten a los estudiantes desarrollar una relación más positiva con las matemáticas, lo que influye en su bienestar emocional y social.

Paralelamente, proporcionar un ambiente seguro –donde se fomente la experimentación y se valoren los errores como oportunidades de aprendizaje– puede generar una mentalidad más resiliente y optimista (Solano et al., 2024). También el diseño de actividades, que conecten las matemáticas con la realidad, puede ayudar a los estudiantes a encontrar un propósito en su aprendizaje, mejorando su bienestar integral. Por otro lado, se ha observado que cuando los estudiantes superan desafíos matemáticos experimentan una sensación de logro que se traduce en una mayor confianza en sí mismos y en sus capacidades para enfrentar problemas complejos (Zamora, 2020).

Por último, la enseñanza en entornos cooperativos fomenta aspectos esenciales para el desarrollo social en contextos de diversidad, como la comunicación y el trabajo en equipo (Litardo-Muñoz, 2023; Muñoz, 2024; Peña y Berrio, 2022), pero también el aprendizaje individual (Peña y Berrio, 2022).

La familia

El contexto familiar juega un papel determinante en la motivación y el rendimiento en matemáticas (Muñoz, 2024). Tanto es así, que el nivel educativo de los padres y su implicación activa repercute en el desempeño académico de sus hijos y en el desarrollo de actitudes positivas hacia la materia (Solano et al., 2024; Zamora, 2020). También, en la formación de hábitos de estudio efectivos y en la percepción que los estudiantes tienen de sus capacidades matemáticas (Solano et al., 2024). Además, los estudiantes que cuentan con el apoyo emocional y práctico de sus familias muestran mayor resiliencia frente a las dificultades académicas (Ruiz et al., 2024). Es más, las familias que integran la enseñanza matemática con situaciones de la vida diaria ayudan a sus hijos a ver la relevancia de los conceptos aprendidos, reforzando tanto su motivación como su desempeño (Morales, 2021). Por último, Zamora (2020) enfatiza que la autoeficacia matemática se fortalece en entornos familiares donde se promueve la disciplina y el reconocimiento de los logros académicos.

La cultura y las tradiciones

Las tradiciones culturales influyen significativamente en la forma en que se enseña y aprenden las matemáticas. En comunidades donde existe una gran diversidad cultural, adaptar las estrategias pedagógicas a las necesidades culturales específicas del alumnado contribuye de manera positiva a alcanzar mejores resultados (Esquivel, 2023). Precisamente, incorporar elementos culturales en la enseñanza permite a los estudiantes encontrar significado en los conceptos matemáticos, aumentando su motivación intrínseca y mejorando su rendimiento académico (Camarena, 2014). Igualmente, la motivación se ve beneficiada cuando las tradiciones culturales tienen presencia en la enseñanza matemática, resaltando aspectos relevantes para la comunidad (Litardo-Muñoz, 2023). Por ejemplo, utilizando los patrones geométricos de la artesanía local, de cerámicas y telas, para enseñar conceptos como la simetría y la proporción. Por último, integrar las tradiciones y prácticas culturales en las

lecciones puede hacer que el aprendizaje sea más relevante y accesible para los estudiantes de distintos orígenes. Algo que mejora la comprensión conceptual y promueve la inclusión y el respeto por la diversidad (Morales, 2021). Pero también da más oportunidades a que el alumnado participe activamente y se sienta representado en el currículo, garantiza una mayor equidad en el acceso al conocimiento matemático (Esquivel, 2023).

Metodologías activas, tutoría y TIC

Las metodologías activas, como la resolución de problemas y el aprendizaje basado en proyectos, han demostrado ser altamente efectivas para enseñar matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato. Según Bosch et al. (2017), estas metodologías fomentan un aprendizaje profundo al involucrar a los estudiantes en actividades prácticas que requieren análisis, colaboración y creatividad. Estas estrategias no solo refuerzan el aprendizaje matemático, sino que también desarrollan habilidades como el pensamiento crítico, la comunicación y la adaptabilidad (Peña y Berrio, 2022). Igualmente, fomentan la autonomía, la planificación y la organización (Litardo-Muñoz, 2023). Además, estas metodologías –como el aprendizaje basado en proyectos– fomentan la inclusión en el aula, ya que pueden adaptarse a diferentes estilos y ritmos de aprendizaje (Solano et al., 2024). Con todo, es fundamental que las actividades tengan, además de una orientación práctica, un sentido lúdico, estimulando la comprensión, la curiosidad y la exploración (Muñoz, 2024).

Por otro lado, la integración de las TIC en la enseñanza matemática permite abordar retos globales de manera innovadora y efectiva. Tanto es así, que plataformas como Moodle facilitan el aprendizaje colaborativo y personalizado, adaptándose a las necesidades individuales de los estudiantes (Ruiz et al., 2024). También mejoran la comprensión conceptual y preparan a los estudiantes para enfrentarse a las demandas de un mundo altamente tecnológico (Morales, 2021). De igual modo, favorecen una evaluación continua y personalizada. Las plataformas digitales ofrecen una retroalimentación inmediata, lo que motiva a los estudiantes a reflexionar sobre su progreso y ajustar sus estrategias de aprendizaje en tiempo real, lo que fomenta una actitud positiva hacia las matemáticas (Peña y Berrio, 2022). Paralelamente, el uso de simulaciones y entornos virtuales, para resolver problemas matemáticos, contribuye a captar el interés de los estudiantes y a afianzar su competencia digital (Litardo-Muñoz, 2023). También el software especializado mejora las competencias matemáticas del alumnado y su percepción de la asignatura (Rocha et al., 2020). Además, las TIC refuerzan la inclusión y la equidad, al permitir que los estudiantes, de diferentes contextos socioeconómicos, accedan a recursos educativos de alta calidad, beneficiándose de un aprendizaje matemático significativo y conectado con los retos de la sociedad global (Esquivel, 2023).

Por último, la tutoría, marcada por la orientación y el seguimiento que hace el profesor, es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. Tanto es así, que el aprendizaje mejora gracias a la tutoría y la tutoría ayuda a los estudiantes a comprender mejor la asignatura (Zaldívar et al., 2018).

CONCLUSIONES

Este trabajo pone de relieve cómo las matemáticas, a través de distintas acciones interpersonales y didácticas, modelan el desarrollo humano en un sentido amplio. En concreto, las matemáticas tienen el potencial de influir directamente en el sistema de valores de los estudiantes, pero también en sus habilidades cognitivas, sociales y cívicas (Bosch et al., 2017; Camarena, 2014; Díaz y Poblete, 2014; Muñoz, 2024; Peña y Berrio, 2022; Zamora, 2020). Sin embargo, los profesores no siempre aprovechan las bondades que las matemáticas, y su carácter transversal, les ofrecen para fomentar la responsabilidad, la autonomía, el pensamiento crítico y la creatividad en el alumnado. La falta de formación en metodologías activas, el sentimiento de incapacidad docente, la ausencia de recursos materiales o un dominio insuficiente de las TIC podrían explicar esta desatención.

Por otro lado, hemos visto como las familias son un factor decisivo para que los estudiantes aprendan y desarrollen una actitud positiva hacia la materia. No obstante, la desigualdad de oportunidades, en

términos económicos y culturales, crea un escenario en el que no todos los estudiantes tienen las mismas posibilidades de éxito.

Paralelamente, el estilo de enseñanza ha demostrado ser un elemento clave. El uso de metodologías activas –como el aprendizaje cooperativo o el aprendizaje basado en proyectos–, que contemplan las tradiciones culturales, favorecen la inclusión e incrementan el bienestar emocional y la motivación. De igual modo, los talleres y las tutorías, pero también el uso de las TIC. Estas además de favorecer la motivación y la adquisición de conocimientos matemáticos, permiten conectar la virtualidad con las demandas de la sociedad (Litardo-Muñoz, 2023; Morales, 2021; Peña y Berrio, 2022).

En este orden de ideas, este trabajo evidencia importantes implicaciones pedagógicas. En concreto, nos ofrece un marco teórico que nos invita a reflexionar sobre nuestras prácticas de aula y a replantearnos la narrativa que rodea a las matemáticas. Precisamente, reconocer el valor y las posibilidades que nos ofrece esta asignatura nos puede ayudar a repensar nuestro estilo de enseñanza y el enfoque didáctico que damos a las actividades que desarrollamos en clase. Algo que nos puede llevar a cambiar nuestra visión en torno a esta y, en última instancia, nuestra programación de aula. Además, nuestro trabajo contribuye poderosamente a la investigación en la didáctica de las matemáticas, ya que sienta las bases para que nuevas investigaciones analicen el impacto que tiene la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo integral del alumnado. De igual modo, nos abre las puertas al diseño de nuevos instrumentos que incorporen, en su esqueleto, elementos interpersonales y contextuales, y no solo académicos, en su evaluación.

Por último, este estudio presenta ciertas limitaciones que el lector debe notar. En primer lugar, aunque todos los artículos analizados han pasado una revisión por pares, no todos tienen un buen índice de impacto. En segundo lugar, en cuanto a las bases de datos manejadas, es preciso puntualizar que si bien hemos utilizado cuatro bases de datos de relevancia, hemos dejado otras igual o más importantes, como WOS y Scopus que nos podían haber permitido encontrar artículos con mayor impacto científico. Por tanto, de cara al futuro, sería interesante ampliar la búsqueda a otras bases de datos, como WOS y Scopus, que nos proporcionasen estudios con mayor índice de impacto. Igualmente, se podría ampliar la muestra consultando artículos en otras lenguas y que no estuviesen en acceso abierto, aprovechando los recursos disponibles en bibliotecas universitarias o instituciones académicas.

REFERENCIAS

Alsina, A., García, M., y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15*(55), 85-108.

Artigue, M. (2020). El desarrollo de la didáctica de las matemáticas, una mirada internacional. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(3), 5-22. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i3.38

Benner, A., Wang, Y., Shen, Y., Boyle, A., Polk, R., y Cheng, Y. (2018). Discriminación racial/étnica y bienestar durante la adolescencia: una revisión metaanalítica. *Psicólogo Americano, 73*(7), 855-883. http://dx.doi.org/10.1037/amp0000204.supp

Boaler, J. (2022). *Mathematical mindsets: Unleasihing students' potential through creative math inspiring messages and innovative teaching*. Jossey – Bass.

Bosch, M., Gascón, J., y Ruíz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47).

Camarena, P. (2014). La matemática social en el desarrollo integral del alumno. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 17*(2), 45-59.

Casanova del Ángel, F., y Rosas, M. E. (2017). La enseñanza de las matemáticas en el siglo XXI. *Revista de Educación Matemática, 29*, 23-40. https://doi.org/10.34117/bjdv5n3-1257

D'Ambrosio, U. (1999). *Etnomatemática: El arte o la técnica de explicar y conocer*. Universidad de los Andes.

Díaz, V., y Poblete, L. (2014). Resolución de problemas en matemática desde la transversalidad: educar en valores éticos. *Paradigma, 35*(2), 155-182.

Espinel, M. C., y Noda, J. A. (2012). Gasta sólo lo que puedes pagar. Una experiencia de optimización con alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 71-85.

Esquivel, R. A. (2023). Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de secundaria. *Mendive: Revista de educación, 21*(4), 1-9.

García-Alonso, I., Sosa, D. N., y García, A. (2021). Actitudes hacia las Matemáticas en Secundaria: Análisis exploratorio. En P. D. Diago, D. F. Yánez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 287-294). SEIEM.

Hart, S., y Williams, C. (2018). The Influence of Family Support on Academic Success. *International Journal of Educacion and Research, 6*(9), 45-56. https://www.ijern.com/September-2018.php

Jorge-Pozo, D., Jiménez-Gestal, C., y Murillo, J. (2017). Influencia de un entorno virtual de enseñanza aprendizaje en la afectividad hacia las matemáticas de estudiantes de secundaria: Estudio de casos. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 325-334). SEIEM.

Litardo-Muñoz, A. M. (2023). Las estrategias didácticas y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes. *CIENCIAMATRIA: Revista Interdisciplinaria de Humanidades, Ciencia y Tecnología, 9*(2), 481-495. https://doi.org/10.35381/cm.v9i2.1191

Lozano, D. F., y Maldonado, L. (2019). Asociación entre confianza e influencia negativa con el rendimiento académico como desencadenante de la deserción escolar en la educación media superior. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 10*(19), e033. https://doi.org/10.23913/ride.v10i19.552

Martínez-Sierra, G., Arellano, Y. y Hernández, A. (2020). La invención de problemas para promover el cambio de actitud hacia las matemáticas: Un estudio exploratorio con estudiantes de bachillerato. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*, 103-117.

Martínez, X., y Camarena, P. (2015). *La educación matemática en el siglo XXI*. Instituto Politécnico Nacional.

Morales, L. (2021). El aprendizaje de las matemáticas a partir de contextos reales: Estrategias para el aula. *Ecomatemático, 12*(2), 45-58.

Muñoz, M. (2024). Desarrollo del pensamiento lógico-matemático y su relación con las prácticas pedagógicas. *Revista Científica Mundo, 8*(1), 45-56. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1

Peña, F., y Berrio, J. D. (2022). Creencias acerca de las matemáticas y su aprendizaje en la modalidad virtual en tiempos de pandemia COVID-19. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 110*, 7-24.

Ramírez-Montoya, M. S. y Lugo-Ocando, J. (2020). Revisión sistemática de métodos mixtos en el marco de la innovación educativa. *Comunicar: Revista Científica de Comunicación y Educación, 65*, 9-20. https://doi.org/10.3916/C65-2020-01

Rocha, G., Juárez, J. A., Fuchs, O. L., y Rebolledo, G. (2020). El rendimiento académico y las actitudes hacia las matemáticas con un sistema tutor adaptativo. *Revista didáctica de las matemáticas, 14*(4), 271-294. https://doi.org/10.30827/pna.v14i4.15202

Rodríguez, J., Gómez, S., Suelves, D., y Rodríguez, M. (2020). Materiales didácticos digitales y coronavirus en tiempos de confinamiento en el contexto español. *Praxis educativa, 15*, 1-20. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.15.15776.056

Rodríguez, S. (2021). *Percepción de la implicación parental y motivación académica en estudiantes de Primaria*. En M. A. Santos, M. Lorenzo, y A. Quiroga, (Eds.), La educación en Red. Realidades diversas, horizontes comunes: XVII Congreso Nacional y IX Iberoamericano de Pedagogía. Libro de resúmenes (pp. 896-897). Universidad de Santiago de Compostela. https://dx.doi.org/10.15304/cc.2021.1393

Ruiz, M. F., Escobar, S. A., Vilatuña, M. A., Hernández, C. L., y Eras, V. C. (2024). Intervenciones educativas para mejorar el rendimiento en matemáticas de estudiantes con discalculia en bachillerato. *LATAM Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades, 5*(5), 5109-5140. https://doi.org/10.56712/latam.v5i5.2962

Skovsmose, O. (2011). *An invitation to critical mathematics education*. SensePublishers.

Solano, B., Neira, M. A., Muñoz, J. A., Rialpe, F. X., y Suárez, G. S. (2024). Factores asociados al rendimiento académico: El apoyo familiar. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales y Humanidades, 5*(4), 1-12. https://doi.org/10.56712/latam.v5i4.2407

Zaldirvar, A., Nava, L., y Lizárraga, J. (2018). Influencia de la tutoría en el aprendizaje de matemáticas. Perspectiva del estudiante. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 8*(16), 493-515. https://doi.org/10.23913/ride.v8i16.355

Zamora, J. A. (2020). Las actitudes hacia la matemática, el desarrollo social, el nivel educativo de la madre y la autoeficacia como factores asociados el rendimiento académico en la matemática. *UNICIENCIA, 34*(1), 74-87. http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.5

INCORPORACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DEL DISEÑO UNIVERSAL PARA EL APRENDIZAJE A LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA[i]

Incorporation of the Principles of Universal Design for Learning to Didactic Suitability Criteria

Ledezma, C.[a], Sánchez, A.[a], Araya, D.[b], Font, V.[a]

[a]Universidad de Barcelona, [b]Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica

Resumen

En esta comunicación, se reporta una reflexión teórica en torno a la pauta del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) – como principios inclusivos para los procesos de enseñanza y aprendizaje genéricos – y la de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) – como principios específicos para los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. El objetivo es establecer relaciones y buscar complementariedades entre ambos referentes. Para ello, se comenzó realizando un análisis documental de la literatura sobre el DUA; luego, se contrastaron las pautas del DUA y de los CID para diseñar una primera propuesta integrada entre ambos referentes; y finalmente, se realizó una validación de expertos para refinar esta primera propuesta. Como resultado principal, se diseñó una pauta integrada de los CID incorporando los principios del DUA, que pretende organizar la reflexión del profesorado de matemática sobre su práctica desde la perspectiva de la educación inclusiva.

Palabras clave: análisis documental, educación inclusiva, principios, reflexión docente

Abstract

This communication reports a theoretical reflection around the Universal Design for Learning (UDL) guideline – as inclusive principles for generic teaching and learning processes – and the Didactic Suitability Criteria (DSC) guideline – as specific principles for mathematical teaching and learning processes. The objective is to establish relationships and seek complementarities between both references. To this end, a document analysis of the literature about UDL was firstly conducted; then, the UDL and DSC guidelines were contrasted to design a first integrated proposal between both references; and finally, an expert validation was conducted to refine this first proposal. As a main result, an integrated DSC guideline incorporating the UDL principles was designed, which intends to organise the reflection of mathematics teachers on their practice from the perspective of inclusive education.

Keywords: *document analysis, inclusive education, principles, teaching reflection*

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas, los temas de inclusión educativa han ido ganando relevancia a nivel internacional, lo cual se ha manifestado en distintos desarrollos teóricos, prácticos, y curriculares (Cerna et al., 2021). La actual Ley de Educación en España (Jefatura del Estado, 2020) señala la necesidad de aplicar los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje para atender la diversidad del alumnado. En el caso del currículo de educación básica de Cataluña (Departamento de Educación de Cataluña, 2022), se recoge este aspecto convirtiendo al Diseño Universal para el Aprendizaje en uno de los vectores curriculares, es decir, uno de los elementos transversales que deben guiar las decisiones educativas en el despliegue del currículo. De esta manera, también surge la demanda de que los programas de formación docente – tanto inicial como continua – desarrollen

Ledezma, C., Sánchez, A., Araya, D. y Font, V. (2025). Incorporación de los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje a los criterios de idoneidad didáctica. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

la enseñanza inclusiva como parte de las competencias profesionales del profesorado (UNESCO, 2015), donde la incorporación de los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje para que los profesores puedan aplicarlos en el aula es una de las estrategias para el desarrollo de esta competencia (Alba-Pastor, 2018).

El estudio que se reporta en esta comunicación toma como base la pauta del Diseño Universal para el Aprendizaje – que no es específica de la Didáctica de la Matemática – y la pauta de los Criterios de Idoneidad Didáctica – una herramienta diseñada específicamente en la Didáctica de la Matemática – con la intención de desarrollar una reflexión teórica sobre las relaciones y complementariedades entre ambos referentes. De este modo, se pretende responder a la siguiente pregunta: ¿Qué relaciones y complementariedades pueden establecerse entre las pautas del Diseño Universal para el Aprendizaje y de los Criterios de Idoneidad Didáctica? Para responderla, se desarrolló una reflexión teórica en torno a las pautas del Diseño Universal para el Aprendizaje y de los Criterios de Idoneidad Didáctica para establecer relaciones y buscar complementariedades entre ambos referentes que permitan diseñar una propuesta integrada que estructure la reflexión docente de los profesores de matemática (en formación o en servicio) sobre su práctica desde la perspectiva de la educación inclusiva.

REFERENTES TEÓRICOS

Diseño Universal para el Aprendizaje

El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) es entendido como un marco práctico basado en la investigación educativa que permite a los profesores dar respuesta a las diferencias de aprendizaje de los individuos a través del diseño de metas, metodologías, recursos didácticos, evaluaciones, y entornos inclusivos (Gordon, 2024). Así, para ofrecer una educación inclusiva, el DUA se basa en los siguientes tres principios (CAST, 2018a): *Proporcionar múltiples formas de motivación y compromiso*; *Proporcionar múltiples formas de representación*; y *Proporcionar múltiples formas de acción y expresión*.

Desde el CAST (acrónimo derivado de Center for Applied Special Technology) en los Estados Unidos, se han concretado los principios del DUA en una serie de pautas con sus correspondientes puntos de verificación que muestran ejemplos de cómo llevar a la práctica estos principios. A su vez, estas pautas se actualizan periódicamente, mediante procesos de consulta y considerando los hallazgos de la investigación educativa (CAST, 2018a). En la Tabla 1, se presenta una síntesis de la pauta del DUA (versión 2.2), la cual estaba vigente en el contexto en que se desarrolló este estudio.

Tabla 4

Síntesis de la pauta de Diseño Universal para el Aprendizaje (versión 2.2)
Fuente: Adaptado desde CAST (2018b)

	Proporcione múltiples formas de motivación y compromiso.	Proporcione múltiples formas de representación.	Proporcione múltiples formas de acción y expresión.
Acceso	Proporcione opciones para captar el interés (7).	Proporcione opciones para la percepción (1).	Proporcione opciones para la acción física (4).
Construcción	Proporcione opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia (8).	Proporcione opciones para el lenguaje y los símbolos (2).	Proporcione opciones para la expresión y la comunicación (5).
Internalización	Proporciones opciones para la autorregulación (9).	Proporcione opciones para la comprensión (3).	Proporcione opciones para la función ejecutiva (6).
Meta	Aprendices expertos decididos y motivados.	Aprendices expertos ingeniosos y conocedores.	Aprendices expertos estratégicos y dirigidos a la meta.

Criterios de Idoneidad Didáctica

Entre los problemas que la Didáctica de la Matemática debe afrontar, como disciplina científica y tecnológica, Godino et al. (2023) plantean que se encuentra el problema de la optimización del proceso instruccional, ante lo cual surge como respuesta la noción de *idoneidad didáctica* propuesta por el Enfoque Onto-Semiótico (Godino et al., 2007). En un proceso de enseñanza y aprendizaje, la *idoneidad didáctica* es el grado en que dicho proceso reúne características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los aprendizajes de los estudiantes y la enseñanza pretendida o implementada por el profesor, considerando el contexto (Godino, 2013). Así, esta noción se concreta en el constructo multidimensional Criterios de Idoneidad Didáctica (CID), el cual considera seis aspectos que intervienen en un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. En la Tabla 2, se presentan los componentes de los CID a partir de la pauta propuesta por Breda y Lima (2016) y que permiten hacer operativo este constructo.

Tabla 5

Criterios de idoneidad didáctica y sus componentes
Fuente: Adaptado desde Breda y Lima (2016) y Font et al. (2010)

Criterios	Descripción y componentes
Epistémico	Para valorar si la matemática que se enseña es 'una buena matemática'. Los componentes de este criterio son: Errores; Ambigüedades; Riqueza de procesos; Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar. Los componentes de este criterio son: Conocimientos previos; Adaptación curricular a las diferencias individuales; Aprendizaje; Alta demanda cognitiva.
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes. Los componentes de este criterio son: Interacción docente-discente; Interacción entre discentes; Autonomía, Evaluación formativa.
Mediacional	Para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los componentes de este criterio son: Recursos materiales; Número de estudiantes, horario y condiciones del aula; Tiempo.
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los componentes de este criterio son: Intereses y necesidades; Actitudes; Emociones.
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices, curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. Los componentes de este criterio son: Adaptación del currículo; Conexiones intra- e interdisciplinarias; Utilidad sociolaboral; Innovación didáctica.

A su vez, cada uno de los componentes de los CID cuenta con un conjunto de indicadores observables para valorar el grado de idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. Algunos de estos indicadores se presentan en las Tablas 3 a 5 de la sección Principales Resultados. Así, los CID se estructuran en una pauta – con criterios, componentes, e indicadores – que permite organizar la reflexión de los profesores de matemática (en formación y en servicio) sobre su práctica y, de este modo, guiar un rediseño para la mejora. En términos generales, los CID son un constructo basado en los principios y estándares del National Council of Teachers of Mathematics (2000) y que ha ido adoptando las tendencias en y los resultados de la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino et al., 2023). Además, los CID se consideran normas que actúan como principios y no como reglas, ya que no operan de manera taxativa (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen), pues la *idoneidad didáctica* puede entenderse como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor (Breda et al., 2018).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En términos generales, esta investigación se enmarca – en el contexto de varios proyectos de investigación – en la problemática de la incorporación del DUA en la reflexión de futuros profesores de matemática de educación secundaria y bachillerato sobre su práctica docente, quienes sólo utilizan la pauta de los CID para tales fines. Así, con el objetivo de desarrollar una reflexión teórica sobre las relaciones y complementariedades entre las pautas del DUA y de los CID, en primer lugar, se realizó un análisis documental (Bowen, 2009) de la literatura sobre el DUA, estableciéndose como referente principal el documento de pautas propuesto por el CAST (2018a). Esto llevó a considerar como punto de partida al DUA como principios orientadores para los procesos de enseñanza y aprendizaje genéricos y a los CID como principios orientadores para los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. En segundo lugar, se contrastó la pauta del DUA con la de los CID, según la propuesta de Breda y Lima (2016). Para ello, los autores realizaron una triangulación de la siguiente manera: primero, cada autor relacionó la pauta del DUA (a nivel de principios, indicaciones, y puntos de verificación) con la de los CID (a nivel de criterios, componentes, e indicadores) buscando complementariedades entre ambas; segundo, se compararon las relaciones establecidas por cada autor, logrando un porcentaje de acuerdo del 95% entre los tres; finalmente, se discutieron las diferencias y se logró un consenso, dada la experiencia de los autores en este tipo de análisis. De este modo, se diseñó una primera propuesta de pauta de los CID integrando la pauta del DUA. Finalmente, se realizó una validación de expertos en los seminarios desarrollados por el grupo de investigación a cargo de estos proyectos, donde se compartió esta pauta con otros investigadores en Didáctica de la Matemática, quienes conocen los CID y han trabajado con este constructo anteriormente. Esta validación final conllevó algunos ajustes menores a la primera pauta integrada, específicamente, en lo que respecta al refinamiento de algunos componentes e indicadores de la pauta original de los CID que se ampliaron y/o modificaron por la incorporación de los principios del DUA.

PRINCIPALES RESULTADOS

A continuación, se presenta una parte de la propuesta de pauta integrada de los CID con los principios del DUA, explicando las modificaciones o consideraciones que se realizaron al analizar los componentes e indicadores de cada criterio. Por razones de espacio, sólo se muestran tres de los seis criterios, justificando que uno de ellos se mantuvo igual que en la pauta original de los CID (criterio *epistémico*) y que los otros dos sufrieron modificaciones (criterios *cognitivo* e *interaccional*).

Criterio Epistémico

Como se ha señalado anteriormente, la pauta del DUA se presenta como una herramienta transversal y no específica de la Didáctica de la Matemática y, en términos de este estudio, es considerada como principios orientadores para los procesos de enseñanza y aprendizaje genéricos. Con respecto a la descripción del criterio *epistémico*, en la Tabla 2 se declara que este criterio se utiliza para valorar si la matemática que se enseña es 'de calidad', por lo que la integración de la pauta del DUA no afectaría el planteamiento del criterio *epistémico* en el sentido de añadir nuevos componentes o refinar alguno de sus indicadores.

Ahora bien, la Indicación 2 de la Tabla 1: *Proporcione opciones para el lenguaje y los símbolos*, se puede relacionar con los indicadores del componente *Ambigüedades* (ver Tabla 3), dado que sus puntos de verificación 2.1 (*Aclare vocabulario y símbolos*) y 2.2 (*Aclare sintaxis y estructura*) hacen referencia, por ejemplo, a situaciones en las que el profesor explica la notación matemática que utiliza o hace explícitas las propiedades algebraicas que usa para obtener una cierta expresión, lo cual ayuda a evitar ambigüedades en la presentación de los contenidos. Del mismo modo, la Indicación 2 de la pauta del DUA, en su punto de verificación 2.3 (*Apoye la decodificación de textos, notaciones matemáticas y símbolos*), se puede relacionar con uno de los indicadores del componente *Representatividad de la complejidad del objeto matemático* (ver Tabla 3), donde se remarca el uso de diferentes lenguajes para representar los objetos matemáticos.

Tabla 6

Componentes e indicadores del criterio epistémico
Fuente: Adaptado desde Breda y Lima (2016, p. 80)

Componentes	Indicadores
Errores	– No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	– No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los estudiantes. – Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. – Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, y demostraciones al nivel educativo al que se dirigen. – Uso controlado de metáforas.
Riqueza de procesos	– La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes de la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad del objeto matemático	– Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar (contemplada en el currículo). – Para uno o varios significados parciales, se ofrece una muestra representativa de problemas. – Se usan diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), y se realizan tratamientos y conversiones entre éstos.

Criterio Cognitivo

El DUA asume como principio que el alumnado es diverso y, por tanto, la planificación de las actividades debe contemplar diferentes opciones para la comprensión (Indicación 3 de la Tabla 1: *Proporcione opciones para la comprensión*). Dentro del criterio *cognitivo* se encuentra el componente *Adaptación curricular a las diferencias individuales* (ver Tabla 4), cuyo indicador declara que se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo, por lo que la integración de la pauta del DUA conllevaría, entre otros, la modificación de este componente, entendiendo que no se realiza una adaptación para ciertos estudiantes, sino que, desde el principio, se ofrecen alternativas con actividades suficientemente abiertas para todos. Más en concreto, este componente guarda mayor relación con el enfoque de *Instrucción Diferenciada* (Tomlinson, 2000) que con el DUA.

Ahora bien, para conseguir que todos los estudiantes sean aprendices expertos, la pauta del DUA sugiere el uso de herramientas que les permitan ser conscientes de su aprendizaje, fijar metas personales, y hacer un seguimiento continuo de sus logros. En la Tabla 4, se presentan los componentes e indicadores del criterio *cognitivo* con las modificaciones propuestas en cursiva.

Tabla 7

Componentes e indicadores del criterio cognitivo integrando el DUA
Fuente: Adaptado desde Breda y Lima (2016, p. 81) con modificaciones de los autores

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos	– Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) *y estos conocimientos previos son activados cuando son necesarios*. – Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad razonable) en sus diversos componentes.
Consideración de las diferencias individuales *	*– Se proporcionan soportes para los estudiantes que los necesiten y un mayor grado de libertad para los estudiantes que puedan hacer la tarea de manera independiente (por ejemplo, plantear retos que permitan diferentes niveles de éxito; proporcionar* actividades de ampliación y de refuerzo*, y más o menos guiadas; usar mapas conceptuales; proporcionar plantillas para tomar apuntes)*. **

Componentes	Indicadores
	– Impulsar la colaboración y la comunicación mediante grupos heterogéneos.
Aprendizaje	– Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas o implementadas *(evidencias de aprendizaje)*.
	– Se consideran diferentes tipos de evaluación de los aprendizajes (inicial, formativa, formadora, y sumativa).
	– Se proporcionan instrumentos a los estudiantes para autoevaluarse.
	– Se facilitan diferentes modos de expresión para evidenciar sus aprendizajes.
Alta demanda cognitiva *para favorecer una comprensión significativa*	– Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.).
	– Se promueven procesos metacognitivos *que facilitan la autorregulación*.

Notas. * Adaptación curricular a las diferencias individuales (componente original); ** Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo (indicador original).

Criterio Interaccional

En la pauta del DUA, la Indicación 8 de la Tabla 1: *Proporcione opciones para mantener el esfuerzo y la perseverancia* hace referencia a los aspectos interaccionales, tanto entre los estudiantes – punto de verificación 8.3 (*Promueva la colaboración y la comunicación*) – como entre el profesor y los estudiantes. Con respecto a la descripción del criterio *interaccional*, en la Tabla 2 se declara que este criterio se utiliza para valorar si la interacción en un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático es capaz de resolver las dudas y dificultades de los estudiantes, por lo que la integración de la pauta del DUA, además de tener una relación estrecha con la pauta de los CID, tendría efectos en la adición y el refinamiento de alguno de sus indicadores.

Ahora bien, desde el momento en que el profesor planifica un proceso de enseñanza y aprendizaje, está considerando las reacciones de los estudiantes, quién puede necesitar un cierto tipo de apoyo u otro, y cómo evaluará el progreso de cada uno – Indicación 5 de la Tabla 1, punto de verificación 5.3 (*Desarrolle fluidez con niveles de apoyo graduados para la práctica y el desempeño*), Indicación 6 de la Tabla 1, punto de verificación 6.4 (*Mejore la capacidad para monitorear el progreso*); e Indicación 8 de la Tabla 1, punto de verificación 8.4 (*Aumente la retroalimentación orientada a la maestría*). Para conseguir que los estudiantes aumenten su autonomía durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, se hace necesario guiar el establecimiento de metas y el desarrollo de estrategias personales – Indicación 6 de la Tabla 1, puntos de verificación 6.1 (*Guíe el establecimiento de metas apropiadas*) y 6.2 (*Apoye la planificación y el desarrollo de estrategias*), e Indicación 8 de la Tabla 1, punto de verificación 8.1 (*Resalte la relevancia de metas y objetivos*). En la Tabla 4, se presentan los componentes e indicadores del criterio *interaccional* con las modificaciones propuestas en cursiva.

Tabla 8

Componentes e indicadores del criterio interaccional integrando el DUA
Fuente: Adaptado desde Breda y Lima (2016, pp. 81–82) con modificaciones de los autores

Componentes	Indicadores
Interacción docente-discente	– (sin cambios en sus indicadores).
Interacción entre discentes	– Se favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes *(por ejemplo, tutoría entre iguales)*.
	– Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
	– En el trabajo en grupo, se establecen claramente los objetivos, roles, responsabilidades, y normas.

Componentes	Indicadores
Autonomía	– Se contemplan momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación, y validación). *– Se ofrece un apoyo gradual que permita avanzar a cada estudiante en el desarrollo de sus competencias, definir objetivos, y desarrollar estrategias para conseguirlos*.
Evaluación formativa	– Observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes. *– Se ofrece regularmente una retroalimentación del progreso que sea informativa, accesible, y explícita para los estudiantes, destacando el esfuerzo y la perseverancia*.

REFLEXIONES FINALES

La propuesta integrada presentada en esta comunicación no sólo pretende atender a las demandas curriculares vigentes, aportando una herramienta que incluya los principios del DUA desde un punto de vista operativo, sino que también, pretende facilitar la reflexión sobre la práctica docente de los profesores de matemática, tanto en formación como en servicio, en sus clases de esta asignatura, considerando los aspectos que intervienen en un proceso de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de la educación inclusiva. Por lo tanto, el alcance de esta herramienta no se limita a la reflexión personal, sino también, a los procesos formativos que utilicen los CID para tales propósitos, además de contribuir al desarrollo de este constructo al integrar principios que enriquezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático (véase Ledezma et al., 2022, sobre los principios de la modelización matemática). No obstante, la aplicación de los principios del DUA tiene un enfoque más global que implica no sólo a la escuela, sino que a todo el sistema educativo (Alba-Pastor, 2018). Del mismo modo, para dar respuesta a esta necesidad, es que los programas de formación docente – tanto inicial como continua – deben desarrollar la enseñanza inclusiva como parte de las competencias profesionales del profesorado (UNESCO, 2015), para así ir reduciendo (o eliminando) barreras y limitantes para llevar a cabo esta tarea, y donde esta propuesta pretende aportar.

Retomando la pregunta de investigación planteada en esta comunicación sobre qué relaciones y complementariedades pueden establecerse entre la pauta del DUA y de los CID, se pueden concluir, principalmente, tres aspectos. En primer lugar, ambos referentes actúan como principios orientadores para los procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, ofrecen una visión consensuada sobre los elementos para considerar en las diferentes etapas del diseño didáctico (estudio preliminar, planificación, implementación, y valoración). En segundo lugar, dado el carácter transversal del DUA y el específico de los CID, hubo dos criterios de este último referente que no sufrieron modificaciones. Por una parte, el criterio *epistémico* (presentado en esta comunicación) cuya finalidad es valorar la calidad del contenido matemático que se enseña (o pretende enseñar) en el aula, y que ya considera algunas indicaciones del DUA como: a) el uso claro de vocabulario, símbolos, sintaxis, y estructura en su componente *Ambigüedades*; y b) el uso de diferentes lenguajes para representar los objetos matemáticos en su componente *Representatividad de la complejidad del objeto matemático*. Por otra parte, el criterio *ecológico*, cuya finalidad es valorar la adecuación de los procesos de enseñanza y aprendizaje al entorno que transciende el ámbito educativo, y que ya considera algunas indicaciones del DUA en sus cuatro componentes. Finalmente, además de los criterios *cognitivo* e *interaccional* (presentados en esta comunicación), los criterios *mediacional* y *afectivo* también sufrieron modificaciones, lo cual se tradujo no sólo en la adaptación de algunos de sus componentes, sino también, en la ampliación de algunos de los indicadores de estos componentes. Estas modificaciones se relacionaron, sobre todo, con la evaluación del aprendizaje de los estudiantes, su autorregulación, y la variabilidad y accesibilidad de los recursos.

La propuesta presentada en esta comunicación se puede considerar el inicio de una agenda de investigación cuyo objetivo es la integración de los CID con el DUA. Más en concreto, esta pauta integrada CID-DUA está abierta a posibles modificaciones sugeridas por investigadores en Didáctica de la Matemática, profesores u otros profesionales de la educación.

Referencias

Alba-Pastor, C. (Coord.). (2018). *Diseño Universal para el Aprendizaje: Educación para Todos y Prácticas de Enseñanza Inclusivas* (2ª ed.). Ediciones Morata.

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal, 9*(2), 27–40. https://doi.org/10.3316/QRJ0902027

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255–278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A. y Lima, V. M. d. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT – Revista de Didáctica de las Matemáticas, 5*(1), 74–103. https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1955

CAST. (2018a). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. Autor. https://udlguidelines.cast.org/

CAST. (2018b). *Pauta de diseño universal para el aprendizaje, versión 2.2* (Fellow Group, Trad.) [organizador gráfico]. Autor. https://udlguidelines.cast.org/

Cerna, L., Mezzanotte, C., Rutigliano, A., Brussino, O., Santiago, P., Borgonovi, F. y Guthrie, C. (2021). *Promoting inclusive education for diverse societies: A conceptual framework* (OECD Education Working Paper No. 260). https://one.oecd.org/document/EDU/WKP(2021)17/en/pdf

Departamento de Educación de Cataluña. (2022). Decreto 175/2022, de 27 de septiembre, de ordenación de las enseñanzas de la educación básica. CVE-DOGC-A-22270097-2022. https://portaljuridic.gencat.cat/eli/es-ct/d/2022/09/27/175/dof/spa

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Journal for the Study of Education and Development – Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89–105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111–132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), Artículo em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Gordon, D. (Ed.). (2024). *Universal Design for Learning: Principles, Framework and Practice*. CAST Professional Publishing.

Jefatura del Estado. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE-A-2020-17264. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G., y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Tomlinson, C. A. (2000). Differentiated instruction: Can it work? *The Education Digest, 65*(5), 25–31.

UNESCO. (2015). *La Educación para Todos, 2000–2015: Logros y Desafíos*. Autor. https://doi.org/10.54676/GNXA7156

[i] Investigación desarrollada en el marco de los proyectos 2023ARMIF00012 y PID2021-127104NB-I00, este último financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

INTERPRETACIÓN DE LIBROS DE TEXTO POR MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO A PARTIR DE DOS CASOS CONTRASTANTES

Pre-service teachers' textbook interpretation: an exploratory study based on two contrasting cases

Lerma-Fernández, A. M., García-García, F. J., Martínez-Ortiz, F., y Lendínez-Muñoz, E. M.

Universidad de Jaén

Resumen

En la formación inicial de docentes a través de procesos como el estudio de clases, el análisis de libros de texto se considera una actividad formativa rica y esencial, que permitiría hacer emerger características importantes de las formas de interpretar el estudio de un determinado ámbito matemático. Este trabajo explora cómo futuros maestros interpretan la introducción de la multiplicación en sendos libros de texto (japonés y español) que obedecen a paradigmas didácticos distintos. Se diseñó un cuestionario que fue respondido por 60 maestros en formación del Grado en Educación Primaria. Los resultados revelan que tienen dificultades para identificar diferencias entre dos paradigmas didácticos confrontados, mostrando una tendencia hacia aquel con el que están más familiarizados. Concluimos señalando que un análisis más profundo de textos sería necesario para la implementación de procesos de estudio de clases transformativos en formación inicial.

***Palabras clave**: formación inicial de profesores, estudio de clases, paradigmas didácticos, multiplicación.*

Abstract

In initial teacher education, particularly in processes such as lesson study, the analysis of textbooks is considered a rich and essential training activity. It would allow the emergence of important characteristics of the ways of interpreting the study of a given mathematical field. This paper explores how prospective teachers interpret the introduction of multiplication in two textbooks (Japanese and Spanish) that follow different didactic paradigms. A questionnaire was designed and completed by 60 pre-service teachers from a Primary Education Degree. The results reveal their difficulties in identifying differences between two confronted didactic paradigms, showing a tendency towards the one with which they are more familiar. We conclude by pointing out that a deeper analysis of texts would be necessary for the implementation of transformative lesson study processes in initial teacher education.

Keywords: *teacher education, lesson study, didactic paradigms, multiplication.*

INTRODUCCIÓN

El estudio de clases (EC) es una práctica profesional colaborativa de los docentes, basada en la indagación (Robutti et al., 2016) y orientada al desarrollo de los conocimientos y competencias profesionales. Como sintetiza Seleznyov (2018), en el EC los profesores consideran un tema de investigación a partir de un contraste entre los objetivos de aprendizaje "ideales" y los "reales" de sus estudiantes. Trabajan colaborativamente para planificar una clase de investigación que explore dicho tema, a través de una indagación detallada en materiales curriculares relevantes, que plasman en un documento (plan de clase) que describe las acciones del profesor y anticipa las posibles respuestas de los estudiantes. Este proceso puede ser apoyado por un experto externo. La clase se enseña en un aula real, por un profesor del grupo, mientras que el resto observa. Inmediatamente después, se lleva a

Lerma-Fernández, A. M., García-García, F. J., Martínez-Ortiz, F., y Lendínez-Muñoz, E. M. (2025). Interpretación de libros de texto por maestros en formación inicial: un estudio exploratorio a partir de dos casos contrastantes. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

cabo una discusión colectiva que se centra, por un lado, en el pensamiento de los estudiantes a partir de los datos que se han recopilado durante la observación y, por otro lado, en aprendizajes más generales relacionados con el tema de investigación. Se termina con la escritura de un informe que describe el proceso de indagación y los resultados obtenidos.

El proceso de indagación que precede y conduce al diseño de la clase de investigación, denominado kyozai kenkuy en japonés, es considerado por Seleznyov (2018) como un componente esencial del EC. Aunque los docentes pueden llegar a explorar una amplia variedad de recursos, el análisis de libros de texto desempeña un papel prominente (Shinno y Mizoguchi, 2021; Watanabe et al., 2008).

En investigaciones previas (García et al., 2019; Lendínez Muñoz et al., 2024) hemos argumentado que todo proceso de EC en torno a cierto ámbito matemático, que es objeto de estudio en una institución I, asume, de forma más o menos implícita, una manera de interpretar dicho ámbito matemático y su enseñanza, que modelizamos con la noción de paradigma didáctico. Propuesto como modelo de cualquier modalidad o forma de estudio de cierto ámbito de las matemáticas en I, un paradigma didáctico está compuesto por: (1) un modelo epistemológico de dicho ámbito (ME), (2) los fines didácticos que I persigue a propósito de este ámbito (FD) y (3) los medios didácticos que I considera más adecuados para la consecución de estos fines (MD) (Gascón y Nicolás, 2021). Cuando esta interpretación de lo matemático y lo didáctico coincide con la forma en la que I lo hace, decimos que el grupo de EC asume el paradigma didáctico vigente (PDV=[MEV, FDV, MDV]) en I.

Si asumimos que el análisis en detalle de libros de texto usados en una institución forma parte esencial del proceso de kyozai kenkyu, e interpretamos que estos reflejan los rasgos esenciales del PDV en dicha institución, postulamos que estos condicionan, en gran medida, la clase de investigación que se diseña, así como lo que se considera importante observar y discutir con relación al aprendizaje de los estudiantes.

En el caso particular de la forma de introducir la multiplicación en libros de texto japoneses y españoles, en García et al. (2024) pusimos en evidencia la existencia de PDV con rasgos diferenciados, mirados desde cierto paradigma didáctico de referencia, que resumimos en la Tabla 1.

Además, en García et al. (2025) discutimos cómo estos PDV podrían llegar a condicionar el proceso y el resultado del EC. En el caso japonés, Isoda y Olfos (2021) describen dos procesos de EC en torno a la introducción de la multiplicación en los que claramente, y de manera acrítica, se asumen rasgos propios del PDV en dicho país descritos en la Tabla 1. Por analogía, postulamos que un EC mediado por un libro de texto español, como el usado en nuestro análisis, también perpetuaría los rasgos principales del PDV en torno a la multiplicación descritos en la Tabla 1, llegando a limitar el potencial formativo del EC.

Por ello, en nuestra investigación, y en particular en esta comunicación, formulamos, a modo de hipótesis, que un proceso de EC que incorpore el análisis de libros de texto que presenten paradigmas didácticos contrapuestos permitiría el cuestionamiento del PDV, contribuyendo a la emancipación epistemológica y didáctica de los docentes respecto de estos. En particular, en su formación inicial, consideramos que potenciaría el EC como estrategia de formación transformadora, al permitir problematizar formas de entender las matemáticas y su enseñanza naturalizadas y que son asumidas de forma acrítica, y posteriormente replicadas, por los futuros docentes.

Considerando esto, las cuestiones de investigación que parcialmente se abordan en esa comunicación serían las siguientes: ¿Cómo interpretan los futuros maestros de Educación Primaria la actividad matemática propuesta por dos libros de texto que obedecen a paradigmas didácticos contrastantes en torno a la introducción de la multiplicación? ¿Qué componentes de los PDV son capaces de identificar en cada caso? ¿Son capaces de percibir, y explicitar, las diferencias que existen entre ellos?

Tabla 1

Rasgos principales de los paradigmas didácticos vigentes en España (PDV_{ES}) y Japón (PDV_{JP}) tras la interpretación de sendos libros de texto (García et al., 2024)

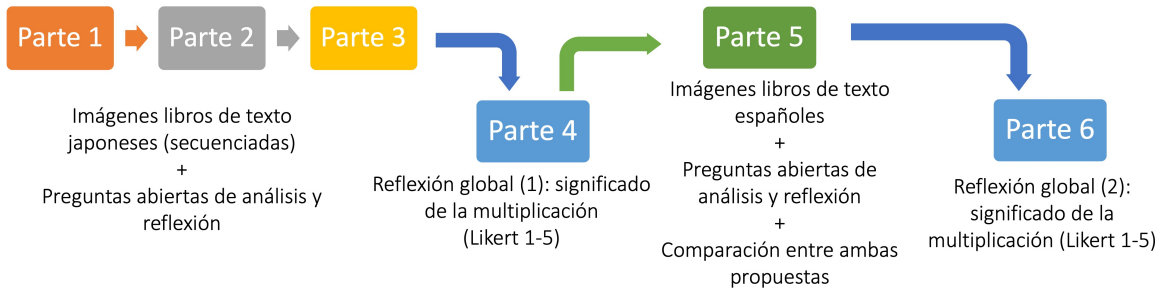
PDV_{ES}	PDV_{JP}
MEV_{ES}: Multiplicación como suma reiterada (modelo del número de veces que se repite un sumando). Vinculada a problemas composición aditiva (cantidades de magnitud de la misma naturaleza). Las cantidades de magnitud ejemplifican situaciones de multiplicación, pero no forman parte de la actividad matemática (se podría limitar a un plano aritmético).	MEV_{JP}: Multiplicación como medida de una colección a partir de una unidad múltiple. Vinculada a problemas de isomorfismo de medidas (cantidades de magnitud de diferente naturaleza). Las cantidades de magnitud desempeñan un papel esencial al tener que dar sentido a la introducción de la relación entre unidades. La suma reiterada de sumandos iguales es una estrategia posible para calcular una multiplicación, pero no su significado.
FDV_{ES}: Evitar una ruptura epistemológica, manteniendo a los estudiantes próximos a un conocimiento anterior (suma). Mantener significados aditivos (combinación). Afianzar el producto como una nueva escritura de expresiones aditivas $b+b+...+b$.	FDV_{JP}: Provocar una ruptura epistemológica, presentando nuevos significados (isomorfismo de medidas). Introducir la medida de colecciones usando diferentes unidades, así como la relación entre ellas. Introducir un nuevo modelo discursivo: "elementos en cada grupo por número de grupos". Usar el conteo y la suma como estrategias iniciales para resolver situaciones nuevas.
MDV_{ES}: Presentación ostensiva de los contextos de combinación. Presentación ostensiva de expresiones multiplicativas a modo de nueva expresión de cadenas aditivas. Ejercicios de aplicación orientados a la rutinización.	MDV_{JP}: Exploración de problemas de tipo abierto-cerrado. Abordaje inicial, a partir de técnicas antiguas (conteo y suma). Comparación y evaluación de las técnicas de forma colectiva. Institucionalización posterior a la creación en contexto de los significados pretendidos.

METODOLOGÍA

Se presenta un estudio exploratorio inicial, apoyado en un cuestionario diseñado ad hoc (no validado aún) estructurado en 6 partes (Figura 1). El cuestionario fue completado por 28 grupos de 2-3 maestros en formación (M_F) de la asignatura Didáctica de la Numeración y del Cálculo en Educación Primaria (60, en total), del Grado en Educación Primaria, una vez estudiados los bloques de número natural, sistemas de numeración y estructuras aditivas, pero antes de comenzar con el de estructuras multiplicativas. Los grupos completaban el cuestionario parte a parte, recibiendo la siguiente una vez que habían entregado la anterior. Las partes 4 y 6 se respondieron de forma individual, para intentar captar en qué medida cada M_F asocia cada libro con una interpretación de la multiplicación.

Figura 1

Estructura del cuestionario utilizado en la investigación

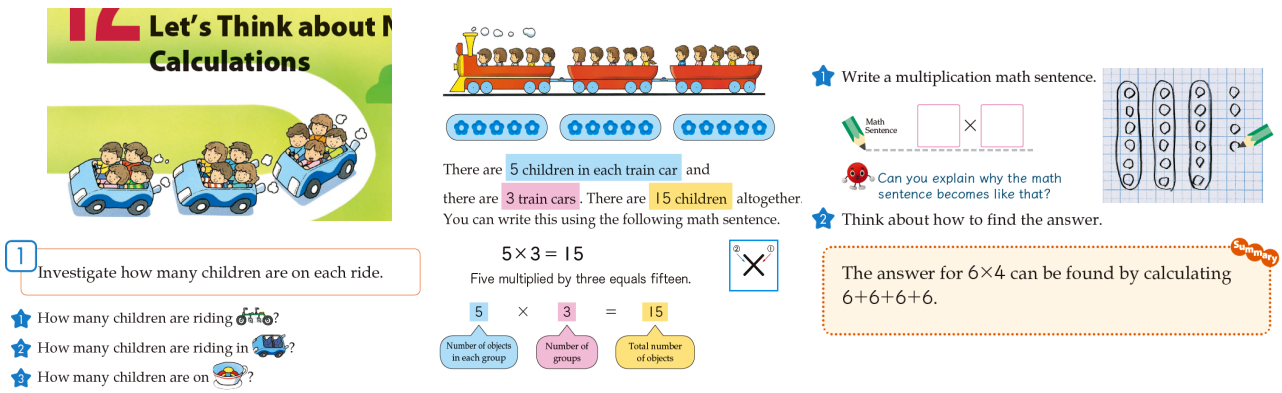


En las tres primeras partes, se exponen, de forma secuencial, extractos de un libro de texto japonés[i] que muestran cómo este introduce la noción de multiplicación por primera vez a estudiantes de 2.º curso de Educación Primaria. En concreto, en la parte 1 se presentan las primeras dos páginas, en las que los niños deben cardinar colecciones formadas por grupos equipotentes, sin referencia alguna a la noción de multiplicación (un fragmento se muestra en la Figura 2, izquierda). En la parte 2 se muestra la página en la que, por primera vez, el texto habla de multiplicación, vinculándola con la "frase matemática": *número de objetos en cada grupo* × *número de grupos* = *número total de objetos* (un fragmento se muestra en la Figura 2, centro). Hasta ahora, el libro no hace ninguna referencia a la suma, dejando bajo la responsabilidad de los niños el uso de aquellas estrategias que consideren más adecuadas para resolver las situaciones que se plantean. Es en la parte 3 donde se cuestiona a los niños acerca de las estrategias que podrían usar para resolver situaciones del tipo anterior, y se propone la institucionalización de la suma reiterada (un fragmento se muestra en la Figura 2, derecha).

Tras la presentación de las imágenes de cada parte, los M_F responden a una serie de preguntas abiertas de análisis y reflexión, pudiendo dar más de una respuesta. En la parte 1, se les pide que describan los tipos de problemas que está proponiendo el libro a los niños (cuestión Q1), así como que identifiquen cuál es el "nuevo conocimiento" que el libro pretende introducir a través de estos (cuestión Q2). En la parte 2 deben identificar posibles estrategias que un niño de 2.º de Educación Primaria podría usar para resolver los problemas mostrados en esta parte y en la anterior (cuestión Q3), comparando dichas estrategias con las que ellos, como adultos, usarían (cuestión Q4). Ahora sí se les declara, y aparece en las imágenes correspondientes, que la intención del libro es introducir la multiplicación de números naturales, y se les pregunta acerca del significado de esta operación que promueve el libro (cuestión Q5). En la parte 3, donde aparece por primera vez la suma en este contexto de introducción de la multiplicación, se les pide que reflexionen sobre la relación que existe entre estas dos operaciones, tanto desde el punto de vista del libro de texto (cuestión Q6) como desde su propia perspectiva (cuestión Q7).

Figura 2

Extractos del libro de texto japonés, correspondientes a las partes 1, 2 y 3 del cuestionario



Tras la reflexión en pequeños grupos sobre cómo el libro de texto japonés introduce la multiplicación, completaban individualmente la parte 4, en la que tenían que mostrar su grado de acuerdo (en una escala Likert de 1 a 5) con las siguientes afirmaciones: (1) Una multiplicación es una forma de expresar una suma de sumandos iguales; (2) Una multiplicación es la expresión del total de una colección, cuando está agrupada en partes iguales y se sabe el número de partes; (3) Las dos afirmaciones anteriores dicen lo mismo, por lo que son equivalentes.

En la parte 5 se exponen, de forma equivalente, extractos que muestran cómo el libro de texto español[ii] introduce la multiplicación a niños de la misma edad (Figura 3), a los que siguen dos preguntas de análisis y reflexión. En la primera (cuestión Q8) se les pide que reflexionen acerca de las similitudes y de las diferencias que observan en cómo se introduce la multiplicación en el libro español y el

japonés. En la cuestión Q9, se les pide que argumenten sobre qué libro de texto usarían, como docentes, para introducir la multiplicación por primera vez en 2.º de Educación Primaria.

Figura 3

Extractos del libro de texto español, correspondientes a la parte 5 del cuestionario

Finalmente, el cuestionario termina con una parte 6, que es igual a la parte 4.

Las respuestas a las cuestiones abiertas (partes 1, 2, 3 y 5) se han analizado mediante una categorización inductiva por parte de los autores, a través de un análisis detallado de las respuestas y la búsqueda de consensos. Para las partes 4 y 6, se ha llevado a cabo un análisis simple de frecuencias.

RESULTADOS

En la parte 1 del cuestionario, cada grupo tenía que responder a dos cuestiones (Q1 y Q2). En la Q1, relacionada con los tipos de problemas que se proponen a los niños de Educación Primaria en el extracto del libro japonés, las respuestas de los M_F se han categorizado en: problemas de suma (35,5%), problemas de multiplicación (32,1%), problemas de recuento (39,3%) y problemas de agrupación (17,9%). Además, un 21,4% de los grupos no fueron capaces de describir el tipo de problema que el libro estaba proponiendo[iii]. En la Q2, sobre el "nuevo conocimiento" que el libro pretende introducir, el 75% consideró que se trataba de la multiplicación. Otras respuestas fueron: técnicas de recuento (7,1%), suma (25%) y agrupación (7,1%). En la parte 2, los M_F deben identificar, por un lado, estrategias que permitan resolver los problemas que se plantean en el libro de texto (Q3 y Q4) y, por otro lado, el significado de multiplicación que el libro de texto promueve (Q5).

En el estudio de las estrategias que podrían usar los niños (Q3), se han identificado todas las que podrían ser exitosas: conteo de 1 en 1 (46,4%), conteo de *n* en *n* (3,6%), suma (50%) y multiplicación (64,3%). Al comparar la estrategia que ellos usarían, como adultos, con la que podrían usar los niños (Q4), que están en proceso de construcción de un nuevo conocimiento, un 35,7% describe multiplicación frente a conteo y un 39,3% multiplicación frente a suma.

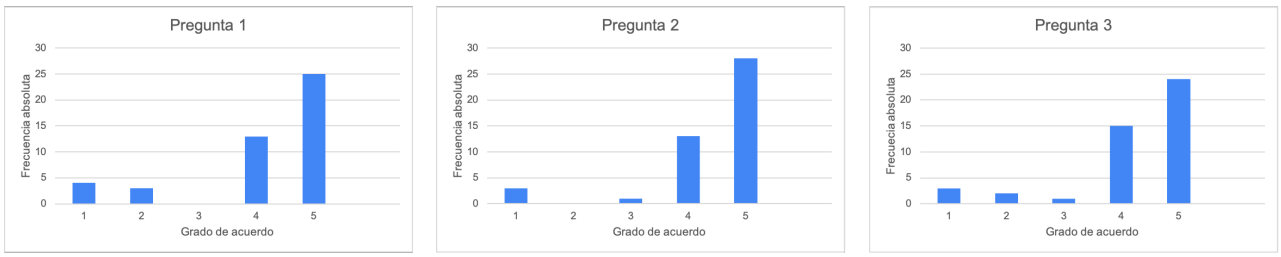
En cuanto al significado de la nueva operación que se presenta (Q5), sólo cinco grupos (17,9%) hacen referencia a que la multiplicación representa el total de una colección, cuando está agrupada en partes iguales y se sabe el número de las partes. El resto de respuestas están vinculadas al significado de suma reiterada (57,1%), aunque el libro de texto, hasta el momento, no ha mostrado la suma como procedimiento para resolver el problema planteado.

En la parte 3, sobre la relación entre suma y multiplicación (Q6 y Q7), se pone de manifiesto que, para los M_F, la multiplicación es una suma de sumandos iguales, aumentando el porcentaje al 82,1%, en contraste con el 57,1% de la parte anterior. Este aumento no se puede desligar del hecho de que, por primera vez, el libro de texto muestra la suma reiterada como un procedimiento para calcular la multiplicación, si bien no encontramos respuestas que pongan en evidencia esta relación. Asimismo, las respuestas[iv] a la parte 4 (Figura 4) están, en parte, en consonancia con los resultados extraídos de las preguntas abiertas anteriores. De nuevo, evidencian las dificultades de los M_F para diferenciar entre dos significados posibles de la multiplicación.

En la última parte de preguntas abiertas (parte 5), por primera vez, los M_F tenían que analizar la propuesta del libro español, identificando similitudes y diferencias entre ambos libros de texto (Q8), y argumentar qué libro usarían, como docentes, para introducir la multiplicación (Q9).

Figura 4

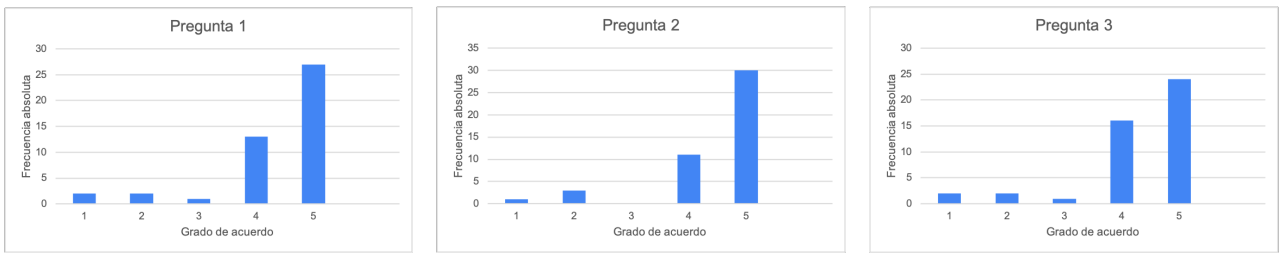
Gráficos de frecuencias de las preguntas de la parte 4



Entre las similitudes encontradas destacamos que en ambos libros: (1) se muestran ejemplos con objetos (25%); (2) se presenta la multiplicación junto a la suma (21,4%); (3) hay que cardinar colecciones (14,3%); y (4) se presenta la multiplicación agrupando objetos (7,1%). Sin embargo, en cuanto a las diferencias, es remarcable que el 35,7% indica que los libros se diferencian por la forma en la que se introduce la multiplicación: en el libro japonés se presenta directamente, mientras que en el libro español se introduce junto a la suma. Asimismo, destacamos que el 17,9% identifica como diferencia los distintos significados de multiplicación, aun cuando en preguntas anteriores lo consideraban equivalentes. Por último, en cuanto a la elección del manual (Q9), el 71,4% de los grupos se decanta por el libro español. De éstos, un 35% argumenta que es un texto a partir del que sería más fácil comprender la multiplicación, y un 50% destaca, como positivo, que esta aparezca junto a la suma. Esta comparación entre libros pone de manifiesto que los M_F se sienten más familiarizados con el PDV_{ES}, juzgando que la multiplicación como suma reiterada sería más sencilla de comprender. Finalmente, las respuestas de la parte 6 (Figura 5) son muy similares a las de la parte 4 (ver Figura 4), mostrando que el contraste entre ambos libros no ha favorecido una diferenciación de significados.

Figura 5

Gráficos de frecuencias de las preguntas de la parte 6



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las partes 1, 2 y 3 del cuestionario indagaban si los M_F identificaban rasgos importantes y diferenciadores del PDV_{JP} en torno a la introducción de la multiplicación (ver Tabla 1). Aunque los resultados no son concluyentes, las respuestas revelan fenómenos interesantes.

En relación con el significado de la multiplicación (MEV_{JP}), las respuestas a las partes 2 y 3 evidencian que los M_F la asocian con una suma reiterada de sumandos iguales. La exploración de la secuencia de tipos de problemas propuesta por el libro japonés y la identificación de técnicas no parece que haya provocado una reorganización de su conocimiento matemático en torno a posibles significados de la multiplicación y su relación con la suma. En particular, la noción de multiplicación que se introduce expresamente en los extractos de la parte 2, como la medida total de una colección cuando esta se organiza en grupos iguales, así como la presentación del modelo discursivo ("frase matemática", en terminología del libro) con relación a la que se organiza expresamente la actividad matemática propuesta por el libro, parece ser transparente a ojos de los M_F. A pesar de identificar diferentes técnicas posibles, las respuestas de los grupos acaban convergiendo, en gran medida, a la

suma de sumandos iguales como equivalente a la multiplicación. Los M_F interpretan mayoritariamente las situaciones del libro japonés en términos aditivos (combinación de medidas), pero no tanto en términos multiplicativos (isomorfismo de medidas).

Los resultados de la parte 4 apuntan, de hecho, a que los M_F no son capaces de distinguir en qué medida el PDV_{JP}, que muestra el libro de texto, difiere de sus concepciones acerca de la multiplicación. A pesar de que sus respuestas en la parte 4 (Figura 4) muestran un alto grado de acuerdo con la afirmación que describe el significado de la multiplicación en el sentido del MEV_{JP} (total de una colección agrupada en partes iguales), también, de forma mayoritaria, muestran un alto grado de acuerdo con la otra afirmación (multiplicación como suma de sumando iguales, según MEV_{ES}) y, efectivamente, las perciben como equivalentes.

Los resultados también apuntan a posibles dificultades para comprender los MDV_{JP} y FDV_{JP} que subyacen al libro de texto japonés. Según el PDV_{JP}, los niños llegarán a un nuevo significado a través de la exploración sucesiva de problemas de cuantificación de colecciones agrupadas en partes iguales. Inicialmente, se prevé el uso de estrategias basadas en sus conocimientos previos: conteo de uno en uno, de *n* en *n*, suma. La discusión del alcance y coste de estas será la que dará lugar a la necesidad de construir, más adelante, las tablas de multiplicar. Sin embargo, aunque los M_F identifican diferentes tipos de problemas y de técnicas en sus respuestas a las preguntas de las partes 1, 2 y 3, no son capaces de separar los problemas de las técnicas, ni de entrever la posible progresión que el libro propone. En un número alto de respuestas se identifica la multiplicación, tanto como tipo de problema, como técnica y como conocimiento nuevo que se desea introducir. Obviando que es el primer contacto que los niños tienen con situaciones multiplicativas, un 64,3% de los grupos identifica la multiplicación como una posible estrategia. Aunque sí es cierto que, cuando tienen que comparar sus posibles respuestas frente a las que darían los niños, un 35,7% señala que los niños usarían conteo, en lugar de la multiplicación, y un 39,3% la suma.

Estas dificultades podrían ser hasta cierto punto esperables, ya que el libro de texto obedece a un paradigma didáctico global de las matemáticas que organiza el estudio de estas a través de la exploración de problemas que permiten el uso de diferentes estrategias (abiertos-cerrados), pretendiendo que los niños elaboren nuevos significados a partir de sus conocimientos anteriores. Esta puede ser percibida como extraña, incluso sofisticada, por los M_F, como evidencian sus repuestas a Q9 (qué libro usarían).

En el libro español (Figura 3) se define de forma directa la multiplicación como una suma reiterada de sumandos iguales, limitando su estudio a traducciones entre expresiones aditivas y multiplicativas. En contraposición con el japonés, podrían emerger ciertos rasgos del PDV_{JP} que, en un primer análisis, los M_F no habrían considerado. En sus respuestas a la parte 5, algunos grupos identifican ciertos aspectos comunes (uso de colecciones de objetos, cuantificación de colecciones), pero también describen otros (la multiplicación se presenta junto a la suma, la multiplicación se presenta agrupando objetos) que revelan una comprensión superficial de los ME y los FD que subyacen en cada caso. Las respuestas no muestran que identifiquen ideas importantes y diferenciadoras, como el uso de unidades múltiples o la relación entre unidades, que son cruciales en el PDV_{JP}. Respecto a las diferencias que perciben, algo más de un tercio de los grupos considera que el texto español introduce la multiplicación junto a la suma, frente a una introducción directa en el caso japonés, aunque no somos capaces de interpretar a qué se refieren exactamente. A pesar del contraste que pretendíamos provocar, las respuestas en la parte 6 vuelven a ser similares a las de la parte 4, confirmando las dificultades de los M_F para identificar, a partir de estos textos, rasgos diferenciadores de dos modalidades de estudio diferentes. Los M_F interpretan ambos textos, en gran medida, desde la perspectiva PDV_{ES} que, como tal, ha sido débilmente cuestionado.

En relación con la fase de kyozai kenkyu, si bien el análisis de libros que presenten modalidades de estudio contrastantes puede ser una estrategia potente para cuestionar formas implícitas de interpretar

las matemáticas y su enseñanza en procesos de EC, sería necesario explorar posibles formas de organizar esta fase que permitan hacer emerger los ME, los FD y los MD subyacentes en cada caso. En la formación inicial de docentes, potenciaría el carácter transformador del EC al dotar a los M_F de herramientas para diseñar e implementar clases de investigación que cuestionen y superen formas implícitas de interpretar un ámbito matemático y su estudio provenientes de PDV que son asumidos de forma transparente.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto PID2021-126717NB-C32, Ministerio de Ciencia e Innovación

Referencias

García, F.J., Wake, G., Lendínez Muñoz, E.M. y Lerma Fernández, A.M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de Las Ciencias*, *37*(1), 137–156. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2512

García, F.J., Gascón, J. y Sierra, T.A. (2025). Reconsidering textbooks as representatives of current didactic paradigms in lesson study. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*.

García, F.J., Sierra, T.A. y Gascón, J. (2024). Introducción de la multiplicación en libros de texto españoles y japoneses. Un estudio comparativo preliminar orientado a la formación de maestros. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 249–256). SEIEM.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 23–39.

Isoda, M. y Olfos, R. (2021). *Teaching Multiplication with Lesson Study: Japanese and Ibero-American Theories for International Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6

Lendínez Muñoz, E.M., García García, F.J., Lerma Fernández, A.M. y Abril Gallego, A.M. (2024). Increase in self-efficacy in prospective teachers through theory-based lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *27*(4), 717–742. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09597-0

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(5), 651–690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Seleznyov, S. (2018). Lesson study: an exploration of its translation beyond Japan. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *7*(3), 217–229. https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2018-0020

Shinno, Y. y Mizoguchi, T. (2021). Theoretical approaches to teachers' lesson designs involving the adaptation of mathematics textbooks: two cases from kyouzai kenkyuu in Japan. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(6), 1387–1402. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01269-8

Watanabe, T., Takahashi, A. y Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A Critical Step for Conducting Effective Lesson Study and Beyond. En F. Arbaugh y P.M. Taylor (Eds.), *Inquiry into mathematics teacher education* (pp. 131–142). Association of Mathematics Teacher Educators.

[i] Fujii, T. y Majima, H. (2020). *New Mathematics 2B for Elementary School*. Tokyo Shoseki.

[ii] Fraile, J. y Pineda, A. (2023). Matemáticas 2 Primaria. Proyecto abanico. Vicens Vives.

[iii] En general, los porcentajes no suman 100 porque los M_F del Grado, en ocasiones, dan varias respuestas que se corresponden con varias categorías.

[iv] La muestra se ha restringido a 45 M_F, que fueron los que participaron con seguridad en todas las sesiones de sus respectivos grupos y para los que tenemos evidencias de que completaron tanto la parte 4 como la 6.

EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN CONTEXTOS PROBABILÍSTICOS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Proportional reasoning in probabilistic contexts in primary education students

López-Martín, M. M.[a], Burgos, M.[b], y Tizón-Escamilla, N.[b]

[a]Universidad de Almería, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este estudio analiza el razonamiento proporcional y probabilístico de estudiantes de quinto de primaria (10-11 años) a partir de tres tareas de probabilidad con distintos niveles de complejidad. Se examinan las estrategias predominantes, los argumentos empleados y las representaciones utilizadas. Se observa que, en general, los estudiantes logran identificar elementos clave en las tareas probabilísticas, mostrando cierto conocimiento intuitivo de la idea de espacio muestral y la comparación de probabilidades, pero de manera mayoritaria limitan sus justificaciones a razonamientos intuitivos donde no hacen explícita la relación de proporcionalidad. Destaca el uso de la representación verbal con la icónica que utilizan los alumnos para comprender o analizar la situación y fundamentar su justificación de su solución.

Palabras clave: razonamiento proporcional, razonamiento probabilístico, educación primaria, espacio muestral, juego equitativo

Abstract

This study analyzes the proportional and probabilistic reasoning of fifth-grade students (10-11 years) through three probability tasks with different levels of complexity. It examines the predominant strategies, the arguments used, and the representations employed. The findings indicate that, in general, students are able to identify key elements in probabilistic tasks, demonstrating some intuitive understanding of the concept of sample space and probability comparison. However, most students limit their justifications to intuitive reasoning without explicitly stating the proportional relationship. Notably, students frequently use a combination of verbal and iconic representations to understand or analyze the situation and support their solution justifications.

Keywords: *proportional reasoning, probabilistic reasoning, primary education, sample space, fair game*

INTRODUCCIÓN

El estudio de la probabilidad en Educación Primaria ha despertado un creciente interés en la investigación y los currículos educativos internacionales, con la finalidad de fomentar estudiantes la capacidad de interpretar y modelizar situaciones de incertidumbre (Pratt y Kazak, 2018). Trabajos como los de Bryant y Nunes (2012), Langrall y Mooney (2005) o Van Dooren (2014) señalan el razonamiento proporcional como uno de los componentes esenciales del estudio de la probabilidad. Un adecuado razonamiento probabilístico implica no solo calcular probabilidades, sino comprender las relaciones entre casos favorables y posibles, establecer equivalencias y construir argumentos basados en la relación de proporcionalidad que subyace a la propia definición de probabilidad (Batanero y Borovcnik, 2016; Bryant y Nunes, 2012). Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades en este proceso, especialmente cuando requieren reconocer y establecer relaciones proporcionales en contextos probabilísticos, comparar probabilidades y construir el espacio muestral en base a su estructura (Van Dooren, 2014; Hernández-Solís et al., 2021).

López-Martín, M.M., Burgos, M. y Tizón-Escamilla, N. (2025). El razonamiento proporcional en contextos probabilísticos en estudiantes de Educación Primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

Este estudio tiene como objetivo analizar la actividad matemática de estudiantes de quinto curso de educación primaria al resolver tres problemas probabilísticos en contexto de urnas, ruletas y juego equitativo, en los cuales el razonamiento proporcional juega diferente papel en su resolución. El análisis se centra en los razonamientos empleados por los estudiantes, considerando los argumentos que justifican sus respuestas y los tipos de lenguajes (expresiones, notaciones, gráficos, etc.).

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este trabajo nos apoyamos en las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (Godino, 2024). En este marco se entiende por *práctica matemática* toda actuación o expresión icónica, verbal, gráfica, simbólica, etc, realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas. En las prácticas matemáticas aparecen involucrados *objetos* (situaciones-problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) *y procesos matemáticos* (problematización, representación, definición, enunciación, argumentación) que regulan y apoyan su realización. Así, se entiende el *razonamiento probabilístico* como el sistema de prácticas matemáticas que emergen en la resolución de problemas de probabilidad. Supone entre otras las siguientes capacidades: articular el conocimiento formal del modelo de probabilidad y el conocimiento del contexto, controlando las creencias subjetivas para asignar un valor de probabilidad o tomar una decisión basada en la probabilidad; comprender la ausencia de criterios directos para lograr un resultado deseado en situaciones aleatorias; discriminar aleatoriedad y causalidad; comprender el carácter teórico de la independencia; interpretar correctamente las probabilidades pequeñas (Batanero y Borovcnik, 2016).

Algunas investigaciones que analizan el desarrollo del razonamiento probabilístico en escolares analizan de manera explícita el vínculo con el razonamiento proporcional de la comprensión del espacio muestral (es decir, la exploración de las posibilidades de los resultados de un experimento aleatorio) y la cuantificación y comparación de probabilidades basadas en la proporción entre casos favorables y casos posibles (Bryant y Nunes, 2012). El *razonamiento proporcional*, entendido como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades involucra un sentido de covariación y de comparación en términos relativos. Contempla tanto la interpretación de los diferentes significados del número racional, las formas de razonar con ellos y la modelización por medio de la función lineal (Burgos y Godino, 2020).

MÉTODO

Se adopta un enfoque cualitativo con el objetivo de analizar las prácticas realizadas por estudiantes de primaria al resolver problemas probabilísticos que implican razonamiento proporcional.

Muestra y contexto

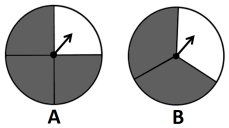
La investigación se realizó con una muestra de 48 estudiantes de quinto curso (10-11 años) de un mismo centro de educación primaria, en la provincia de Almería (España), seleccionados mediante un muestreo no probabilístico. Atendiendo al currículo y al libro de texto seguido por las tutoras de los grupos como soporte del proceso de enseñanza, de manera previa a la recogida de datos, los escolares habían estudiado la equivalencia y comparación de fracciones (de igual y distinto denominador), proporcionalidad y porcentajes, carácter aleatorio de experiencias y una iniciación al cálculo y comparación de probabilidades sencillas. Sin embargo, de acuerdo con la información proporcionada por sus tutoras, aunque los estudiantes conocían conceptos básicos como azar, casos favorables y desfavorables, y el cálculo de probabilidades, el contenido trabajado en el aula sobre este tema había sido limitado.

De forma previa a la resolución de las tareas, se informó a los estudiantes de que sus respuestas no tendrían ningún impacto en su evaluación académica, con el objetivo de fomentar una participación no condicionada por este aspecto. Los estudiantes (E1,…, E48) resolvieron las tareas de manera individual durante una sesión de 60 minutos en horario escolar.

Instrumento

Para la recogida de datos, se diseñó un conjunto de tres tareas contextualizadas en situaciones probabilísticas que requerían razonar proporcionalmente. Estas tareas fueron formuladas considerando los resultados de estudios previos sobre el desarrollo del razonamiento proporcional (Burgos, Tizón-Escamilla, et al., 2025) y probabilístico en educación primaria (Hernández-Solís, 2024; Hernández-Solís et al., 2021) y tenían distintos niveles de complejidad en función de las relaciones (razones unitarias, razones enteras o no enteras) que implicaban.

- Tarea 1. Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras o blancas, pasarías de una caja a la otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra? Explica tu respuesta.
- Tarea 2. En la ruleta A hay 3 sectores de color negro y 1 sector de color blanco y en la ruleta B hay 2 sectores de color negro y 1 de color blanco. Se gana un juego si al girar la ruleta la flecha apunta al sector blanco, ¿qué ruleta elegirías para jugar? Explica tu respuesta.



- Tarea 3. Laura y Daniel juegan a lanzar un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6. Laura gana si en el dado sale un 3 o un 5 y Daniel gana si sale 1, 2, 4 o 6. Cada vez que gana Laura recibe 2 euros. ¿Cuántos euros debería recibir Daniel cada vez que gane para que el juego sea justo? Explica tu respuesta.

La tarea 1 busca decidir cómo transferir bolas entre cajas para construir urnas equivalentes (determinar espacios muestrales para que la probabilidad de éxito sea la misma en ambas). La segunda tarea modifica la propuesta en el cuestionario de Hernández-Solís (2024, pp.172- 173) para que su respuesta sea abierta. En ella se comparan probabilidades en ruletas con diferente número de sectores. La tarea 3 es una adaptación de la propuesta en Hernández-Solís (2024, pp.112) cambiando tanto los casos favorables a cada jugador como el premio recibido para que las razones no sean unitarias, pero faciliten relaciones doble-mitad al buscar la equitatividad del juego.

Procedimiento de análisis

Para analizar la actividad matemática desarrollada por los participantes en la resolución de la tarea aplicamos el análisis ontosemiótico (Godino, 2024) que consiste en: 1) Descomposición de la actividad en unidades de análisis, formadas por las prácticas elementales, en las que se puede identificar una función o papel en la actividad que se analiza; 2) Identificación de la intencionalidad (papel en la resolución) de las prácticas elementales; 3) Reconocimiento de los objetos asociados a las prácticas elementales, prestando especial atención a los lenguajes (icónico, verbal, gráfico, simbólico) y los argumentos empleados.

El análisis de los argumentos, en base a los elementos (conceptos y propiedades) matemáticos que se reconocen, permite comprender cómo construyen sus estrategias (configuraciones de prácticas con las que abordan la resolución de la tarea), evidenciando si su razonamiento se apoya en interpretaciones intuitivas, la proporcionalidad o probabilidad. Una respuesta se considera: *correcta* si llega a la solución correcta, mediante un procedimiento adecuado y lo justifica; *parcialmente correcta* si aunque la solución es adecuada, la justificación es parcial o incompleta; *incorrecta* en otro caso. Por ejemplo, se considera correcta la respuesta de E15 a la tarea 1 “pasaría una bola blanca y una negra de [la caja de] Pablo a [la de] Miguel, para que los dos tengan la misma probabilidad de sacar bola negra: 6/10”. Se considera parcialmente correcta la de E22 en la Figura 1.

RESULTADOS

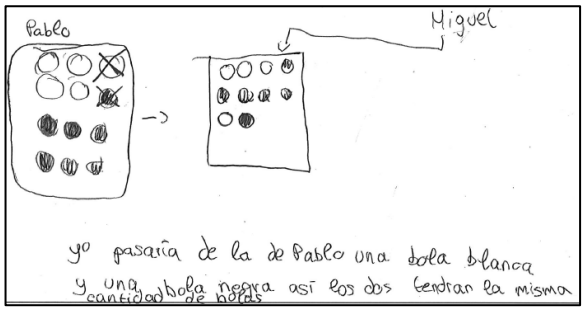
A continuación, se presentan los resultados derivados del análisis de las respuestas de los alumnos a las diferentes tareas. En cada caso, se identifican las estrategias, argumentos y representaciones (lenguajes) empleados por los estudiantes.

Estrategias. Presencia del razonamiento proporcional

Se identificaron los siguientes tipos de estrategias:

Estrategias intuitivo-cualitativas o de comparación directa. Los alumnos realizan comparaciones inmediatas o numéricas simples, basadas principalmente en cantidades absolutas (véase Figura 1) o percepciones directas, sin explicitar relaciones proporcionales claramente definidas. En el caso de la tarea 2, se observaron respuestas similares a las de E2 quien indicó "La B porque tiene 2 lados negros (grandes) pero hay un poco de más posibilidades de que salga blanca", mostrando una comparación visual directa sin considerar la proporción entre sectores.

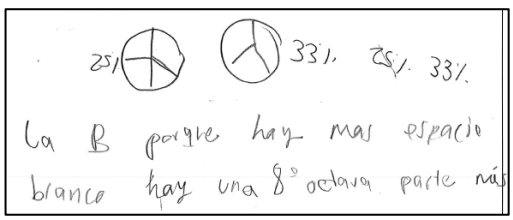
Figura 1
Respuesta de E22 a la Tarea 1



En las respuestas de esta categoría a la tarea 3, los estudiantes se basaron en la diferencia absoluta de resultados favorables, sin considerar la relación proporcional entre probabilidades y premios. Por ejemplo, E40 indicó "Yo creo que Daniel debería de recibir 1 euro, porque Daniel tiene más posibilidades de ganar porque tiene más números que Laura".

Estrategias proporcionales sin referencia a la probabilidad. Se observa un uso explícito de estrategias multiplicativas o basadas en razones, si bien no mencionan la probabilidad. En particular, como muestra la Figura 2, recurren a la expresión de las razones como porcentajes, aunque estos no se reconocen como probabilidades.

Figura 2
Respuesta de E10 a la Tarea 2



- *Estrategias proporcionales con referencia a la probabilidad.* Los estudiantes usan estrategias multiplicativas o basadas en las razones entre casos favorables a desfavorables o posibles, relacionando estas con la probabilidad. Por ejemplo, en la tarea 3, E27 señaló "1€ porque Daniel tiene el doble de probabilidad de que salga su número".

En la Tabla 1 se muestra la distribución de estudiantes por categoría y tarea; observe que el total en las Tareas 1 y 3 no coincide con el tamaño muestral, ya que algunos estudiantes se limitaron a indicar el resultado numérico o no siguieron una estrategia determinada (operaciones al azar).

Tabla 1

Distribución y porcentaje de respuestas según estrategia

Estrategia	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Intuitivo-cualitativas o de comparación directa	44 (91,7)	38 (79,2)	29 (60,4)
Proporcionales sin referencia a probabilidad	0 (0,0)	3 (6,3)	7 (14,6)
Proporcionales con referencia a probabilidad	0 (0,0)	7 (14,6)	6 (12,5)
Total	44	48	42

Representaciones

La Tabla 2 recoge las representaciones lingüísticas utilizadas en cada tarea. Observamos que el tipo de representación mayoritaria depende de la tarea. Así, mientras en las tareas 2 y 3 predomina el uso exclusivo del lenguaje verbal, en el caso de la primera tarea, aumenta el uso de la representación verbal con la icónica que utilizan los alumnos para comprender la situación y fundamentar su justificación de su solución (véase Figura 1). Este registro aparece también en la tarea 2 con la intención de dividir los sectores de las ruletas proporcionadas en el enunciado, facilitando así la comparación probabilística. Aunque minoritaria, la representación simbólica se emplea frecuentemente en la expresión de porcentajes o comparación de fracciones.

Tabla 2

Distribución y porcentaje de respuestas según las representaciones

Tipo de representación	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Verbal	11 (23)	34 (71)	31 (65)
Icónica	5 (10)	0 (0)	1 (2)
Simbólica	5 (10)	0 (0)	0 (0)
Icónica y verbal	17 (35)	9 (19)	5 (10)
Icónica y simbólica	5 (10)	0 (0)	0 (0)
Simbólica y verbal	2 (4)	4 (8)	8 (17)
Icónica, simbólica y verbal	3 (6)	1 (2)	0 (0)
Total	48	48	45

Argumentos

Además de aquellas respuestas en las que los estudiantes únicamente indicaron el resultado sin justificarlo (14) y las que quedaron en blanco (2), se excluyen de la categorización de argumentos las respuestas no concluyentes (14), es decir, aquellas en las que la justificación proporcionada no permite determinar con claridad el razonamiento empleado. Se observa que algunos estudiantes utilizan una estrategia de naturaleza proporcional, que expresan de forma verbal, con soporte icónico o simbólico, pero luego la justifican con un argumento que no siempre explicita la relación probabilística subyacente. A continuación, clasificamos los argumentos según empleen explícitamente o no un lenguaje próximo al trabajo de la probabilidad

Argumentos no basados explícitamente en la probabilidad.

Comparaciones absolutas de cantidades. Los estudiantes justifican sus respuestas en la necesidad de igualar cantidades. Por ejemplo, en la Tarea 1, ambos jugadores deben tener el mismo número de bolas negras y blancas, sin justificar esta decisión en base a la probabilidad. Algunos estudiantes proponen eliminar o cambiar el color de algunas bolas con el objetivo de igualar el número de cada tipo (“Que ponga Pablo 2 de las negras a las blancas para tener 5 negras igual que Miguel”, E17).

Comparaciones aditivas. En la tarea 1, algunos estudiantes argumentan incorrectamente como E10 que “ninguna porque hay las mismas bolas sobrantes negras”. En la tarea 3, argumentan como E3 que “1€ porque Daniel tiene 2 números más que Laura".

Comparaciones relativas. Algunos estudiantes utilizan fracciones y porcentajes para justificar sus respuestas, pero sin una relación clara con el cálculo probabilístico o proporcional. Si bien identifican diferencias en las cantidades, sus argumentaciones no suelen incluir una relación precisa con la probabilidad o la asignación del premio. Por ejemplo, en la segunda tarea, E37 concluye que "La B, porque en la A que te salga la blanca hay un 25% pero en la B hay un 33%."

Comparaciones multiplicativas. En la tarea 1, algunos estudiantes reparten las bolas en cantidades iguales entre las urnas, sin tener en cuenta la probabilidad de extracción. En la tarea 3, se establece una relación multiplicativa entre los casos favorables y el premio, sin conectarlo explícitamente con la probabilidad. Por ejemplo, E3 indica que "debería ganar 100 céntimos (1€) por número porque 100+100+100+100 es 400 céntimos y 400 céntimos son 4€, y a Laura si le salen 2 números son 4€", asumiendo que la cantidad ganada debe ser proporcional a la cantidad de números jugados.

Argumentos basados explícitamente en la probabilidad

Comparaciones absolutas. En la tarea 1 lleva a asumir la misma cantidad de bolas para garantizar la misma probabilidad. En la tarea 2, un número significativo de estudiantes sostiene que cuanto mayor sea el sector blanco, mayor será la probabilidad de ganar, asociando el tamaño del sector con la probabilidad de ocurrencia sin realizar cálculos formales ("La B porque el sector blanco es más grande que el del A y por eso hay más probabilidad de que te toque el blanco en la ruleta B", E7).

Comparaciones aditivas. Se establece que más casos favorables implican automáticamente más éxito, sin considerar cómo varía la probabilidad en función del total de casos posibles. Por ejemplo, en la tarea 3, un estudiante justifica que Daniel debe recibir 1€ argumentando que "tiene dos números más y tiene más probabilidad de que le toque" (E38).

Comparaciones relativas. Por ejemplo, en la Tarea 3 se evidencia en la respuesta de E6, quien concluye "Es injusto porque Daniel tiene 4/6 y Laura 2/6". En este caso, aunque el uso de fracciones sugiere un cálculo implícito de probabilidades, el error radica en no relacionar correctamente el premio con dichas probabilidades.

Comparaciones multiplicativas. Por ejemplo, en la tarea 1 se unen las bolas y se procede a un reparto equitativo de casos favorables y desfavorables (mitad en cada urna). También en esta categoría se incluyen argumentos como el de E33 en la tarea 3 "[Daniel] Debería ganar un euro porque Laura tiene más probabilidades que gane, porque tiene la mitad que Daniel, así que debería ganar la mitad".

Tabla 3

Distribución y porcentaje de respuestas según los argumentos

Tipo de argumento		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
No basado explícitamente en probabilidad	Comparación Absoluta	20 (42,7)	22 (45,8)	7 (14,6)
	Comparación Aditiva	1 (2,1)	4 (8,3)	5 (10,4)
	Comparación Relativa	0 (0,0)	2 (4,2)	1 (2,1)
	Comparación Multiplicativa	9 (18,8)	6 (12,5)	15 (31,3)
Basado explícitamente en probabilidad	Comparación Absoluta	4 (8,3)	2 (4,2)	1 (2,1)
	Comparación Aditiva	0 (0,0)	2 (4,2)	1 (2,1)
	Comparación Relativa	1 (2,1)	2 (4,2)	0 (0,0)
	Comparación Multiplicativa	0 (0,0)	4 (8,3)	5 (10,4)
No concluyente		7 (14,6)	4 (8,3)	3 (6,3)
Sin justificación		6 (2,1)	0 (0,0)	8 (16,7)
Sin respuesta		0 (0,0)	0 (0,0)	2 (4,2)
Total		48	48	48

La Tabla 3 evidencia la tendencia de los estudiantes a justificar sus respuestas con enfoques intuitivos o basados en comparaciones directas, en lugar de recurrir a razonamientos probabilísticos o proporcionales estructurados. Si bien algunos estudiantes logran establecer relaciones multiplicativas, persisten dificultades en la formalización de sus explicaciones. Además, la presencia de respuestas no concluyentes y sin justificación refleja limitaciones en la argumentación matemática y la necesidad de un mayor desarrollo en la comprensión de la probabilidad y la proporcionalidad.

Grado de corrección

El análisis del grado de corrección presentado en la Tabla 4 permite identificar diferencias relevantes en el desempeño de los estudiantes según el tipo de tarea propuesta. Se observa que, en general, los estudiantes logran identificar elementos clave en las tareas probabilísticas (composición del espacio muestral, relación entre número de sectores y su tamaño, relación entre casos favorables y posibles en un juego), pero limitan sus justificaciones a razonamientos intuitivos. Asimismo, un número importante de respuestas parcialmente correctas se debieron a la dificultad para establecer con claridad la relación proporcional subyacente.

Tabla 4

Distribución y porcentaje de respuestas según grado de corrección

	Respuestas Correctas		Parcialmente Correctas		Incorrectas	
Tarea	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
1	24	50,0%	3	6,3%	21	43,8%
2	40	83,3%	6	12,5%	2	4,2%
3	10	20,8%	17	35,4%	13	27,1%

CONCLUSIONES

La probabilidad, junto con la estadística no ha sido una prioridad para los docentes de primaria ni de secundaria, lo que en parte ha causado que la investigación didáctica en este tema haya sido menos prolífera que en otros como la aritmética o el álgebra (Bosch et al., 2024). Esta falta de interés motiva que la formación que reciben los estudiantes en probabilidad no siempre responde a lo esperado. Con la intención de contribuir a comprender cuál es el conocimiento probabilístico de estudiantes, en este trabajo propusimos a estudiantes de primaria que habían recibido formación en proporcionalidad y probabilidad tres tareas representativas de aspectos centrales del estudio de la probabilidad (Burgos, Tizón-Escamilla, et al., 2025; Hernández-Solís, 2024). Los resultados de nuestra investigación evidencian que los estudiantes recurren mayoritariamente a estrategias intuitivo-cualitativas, basadas en comparaciones directas o en la percepción visual de las probabilidades, sin establecer relaciones proporcionales explícitas. Aparece de manera predominante el lenguaje verbal, si bien en algunos casos lo combinan con representaciones icónicas o simbólicas que facilitan el análisis de la situación y soportan la justificación de la estrategia. El análisis de los argumentos revela una tendencia general hacia justificaciones basadas en comparaciones absolutas de cantidades que no atienden a la naturaleza proporcional de la probabilidad. Los resultados de la tarea 1, muestran en línea con Burgos, Tizón-Escamilla, et al. (2025), que os estudiantes pueden determinar de manera adecuada la composición de una caja para lograr la igualdad de probabilidad, pero tienen dificultades para justificar sus procedimientos con base en la probabilidad o proporcionalidad. En la comparación de probabilidades en las ruletas gran parte de los estudiantes asocian directamente el tamaño de los sectores con la probabilidad sin realizar cálculos formales. En contraste, en la tarea 3, en la que se debe decidir el premio para garantizar la equitatividad de un juego con diferente probabilidad de éxito para cada jugador, se observa un mayor uso de relaciones multiplicativas, aunque no expliciten la relación premio-probabilidad. Además, la presencia de respuestas no concluyentes y sin justificación sugiere que algunos estudiantes carecen de la competencia para justificar sus soluciones en base a los elementos matemáticos implicados.

Estos hallazgos coinciden con los de Hernández-Solís et al., (2021), quienes evidenciaron un mejor desempeño de los estudiantes en tareas de comparación de probabilidades cuando pueden contrastar visualmente casos favorables y posibles. En Burgos, Tizón-Escamilla, et al. (2025), la mayoría logró determinar de manera adecuada la composición de una caja para mantener una probabilidad dada, aunque en pocos casos justificaron sus procedimientos con base en la probabilidad o proporcionalidad. Como en Burgos, López-Martin, et al. (2025), a pesar de la potencialidad del contexto probabilístico para avanzar en el desarrollo del razonamiento proporcional, se reconocen las dificultades en la argumentación matemática por parte de los estudiantes. Se destaca la importancia de fomentar en primaria el uso de diversas representaciones y la argumentación para conectar el razonamiento probabilístico y proporcional en distintos contextos.

AGRADECIMIENTOS

Investigación realizada como parte de los proyectos de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/ y FEDER (una forma de hacer Europa), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 y HUM-886 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Batanero, C. y Borovnick, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Sense Publishers.

Bosch, M., Gutiérrez, A. y Llinares, S. (2024). Mapeando la investigación española en educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 51-94). SEIEM.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review (full report)*. The Nuffield Foundation.

Burgos, M. y Godino, J. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *18*, 1–20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M., López-Martín, M.M., Tizón-Escamilla, N. y Aguayo-Arriagada, C. G. (2025). Razonamiento proporcional y algebraico de estudiantes cuando resuelven una tarea probabilística. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 19*(2), 131-158.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y López-Martín, M.M. (2025, en prensa). Razonamiento proporcional en la resolución de tareas probabilísticas por alumnos de primaria. *Uniciencia.*

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.ISBN: 9788410066519.

Hernández-Solís, L. A. (2024) *Influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas. Tesis Doctoral.*

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con niños de Educación Primaria. *Uniciencia*, *35*(2), 1-18. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95–119). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_5

Pratt, D. y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. Chernoff y B. Sriraman (eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_7

METODOLOGÍA DOCENTE: MEJORANDO LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS EN FUTUROS DOCENTES DE INFANTIL

Teaching methodology: improving the attitude towards mathematics in future early childhood teachers

Loureiro-Ga M.[a], Gutiérrez-Rodríguez I.[b]

[a]RITME, Facultade de Educación e Traballo Social (Campus Ourense).

[b]CITMAga, Facultade de Ciencias da Educación e do Deporte (Campus Pontevedra).

Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo

Resumen

Numerosos estudios muestran que la actitud hacia las matemáticas del alumnado del Grado en Educación Infantil no es la deseable y una gran parte del alumnado suele presentar sentimientos negativos hacia esta materia. Debemos pues intentar revertir este efecto en la medida de lo posible. En este trabajo se ha aplicado una metodología basada en aprendizaje cooperativo vinculada con la teoría de situaciones didácticas y se ha comparado con la tradicional de clase magistral, empleando como instrumento un cuestionario con el que se han analizado diversos dominios. Se ha evidenciado que, creando situaciones de aprendizaje positivas, se puede revertir ese sentimiento negativo inicial en parte del alumnado, algo que con metodología tradicional no se conseguía. Se evidencia la influencia de la nueva metodología con un claro efecto en el gusto. El número de sujetos que muestran un sentimiento negativo hacia las matemáticas se consigue reducir gracias a la nueva metodología.

Palabras clave: ansiedad matemática, aprendizaje cooperativo, formación docente, metodología tradicional, situaciones didácticas

Abstract

Numerous studies show that the attitude towards mathematics of the students of the Degree in Early Childhood Education is not desirable and a large part of the students usually have negative feelings towards it. We must therefore try to reverse this effect as far as possible. In this work, a methodology based on cooperative learning linked to the theory of didactic situations has been applied and compared with the traditional master class, using a questionnaire in which various domains were analyzed. It has been shown that by creating positive learning situations, this initial negative feeling in part of the students can be reversed, something that was not achieved with traditional methodology. A clear effect on the influence of the application of the new methodology on taste was depicted and the number of people who have a negative feeling towards mathematics is reduced thanks to the new methodology.

Keywords: cooperative learning, didactic situations, mathematical anxiety, traditional methodology, teacher training.

Loureiro-Ga, M. y Gutiérrez-Rodríguez, I. (2025). Metodología docente: mejorando la actitud hacia las matemáticas en futuros docentes de infantil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Una de las principales tareas que recaen sobre el alumnado universitario de educación es adquirir la capacidad de guiar a sus futuros estudiantes y ofrecerles herramientas y conocimientos que puedan ser de aplicación práctica en la vida real. Durante su aprendizaje, el alumnado universitario debería no solo aprender diferentes teorías sobre resolución de problemas, pensamiento lógico y argumentación, sino también su práctica (Boaler, 2016; Council of The European Union, 2018). Sin embargo, en el ámbito universitario continúa predominando el modelo de profesor-orador en clase magistral lo que relega al alumnado a un papel mucho más pasivo en el aprendizaje.

Existe un sesgo negativo hacia a las matemáticas presente por norma general entre los futuros docentes de educación infantil. Debido a la complejidad de factores que se engranan en dicho sesgo, se necesita un aprendizaje más profundo sobre las causas que lo componen. Algunos estudios han intentado determinar las dimensiones vinculadas con las actitudes y creencias hacia las Matemáticas concluyendo que, es desde la práctica educativa de aula donde el docente puede generar estrategias para reforzar o cambiar la imagen que un estudiante posee de sí mismo (Gamboa Araya et al., 2016). Las actitudes del alumnado hacia las Matemáticas presentan componentes tan diversos como el propio manejo de los procesos cognitivos o el sistema de creencias del estudiante, mucho más allá de los tradicionales epígrafes de “me gustan” o “no me gustan” las Matemáticas. Autores como Gómez-Chacón y Marbán (2019) o Marbán, et al. (2020) comentan la necesidad de establecer intervenciones afectivo-matemáticos específicos en la formación didáctica del alumnado que estudia para maestro. De la misma manera, Romero-García, et al. (2023) analizan el dominio afectivo (creencias, emociones y actitudes) en la educación matemática de docentes en formación, evidenciando cambios en las creencias de los futuros docentes sobre la utilidad e importancia de la materia de matemáticas con intervenciones adecuadas.

Por otro lado, estudios recientes señalan a la creatividad y la flexibilidad cognitiva como baluartes en la construcción de una actitud más amigable hacia las matemáticas. Es imperativo conocer las causas que devienen en prejuicios contra este campo del conocimiento a la hora de desarrollar estrategias efectivas que mejoren las actitudes de los futuros docentes hacia el conocimiento matemático (De-la-Peña, 2021).

El principal objetivo de este estudio de caso es comparar los efectos de dos metodologías de enseñanza aplicadas a la materia de matemáticas para futuros docentes de Educación Infantil: una tradicional y otra basada en principios constructivistas y una metodología activa. Para ello se han diseñado actividades basadas en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), que promueven la flexibilidad matemática en futuros docentes de educación infantil. Con este objetivo se pretende evidenciar el impacto de una metodología docente activa donde el alumnado es partícipe de su proceso de aprendizaje.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

La función del docente necesita ser reevaluada si queremos mejorar la actitud del alumnado hacia las Matemáticas, ya que el mero hecho de pergeñar clases interactivas con actividades y estilos de docencia que invitan a la participación demuestra ser un elemento clave a la hora de mejorar las actitudes del alumnado (Mata, 2012). El uso de ejemplos de la vida cotidiana o la incorporación de nuevas tecnologías en las clases tiene un efecto positivo en la recepción de los aprendizajes que ayuda a que el alumnado (futuros docentes) intenten replicar estilos de adquisición de conocimientos más activos una vez se incorporen al mundo laboral.

Cuando a la par que cambiamos el método en que impartimos clases modificamos también la manera en que las evaluamos, el cambio de mentalidad en el alumnado se hace más patente y definitivo. Si se refuerza la idea que el esfuerzo, la perseverancia y la dedicación son elementos identificables y calificables, más allá del resultado numérico de las pruebas, se consigue romper con el mito de que

los conocimientos matemáticos son un elemento innato y casi genético, con lo que se consigue que el alumnado pueda establecer objetivos de logro y llegar a ellos. No solo se refuerzan los conocimientos matemáticos, sino también las actitudes del estudiantado hacia ellos y las implicaciones que esto acarreará cuando el alumnado se convierta en cuerpo docente una vez abandonen la universidad transmitiendo este nuevo enfoque, ya que el docente es clave en la actitud del alumnado hacia las matemáticas (Domino, 2009).

El aprendizaje se vuelve más eficaz cuando es activo y experimental por lo que las metodologías activas deben estar presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Si bien es cierto que su aplicación es cada vez mayor en educación superior (Alonso Ferreiro, 2024; Chávez Ruiz 2025), su porcentaje sigue siendo muy reducido y las clases magistrales continúan siendo mayoritarias (Cortés, 2024).

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) permite a los estudiantes adquirir diversos conocimientos matemáticos aplicados a situaciones diversas y contextualizadas. La importancia de un aprendizaje basado en la TSD radica en la capacidad para fomentar la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación matemática (Brousseau, 1998). Aprender matemáticas consiste en ayudar al alumnado para adquirir herramientas que le permitan resolver problemas de manera eficaz. Para ello, hay que plantear situaciones que permitan formar con sentido y funcionalidad un determinado conocimiento matemático (Hernández et. al. 2015). Estas situaciones de aprendizaje, así como los recursos empleados, han de ser diversas ya que "no todo el alumnado aprende de la misma manera" (Alsina, 2021). La TSD, que puede incluir problemas abiertos, ayuda a que los alumnos empleen diferentes estrategias y enfoques para resolver los problemas o situaciones propuestas. De este modo, se fomenta y trabaja la flexibilidad matemática en el alumnado (Star, 2022) que consiste en la capacidad de los estudiantes para emplear diferentes estrategias en la resolución de problemas; esta habilidad implica conocer y seleccionar diversas estrategias, aspecto importante de la competencia matemática (Kilpatrick et al., 2001). A través del aprendizaje cooperativo, los estudiantes pueden trabajar en equipo para resolver problemas y compartir sus conocimientos y habilidades (Iglesias Muñiz, 2017). Esto, aplicado al área de matemáticas, les permite desarrollar habilidades como la comunicación matemática, la creatividad y la colaboración. Estudios recientes proponen también fomentar la flexibilidad matemática a través de tareas de modelización (Ferrando y Segura, 2020).

METODOLOGÍA

Contexto y participantes

Para conseguir el objetivo de este estudio, se ha realizado una investigación experimental comparativa con el alumnado de la materia "Matemáticas para maestros" del Grado de Educación Infantil de la Universidad de Vigo. Para ello se han seleccionado dos grupos de participantes de la misma titulación y materia de dos campus distintos (grupo A y grupo B). El criterio de inclusión para participar en este estudio fue estar cursando la materia y la aceptación voluntaria de un consentimiento informado. La muestra de los participantes se detalla en la Tabla 1.

Los instrumentos empleados en este estudio fueron un cuestionario diseñado ad-hoc y la observación directa en cada una de las sesiones. El cuestionario consta de 52 ítems, combinando respuestas en escala Likert con coeficiente alfa de Cronbach de 0,91 y respuestas abiertas, se ha dividido en tres dimensiones: actitudes, creencias y emociones; autopercepción de conocimiento didáctico y percepción sobre adecuación de los contenidos, metodología y organización docente.

La impartición de clases en ambos grupos experimentales (A y B) se dividen en tres: grupo grande, mediano y reducido con tamaños aproximados de 80, 40 y 16, respectivamente**.** En el grupo A se aplicó una metodología tradicional, donde el docente actúa como un mero transmisor de conocimiento. En los grupos grandes se explican los contenidos de forma teórica con algún ejemplo,

en las clases de grupo mediano se realizan ejercicios y en los grupos reducidos se profundiza aún más en los contenidos matemáticos de la materia.

Por otro lado, en el grupo B se aplicó una metodología activa con clases donde no solo se transmite conocimiento, sino que se fomenta la participación. En las clases de grupo grande se fomenta la aplicación inmediata de los contenidos a través de la resolución de problemas breves en equipo. En las clases de grupos medianos se profundiza en los ejercicios de la materia con tiempo para la resolución de ciertos problemas en equipo. Finalmente, en los grupos reducidos, prima la aplicación de situaciones didácticas en las que puedan aplicar los conocimientos adquiridos hasta ese momento en la materia y construir nuevo aprendizaje de una forma más práctica y que podrían replicar en un aula de infantil. En este tipo de situaciones, se ha trabajado la flexibilidad matemática del alumnado, proponiendo problemas abiertos en los que se pueden aplicar diferentes estrategias de resolución. También se han empleado estructuras de aprendizaje cooperativo (AC) para fomentar la reflexión en equipo y trabajar competencias transversales. Se puede ver descrito con detalle un ejemplo de actividad donde se trabaja el tema de geometría empleando la estructura 1-2-4 de AC en González-Vázquez (2024).

Tabla 9

Resumen general de la muestra de participante del estudio.

	Metodología	**Sujetos**	**Hombres**	**Mujeres**	**Promedio de años sin cursar matemáticas**
GRUPO A	Tradicional	73	5	68	5
GRUPO B	TSD y AC	56	4	52	5.7
	Total	129	9	120	

Recogida de información

La variable independiente del estudio es la metodología docente empleada, que ha sido diferente en los grupos A y B, tal y como se ha descrito anteriormente. La variable dependiente es el sentimiento y percepción final del alumnado respecto a la materia. Para medir esta percepción, la observación directa en cada una de las sesiones sirvió como punto de partida para la redacción de un cuestionario con valoraciones en escala tipo Likert de 1 a 5 que el alumnado participante en el estudio ha respondido el último día de clase. Los valores de la escala están asociados al nivel de acuerdo o desacuerdo con la pregunta formulada del siguiente modo: 1 muy en desacuerdo, 2 en desacuerdo, 3 neutro, 4 de acuerdo, 5 totalmente de acuerdo. Las dimensiones del cuestionario son: actitudes, creencias y emociones; autopercepción de conocimiento didáctico y percepción sobre adecuación de los contenidos, metodología y organización docente.

Finalmente, los datos se han procesado y agrupado para simplificar el análisis del siguiente modo: 1-2 respuesta negativa, 3 neutro, 4-5 respuesta positiva. Como variables externas se pueden tener en cuenta la influencia de los docentes en el proceso.

Cabe señalar que la metodología tradicional empleada en el grupo A era la que se venía aplicando con anterioridad, mientras que en el grupo B se introdujo una metodología activa como parte de una propuesta de innovación docente. Este enfoque permite respetar la realidad formativa de cada grupo analizando al mismo tiempo el impacto de diferentes prácticas pedagógicas sin comprometer la equidad en el acceso a la docencia habitual.

RESULTADOS

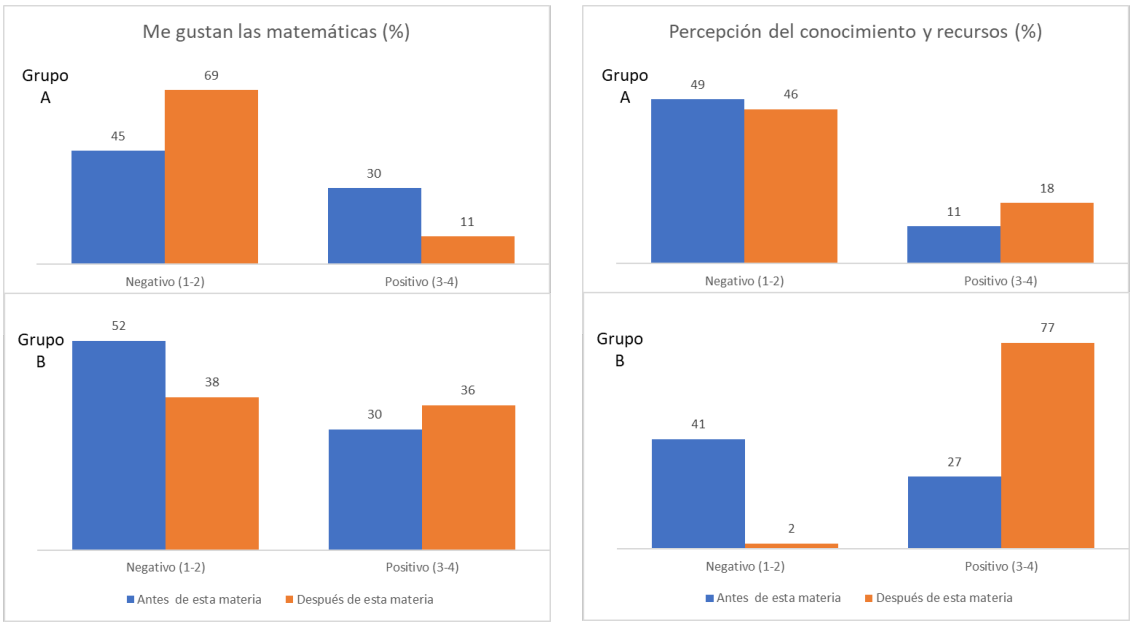
En esta sección se analizan los diferentes dominios estudiados en la investigación para los dos grupos de estudio: grupo A al que se le aplica la metodología tradicional, grupo B al que se le aplica la metodología innovadora. Tras obtener todas las respuestas de los sujetos, se calculó la estimación de

fiabilidad del cuestionario mediante el coeficiente alfa de Cronbach y como resultado se obtuvo que el coeficiente de consistencia interna de este cuestionario es de 0.91. A continuación, se analizó el dominio con relación al gusto personal por las matemáticas. Se ha preguntado a los participantes su gusto por las matemáticas con el siguiente ítem: *antes/después de cursar esta materia me gustaban/gustan las matemáticas*. Podemos observar en la Figura 1 (izquierda) que el alumnado del grupo A aumenta su sentimiento negativo hacia las matemáticas al cursar una nueva materia tras años sin tener contacto con ella. Por el contrario, en el grupo B se consigue una reducción de este sentimiento negativo de 14 puntos porcentuales. El porcentaje de personas que expresan un sentimiento positivo hacia las matemáticas antes de la materia es análogo en ambos grupos, el 30%; pero en el grupo A se reduce al 11% tras cursar la materia, mientras en el grupo B aumenta al 36%. Vemos pues un claro efecto en la influencia de la aplicación de la nueva metodología en el gusto: por un lado, se reducen el número de personas que tienen un sentimiento negativo y también aumentan las que tiene un sentimiento positivo. Obviamente la reducción en una no coincide con el aumento en la otra ya que está en juego el valor neutro.

Para analizar la percepción del conocimiento matemático adquirido de cara a la práctica diaria se ha pedido que respondan al siguiente ítem: *antes/después de cursar esta materia tenía/tengo conocimiento suficiente y dispongo de recursos para impartirla en EI*. Podemos observar en la Figura 1 (derecha) que prácticamente la mitad del alumnado del grupo A mantiene su percepción negativa sobre los conocimientos y recursos de los que dispone para trabajar la materia en el día a día (49% al inicio de la materia y 46% al final) y prácticamente tampoco varía la percepción positiva respecto a este ítem. En contrapartida, observamos que el grupo B parte de un sentimiento negativo del 41% y se reduce a tan solo el 2%. Esta reducción en el sentimiento negativo va pareja de un aumento elevado en el sentimiento positivo que pasa a ser el 77% aumentando en 50 puntos porcentuales. Es decir, en el grupo que se ha aplicado la metodología propuesta la mitad del alumnado partía de una situación negativa o neutra en este ítem y terminó la materia con sentimiento positivo.

Figura 13

Izquierda porcentaje de alumnado que muestra gusto por las matemáticas, derecha porcentaje relativo a la percepción del conocimiento didáctico



También se ha preguntado la percepción del alumnado referente a la superación de la materia con el ítem: *voy a aprobar esta materia*; obteniendo un 62% de respuestas positivas en el grupo A y un 88% en el grupo B. Podemos ver con este resultado que el alumnado que ha trabajado la materia con la

metodología propuesta se siente más preparado para enfrentarse a una evaluación final de la materia y superarla con éxito. Otro de los ítems mide la percepción sobre las situaciones de aprendizaje experimentadas: en esta materia se han dado situaciones de aprendizaje positivas; solo el 18% del alumnado del grupo A responde positivamente, mientras que esta cantidad pasa al 66% en el grupo B. Esto evidencia que el alumnado percibe de forma más positiva el enfoque propuesto frente a la metodología tradicional.

Finalmente se ha analizado la variable sentimiento y ansiedad o frustración del alumnado hacia las matemáticas con diversos ítems que analizaremos a continuación. Uno de los ítems: *tras cursar esta materia tengo un buen sentimiento hacia las matemáticas*; arroja que el 74% del grupo A tiene un sentimiento negativo respecto a esta afirmación, mientras que en el grupo B es solo el 37%.

Respecto a la cuestión ansiedad se ofrece el ítem: *siento ansiedad o frustración ante las matemáticas*; que muestra un 69% de respuestas positivas del grupo A, mientras que en el grupo B esta cantidad es del 45%. Los datos del grupo A están en consonancia con los encontrados por Sánchez Mendías et. al. (2022) dónde se indica que "existen algo más de dos tercios (69.06%) de futuros maestros con un nivel de ansiedad hacia las matemáticas medio o alto". El valor medio de ansiedad matemática mostrada en el cuestionario por los alumnos del grupo A y B es de 3,9 y 3,2 respectivamente. En el estudio de Nortes Martínez-Artero et. al. (2022) se mostraba una ansiedad media de 2,99 con alumnado del Grado en Educación Primaria. En el presente caso, tratamos con alumnado del Grado en Educación Infantil, esto puede justificar esa discrepancia.

En cualquier caso, si se tiene en cuenta este ítem del cuestionario sobre la ansiedad (3,9 y 3,2 respectivamente) y la situación de partida, podemos observar que había más alumnos en el grupo B (52%) que presentaban gusto negativo por las matemáticas que en el grupo A (45%), pero finalmente muestran un mayor gusto y menor ansiedad que los del grupo A. Por lo tanto, parece razonable concluir que la metodología utilizada ayuda a mejorar los sentimientos de ansiedad matemática presente en los futuros docentes de matemáticas y que hemos evidenciado en estudios previos (Gutiérrez-Rodríguez y Loureiro-Ga, 2025).

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

En este trabajo se ha analizado un estudio de caso, con un total de 129 sujetos divididos en dos grupos. Un grupo A al que se le ha aplicado la metodología tradicional de docencia donde el docente es un mero orador y transmisor de conocimientos y otro grupo B dónde se ha aplicado un enfoque más dinámico, con aprendizaje cooperativo y resolución de situaciones didácticas que entrenan la flexibilidad matemática del alumnado, docentes del mañana.

La actitud hacia las matemáticas en el futuro profesorado analizado no es positiva en ninguno de los dos grupos ya desde el momento inicial, antes de cursar la materia, tal y como se ha mostrado en la Figura 1. Prácticamente la mitad de los participantes respondían negativamente a su gusto por las matemáticas en ambos grupos. Bien es cierto, que parte del alumnado que cursa estas titulaciones, lleva años sin cursar la materia porque la ha dejado de lado. De hecho, un tercio de los sujetos en ambos grupos no ha cursado matemáticas desde 3º o 4º de la ESO y la media de años sin cursar matemáticas del alumnado participante en el estudio es de 5 y 5.7 años respectivamente. Este alumnado, que no siguió el itinerario científico de matemáticas, puede que ya por un rechazo en su momento, se ve obligado a volver a cursarlas en el ámbito universitario, posiblemente recuperando ese rechazo inicial que experimentaron en la adolescencia.

Se han publicado previamente numerosos estudios (Fernández y Aguirre, 2010; Nortes Martinez-Artero, 2020) con resultados similares que analizan la actitud y sentimientos hacia las matemáticas con más detalles y una participación de individuos mucho mayor. De hecho, Nortes Martinez, (2020) propone "aumentar el número de alumnos a los que agraden las matemáticas" a través de "una

selección previa del alumnado con una prueba de aptitud" como herramienta para que accedan a estas titulaciones alumnos "sin rechazo a las Matemáticas".

Sin dejar de considerar esta propuesta y otras similares, cabe recalcar que la situación actual es la ya conocida y presentada en el análisis inicial y en la cual se pone en evidencia esa mala actitud hacia la materia. Por lo que debemos crear secuencias de aprendizaje con nuevas metodologías para intentar mejorar el sentimiento y ansiedad negativos del alumnado que ~~ya~~ tenemos en nuestras aulas, a la vez que conseguimos que adquieran nuevos conocimientos matemáticos que les permitan desenvolver su futura práctica docente sin problema alguno.

El análisis presentado muestra una clara mejoría con la aplicación del nuevo enfoque docente, tanto en el nivel de gusto, como en los niveles de ansiedad matemática. Vemos que, tras la intervención, el 69% del alumnado del grupo A manifiesta que no le gustan las matemáticas, aumentando un 24% respecto a su opinión inicial. Por el contrario, en el grupo B, es el 48% el que tiene este sentimiento, reduciendo un 14% el número de alumnos que comenzaban la materia con un sentimiento negativo y en los que se ha revertido ese efecto.

Los resultados de esta primera intervención sugieren que se adopte este nuevo enfoque en futuras ediciones de la materia. Se incorporarán mejoras y se perfeccionarán las situaciones didácticas.

Referencias

Alonso Ferreiro, A., Mociño González, I., Riobóo Lois, B., Zabalza Cerdeiriña, A. (2024) *El desafío del aprendizaje cooperativo en la Universidad*. Narcea.

Alsina, Á. (2021). ¿Cómo definir una línea metodológica en el área de Matemáticas? Tomando decisiones en la escuela. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 4(2), 21-39. https://journals.uco.es/mes/article/view/13299

Boaler, J. (2016). Mathematical mindsets: unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. *Jossey-Bass Wiley*

Brousseau G. (1998): Théorie des Situations Didactiques, *La Pensée Sauvage*, Grenoble, Francia.

Chávez-Ruiz, Y. (2025). Metodologías activas para la enseñanza: Una experiencia en la formación docente. Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes, 1(1), 31–48. https://doi.org/10.24844/REMED/0101.02

Cortés Ramos, A. (2024). Metodologías activas en Educación Superior. (p. 183-199) *Metodologías emergentes en Educación Superior. Castilla Mesa, M. T. (coord.)* Octaedro. https://octaedro.com/libro/metodologias-emergentes-en-educacion-superior/

European Parliament, Directorate-General for Parliamentary Research Services and Dinan, D. (2019). The European Council in 2018 – Overview of decisions and discussions. https://data.europa.eu/doi/10.2861/708543

De-la-Peña, C., Fernádez-Cézar, R. y Solano-Pinto, N. (2021) Attitude Toward Mathematics of Future Teachers: How Important Are Creativity and Cognitive Flexibility? *Front. Psychol.* 12:713941. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.713941

Domino, J. (2009). Teachers' Influences on Students' Attitudes Toward Mathematics. *Research and Teaching in Developmental Education*, 26(1), 32–54. New York College Learning Skills Association http://www.jstor.org/stable/42802340

Fernández Cézar, R. y Aguirre Pérez, C. (2010). Actitudes iniciales hacia las matemáticas de los alumnos de grado de magisterio de Educación Primaria: Estudio de una situación en el EEES. Unión - *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 6(23). https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/999

Ferrando, I., y Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (17), 84–97. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.306

Gamboa Araya, R., y Moreira-Mora, T. E. (2016). Un modelo explicativo de las creencias y actitudes hacia las Matemáticas: Un análisis basado en modelos de ecuaciones estructurales. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (10), 27–51. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.155

González-Vázquez, M., Iglesias-Álvarez, A. y Loureiro-Ga, M. (2024). 1-2-4. Alonso Ferreiro (Ed.), En *El desafío del aprendizaje cooperativo en la universidad* (pp. 69-80). Narcea

Gómez-Chacón, I. M. y Marbán, J.M. (2019). Afecto y conocimiento profesional docente en matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 397-416). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Gutiérrez-Rodríguez, I. y Loureiro-Ga, M. (2025). *Ansiedad hacia la Enseñanza de las Matemáticas en futuros docentes: análisis exploratorio en Galicia*. En revisión.

Iglesias-Muñiz, J.C., González-García, L. F. y Fernández-Río J. (coords.). (2017). *Aprendizaje cooperativo. Teoría y práctica en las diferentes áreas y materias del curriculum*. Madrid. Ediciones Pirámide

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* Washington DC. National Academy Press.

Marbán, J. M., Palacios, A., y Maroto, A. (2020). Desarrollo del domino afectivo matemático en la formación inicial de maestros de primaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (18), 73–86. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.286

Mata, M. L., Monteiro, V. y Peixoto F. (2012) Attitudes towards Mathematics: Effects of Individual, Motivational, and Social Support Factors. *Child Development Research*, vol. 2012. https://doi.org/10.1155/2012/876028

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes Checa, A. (2020). Actitud hacia las matemáticas en el Grado de Maestro de Primaria. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *23*(2). https://doi.org/10.6018/reifop.348061

Nortes-Martínez-Artero, R., López-Pina, J. A., Núñez-Núñez, R. M. y Nortes-Checa, A. (2022). ¿Tienen ansiedad hacia las matemáticas los futuros maestros? *PNA*, *16*(3), 191-213. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.20948

Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (24), 93–110. https://doi.org/10.35763/aiem24.4418

Sánchez-Mendías, J., Segovia-Alex, I. y Miñán-Espigares, A. (2022). Ansiedad matemática, rendimiento y formación de acceso en futuros maestros. *PNA*, *16*(2),115-140. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.21703

Star, J. R., Tuomela, D., Joglar-Prieto, N. et al. (2022). Exploring students' procedural flexibility in three countries. *International Journal of STEM Education*, *9*, 4. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00322-y

PERCEPCIÓN DOCENTE SOBRE CUESTIONES DE GÉNERO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN LA PROVINCIA DE CASTELLÓN

Teachers' Perception of Gender aspects in Mathematics Education in Early Childhood and Primary Schools: An Exploratory Study in the Province of Castellón

Madrid, M.J.[a], Agramunt, I.[b], Santágueda-Villanueva, M.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universitat Jaume I de Castelló

Resumen

En los últimos años nuestra sociedad es cada vez más consciente de la importancia de abordar la igualdad de género en las aulas de todas las etapas educativas y en todas las asignaturas, incluyendo las matemáticas. Este trabajo pone el foco en las creencias y percepciones de docentes sobre diversos temas relativos a género y educación matemática, desde su formación, hasta sus creencias personales, tanto sobre el alumnado como sobre la enseñanza. Para ello se ha llevado a cabo un estudio piloto exploratorio con profesorado en activo de matemáticas de educación infantil y primaria de la provincia de Castellón utilizando un cuestionario diseñado ad hoc para conocer más información sobre esta temática. Los resultados muestran el interés y la preocupación del profesorado por el tema, remarcan la importancia de la formación en cuestiones de género y la necesidad de fomentar la inclusión en la enseñanza y en los recursos educativos.

Palabras clave: educación matemática, género, mujeres matemáticas, docentes.

Abstract

In recent years, our society has become increasingly aware of the importance of addressing gender equality in classrooms at all educational stages and across all subjects, including mathematics. This study focuses on the beliefs and perceptions of teachers regarding various gender and mathematics education-related issues, ranging from their training to their personal beliefs about both students and teaching. To this end, an exploratory pilot study was conducted with active mathematics teachers in early childhood and primary education in the province of Castellón, using an ad hoc questionnaire designed to gather more information on this topic. The results highlight teachers' interest and concern regarding the issue, emphasize the importance of training in gender and mathematics topics, and underscore the need to promote inclusion in teaching and educational resources.

Keywords: *mathematics education, gender, women mathematicians, teachers.*

INTRODUCCIÓN

Autoras como Macho (2024) y Bayer (2004) señalan que las mujeres han estado presentes en la creación matemática a lo largo de la historia. A pesar de las barreras de acceso a la formación en matemáticas que muchas mujeres enfrentaron, sus logros en esta disciplina son significativos, aunque sus contribuciones han sido históricamente invisibilizadas.

Figueiras et al. (1998) sugieren que el conocimiento de las mujeres matemáticas y sus logros puede servir como un valioso referente para el alumnado. Proponen que la inclusión de estas mujeres en el aula puede fomentar el interés y la autoestima de las estudiantes en áreas tradicionalmente dominadas

Madrid, M. J., Agramunt, I. y Santágueda-Villanueva, M. (2025). Percepción docente sobre cuestiones de género en la enseñanza de las matemáticas en educación infantil y primaria: un estudio exploratorio en la provincia de Castellón. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

por hombres. También De Almeida Freitas y Godinho Pereira (2017) argumentan que una mayor visibilidad de las científicas contribuiría a incrementar el interés de las alumnas por las carreras científicas, ampliando su horizonte profesional. Gamboa Araya (2012) resalta la importancia de implementar estrategias que promuevan la equidad en el aprendizaje de las matemáticas, garantizando igualdad de oportunidades para hombres y mujeres en carreras tradicionalmente asociadas a un género u otro.

La legislación española respalda este enfoque. El Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, establece entre los principios pedagógicos fundamentales para garantizar una educación inclusiva y equitativa la promoción de la igualdad entre hombres y mujeres. En cuanto a los objetivos de la Educación Primaria, el Real Decreto subraya la importancia de conocer, comprender y respetar las diferentes culturas y las diferencias entre las personas, fomentando la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres. En el contexto del área de matemáticas, este decreto enfatiza la importancia de dar a conocer al alumnado las contribuciones de mujeres y hombres en la historia de las matemáticas, resaltando su impacto en la evolución de la disciplina. Esta inclusión no solo busca mejorar la comprensión matemática, sino también promover una visión más equilibrada y equitativa del papel de ambos géneros en el desarrollo científico. También en el ámbito internacional, el quinto Objetivo de Desarrollo Sostenible (ODS) promovido por Naciones Unidas en 2015 aboga por la Igualdad de Género como un derecho humano fundamental, destacando su impacto socioeconómico (Naciones Unidas, 2015).

En los últimos años diversos estudios han examinado las relaciones entre género y enseñanza de las matemáticas desde diferentes perspectivas. Entre ellas se ha considerado la inclusión de mujeres en recursos educativos como los libros de texto de matemáticas, Guichot-Reina y De la Torre-Sierra (2023) destacan la falta de representación femenina en los libros de texto de Matemáticas de Educación Primaria, por otro lado, Sánchez-Compaña et al. (2022) presentan que los libros de texto de matemáticas en secundaria refuerzan estereotipos de género al no visibilizar referentes femeninos ni usar un lenguaje e imágenes inclusivos. Se destaca por tanto la importancia de considerar el material curricular para promover una educación matemática más equitativa.

Asimismo, se han implementado estudios que valoran desde una perspectiva de género las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza en futuro profesorado chileno (Ruz, et al., 2023). Algunos trabajos han buscado caracterizar el perfil de ingreso a los grados en maestro considerando la relación entre el bachillerato de acceso y el género (Lasa, et al., 2021).

En cuanto a la formación universitaria de maestros, investigaciones de Madrid et al. (2021) y Casas-Rosal et al. (2021) revelan que, si bien el personal docente ha intentado adaptar el lenguaje a las directrices de igualdad, la perspectiva de género solo se integra ocasionalmente en los programas educativos, especialmente en lo que respecta a las matemáticas. Sin embargo, las referencias a mujeres matemáticas son evidentes en las guías docentes, proporcionando ejemplos valiosos para el futuro profesorado.

En el trabajo de Santágueda-Villanueva y Madrid (en prensa) el alumnado de 2.º grado de Maestro/a en Educación Primaria consideró que integrar la mujer en la ciencia en el aula es una oportunidad educativa clave, proponiendo actividades como proyectos, charlas y materiales diversos para visibilizar sus contribuciones. Aunque algunos ya conocían a mujeres científicas, otros destacan la necesidad de realizar esfuerzos educativos continuos para aumentar su visibilidad en todos los niveles educativos y promover una educación equitativa y completa. Por otro lado, Ursini y Ramírez (2017) destacan a partir de entrevistas realizadas a profesorado de primaria y secundaria y estudiantes de secundaria mexicanos, la importancia de plantear estrategias que promuevan la equidad de género en la enseñanza de las matemáticas para superar los estereotipos de género. A su vez, Leder (2019) revisa la evolución de la investigación sobre género en la educación matemática. Destacando la necesidad de un compromiso continuo con la equidad en contextos educativos.

Este estudio tiene como objetivo general analizar las percepciones del profesorado de Educación Infantil y Primaria de la provincia de Castellón en relación a la cuestión de género en el ámbito de las matemáticas, atendiendo a diversas dimensiones como la formación recibida, la inclusión de referentes femeninos y las actitudes hacia la equidad en contextos educativos. De forma específica, se pretende: (1) examinar las creencias personales, la formación recibida y el grado de conocimiento del profesorado sobre las contribuciones históricas de mujeres matemáticas y su integración en la enseñanza; (2) identificar las creencias del profesorado respecto al rendimiento, interés, actitudes y participación del alumnado en matemáticas, con base en cuestiones de género; y (3) conocer la opinión del profesorado sobre la adecuación del currículo y los materiales y recursos educativos para abordar la perspectiva de género en el aula de matemáticas.

METODOLOGÍA

Se ha llevado a cabo un estudio descriptivo y exploratorio (Fox, 1981), que analiza la percepción de los docentes de educación infantil y primaria sobre la influencia del género en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El instrumento utilizado fue un cuestionario diseñado en Google Forms. Este fue creado ad hoc ya que partiendo de un análisis de la literatura previa se decidió diseñarlo para cubrir los objetivos del trabajo. La elección de las categorías se creó para dar respuesta a los tres objetivos específicos, así la categoría 1 responde al objetivo 1, la categoría 2 sobre el O2 y categoría 3 cubre el O3. Fue validado por un panel de expertos en Didáctica de la Matemática, manteniéndose todas las preguntas propuestas inicialmente.

Se utilizó un muestreo intencional, y la única condición para participar en el estudio era ser docente en activo de matemáticas en Educación Infantil o Primaria. El cuestionario fue enviado al correo corporativo de todos los centros públicos de la provincia de Castellón en el mes de febrero de 2025 y el equipo directivo fue el encargado de difundirlo entre su claustro. Los cuestionarios se diseñaron para garantizar el anonimato de los participantes y su participación fue voluntaria. El análisis descriptivo se ha realizado con JAMOVI (2024).

La primera parte del cuestionario está destinada a recabar datos sociodemográficos, tales como edad, género, formación universitaria, autoevaluación de su competencia matemática, etc. A continuación, el cuestionario consta de 20 preguntas incluidas en tres categorías. La primera de ellas (cat. 1) centrada en las creencias personales y la formación de los participantes sobre género y educación matemática, el papel de las mujeres matemáticas en la historia, etc. La segunda (cat. 2) se centra en las creencias sobre alumnado y género en torno a distintas cuestiones como la confianza en sus habilidades matemáticas, las actitudes, etc. La tercera (cat. 3) se enfoca en la perspectiva de género en la enseñanza, el currículo y los materiales y recursos.

En las preguntas se estableció una escala tipo Likert, en la que se pedía, en una escala de 1 a 5, donde 1 significaba “Totalmente en desacuerdo” y 5 “Completamente de acuerdo”, que manifestasen su grado de acuerdo o de desacuerdo con las afirmaciones incluidas posteriormente. En la tabla 1 pueden verse las categorías y las preguntas realizadas.

El cuestionario fue respondido por un total de 30 docentes de centros de educación infantil y primaria (CEIP), de los cuales el 26.7% se identificó con el género masculino y el resto femenino. La edad media de los participantes fue de 46 años, con un rango comprendido entre los 27 y los 60 años. Estos docentes imparten clases de matemáticas desde la etapa de educación infantil hasta sexto de educación primaria. Preguntados por la autovaloración de sus competencias en matemáticas, la mayoría percibe su nivel como alto o muy alto, representando en conjunto el 56.7% de los encuestados. La categoría "Alto" fue la más frecuente (46.7%), seguida de "Medio" (36.7%), mientras que solo un 6.7% consideró que su nivel era bajo.

RESULTADOS

Las respuestas al cuestionario se encuentran en la tabla 1, donde presentamos la media y la desviación típica general y a su vez separando por hombres y mujeres para las preguntas clasificadas en las distintas categorías.

Tabla 10

Media (M) y Desviación Típica (DT)

		General		*Hombres (H)*		*Mujeres (M)*	
		M	*DT*	*M*	*DT*	*M*	*DT*
Cat. 1	1.1. Las matemáticas han sido históricamente un campo dominado por los hombres.	3,47	0,96	3,25	0,97	3,55	0,94
	1.2. Como futuro/a docente o docente en activo, me gustaría fomentar o fomento la participación de mujeres y niñas en las matemáticas y en áreas STEAM.	4,40	0,80	4,50	0,50	4,36	0,88
	1.3. Durante mi formación, he aprendido o aprendí sobre el papel de las mujeres en la historia de las matemáticas.	2,37	1,02	3,00	1,00	2,14	0,92
	1.4. En mi formación como docente se incorporó o se ha incorporado la perspectiva de género en las matemáticas	2,93	1,18	2,88	1,27	2,95	1,15
	1.5. Actualmente las matemáticas son un campo dominado por los hombres.	2,77	1,05	2,88	1,17	2,73	1,01
	1.6. No me siento preparado/a para incluir en mi aula la perspectiva de género en las disciplinas STEAM.	2,23	0,99	2,25	0,83	2,23	1,04
Cat. 2	2.1. El género influye en el rendimiento del alumnado en matemáticas.	1,80	0,79	1,75	0,97	1,82	0,72
	2.2. Niñas y mujeres tienen menos confianza en sus habilidades matemáticas que niños y hombres.	2,60	1,11	2,13	0,78	2,77	1,17
	2.3. El estereotipo de que las carreras científicas son 'más para chicos' sigue influyendo en las decisiones del alumnado.	2,60	1,02	2,38	0,70	2,68	1,10
	2.4. Es importante promover vocaciones científicas y tecnológicas tanto en niños como en niñas	4,80	0,40	4,88	0,33	4,77	0,42
	2.5. Niñas y mujeres tienen menos interés en las STEAM que niños y hombres.	2,40	0,88	2,63	0,99	2,32	0,82
	2.6. Niñas y mujeres tienen menor ansiedad hacia las matemáticas que niños y hombres.	2,60	0,55	2,38	0,48	2,68	0,55
Cat. 3	3.1. La enseñanza de las matemáticas en las distintas etapas educativas debe incluir referencias a mujeres matemáticas a lo largo de la historia.	4,57	0,56	4,63	0,48	4,55	0,58
	3.2. Los recursos educativos actuales fomentan de manera suficiente la igualdad de género en las áreas STEAM.	3,57	0,88	3,63	0,86	3,55	0,89
	3.3. Incluir la historia de las mujeres matemáticas en el aula puede ayudar a fomentar vocaciones STEAM en el alumnado.	4,23	0,99	4,25	0,66	4,23	1,08
	3.4. Es relevante enseñar al futuro alumnado sobre mujeres matemáticas destacadas.	4,43	0,67	4,25	0,66	4,50	0,66
	3.5. El desconocimiento sobre mujeres matemáticas se debe a la falta de visibilidad en los materiales y recursos educativos.	3,67	1,04	3,63	0,86	3,68	1,10
	3.6. El currículo actual de matemáticas en Educación primaria y secundaria incorpora suficiente perspectiva de género.	3,07	0,93	3,50	0,87	2,91	0,90
	3.7. Es importante incluir la perspectiva de género en la enseñanza en áreas STEAM.	4,10	0,91	4,13	0,78	4,09	0,95
	3.8. El profesorado tiene un papel clave en despertar el interés del alumnado por el ámbito STEAM.	4,47	0,81	4,63	0,48	4,41	0,89

A partir de los datos presentados en la Tabla 1, se ha realizado un análisis de creencias y percepciones del profesorado en ejercicio en torno a la perspectiva de género en matemáticas. La información se organiza en las tres categorías temáticas previamente mencionadas.

Categoría 1: Creencias personales y formación docente

Los resultados muestran que, en la afirmación "Las matemáticas han sido históricamente un campo dominado por los hombres" (ítem 1.1), las mujeres puntúan más alto que los hombres, lo cual sugiere una mayor conciencia por parte de las docentes respecto a la desigualdad histórica de género en esta disciplina. Esta tendencia sin embargo cambia en el ítem 1.5, relativo a la situación actual mostrando en general menor acuerdo con esta afirmación.

Respecto a la formación, los ítems 1.3 y 1.4 reflejan puntuaciones medias o bajas en ambos géneros, lo que evidencia una percepción generalizada de media o escasa inclusión de la perspectiva de género en la formación docente. Sin embargo, son las mujeres quienes reportan menor exposición a contenidos relacionados con el papel de las mujeres en matemáticas frente a los hombres. Esta diferencia resulta relevante y puede interpretarse como una brecha de sensibilización durante la formación.

En contraposición, tanto hombres como mujeres manifiestan una alta disposición a fomentar la participación femenina en STEAM (ítem 1.2), con medias superiores a 4,30. Además, el ítem 1.6 indica que el profesorado no se considera especialmente impedido para aplicar la perspectiva de género en el aula.

Categoría 2: Creencias sobre el alumnado

Los datos de esta categoría revelan un rechazo mayoritario a los estereotipos de género en el rendimiento e interés del alumnado hacia las matemáticas y las ciencias. En el ítem 2.1, relativo a la influencia del género en el rendimiento, se observan puntuaciones muy bajas tanto en hombres como en mujeres, lo que refleja un alto nivel de desacuerdo con esta creencia. Asimismo, en los ítems 2.2, 2.3, 2.5 y 2.6, las medias se sitúan en torno al desacuerdo o la neutralidad, lo que indica cierta ambivalencia respecto a las diferencias de confianza e interés entre géneros.

Un hallazgo destacable es el elevado consenso en el ítem 2.4 sobre la importancia de promover vocaciones científicas tanto en niñas como en niños, con puntuaciones cercanas a la máxima. Este resultado es coherente con la motivación expresada en la categoría anterior y se visualiza de forma clara en la figura 1 mediante la predominancia del color correspondiente al nivel 5.

Categoría 3: Inclusión de la perspectiva de género en la enseñanza

Los resultados de esta categoría reflejan una actitud muy positiva hacia la inclusión activa de mujeres matemáticas en los contenidos educativos. Los ítems 3.1, 3.3, 3.4 y 3.7 presentan medias superiores a 4 en ambos géneros, lo que confirma un fuerte respaldo a visibilizar referentes femeninos como estrategia para fomentar vocaciones STEAM. También el papel del profesorado es altamente valorado en su potencial para generar vocaciones científicas (ítem 3.8), con medias superiores a 4.40, lo que refuerza la idea de que los y las docentes se reconocen como agentes clave en la transformación educativa en términos de igualdad.

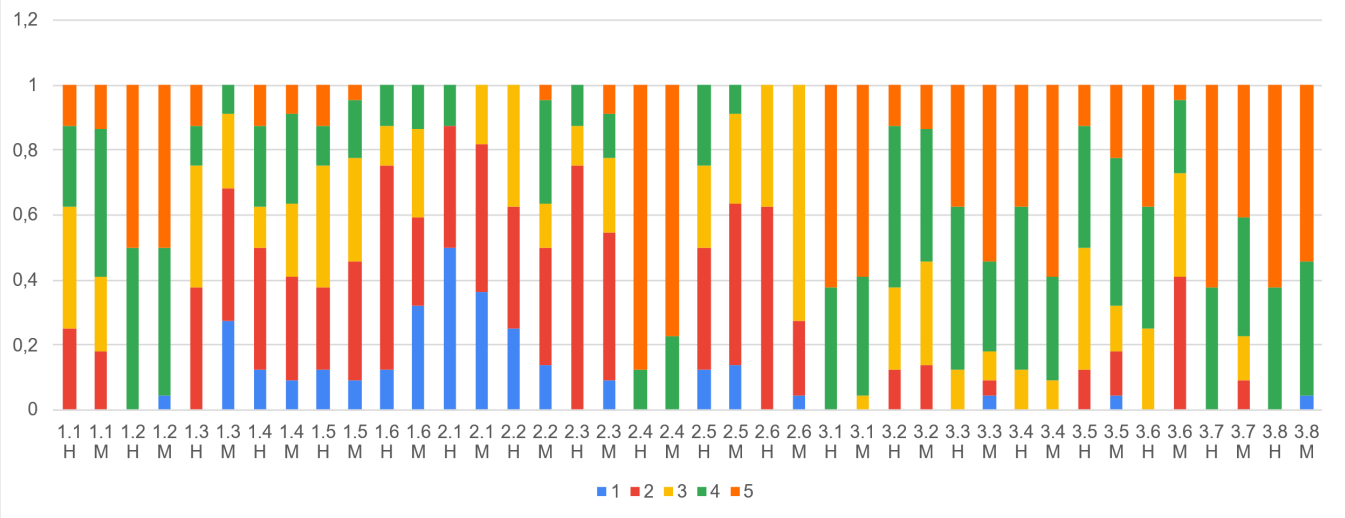
Sin embargo, en los ítems 3.2 y 3.5, las opiniones están más divididas respecto a si los recursos educativos actuales fomentan adecuadamente la igualdad de género. Las puntuaciones son moderadas y la distribución gráfica de respuestas sugiere cierta heterogeneidad. Más significativa es la diferencia observada en el ítem 3.6 sobre el currículo oficial, donde los hombres muestran una media más alta frente a las mujeres, indicando una percepción más crítica por parte del profesorado femenino.

En la figura 1 presentamos los porcentajes de las respuestas también separándolo por hombres y mujeres codificando el número de pregunta según su categoría. Esta complementa estos hallazgos

mostrando la distribución de las respuestas mediante un diagrama de barras apiladas por cada ítem y género. Se observa una tendencia general hacia niveles altos de acuerdo (4 y 5) en ítems relacionados con la motivación personal, el reconocimiento del papel docente y la importancia de visibilizar a las mujeres matemáticas. En contraste, los ítems sobre formación inicial o percepción de estereotipos muestran mayor dispersión, especialmente entre las mujeres, lo que puede interpretarse como una mayor conciencia crítica o autoexigencia respecto a estos temas.

Figura 1

Distribución de frecuencias por ítem y género



CONCLUSIONES

El presente estudio piloto analiza las percepciones del profesorado de Educación Infantil y Primaria en la provincia de Castellón respecto a la relación entre género y enseñanza de las matemáticas. En líneas generales, los resultados evidencian una conciencia moderada sobre la brecha de género histórica en esta disciplina, aunque también reflejan una percepción de avance hacia una mayor equidad en la actualidad. Esta interpretación concuerda con estudios como los de Macho (2024) y Bayer (2004), que destacan la relevancia de visibilizar el papel de las mujeres matemáticas en el pasado, mostrando que su legado sigue siendo necesario para entender el presente.

El estudio muestra la consideración de insuficiente formación docente en torno a la perspectiva de género y la historia de las mujeres matemáticas, aspecto que también ha sido señalado en investigaciones previas (Santágueda-Villanueva y Madrid, en prensa). Esta carencia formativa contrasta con el alto nivel de interés que manifiestan los docentes por fomentar la igualdad de género en el aula, en sintonía con las directrices del Real Decreto 157/2022, que subraya la necesidad de incorporar esta perspectiva en el currículo.

En cuanto a las percepciones sobre el alumnado, la mayoría del profesorado no cree que el género influya en el rendimiento matemático. No hay consenso respecto a si las niñas tienen menos confianza o interés en las áreas STEAM, y se muestra desacuerdo con la afirmación de que niñas y mujeres presentan menor ansiedad hacia las matemáticas, un resultado que coincide con lo observado por Pérez-Tyteca et al. (2013). Asimismo, el profesorado no percibe que el estereotipo de que las ciencias son “más para chicos” siga influyendo de forma determinante en las decisiones académicas del alumnado.

Respecto a la práctica docente, los resultados muestran una valoración muy positiva sobre la necesidad de incluir referentes femeninos en la enseñanza de las matemáticas, una postura respaldada

tanto por el Real Decreto 157/2022 (p. 24486) como por investigaciones como las de De Almeida Freitas y Godinho Pereira (2017) o Figueiras et al. (1998). No hay consenso entre el profesorado sobre si considera que los recursos actuales fomentan la igualdad de género en matemáticas y se plantean posiciones intermedias sobre la falta de visibilidad de las mujeres en los materiales y recursos educativos, lo que refuerza la necesidad de revisar críticamente los materiales educativos y potenciar la formación del profesorado en clave de género, tal como proponen Macho et al. (2020).

Existe un consenso casi unánime en la importancia de fomentar vocaciones STEAM en niñas y niños por igual, así como en la relevancia de promover la igualdad de género en el aula. Sin embargo, los datos también revelan que el currículo de matemáticas en Educación Primaria aún es percibido como deficiente en cuanto a la incorporación de una perspectiva de género. Pese a que el marco legal vigente (RD 157/2022, p. 24486) reconoce esta necesidad, los resultados sugieren una brecha entre la normativa y su aplicación efectiva en el aula, lo que hace imprescindible desarrollar materiales, recursos y metodologías que integren esta dimensión de manera transversal. Esta necesidad se manifiesta también en estudios como Ursini y Ramírez (2017) y Leder (2019).

En conclusión, los resultados obtenidos reflejan una actitud favorable del profesorado hacia la equidad de género en la enseñanza de las matemáticas, pero también identifican ámbitos prioritarios de mejora, especialmente en lo que respecta a la formación inicial y continua del profesorado y a la revisión curricular.

Futuros estudios deberían ampliar la muestra intentando llegar a la misma proporción de hombres y mujeres encuestados y explorar posibles diferencias entre niveles educativos y entre profesorado en formación y en ejercicio. Esto permitirá construir una visión más amplia y representativa del contexto educativo actual. En definitiva, es necesario seguir impulsando políticas educativas y estrategias pedagógicas que favorezcan una educación matemática verdaderamente inclusiva y equitativa, contribuyendo así a reducir las brechas de género persistentes en este ámbito.

Agradecimientos

Los autores agradecen la colaboración de los docentes participante en este estudio.

Este estudio ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación: UJI-A2022-01 y el proyecto de innovación UJI-55076/25.

Referencias

Bayer, P. (2004). Mujeres y Matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *7*(1), 55-71.

Casas-Rosal, J. C., Madrid-Martín, M. J., Jiménez-Fanjul, N. N. y León-Mantero, C. M. (2021). Formación matemática en el Grado de Educación Infantil: Un análisis de las guías docentes desde la perspectiva de género. En C. Soria y M. A. Martín (Coords.), *Cuestiones transversales en la innovación de la docencia y la investigación de las ciencias sociales y jurídicas: especial referencia al impacto del covid-19, las nuevas tecnologías y metodologías, las perspectivas de género y la diversidad* (pp. 1691-1708). Dykinson.

de Almeida-Freitas, M. y Godinho-Pereira, E. (2017). A inexpressiva representação feminina nas academias científicas brasileiras e no prêmio Nobel. *Ex aequo*, *36*, 189-202.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti. N. (1998). *Género y Matemáticas*. Síntesis.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Universidad de Navarra.

Gamboa-Araya, R. (2012). ¿Equidad de género en la enseñanza de las Matemáticas? *Revista Electrónica Educare*, *16*(1), 63-78.

Guichot-Reina, V. y De la Torre-Sierra, A. M. (2023). The Representation of Gender Stereotypes in Spanish Mathematics Textbooks for Elementary Education. *Sexuality & Culture*, *27*, 1481–1503. https://doi.org/10.1007/s12119-023-10075-1

Lasa, A., Belletich, O., Elorza, J., Iribas, H. y Wilhelmi, M. R. (2021). Caracterización del perfil de ingreso a los grados en maestro: relación entre bachillerato científico y género. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 351-358). SEIEM.

Leder, G.C. (2019). Gender and Mathematics Education: An Overview. En G. Kaiser, y N. Presmeg (Eds.) *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_13

Macho, M., Padrón-Fernández, E., Calaza-Díaz, L., Casanellas-Rius, M., Conde-Amboage, M., Lorenzo-García, E. y Vázquez-Abal, M. E. (2020). Igualdad de género en el ámbito de las matemáticas. En D. Martín, (Coord.), *Libro blanco de las matemáticas* (pp. 375-420). Real Sociedad Matemática Española.

Macho, M. (2024). *El papel de las mujeres en las matemáticas*. Santillana.

Madrid-Martín, M. J., Casas-Rosal, J. C., Gutiérrez-Rubio, D. y Jiménez-Fanjul, N. N. (2021). La perspectiva de género en la formación matemática del profesorado de educación infantil de Castilla-la Mancha. En A. Arias y A. Rebollo (Coords.), *Hacia una docencia sensible al género en la educación superior*, 103-129. Dykinson.

Naciones Unidas (2015). *Igualdad de género*. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/education/

Pérez-Tyteca, P., Monje-Parrilla, J. y Castro-Martínez, E. (2013). Afecto y matemáticas: Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (4), 65–82. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i4.55

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE, 52, de 2 de marzo de 2022, 24386-24504.

RSME. (2020). *Mujeres y matemáticas: Coeducación en las etapas no universitarias*. RSME. https://www.rsme.es/2020/09/mujeres-y-matematicas-coeducacion-en-las-etapas-no-universitarias/

Ruz, F., Berciano-Alcaraz, A., Martínez-Ortiz, F. y Contreras García, J. M. (2023). Perspectiva de género en actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza en futuro profesorado chileno, *Revista Educação e Pesquisa*, *49*, e254527, 1-23. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349254527es

Sánchez-Compaña, M. T., Sánchez-Cruzado, C., Macías-García, J. A., Duarte-Tosso, I., Arnal-Palacián, M., Moral-Sánchez, S., Raya-Fernádez. A. y Jurado-Ropero, L. (2022). Análisis de libros de texto de matemáticas desde una perspectiva de género. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 629). SEIEM.

Ursini, S. y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. *Revista Colombiana de Educación*, *73*, 213-234.

Santágueda-Villanueva, M. y Madrid, M. J. (En prensa). La inclusión de mujeres matemáticas relevantes en el aula. Una experiencia con futuro profesorado de educación primaria. *Revista ex æquo*.

ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ALUMNADO DE PRIMARIA Y SU RELACIÓN CON AUTOPERCEPCIÓN Y GUSTO POR LAS MATEMÁTICAS: UNA APROXIMACIÓN FISIOLÓGICA

Mathematics anxiety, self-perception and enjoyment of mathematics in primary school students: a physiological approach

Marbán, J. M.[a], Fernández-Cézar, R.[b] y Martín-Colomo, I.[a]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

Los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no pueden ser comprendidos sin tener en cuenta las interacciones cognición-afecto. En particular, ciertos elementos de entre los que conforman el conocido como dominio afectivo matemático pueden llegar a suponer una auténtica barrera para el aprendizaje cuando estos exhiben estados negativos. Este tipo de problemas empiezan a manifestarse ya en edades muy tempranas, por lo que es preciso comprender sus causas y su propia etiología para evitarlos, paliarlos o suprimirlos. Este trabajo focaliza su atención en las relaciones entre autopercepción matemática, gusto por las matemáticas y ansiedad matemática en alumnado de tercer curso de Primaria (8-9 años), realizando una aproximación a esta última de carácter fisiológico. Los resultados muestran que autopercepción matemática y gusto por las matemáticas correlacionan negativamente, de forma moderadamente intensa y de manera significativa con la ansiedad matemática.

Palabras clave: ansiedad matemática, autopercepción matemática, dominio afectivo matemático, educación primaria, gusto por las matemáticas.

Abstract

The mathematics teaching-learning processes cannot be understood without considering cognition-affect interactions. Certain elements among those that make up what is known as the affective domain in mathematics might represent a real barrier to learning when they exhibit negative states. These types of problems begin to manifest themselves at a very early age, so it is necessary to understand their causes and their etiology to avoid, alleviate or suppress them. This work focuses its attention on the relationships between mathematical self-perception, enjoyment of mathematics and mathematical anxiety in students in the third year of primary school (8-9 yr), making a physiological approach to the latter. The results show that mathematical self-perception and enjoyment of mathematics correlate negatively, moderately intensely and significantly with math anxiety.

Keywords: *affective domain in mathematics, enjoyment of mathematics, math anxiety, primary education, mathematical self-perception*

INTRODUCCIÓN

La sociedad actual debe enfrentar desafíos globales que han suscitado una enorme preocupación en grandes organismos internacionales como la ONU, la UNESCO, la UE o la OCDE, habiendo identificado como una necesidad prioritaria para abordar tales desafíos y seguir creciendo como sociedad el desarrollo sólido de la que ha venido a denominarse competencia humana, la cual se ha operativizado en cierta medida a través de competencias clave, entre las que encontramos la competencia matemática. En particular, la Comisión Europea, en su documento con recomendaciones relativas a las competencias clave para el aprendizaje permanente (Comisión Europea, 2018), señala

Marbán, J. M., Fernández-Cézar, R. y Martín-Colomo, I. (2025). Ansiedad matemática en alumnado de primaria y su relación con autopercepción y gusto por las matemáticas: Una aproximación fisiológica**.** En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

la importancia de atender su desarrollo ya desde la infancia. Por su parte, la investigación en Educación Matemática señala que es crucial lo que ocurre en el alumnado en estas etapas iniciales en relación con la competencia matemática, hasta el punto de predecir, en muchos casos, el rendimiento en matemáticas en etapas superiores de manera muy precisa (Devlin et al., 2022).

Esta preocupación ha llevado a algunos de los organismos mencionados, como la OCDE, o a otros asociados, como la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) a diseñar herramientas que faciliten un diagnóstico periódico de la "salud" del sistema educativo en relación con la competencia matemática, entre otras, en diferentes momentos relevantes para su desarrollo como son la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria. Esto ha dado lugar a los conocidos informes PISA (promovidos por la OCDE) y TIMSS (impulsado por la IEA). Las fotos de situación que proporcionan ambos informes han ido incorporando tanto en su objetivo como en su marco interpretativo elementos afectivos, destacando en sus dos últimas ediciones que el autoconcepto matemático parece estar detrás de la preocupante brecha de género en matemáticas en Primaria (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2024) o cómo la ansiedad matemática correlaciona de forma negativa y significativa con el rendimiento en matemáticas medido en PISA (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2023), que centra su trabajo en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. Esta preocupación por lo afectivo se ha trasladado también al ámbito legislativo y, no en vano, ocupa en la LOMLOE un lugar destacado en los apartados dedicados a la ordenación de las enseñanzas, estableciendo el sentido socioafectivo como uno de los elementos nucleares de la competencia matemática (Real Decreto 157/2022; Real Decreto 217/2022).

Por supuesto, este reconocimiento de la importancia de los afectos en matemáticas en las edades más tempranas se apoya en numerosas evidencias procedentes de la investigación en Educación Matemática. De hecho, siendo cada vez más frecuentes los estudios dedicados al análisis de elementos propios del dominio afectivo matemático como las creencias, las actitudes y las emociones del alumnado en estas edades, son también cada vez más los que llaman la atención sobre un deterioro progresivo del dominio afectivo en el área de matemáticas. Así, en particular, pese a que las actitudes hacia las matemáticas parecen ser generalmente positivas en el alumnado de Educación Primaria, estas se van resintiendo a lo largo de esta etapa, pudiendo apreciarse actitudes más negativas hacia las matemáticas al inicio de la Educación Secundaria (Mata et al., 2012; Mazana et al., 2019), a lo que se añade la presencia cada vez mayor de emociones con valencia negativa como la ansiedad matemática, detectable ya durante la Educación Primaria (Mitchell y George, 2022). Así, parece necesario seguir avanzando en la comprensión de las relaciones que se establecen entre las diferentes subdimensiones del dominio afectivo y de estas con elementos ajenos a este como el propio rendimiento matemático de cara a identificar las causas que dan origen a problemas en este campo. A partir de ese diagnóstico se podrán diseñar propuestas e intervenciones educativas que ayuden a prevenir o paliar, si no suprimir por completo, el problema (Ortega, 2023).

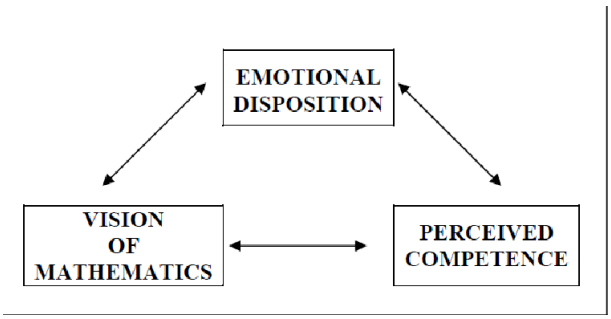
Basándonos en lo expresado previamente, el objetivo de este trabajo se dirige a identificar relaciones entre autopercepción matemática, gusto por las matemáticas y percepción de utilidad hacia las matemáticas, por un lado, y ansiedad matemática, por otro en edades tempranas. Entre los elementos novedosos de la investigación están la edad de los participantes y la forma en la que se mide la ansiedad. Así, por un lado, en la literatura científica se observa cómo los estudios empíricos en el ámbito del dominio afectivo son escasos en alumnado por debajo de cuarto curso (Vukovick et al., 2013). Por otra parte, la ansiedad en edades tempranas se ha medido generalmente a partir de escalas, pero no a través de los síntomas fisiológicos que se le asocian, algo que permite objetivar en cierta medida las respuestas de los participantes y simplificar también su propia comprensión de los ítems. Esto, a su vez, permite abordar la ansiedad matemática, un constructo multidimensional (Tobal y Cano Vindel, 1986), desde sus manifestaciones medibles a través de marcadores biométricos, en consonancia con los últimos avances en este campo apoyados en la neurociencia (García-Monge et al., 2023).

MARCO TEÓRICO

El presente estudio contempla, en primer lugar, la visión dada por McLeod (1992) en su trabajo seminal sobre dominio afectivo matemático al describirlo como "una amalgama amplia de creencias, sentimientos y estados de ánimo que generalmente se considera que van más allá del dominio de la cognición" (p. 576). Partiendo de esta idea, consideramos el dominio afectivo como un constructo complejo y multidimensional en forma de espectro en cuya descomposición encontramos diferentes elementos, desde aquellos de naturaleza más estable que se fusionan con lo cognitivo, como las creencias, hasta aquellos más volátiles y de carácter más afectivo, como las emociones. A su vez, coincidimos con quienes afirman que dichos elementos no se encuentran aislados unos de otros, sino que resultan importantes las relaciones que mantienen entre sí, siendo destacable el estrecho vínculo presente entre creencias, emociones y actitudes. Si a esto se suma que todos ellos se relacionan con el rendimiento del alumnado en esta área (Du et al., 2021; Zhang et al., 2019), resulta atractivo tratar de abordar esta temática de forma global. Por este motivo, el marco teórico que orienta esta investigación no es otro que el del modelo tridimensional de Di Martino -o TMA por sus siglas en inglés- (Di Martino y Zan, 2010), basado en un enfoque más general de la Psicología según el cual las actitudes se manifiestan a través de respuestas cognitivas (y aquí encuentran acomodo las creencias como la autopercepción matemática), afectivas (situando aquí la parte más emocional y, en particular, donde ubicaremos nosotros la ansiedad matemática) y, finalmente, conductuales.

Figura 14

Modelo TMA (Di Martino y Zan, 2010)



Por otra parte, en este trabajo entendemos la ansiedad matemática del alumnado como una emoción definida en términos de "un sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere con la manipulación de los números y la resolución de problemas matemáticos en [...] la vida cotidiana y las situaciones académicas" (Richardson y Suinn, 1972, como se citó en Dowker et al., 2016, p. 2). Respecto a esta, sus efectos sobre el bienestar del alumnado son considerables, pues no solo se relaciona de forma negativa con el rendimiento, sino que también lo hace con otras variables afectivas como el autoconcepto y, además, exhibe comportamientos muy diferentes en función del género, afectando más a las mujeres (Luttenberger et al., 2018; Van Mier et al., 2019). Además, la ansiedad matemática, como ya se ha mencionado, constituye un constructo complejo, de carácter multidimensional en términos de precisar una caracterización que dé cuenta de diferentes situaciones o contextos -ante los exámenes, ante su aprendizaje o ante la realización de tareas numéricas en la vida diaria, entre otros- conjuntamente con su sintomatología, siendo esta de carácter comportamental, como el abandono o la evitación de tareas, cognitiva, como la interferencia en la memoria de trabajo, emocional, como el nerviosismo, la preocupación o la incomodidad, y fisiológica, como la sudoración o la tensión muscular (Henschel y Roick, 2018). Esta consideración multidimensional es la que daremos a la ansiedad matemática en este trabajo, centrando nuestra atención únicamente en el contexto de aprendizaje de las matemáticas en relación con los síntomas fisiológicos.

DISEÑO METODOLÓGICO

Este estudio presenta un enfoque cuantitativo que se apoya en un diseño no experimental bivariado, de carácter fundamentalmente correlacional y de alcance meramente descriptivo y exploratorio.

Contexto y participantes

Se recurrió a una muestra incidental conformada por el alumnado de 4 clases de 3º de Educación Primaria de un mismo centro educativo, quedando distribuida internamente en función del género en 38 chicos y 54 chicas. Los datos se tomaron en la semana final del primer trimestre.

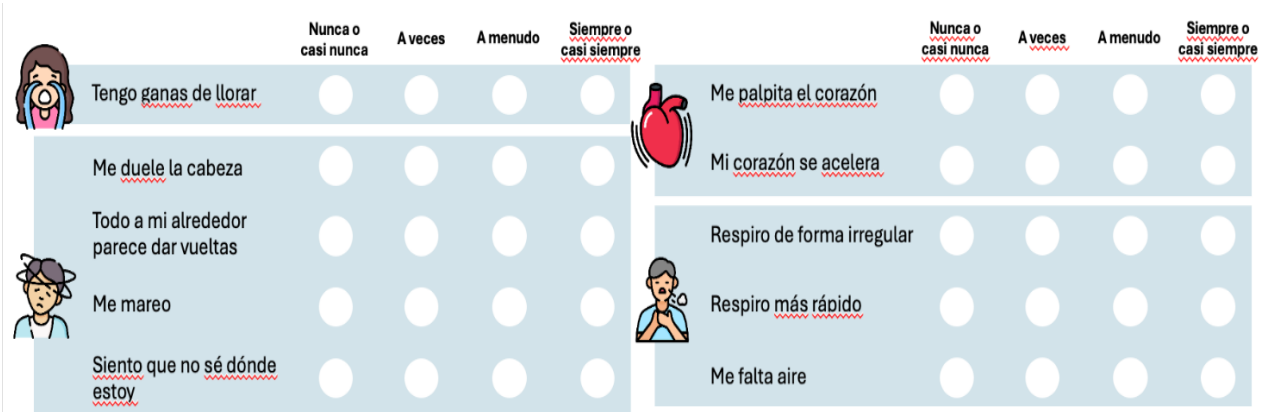
Instrumentos de toma de datos

En coherencia con el marco teórico se recurrió a la medición de las tres componentes de la actitud hacia las matemáticas del modelo TMA a través de la adaptación al español de la escala MAM (Marbán y Maroto, 2021). La escala MAM puede ser empleada en su modelo de dos o de tres factores. En nuestro caso hemos optado por el modelo de 3 factores presente ya en su versión original en inglés (Adelson y McCoach, 2011), siendo estos la autopercepción matemática (en adelante Ap), el gusto por las matemáticas (en adelante G) y la percepción de utilidad de las matemáticas (en adelante U). En los tres casos, cuanto mayor es el valor de la variable, mejor es la visión global de las matemáticas.

Junto con la escala MAM se utilizó una escala Likert de 4 puntos de síntomas fisiológicos de la ansiedad matemática (en adelante SF) compuesta por 21 ítems que recogen como respuesta la frecuencia con la que se manifiestan los diferentes síntomas que tradicionalmente se observan en presencia de ansiedad (en la Figura 2 se muestra un extracto de la escala). Al final de la escala hay una pregunta abierta en la que los participantes pueden detallar en qué contextos o situaciones particulares se manifiestan los síntomas señalados. Los valores otorgados a cada síntoma (de 0 a 4 en función de su frecuencia) se suman para proporcionar un valor global de sintomatología asociada a la ansiedad matemática.

Figura 2

Escala de síntomas fisiológicos de la ansiedad matemática



Fuente: Elaboración propia

Análisis de datos

En los resultados se aportan los estadísticos descriptivos de todas las variables consideradas tanto para la muestra total como separada por sexos. A su vez, se ha comprobado la normalidad con la prueba de Kolmogorov-Smirnof con corrección de Lilliefors tanto para la muestra total como para las submuestras de chicos y chicas. Las variables dependientes son autopercepción (Ap), gusto por las matemáticas (G), percepción de utilidad de las matemáticas (U) y ansiedad hacia las matemáticas (SF). De cada una de ellas se aportan los estadísticos descriptivos tanto para la muestra total como separada por sexos. A su vez, se ha comprobado la normalidad con la prueba de Kolmogorov-Smirnof

con corrección de Lilliefors (K-S) tanto para la muestra total como para las submuestras de chicos y chicas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se muestran en primer lugar los estadísticos descriptivos para las variables de la escala MAM, así como para la escala de ansiedad matemática, tanto para la muestra total (N=92) como para chicos (N=38) y chicas (N=54) por separado.

Tabla 1

Media (M), desviación típica (DT), y valores máximo y mínimo.

Variable		*M*	*DT*	*Mín*	*Máx*
Autopercepción matemática	Chico	*22.66*	*8.10*	*0*	*32*
	Chica	*21.35*	*7.24*	*5*	*32*
	Total	*21.89*	*7.59*	*0*	*32*
Gusto por las matemáticas	Chico	*28.08*	*11.90*	*0*	*40*
	Chica	*26.35*	*10.18*	*0*	*40*
	Total	*27.07*	*10.90*	*0*	*40*
Percepción de utilidad de las matemáticas	Chico	*25.97*	*7.91*	*3*	*36*
	Chica	*27.61*	*5.17*	*16*	*36*
	Total	*26.93*	*6.45*	*3*	*36*
Ansiedad hacia las matemáticas	Chico	*11.42*	*12.60*	*0*	*53*
	Chica	*8.93*	*6.44*	*0*	*29*
	Total	*9.96*	*9.50*	*0*	*53*

Fuente: Elaboración propia

Los valores medios son altos en las tres primeras variables, tanto en la muestra total como en chicos y chicas. El valor de la ansiedad matemática es moderado en la muestra total y superior en el caso de los chicos. Las cuatro variables en la muestra total exhiben un comportamiento no normal (pAp=.032, pG<.001, pU=.005 y pSF<.001) según la prueba K-S. Por tanto, la relación bivariada entre las tres de la escala MAM y la ansiedad se analiza mediante el coeficiente de correlación de Spearmann, cuyos valores se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2

Correlaciones de Spearmann para las variables autopercepción matemática (Ap), gusto por las matemáticas (G) y percepción de utilidad de las matemáticas (U) con la variable ansiedad hacia las matemáticas (SF)

Correlación de Spearmann	*Ap (1)*	*G (2)*	*U (3)*
SF	-.335**(p=.001)	-.268**(p=.010)	-.253*(p=.015)

** significativa en el nivel .01 (bilateral); * significativa en el nivel .05 (bilateral) *Fuente: Elaboración propia*

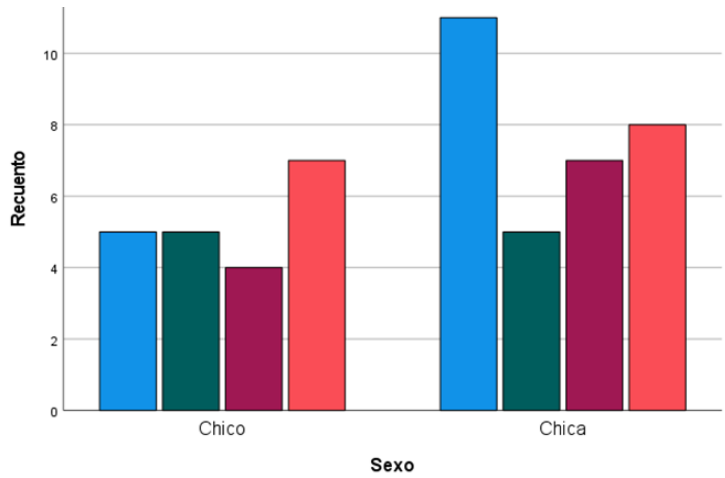
Todas las variables correlacionan, de manera significativa, con los síntomas fisiológicos de ansiedad negativamente y de forma moderadamente intensa. Esto era en cierto modo esperable, ya que tanto la autopercepción matemática como el gusto por las matemáticas y la percepción de utilidad de las matemáticas suponen una visión positiva de estas siendo que, cuanto más positiva, mayor es el valor de la variable. Sin embargo, en el caso del nivel fisiológico de ansiedad, cuanto mayor es este, generalmente conlleva una visión más negativa de las matemáticas, porque estas se perciben como causa de mareos, vómitos, etc., manifestaciones fisiológicas todas ellas de la ansiedad. No se encontraron, sin embargo, diferencias significativas entre sexos en ninguna de las cuatro variables analizadas. Esto se puede afirmar tras los correspondientes contrastes de hipótesis recurriendo a test paramétricos (t-student) en el caso de la autopercepción matemática y de la percepción de utilidad de

las matemáticas, y a la prueba no paramétrica U-Mann Whitney en los otros dos casos. Sin embargo, más allá de la inferencia estadística, y teniendo en cuenta que el tamaño de la muestra no es muy grande, menos aún al segregarla por sexos, los gráficos de distribución de cada variable analizada para chicos y chicas (no se incluyen por limitaciones de espacio) sí permiten apreciar en un nivel meramente descriptivo diferencias notables en la distribución de los valores.

La ansiedad hacia las matemáticas medida desde la aproximación fisiológica empleada no muestra, como tampoco lo hacían las otras tres variables, diferencias significativas por sexo. Sin embargo, podría considerarse que, de los 21 ítems de la escala utilizada, bastaría con que uno de ellos fuera marcado con las opciones "a menudo" o "siempre o casi siempre", para considerarse que hay presencia de ansiedad matemática intensa, aunque el valor total de la variable sea bajo ya que, fisiológicamente, una persona puede sentir ansiedad sin manifestar todos los síntomas que se recogen (Tobal y Cano Vindel, 1986). Es más, no se contrarrestan síntomas entre sí, y uno solo experimentado muy frecuentemente sirve para indicar que se siente ansiedad. Por ello, se procedió a recodificar la variable SF en función del número de veces que cada participante marcara alguna de esas dos opciones frecuenciales. De esta forma, si se experimenta algún síntoma una sola vez a menudo, o siempre o casi siempre, se asigna al participante un nivel de ansiedad baja (1); si experimenta un síntoma en cada una de esas dos opciones, o ninguno siempre o casi siempre, pero de 2 a 3 ítems a menudo, se le considera un participante con ansiedad media-baja (2); si señala 2 síntomas con frecuencia de aparición siempre o casi siempre, y entre 0 y 2 síntomas como presentes a menudo, o ningún síntoma en siempre o casi siempre, pero 4 en a menudo, se le considera con ansiedad media-alta (3); y, finalmente, cuando señala 3 síntomas o más en siempre o casi siempre, solo más de 4 en a menudo, o 5 o más síntomas entre las dos opciones, se le considera con ansiedad alta (4). Con esta categorización la distribución para chicos y chicas queda como se ve en la Figura 3, donde se aprecia que una mayor presencia relativa de chicas en el nivel de ansiedad baja, pero también en los niveles de ansiedad media-alta y alta.

Figura 3

Distribución de frecuencias (recuento) en los cuatro niveles de ansiedad en chicos y chicas



Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones a las que conduce este trabajo están íntimamente relacionadas con el objetivo, ya que se han podido identificar relaciones entre las variables analizadas relevantes para el propósito del estudio. Las limitaciones del estudio, por su parte, provienen de su carácter meramente exploratorio y, sobre todo, del diseño muestral, obteniéndose los datos de una muestra por conveniencia, en un único contexto escolar y con un tamaño moderado. En todo caso, sí se observan

aspectos que procede destacar, todos ellos relevantes por apuntar a potenciales barreras afectivas para el aprendizaje de las matemáticas. En primer lugar, se constata la presencia de perfiles de alumnado que, a pesar de su corta edad, quedan caracterizados por un dominio afectivo que comienza a mostrar síntomas negativos en términos de baja autopercepción matemática, escaso gusto por las matemáticas o ansiedad matemática en determinadas situaciones. Esto es especialmente preocupante si tenemos en cuenta el elevado consenso que existe en relación con la degradación del dominio afectivo a medida que se avanza en las diferentes etapas del periodo escolar (Mata et al., 2017). En segundo lugar, si bien no se aprecian diferencias significativas entre sexos, sí se ha observado en el estudio cómo tanto los valores de centralización como la forma de su distribución en autopercepción, gusto por las matemáticas y ansiedad matemática apuntan comportamientos diferentes en función del sexo, algo que puede acabar consolidándose si no se analiza y atiende cuidadosamente, como ya se constata en numerosas investigaciones (Ghasemi y Burley, 2019). Finalmente, se establece una relación muy clara, fuertemente significativa y negativa entre la ansiedad matemática, por un lado, y la autopercepción y el gusto por las matemáticas, por otro, mostrando que parecen covariar conjuntamente y en sentidos opuestos. Consideramos en este sentido profundizar en esta relación y en su potencial impacto en rendimiento matemático desde un enfoque multivariable, por ejemplo a través de modelos de ecuaciones estructurales, para comprender mejor el rol que cada una juega y si esta relación guarda alguna similitud con la descubierta en otros estudios con otros tipos de población como, por ejemplo, con el profesorado en formación inicial (Marbán et al., 2022).

Agradecimientos

La publicación es parte de la actuación PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Adelson, J. L. y McCoach, D. B. (2011). Development and psychometric properties of the Math and Me Survey: measuring third through sixth graders' attitudes toward mathematics. *Measurement and Evaluation in Counseling and Development, 44*(4), 225-247. https://doi.org/10.1177/0748175611418522

Comisión Europea (2018). *Recomendación del Consejo de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente (Texto pertinente a efectos del EEE)*. Diario Oficial de la Unión Europea, Bruselas, C189, p. 1-13, 4 jun. 2018.

Devlin, B. L., Jordan, N. C. y Klein, A. (2022). Predicting mathematics achievement from subdomains of early number competence: Differences by grade and achievement level. *Journal of experimental child psychology*, *217*, 105354. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2021.105354

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 27-48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Dowker, A., Sarkar, A. y Looi, C. Y. (2016). Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? *Frontiers in Psychology, 7*, 1-16. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

Du, C., Qin, K., Wang, Y. y Xin, T. (2021). Mathematics interest, anxiety, self-efficacy and achievement: Examining reciprocal relations. *Learning and Individual Differences, 91*, 102060. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102060

García-Monge, A., Marbán, J. M., Rodríguez-Navarro, H. y Escudero, A. (2023). Actividad cerebral como respuesta a diferentes tipos de tareas aritméticas. En *Investigación en Educación Matemática XXVI: Logroño, 6, 7 y 8 de septiembre de 2023* (pp. 339-346). SEIEM.

Ghasemi, E. y Burley, H. (2019). Gender, affect, and math: a cross-national meta-analysis of Trends in International Mathematics and Science Study 2015 outcomes. *Large-scale Assessments in Education*, *7*(1), 1-25.

Henschel, S. y Roick, T. (2018). The Multidimensional Structure of Math Anxiety Revisited. *Incorporating Psychological Dimensions and Setting Factors, 36*(1). https://doi.org/10.1027/1015-5759/a000477

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Ministerio de Educación y Formación Profesional. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2022.html

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2024). TIMSS 2023. *Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe español.* Ministerio de Educación y Formación Profesional. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2023.html

Luttenberger, S., Wimmer, S. y Paechter, M. (2018). Spotlight on math anxiety. *Psychology Research and Behavior Management, 11*, 311–322. https://doi.org/10.2147/PRBM.S141421

Marbán, J. M. y Maroto, A. (2022). *Adaptación al español de la escala Maths and Me*. [Documento inédito]

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2021). Enjoyment of teaching mathematics among pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(3), 613-629. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00341-y

Mata, L., Monteiro, V. y Peixoto, F. (2012). Attitudes towards mathematics: Effects of individual, motivational, and social support factors. *Child Development Research, 2012*. https://doi.org/10.1155/2012/876028

Mata, L., Peixoto, F., Monteiro, V. y Sanches, C. (2017). Emoções face à matemática e progressão na escolaridade – Estudo longitudinal com alunos do 5º e do 7º anos de escolaridade [Emotions regarding mathematics and progression in schooling - Longitudinal study with 5th and 7th grade students]. *Análise Psicológica, 35*(2), 125–144. https://doi.org/10.14417/ap.1227

Mazana, M. Y., Montero, C. S. y Casmir, R. O. (2019). Investigating students' attitude towards learningmathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 207-231. https://doi.org/10.29333/iejme/3997

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 575-596. Macmillan Publishing Co, Inc.

Mitchell, L. y George, L. (2022). Exploring mathematics anxiety among primary school students: Prevalence, mathematics performance and gender. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(3), em0692. https://doi.org/10.29333/iejme/12073

Ortega, P. J. (2023). Factores Asociados al Rendimiento en Matemáticas de Estudiantes Españoles en Educación Primaria. *REICE: Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *21*(3), 175-191. https://doi.org/10.15366/reice2023.21.3.010

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. (Boletín Oficial del Estado núm. 52, de 2 de marzo de 2022).

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (Boletín Oficial del Estado núm. 76, de 30 de marzo de 2022).

Van Mier, H. I., Schleepen, T. M. J. y Van den Berg, F. C. G. (2019). Gender differences regarding the impact of math anxiety on arithmetic performance in second and fourth graders. *Frontiers in Psychology, 9*, 2690. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02690

Vukovic, R. K., Kieffer, M. J., Bailey, S. P. y Harari, R. R. (2013). Mathematics anxiety in young children: Concurrent and longitudinal associations with mathematical performance. *Contemporary Educational Psychology, 38*(1), 1-10. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.09.001

Zhang, J., Zhao, N. y Kong, Q. P. (2019). The relationship between math anxiety and math performance: A meta-analytic investigation. *Frontiers in Psychology, 10*, 1613. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01613

INTRODUCCIÓN AL LOGARITMO COMO MEDIDA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

Introduction to logarithms as counting the number of digits

Martín-Barcala, A., González-Astudillo, M. T., Molina, M.

Universidad de Salamanca

Resumen

Tradicionalmente, el logaritmo se introduce como la inversa de la exponencial, lo que puede generar dificultades. Presentamos una sesión sobre el logaritmo como medida de las cifras de un número, con estudiantes de cuarto de ESO, aportando evidencia empírica sobre su efectividad. El análisis, basado en el marco teórico-metodológico Abstracción en Contexto, identificó las acciones epistémicas durante las actividades. Los resultados muestran que este modelo básico facilita la comprensión y funcionamiento de la escala logarítmica, aunque los estudiantes lo asimilan más como una propiedad del logaritmo que como una definición central.

Palabras clave: concepto, logaritmo, AiC, modelos básicos

Abstract

Traditionally, logarithms are introduced as the inverse of exponentials, which can create difficulties. This study presents a session where students construct the concept of a logarithm as a measure of a number's digits, providing empirical evidence of its effectiveness. The analysis, based on the Abstraction in Context framework, identified epistemic actions during the activities. The results show that this approach enhances the understanding of the logarithmic scale, though students tend to perceive it more as a property of logarithms rather than a core definition.

Keywords: *concept, logarithm, AiC, basic models*

INTRODUCCIÓN

El logaritmo, creado para simplificar cálculos astronómicos, fue vinculado con la exponenciación por Euler en 1765, lo que facilitó su operatividad. Esta definición prevalece en la educación secundaria y se puede encontrar en muchos de los libros de texto actuales (Martín Barcala et al., en prensa).

Pese a su importancia, muchos estudiantes lo consideran difícil de entender y a menudo no logran su comprensión (DePierro et al., 2008) mostrando errores comunes en su manejo, desde confusiones con conocimientos previos hasta mal uso de sus propiedades (Aziz et al., 2017; Hoon et al., 2010).

La definición de logaritmo como inversa de la exponencial puede contribuir a estas dificultades, llevando a un aprendizaje memorístico (Weber, 2016). Para mitigar esto, se han propuesto enfoques alternativos. Panagiotou (2011) sugiere una aproximación histórica para mostrar que los logaritmos no son arbitrarios, sino respuestas a problemas concretos, mientras que Weber (2016) aboga por un enfoque basado en múltiples interpretaciones conceptuales. Sin embargo, la propuesta de este último se hace a nivel teórico y es necesario contrastar con evidencias empíricas sus afirmaciones.

Según el currículo vigente de Matemáticas de Castilla y León, el logaritmo se introduce por primera vez en 4º de Educación Secundaria, con alumnos de 15-16 años. En este contexto, buscando profundizar en las vías de aprendizaje del logaritmo en su primer contacto educativo, se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué acciones epistémicas tienen lugar en el proceso de construcción del concepto de logaritmo a partir del modelo básico como medida de las

Martín-Barcala, A., González-Astudillo, M. T., Molina, M. (2025). Aprendizaje del concepto de logaritmo como medida de las cifras de un número. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

cifras de un número? Para ello, se plantea como objetivo identificar dichas acciones epistémicas en una sesión diseñada para alumnos de 4º de Educación Secundaria.

MARCO TEÓRICO

Este estudio se basa en dos conceptos clave: los Modelos Básicos (Weber, 2016) y la Abstracción en Contexto (Hershkowitz et al., 2001). Los Modelos Básicos nos permiten favorecer la comprensión del logaritmo al adaptarse a los conocimientos y la experiencia previa de los estudiantes, lo que facilita su accesibilidad. A partir de estos modelos, se han diseñado tareas que promueven la construcción del concepto. Por otro lado, la Abstracción en Contexto permite examinar cómo los alumnos desarrollan y estructuran su comprensión del logaritmo a lo largo del proceso de aprendizaje.

Modelo básico como medida del número de cifras de un número

Vom Hofe y Blum (2016) describen los "modelos básicos" como representaciones mentales viables y robustas que permiten captar conceptos y procedimientos matemáticos tal como están representados en el ámbito mental. Este constructo, también denominado "ideas básicas" o "imágenes individuales" (Vom Hofe, 1998), describe interpretaciones estándar de conceptos matemáticos. No obstante, Vom Hofe (1998) destaca una visión empírica basada en cómo los estudiantes comprenden y aplican estos conceptos, identificando tres aspectos clave: vincular el significado del concepto con experiencias previas, generar una representación mental operativa e identificar su aplicación en contextos reales mediante estructuras matemáticas.

Al no haberse descrito previamente, en la literatura al respecto, modelos básicos para el logaritmo, Weber (2016) identifica cuatro conceptualizaciones entre las que, para los propósitos de esta comunicación, destacamos la siguiente:

> (BM2) El logaritmo (decimal) de un número b indica el número de dígitos de b, menos uno.

Para Weber (2016), el potencial de este modelo básico radica en la posibilidad de responder ciertas preguntas sobre el número de dígitos y el orden de magnitud con la ayuda de los logaritmos.

Por otro lado, este modelo trata los logaritmos como números y los sitúan en un contexto familiar. Los estudiantes están familiarizados con este contexto desde sus primeras clases de matemáticas, ya que el conteo y la notación posicional se abordan y practican extensamente en la educación primaria (Weber, 2016). Este modelo constituye una conceptualización operacional y no estructural (Sfard, 1991) pues se centra en una aplicación de los logaritmos y no en sus propiedades matemáticas.

Abstracción en Contexto

Según Schwarz et al. (2009), la abstracción se entiende como una reorganización vertical de conocimientos previos que da lugar a un nuevo constructo. El modelo teórico de Abstracción en Contexto permite analizar cómo se desarrolla un nuevo concepto a través del estudio de las interacciones de los estudiantes (Butuner e Ipek, 2023). Este proceso se compone de tres fases: la identificación de la necesidad de un nuevo constructo, su surgimiento y su posterior consolidación mediante su aplicación en distintos contextos (Valongo y Felgueiras, 2022).

Este modelo también distingue tres acciones epistémicas (Hershkowitz et al., 2001): R-acciones (Recognizing), B-acciones (Building-with) y C-acciones (Constructing). Las R-acciones ocurren cuando los estudiantes identifican estructuras que han utilizado anteriormente en otras situaciones y son capaces de adaptarlas, a nivel estructural, a la situación actual según lo necesitan. Las B-acciones implican la utilización de estas estructuras en combinaciones diferentes y apropiadas para responder a una pregunta o avanzar hacia un objetivo determinado, mientras que las C-acciones se producen al integrar constructos previos y producir un nuevo constructo por matematización vertical. Estas últimas representan el primer uso o mención del nuevo constructo y, generalmente, incluyen R-acciones y B-acciones, formando un proceso anidado (Schwarz et al., 2009).

METODOLOGÍA

El presente estudio forma parte de un experimento de enseñanza de naturaleza cualitativa en el marco del paradigma de las investigaciones de diseño (Collins et al., 2004). Este experimento consta de cuatro sesiones y tiene como objeto de investigación el aprendizaje del concepto de logaritmo a través de una enseñanza basada en los cuatro modelos básicos propuestos por Weber. En particular, aquí se analiza la primera parte de la segunda sesión del experimento, en su segundo ciclo de implementación (Molina et al., 2011), que se ciñe al uso de la interpretación conceptual del logaritmo como el número de cifras (el "orden de magnitud") de un número en la base correspondiente.

Diseño e implementación de la sesión de trabajo en el aula

La sesión constó de once cuestiones o tareas diseñadas con el propósito de generar en los estudiantes la necesidad de construir nuevos conocimientos y facilitar la transición del pensamiento informal al formal. Estas tareas guiaban progresivamente a los alumnos hacia la comprensión del logaritmo como una medida de la cantidad de cifras de un número. Para ello, se buscó que los ejercicios estuvieran enmarcados en un contexto conocido para los estudiantes, como el de los terremotos y su magnitud, permitiéndoles abordarlos con los recursos conceptuales que ya poseían.

La propuesta se organizó en dos partes. En la primera, aquí analizada, se promovió la construcción del concepto a través de cuestiones que favorecieran la asociación entre el logaritmo decimal y la cantidad de cifras de su argumento. En la segunda, entregada tras completar la primera, se enfatizaba la formalización del concepto, haciendo explícito el modelo básico, y se practicó el cálculo aproximado de logaritmos decimales a su parte entera. Además, se relacionó el modelo básico con la representación e interpretación de gráficos logarítmicos.

La sesión se llevó a cabo en un aula de 4º de Educación Secundaria con 29 estudiantes que en la sesión anterior habían trabajado con una actividad introductoria enmarcada en el mismo estudio, donde se les presentó el logaritmo como una sucesión de divisiones (Martín Barcala et al., en prensa). Los alumnos se organizaron en siete grupos de 4 o 5 integrantes, colaborando durante los 50 minutos de la clase de matemáticas. El docente-investigador, a cargo de la sesión, supervisó el desarrollo de la actividad y proporcionó orientación cuando fue necesario para asegurar la comprensión de los enunciados y de las instrucciones de la tarea.

El trabajo en equipos se fundamentó en una visión sociocultural del aprendizaje. La interacción entre los estudiantes les permitió construir conocimientos de manera conjunta y expresar sus ideas, lo que fomentó explicaciones colectivas que difícilmente habrían surgido de forma individual (Cobb, 1995).

Análisis de los datos

Para el análisis de los datos se utilizaron las respuestas escritas de los grupos a las actividades planteadas, las notas de campo registradas durante la experimentación y las videograbaciones de las discusiones en los equipos, que fueron posteriormente transcritas. Además, se complementó la información mediante la observación de los videos, prestando especial atención al lenguaje corporal y a las acciones realizadas en momentos de silencio o cuando la calidad del audio era deficiente. Esto resultó útil en situaciones como la superposición de conversaciones dentro del grupo o la consulta por parte del grupo de resultados anteriores dentro de la misma tarea.

Para este estudio, se seleccionó uno de los grupos de estudiantes atendiendo a la calidad y la coherencia, tanto del discurso como de las grabaciones, de manera que se facilitara la descripción del proceso por el que se llega a operativizar este modelo básico del logaritmo.

El análisis se llevó a cabo mediante el software MAXQDA, tomando como referencia cada una de las actividades de la sesión, estableciendo unidades de análisis a las que se asignaron las acciones epistémicas según el marco teórico AiC. Para garantizar la precisión de esta clasificación, los autores del artículo contrastaron y discutieron conjuntamente la asignación realizada.

RESULTADOS

Se presentan los resultados organizados en tres apartados: contextualización, formación del constructo y aplicación. Los extractos que se incluyen aparecen de manera cronológica según se fueron sucediendo a lo largo de la sesión. Por limitaciones de espacio se han omitido las partes de la transcripción en las que no se hace explícita ninguna acción epistémica. En la descripción se indican mediante corchetes las intervenciones de los alumnos en las que se ve reflejada cada afirmación.

Contextualización e introducción del logaritmo como magnitud de un terremoto.

La primera parte de la tarea (Figura 1) sitúa a los alumnos en un contexto real y les dirige hacia cálculos sencillos donde se producen las primeras R-acciones al reconocer como constructos previos y relevantes la aplicación de fórmulas matemáticas [3], las operaciones en notación científica [2] y la expresión de los resultados en notación decimal [4].

Figura 15

Actividad adaptada de Garfunkel et al. (2002)

El 1 de mayo de 1997 tuvo lugar en California y América Central un terremoto que alcanzó un 7,1 de magnitud en la escala de Richter. Las intensidades registradas por el sismógrafo a lo largo de ese día se recogen en la siguiente tabla:

Hora	6:22 h	9:45 h	11:37 h	16:25 h	20:12 h	22:07 h
Intensidad	$1{,}233\text{x}10^{14}$	$3{,}991\text{x}10^{13}$	$2{,}518\text{x}10^{18}$	$3{,}991\text{x}10^{15}$	$2{,}576\text{x}10^{13}$	$1{,}262\text{x}10^{14}$

El instrumento utilizado para detectar estos movimientos se llama sismógrafo, y el temblor más pequeño que puede detectar tiene una intensidad $I_0 = 2{,}0 \cdot 10^{11}$. Dado el amplio rango de valores posibles y con el propósito original de separar el gran número de terremotos pequeños de los menos frecuentes terremotos mayores observados en California en su tiempo, el geólogo Charles Richter creó la ahora conocida como "*escala de Richter*", una función logarítmica que se usa para medir la magnitud de los terremotos.

Para ello, primero introdujo el concepto de intensidad relativa, siendo ésta el resultado de dividir la intensidad obtenida entre I_0. Realiza los cálculos y completa la tabla (expresando el resultado en **notación decimal**):

Tabla 1

Hora	6:22 h	9:45 h	11:37 h	16:25 h	20:12 h	22:07 h
Intensidad (I)	$1{,}233\text{x}10^{14}$	$3{,}991\text{x}10^{13}$	$2{,}518\text{x}10^{18}$	$3{,}991\text{x}10^{15}$	$2{,}576\text{x}10^{13}$	$1{,}562\text{x}10^{14}$
Intensidad relativa (I/I_0)	616,5	199'55	$1'259 \cdot 10^7$ 12590000	19.550	128'8	781

1. Marta: "…Realiza los cálculos y completa la tabla expresando el resultado en notación decimal." Vale... Entonces... ¿Cómo se hace esto?
2. Manuel: 300'991... O sea, 3'991 por 10 a la 13, partido 2'0 por 10 elevado a la 11
3. Manuel: Lo dice aquí...qué hay que dividir esto entre esto
4. Marta: 199'55, ¿No?

Además, esto da lugar a una primera B-acción cuando al sorprenderse por haber obtenido un número tan grande, uno de los alumnos cae en la cuenta y reflexiona acerca del orden de magnitud de un número en función del exponente de su expresión en notación científica [8].

5. Manuel: 2'518 por 10 a la 18, entre... 2, 0... ¿No? …12.590.000
6. Marta: ¿Este? ¿El tercero?

7. José y Marta: Imposible
8. Manuel: es qué es a la 18...

Formación del constructo de logaritmo como el "orden de magnitud" de un número.

Más adelante, tras hallar los logaritmos de las intensidades relativas (Figura 2), surge la necesidad de calcular el argumento de un logaritmo sabiendo su valor [9-10], es decir, el "antilogaritmo". Para ello los alumnos realizan una serie de B-acciones [11-17], que originariamente dan lugar a un razonamiento erróneo basado en una visión directamente proporcional de los datos [16].

Figura 2

Cálculo de la magnitud de un terremoto dada su intensidad relativa

Como puedes observar, seguimos obteniendo un rango de valores muy grande y poco manejable. Richter definió la magnitud de un terremoto como el logaritmo decimal (en base 10) de su intensidad relativa. Utiliza la función *log* de la calculadora para completar la siguiente tabla (**redondea a un decimal**):

Tabla 2

Hora	6:22 h	9:45 h	11:37 h	16:25 h	20:12 h	22:07 h
Intensidad (I)	$1{,}233\times10^{14}$	$3{,}991\times10^{13}$	$2{,}518\times10^{18}$	$3{,}991\times10^{15}$	$2{,}576\times10^{13}$	$1{,}562\times10^{14}$
Intensidad relativa (I/I_0)	616,5	199'55	12.590.000	19.550	128'8	781
Magnitud log (I/I_0)	2,8	2'3	7'1	4'3	2'1	2'9

9. Marta: "Vuelve a observar la tabla fijándote en la intensidad relativa de los terremotos de magnitud 2'1, 2'3, 2'8 y 2'9. ¿Entre qué valores de la intensidad relativa se obtendría una magnitud de entre 2 y 3?"
10. Marta: Vale, pues... ¿Cómo lo encontramos?
11. Manuel: A lo mejor hay que poner 2 logaritmo...
12. Marta: ¿Por qué va a ...?
13. Manuel: Logaritmo por 2
14. Marta: ¿Por qué vamos a tener que poner 2 logaritmo?
15. Manuel: 2 logaritmo... Logaritmo 2... 0'3
16. Marta: A ver... Vamos a pensar... A ver... Eh... Vale, si tenemos el logaritmo, que antes no lo teníamos…ay, pues mira... Podemos hacer cuánta diferencia entre 2'1 y 2'3... Y ver... Y ponerla aquí... O sea... Me refiero, ¿Cuánta ma...? ¿Cuánta diferencia hay entre cada uno? Pero es que aquí, de repente...

Finalmente, una alumna, siguiendo esta visión lineal de los datos, utiliza la calculadora para ir probando con diferentes números que le parecen adecuados hasta que observa que el logaritmo (decimal) de 100 es 2 [17]. A partir de ese descubrimiento, rápidamente llega a la conclusión, de que el logaritmo de 1000 es 3 [19], abandonando así la idea de linealidad. Estas afirmaciones son corroboradas por su compañera consolidando el constructo de logaritmo como división sucesiva adquirido con anterioridad [20-21].

17. Rosa: Esto es 100...
18. Marta: ¿Qué?
19. Rosa: Y aquí es 1000... El logaritmo de 100 es 2
20. Marta: Vale, y esto es 1.000... Esto es 1.000 y esto es 100... Vale, pues yo... Vale... Entonces, pues más o menos yo le hecho, pues... Viendo un valor… Un valor mayor que esto, y, es muy

interesante... Ah porque... Ah... Porque si tú divides 1.000 entre... ¿Cómo dijimos ayer que eran los logaritmos? Era dividir un número tantas veces hasta que diese 1...Cuántas veces tienes que multiplicar 1 para que te dé... Por 10, para que te dé... Uy, por favor, qué complicado... Eh... Bueno...

21. Marta: Hemos ido restando el valor, eh, anterior a... O sea, el valor, un valor mayor a su valor menor si con... Siguiente... Y, esa diferencia más o menos se la hemos restado al 2'1 para obtener el 2, y hemos ido viendo que según poníamos 99, pues daba, eh, 1'9.... O sea, daba, eh... 99'1 o algo así... Y hasta que hemos puesto 100, no nos ha dado 2... Y ahora, y lo hemos pensado mejor y claro, logaritmo en base 10... Si tú divides 100 entre... Entre 10 dos veces da 1... Y si tú divides 1.000 entre 10 tres veces da 1... Que es, pues, el razonamiento de como, de los logaritmos...

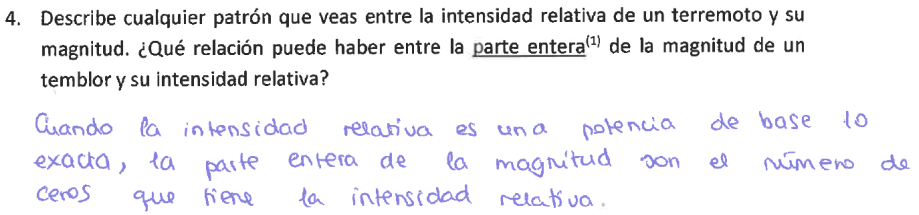
En otra B-acción, reafirman su razonamiento al afirmar que la intensidad relativa (el argumento) de un terremoto de magnitud 4 sería 10.000 y la de 5, 100.000 [22-24].

22. Marta: Pues 4 serán 10.000, ¿No?
23. Rosa: Y entre 4 y 5 entre
24. Manuel y Rosa: Entre 10.000 y 100.000

Finalmente, en la discusión en torno a la actividad 4 (Figura 3) se puede observar con claridad la evolución en el discurso en el que se aprecian dos R-acciones: una al reconocer el constructo de parte entera [26] y otro al identificar las potencias de base 10 [31-34] como objeto de interés en el constructo que están formando. Los alumnos tienen una intuición ("*es como el número de ceros*"), y a lo largo de varias B-acciones [25-30] relacionando la parte entera con las potencias de base 10 son capaces de alcanzar un primer constructo, aún incompleto, para el logaritmo decimal de un número, dando lugar a una primera C-acción [35]. Sin embargo, insisten, solo para "valores exactos" [28-29].

Figura 3

Respuesta a la actividad 4 de la primera parte de la tarea


4. Describe cualquier patrón que veas entre la intensidad relativa de un terremoto y su magnitud. ¿Qué relación puede haber entre la parte entera(1) de la magnitud de un temblor y su intensidad relativa?

Cuando la intensidad relativa es una potencia de base 10 exacta, la parte entera de la magnitud son el número de ceros que tiene la intensidad relativa.

25. Marta: Pues el número de... Es como el número de ceros, ¿No? A ver, Manuel, José... ¿Qué pensáis de esta pregunta? Describe cualquier patrón que veas entre la intensidad relativa y la magnitud
26. Marta: Se refiere como a qué relaciones vemos entre la intensidad relativa... Entre la parte entera, o sea, 2, 3, 4... Y la intensidad relativa. Pues es el número de ceros... O sea, el número de ceros
27. Rosa: Sí, sí... puede ser...
28. Marta: Mira, yo creo... A ver... ¿Qué pensáis de esta... De este razonamiento? Que cuando la intensidad relativa
29. Marta: Da un valor exacto de... De un...
30. Marta: Esta cantidad exacta es el mismo... O sea, 2 aquí es 100
31. Marta: Cuando la intensidad relativa es un... Es un número de base 10, ¿No? Se dice, o un... ¿Una potencia de...?
32. Manuel: Múltiplo
33. Marta: De base un...
34. Manuel: Una potencia de base 10

35. Marta: Una potencia de base 10... 10... Exacta, coma... La parte entera... Entera de la…De la magnitud... Eh... Son... El número de ceros que tiene la intensidad relativa.

Aplicación y consolidación del constructo formado

Este constructo se consolida minutos después en una B-acción [42-45] cuando los alumnos utilizan el constructo definido en el que identifican el número de ceros de la intensidad relativa con la parte entera de la magnitud.

36. Marta: "¿Cuantas veces mayor es la intensidad de un terremoto de magnitud 4'3 respecto al de uno de magnitud de 2'3? Busca los datos necesarios en las tablas de la página anterior." Vale…
37. Manuel: La de 2'3 es 199
38. Marta: 2'3 es 199'55
39. Marta: Pues el de 4'3...
40. Rosa: 19.956'5
41. Marta: 100 veces mayor, ¿no?
42. Manuel: Claro, 2 ceros más
43. Marta: Pues eso, 100, ¿No?
44. Manuel: Pues con la teoría de aquí 2 ceros más
45. Marta: Eh... Porque 199'55 por 100 es 19.500...
46. Manuel: Por la teoría esta que has hecho aquí... Porque tiene 2 ceros más, y aquí es 2 números más grande... De 2 a... 2'3 a 4'3

DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

En la construcción del concepto de logaritmo como medida de las cifras de un número intervienen los constructos de potencias de base 10 y parte entera. La transición hacia las B-acciones surge de la necesidad (Valongo y Felgueiras, 2022) de hallar el "antilogaritmo". Además, una vez formado, se consolida al aplicarlo en la resolución de problemas (Valongo y Felgueiras, 2022; Weber, 2016).

Si bien este segundo modelo básico no puede usarse para explicar los logaritmos de manera operacional, como dice Weber (2016), sí podría emplearse para respaldar explicaciones operacionales al describir su efecto sobre los números. Así, esta interpretación conceptual favorece la comprensión de la escala logarítmica y ayuda a resolver cuestiones como la planteada en la actividad 4. Además, identificamos la resistencia inicial de los alumnos a abandonar la idea de linealidad (Martín Barcala et al., en prensa), dificultad que logran superar más adelante con el uso de este modelo.

Asimismo, se observa que, una vez introducido los logaritmos como división sucesiva (Martín Barcala et al., en prensa), los alumnos acuden a esta interpretación conceptual para comprobar y verificar sus hipótesis. Esto sugiere que el modelo basado en la medida de cifras de un número no se percibe como una definición en sí, sino como una propiedad derivada de la anterior. De este modo, deja de ser un modelo básico completamente operacional y, en algunos casos, los alumnos comienzan a tratar el logaritmo como un ente ya creado del que observan sus características, que posteriormente se utilizarán para calcular más logaritmos y estudiar su comportamiento (Weber, 2016).

Por otro lado, esta visión menos operacional hace que los estudiantes dependan inicialmente de la calculadora para obtener logaritmos, lo que puede llevar a concebirlo como un simple botón en el dispositivo (dePierro et al., 2008). Esta es, por tanto, una de las principales limitaciones del estudio.

Finalmente, sería interesante investigar si este modelo básico contribuye a una mejor comprensión del comportamiento y representación de la función logarítmica.

Referencias

Aziz, T. A., Pramudiani, P. y Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *1*(1), 25–40. https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i1.5736

Butuner, N. y Ipek, J. (2023). Examination of the Abstraction Process of Parallelogram by Sixth-Grade Students According to RBC+C Model: A Teaching Experiment. *European Journal of Educational Sciences, 85*(2), 101-125. https://doi.org/10.19044/ejes.v10no2a101

Garfunkel, S., Crisler, N., Froelich, G. W. y Consortium for Mathematics and Its Applications. (2002). *Comap's precalculus: modeling our world* (Preliminary ed.). W.H. Freeman and Company.

Cobb, P. (1995). Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures* (pp. 25–129). Lawrence Erlbaum Associates.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

DePierro, E., Garafalo, F. y Toomey, R. (2008). Helping students make sense of logarithms and logarithmic relationships. *Journal of Chemical Education*, *85*(9), 1226–1228. https://doi.org/10.1021/ED085P1226

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B. y Dreyfus, T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195–222. https://doi.org/10.2307/749673

Martín Barcala, A., González Astudillo, M. T. y Molina, M. (en prensa). Aprendizaje del concepto de logaritmo como división sucesiva. *Avances en Investigación Matemática*.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la Investigación de Diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*, *29*(1), 75–088. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Hoon, T. S., Singh, P. y Ayop, S. K. (2010). Working with Logarithms. *Malaysian Education Dean's Council Journal*, *6*(6), 121-129.

Panagiotou, E. N. (2011). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Sci & Educ*, *20*, 1–35. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9276-5

Schwarz, B. B., Dreyfus, T. y Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. En J. M. Laborde (Ed.), *Intelligent Learning Environments: The Case of Geometry* (pp. 11–41). Routledge.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/bf00302715

Valongo, A. y Felgueiras, M. (2022). Constructing the Continuity Concept. *WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education*, *19*, 109-120. https://doi.org/10.37394/232010.2022.19.11

Vom Hofe, R. (1998). On the Generation of Basic Ideas and Individual Images: Normative, Descriptive and Constructive Aspects. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (Vol. 4, pp. 317–331). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_20

Vom Hofe, R. y Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Weber, C. (2016). Making Logarithms Accessible — Operational and Structural Basic Models for Logarithms. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 69–98. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0104-6

ARGUMENTACIÓN EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL PROFESORADO DE PRIMARIA

Argumentation in the mathematical training of primary school teachers

Milanesio, B., Burgos, M., Tizón-Escamilla, N.

Universidad de Granada

Resumen

Comprender cómo los estudiantes resuelven tareas que ponen en juego procesos matemáticos esenciales como la conjetura, argumentación y demostración resulta crucial en el ámbito de la educación superior. En este trabajo empleamos de manera articulada el modelo de Toulmin y la configuración de prácticas, objetos y procesos del Enfoque Ontosemiótico para analizar, siguiendo un enfoque cualitativo, las estrategias argumentativas que desarrollan estudiantes para maestro cuando deciden y justifican la validez de una desigualdad que involucra las identidades notables. Los resultados muestran dificultades tanto para conjeturar de manera adecuada como para demostrar las conjeturas emergentes, resaltando la necesidad de reforzar el papel de los ejemplos y contraejemplos en la formulación y argumentación de conjeturas, como forma de avanzar en una comprensión profunda de la naturaleza de la demostración.

Palabras clave: *argumentación, demostración, modelo de Toulmin, configuración ontosemiótica.*

Abstract

Understanding how students solve tasks that involve essential mathematical processes such as conjecture, argumentation and proof is crucial in higher education. In this work, we use an articulated approach that integrates Toulmin's model with the configuration of practices, objects, and processes from the Ontosemiotic Approach to analyze, following a qualitative method, the argumentative strategies developed by preservice primary school teachers when deciding and justifying the validity of an inequality involving notable identities. The results show various difficulties both in conjecturing adequately and in proving the emerging conjectures, highlighting the need to reinforce the role of examples and counterexamples in the formulation and argumentation of conjectures as a way of advancing in a deep understanding of the nature of proof.

Keywords: *argumentation, proof, Toulmin's model, ontosemiotic configuration.*

INTRODUCCIÓN

La demostración es fundamental en el quehacer matemático, tanto por lo que aporta para la comprensión y el dominio de las matemáticas, como a su presencia transversal y longitudinal en la disciplina (Mariotti et al., 2018). Aun así, demostrar es una actividad compleja, incluso para estudiantes universitarios (Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019). Los estudiantes no comprenden suficientemente la naturaleza de la demostración, no reconocen qué constituye una demostración o por qué es necesaria (Sommerhoff y Ufer, 2019). Esto motiva la aceptación de cualquier argumento convincente como una demostración válida, y limita la competencia para proveer argumentos lógicamente sólidos que respalden la validez de conjeturas (Stylianides et al., 2017). Estas dificultades justifican la necesidad de considerar en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración una actividad matemática más amplia que incluya la generación o el refinamiento de conjeturas. En este sentido, autores como Mariotti y Pedemonte (2019), defienden que los procesos de demostración son más accesibles cuando los problemas requieren la construcción de una conjetura. Sin embargo

Milanesio, B., Burgos, M. y Tizón-Escamilla, N. (2025). Argumentación en la formación matemática del profesorado de primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

son escasos los estudios que exploran cómo los estudiantes resuelven problemas que involucran ambos procesos, conjeturar y demostrar, en un entorno universitario (Lew y Zazkis, 2019).

Los autores preocupados por investigar las dificultades de los estudiantes con la demostración han recurrido frecuentemente al modelo de Toulmin (2003) (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Recientemente, autores como Markiewicz et al. (2021) o Morales-Ramírez et al. (2021) han empleado las herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, 2024) para caracterizar las prácticas demostrativas. El objetivo de este trabajo es analizar las estrategias empleadas y las dificultades mostradas por estudiantes españoles del grado de educación primaria, cuando deciden y justifican la validez de una desigualdad que implica una identidad notable. Para ello, empleamos de manera articulada ambas herramientas. Por un lado, el modelo de Toulmin permite reconocer la estructura de los argumentos propuestos, y por otro lado, la configuración ontosemiótica posibilita una mirada microscópica, buscando el origen de las dificultades en la propia naturaleza, uso y significado de la estructura matemática implicada.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Elementos del Enfoque Ontosemiótico

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. En estas prácticas intervienen *objetos primarios* entendidos como entidades que pueden ser separadas según su naturaleza y función en situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Además, estos objetos pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de *objetos secundarios*: ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución). Pero, además de por su "estructura" (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su "funcionamiento" (cómo interactúan los objetos). Los objetos matemáticos primarios emergen mediante los respectivos *procesos primarios* de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización y argumentación. A su vez, las dualidades permiten hablar de *procesos secundarios* de materialización-idealización, particularización-generalización, significación-representación, descomposición-unitarización y personalización-institucionalización. Los objetos y procesos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas se relacionan entre sí formando *configuraciones ontosemióticas* que garantizan un análisis microscópico de la actividad matemática (Godino, 2024).

Argumentación, justificación y demostración

Consideramos la *argumentación* como el proceso que lleva a formular afirmaciones matemáticas y proporcionar evidencia para apoyarlas. Engloba acciones como inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos, entre otras (Molina y Samper, 2019). La *justificación* es la "segunda mitad" de la argumentación, "una invitación a explicitar el pensamiento para respaldar una postura (ya sea un resultado, una idea o una elección)" (Staples y Conner, 2022, p.5). Entendemos la *demostración* como un tipo de argumentación (Papadaki et al., 2019) que implica acciones en la búsqueda de una conclusión a favor o en contra de una afirmación matemática. El argumento que surge en una demostración tiene las siguientes características (Stylianides et al., 2017):

- Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y que están disponibles para la comunidad de aula sin más justificación (axiomas, propiedades, teoremas).
- Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual. Por ejemplo, reglas de inferencia lógico-deductivas, construcción de contraejemplos, entre otros.

- Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

El modelo de Toulmin

El *argumento*, como producto de un proceso de argumentación, se compone de tres elementos básicos (Toulmin, 2003): conclusión (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), datos (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y garantía (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, etc.). También se pueden considerar tres elementos auxiliares para describir un argumento (Toulmin, 2003): respaldo (otras certezas que soportan la garantía), calificativo modal (grado de fuerza conferido por la garantía que acompaña a la conclusión) y refutaciones (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular).

Los investigadores han caracterizado las *argumentaciones abductivas* de diferentes maneras. Papadaki et al. (2019) reconocen que la abducción tiene dos funciones diferentes, *explicativa* y *exploratoria*, y que, dependiendo de esta, la estructura argumentativa varía. Siguiendo el modelo de Toulmin, cuando la abducción se emplea para explorar, a partir de la observación de casos particulares (datos) se formula una conjetura (conclusión). La garantía está compuesta por reglas o regularidades que se identifican en los datos (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El flujo de la argumentación es directo, desde los datos hasta la conclusión (Papadaki et al., 2019). Si la abducción se utiliza para explicar, a partir de una conclusión deseada se propone una posible explicación que la justifique a partir de posibles datos, garantía y respaldo (Arce y Conejo, 2019). En este caso, el flujo de la argumentación retrocede hacia los datos que explican la conclusión (Papadaki et al., 2019).

En la *argumentación inductiva* se parte de una regla general y se comprueba sobre ciertos casos particulares para tratar de constatar si dicha regla es verdadera. Los datos corresponden a la regla general, la garantía está respaldada por la verificación de dicha regla mediante casos concretos, de la que se deriva su aceptación como verdadera (conclusión) (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

En la *argumentación deductiva*, se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión. La garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida (Arce y Conejo, 2019). El *uso de contraejemplos* se considera un tipo de argumentación deductiva. El dato del argumento se corresponde con el caso x_0 que no se ajusta a la regla general, la garantía con la regla general $\forall x: P(x)$, el respaldo con la equivalencia lógica $\forall x: P(x) \leftrightarrow \nexists x_0: (P(x_0)\ es\ falso)$, y la conclusión corresponde al no cumplimiento de la regla: $\forall x: P(x)\ es\ falso$ (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

METODOLOGÍA

En este trabajo, realizado bajo un paradigma descriptivo, con enfoque cualitativo, se pretende describir e interpretar las estrategias y dificultades de los estudiantes en la elaboración de conjeturas y sus demostraciones. Para analizar sus respuestas, se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) consistente en: 1) categorización de las estrategias empleadas según el modelo de Toulmin; 2) identificación de los objetos, en particular proposiciones y conceptos que intervienen y condicionan los argumentos, y los procesos que ocurren cuando se parte de unos datos para derivar una conclusión, apoyándose en una garantía. Este análisis permite asignar el grado de corrección de las respuestas.

En la experiencia participó un grupo de 63 estudiantes para maestro (EPM, en adelante) de primer curso de una universidad española, que cursaban la asignatura de Bases Matemáticas en la Educación Primaria. Uno de los objetivos de aprendizaje en esta asignatura es el de analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas. En el momento de la implementación, los estudiantes no habían tenido aún la oportunidad de trabajar la argumentación de propiedades matemáticas. El profesor responsable de la asignatura proporcionó el problema incluido en la Figura 1 a los EPM para

que lo resolvieran de forma individual. Las respuestas de los EPM se analizan empleando el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) apoyado en el modelo de Toulmin y las categorías del EOS.

Figura 1

Instrumento de recogida de datos

Si a y b son dos números enteros: ¿Será cierto siempre que $(a+b)^2 > a^2 + b^2$? ¿En qué casos será cierto? Justifica tu respuesta.

Fuente: tomado de Markiewicz (2023)

Se establecen los siguientes grados de corrección para analizar las respuestas desarrolladas por los estudiantes:

- Correcta. Una respuesta se considera correcta si se reconoce que la desigualdad no es siempre válida, se formula una conjetura adecuada sobre los valores para los que sí lo es y se garantiza la validez general de dicha conjetura.
- Parcialmente correcta. Se considera una respuesta parcialmente correcta si se reconoce que la desigualdad no es siempre válida, se establece un rango de validez – correcto o parcial – para el que la desigualdad sí lo es, pero la argumentación proporcionada no permite valorar su validez general (ver ejemplo en la Figura 4).
- Incorrecta. En otro caso (ver ejemplos en las Figuras 2 y 3).

RESULTADOS

En la Tabla 1 relacionamos los tipos de estrategias empleadas con el grado de corrección de la respuesta. Destaca que, de los 63 EPM, cuatro no respondieron y ocho no proporcionaron argumentación a su respuesta. Por ejemplo, EPM34 indicó "no, solo será cierto en el caso que b y a sean positivos" sin mayor justificación. El 88,24% de los EPM que elaboraron alguna argumentación propuso respuestas incorrectas, fundamentalmente de tipo deductivo (Figura 2) o inductivo (Figura 3) para justificar que la desigualdad $(a+b)^2 > a^2 + b^2$ es verdadera para todo valor de a y b. En menor medida, desarrollaron argumentaciones abductivas explicativas para justificar la validez de la desigualdad para cualesquiera a y b ("es cierto, ya que, el cuadrado de la suma de dos números, al ser un número mayor, se multiplica más cantidad de veces que haciéndolo por separado", EPM41), así como deductivas por contraejemplo, identificando valores para los que la desigualdad no se cumple, sin precisar en qué casos sí. Por ejemplo, EPM62 indicó "si algún número (a o b) es negativo, el resultado puede ser mayor en $a^2 + b^2$: $(-2+3)^2 < (-2)^2 + 3^2$".

Tabla 1

Tipo de estrategia argumentativa según el grado de corrección de la respuesta (n=51)

Tipo de estrategia argumentativa	Grado de corrección		Total
	Incorrecta	Parcialmente correcta	
Deductiva	18	0	18
Inductiva	13	0	13
Abductiva explicativa	8	1	9
Abductiva exploratoria	1	5	6
Deductiva por contraejemplo	5	0	5
Total	45	6	51

Con menor frecuencia (11,76%), los EPM elaboraron respuestas parcialmente correctas. Fundamentalmente, emplearon argumentaciones abductivas exploratorias para justificar un rango de

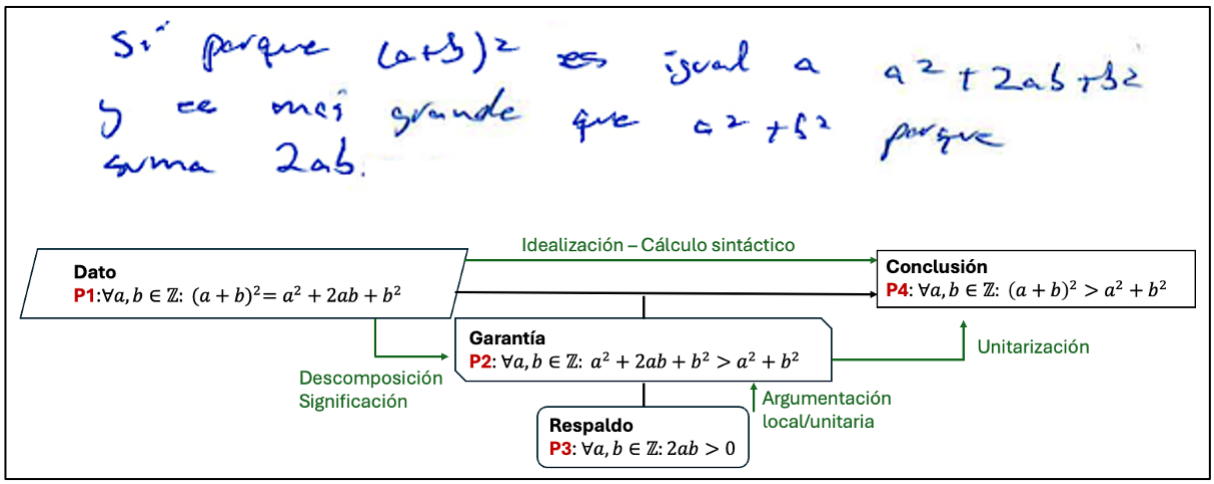
validez parcial ("$(a+b)^2 > a^2 + b^2$ será cierto cuando operemos con números naturales", EPM13) o correcto sin justificar su validez general ("se cumple cuando los dos números son positivos y cuando los dos son negativos", EPM8). En la Figura 4 se muestra un ejemplo con la solución de EPM8.

A continuación, presentamos respuestas prototípicas de los estudiantes, identificamos el tipo de argumentación y mostramos el esquema de Toulmin complementado con los objetos y procesos del EOS. Llamamos a este modelo enriquecido esquema ontosemiótico de Toulmin.

Los estudiantes que plantearon argumentaciones deductivas para demostrar las conjeturas incorrectas, mayormente lo hicieron como EPM25 en la Figura 2. EPM25 parte de la igualdad entre las expresiones $(a+b)^2$ y $a^2 + 2ab + b^2$ (dato - proposición P1). Apoyándose en la garantía - incorrecta - (proposición P2 respaldada por P3), deriva como conclusión la validez de la desigualdad dada en el enunciado (proposición P4). En su argumentación, se articulan procesos de idealización y cálculo analítico (descrito verbalmente) con procesos de descomposición y significación de los datos para reconocer las propiedades matemáticas que servirán de soporte en la conclusión derivada de estas. Además, el respaldo (proposición P3) actúa como argumento local/unitario de la garantía.

Figura 2

Argumentación deductiva de EPM25 para una conjetura incorrecta. Esquema ontosemiótico de Toulmin



El resto de los estudiantes que recurrieron a argumentaciones deductivas utilizaron la igualdad $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ como garantía para asegurar la falsedad de la propiedad dada. Por ejemplo, EPM56 indicó "no es cierto que $(a+b)^2 > a^2 + b^2$ porque si el paréntesis está elevado a la 2 quiere decir que los números de dentro también, por lo que serían iguales".

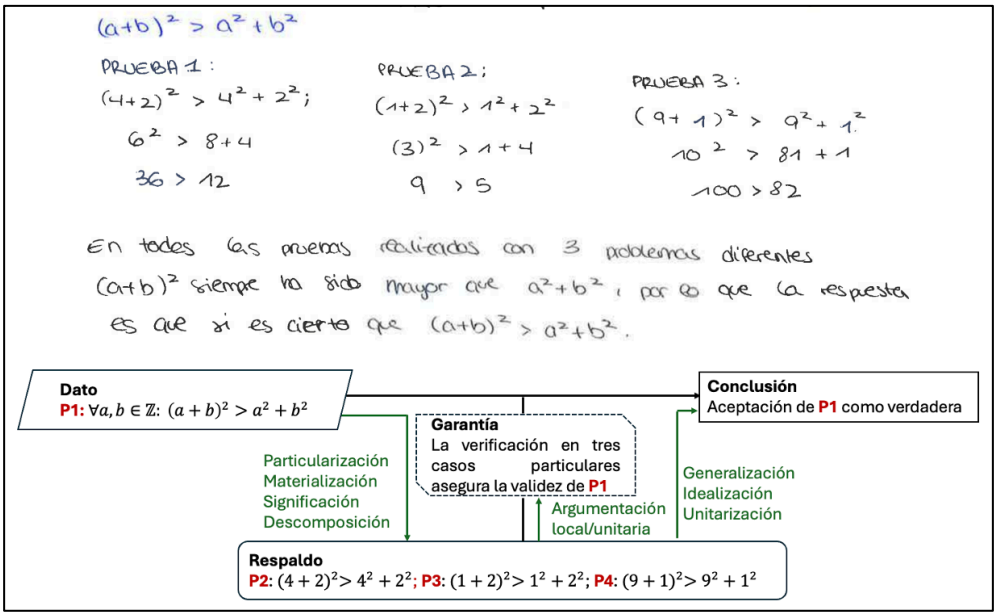
En todas las argumentaciones inductivas que plantearon los estudiantes elaboraron conjeturas inapropiadas sobre el rango de validez de la desigualdad. Al emplear únicamente números positivos para comprobar su veracidad, no lograron reconocer la falsedad en otros casos (cuando a o b son 0 o cuando ambos tienen distinto signo). Como muestra la Figura 3, EPM42 parte de la proposición P1 que pretende concluir. Descompone y atribuye significado a los conceptos involucrados (relación de orden en $\mathbb{Z}$, operaciones) antes de particularizar P1 en tres casos, P2, P3 y P4, que involucran números positivos. Finalmente, EPM42 dota de carácter unitario y general a P2, P3 y P4 (generalización, unitarización) para aceptar P1 como verdadera.

La insistencia que observamos a la hora de argumentar afirmaciones incorrectas muestra la necesidad de reforzar el papel de los ejemplos y los contraejemplos en el proceso de demostración (Lew y Zazkis, 2019). Por un lado, el hecho de no explorar una variedad de ejemplos puede llevar a la formulación de afirmaciones incorrectas, tal como evidenciamos en las argumentaciones inductivas en las que los estudiantes solo contemplaron números naturales (Figura 3). Por otro lado, la ausencia del trabajo previo con ejemplos para corroborar la validez de una conjetura puede llevar

a plantear argumentaciones que justifiquen afirmaciones incorrectas, como sucedió en las argumentaciones deductivas (Figura 2).

Figura 3

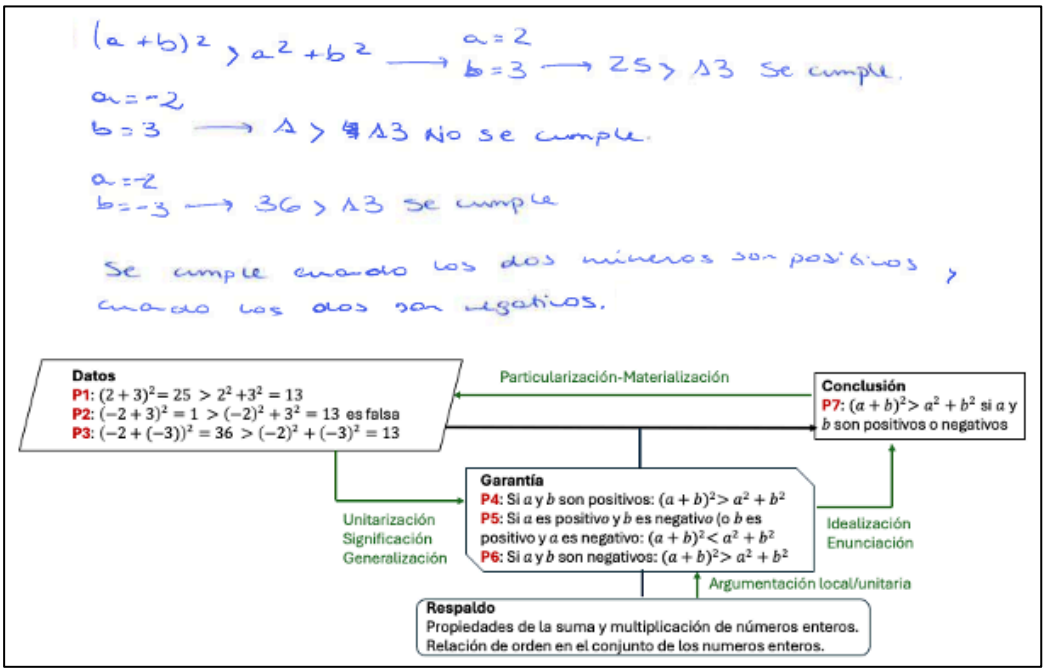
Argumentación inductiva de EPM42 para una conjetura incorrecta. Esquema ontosemiótico de Toulmin



Los estudiantes también emplearon, aunque en menor medida, argumentaciones abductivas con una función explicativa para argumentar fundamentalmente conjeturas incorrectas sobre el rango de valores para los que la desigualdad es válida, y con una función exploratoria para argumentar, principalmente, conjeturas adecuadas tal como ocurre con la respuesta de EPM8 en la Figura 4.

Figura 4

Argumentación abductiva exploratoria de EPM8 para una conjetura correcta. Esquema ontosemiótico de Toulmin



EPM8 halló una regularidad adecuada, emergente del análisis de ejemplos que involucraban distintos tipos de números (positivos, negativos). La unitarización y significación de los datos (P1, P2, P3)

llevó a EPM8 a reconocer de manera general (generalización) que, cuando ambos números enteros son positivos y cuando ambos son negativos, la desigualdad se cumple (garantías P4, P6). En cambio, cuando solo uno de ellos es negativo, la desigualdad se invierte (garantía P5). Así, EPM8 derivó (mediante procesos de idealización y enunciación) la conclusión deseada P7.

Es de destacar que ninguno de los participantes que expresó el rango de validez de la desigualdad de forma correcta o parcialmente correcta, logró elaborar una demostración para validarlo de manera general, al igual que EPM8 (Figura 4). En todos los casos, la conclusión del argumento sigue necesitando una acción adicional para su aceptación o rechazo (Stylianides, 2008).

Por último, con menor frecuencia, los estudiantes emplearon contraejemplos para conjeturar sobre la falsedad de la desigualdad para ciertos valores de a y b, sin explicitar los casos en los que ésta es válida. Por ejemplo, EPM50 toma como dato el caso "$a = 0, b = 1: (0 + 1)^2 = 0^2 + 1^2$", y concluye "no se cumple cuando a, b o ambos términos son 0". La garantía en estos casos está respaldada por la regla lógica $\forall a, b \in \mathbb{Z}: (a + b)^2 > a^2 + b^2 \leftrightarrow \nexists a', b': (a' + b')^2 \leq a'^2 + b'^2$.

CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos las argumentaciones que desarrollan futuros docentes de primaria cuando deben decidir y justificar cuándo es cierta una propiedad aritmética. La investigación de este tipo de tareas es escasa en el entorno universitario (Lew y Zazkis, 2019) y casi inexistente en el contexto de la formación de docentes de primaria. El uso de los esquemas ontosemióticos de Toulmin, que complementan el modelo de Toulmin con los objetos y procesos del EOS, nos posibilitó alcanzar una visión microscópica de la actividad matemática desarrollada. Por un lado, los estudiantes que emplearon argumentaciones deductivas que llevaron a conclusiones falsas utilizaron propiedades incorrectas como garantías, lo que muestra un conocimiento deficiente de propiedades aritméticas fundamentales. Por otro lado, tanto el uso de argumentaciones inductivas o abductivas, como la enunciación de conjeturas sin argumentación, sugiere que los estudiantes no encuentran necesario demostrar la validez de las conjeturas, lo que muestra una falta de comprensión sobre qué constituye una demostración y por qué es necesaria (Sommerhoff y Ufer, 2019). Esta carencia se puede observar, por ejemplo, en las argumentaciones inductivas, en la generalización e idealización que se produce desde el respaldo hacia la conclusión, o en las abductivas exploratorias, en la generalización que se produce entre datos y garantía, y la enunciación e idealización en el sentido garantía – conclusión. Además, en muchas ocasiones, la evidencia proporcionada por los ejemplos propuestos actuó como un obstáculo para la producción de una conjetura adecuada (Mariotti y Pedemonte, 2019).

Con este trabajo pretendemos complementar estudios previos que han evidenciado disparidades entre los significados personales e institucionales pretendidos sobre la demostración, empleando el modelo de Toulmin (Arce y Conejo, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014) o la configuración ontosemiótica del EOS (Markiewicz et al., 2021; Morales-Ramírez et al., 2021). Las dificultades que identificamos refuerzan la necesidad de reflexionar sobre posibles intervenciones que ayuden a superarlas, ofreciendo oportunidades de aprendizaje de calidad en la práctica de la demostración (Arce y Conejo, 2019). En primer lugar, es necesario reforzar el conocimiento matemático de los futuros docentes, para que los respaldos y las garantías puedan ejercer esta función. En segundo lugar, sería conveniente reforzar el papel de los ejemplos y contraejemplos en la formulación y argumentación de conjeturas, como forma de avanzar en una comprensión profunda de la naturaleza de la demostración.

Agradecimientos

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 304-322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill, Aula Magna.

Lew, K. y Zazkis, D. (2019). Undergraduate mathematics students' at-home exploration of a prove-or-disprove task. *Journal of Mathematical Behavior, 54*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.003

Mariotti, M., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education* (pp. 75–89). Routledge.

Mariotti, M. y Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems. *ZDM, 51*(5), 759-777. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3

Markiewicz, M. E. (2023). *Matemática Discreta.* Documento no publicado.

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *Revista UNION, 17*(62).

Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema, 33,* 109-134. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06

Morales-Ramírez, G., Rubio-Goycochea, N. y Larios-Osorio, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema, 35*, 664-689. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Papadaki, C., Reid, D. y Knipping, C. (2019). Abduction in argumentation: Two representations that reveal its different functions. En T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 310-317). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Sommerhof, D. y Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM, 51*, 717–730. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01039-7

Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

COMPARACIÓN DE RECURSOS MANIPULATIVOS FÍSICOS Y VIRTUALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO DE CASO CON DOCENTES EN FORMACIÓN [i]

Comparative analysis of physical and virtual manipulatives in problem-solving: A case study with pre-service teachers

Ochugboju, A. [a], Díez-Palomar J.[a]

[a]Universitat de Barcelona

Resumen

En este estudio comparamos la eficacia de los recursos manipulativos físicos y virtuales en la resolución de problemas matemáticos, en el ámbito de la formación de futuros/as docentes. Siguiendo un enfoque metodológico mixto basado en encuestas y entrevistas, el estudio examina la funcionalidad de estas herramientas en términos de capacidad para la resolución de problemas, impacto pedagógico y motivación. Los resultados indican que los recursos manipulativos físicos presentan ventajas en el aprendizaje a través de la percepción espacial y táctil, mientras que los virtuales favorecen experiencias didácticas más dinámicas e interactivas. No obstante, se identificaron desafíos relacionados con la accesibilidad a los recursos, la incidencia de errores técnicos y la necesidad de formación específica de los futuros/as docentes. En conclusión, la investigación corrobora que una integración equilibrada de ambos tipos de recursos manipulativos puede optimizar el aprendizaje matemático.

Palabras clave: Didáctica de las matemáticas, práctica educativa, recursos manipulativos, resolución de problemas

Abstract

This study compares the effectiveness of physical and virtual manipulative resources in the context of solving mathematical problems during the training of future teachers. Employing a mixed-methods approach, including surveys and interviews, the research explores the functionality of these tools in terms of their problem-solving potential, pedagogical impact, and ability to foster motivation. The findings suggest that physical manipulative resources offer distinct advantages in learning through spatial and tactile engagement, whereas virtual resources support more dynamic and interactive learning experiences. Nonetheless, challenges were identified, including issues of resource accessibility, technical malfunctions, and the necessity for specialised training for prospective teachers. In conclusion, the study affirms that a balanced integration of both types of manipulative resources can enhance mathematical learning outcomes.

Keywords: *Didactics of mathematics, educational practice, manipulatives, problem-solving*

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas ha experimentado un cambio de paradigma, con una creciente tendencia hacia enfoques más experienciales y activos (Khusna, Siswono, y Wijayanti, 2025). En este contexto, los materiales manipulativos, tanto físicos (Romero-García, Manzanal Martínez, y Palacios Ortega, 2023) como digitales (Cortés, Breda, y Sánchez, 2023; Pochulu, Font, y Breda, 2021), han desempeñado un papel clave en la transformación de las prácticas pedagógicas. Los materiales manipulativos físicos permiten a los/as estudiantes

Ochugboju, A. y Díez-Palomar, J. (2025). Comparación de recursos manipulativos físicos y virtuales en la resolución de problemas: Un estudio de caso con docentes en formación. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

visualizar y manipular objetos concretos, facilitando la transición hacia el pensamiento abstracto (Acosta, Alsina, y Pincheira, 2022). Por su parte, los recursos manipulativos digitales aprovechan la tecnología informática para ofrecer entornos de aprendizaje interactivos y adaptativos (Pochulu, Font, y Breda, 2021). Si bien estos últimos presentan un gran potencial, su eficacia relativa sigue siendo objeto de debate (Sarama y Clements, 2016), especialmente en lo que respecta a su integración en la formación docente. En esta comunicación se presentan los resultados de un estudio en el que un grupo de estudiantes de un Grado de formación de futuros maestros/as de matemáticas de primaria han usado recursos manipulativos físicos y digitales para resolver problema sobre la suma y fracciones. La pregunta de investigación que hemos realizado es: ¿Cómo influyen los recursos manipulativos físicos y los recursos digitales en el desarrollo de la competencia matemática de los futuros/as maestros/as de un Grado de educación primaria? De esta pregunta se derivan los siguientes objetivos de estudio: (1) Analizar la influencia que ejerce el tipo de recurso (físico o digital) sobre la competencia matemática de los futuros/as maestros/as participantes en el estudio, (2) determinar cuáles son los beneficios de cada tipo de recurso en las habilidades relacionadas con la resolución de problemas, (3) y establecer desafíos a partir de los objetivos anteriores, en el uso de ambos tipos de recursos como herramientas de enseñanza y aprendizaje en el contexto de la resolución de problemas.

MARCO TEÓRICO

Esta investigación se fundamenta en las teorías constructivistas del aprendizaje (Olmedo Torre y Farrerons Vidal, 2017). El uso de materiales manipulativos físicos se sustenta en la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, la cual postula una transición progresiva del pensamiento concreto al abstracto (Kamii, Lewis, y Kikland, 2001). Trabajos previos sugieren que el uso de materiales manipulativos ayuda a los niños/as a desarrollar la comprensión de objetos matemáticos como los números, las formas, etc. (Sarama y Clements, 2016). Recursos como los bloques de base diez y las fichas de fracciones proporcionan a los futuros/as docentes una experiencia práctica tangible, facilitando la construcción de su comprensión conceptual (Byrne, Jensen, Stjerne Thomsen, y Ramchandani, 2023). Esta perspectiva es coherente con la propuesta de Piaget, quien sostiene que el conocimiento se desarrolla a través de la interacción con materiales manipulables en el entorno (Piaget y Inhelder, 1973; Piaget, 1977). Por otro lado, el constructivismo social de Vygotsky (1978) enfatiza el aprendizaje como un proceso mediado por la interacción social. En este contexto, los/as docentes en formación reciben retroalimentación inmediata al emplear materiales manipulativos virtuales, como las barras de fracciones digitales (Şimşek, 2021). Además, el aprendizaje se ve reforzado mediante estrategias de andamiaje y colaboración entre estudiantes y docentes (Arida et al., 2022). La incorporación de entornos de aprendizaje mejorados tecnológicamente (EAMT) permite a los/as futuros docentes optimizar sus prácticas pedagógicas al integrar recursos físicos y digitales en el aula. Ahora bien, la investigación todavía no ha aportado evidencias suficientes como para decidir si es mejor comenzar el proceso de aprendizaje de lo concreto a lo abstracto (Piaget, 1977; Bruner y Kenney, 1965) usando primero materiales manipulativos físicos, y pasando después a los digitales, o al revés, o bien haciendo una combinación de ambas tipologías. Acosta et al. (2022) sugieren que en los primeros estadios de aprendizaje (en infantil) es mejor empezar con los recursos manipulativos físicos, y luego pasar a recursos gráficos, mucho más abstractos. Sin embargo, los recursos gráficos no tienen por qué implicar el mismo nivel de abstracción en materiales digitales, ya que estos pueden simular características de los físicos. Lo que sí sabemos es que la experiencia combinada con herramientas físicas y digitales proporciona a los/as futuros docentes un conocimiento pedagógico sólido para usar ambos tipos de materiales en clase. Comprender cómo influyen los materiales manipulativos en el razonamiento matemático es clave para mejorar la didáctica. Este estudio adopta un enfoque constructivista, integrando la tradición piagetiana del desarrollo cognitivo y la visión sociocultural de Vygotsky, considerando los recursos manipulativos como herramientas clave para comprender la adición en el contexto de los números racionales (fracciones a/b).

METODOLOGÍA

El estudio utilizamos un enfoque metodológico mixto, combinando encuestas y entrevistas con futuros/as docentes. Participaron un total de 30 estudiantes de un programa de formación inicial (Grado de educación primaria). Se solicitó a los/as participantes resolver problemas matemáticos utilizando materiales manipulativos tanto concretos como virtuales. La recopilación de datos se llevó a cabo durante un período de tres meses, durante el cual los/as participantes realizaron actividades de resolución de problemas y proporcionaron retroalimentación sobre su experiencia.

Recogida de datos

Las técnicas que se usaron para recoger los datos fueron las siguientes.

- **Encuestas**: Se administraron cuestionarios para evaluar la competencia de los/as participantes en el uso de materiales manipulativos físicos y virtuales. Se preguntaron aspectos tales como: ¿qué tipo de recursos manipulativos preferían usar (concretos o digitales) ?, ¿cuál era su grado de familiaridad con ambos tipos de materiales (se les proporcionaba un listado de recursos, y se les preguntaba que los ordenasen según el grado de familiaridad con ellos)?, ¿cuáles son los beneficios/retos de usar manipulativos de uno u otro tipo?, ¿cómo decidir qué tipo de recurso manipulativo usar para resolver un determinado problema, si físico o digital?, ¿qué aspectos pesan más en la elección de un recurso manipulativo -tanto físico, como digital- concreto para resolver problemas?).
- **Entrevistas**: Se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas para profundizar en las actitudes de los/as futuros docentes hacia el uso de materiales manipulativos en el aula. En las entrevistas semi-estructuradas se inquirió sobre la experiencia previa de los participantes en el uso de materiales manipulativos para la enseñanza de resolución de problemas (tanto recursos físicos como digitales), su opinión sobre cuál de ambos tipos le/a ayuda más para comprender los problemas de matemáticas, cuáles son, a su entender, los principales retos/desafíos de ambos tipos de recursos, como superan esos retos/desafíos, cómo el uso de materiales manipulativos (físicos y digitales) afecta a su razonamiento o su habilidad de resolver problemas de matemáticas, cómo miden la efectividad de los materiales manipulativos (tanto físicos como digitales), etc. Se exploraron los desafíos que enfrentan en la implementación de estos recursos, tales como la disponibilidad limitada de recursos, las dificultades en la comprensión de cómo usarlo, o el impacto en la gestión del tiempo en clase derivado de usar este tipo de recursos.
- **Observaciones**: Se realizaron grabaciones de video de las sesiones con el fin de analizar la interacción de los/as futuros docentes con los materiales manipulativos en contextos de aula. Se identificaron errores comunes en la resolución de problemas, lo que permitió a los investigadores detectar concepciones erróneas y lagunas en el conocimiento matemático. Asimismo, se monitorearon los patrones de interacción entre los/as docentes en formación.

Análisis de los datos

El análisis de datos combinó enfoques cualitativos y cuantitativos con el propósito de obtener una visión integral del uso de los materiales manipulativos en la formación docente en matemáticas.

- **Análisis cualitativo**: La información obtenida a través de entrevistas y observaciones en video fue sometida a un proceso de codificación temática, con el objetivo de identificar patrones recurrentes en la enseñanza, la resolución de problemas y las estrategias pedagógicas empleadas. Se utilizaron 4 códigos temáticos principales: beneficios, desafíos, estrategias y participación. Cada uno de ellos se subdividió en componentes, de acuerdo con un análisis preliminar de las respuestas obtenidas en las entrevistas. Este análisis permitió la identificación de temas clave relacionados con la participación de los futuros docentes, su

comprensión de los conceptos matemáticos y la eficacia percibida de los materiales manipulativos.

- **Análisis cuantitativo**: Los datos obtenidos mediante encuestas se analizaron utilizando estadística descriptiva, lo que permitió cuantificar las preferencias de los participantes en relación con el uso de materiales manipulativos físicos y digitales, así como su percepción de autoeficacia en el manejo de estos recursos. Este análisis estadístico facilitó la identificación de tendencias y patrones de respuesta, contribuyendo a una comprensión más amplia de la influencia de los recursos manipulativos en la formación docente. Para realizar el análisis se utilizó tanto EXCEL, como SPSS.

RESULTADOS

Beneficios de los recursos materiales manipulativos

Recursos manipulativos físicos

Los recursos manipulativos, tanto físicos como virtuales, contribuyeron significativamente a la mejora de las habilidades de resolución de problemas de los/as futuros docentes. En particular, los manipulativos físicos favorecieron la comprensión táctil y espacial. El 85 % de los/as participantes indicó que el contacto directo con los materiales facilitó la construcción del conocimiento, permitiéndoles desarrollar una comprensión más intuitiva de conceptos matemáticos, especialmente en temas como fracciones y geometría. Asimismo, el 78 % de los/as participantes reportó que el uso de herramientas físicas permitió clarificar el pensamiento abstracto al transformar los conceptos matemáticos en representaciones tangibles. Esta materialización del conocimiento abstracto resultó fundamental para el aprendizaje, especialmente en el desarrollo de la comprensión conceptual. Además, la interacción entre pares se destacó como un beneficio clave. El 70% de los/as participantes señaló que el trabajo colaborativo promovió la comunicación oral, la resolución de problemas en grupo y el intercambio de conocimientos. La dinámica grupal permitió la consolidación del aprendizaje, ya que los/as estudiantes explicaban sus razonamientos y exploraban diversos enfoques para la solución de problemas en colaboración con sus pares.

Recursos manipulativos virtuales

Los recursos manipulativos virtuales también fueron altamente valorados por los/as participantes, ya que el 90% los consideró útiles para proporcionar retroalimentación instantánea. En comparación con los enfoques tradicionales, las herramientas digitales permiten a los/as estudiantes observar de manera inmediata los resultados de su trabajo en la resolución de problemas, con el potencial de autocorrección y aprendizaje adaptativo. Una de las ventajas más destacadas fue la visualización gráfica de conceptos abstractos en tiempo real. El 82% de los/as participantes informó que el uso de recursos manipulativos virtuales mejoró su comprensión conceptual, ya que estas herramientas les permitieron explorar ideas matemáticas de manera interactiva. A través de la manipulación de variables y la observación de cambios en tiempo real, los/as futuros/as maestros/as pudieron profundizar en su aprendizaje y reforzar su comprensión de los principios matemáticos. Asimismo, el 75% de los/as participantes valoró la accesibilidad y la flexibilidad de los recursos manipulativos virtuales, destacando su utilidad para el aprendizaje autodirigido. A diferencia de las herramientas físicas, los manipulativos digitales pueden utilizarse en cualquier momento y lugar, lo que fomenta una mayor autonomía en la exploración de conceptos matemáticos y la realización de ejercicios independientes. Esta característica resultó especialmente beneficiosa para el aprendizaje diferenciado, permitiendo que los/as estudiantes trabajen a su propio ritmo y revisen contenidos según sus necesidades. Como consecuencia, se observó un impacto positivo en el desarrollo de la competencia matemática y en el fortalecimiento de la autoeficacia de los/as futuros/as docentes.

Desafíos

Desafíos en el uso de los recursos manipulativos físicos

El uso de materiales manipulativos físicos afronta diversos obstáculos, principalmente relacionados con la disponibilidad de recursos y las dificultades logísticas. La mayoría de los/as futuros/as maestros/as (65%) señaló la escasez de estos materiales, atribuida a su elevado costo y a los requerimientos de almacenamiento. Varios futuros/as docentes manifestaron que el uso de manipulativos en el aula, así como su mantenimiento, se ve limitado por restricciones financieras y logísticas, lo que dificulta su uso continuo en la enseñanza. Además, el 60% de los futuros maestros/as indicó que la utilización de materiales manipulativos físicos implica una preparación considerable. Esto se debe a la necesidad de organizar las actividades prácticas, garantizar el uso adecuado de los recursos y gestionar su distribución en el aula, que supone una carga adicional para los/as docentes.

Desafíos en el uso de los recursos manipulativos virtuales

Si bien los manipulativos virtuales ofrecen entornos de aprendizaje dinámicos e interactivos, su implementación en el aula presenta ciertas dificultades. El 70% de los/as futuros/as maestros/as reportó problemas técnicos, que abarcan desde fallos en el software hasta averías en los dispositivos, lo que obstaculizó su uso fluido durante la clase. Asimismo, el 65% señaló la falta de retroalimentación táctil como una limitación significativa, ya que algunos/as consideran que el contacto físico con los materiales es esencial para la comprensión de relaciones espaciales y estructuras matemáticas. La ausencia de esta interacción háptica podría afectar la adquisición de determinados conceptos, especialmente en ámbitos como la geometría. Por otro lado, el 60% identificó la distracción como una preocupación relevante. La naturaleza tecnológica de los manipulativos virtuales, aunque atractiva, puede desviar la atención del contenido matemático, reduciendo la eficacia del aprendizaje.

Prácticas de enseñanza

Los futuros/as maestros/as resaltaron la importancia de integrar tanto los recursos manipulativos físicos como los virtuales en la enseñanza, ajustándolos a las necesidades individuales de los/as estudiantes y a la naturaleza de los problemas matemáticos abordados.

Estrategias de integración

Los futuros/as maestros/as destacaron la necesidad de una planificación didáctica intencionada que combine de manera estratégica los manipulativos concretos y virtuales. En este sentido, el 80% recomendó emplear manipulativos físicos para la introducción de conceptos matemáticos fundamentales, mientras que el 75% sugirió el uso de herramientas virtuales para la exploración de conceptos avanzados. Asimismo, el 70% abogó por una combinación de ambos tipos de recursos para proporcionar una experiencia de aprendizaje integral. Además, los futuros/as maestros/as enfatizaron la importancia de ofrecer instrucciones detalladas y facilitar el proceso de aprendizaje para garantizar un uso eficaz de los materiales manipulativos. Esta metodología exige que los/as docentes desarrollen flexibilidad y capacidad de adaptación, lo que les permite ajustar el enfoque de enseñanza en función de las necesidades específicas de los estudiantes y del nivel de dificultad del concepto matemático a impartir.

Participación

Uso de los recursos manipulativos físicos en la enseñanza

El empleo de recursos manipulativos físicos en el aula ha demostrado ser más efectivo que el trabajo exclusivo con números abstractos, ya que facilita la comprensión de conceptos matemáticos complejos y fomenta la motivación estudiantil. Los datos de la encuesta revelaron que el 85 % de los futuros/as maestros/as percibió un aumento significativo en la motivación cuando interactuaban con

materiales físicos, como bloques y fichas de fracciones. La manipulación directa de estos recursos permitió que los futuros/as maestros/as comprendieran de manera más intuitiva conceptos matemáticos que, de otro modo, podrían resultar abstractos y difíciles de asimilar. Asimismo, el 78% manifestó un mayor compromiso y entusiasmo al trabajar con manipulativos físicos. La posibilidad de explorar y resolver problemas mediante la interacción con objetos tangibles convirtió el aprendizaje en una experiencia más dinámica y colaborativa, incentivando la participación activa y el trabajo en equipo.

Uso de manipulativos virtuales en la enseñanza

Los manipulativos virtuales también desempeñaron un papel importante en la implicación de los estudiantes, especialmente en el contexto de las tareas matemáticas. El uso de herramientas virtuales, como simulaciones interactivas y aplicaciones, resultó altamente efectivo, ya que el 90% de los participantes reportaron una notable participación estudiantil al emplear estos recursos. Las herramientas dinámicas y visualmente atractivas ofrecieron a los estudiantes una manera más clara y comprensible de abordar los conceptos matemáticos, facilitando la comprensión de ideas abstractas. Además, el 82% de los futuros/as maestros/as destacó que estar más motivados al utilizar manipulativos virtuales, en particular para la visualización dinámica de las relaciones matemáticas. La posibilidad de manipular variables y observar en tiempo real los efectos de esos cambios en las relaciones matemáticas convirtió el aprendizaje en una experiencia más interactiva y personalizada.

DISCUSIÓN

Discusión de los resultados

De acuerdo con las teorías constructivistas de Piaget y Vygotsky, los niños aprenden de manera efectiva a través de la acción y la interacción. Las actividades de aprendizaje táctil (manipulativas) pueden hacer que las matemáticas sean interactivas, atractivas y divertidas. Los recursos manipulativos físicos, como los bloques y las fichas de fracciones, demostraron ser eficaces para mejorar la comprensión táctil y espacial de los futuros/as maestros/as sobre conceptos matemáticos. En consonancia con la teoría de Piaget, el 85% indicó una mayor participación en las actividades cuando se utilizaban estos recursos físicos, lo cual facilitó la asimilación de conceptos abstractos mediante la manipulación directa. Además, el 78% destacó que su motivación aumentó al interactuar con objetos concretos durante el aprendizaje (Björklund, 2014). Por otro lado, el enfoque constructivista social de Vygotsky subraya la importancia de la interacción social y la colaboración en el aprendizaje, lo cual se observó en este estudio, donde el 70% de los futuros/as maestros/as señaló una mayor interacción entre compañeros/as durante las tareas grupales. No obstante, la investigación también identificó desafíos logísticos, como la oferta limitada de materiales (65 %), los altos costos (60 %) y las dificultades de almacenamiento (55 %), lo que podría limitar el uso efectivo de manipulativos físicos en las aulas (Agyei et al., 2022). Estos resultados sugieren que, para maximizar los beneficios de los manipulativos físicos, se requiere una inversión adecuada en recursos y capacitación. En contraste, los recursos manipulativos virtuales demostraron ser igualmente valiosos, ofreciendo experiencias de aprendizaje dinámicas e interactivas, especialmente para conceptos más complejos, como fracciones y división. La retroalimentación inmediata proporcionada por las herramientas virtuales aumentó la participación activa del 90% de los futuros/as maestros/as, mientras que la visualización dinámica mejoró la comprensión conceptual del 82%. El uso de manipulativos virtuales permite a los/as estudiantes explorar conceptos a su propio ritmo y colaborar con sus compañeros/as de manera interactiva, lo que facilita un aprendizaje más personalizado y accesible (Anderson-Pence y Moyer-Packenham, 2016). Sin embargo, los problemas técnicos (70%), la falta de retroalimentación táctil (65%) y las distracciones (60%) fueron desafíos importantes señalados por los/as participantes. Estos problemas apuntan a la necesidad de contar con tecnología fiable y un diseño pedagógico cuidadoso para evitar que los manipulativos virtuales se conviertan en una distracción y no en una herramienta eficaz para el aprendizaje (Bouck et al., 2017).

Implicaciones para la Formación Docente

La investigación sugiere que los futuros/as maestros/as deben estar preparados para utilizar tanto recursos manipulativos físicos como virtuales en sus clases de matemáticas, adaptándolos a las necesidades y características del alumnado. Según las recomendaciones del 80% de los/as futuros/as maestros/as participantes en este estudio, una combinación de manipulativos físicos y virtuales es la mejor opción para la enseñanza de conceptos matemáticos, ya que cada tipo de material tiene fortalezas en distintos contextos de aprendizaje. Mientras que los manipulativos físicos son eficaces para introducir conceptos simples, los manipulativos virtuales pueden ser más adecuados para explorar conceptos más complejos y avanzados. Este enfoque híbrido contribuye a una enseñanza más flexible y dinámica, y prepara a los futuros docentes para abordar las diversas necesidades del alumnado en contextos de aprendizaje multiculturales (Burns y Hamm, 2011).

CONCLUSIONES

Este estudio ha contribuido al conocimiento sobre el uso de recursos manipulativos en el aprendizaje de las matemáticas, comparando la eficacia de los manipulativos físicos y virtuales. Los resultados respaldan la idea de que ambos tipos de materiales tienen un impacto positivo en la resolución de problemas, la motivación y la comprensión de conceptos matemáticos. Las implicaciones para la formación docente en prácticas son claras: es esencial dotar a los/as futuros/as docentes de las herramientas y la capacitación necesarias para usar eficazmente estos recursos en el aula. Los estudios futuros deberían explorar el valor añadido del uso combinado de manipulativos físicos y virtuales en aulas multiculturales, con el fin de proporcionar más información sobre cómo estos recursos pueden facilitar el aprendizaje de las matemáticas y mejorar las prácticas pedagógicas.

Referencias

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). Recursos manipulativos y gráficos en la comprensión de tareas con patrones: un análisis comparativo con niños de 4 a 6 años. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 119-127). SEIEM.

Agyei, E., Agamah, C.D. y Entsie, G. (2022). Availability of manipulatives in teaching and learning mathematics in Ghana Colleges of Education. *American Journal of Educational Research*, *4*(10), 188-193. https://doi.org/10.12691/education-10-4-5

Akkan, Y. y Çakir, Z. (2012) Preservice classroom teachers' opinions on using different manipulatives in mathematics teaching. *The Journal of Instructional Technologies & Teacher Education, 1*(1), 68-83.

Anderson-Pence, K. y Moyer-Packenham, P. (2016). The influence of different virtual manipulative types on student-led techno-mathematical discourse. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *35*(1), 5-31.

Anderson-Pence, K. L. (2020). Virtual manipulatives: Making effective instructional choices. *Colorado Mathematics Teacher, 53*(1), 1-5.

Arida, R. A., Andrade, R. R. y Mabilangan, R. A. (2022). Mathematics Self-Efficacy and the Use of Virtual Math Manipulatives Among Pre-Service Teachers. *International Journal of Educational Management and Development Studies*, *3*(2), 45-66. https://doi.org/10.53378/352897

Björklund, C. (2014). Less is more–mathematical manipulatives in early childhood education. *Early Child Development and Care*, *184*(3), 469-485. https://doi.org/10.1080/03004430.2013.799154

Bockshecker, A., Ebner, K. y Smolnik, S. (2022). Technology-Enhanced Learning Environments and Adaptive Learning Systems – Development of functionality taxonomies. *Hawaii International Conference on System Sciences*. Retrieved from http://hdl.handle.net/10125/79337

Bolyard, J. y Moyer-Packenham, P. (2012). Making sense of integer arithmetic: The effect of using virtual manipulatives on students' representational fluency. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *31*(2), 93-113.

Bouck, E. C. y Sprick, J. (2018). The virtual-representational-abstract framework to support students with disabilities in mathematics. *Intervention in School and Clinic, 54*(3), 173-180. https://doi.org/10.1177/1053451218767911

Bouck, E. C., Bassette, L., Shurr, J., Park, J., Kerr, J. y Whorley, A. (2017). Teaching equivalent fractions to secondary students with disabilities via the virtual-representational-abstract instructional sequence. *Journal of Special Education Technology, 32*(4), 220-231. https://doi.org/10.1177 /0162643417727291

Bruner, J. S. y Kenney, H. J. (1965). Representation and mathematics learning. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *30*(1), 50-59. https://doi.org/10.2307/1165708

Burns, B. A. y Hamm, E. M. (2011). A comparison of concrete and virtual manipulative use in third and fourth-grade mathematics. *School Science and Mathematics*, *111*(6), 256-261. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00086.x

Byrne, E. M., Jensen, H., Thomsen, B. S. y Ramchandani, P. G. (2023). Educational interventions involving physical manipulatives for improving children's learning and development: A scoping review. *Review of Education*, *11*(2), e3400. https://doi.org/10.1002/rev3.3400

Cortés, A., Breda, A. y Sánchez, A. (2023). La incorporación de la metodología activa gamificación en las unidades didácticas de futuros profesores de matemáticas de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 564). SEIEM.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 21-31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00059-1

Khusna, A. H., Siswono, T. Y. E. y Wijayanti, P. (2025). ¿Cómo se manifiestan las habilidades de pensamiento crítico de los estudiantes al resolver problemas de forma colaborativa? *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (27), 21–41. https://doi.org/10.35763/aiem27.5669

Olmedo-Torre, N. y Farrerons-Vida, O. (2017). *Modelos constructivistas de aprendizaje en programas de formación.* OmniaScience Monographs.

Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicología*. Labor.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1973). *Memory and intelligence*. Routledge y Kegan Paul.

Pochulu, M., Font, V. y Breda, A. (2021). Simulación de intervenciones docentes ante conjeturas de los estudiantes en un entorno de resolución de problemas con recursos TIC. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 505 – 512). Valencia: SEIEM.

Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. . y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (24), 93–110. https://doi.org/10.35763/aiem24.4418

Sarama, J. y Clements, D. H. (2016). Physical and virtual manipulatives: What is "concrete"? En P. Moyer-Packenham, (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives. Mathematics Education in the Digital Era, vol 7.* (pp.71-93). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_4

Şimşek, M. (2021). Examining the digital learning material preparation competencies of pre-Service mathematics teachers. *Participatory Educational Research*, *8*(3), 323-343. https://doi.org/10.17275/per.21.68.8.3

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

[i] Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 (MICINN, FEDER, UE).

JUEGO EQUITATIVO Y ARGUMENTACIÓN: EXPLORANDO INTUICIONES SOBRE ESPERANZA MATEMÁTICA

Fair play and reasoning: exploring expected value intuitions

Oval-Trujillo, Z. y García-Alonso, I.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio exploratorio con estudiantes de educación secundaria (13 años) en los que se analiza la argumentación empleada ante la elección de juegos equitativos y no equitativos, explorando sus intuiciones sobre la esperanza matemática. Tras el análisis de las respuestas se ha observado que los estudiantes utilizan en sus argumentos el valor y la cantidad de fichas que componen los distintos juegos propuestos, es decir, manejan los elementos que definen la esperanza matemática. Además, se han detectado dificultades en la interpretación de las fichas con valor cero y se ha encontrado un porcentaje no despreciable de estudiantes que argumentan su elección basándose en su experiencia con el juego. Este trabajo destaca la importancia de la alfabetización probabilística temprana y la necesidad de abordar las concepciones intuitivas sobre la esperanza matemática.

Palabras clave: esperanza matemática, juego equitativo, toma de decisiones, probabilidad, educación secundaria

Abstract

This paper presents an exploratory study with secondary school students (13 years old) in which the argumentation used when choosing fair and unfair games is analysed, exploring their intuitions about mathematical expectation. After analysing the responses, we observed that students used the value and quantity of the game pieces in their arguments, that is, they involved the elements that define mathematical expectation. Furthermore, we found difficulties in the interpretation of chips with zero value, and a non-negligible percentage of students argued their choice basing on their experience with the game. This paper highlights the importance of early probabilistic literacy and the need to address intuitive conceptions about mathematical expectation.

Keywords: *expected value, fair game, decision-making, probability, secondary education*

INTRODUCCIÓN

La alfabetización estadística y probabilística es una competencia esencial en la sociedad actual en la que diariamente recibimos una gran cantidad de información que de forma continua exige la toma de decisiones informada (Alsina y García-Alonso, 2023). Es más, nuestro entorno está regido por situaciones dadas en entornos de incertidumbre en las que la toma de decisiones necesita del conocimiento probabilístico (Estrella et al., 2023). A pesar de que la mayoría de los currículos incorporan estos conocimientos desde finales del siglo pasado, la probabilidad se aborda con un enfoque dirigido a la cuantificación de la probabilidad y sin considerar otras ideas fundamentales que también forman parte de la alfabetización probabilística (García-Alonso et al., 2025).

La probabilidad surge a partir del estudio de los juegos de azar y entre otras razones, su estudio busca profundizar acerca de la equitatividad de los juegos, el tamaño de las apuestas y el reparto de las ganancias entre los jugadores que intervienen (Guerrero et al., 2017). Así, el concepto de juego equitativo, entendido como el equilibrio entre las probabilidades de ganar de cada jugador y su

Oval-Trujillo, Z. y García-Alonso, I. (2025). Juego equitativo y argumentación: explorando intuiciones sobre esperanza matemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

ganancia esperada en el juego (Hernández-Solís et al., 2021), involucra dos elementos: la probabilidad de ganar de cada jugador y los valores de la apuesta o ganancia. Estas elementos determinan el concepto de esperanza matemática.

En este estudio se pretende analizar las intuiciones de los estudiantes de secundaria ante la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre determinadas por juegos de azar, equitativos o no, y el rol de los elementos que involucra la esperanza matemática en su elección. Con ello, se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿En qué elementos relacionados con la esperanza matemática de un juego, equitativo o no, se basan los estudiantes para argumentar su toma de decisiones?
- ¿Cómo afecta en la selección de un jugador y un juego el número de jugadas?

MARCO CONCEPTUAL

La alfabetización probabilística se entiende como el conocimiento necesario para "acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real" (Gal, 2012, p. 4). Es por ello necesario construir en los escolares los conocimientos que permitan la toma decisiones en condiciones de incertidumbre con argumentos basados en la probabilidad (Batanero, 2005). Una estrategia para ello es el análisis de juegos de azar (dados, monedas, ruletas) que facilitan la comprensión del azar (Cañizares et al, 2004), el estudio de su naturaleza impredecible y la necesidad de contar con herramientas probabilísticas que permiten la toma de decisiones (Batanero et al., 2019).

Son escasas las investigaciones sobre las intuiciones que presentan los estudiantes acerca de la idea de juego equitativo (Hernández et al., 2021). Pero, Batista et al. (2022) ante tareas de juego equitativo indican ciertas dificultades como influencia de creencias y experiencias personales. Por otra parte, investigaciones en situaciones no equitativas con estudiantes de Bachillerato (16 años), muestran que estos son capaces de identificar la opción más favorable mediante el cálculo de la esperanza matemática (Guerrero et al., 2017). En este sentido, investigaciones con estudiantes de Educación Primaria (5 y 10 años) han puesto de relieve que estos estudiantes ante una toma de decisiones comprenden algunos componentes básicos del concepto de esperanza matemática, considerando la probabilidad de ganar, así como el valor del premio (Lapidow y Bonawitz, 2023; Serradó, 2018; Schlottmann y Anderson, 1994). En un trabajo reciente (Oval y García-Alonso, 2024) también se ha podido observar este resultado, pero en esta ocasión con estudiantes de Educación Secundaria (13 años), cuando estos se enfrentan a un juego no equitativo.

Basándonos en estos antecedentes, nos proponemos analizar qué elementos, de los que intervienen en el concepto de esperanza matemática, utilizan los estudiantes de secundaria cuando deben seleccionar un jugador de un juego de azar que puede ser equitativo o no. Además, analizaremos, si el número de partidas interviene en los argumentos que han adoptado anteriormente en su decisión.

METODOLOGÍA

La muestra la constituyen un aula de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (13 años), seleccionada de forma no aleatoria, formada por 22 estudiantes de un centro concertado y urbano de Santa Cruz de Tenerife (España), los cuales no han trabajado contenidos probabilísticos en el actual curso. El alumnado está agrupado en 11 parejas y responden a la actividad conjunta o individualmente, según lleguen o no a consenso. Cada respuesta constituye una unidad de análisis, que estará identificada mediante la codificación AX.Y, donde A.X indica la pareja e Y cada estudiante, con valores 1 o 2.

De acuerdo con el objetivo de este estudio se realiza un enfoque mixto, descriptivo y exploratorio (McMillan y Schumacher, 2005) en el que se han establecido categorías de respuestas atendiendo al análisis del contenido (Krippendorff, 2013). El proceso de análisis siguió varias etapas: lectura de las

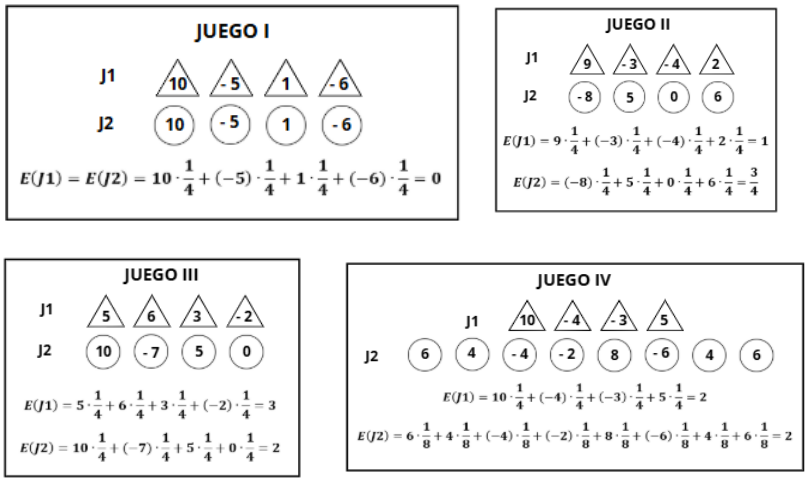
respuestas de los estudiantes, codificación de respuestas individuales y por parejas, identificación de los elementos que fundamentan la respuesta, categorización de las respuestas y resumen de los resultados. Por ello, el proceso seguido ha sido el de codificación múltiple ciego con dos codificadores. Finalmente se han seleccionado algunas respuestas para ejemplificar las categorías.

Instrumento de análisis

La actividad propuesta es una modificación a partir de los juegos utilizados en otras investigaciones, como *What's in the box* (Lapidow y Bonawitz, 2023) o *Integer Addition Bingo* (Serradó, 2018) y que, entre otras características, no conllevan apuestas. Los estudiantes deben completar 4 juegos para dos jugadores. Cada uno de ellos tiene cuatro fichas, salvo el juego IV, en el que hay un jugador que tendrá cuatro y otro jugador ocho fichas. Cada ficha tiene asignado un número entero entre el -10 y el 10, que configura la esperanza matemática de cada jugador (Figura 1). La actividad se desarrolla en una sesión de una hora de clase y, por esta razón, cada pareja realiza tres juegos: I, II / III y IV. El objetivo de los juegos es lograr la mayor puntuación en diez partidas. Para conseguir esta puntuación cada jugador contará con varias fichas colocadas boca abajo, de modo que no se vea su número. En cada turno, elegirá una, anotará el número, la devolverá boca abajo y mezclará las fichas. Repetirá este proceso durante las diez partidas.

Figura 1

Composición de los juegos y cálculo de la esperanza matemática de cada jugador.



Una vez han completado los tres juegos, rellenan la ficha de reflexión (Figura 2). Esta ficha consta de dos preguntas que recogen su justificación dada en la elección de un jugador, teniendo en cuenta su experiencia en cada juego y suponiendo que hubieran jugado 5000 partidas.

Figura 2

Preguntas planteadas al alumnado en la reflexión final sobre el juego.

1. Si tuvieras que elegir un juego, ¿qué juego elegirías? ¿Qué jugador preferirías ser? ¿Por qué?
2. Si se realizaran 5000 partidas, ¿qué juego preferirías? ¿Qué jugador preferirías ser? ¿Por qué?

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las respuestas de los estudiantes se clasifican en cuatro categorías, según el elemento en que basan su argumento en cada respuesta: *Cantidad* de fichas de los jugadores, *Valor* de las fichas que poseen los diferentes jugadores, *Cantidad y valor* cuando combinan ambas, *Experiencia* que les ha producido el juego o *Sin justificar*. En la categoría *Experiencia* se ha incluido tanto si el estudiante señala que ha sido divertido el juego como si argumenta en base a los resultados de los 10 lanzamientos.

Pregunta 1: Elección de un juego

En la Tabla 1 se resumen los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes. Se muestran con fondo gris aquellas parejas cuya respuesta fue única y llegaron a un acuerdo.

Tabla 1

Juego y jugador seleccionado en la pregunta 1.

Tipo de argumento	Juego I	Juego II		Juego III		Juego IV		TOTAL (porcentaje)
		Jug1*	Jug2	Jug1*	Jug2	Jug1	Jug2	
Cantidad	-	-	-	A11.1	-	-	A5.1 A9.1 A9.2 A10.1 A10.2 A11.2	7 (31.8)
Valor	-	-	-	A8.1	-	-	-	1 (4.5)
Cantidad y valor	A2.1 A2.2	A6.1 A6.2	-	-	A1.1 A1.2	A4.1 A4.2	-	8 (36.4)
Experiencia	-	A3.2	-	A5.2	A7.1	A7.2	A3.1	5 (22.7)
Sin justificar	-	-	A8.2	-	-	-	-	1 (4.5)
TOTAL (porcentaje)	2 (9.1)	3 (13.6)	1 (4.5)	3 (13.6)	3 (13.6)	3 (13.6)	7 (31.8)	22 (100)

*Jugador con esperanza matemática favorable.
Con fondo gris se representan las parejas que alcanzaron acuerdo en su respuesta.

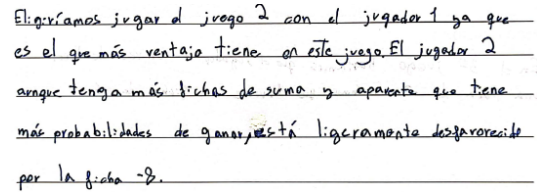
Se observa que, globalmente, 12 estudiantes (54.5%) han seleccionado el Juego I o IV, es decir, han elegido juegos equitativos, cuyos jugadores tienen la misma esperanza matemática. Mientras que, los otros diez estudiantes (45.4%) seleccionaron alguno de los juegos no equitativos (II y III). Debemos destacar que, cuatro de ellos (18.2%) eligieron el jugador 2, el jugador con menor esperanza matemática.

El Juego I solo lo elige la pareja A2 (9.1%) y se clasifica en la categoría *cantidad y valor*. En este caso, en su justificación señalan que "al tener las mismas fichas nos parece más igualado. [Y] nos daría igual el jugador porque tenemos los mismos números", con lo que se basa en las fichas y en sus valores. Esta pareja elige el juego en el que no hay diferencias entre los jugadores.

El Juego II lo escogen cuatro estudiantes (18.2%), de los que tres eligen el jugador con mayor esperanza matemática (Jug1). El estudiante A3.2 argumenta basándose en su propia experiencia ("porque ganamos más rondas"), mientras que la pareja A6 (Figura 2) argumenta en base a la cantidad y el valor, cuando dice "más [cantidad de] fichas de suma" y "ficha -8". Un estudiante elige este juego sin argumentarlo.

Figura 2

Respuesta (única) de la pareja A6 a la Pregunta 1.



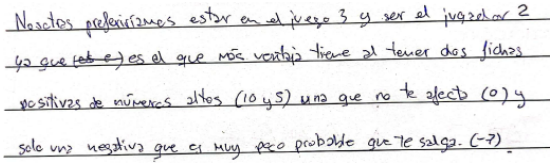
Elegiríamos jugar el juego 2 con el jugador 1 ya que es el que más ventaja tiene en este juego. El jugador 2 aunque tenga más fichas de suma y aparenta que tiene más probabilidades de ganar, está ligeramente desfavorecido por la ficha -8.

El Juego III es un juego no equitativo escogido por seis estudiantes, repartidos entre los que eligen el jugador 1 y el jugador 2. La pareja A1 ha elegido el jugador con desventaja (Jug2), dentro de la

categoría *cantidad y valor* ya que identifican los valores y la cantidad de las fichas (Figura 3). En su argumento consideran que el valor 0 "no te afecta" sobre la ventaja. Por su parte, el estudiante A7.1 elige este jugador en base a su *experiencia* ("me gusta más y para mí fue más divertido").

Figura 3

Respuesta (única) de la pareja A1 a la Pregunta 1.

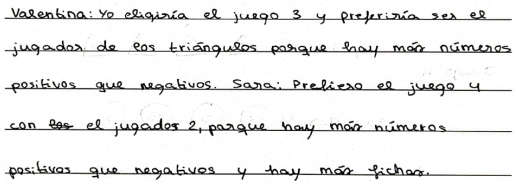


Nosotras preferiríamos estar en el juego 3 y ser el jugador 2 ya que es el que más ventaja tiene al tener dos fichas positivas de números altos (10 y 5) una que no te afecta (0) y solo una negativa que es muy poco probable que te salga (-7).

Entre los que eligen el jugador con ventaja (Jug1), se encuentra el estudiante A11.1 (Figura 4) que da una respuesta en la categoría *cantidad*, pues señala que hace su elección porque ese jugador tiene "más números positivos que negativos". En esta afirmación también se observa que considera que el cero no influye en el resultado del juego por carecer de signo. En cambio, el jugador A8.1 afirma que "la suma es mayor que todas las demás", aunque esto no es correcto. En ambos casos solo se está teniendo en cuenta un elemento para justificar su elección.

Figura 4

Respuesta de la pareja A11.



Valentina: Yo elegiría el juego 3 y preferiría ser el jugador de los triángulos porque hay más números positivos que negativos.

Sara: Prefiero el juego 4 con el jugador 2, porque hay más números positivos que negativos y hay más fichas.

La mayoría de los estudiantes que han elegido el Juego IV (7 de los 10 estudiantes) han seleccionado el jugador 2, que coincide con el jugador con mayor número de fichas. Es por ello que encontramos seis de estos siete estudiantes dentro de la categoría *cantidad.* Así, por ejemplo, la pareja A9 argumentan que en este juego "preferimos el círculo [jugador 2] ya que tiene muchos números". Es importante destacar que, dado que el jugador 2 tiene mayor número de fichas, la probabilidad de elección de estas (1/8) es menor que la probabilidad de las fichas del jugador 1 (1/4).

En este mismo juego IV, los que eligieron el jugador 1, encontramos respuestas en la categoría *cantidad y valor*, como la dada por la pareja A4, quienes indican que "hay menos fichas y más probabilidad de que te toque un número mayor". Finalmente, el estudiante A7.2 basa su elección en su *experiencia*, indicando que "nos gustó más y para mí fue más divertido".

Atendiendo a los acuerdos y desacuerdos de las parejas, observamos que seis parejas de las 11 (54.6%) han dado una respuesta consensuada. Tres parejas de ellas han elegido el Juego IV y el resto se ha repartido en los otros tres juegos. Cuatro de las parejas dan su justificación en la categoría *cantidad y valor* (ejemplo, Figura 2), mientras que el resto sólo atienden a la *cantidad*.

Entre las cinco parejas que no han llegado a un acuerdo (45.5%), tres se sitúan en el mismo tipo de argumento, sin embargo, ha elegido diferente juego y jugador. Así, en la pareja A11 (Figura 4), cada miembro elige un juego diferente, pero su razonamiento se corresponde a la *cantidad* de fichas.

Pregunta 2: juego elegido que garantiza el éxito tras 5000 partidas

En el supuesto de un número elevado de partidas, la respuesta dada por 11 estudiantes (50%) difiere de la respuesta dada en la pregunta anterior (Tabla 2). De ellos, se observa que tres estudiantes pasan

de elegir un juego equitativo a uno que no lo es (A9.1, A9.2 y A5.1) y dos a la inversa (A5.2 y A7.1). Además, cinco de los estudiantes que eligieron al jugador 2 en la pregunta 1 han pre preferido el jugador 1, jugador con mayor esperanza matemática (A1.1, A1.2, A5.1, A9.1 y A9.2).

Tabla 2

Juego y jugador seleccionado en la pregunta 2.

Tipo de argumento	Juego I	Juego II		Juego III		Juego IV		TOTAL (porcentaje)
		Jug1*	Jug2	Jug1*	Jug2	Jug1	Jug2	
Cantidad	-	-	-	A6.1 A6.2 A11.1	-	-	A5.2 A10.1 A10.2 A11.2	7 (31.827.3)
Valor	-	-	-	A5.1 A8.1 A9.1 A9.2	-	-	-	4 (18.2)
Cantidad y valor	A2.1 A2.2 A4.1 A4.2	-	-	-	-	-	-	4 (18.2)
Experiencia	-	A3.2	-	A1.1 A1.2	-	A7.1 A7.2	A3.1 A11.2	4 (18.2)
Sin justificar	-	-	A8.2	-	-	-	-	3 (13.6)
TOTAL (porcentaje)	4 (18.2)	1 (4.5)	1 (4.5)	9 (40.9)	0 (0)	2 (9.1)	5 (22.7)	22 (100)

*Jugador con esperanza matemática favorable.
Con fondo gris se representan las parejas que alcanzaron acuerdo en su respuesta.

En el Juego I, repite la pareja A2 y se suma la pareja A4. En ambos casos lo seleccionan porque reconocen que "cada uno juega con las mismas ventajas y desventajas" (pareja A4), con lo que señalan que el juego es claramente equitativo porque ambos jugadores tienen las mismas fichas. Esta pareja también había elegido un juego equitativo en la pregunta anterior.

El Juego II lo eligen dos estudiantes que no modifican su elección. Pero, mientras un estudiante no lo justifica, el otro vuelve a argumentar en base a su *experiencia* ("uno en el que gané", A3.2)

El Juego III, juego no equitativo con ventaja para el jugador 1, lo seleccionan 9 estudiantes (40.9%). Tres de los cuales habían elegido el Juego IV (A5.1, A9.1 y A9.2), argumentando en la categoría *valor*, pues lo seleccionan porque los números los consideran "más altos". Otros dos estudiantes habían seleccionado el Juego II (A6.1 y A6.2) pero, en este caso, su argumento está dentro de *cantidad*, pues "tiene más fichas de suma" (pareja A6). Finalmente, dos estudiantes habían elegido este juego, pero en esta ocasión cambian de jugador (A1.1 y A1.2). Su argumentación se sitúa en la categoría *sin justificar*, debido a que han indicado que "las fichas están más equilibradas", sin especificar a qué se refieren.

El Juego IV lo eligen 7 estudiantes (31.8%) y, mayoritariamente, cinco de ellos seleccionan el jugador 2, con mayor número de fichas. De estos cinco estudiantes, uno (A5.2) había elegido antes el Juego III y en esta ocasión argumenta su elección en la *cantidad* de fichas ("los círculos (J2) […] ya que hay más números y hay más posibilidades de ganar"). Otro estudiante argumenta que el jugador 2 y se clasifica en la categoría *cantidad*, porque en su razonamiento se basa en que "tiene más posibilidades de ganar" (A11.2). Con respecto al jugador 1, sólo lo eligen 2 estudiantes y su argumento se basa en su *experiencia* con el juego.

Con respecto a las parejas que han llegado a un acuerdo, se mantienen todas las que lo habían hecho en la primera pregunta, salvo la pareja A7, que esta vez llegan a un acuerdo porque el estudiante A7.1 se alinea con su pareja argumentando en base a la *experiencia* ("nos gusta más") (Juego IV y Jug1).

Por otro lado, al igual que en la pregunta 2 vemos que las parejas A5 y A8 no llegan a un acuerdo, por un lado, debido a que uno de los miembros de la pareja A5 atiende a la *cantidad* y otro al *valor*, mientras que la pareja A8, un estudiante atiende al *valor* y el otro no justifica su elección.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado las respuestas dadas por 22 estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (13 años), con el objetivo de indagar sobre la toma de decisiones ante juegos equitativos y no equitativos, analizando si lo hacen atendiendo a la *cantidad* de fichas de juego, el *valor* de estas o ambas variables. Además, se ha observado cómo afecta el número de jugadas en sus argumentaciones sobre la elección del juego. Los estudiantes trabajaron en parejas durante toda la sesión, lo que permite observar que se dan respuestas de mutuo acuerdo.

Con respecto a la elección del juego observamos que casi el mismo número de estudiantes elige un juego equitativo y un juego no equitativo, independientemente del número de partidas. No obstante, la mayoría de los estudiantes que elige un juego no equitativo selecciona el jugador que presenta mayor esperanza matemática (Jug1). De los diez estudiantes que eligen el Juego II o III, seis seleccionan el jugador 1.

La argumentación que siguen en sus elecciones no es la misma según el número de partidas realizadas. Mientras que, con 10 partidas, nueve estudiantes atienden a la *cantidad* y *valor* de las fichas, elementos que intervienen en el concepto de esperanza matemática, al pasar a 5000 partidas la mayoría de los estudiantes basa su razonamiento en un único elemento (*cantidad* o *valor*), ligeramente superior en el elemento *cantidad*. Con respecto al razonamiento para elegir el juego y el jugador, observamos que siete estudiantes atienden a un único elemento cuando eligen al Jugador 1 del Juego III, siendo este jugador el que presenta mayor esperanza matemática de los cuatro juegos propuestos. Además, uno de estos estudiantes argumenta diciendo que "la suma es mayor que todas las demás". Aquí podemos observar cierto acercamiento intuitivo a la noción de esperanza matemática. Aunque su argumento, en este caso, no es del todo correcto.

También se ha detectado que algunos estudiantes prefieren aquellos juegos equitativos estereotipados, esto es, juegos en los que ambos jugadores tienen la misma cantidad y valor de las fichas (Juego I). Estos estudiantes argumentan que ningún jugador tiene ventaja frente al otro, lo que elimina el riesgo de desequilibrio en la partida.

Especialmente relevante ha sido el papel jugado por la ficha con valor 0, presente en los Juegos II y III. Los estudiantes la indicaban como una ficha que "no afecta" o "no influye" cuando se contabilizan los positivos y negativos, y lo trasladan así al estudio de la probabilidad. Esto evidencia la necesidad de trabajar situaciones de azar en las que se analice cómo la ficha cero no aporta puntos en el juego, pero sí interviene en la probabilidad de selección de las fichas que configuran el juego.

Debemos destacar que 5 y 7 estudiantes (22.7% y 31.8%, respectivamente) dan una justificación a la pregunta 1 y 2, respectivamente, basándose en su propia *experiencia*, es decir, no incorporan en su razonamiento otros aspectos distintos a los resultados que obtuvieron en las partidas o la sensación aportada por el juego, cuando seleccionan un juego bajo incertidumbre. Estos estudiantes muestran un enfoque subjetivo de la probabilidad (Batanero, 2005), y que constituye una de las dificultades señaladas del juego equitativo (Batista et al., 2022): influencia de su experiencia en la evaluación de un juego equitativo.

Somos conscientes de las limitaciones de este estudio debido a que la muestra es muy reducida, pero, esta aproximación sugiere que es necesario seguir indagando acerca de cómo el alumnado de Educación Secundaria elabora sus argumentos ante la toma de decisiones en un entorno de incertidumbre, que involucra juegos equitativos y no equitativos. Se ha constatado en este estudio que estos estudiantes son capaces de argumentar utilizando los elementos que intervienen en la esperanza matemática, lo que sugiere que puede ser objeto de estudio en esta etapa. Por otro lado, es

necesario seguir profundizando en conocimientos como la esperanza matemática para lograr una alfabetización estadística consolidada que permita tomar decisiones argumentadas.

Referencias

Alsina, A., y García-Alonso, I. (2023). La estadística y la probabilidad y su didáctica en la formación inicial de maestros en España. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 6*(2), 11–27.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3):247-264.

Batanero, C., Ortiz, J., Gómez, E. y Gea, M. M. (2019). Les jeux équitables comme contexte pour l'enseignement des probabilités et la formation des enseignants. En V. Martin, M. Thibault y L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités,* 219-244. Presses de l'Université de Québec.

Batista, R., Borba, R., y Henriques, A. (2022). Fairness in Games: A study on Children'S and Adults' Understanding of Probability. *Statistics Education Research Journal, 21*(1), article 13. https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.79

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., y Ortiz, J. J. (2004). Children's understanding of fair games. In M. A. Mariotto (ed.). *European research in mathematics III: Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*.

Estrella, S., Méndez, M., Olfos, R. y Aguilera, J (2022). Early statistics in kindergarten: analysis of an educator's pedagogical content knowledge in lessons promoting informal inferential reasoning. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 11*(1), 1–13.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. En S. J. Cho (Ed.). *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education,* 1-7. Springer.

García-Alonso, I., Vásquez, C. y Alsina, Á. (2025). Panorama curricular de la alfabetización temprana en Estadística y Probabilidad. *Profesorado. Revista de currículum y formación de profesorado, 29*(1), 265-294. DOI: https://doi.org/10.30827/profesorado.v29i1.30849

Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro J. J., y Contreras, J. M. (2017) Evaluación del conocimiento sobre la esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11*, 107–125.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., y Gea, M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas, 23*(34), 228–243.

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica.* Paidos.

Lapidow, E., y Bonawitz, E. (2023). What's in the Box? Preschoolers Consider Ambiguity, Expected Value, and Information for Future Decisions in Explore-Exploit Tasks. *Open Mind: Discoveries in Cognitive Science, 7*, 855–878. https://doi.org/10.1162/opmi_a_00110

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2001). *Research in Education. A conceptual introduction.* Pearse.

Oval, Z., y García-Alonso, I. (2024). Esperanza matemática en Educación Secundaria: Análisis Exploratorio. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 615).

Schlottmann, A., y Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology, 30(1)*, 56–66. https://doi.org/10.1037/0012-1649.30.1.56

Serradó, A. (2018). Reasoning in Decision Making Under Uncertainty and Decisions of Risk in a Game of Chance. *Teaching and Learning Stochastics*. 201–221. Springer.

PREDICCIÓN DE VALORES EN UNA TABLA DE FRECUENCIAS POR ESTUDIANTES CHILENOS

Predicting values in a frequency table by Chilean students

Pallauta, J. D[a]., Gea, M. M[b]., Valenzuela-Ruiz. S.[b] y Batanero, C.[b]

[a]Universidad de Los Lagos, [b]Universidad de Granada

Resumen

La interpretación y predicción de datos son capacidades que tienen gran relevancia en la sociedad actual, especialmente para la toma de decisiones informadas. En este trabajo se analiza la capacidad de estudiantes chilenos de educación secundaria para predecir valores a partir de una tabla de distribución de una variable con frecuencias absolutas y relativas. Para ello, se aplicó una tarea a 103 estudiantes chilenos de 7º curso de educación básica (14 a 15 años) y 88 de 1º curso de educación media (15 a 16 años) en la que debían predecir los posibles resultados de un experimento aleatorio equiprobable repetido un número determinado de veces. Las respuestas fueron evaluadas y analizadas según los niveles de lectura. Los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes alcanzó niveles básicos de lectura, evidenciando dificultades en la resolución de este tipo de tareas.

Palabras clave: tablas estadísticas, educación secundaria, niveles de lectura.

Abstract

Data interpretation and prediction are skills that are highly relevant in today's society, especially for informed decision making. In this paper we analyse the ability of Chilean secondary school students to predict values from a distribution table of a variable with absolute and relative frequencies. *For this purpose, a task was given to 103 Chilean students in the 7th grade of basic education (14-15 years old) and 88 students in the 1st grade of secondary education (15-16 years old), in which they had to predict the possible outcomes of an equiprobable random experiment repeated a given number of times. The responses were assessed and analysed according to the reading levels. The results showed that most of the students reached basic reading levels, evidencing difficulties in solving this type of task.*

Keywords: *statistical tables, secondary education, reading levels.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los ciudadanos tienen acceso a una amplia variedad de datos sobre ámbitos sociales, políticos o económicos, que es difundida a través de los medios de comunicación (p. ej. prensa, televisión e Internet). Esta abundancia de información demanda que la ciudadanía cuente con las capacidades de interpretar, analizar y realizar predicciones fundamentadas de los datos a partir de valores conocidos, para tomar decisiones adecuadas en diferentes ámbitos (Gal, 2022; Kuntze et al., 2015).

El currículo chileno de educación secundaria (MINEDUC, 2015) propone el estudio de tablas estadísticas como un objeto de aprendizaje por sí mismo y también como una herramienta para tratar otros temas, por ejemplo, el análisis de variables bidimensionales, o los conceptos de probabilidad compuesta y condicionada. Aunque las tablas estadísticas están presentes en el currículo, los estudios sobre su interpretación en educación secundaria son escasos, ya que la mayoría se enfoca en niños o en la interpretación de tablas de doble entrada (Gabucio et al., 2010). A pesar, de su uso frecuente para registrar y organizar los datos, y su amplia presencia en los libros de texto de secundaria (Pallauta

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Valenzuela-Ruiz. S. y Batanero, C. (2025). Predicción de valores en una tabla de frecuencias por estudiantes chilenos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

et al., 2021a; 2021b), los profesores desconocen los procesos cognitivos implicados en su interpretación (Friel et al., 2001). En este sentido, es relevante que los estudiantes de secundaria comprendan los diferentes tipos de tablas, su estructura y las relaciones entre los datos. Dicha comprensión favorecerá tanto su lectura e interpretación adecuada (Pallauta et al., 2023), como identificar tendencias, establecer posibles correlaciones y reconocer situaciones en que los datos podrían estar siendo utilizados de manera inapropiada o engañosa (OECD, 2021).

El objetivo de este trabajo es analizar la capacidad de predicción de valores a partir de una tabla de distribución de una variable con frecuencias absolutas y relativas de estudiantes chilenos de dos cursos diferentes de educación secundaria.

FUNDAMENTOS

Niveles de lectura de tablas y gráficos

Para caracterizar la complejidad que implica la interpretación de tablas y gráficos estadísticos, diversos autores han propuesto niveles de lectura de los mismos. En este trabajo nos centraremos en la jerarquía de Curcio (1989) que consta de tres niveles, ampliada posteriormente por Friel et al. (2001), y que ha sido utilizada en trabajos previos con gráficos estadísticos (p. ej. Díaz-Levicoy, 2018; Gea et al., 2017) y tablas estadísticas (Pallauta et al., 2021). Además, se incorpora un nivel N0 propuesto por Díaz-Levicoy (2018):

- *N0. No leen los datos.* Este nivel considera la ausencia de respuesta o aquellas que carecen de sentido de acuerdo a la pregunta planteada.
- *N1. Leer los datos*. Este nivel se centra en la interpretación de la estructura y los elementos de las tablas estadísticas. Se alcanza respondiendo a preguntas concretas referidas a dicha estructura y a los datos presentados, como indicar la frecuencia de una determinada modalidad o el valor de la variable representada en una tabla. No requiere realizar comparaciones o cálculos con los datos de la tabla.
- N2. *Leer dentro de los datos.* Este nivel involucra establecer relaciones o tendencias de la información presentada en la tabla, a partir de la comparación o la realización de cálculos con los datos. Por ejemplo, determinar la moda de una variable, a partir de los datos de una tabla de frecuencias.
- *N3. Leer más allá de los datos.* Este nivel se centra en extrapolar, predecir o realizar inferencias a partir de la información proporcionada por la tabla. Por ejemplo, interpolar o extrapolar un valor que no se encuentra explícito dentro de una tabla de datos que representa la variación de una variable a lo largo de un periodo de tiempo.

Antecedentes

Algunas investigaciones han evidenciado que los estudiantes tienen dificultades al interpretar datos y realizar predicciones a partir de tablas estadísticas (p. ej. Estepa et al., 1999; Prodromou, 2015). En este sentido, los trabajos que han utilizado los niveles de lectura propuestos por Curcio (1989) o Friel et al. (2001) para analizar las interpretaciones de tablas estadísticas de los estudiantes de educación secundaria, se han centrado en las tablas de doble entrada o se han desarrollado con una muestra muy reducida, limitando la generalización de sus hallazgos. Así Gabucio et al. (2010) analizaron las respuestas de 200 estudiantes españoles, de 5º y 6º de primaria y 1º y 2º de ESO (10 a 14 años) a un cuestionario compuesto de ítems de opción múltiple relacionados con una tabla de doble entrada. Los resultados indicaron dificultad en alcanzar los niveles más altos de lectura y que no hubo incremento de las respuestas correctas conforme se avanzaba de curso. González et al. (2021) analizaron la interpretación de tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos de 10 estudiantes chilenos de 4º de secundaria (15 a 16 años), a partir de una tabla de distribución de una variable en el contexto de la COVID-19. Obtuvieron buenos resultados en el nivel N1, leer los datos,

(Curcio, 1989), mientras que el nivel N3, leer más allá de los datos, fue más complejo, pues los estudiantes se basaron en sus opiniones personales para responder a las preguntas, en lugar de utilizar la información representada en la tabla.

Pallauta et al. (2023) diseñaron y validaron un cuestionario con 128 estudiantes españoles de 3º de ESO (14-16 años), del cual se toma una de las tareas empleadas en este estudio. En la tarea propuesta en este trabajo, el porcentaje de respuestas correctas fue el 52%, mientras el 55,5 % de la muestra se situó en el nivel N2 (leer dentro de los datos) y el 40,6% no alcanza el nivel N1 (Curcio, 1989).

En este trabajo, se analiza la capacidad de predicción de valores a partir de una tabla de distribución de una variable con frecuencias absolutas y relativas basados en los niveles de lectura, con una muestra nueva, de mayor tamaño que incluye estudiantes chilenos de secundaria de dos grupos de edad, a diferencia de Pallauta et al. (2023).

METODOLOGÍA

Muestra y tarea planteada

La muestra fue intencional y se compuso de 191 estudiantes chilenos, 103 de 7º curso de educación básica (EB) (14 a 15 años) y 88 de 1º curso de educación media (EM) (15 a 16 años), que estudiaban en cinco centros educativos de diferentes provincias del país: 1 público, 3 concertados y 1 privado. La distribución de la muestra por género, curso y tipo de centro educativo, se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1.

Distribución por porcentaje de la muestra según género, curso y centro educativo

Tipo de centro educativo	7º EB N=103		1º EM N=88	
	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
Público	7,8	16,5		
Concertado	25,2	27,2	29,5	43,2
Privado	14,6	8,7	17,1	10,2

A los participantes se les propuso resolver, de manera individual, una tarea con dos apartados (Figura 1), tomada de Pallauta et al. (2023) quienes la adaptaron de un libro de texto chileno de 7º EB (Merino et al., 2016). La tarea muestra en una tabla la distribución de una variable (número de una ficha escogida al azar entre 10 numeradas de 1 al 10) con parte de las frecuencias absolutas y relativas obtenidas al realizar 1000 repeticiones de un experimento aleatorio, con resultados equiprobables. Sin embargo, se omitieron los valores de las últimas dos columnas de la tabla, que los estudiantes deben completar a partir de los datos disponibles.

En el primer apartado se pide indicar la frecuencia absoluta del valor 10 en las 1000 repeticiones, para ello, el estudiante debe comprender que, al ser los casos equiprobables, las frecuencias absolutas de los valores 9 y 10 serán similares a los del resto de las columnas y entre todos ellos han de sumar un total de 1000, por tanto, existen varias opciones de respuesta correcta. En el segundo apartado, que sólo se propuso a los estudiantes mayores de 1º EM, se requiere generalizar los datos al incrementar a 10000 las simulaciones del experimento. Puesto que se deben predecir valores que no pueden obtenerse directamente de la tabla, se requiere un nivel de lectura N3 en la categoría de Curcio (1989). Se debe aplicar una proporcionalidad de las frecuencias, pero no debe ser exacta, para reflejar la variabilidad aleatoria que se espera en el experimento.

Figura 1.

Tarea propuesta a los estudiantes

En la siguiente tabla se registraron los resultados al extraer 1.000 veces una ficha desde una urna con 10 fichas numeradas desde el 1 al 10, pero olvidaron completar las dos últimas columnas.

1000 extracciones										
Número de la ficha obtenida										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia absoluta	98	106	96	97	98	110	102	98		
Frecuencia relativa	0,098	0,106	0,096	0,097	0,098	0,110	0,102	0,098		

Responde

a) ¿Cuántas veces piensas que salió el 10? Justifica tu respuesta.
b) Si se aumentan las extracciones a 10.000 ¿cuántas veces piensas que saldría aproximadamente cada ficha? Justifica tu respuesta.

Categorías de análisis

Recogidas las respuestas escritas individuales de cada estudiante, se utilizó un análisis de contenido (Mayring, 2021) para evaluar las respuestas e identificar el nivel de lectura alcanzado por el estudiante. Este método, típico en estudios cualitativos, permite analizar variables subyacentes en un texto, para extraer información que se pueda tratar estadísticamente. Para asegurar la fiabilidad de la codificación, el 15% de las respuestas fueron analizadas de manera independiente por otro investigador y, en caso de desacuerdo, se discutieron con los demás autores hasta llegar a un acuerdo. A continuación, se describen las categorías utilizadas para estas variables, incluyendo ejemplos de respuestas de los estudiantes que han sido codificados como Ex.

Respuesta correcta. En el primer apartado, se considera correcta cuando se señala un valor alrededor de 100, dado que el total de extracciones son 1000, como indica E66, por tanto, las frecuencias relativas son próximas a 0,1. En el segundo apartado, la respuesta correcta consiste en una estimación basada en 10 veces los valores expuestos en la tabla, usando razonamiento proporcional e indicando cierta variabilidad en los datos. Por ejemplo, E40 indica que cada ficha saldrá alrededor de 1000 por tratarse de un experimento equiprobable.

E66: Yo creo que salió 98 veces o 97 veces, porque dividí en dos 195 que es lo que falta para completar 1.000 extracciones, y los valores que faltan deben ser enteros y parecidos a los otros (Apartado 1).

E40: Cada ficha saldrá aproximadamente unas 1000 veces, porque al ser al azar cada ficha tiene la misma probabilidad de salir, lo que hace que salgan una cantidad similar de veces (Apartado 2).

Respuesta parcialmente correcta. En el primer apartado serían las respuestas que toman en cuenta el total de extracciones realizadas, sin considerar la tendencia de los datos, como E10, o solo toman en cuenta la tendencia de los datos, desatendiendo la información sobre el total de las extracciones. En el segundo apartado cuando se indica la cantidad de veces que salió alguna ficha, particular, cuya cantidad es producto de la multiplicación del valor de la frecuencia absoluta por 10, no aportando razonamiento sobre la variabilidad, como E5 quien sólo registra la cantidad de veces que podría salir la ficha 1.

E10: Entre 0 y 195, porque no puede haber salido más veces (Apartado 1).

E5: Si el 1 salió 98 veces, saldrá 980 (Apartado 2).

Respuesta incorrecta. En el primer apartado corresponden a las respuestas con valores desajustados a la tendencia de los datos expuestos, además, generalmente, no justifican como E35. En el segundo apartado, las respuestas de este tipo se aferran al carácter aleatorio de la experiencia de extraer una determinada ficha de una urna, por ejemplo, E3 indica que no se puede predecir el resultado.

E35: 6 veces (Apartado 1).

E3: No se puede saber, ya que a lo mejor el 1 sale 10 veces y el 9, 200 veces, porque al ser una urna no sigue ningún código (Apartado 2).

Adicionalmente, la interpretación tanto de los cálculos realizados como de las justificaciones aportadas en las respuestas, permite caracterizar e identificar el nivel de lectura (Curcio, 1989) alcanzado por los estudiantes, que se describe a continuación.

N0. No leen los datos. Este nivel incluye las respuestas incorrectas como E52 en el primer apartado o E18 en el segundo.

E52: Pienso que son 104, porque a la gente le gustan más los números altos (Apartado 1).

E18: No lo sé, porque tienes la misma probabilidad de sacar un 3 que un 5 (Apartado 2).

N1. Leer los datos. La respuesta evidencia una lectura literal de los datos presentados en la tabla. Por ejemplo, en el primer apartado algunos estudiantes, como E7, justificaron su respuesta en la frecuencia del valor 6 de la variable, al considerar que 110 es múltiplo de 10. En el segundo, E139 indica los mismos valores presentados en la tabla cuando se realizan 1000 extracciones, añadiendo las veces que podrían haber salido las fichas 9 y 10.

E7: Una sola vez ya que 110 es múltiplo de 10 (Apartado 1, Resp. Incorrecta).

E139: 1: 98; 2: 106; 3: 96; 4: 97; 5: 98; 6: 110; 7: 102; 9: 98; 9: 100; 10; 193 (Apartado 2, Resp. Incorrecta).

N2. Leer dentro de los datos. En este nivel se denota una correcta lectura y la realización de cálculos o comparación de los datos como la respuesta de E101. Sin embargo, en el primer apartado, se ignora que la suma de las frecuencias absolutas debe totalizar 1000. En el segundo apartado, se presentan respuestas en que el estudiante identifica que se obtendrá la frecuencia para cada ficha multiplicando el valor de la frecuencia absoluta por 10, para cada valor de la variable, como lo indica E148, pero no se tiene en cuenta la variabilidad aleatoria.

E101: Yo creo que salió 98 veces, ya que varias veces salió ese valor (Apartado 1, Resp. Correcta).

E148: x10, porque se agrega un 0 (Apartado 2, Resp. Parcialmente correcta).

N3. Leer más allá de los datos. En el primer apartado se considera la tendencia de los datos y, además, que la suma de las frecuencias absolutas es 1000, como indica E100. En el segundo apartado, alcanzan este nivel de lectura las respuestas que evidencian una relación de los datos al incrementar a 10000 las extracciones de la urna, como E30, quien señala que cada ficha se obtendrá alrededor de 1000 veces.

E100: Yo pienso que el 10 salió una cantidad de veces cercana al 100, ya todos los demás lo hicieron un poco más o un poco menos; además todas frecuencias absolutas deben sumar 1000. (Apartado 1, Resp. Correcta).

E30: Aproximadamente 1000, porque si divido 10000 entre 10 pues sale 1000 (Apartado 2, Resp. Correcta).

RESULTADOS

Los resultados consideran la evaluación de las respuestas junto al nivel de lectura alcanzado, seguido por el índice de dificultad de los dos apartados de la tarea.

En la Tabla 2 se presentan los resultados de la evaluación de las respuestas junto al nivel de lectura de la tarea planteada, recordando que los alumnos de 7º EB solo tuvieron que responder al primer apartado. Un porcentaje importante de estudiantes de 1° EM deja ambos apartados sin contestar, especialmente el segundo apartado donde menos de la mitad lo responde, evidenciando que la tarea fue difícil para los estudiantes, a pesar de estar adaptada de un libro de 7º EB. Las respuestas correctas fueron pocas en el primer apartado en ambos cursos, particularmente en 7º EB, y aumentan algo en

el segundo apartado. Por lo tanto, fue más sencillo para los estudiantes de 1º EM reconocer que al aumentar el número de simulaciones hasta 10000, el número de veces que saldría cada ficha sería aproximadamente 10 veces a los valores obtenidos en 1000 simulaciones. Las respuestas parcialmente correctas son más frecuentes en el primer apartado y en los alumnos de 7° EB, así como las incorrectas.

Tabla 2.

Porcentaje de evaluación y nivel de lectura de las respuestas en la Tarea

	Apartado 1								Apartado 2			
	7º EB N =103				1º EM N = 88				1º EM N = 88			
	N0	N1	N2	N3	N0	N1	N2	N3	N0	N1	N2	N3
Correcto			5,8	10,7		1,1	4,5	18,2		1,1	6,8	22,7
Parcialmente correcto		19,4	21,4			5,7	20,5			1,1	5,7	1,1
Incorrecto	12,6	1,9			3,4	2,3			2,3	6,8		
No responde	28,2				44,3				52,3			

En relación a los niveles de lectura alcanzados por los estudiantes en la tarea, se observa en la tabla 2 que en el primer apartado lo más frecuente en los dos grupos fue alcanzar el nivel N2 (leer dentro de los datos), especialmente en 7º EB, seguido en este curso por el nivel N1 (leer los datos) y N3 (leer más allá de los datos). En el caso de 1º EM lo más frecuente después del nivel N2 es el N3 siendo la mitad el porcentaje de los que quedan en nivel N1. Hay también menos respuestas de estudiantes de este curso que de 7º EB que quedan en nivel N0. En el segundo apartado, planteado únicamente 1° EM, es mayor la proporción de estudiantes que alcanzan el nivel máximo N3 previsto en la tarea, y por tanto disminuyen los porcentajes en los restantes niveles. La asociación entre el nivel de lectura y el curso en el primer apartado no fue estadísticamente significativa en la prueba de Chi-cuadrado (Chi = 7,045, g.l = 3, p = 0,70).

Por otra parte, en la Tabla 3 se presenta el valor del índice de dificultad de esta tarea, que fue calculado asignando una puntuación igual a 1 a las respuestas correctas o parcialmente correctas y 0 en otro caso, junto a su desviación típica. Se observa en el primer apartado una dificultad moderada, siendo más complejo para los estudiantes de 1° EM, aunque el análisis de las diferencias de las medias de aciertos por curso en este apartado no mostró una diferencia estadísticamente significativa (t=-1,004; p=0,317). En el segundo apartado la dificultad se incrementa respecto al anterior en los estudiantes de 1° EM.

Tabla 3.

Índice de dificultad de la Tarea

	Apartado 1		Apartado 2
	7º EB N =103	1º EM N = 88	1º EM N = 88
Media	0,57	0,50	0,39
Desviación Típica	0,497	0,503	0,490

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo tuvo como objetivo analizar la capacidad de predicción de valores a partir de una tabla de distribución de una variable con frecuencias absolutas y relativas de estudiantes chilenos de educación secundaria, aportando nuevos resultados sobre el tema en el contexto de la educación secundaria.

Respecto a las respuestas de la tarea, el índice de dificultad fue menor para la muestra considerada en este estudio a diferencia de Pallauta et al. (2023). En el primer apartado, a nivel general ambos grupos tienen resultados similares, sin embargo, se destaca que la mayor parte de los estudiantes de 1° EM no responde, coincidiendo con Pallauta et al. (2023). Además, las respuestas correctas son ligeramente más frecuentes en este curso, mientras que las respuestas parcialmente correctas fueron más frecuentes en 7° EB. En el segundo apartado, planteado solo en 1° EM, se incrementó el porcentaje de estudiantes tanto de los que no responden como los que lo hacen correctamente.

Por otra parte, en este trabajo las respuestas de los estudiantes fueron categorizadas de acuerdo con los diferentes niveles de lectura propuestos por Curcio (1989), destacando la necesidad de incorporar el nivel N0 que evidencia una ausencia de un mínimo de lectura (Díaz-Levicoy, 2018; Díaz-Levicoy et al, 2015). En el primer apartado, la mayoría de las respuestas alcanza el nivel N2 (leer dentro de los datos) especialmente en 7° EB, mientras que el nivel máximo N3 es alcanzado mayoritariamente por los estudiantes de 1° EM.

En el segundo apartado, la mayor parte de los estudiantes de 1° EM alcanzan el nivel N3, aunque más de la mitad no respondió la tarea. De este modo se evidencia, al igual que otros estudios, que es complejo alcanzar niveles más elevados de lectura. También en Gabucio et al. (2010), los ítems de nivel N3 fueron los más complejos para los estudiantes, algo similar ocurrió con González et al. (2021) en que las interpretaciones de los estudiantes se centraron en los niveles básicos de lectura (N1 o N2). Esto se podría explicar porque los currículums de secundaria presentan una limitada incorporación del análisis crítico de la información estadística en distintos contextos, lo que podría justificar esta deficiencia (Callingham y Watson, 2017). Asimismo, los análisis de libros de texto chilenos de educación secundaria evidencian una alta presencia de tareas sobre tablas estadísticas centradas, principalmente, en los niveles más básicos de lectura (Pallauta et al. 2021a; 2021b).

Una implicación del estudio para la enseñanza del tema radica en la importancia de proponer a los estudiantes tareas que promuevan su capacidad de predecir datos a partir de información parcial presentada en tablas estadísticas (Sharma, 2013), que es parte de la cultura estadística (Gal, 2022; Kuntze et al., 2015). Igualmente, se resalta la necesidad de integrar en la enseñanza situaciones que fomenten el uso de justificaciones fundamentadas en los datos, especialmente en contextos de incertidumbre (Batanero y Borovcnik, 2016).

Para finalizar, reconocemos las limitaciones del estudio, al haber utilizado una única tarea. Por ello, se abre una línea de investigación centrada en el análisis de la dificultad para los estudiantes en otras tareas de predicción a partir de tablas estadísticas, y el nivel de lectura que alcanzan en dichas tareas.

Agradecimientos

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE.

Referencias

Callingham, R. y Watson, J. M. (2017). The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 181-201. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.223

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension elementary and middle school activities*. National Council of Teachers of Mathematics.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.

Díaz-Levicoy, D. (2018). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos chilenos de educación primaria.* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). SEIEM.

Estepa, A., Batanero, C. y Sanchez, F. T. (1999). Students´ intuitive strategies in judging association when comparing two samples. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 7*, 17-30.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 1-24. https://doi.org/10.2307/749671

Gal, I. (2022). Critical understanding of civic statistics: Engaging with important contexts, texts, and opinion questions. En J. Ridgway (Ed.), *Statistics for Empowerment and Social Engagement* (pp. 323-343). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_13

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S. y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación, 22*(2), 183-197. https://doi.org/10.1174/113564010791304528

Gea, M. M., Arteaga, P. y Cañadas, G. R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 19-37. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i12.189

González, C. P., Muñoz, R. y Muñoz, J. (2021). Características argumentativas de la interpretación de tablas de frecuencia en estudiantes chilenos de segundo año medio. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(1), 17-29. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i1.39

Kuntze, S., Martignon, L., Vargas, F. y Engel, J. (2015). Competencies in understanding statistical information in primary and secondary school levels: An inter-cultural empirical study with German and Colombian students. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7,* 5-25. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.103

Mayring, P. (2021). *Qualitative content analysis: A step-by-step guide.* Sage.

MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7º básico a 2° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Merino, R., Muñoz, V., Pérez, B. y Rupin, P. (2016). *Texto del estudiante Matemática 7º básico*. SM

OECD. (2021). *21st-Century Readers: Developing Literacy Skills in a Digital World*. OECD. https://doi.org/10.1787/a83d84cb-en

Pallauta, J. D, Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Un instrumento para evaluar la comprensión de tablas estadísticas en educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias. 41*(3), 89-112. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5926

Pallauta, J. D., Batanero, C., Gea, M. M. y Arteaga, P. (2021a). Niveles de lectura y contextos en las actividades sobre tablas estadísticas en libros de texto chilenos y españoles. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(4), 119-133. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.74

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021b). Complejidad semiótica de tablas estadísticas y su distribución en textos chilenos de educación básica. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 481 – 488). SEIEM

Prodromou, T. (2015). Students' emerging reasoning about data tables of large-scale data. *International Journal of Statistics and Probability*, *4*(3), 181-197. https://doi.org/10.5539/ijsp.v4n3p181

Sharma, S. (2013). Assessing students' understanding of tables and graphs: Implications for teaching and research. *International Journal of Educational Research and Technology, 4*(4), 61-69.

ANÁLISIS DEL USO DE LA ESTRATEGIA RECURSIVA EN TAREAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES LINEALES[i]

Analysis of the use of the recursive strategy in linear pattern generalization tasks

Pérez, O.[a], De Gamboa, G.[a] y Badillo, E.[a]

[a]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este estudio se analiza el impacto que tiene el uso de la estrategia recursiva en el éxito al resolver tareas de generalización de patrones lineales. Se analiza la implementación de tres secuencias de tres tareas de generalización de patrones lineales en tres grupos de alumnado de 1º de ESO. La diferencia entre las secuencias es la representación espacial de las figuras del enunciado de cada tarea y el orden en el que aparece cada tipo de representación. Se comparan las estrategias de generalización que utilizan los alumnos de los tres grupos en cada pregunta de cada tarea y el éxito en la resolución. Los resultados muestran diferencias significativas en el éxito en la resolución de las tareas cuando el alumnado utiliza la estrategia recursiva en la resolución de las primeras preguntas.

Palabras clave: *estrategias de generalización, tareas de generalización de patrones lineales, estadios de comprensión, tipos de representaciones del enunciado.*

Abstract

This study analyzes the impact of using the recursive strategy on success in solving linear pattern generalization tasks. It examines the implementation of three sequences of three linear pattern generalization tasks in three groups of 1st-year secondary school students. The difference between the sequences lies in the spatial representation of the figures in the statement of each task and the order in which each type of representation appears. The generalization strategies used by students in the three groups are compared for each question of each task, as well as their success in solving them. The results show significant differences in success in task resolution when students use the recursive strategy to solve the initial questions.

Keywords: *generalization strategies, linear pattern generalization tasks, stages of understanding, types of representations of the statement.*

INTRODUCCIÓN

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes en la actividad matemática Stacey (1989). Numerosas investigaciones han abordado diversos aspectos relacionados con las tareas de generalización lineal: las estrategias empleadas por el alumnado (Morales et al., 2018); los niveles de generalización (Zapatera, 2015); los obstáculos que surgen durante su resolución (El Mouhayar y Jurdak, 2015), la introducción al lenguaje algebraico (Blanton et al., 2015) o, el papel de los ámbitos numéricos y visuales (Rico, Castro y Romero, 2000).

Diversos autores (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005) han señalado que uno de los elementos matemáticos clave en el proceso de generalización es la relación entre la estructura espacial de las figuras y la cantidad de elementos que las componen. Otros estudios (Demetriou, 2004; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Nilsson y Juter, 2011) destacan que una de las dificultades fundamentales en el proceso de generalización es el paso del recuento a la abstracción del patrón (relación funcional), vinculado a la falta de flexibilidad, que se entiende como habilidad para modificar la estrategia de resolución cuando se modifica la demanda cognitiva (Krems, 1995). La fijación en una estrategia y

Pérez, O., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2025). Análisis de las estrategias de generalización utilizadas por el alumnado de secundaria en la resolución de tres versions de una secuencia de tareas de generalización de patrones lineales. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

la resistencia a modificarla constituyen un obstáculo que impide generalizar a cierta parte del alumnado (Lannin et al., 2006).

Desde el enfoque de Duval (2006), es fundamental emplear distintos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático, ya que las representaciones semióticas, entendidas como entidades construidas dentro de un sistema de signos, permiten comunicar y construir conocimiento matemático. Estas representaciones pueden adoptar la forma de figuras, esquemas, gráficos o expresiones simbólicas (Duval, 2006).

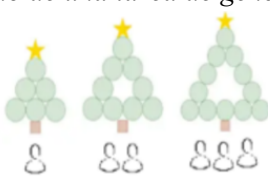
El objetivo de este estudio es analizar la relación entre las representaciones espaciales utilizadas en el enunciado de las tareas de generalización de patrones lineales, el uso de la estrategia recursiva y el éxito en la resolución de las tareas de los alumnos de 1º de ESO. En este contexto, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué papel desempeña la estrategia recursiva inicial en la evolución de las estrategias utilizadas por los estudiantes de 1º de ESO y en su desempeño al resolver tareas de generalización de patrones con diferentes representaciones espaciales? Para responder a esta pregunta, diseñamos tres secuencias de tres tareas cada una. En cada secuencia se proponen las mismas tareas, en el mismo orden, pero con distintas representaciones espaciales en su enunciado. De este modo, cada grupo de alumnos resuelven tres versiones diferentes de cada tarea según la representación espacial empleada.

Generalización de patrones lineales

En este estudio nos centramos en las tareas de generalización de patrones lineales que se presentan mediante figuras geométricas. En estas tareas, la relación entre la posición del término y el número de elementos que componen la figura se modela mediante una función afín $f(n) = a \cdot n + b$. De acuerdo con Callejo y Zapatera (2014), estas tareas se estructuran en varias preguntas que guían progresivamente al alumnado en el proceso de generalización siguiendo las demandas cognitivas propuestas por Stacey: *generalización cercana*: se solicita calcular el valor de la función para un n cercano; *generalización lejana*: se propone un valor lejano de n; *regla general*: se pide obtener la regla general e *inversión:* se plantea una situación inversa, en la que se proporciona el número de elementos de la figura y se requiere determinar la posición del término correspondiente. Esta estructura es la que se utiliza en el estudio.

Figura 16

Ejemplo de figuras en el enunciado de una tarea de generalización de patrones lineales



Estrategias de generalización

Las estrategias son métodos que conducen a la solución de los problemas de cualquier tipología y pueden definir-se cómo formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas (Rico, 1997). Diversas investigaciones han identificado y clasificado las estrategias empleadas por el en la resolución de tareas de generalización de patrones lineales (Stacey, 1989; García-Cruz y Martinón, 1998; Zapatera y Callejo, 2011; Morales et al., 2018). Estas investigaciones coinciden en distinguir tres tipos principales de estrategias. No obstante, en este estudio se consideran cuatro estrategias de generalización, en atención a las particularidades de las representaciones espaciales utilizadas, lo que permite diferencias dos formas dentro de las estrategias funcionales. A partir de los referentes teóricos mencionados, se definen las estrategias de generalización consideradas en el análisis de la siguiente manera:

- *Estrategias recursivas.* Se utiliza un método de conteo, basado en usar la diferencia entre figuras consecutivas de la serie. Corresponde a las denominadas estrategias aditivas (Stacey, 1989; García-Cruz y Martinón, 1998, Zapatera y Callejo, 2011; Morales et al., 2018).
- *Estrategias proporcionales.* Método incorrecto, donde el alumnado utiliza la relación funcional $f(n) = a \cdot n$ en vez de $f(n) = a \cdot n + b$ (Stacey, 1989; García-Cruz y Martinón, 1998, Zapatera y Callejo, 2011; Morales et al., 2018).
- *Estrategias funcionales.* Se establece una relación explícita entre las dos variables (la posición de la figura y el número de elementos) mediante una expresión del tipo $f(n) = a \cdot n + b$ (Stacey, 1989; García-Cruz y Martinón, 1998, Zapatera y Callejo, 2011; Morales et al., 2018). En este estudio, se distinguen dos formas de esta estrategia, dependiendo de cómo se manifiesta el procedimiento de generalización:
    - *Multiplicativa*. Se relaciona directamente el número de elementos con la posición en la sucesión a través de un procedimiento multiplicativo.
    - *Acumulativa.* Relaciona explícitamente el número de elementos con la posición de la figura dentro de la sucesión, utilizando un procedimiento que acumula la cantidad de elementos paso a paso.

La fijación en una cierta estrategia y la resistencia a modificarla es un obstáculo que impide generalizar a cierta parte del alumnado (Bednarz et al, 1996). En estudios con alumnado de 10 y 11 años, se ha observado un mayor éxito cuando los estudiantes comienzan utilizando estrategias recursivas y progresan hacia estrategias funcionales (Zapatera, 2018).

Estadios de comprensión en la generalización

Muchas investigaciones (Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005) han puesto de manifiesto que tres elementos matemáticos son clave en el desarrollo del proceso de generalización: la estructura espacial y numérica, la relación funcional y el proceso inverso. En este estudio, se han diseñado tres versiones de una secuencia de tareas, en las que se modifica la estructura espacial de las figuras del enunciado, con el fin de analizar su influencia en las estrategias de generalización utilizadas por el alumnado. Zapatera (2015) caracteriza tres estadios de comprensión del desarrollo del proceso de generalización de patrones. En el *Estadio I,* el alumnado no logra coordinar las estructuras espaciales y numéricas, lo que le impide calcular términos lejanos de la sucesión. En el *Estadio II,* se establece una coordinación entre lo espacial y lo numérico, permitiendo encontrar una regla funcional general. En el *Estadio III,* el alumnado es capaz de aplicar procesos inversos, deduciendo la posición del término a partir del número de elementos.

En este estudio, se evalúa el nivel de éxito de las estrategias de generalización utilizadas por el alumnado, identificando el estadio de comprensión alcanzado en función del número de preguntas que resuelve correctamente.

METODOLOGÍA

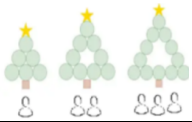
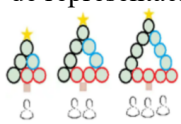
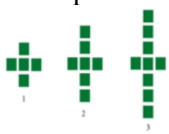
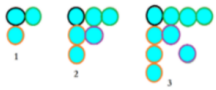
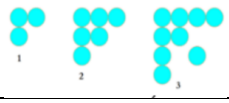
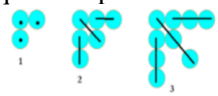
El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo, con un enfoque cualitativo (Cohen, Manion y Morrison, 2000). Está enfocado en alumnado de 1º de ESO. Participan 60 alumnos de un centro de educación secundaria situado en Barcelona codificados de A01 hasta A60. Para la recolección de datos se conformaron tres grupos heterogéneos de 19, 20 y 21 alumnos, respectivamente. Estos son los grupos habituales en la organización del centro. Se forman aplicando un criterio alfabético en los apellidos. Los instrumentos de recogida de datos son cuestionarios escritos compuestos por una secuencia de tres tareas. Cada secuencia presenta tres tareas que utilizan tres tipos de representaciones en orden diferente. Las columnas 2, 3 y 4 de la Tabla 1 muestran el tipo de representación espacial de la tarea de la secuencia que resuelven de manera individual y por escrito los alumnos de cada grupo. Se han definido tres tipos de representación.

- *Tipo de representación A.* Representación espacial típica empleada habitualmente en tareas de generalización de patrones lineales. No destaca explícitamente agrupaciones particulares.
- *Tipo de representación B.* Representación espacial de carácter multiplicativo, en la que se enfatiza visualmente la formación de grupos iguales de unidades, mediante el uso de líneas.
- *Tipo de representación C.* Representación de tipo acumulativo, en la que se destaca la descomposición de la figura en agrupaciones de tamaños diferentes.

De las seis posibles permutaciones diferentes para ordenar los tres tipos de representaciones, nos interesa que cada grupo empiece y acabe con un tipo de representación diferente, con el objetivo de que el primer contacto con este tipo de tareas sea con una representación distinta del enunciado. En cada secuencia saldrán los tres tipos de representaciones y la permutación ABC aparecerá. Por tanto, las tres opciones escogidas son las de la Tabla 1.

Tabla 1

Secuencias de tareas de cada grupo con los tipos de representaciones del enunciado

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Tarea 1	Cuestionario 1A Tipo de representación A 	Cuestionario 1B Tipo de representación B 	Cuestionario 1C Tipo de representación C 
Tarea 2	Cuestionario 2B Tipo de representación B 	Cuestionario 2C Tipo de representación C 	Cuestionario 2A Tipo de representación A 
Tarea 3	Cuestionario 3C Tipo de representación C 	Cuestionario 3A Tipo de representación A 	Cuestionario 3B Tipo de representación B 

Con el fin de identificar y analizar las estrategias de generalización utilizadas por el alumnado, se elaboraron nueve cuestionarios (tres por grupo), todos con las mismas preguntas en cada tarea, pero con variaciones únicamente en la representación espacial del enunciado. Para diseñar estas preguntas se han considerado los principales elementos clave y dificultades identificadas en estudios previos sobre la generalización de patrones cuestionarios (Demetriou, 2004; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Nilsson y Juter, 2011). En la Tabla 3 se ilustra un ejemplo de las cinco preguntas de cada cuestionario de la Tarea 1, relacionadas con el objetivo descrito anteriormente.

Tabla 3

Objetivos y preguntas de los cuestionarios correspondientes a la tarea 1

Objetivo	Preguntas
Identificar y expresar la generalización cercana	¿Cuántos círculos necesitaremos para construir los árboles correspondientes a los elementos 4 y 5 de la serie? Explica con todo detalle como llegas a la respuesta.
	Ahora queremos saber cuántos círculos necesitaremos para construir el árbol correspondiente al elemento 15 de la serie. Explica con todo detalle como llegas a la respuesta.

Identificar y expresar la generalización lejana	Vamos un poco más lejos… ¿Cuantos círculos son necesarios para construir el árbol correspondiente al elemento número 3768 de la serie? Explica con todo detalle cómo llegas a la respuesta.
	Continuando con la misma serie. ¿Cómo le explicarías a un compañero/a de qué manera se puede calcular el número de círculos que se necesitan para construir cualquier árbol de la serie. Explícalo con todo detalle.
Identificar y analizar el proceso inverso	Imagina que ahora tienes 50000 círculos para construir un árbol. ¿Cuál es el árbol más grande que puedes construir continuando con la misma serie de todo el problema? Explica con todo detalle como llegas a la respuesta.

Para analizar el éxito de las respuestas del alumnado en cada una de las tareas de la secuencia, se consideró el número de preguntas respondidas correctamente de las cinco que conforman cada cuestionario. Estas respuestas fueron clasificadas conforme a los estadios de comprensión propuestos por Zapatera (2015). El *Estadio I* se corresponde con la resolución correcta de las dos primeras preguntas, que corresponden a generalización cercana. El *Estadio II* se corresponde con la resolución correcta de la tercera y cuarta pregunta, relacionadas con generalización lejana y regla general. El *Estadio III* se corresponde con la resolución correcta de la quinta pregunta, correspondiente al proceso inverso.

Se constató que no se presentaron casos en los que un estudiante respondiera correctamente una pregunta correspondiente a un estadio superior sin haber respondido correctamente las preguntas de los estadios previos.

RESULTADOS

En primer lugar, se presentan ejemplos de respuestas del alumnado a la segunda pregunta del Cuestionario 2B, con el objetivo de mostrar la diferencia entre estrategias recursivas, acumulativas y multiplicativas. En la Tabla 5 se muestran las cantidades de alumnos que logran un determinado estadio de comprensión habiendo utilizado una estrategia inicial determinada.

Tabla 4

Estrategias de generalización utilizadas en el Cuestionario 2B

Identificación de respuestas	Respuestas del alumnado
Estrategia recursiva	A07: "Para el elemento 4 necesitaremos 11. La serie va sumando cuadrados de 2 en 2 por eso le he sumado 2 cuadrados al elemento 3 y 2 cuadrados al elemento 4".
Estrategia multiplicativa	A20: "He hecho; 15-2=13·2=26+7=33".
Estrategia acumulativa	A17: "15 cuadrados arriba, 15 cuadrados abajo y 3 al medio, lo sumas y te da 33".

Tabla 5

Máximo estadio de comprensión para cada tipo de estrategia dividido por grupos y tareas

Grupos	Ei	Estadios de comprensión								
		EI	EII	EIII	EI	EII	EIII	EI	EII	EIII
1		Tarea 1A			Tarea 2B			Tarea 3C		
	Rec	12	1	1	9	3	1	4	5	0
	Acu	0	1	0	0	4	0	0	2	0
	Mul	0	0	0	0	0	0	0	5	0
2		Tarea 1B			Tarea 2C			Tarea 3A		
	Rec	7	1	0	5	0	0	2	3	1
	Acu	0	2	0	0	2	4	0	3	1

	Mul	0	6	1	0	1	1	0	3	2
3		Tarea 1C			Tarea 2A			Tarea 3B		
	Rec	15	2	0	11	3	0	8	3	0
	Acu	0	4	0	0	6	1	0	3	0
	Mul	0	0	0	0	0	0	0	5	1

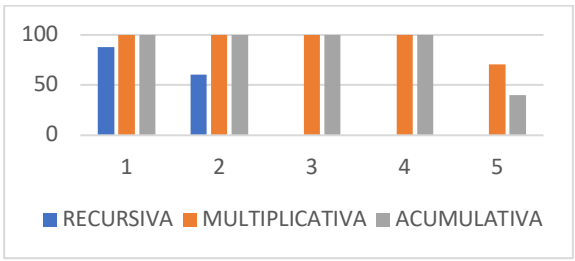
Ei: Estrategia inicial; Rec: Estrategia recursiva; Acu: Estrategia acumulativa; Mul: estrategia multiplicativa.

Al comparar el desempeño del alumnado en función de las estrategias de generalización utilizadas en las primeras preguntas del cuestionario (pregunta 1 y 2), se observa una relación significativa entre el tipo de estrategia empleada y el estadio de comprensión alcanzado. De las respuestas en las que se identifica el uso de la estrategia recursiva en alguna de las preguntas iniciales, un 75 % corresponde al Estadio I, es decir, los estudiantes solo logran resolver con éxito las preguntas de generalización cercana. El 25 % restante alcanza los Estadios II o III, resolviendo satisfactoriamente también las preguntas de generalización lejana o del proceso inverso (Tabla 5). En contraste, entre las respuestas donde no se emplea estrategia recursiva, solo un 20 % se sitúa en Estadio I, y en todos estos casos los estudiantes no responden correctamente la primera pregunta, corresponden a estrategias no identificadas. El 80 % restante alcanza los Estadios II o III (Tabla 5).

Se han identificado patrones consistentes en los tres grupos: hay casos del mismo estudiante que cuando inicia la resolución con una estrategia no funcional, no logra avanzar con éxito a las preguntas más complejas (3 y 4). En cambio, cuando comienza con una estrategia funcional, completa con éxito las preguntas de generalización lejana y la formulación del a regla general. Estos resultados refuerzan que la estrategia inicial condiciona el desarrollo posterior, y que el uso temprano de estrategias funcionales favorece la progresión hacia estadios más avanzados.

Figura 2

Gráfico del éxito de las estrategias de generalización por pregunta



En la Figura 2 se representan mediante un gráfico de barras los porcentajes de éxito de cada estrategia en cada una de las preguntas. El color azul representa la estrategia recursiva, el color naranja representa la estrategia multiplicativa y por último, el color gris representa la estrategia acumulativa.

El análisis muestra que, todas las respuestas que emplearon estrategias de generalización recursiva o proporcional en las preguntas 3, 4 y 5 fueron incorrectas. En cambio, las estrategias de generalización funcionales presentaron un 100 % de éxito en las preguntas 3 y 4 y un porcentaje de éxito notable en la pregunta 5, 70 % para la estrategia funcional multiplicativa y un 40 % para la funcional acumulativa. En los datos analizados, solo mediante el uso de estrategias funcionales se logra acceder con éxito a los Estadios II y II. Aunque las estrategias recursivas pueden tener cierto grado de efectividad en las preguntas iniciales (1 y 2) no permiten progresar hacia los niveles más altos de comprensión. Además, los datos muestran que en las preguntas 1 y 2, las estrategias funcionales tienen un 100 % de éxito, lo que evidencia que pueden ser empleadas eficazmente desde los primeros momentos de la resolución. También llama la atención que el 75 % del alumnado que emplea estrategias recursivas en las preguntas iniciales no progresa más allá del Estadio I, mientras que el 80% del alumnado que no emplea estrategias recursivas inicialmente progresa hasta los Estadios II o III, lo que refuerza la idea que el tipo de estrategia inicial condiciona la evolución posterior en la

tarea. Se observa así que las estrategias utilizadas en la generalización cercana no se limitan a las recursivas, sino que también incluyen estrategias acumulativas y multiplicativas.

Un aporte relevante de este estudio, pese al tamaño reducido de la muestra, es la identificación del impacto que tiene la representación espacial de las figuras en el tipo de estrategia empleada. En particular, cuando el tipo de representación B (que enfatiza el carácter multiplicativo de la progresión) se presenta en primer lugar, el 42 % del alumnado recurre a estrategias funcionales. En cambio, cuando se inicia con el tipo de representación A (el habitual), solo un 12 % utiliza estrategias funcionales. Estos resultados sugieren que la representación con la que se inicia la tarea influye significativamente en el tipo de razonamiento desplegado por el alumnado, y el modelo habitual de representación puede ser menos eficaz para fomentar el uso de estrategias asociadas a un mayor éxito en la resolución de estas tareas de generalización.

CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio confirma que una de las principales dificultades en el proceso de generalización es el paso del recuento explícito a la abstracción del patrón, en consonancia con investigaciones previas que apuntan a la falta de flexibilidad cognitiva como una barrera significativa (Demetriou, 2004; English y Warren 1998; Nilsson y Juter, 2011). Los resultados muestran que el uso de la estrategia recursiva en las primeras preguntas del cuestionario puede limitar el avance hacia los niveles más altos de generalización (Estadios II y III), posiblemente debido a la tendencia del alumnado a fijarse en una estrategia inicial y mostrar resistencia al cambio (Bednarz et al, 1996).

Investigaciones previas (Zapatera y Callejo, 2011; Zapatera y Callejo, 2014) señalaron que el alumnado de 9 y 10 años que tiene éxito suele comenzar con estrategias recursivas y luego pasar a estrategias funcionales, los resultados de este estudio complementan y matizan. En concreto, se observa que, en el alumnado de 11 y 12 años, el mayor porcentaje de éxito en las preguntas más complejas (4 y 5) se alcanza cuando no se emplea estrategia recursiva en ningún momento previo. Además, entre quienes sí comienzan con dicha estrategia, tres de cada cuatro no avanzan más allá de las preguntas 1 y 2, quedando anclados en el Estadio I de comprensión.

Estos resultados evidencian que la flexibilidad en el uso de las estrategias es clave para avanzar en los niveles de generalización. En este sentido, los resultados subrayan la necesidad de nuevas investigaciones que profundicen en cómo las representaciones espaciales y las formulaciones de las preguntas pueden influir en la estrategia adoptada por el alumnado, favoreciendo o dificultando la identificación de relaciones funcionales. El diseño de tareas que promuevan la transición hacia estrategia funcionales desde etapas tempranas puede ser una vía efectiva para mejorar el aprendizaje de patrones lineales.

Referencias

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Springer Netherlands.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I. y Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87.

Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *BOLEMA, 28*(48), 64-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. Routledge.

Demetriou, A. (2004). Mind intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence. En A. Demetriou y A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 21-73). Cambridge University Press.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

El Mouhayar R. y Jurdak, J. (2015). Variation in strategy use across grade level by pattern generalization types. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(4), 553-569. https://doi.org/10.1080/0020739x.2014.985272

English, L. D., y Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Garcia-Cruz, J., & Martinón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. En. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Vol. 2, pp. 329–336). PME

Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. En P. A. Frensch y J. Funke (Eds.), *Complex problem solving: The European perspective* (pp. 201-218). LEA.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. Mathematics *Education Research Journal, 18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Morales, R. A., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.57784/1992/32331

Nilsson, P., y Juter, K. (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 194-205. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.002

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 17-24). PME.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (2000). *Sistemas de representación y aprendizajes de estructuras numéricas*. Granada, España: Universidad de Granada.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 81-88). PME.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 305-312). PME.

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). SEIEM.

Zapatera, A. (2015). *La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Alicante].

[i] Estudio realizado con fondos del Proyecto PID2023-149580NB-I00 (MICINN).

JUSTIFICACIONES A TRAVÉS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN SEGUNDO Y TERCER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Justifications through graphical representation in the second and third cycle of primary education

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Torres, M. D. y Cañadas, M. C.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca en un proyecto centrado en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria. Nuestro objetivo es identificar y describir las justificaciones sobre la generalización y realizadas a través de gráficos cartesianos de estudiantes de 3º, 4º, 5º y 6º de educación primaria. Recogimos información a través de cuatro sesiones de grupo-clase y entrevistas posteriores realizadas a seis estudiantes de cada curso. En este estudio analizamos las transcripciones de los 24 estudiantes entrevistados y atendemos a las justificaciones sobre la generalización y realizadas a través de gráficos cartesianos. Los resultados evidencian la capacidad de estos estudiantes para justificar la generalización, y que, en ocasiones, estas justificaciones las hacen los estudiantes que no habían conseguido generalizar en las sesiones.

Palabras clave: *educación primaria, generalización, justificación, pensamiento funcional, representación gráfica*

Abstract

This work is part of a project focused on the algebraic thinking of elementary school students. Our objective is to identify and describe the justifications about generalization and made through Cartesian graphs of students in 3rd, 4th, 5th and 6th grades of primary education. We collected information through four group-class sessions and subsequent interviews with six students from each grade. In this study we analyzed the transcripts of the 24 students interviewed and we paid attention to the justifications on the generalization made through cartesian graphs. The results show the ability of these students to justify generalization, and that sometimes these justifications are made by students who had failed to generalize in the sessions.

Keywords: *cartesian graphs, elementary education, functional thinking, generalization, , justification*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Autores como Ellis y Özgür (2023) evidencian el interés actual de los investigadores en educación matemática por el pensamiento funcional. Generalizar, representar, justificar y razonar, con estructuras y relaciones matemáticas, son las cuatro prácticas esenciales del pensamiento funcional (Blanton et al., 2018). Aquí nos enfocamos en el trabajo con tres de estas prácticas, generalizar, representar y justificar, en tareas que persiguen el desarrollo del pensamiento funcional.

El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico en el que "el concepto de función, las relaciones entre las cantidades involucradas, y la variación conjunta entre cantidades son contenidos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos" (Cañadas y Molina, 2016, p. 210). La importancia de este tipo de pensamiento se reforzó con la última actualización del currículo de primaria en España, que incluye el sentido algebraico

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2025). Justificaciones a través de la representación gráfica en segundo y tercer ciclo de educación primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

entre los sentidos matemáticos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022). Por su parte, el *National Council for Curriculum and Assessment* (NCCA, 2014) menciona la necesidad de ayudar a los estudiantes a entender ciertos aspectos del pensamiento algebraico y conseguir comunicarlos. Justificar ayuda al desarrollo de la comunicación. Los estudiantes expresan sus justificaciones mediante diferentes representaciones. Nos centramos en los gráficos cartesianos, una de las representaciones menos exploradas, y en la que la generalización se observa mediante patrones visuales (Moreno, 2024).

El objetivo de este trabajo es identificar y describir las justificaciones sobre la generalización realizadas a través de gráficos cartesianos de estudiantes de 3º, 4º, 5º y 6º de educación primaria.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Según Blanton et al. (2018) hay cuatro prácticas esenciales que hay que trabajar en el aula con el estudiantado para el desarrollo de su pensamiento funcional: generalizar, representar, razonar y justificar. En este estudio nos centramos en las prácticas de generalizar, representar y justificar.

La generalización en lo relativo a funciones incluye establecer relaciones generales entre cantidades que covarían, expresándolas mediante diferentes representaciones (verbal, simbólica, tabular, gráfica, etc.), como también razonar con esas representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). En línea con Kieran (1989), entendemos la función como la organización y relación de los elementos de una regularidad entre variables que covarían.

Una de las representaciones empleadas habitualmente para expresar funciones es el gráfico cartesiano (Carraher et al., 2008). Arcavi (2003) considera que se trata de una representación de naturaleza visual. Cañadas et al. (2024) observan cómo estudiantes de tercero y cuarto de primaria construyen y leen gráficos cartesianos, y obtienen que estos estudiantes son capaces de leer más allá de los datos en esta representación. En este trabajo extendemos lo anterior a quinto y sexto de primaria, además de atender a las justificaciones que dan cuenta de la lectura más allá de los datos mencionada. Cañadas et al. (2024) concluyen además que "la generalización ofrecida a partir de una representación gráfica pasa por la evidencia de una tendencia de puntos obtenida a partir de pautas y procedimientos específicos de lectura y construcción" (p. 1076). En un trabajo previo (Pérez-Martos et al., 2024) estudiamos los diferentes tipos de justificaciones que se evidenciaban en un grupo de estudiantes de quinto de primaria.

Para Stephens et al. (2017), la práctica de justificar contribuye a una mayor claridad y al refinamiento de la forma de expresión de las ideas matemáticas generales de los estudiantes. Para Balacheff (2000), una justificación es cualquier intervención en la que un estudiante intenta explicar o verificar la veracidad de una afirmación matemática, con la intención de convencer a otra persona y/o a sí mismo. En el contexto del pensamiento algebraico, Blanton et al. (2018) afirman que, cuando los estudiantes justifican, desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta. Estos mismos autores indican que, aunque la mayoría están basadas en razonamientos con casos particulares, ciertos estudiantes de primaria pueden hacer justificaciones más sofisticadas como son las basadas en razonamientos generales o en representaciones. Nos centramos aquí en las justificaciones sobre la generalización realizadas a través de gráficos cartesianos.

En este trabajo tomaremos como justificación, siguiendo a Balacheff (2000), toda aquella explicación de los estudiantes que explique o verifique sus afirmaciones algebraicas con la representación gráfica. Esta explicación puede ir en respuesta directa a una pregunta del investigador, o puede darse de forma espontánea por parte del alumnado. Consideramos que se aprecia generalización en una justificación cuando el estudiantado evidencia una tendencia de puntos o patrón visualizados durante la construcción o lectura del gráfico.

METODOLOGÍA

Este es un estudio cualitativo, exploratorio y descriptivo (Stake, 1999) en torno a la generalización, la representación y las justificaciones que ofrecen los estudiantes foco del estudio en las entrevistas realizadas después de su trabajo en las sesiones de grupo-clase. Desarrollamos este trabajo en el marco de un proyecto de investigación que cuenta con la colaboración de un colegio público situado al sur de España. Además, contamos con el permiso del comité de ética de la Universidad.

Recogida de datos y participantes

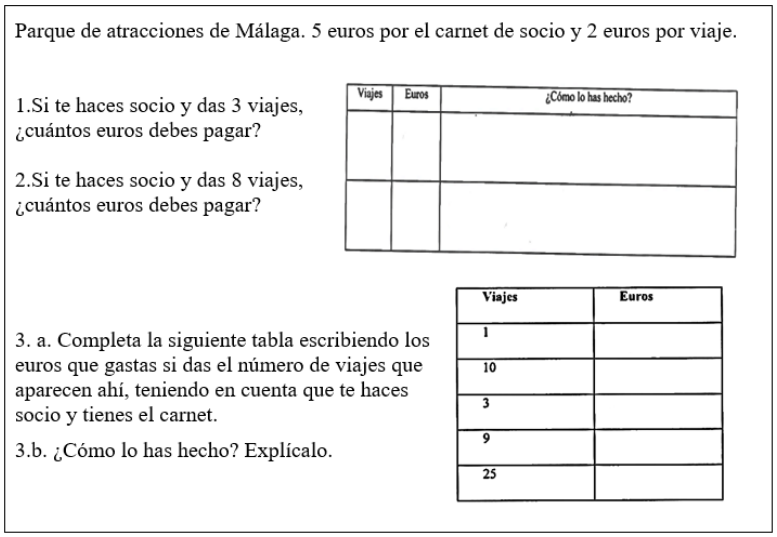
Realizamos una recogida de información en los últimos dos ciclos de primaria. Seleccionamos estos dos ciclos debido a que existen investigaciones anteriores sobre la generalización a través de diversas representaciones (Brizuela et al., 2021). Ahora buscamos profundizar en una de las ideas en torno a las que giran las competencias matemáticas en el currículo, las justificaciones, concretamente aquellas que pueden ofrecer estudiantes de estas edades cuando trabajan la generalización y la representación gráfica. Esta recogida constó de cuatro sesiones de grupo-clase y seis entrevistas individuales semi-estructuradas posteriores con seis estudiantes de cada curso. En las sesiones de grupo-clase se trabajaron las representaciones tabular y gráfica con los estudiantes, y en las entrevistas posteriores fue donde profundizamos en el trabajo y comprensión de estas representaciones. El diseño de sesiones y entrevistas, así como de las tareas realizadas en estas, se llevó a cabo por el equipo de investigación del proyecto. La implementación estuvo a cargo de un investigador-docente, con el apoyo de otros dos miembros del equipo de investigación. Los cuatro autores de este trabajo estuvieron involucrados en el análisis de la información.

En este documento mostramos los resultados obtenidos del análisis de las entrevistas realizadas (24 entrevistas). Las entrevistas se realizaron a seis estudiantes de cada curso que seleccionamos con el siguiente criterio: dos estudiantes que generalizaron en la primera sesión, otros dos que no generalizaron en la primera, pero sí en alguna de las sesiones posteriores y otros dos que no generalizaron en ningún momento. Realizamos la selección con base en la revisión de las producciones escritas resultantes del trabajo durante las sesiones de grupo-clase. Para nombrar a los estudiantes entrevistados manteniendo su anonimato, asignamos a cada uno de ellos una etiqueta formada por una letra y un número: T_i para los seis estudiantes de 3º, C_i para los de 4º, Q_i para los de quinto y S_i para los de sexto; con i=1,…,6. Los números 1 y el 2 se corresponden con los estudiantes que generalizaron desde el principio, el 3 y el 4 con aquellos que no lo consiguieron al principio, pero si en algún otro momento posterior y el 5 y el 6 para los que no generalizaron en ninguna de las producciones de las sesiones.

Sesiones de grupo-clase

En las sesiones de grupo-clase, los estudiantes del segundo ciclo trabajaron tareas de generalización que involucraban las funciones f(n)=2n, f(n)=2n+5, f(n)=3n y f(n)=2n+1, y los del tercer ciclo trabajaron tareas de generalización que involucraban las funciones f(n)=2n+5, f(n)=3n y f(n)=2n+2. En todos los cursos se trabajaron las tareas a través de las representaciones verbal, simbólica, tabular y gráfica. Las preguntas involucradas giraron en torno a la lectura e interpretación de diferentes representaciones. El contacto previo que habían tenido estos estudiantes con los gráficos, la generalización y la justificación de sus respuestas en contextos funcionales fue únicamente el de las sesiones de grupo-clase. Mostramos a continuación la que fue la primera sesión de grupo-clase para los cuatro cursos (ver Figura 1):

Figura 17. Primera sesión de grupo-clase.


Parque de atracciones de Málaga. 5 euros por el carnet de socio y 2 euros por viaje.

1.Si te haces socio y das 3 viajes, ¿cuántos euros debes pagar?

2.Si te haces socio y das 8 viajes, ¿cuántos euros debes pagar?

Viajes	Euros	¿Cómo lo has hecho?

3. a. Completa la siguiente tabla escribiendo los euros que gastas si das el número de viajes que aparecen ahí, teniendo en cuenta que te haces socio y tienes el carnet.

3.b. ¿Cómo lo has hecho? Explícalo.

Viajes	Euros
1	
10	
3	
9	
25	

Entrevistas

En este trabajo nos centramos en las veinticuatro entrevistas realizadas por ser el momento en el que más información ofrece el estudiantado. Como instrumentos de recogida de datos empleamos tanto las videograbaciones como las fichas de trabajo. En las entrevistas involucramos las funciones f(n)=3n+1 y f(n)=2n+2, dos contextos y tres representaciones. Cada entrevista duró unos 20 minutos y tuvo tres partes diferenciadas, cada una centrada en una representación: pictórica, tabular y gráfica. A continuación, describimos el protocolo seguido.

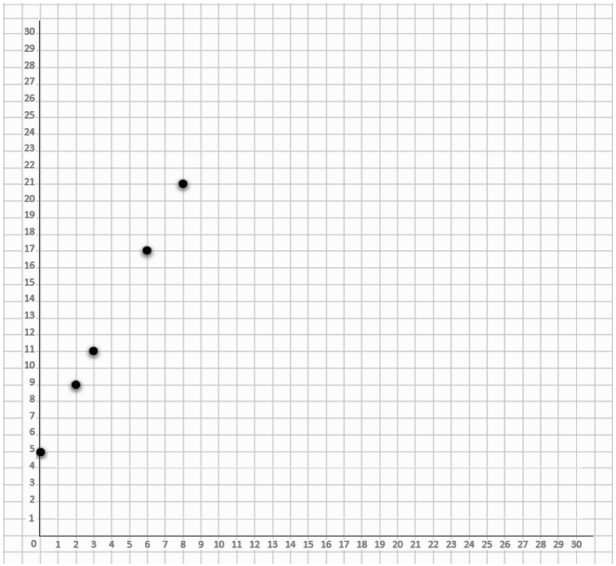
Parte 1. Tenemos dos contextos para plantear a los estudiantes. Los dos están asociados a la misma relación funcional: una máquina misteriosa donde entra un número de bolas, y sale un número diferente, los estudiantes deben averiguar cómo funciona la máquina; y un parque de atracciones, donde saben que deben pagar la entrada, y luego, una vez dentro, tres euros por cada atracción en la que suban. Comenzamos de mayor a menor nivel de dificultad, hasta que captan la regularidad. En primer lugar, presentamos la máquina misteriosa, donde no indicamos cuál es el valor de la constante. En caso de no evidenciar regularidad, pasamos al contexto del parque de atracciones, donde tienen que pagar la entrada, que se corresponde con el valor de la constante. Dentro de cada contexto también consideramos dos funciones diferentes, 3n+1, 2n+2, de mayor a menor dificultad.

Ofrecemos la representación pictórica del contexto) y hacemos preguntas destinadas a que identifiquen regularidades y/o estructuras: “si entran cuatro bolas, ¿cuántas saldrían?” (y más casos particulares); “para cualquier número de bolas que entren, ¿cuántas bolas saldrían?”; “¿cómo me explicarías el funcionamiento de la máquina?”.

Parte 2. Representación tabular del contexto y relación funcional trabajados en la primera parte. Hicimos la siguiente pregunta: “¿serías capaz de representar en una tabla esta situación?”.

Parte 3. Representación gráfica del contexto y relación funcional que viene trabajando. Preguntamos: “¿serías capaz de representar en un gráfico esta situación?”. En 3º y 4º, si el estudiante no conseguía realizar el gráfico, se le daba uno hecho que representaba los puntos de una función con naturales (2n+5 o n+3) para ver si detectaba alguna regularidad (ver Figura 2).

Figura 2. Representación gráfica ofrecida en la entrevista de 3º y 4º (f(n)=2n+5).



Análisis de datos

La codificación se ha llevado a cabo mediante la técnica del análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013), tras transcribir las entrevistas de los 24 estudiantes. Tomamos como unidad de análisis cada una de las intervenciones orales de cada estudiante, en las que ofrecían una explicación con la que intentaban convencer o convencerse de una idea relacionada con la generalización sobre la representación gráfica.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Encontramos un total de 12 justificaciones sobre la generalización, realizadas a través de la representación gráfica. En 3º y 4º encontramos 2 justificaciones en cada curso, y en 5º y 6º 4 en cada curso. De los 24 estudiantes entrevistados, 9 ofrecieron justificaciones de este tipo (T1, C1, C6, Q1, Q3, Q5, S3, S4 y S6). Los estudiantes T1, Q1 y S4 son los que más justificaciones ofrecieron. De los 9 estudiantes, 3 son de los que no habían conseguido generalizar en ningún momento durante las sesiones (C6, Q5 y S6), otros 3 son de los que generalizaron en algún momento, pero no desde el inicio (Q3, S3 y S4), y solo tres de estos estudiantes se encuentran entre los que generalizaron desde el primer momento en las sesiones (T1, C1 y Q1). Cabe destacar también que, en el último curso de primaria, no ofrecieron justificaciones de este tipo ninguno de los estudiantes de los que generalizaron durante las sesiones desde un inicio.

Justificaciones sobre la Generalización a través de la Representación Gráfica en 3º

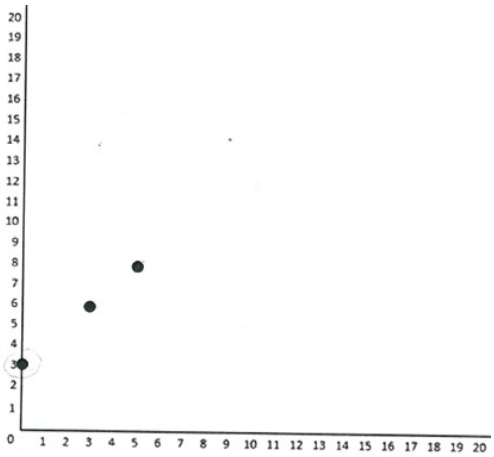
En tercero de primaria identificamos dos justificaciones de este tipo. Estas justificaciones las ofreció T1. A continuación mostramos estas dos justificaciones, ambas consecutivas en el transcurso de la entrevista y ofrecidas con base en el gráfico dado ya construido asociado a la relación n+3 (ver Figura 3). El investigador (I) le dio este gráfico a T1, le dijo que lo observara y seguidamente se dio el siguiente diálogo entre ellos:

T1: Es sumar tres a las que entran (dice señalando el gráfico).

I: Y si tuviéramos que seguir poniendo puntos, ¿cómo irían?

T1: Así, en diagonal (dice moviendo el lápiz sobre la recta imaginaria que se formaría al unir los puntos del gráfico).

Figura 3. Representación gráfica ofrecida en la entrevista de 3º y 4º (f(n)=n+3).

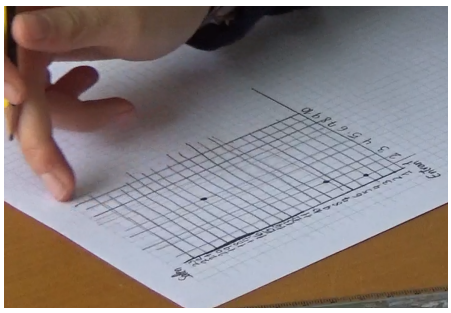


Cada una de las intervenciones de T1 una justificación sobre una generalización y basada en la representación gráfica. Con la primera de ellas, sin estímulo por parte del investigador, intenta convencerse a sí mismo de una regularidad con la que obtener los puntos del gráfico. En la segunda, T1 respondió mostrando haber identificado la tendencia que seguían los puntos gracias a la visualización del gráfico cartesiano (Cañadas et al., 2024; Moreno, 2024).

Justificaciones sobre la Generalización a través de la Representación Gráfica en 4º

En 4º curso identificamos 2 justificaciones de este tipo. Observamos una de C1 y otra de C6. Mostramos a continuación el ejemplo de C6 por ser el más clarificador. C6 construyó correctamente el gráfico, colocando en él ciertos puntos trabajados anteriormente. Entonces I le preguntó cómo continuarían los puntos, a lo que C6 respondió "así, en línea (dice señalando con el dedo la recta imaginaria que se formaría al unir los puntos del gráfico. Ver Figura 4)".

Figura 4. C6 señalando por dónde seguirían los puntos de gráfico.



Justificaciones sobre la Generalización a través de la Representación Gráfica en 5º

Hubo un total de 4 justificaciones sobre la generalización y a través del gráfico en 5º. Dos de estas justificaciones las ofreció Q1, y las dos restantes, una Q3 y otra Q5. Mostramos como ejemplo una de las justificaciones de Q1, por ser la más clara:

I: ¿Cómo estás construyendo eso?

Q1: ¿Cómo? Pues me fijo… primero hago los dos primeros, o los tres, y digo ¿cómo sube? Pues, miro cómo sube y como me he dado cuenta que es tres para el lado y uno para arriba, pues lo hago así. (Y sigue poniendo puntos sin necesidad de atender a los números en los ejes, siguiendo la tendencia)

La tendencia que identifica el estudiante en este caso, es diferente a las identificadas por los estudiantes de cursos previos. Q1 generaliza sin necesidad de atender a los valores en los ejes, el patrón identificado es visual en su totalidad.

Justificaciones sobre la Generalización a través de la Representación Gráfica en 6º

En 6º, S3, S4 y S6, ofreciendo una justificación, dos y una, respectivamente. Mostramos el ejemplo de S3, por ser el más clarificador. Después de que S3 construyera y leyera los casos particulares correctamente, I le hizo una pregunta que le llevó a la siguiente justificación:

I: (…) ahora, viendo el gráfico, ¿eres capaz de decirme una expresión más general?

S3: Que con una salen cuatro y a partir de ahí van saliendo tres. Con una bola más que eches, salen tres más (dice mirando el gráfico).

De nuevo hay evidencia de la observación de una tendencia propia de la representación gráfica ("con una más que eches, salen tres más").

CONCLUSIONES

Este trabajo confirma que, desde tercero de primaria, los estudiantes pueden comunicar sus ideas matemáticas y así intentar convencer a los demás y/o a sí mismos de su veracidad o falsedad de las mismas. De hecho, a raíz de nuestros resultados, conjeturamos que los estudiantes pueden realizar esto desde cursos inferiores. Blanton et al. (2018) indican que entre los estudiantes de primaria pueden surgir justificaciones más sofisticadas que las relacionadas con razonamientos sobre casos particulares, como son las basadas en representaciones. Todas las justificaciones analizadas en este trabajo se basan en gráficos cartesianos, por lo que apoyamos la idea anterior. Con nuestro estudio, además, observamos cómo surgen también justificaciones sobre razonamientos de casos generales. En cuanto a la generalización durante el trabajo con gráficos cartesianos, en línea con autores como Cañadas et al. (2024) o Moreno (2024), concluimos que sucede mediante la identificación de una tendencia o patrón visualizado en dicha representación. Esta tendencia o patrón pueden estar relacionados, o no estarlo, con los ejes y los valores situados en ellos. Encontramos que cuando los estudiantes no atienden a los valores de los ejes, la tendencia observada en el gráfico es recursiva, es decir, necesita del punto anterior para colocar los siguientes.

Destacamos con este trabajo la importancia de las representaciones visuales (Arcavi, 2003), puesto que llevan a los estudiantes a ofrecer una tipología de justificaciones realizadas a través de la observación de tendencias, que no ofrecen durante el trabajo con otras representaciones no visuales como la simbólica, por ejemplo.

Cabe destacar además que un tercio de los estudiantes que ofrecen justificaciones sobre la generalización, se encuentra entre los que no habían conseguido generalizar durante las sesiones. Esta última idea nos permite evidenciar la importancia de realizar entrevistas individuales. Conjeturamos que, por timidez o por otro motivo, los estudiantes pueden no mostrar todo de los que son capaces en las sesiones comunes de grupo-clase.

Si comparamos los cursos, encontramos un mayor número de justificaciones sobre la generalización y a través de los gráficos cartesianos en el tercer ciclo que en el segundo. En este sentido, como líneas futuras, planteamos analizar, no únicamente las justificaciones generalizadas, sino también las particulares e indeterminadas. También podríamos tener en cuenta representaciones diferentes de la gráfica, para así poder realizar una comparación más exhaustiva entre las justificaciones de estudiantes de los cuatro cursos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y la ayuda PRE2021-097391 asociada.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente.

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L. y Kim, Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R.E.d.S.R. Borba (Eds), *Mathematical reasoning of children and adults* (pp. 171-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Cañadas, M. C., Moreno, A. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM- Mathematics Education, 56*, 1059-1078. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education, 40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Ellis, A. B. y Özgür, Z. (2023). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 199-210. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01545-9

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*,*52*, 24386-24504.

Moreno, A. (2024). Generalization processes of 5th grade elementary school students using graphs. En A. Twohill, I. I. Baykal, J. Miller, E. Knuth y A. Ribeiro (Eds), *Proceedings from ICME 15, Topic Study Group 1.2: Teaching and learning of early algebra.* ICME.

National Council for Curriculum and Assessment [NCCA] (2014). *Mathematics in early childhood and Primary Education (3-8 years). Definitions, theories, development and progression*. Autor.

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2024). Justificaciones de alumnos de quinto de primaria en tareas con diferentes contextos. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Research in Mathematics Education XXVII.* (pp. 417-424). SEIEM.

Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Didactical analysis and research methodology. In L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores (pp. 1-22). Comares.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morales S. L.

Stephens, A., Strachota, S., Knuth, E., Blanton, M., Isler, I. y Gardiner, A. (2017). The interplay between students' understandings of proportional and functional relationships. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 251-258). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

EXPERIENCIA DE DESARROLLO PROFESIONAL CON ATENCIÓN A LA LENGUA COMO SOPORTE UNIVERSAL EN LA ENSEÑANZA DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS[i]

Experience of professional development with attention to language as universal support in content-specific mathematics teaching

Planas, N.[1], Arnal-Julve, C.[1] y Arnal-Bailera, A.[2]

[1]Universitat Autònoma de Barcelona, [2]Universidad de Zaragoza

Resumen

Está extensamente documentado que la enseñanza de matemáticas que tiene en cuenta las demandas lingüísticas del contenido matemático específico favorece el aprendizaje con comprensión del contenido por parte del alumnado. En este informe, presentamos una experiencia de desarrollo profesional con profesorado de matemáticas, centrada en la lectura de expresiones algebraicas simbólicas para la comunicación y facilitación de significado matemático. La experiencia se engloba en una iniciativa más amplia de desarrollo profesional en formato virtual, sobre los elementos principales del actual currículo escolar de matemáticas en España. Mostramos una de las tareas que se propuso al profesorado y discutimos reflexiones escritas de los grupos. Los resultados apuntan a la toma de conciencia acerca de: (1) las demandas lingüísticas y matemáticas, para alumnado y profesorado, en torno al trabajo con expresiones simbólicas en álgebra; (2) acciones de enseñanza distintas a las habituales con atención a la lengua como soporte universal del aprendizaje.

Palabras clave: enseñanza de contenidos matemáticos, demandas lingüísticas y matemáticas, lengua como soporte universal del aprendizaje, desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.

Abstract

The teaching of mathematics that is responsive to the linguistic demands of the specific mathematical content is largely documented as supporting the students' learning of mathematics. In this report, we present an experience of professional development with mathematics teachers focused on reading algebraic symbolic expressions for the communication and enactment of mathematical meaning. This experience occurred as part of a broader online-mode development initiative, on the main elements of the current school curriculum of mathematics in Spain. We illustrate one of the tasks that were proposed to the teacher participants, and we then discuss group written reflections. The results indicate increased awareness regarding: (1) the linguistic and mathematical demands, for both students and teachers, around work with symbolic expressions in algebra; (2) teaching actions, which are out-of-habit and attentive to language as universal support in student mathematics learning.

Keywords: *content-specific mathematics teaching, linguistic and mathematical demands, language as universal support for learning, mathematics teachers' professional development.*

CONTEXTO DEL ESTUDIO

Entre diciembre de 2024 y marzo de 2025, se llevaron a cabo las sesiones del curso 'Desarrollo profesional del profesorado de matemáticas', en modalidad virtual síncrona y con una estructura de tres bloques principales: 'I. Fundamentos', 'II. Articulación. Sentidos y procesos' y 'III. Aprendizaje de las matemáticas'. Los 300 participantes del curso fueron seleccionados por las administraciones educativas de las 17 Comunidades Autónomas de España, con el objetivo de formar profesorado

experto que pueda luego formar presencialmente a profesorado en los centros educativos, en línea con modelos de desarrollo profesional en cascada. El curso es una de las actuaciones del Programa XXXX, cuya finalidad es contribuir a mejorar el nivel de desempeño en competencia matemática del alumnado de Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Ciclos Formativos de Grado Básico. El estudio que presentamos se centra en una experiencia ocurrida durante la segunda parte del primer bloque. Este bloque empezó con la sección 'Aspectos esenciales del currículo LOMLOE' y siguió con la sección 'Equidad, diversidad e inclusión en educación matemática. Diseño Universal del Aprendizaje (DUA) y enseñanza de las matemáticas'. Tras explicar los principios del DUA en el marco curricular –proporcionar múltiples medios de representación, múltiples formas de implicación y múltiples formas de acción y expresión–, se explicó el papel transversal de la lengua, ya sea del profesorado o de los materiales de enseñanza, como soporte universal del aprendizaje en matemáticas.

El presente estudio analiza las reflexiones de profesorado del curso acerca de una tarea grupal que se pidió que completaran por escrito. La primera autora fue la tutora de cinco grupos y la formadora que introdujo la tarea en la sesión síncrona del 8 de enero con todos los participantes. La tarea fue sobre las demandas lingüísticas y matemáticas asociadas con la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados en la expresión $x+y=xy$. Con estos datos, la doble pregunta que nos planteamos es la siguiente: ¿Cuáles fueron las reflexiones del profesorado sobre las demandas lingüísticas y matemáticas asociadas con la expresión $x+y=xy$? ¿Cómo estas reflexiones crearon oportunidades de imaginar otras maneras de actuar en la práctica de enseñanza?

MARCO TEÓRICO

En este apartado, empezamos introduciendo la conceptualización de la lengua en la enseñanza como soporte universal de los aprendizajes en matemáticas del alumnado. A continuación, introducimos nuestra visión del profesorado de matemáticas como profesionales expertos que, sin embargo, pueden no haber desarrollado el hábito de imaginar y atender a la variedad de posibilidades de utilización de la lengua en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos.

La lengua como soporte universal en la enseñanza de contenidos matemáticos

Wilkinson (2018) realiza una revisión de las recomendaciones para la enseñanza de matemáticas que se derivan de la investigación de aula en educación matemática, lengua y comunicación. Desde esta investigación, se argumenta que el profesorado que utiliza deliberadamente la lengua como soporte en sus prácticas de enseñanza está generando múltiples oportunidades para que el alumnado construya aprendizajes matemáticos con significado y comprensión. Con esta base científica, Wilkinson (2018) destaca la relevancia del conocimiento profesional que el profesorado de matemáticas, de todos los niveles educativos, debe desarrollar y poner en práctica para ver y utilizar la lengua de modos que permitan la comunicación explícita de los significados matemáticos que se pretende que el alumnado aprenda. Un aspecto esencial del trabajo en clase con el alumnado es precisamente utilizar y enseñar a utilizar la lengua de las matemáticas mediante prácticas matemáticamente ricas desde el punto de vista de su demanda cognitiva y de la diversidad de medios de representación. Este uso deliberado de la lengua como soporte universal abarca las prácticas de leer y escuchar matemáticas –modo receptivo de la comunicación– y las prácticas de hablar y escribir matemáticas –modo expresivo de la comunicación–. Es un soporte universal porque su uso se plantea pensando que la comunicación explícita de significado contribuye a la comprensión y al aprendizaje de todo el alumnado.

Si bien la dificultad para comprender y utilizar la lengua de las matemáticas está sobradamente reconocida por los educadores matemáticos y el profesorado (Ingram et al., 2024), las demandas en la enseñanza y el aprendizaje asociadas con la relación entre lengua y matemáticas han sido tradicionalmente menos discutidas y estudiadas (Thomas et al., 2015). Sigue habiendo una tendencia a vincular los retos en el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos únicamente con la complejidad cognitiva y epistemológica de esos contenidos. Esto no deja de ser sorprendente dada la estrecha conexión documentada entre, por un lado, la cognición matemática y el aprendizaje y, por

otro lado, los modos de comunicación que actúan de mediadores entre el alumnado y las acciones de enseñanza (Wilkinson, 2018). El aumento de la investigación centrada en la atención a la lengua en la enseñanza de matemáticas en las últimas décadas ha servido en gran medida para reconocer que la lengua en clase de matemáticas, además de tener una función comunicativa, tiene una función epistémica. En este sentido, el contenido que se enseña en clase de matemáticas puede ser al mismo tiempo matemáticamente complejo y lingüísticamente complejo. Un ejemplo de esta doble complejidad son los enunciados algebraicos expresados íntegramente con notación matemática simbólica. El alumnado tiene que aprender a leer matemáticamente estos enunciados, decodificando el significado especializado de los símbolos (letras y no alfabéticos) y comprendiendo los conceptos matemáticos representados mediante símbolos y cadenas de símbolos. Estos enunciados pueden leerse, escucharse, hablarse y reescribirse de formas que comuniquen explícitamente significados matemáticos necesarios para comprender los conceptos matemáticos involucrados. Estas formas, a su vez, pueden combinar elementos formales del registro matemático y otros cotidianos más cercanos a la lengua que el alumnado está acostumbrado a utilizar y que comprende con mayor facilidad.

Desarrollo profesional del profesorado de matemáticas

En trabajos anteriores (Planas y Alfonso, 2023; Planas et al., 2024), las experiencias de desarrollo profesional que han guiado nuestra colaboración con grupos de profesorado de matemáticas han estado fundamentadas en la caracterización que Mason (2002) hace de los procesos de construcción de la profesión y del profesorado como profesional experto. Partimos del conocimiento experto y de la experiencia profesional del profesorado participante y aprovechamos las oportunidades que surgen en el entorno formativo para apoyarles en la identificación de otras opciones posibles en la práctica de enseñanza, que pueden ser distintas a las que están habituados a identificar o ver. Esto significa, en particular, la preparación de entornos formativos que permitan enriquecer y ampliar la variedad de acciones de enseñanza que el profesorado puede imaginar, planificar e implementar en sus clases. Para enriquecer y ampliar las acciones de enseñanza con atención a la lengua como soporte universal del aprendizaje, trabajamos con base en el conocimiento y las reflexiones del profesorado sobre el uso de la lengua en matemáticas, de modo que sea el profesorado quien acabe sugiriendo la posibilidad de acciones distintas de enseñanza. Desde nuestra perspectiva, un entorno de desarrollo profesional es efectivo si contribuye a preparar al profesorado para que vea maneras de conducir la práctica de enseñanza que atiendan a aspectos concretos con impacto en los aprendizajes del alumnado, y para que en el futuro introduzca o se plantee introducir cambios en este sentido.

En nuestro estudio, la iniciativa de desarrollo profesional asume que el profesorado participante lleva años construyendo su profesión e internalizando hábitos de enseñanza de las matemáticas que dan prioridad a la consideración y utilización deliberada de unos determinados recursos o soportes por delante de otros. La atención a la lengua en la enseñanza como soporte universal del aprendizaje en matemáticas no es, en general, unos de estos hábitos, ni siquiera en aulas con alumnado que está en los inicios del aprendizaje de la lengua de instrucción o cuyas familias tienen un registro alejado del registro escolar (Ingram et al., 2024). El nuevo contexto curricular en matemáticas en España, con el marco del DUA, reconoce la lengua como soporte universal. Sin embargo, no es razonable esperar que el profesorado incorpore nuevos hábitos de enseñanza, que tengan en cuenta las demandas lingüísticas involucradas en la enseñanza de contenidos matemáticos, si antes no ha reflexionado sobre la relación entre atender a estas demandas y la facilitación de los aprendizajes del alumnado. Para estar en disposición de introducir ciertas mejoras en las acciones de enseñanza, se debe haber desarrollado una cierta sensibilidad y toma de conciencia sobre cómo estas mejoras pueden impactar en el aprendizaje del alumnado (Coles y Helliwell, 2025). El desarrollo de esta sensibilidad y toma de conciencia tiene una dimensión colectiva (Amador et al., 2023; Coles, 2023) porque, aunque la atención siempre es limitada, al discutir con otros profesionales con otras experiencias, surgen oportunidades de ver aspectos que de otro modo permanecerían ocultos o carentes de significado.

MÉTODOS

Los datos del presente estudio proceden de la tarea grupal escrita –incluidas las reacciones a las retroacciones– que la primera autora pidió al final de una de las sesiones síncronas de un curso de desarrollo profesional para profesorado de matemáticas. Los formadores del equipo docente del curso eran a su vez tutores de alrededor de 30 participantes, que estaban organizados en grupos de seis o siete personas para la discusión y realización de las tareas que se les iban proponiendo a lo largo de las distintas sesiones. Los vídeos y materiales de las sesiones se depositaban en el aula virtual del curso y las tareas solicitadas a los grupos se tenían que entregar al cabo de una semana. Disponemos del consentimiento informado de 27 de los grupos, con un total de 175 participantes, para examinar las tareas escritas y compartir las producciones con fines investigativos. No obstante, aquí únicamente mostramos datos y resultados –de la tarea escrita y de la mensajería con la reacciones a las retroacciones dadas a la tarea– de los cinco grupos, C1 a C5, tutorizados por la primera autora. En una segunda fase, se podrá ampliar el análisis con la incorporación de datos del resto de grupos. Estamos además a la espera de que más grupos nos hagan llegar su consentimiento, para poder ser tenidos en cuenta en el análisis ampliado. Iniciamos el estudio explicando los propósitos de investigación a los dos coordinadores del curso y solicitándoles consentimiento y colaboración en la comunicación con los grupos que no estaban siendo tutorizados por la primera autora.

La Figura 1 muestra las dos primeras páginas del total de cinco que conforman la tarea profesional que se encargó a los grupos, para que discutieran y consensuaran un informe escrito con las respuestas. En cada grupo había profesorado de dos o más Comunidades Autónomas, de modo que se les animó a organizarse creando una carpeta virtual compartida y a reunirse a través de alguna aplicación de comunicación virtual para compartir reflexiones y avanzar en la elaboración del informe. La tarea giraba en torno a una situación hipotética de clase en la que una profesora había escrito en la pizarra el enunciado $x+y=xy$ y pedía al alumnado que: (i) explicara con palabras lo que el enunciado dice y (ii) discutiera si el enunciado es o no cierto. De esta situación se derivaban respuestas hipotéticas de alumnado y acciones hipotéticas de enseñanza como reacción a estas respuestas. A lo largo de las cinco páginas, se iban intercalando sugerencias y cuestiones para promover la reflexión sobre las demandas lingüísticas y matemáticas asociadas con $x+y=xy$ en particular y con expresiones matemáticas simbólicas en general. En todos los grupos había profesorado de Educación Primaria y de Educación Secundaria, seleccionados por su trayectoria de especialización en la enseñanza de matemáticas. El contenido matemático de la tarea se creyó adecuado por las características de los participantes –hubo contenidos de Educación Primaria en otras tareas–. En la última página, había reflexiones con situaciones hipotéticas sobre la lectura y comprensión de los símbolos para representar los conceptos matemáticos de igualdad y desigualdad.

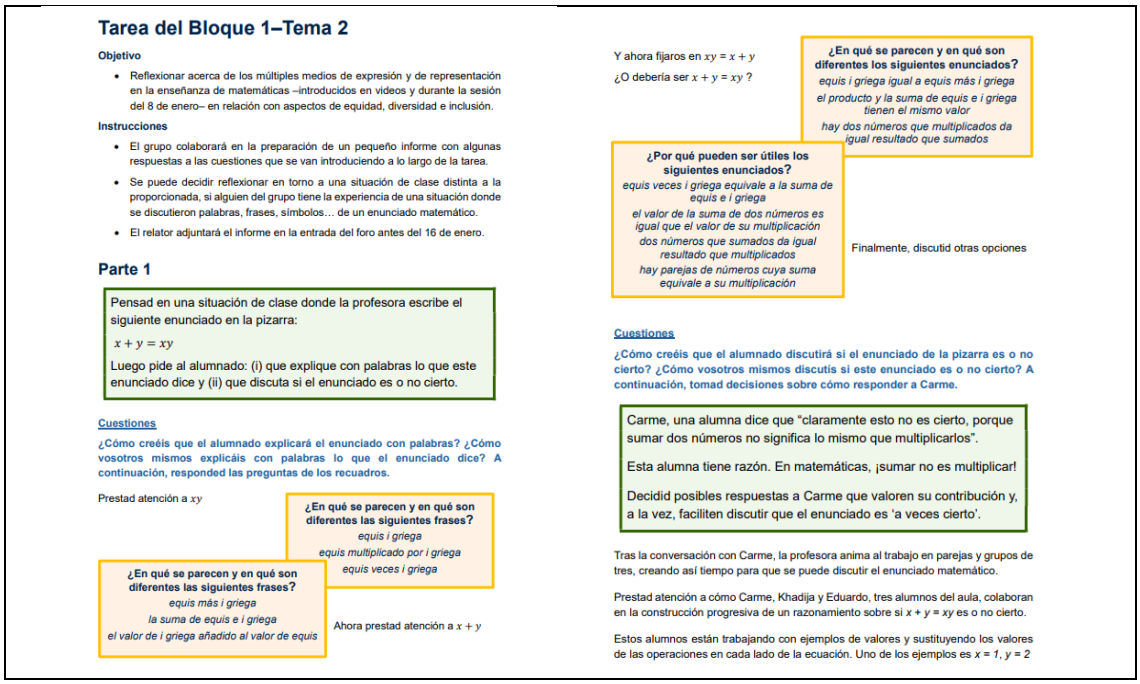
Los informes de C1 a C5 se compartieron con el equipo del estudio y la primera autora mantuvo el acceso directo a los textos de mensajería en los foros del aula virtual. Se aplicaron métodos de análisis de contenido con dos focos. Primero se buscaron textos donde el profesorado hiciera mención a demandas lingüísticas (DL) y demandas matemáticas (DM) en la enseñanza y el aprendizaje de expresiones simbólicas en álgebra. Para ello, manejamos acepciones que no son excluyentes dada la dimensión lingüística de aspectos de las matemáticas y de su práctica. Si nos referimos al signo igual, por ejemplo, hay la demanda lingüística asociada a utilizar el símbolo (que es un elemento de la lengua de las matemáticas) y la demanda matemática asociada a comprender el significado del símbolo como representante de la noción de igualdad. Así, tenemos lo siguiente:

- DL –dificultades apreciadas que se pueden atribuir al trabajo con objetos o procesos de carácter explícitamente lingüístico, como la letra x o leer.
- DM –dificultades apreciadas que se pueden atribuir al trabajo con objetos o procesos de carácter explícitamente matemático, como el concepto de igualdad u operar.

Siguió un segundo análisis con foco en posibles acciones de enseñanza facilitadoras de la lectura con comprensión matemática de estas expresiones simbólicas. Los textos se interpretaron como comunicaciones de reflexiones surgidas y compartidas dentro de los grupos. Por ejemplo, para el primer foco, el texto "x es una letra pero no se tiene que pensar como una letra" comunica una reflexión sobre la demanda lingüística y matemática asociada con la asignación de significado matemático a una letra, aunque no se concreta cómo se tiene que pensar matemáticamente la letra. Las condiciones en las que se produjeron estas comunicaciones fueron de trabajo autónomo en grupo, los días siguientes a la sesión donde se les presentaron los principios del DUA con varios ejemplos de su concreción en matemáticas. Estos principios y los ejemplos se dejaron además explicados en tres videos de unos 30 minutos cada uno, que se subieron al espacio del aula virtual. El procedimiento con los grupos C1 a C5 será replicable cuando incorporemos datos de más grupos y exploremos la eventual presencia de más reflexiones sobre la variedad de acciones de enseñanza posibles con atención a la lengua como soporte universal del aprendizaje matemático del alumnado.

Figura 18

Fragmento de la tarea profesional



Tarea del Bloque 1–Tema 2

Objetivo

- Reflexionar acerca de los múltiples medios de expresión y de representación en la enseñanza de matemáticas –introducidos en vídeos y durante la sesión del 8 de enero– en relación con aspectos de equidad, diversidad e inclusión.

Instrucciones

- El grupo colaborará en la preparación de un pequeño informe con algunas respuestas a las cuestiones que se van introduciendo a lo largo de la tarea.
- Se puede decidir reflexionar en torno a una situación de clase distinta a la proporcionada, si alguien del grupo tiene la experiencia de una situación donde se discutieron palabras, frases, símbolos… de un enunciado matemático.
- El relator adjuntará el informe en la entrada del foro antes del 16 de enero.

Parte 1

Pensad en una situación de clase donde la profesora escribe el siguiente enunciado en la pizarra:

$x + y = xy$

Luego pide al alumnado: (i) que explique con palabras lo que este enunciado dice y (ii) que discuta si el enunciado es o no cierto.

Cuestiones

¿Cómo creéis que el alumnado explicará el enunciado con palabras? ¿Cómo vosotros mismos explicáis con palabras lo que el enunciado dice? A continuación, responded las preguntas de los recuadros.

Prestad atención a xy

¿En qué se parecen y en qué son diferentes las siguientes frases?
equis i griega
equis multiplicado por i griega
equis veces i griega

¿En qué se parecen y en qué son diferentes las siguientes frases?
equis más i griega
la suma de equis e i griega
el valor de i griega añadido al valor de equis

Ahora prestad atención a $x + y$

Y ahora fijaros en $xy = x + y$

¿O debería ser $x + y = xy$?

¿En qué se parecen y en qué son diferentes los siguientes enunciados?
equis i griega igual a equis más i griega
el producto y la suma de equis e i griega tienen el mismo valor
hay dos números que multiplicados da igual resultado que sumados

¿Por qué pueden ser útiles los siguientes enunciados?
equis veces i griega equivale a la suma de equis e i griega
el valor de la suma de dos números es igual que el valor de su multiplicación
dos números que sumados da igual resultado que multiplicados
hay parejas de números cuya suma equivale a su multiplicación

Finalmente, discutid otras opciones

Cuestiones

¿Cómo creéis que el alumnado discutirá si el enunciado de la pizarra es o no cierto? ¿Cómo vosotros mismos discutís si este enunciado es o no cierto? A continuación, tomad decisiones sobre cómo responder a Carme.

Carme, una alumna dice que "claramente esto no es cierto, porque sumar dos números no significa lo mismo que multiplicarlos".

Esta alumna tiene razón. En matemáticas, ¡sumar no es multiplicar!

Decidid posibles respuestas a Carme que valoren su contribución y, a la vez, faciliten discutir que el enunciado es 'a veces cierto'.

Tras la conversación con Carme, la profesora anima al trabajo en parejas y grupos de tres, creando así tiempo para que se puede discutir el enunciado matemático.

Prestad atención a cómo Carme, Khadija y Eduardo, tres alumnos del aula, colaboran en la construcción progresiva de un razonamiento sobre si $x + y = xy$ es o no cierto.

Estos alumnos están trabajando con ejemplos de valores y sustituyendo los valores de las operaciones en cada lado de la ecuación. Uno de los ejemplos es $x = 1$, $y = 2$

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN

Empezamos este apartado con una primera sección donde mostramos demandas lingüísticas y matemáticas que los grupos de profesorado hicieron notar en el informe de la tarea o bien en respuestas a las retroacciones de la formadora. En la segunda sección mostramos evidencias de reflexiones en torno a posibles acciones de enseñanza, con atención en la utilización de la lengua como soporte universal de los aprendizajes del alumnado. Estos dos focos de atención no son excluyentes, como se pone de manifiesto en algunos de los datos que ejemplificamos. De acuerdo con nuestra comprensión del desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, las distintas reflexiones señalan momentos de desarrollo de una cierta sensibilidad y toma de conciencia acerca del papel que la lengua tiene en la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos.

Reflexiones sobre las demandas lingüísticas y matemáticas asociadas con $x+y=xy$

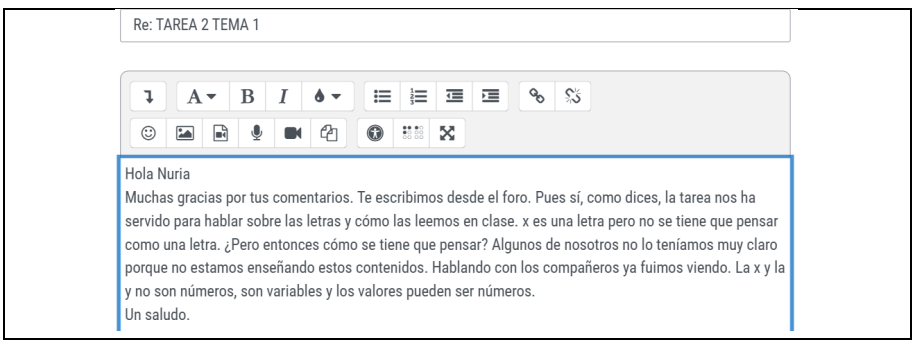
En esta sección recogemos ejemplos de las reflexiones escritas de los grupos donde hacen referencia a demandas lingüísticas y matemáticas asociadas con la expresión simbólica ilustrada en la situación

ficticia inicial de la tarea. C4, por ejemplo, escribe que "algunos estudiantes podrían tener dificultades para diferenciar el significado de las operaciones debido a su simbología abstracta". C5 menciona las demandas lingüísticas de la comprensión lectora de problemas matemáticos de enunciado verbal y las relaciona con las demandas lingüísticas de la comprensión lectora de enunciados matemáticos escritos íntegramente con notación simbólica: "la comprensión lectora de problemas verbales es difícil y los enunciados de solo símbolos son todavía más densos". Este grupo también menciona las demandas matemáticas asociadas con la manipulación de expresiones que representan conceptos matemáticos: "si los alumnos piensan que tienen que operar letras y utilizar reglas y ya está, entonces están faltando los conceptos del álgebra". C2 menciona las demandas matemáticas asociadas con comprender el significado del signo igual en dominios distintos de las matemáticas: "el signo del igual es distinto para el concepto de igualdad en geometría y las semejanzas". C2 también escribe sobre "las letras" y "las letras algebraicas", en una reflexión sobre cómo pequeños cambios en las formas de comentar o explicar un enunciado matemático con notación simbólica pueden tener impacto en la comprensión que se facilita al alumnado. Otros pequeños cambios aluden a formas de leer el enunciado. C3 compara "es igual que" con "es el mismo valor que" y reflexiona sobre los conceptos matemáticos cuyos significados se comunican mediante cada una de estas formas lingüísticas, y sobre el diferente pensamiento matemático que se puede estar facilitando. Estas reflexiones sobre cambios en la enseñanza sugieren un foco de atención en otras maneras de actuar.

En las reflexiones de los grupos, se observa que no hay una distinción clara entre las demandas lingüísticas y las matemáticas, porque varias de las dificultades apreciadas se atribuyen al mismo tiempo a aspectos de carácter lingüístico y matemático. A la retroacción que se hizo por mensajería a C1 sobre el informe de su tarea, el profesorado de este grupo señaló la dificultad de no pensar *x* como una letra (ver Figura 2), lo cual sugiere estar atendiendo al objeto lingüístico. Esta demanda lingüística lleva implícita la demanda matemática acerca de cómo se tiene que pensar matemáticamente *x*. La demanda matemática aparece con más claridad en la continuación del texto de C1, sobre el significado de la letra como variable que adopta valores que pueden ser números. En una reflexión se menciona en general que una letra no se debe pensar como una letra y en otra reflexión se menciona más específicamente cómo pensarla. Además de dificultades lingüísticas y matemáticas apreciadas para el alumnado, en los distintos grupos hay profesorado que dice también experimentar demandas lingüísticas y matemáticas relacionadas con la notación simbólica en álgebra.

Figura 2

Respuesta del grupo C1



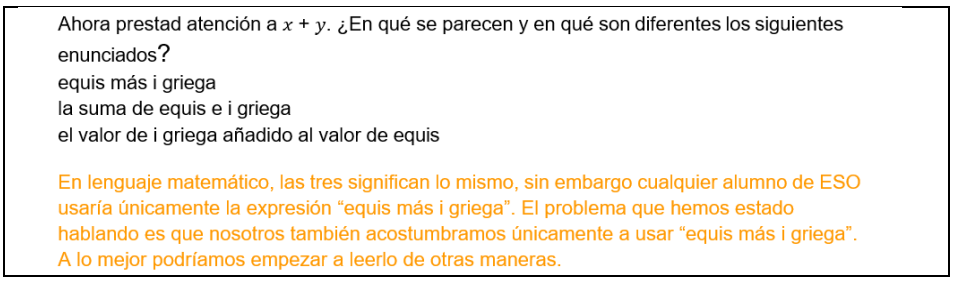
Reflexiones sobre otras maneras de actuar en la práctica de enseñanza

Los procesos de discusión de los grupos para la preparación de su respuesta a la tarea profesional, en relación con la identificación de demandas lingüísticas y matemáticas asociadas con la expresión simbólica, produjeron reflexiones escritas espontáneas sobre maneras de actuar en la enseñanza distintas a las habituales para este profesorado. En los textos de cuatro de los grupos, hay varias evidencias de esta toma de conciencia sobre otras opciones de trabajar con las expresiones algebraicas en el aula, que se consideran más facilitadoras de la comunicación y de la comprensión del significado

matemático y que, sin embargo, no parecen ser comunes en las prácticas del profesorado. La Figura 3 reproduce una captura de pantalla de parte del informe de C3, donde se mencionan la opción de empezar a leer de más de una manera una misma expresión algebraica y el hábito profesional, compartido por el profesorado de este grupo, de leer únicamente la cadena de símbolos literalmente al alumnado. La Figura 4 muestra parte del texto de la tarea de C5, también con mención explícita a lo que se podría hacer en clase, en relación con las explicaciones sobre las diferencias de significado matemático y de comprensión enfatizadas por distintas lecturas de la igualdad $x+y=xy$.

Figura 3

Respuesta del grupo C3

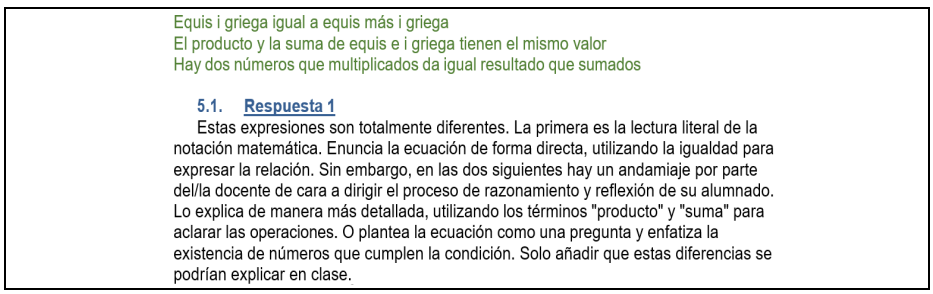

Ahora prestad atención a $x + y$. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes los siguientes enunciados?
equis más i griega
la suma de equis e i griega
el valor de i griega añadido al valor de equis

En lenguaje matemático, las tres significan lo mismo, sin embargo cualquier alumno de ESO usaría únicamente la expresión "equis más i griega". El problema que hemos estado hablando es que nosotros también acostumbramos únicamente a usar "equis más i griega". A lo mejor podríamos empezar a leerlo de otras maneras.

En varios de los textos, se observan reflexiones que sugieren una toma de conciencia sobre hábitos propios y compartidos en las acciones de enseñanza. Esta toma de conciencia enlaza con las reflexiones que sugieren la imaginación y valoración de maneras alternativas de actuar, ya sea en la enseñanza del álgebra en el contexto de ecuaciones o bien de otros contenidos que se mencionan como las semejanzas en geometría. Una cuestión fundamental, sobre la cual nuestros datos no informan, es si el profesorado de estos grupos se imagina llevando, en el futuro inmediato, estas acciones alternativas de enseñanza a la práctica en sus clases. Es decir, si se imaginan diseñando e implementado actividades para el alumnado donde hayan tenido en cuenta cómo van a utilizar la lengua como soporte universal de los aprendizajes matemáticos. Por otra parte, tenemos pendiente examinar más en profundidad si el profesorado, al imaginar futuras acciones de enseñanza, considera de manera integrada las demandas lingüísticas y las matemáticas. La ampliación del estudio con datos de más grupos permitiría examinar si el profesorado, cuando está pensando en cuestiones lingüísticas, las relaciona con cuestiones matemáticas y con la creación de significado matemático.

Figura 4

Respuesta del grupo C5


Equis i griega igual a equis más i griega
El producto y la suma de equis e i griega tienen el mismo valor
Hay dos números que multiplicados da igual resultado que sumados

5.1. Respuesta 1

Estas expresiones son totalmente diferentes. La primera es la lectura literal de la notación matemática. Enuncia la ecuación de forma directa, utilizando la igualdad para expresar la relación. Sin embargo, en las dos siguientes hay un andamiaje por parte del/la docente de cara a dirigir el proceso de razonamiento y reflexión de su alumnado. Lo explica de manera más detallada, utilizando los términos "producto" y "suma" para aclarar las operaciones. O plantea la ecuación como una pregunta y enfatiza la existencia de números que cumplen la condición. Solo añadir que estas diferencias se podrían explicar en clase.

CONCLUSIONES

En la base de nuestro estudio está una comprensión del desarrollo profesional del profesorado de matemáticas consistente con el reconocimiento del profesorado como profesionales expertos, con conocimientos y experiencias que son el principal andamiaje de posibles acciones de mejora en la enseñanza (Mason, 2002). El presente estudio, además, se sitúa en un contexto local de reforma curricular que está exigiendo al profesorado de matemáticas la atención deliberada a soportes

universales que faciliten la participación y el progreso en matemáticas de todo el alumnado. Uno de estos soportes universales es la lengua que el profesorado utiliza en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos. Este enfoque curricular en matemáticas, con la atención deliberada a las demandas lingüísticas en relación con las demandas matemáticas en la enseñanza y en el aprendizaje, requiere que el profesorado reflexione en torno a la posibilidad de nuevas prácticas (Coles, 2023). Nuestra iniciativa ha ofrecido un entorno formativo donde han surgido reflexiones que no son triviales, dada la falta de hábito de atención a la lengua en la enseñanza de matemáticas (Ingram et al., 2024), y la falta de atención a la relación entre demandas lingüísticas y demandas matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas (Wilkinson, 2018). Otros equipos de investigación en España han examinado demandas lingüísticas en relación con la cognición y la práctica matemática. Fernández-Cobos y otros (2025), por ejemplo, aportan resultados de demandas lingüísticas y matemáticas experimentadas por niños y niñas con diagnósticos de autismo. Los principios del DUA en matemáticas (Thomas et al., 2015) y el reconocimiento de la lengua como soporte universal de los aprendizajes matemáticos se originaron efectivamente para la enseñanza en aulas con alumnado con dificultades de distinta índole. Con sus reflexiones, el profesorado de nuestro estudio da muestras de ver la lengua como soporte universal de los aprendizajes en cualquier aula de matemáticas.

Referencias

Amador, J. M., Wallin, A., Keehr, J. y Chilton, C. (2023). Collective noticing: Teachers' experiences and reflection on a mathematics video club. *Mathematics Education Research Journal, 35*(3), 557–582. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00403-9

Coles, A. (2023). Hacia una práctica socioecológica de la formación del profesorado de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 23,* 19–35. https://doi.org/10.35763/aiem23.5489

Coles, A. y Helliwell, T. (2025). Re-conceptualising mathematics teacher noticing through critical events from an enactivist perspective. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09676-w

Fernández-Cobos, R., Polo-Blanco, I., Castroviejo, E., Juncal-Ruiz, M. y Vicente, A. (2025). What predicts early math in autism? A study of cognitive and linguistic factors. *Journal of Autism and Developmental Disorders*. https://doi.org/10.1007/s10803-025-06726-x

Ingram, J., Abbott, A., Smith, K., Planas, N. y Erath, K. (2024). Experienced teachers talking about their mathematics teaching with linguistically disadvantaged learners. *Journal of Mathematics Teacher Education, 27*, 785–808. https://doi.org/10.1007/s10857-024-09628-4

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The Discipline of Noticing*. Routledge.

Thomas, C. N., Van Garderen, D., Scheuermann, A. y Lee, E. J. (2015). Applying a universal design for learning framework to mediate the language demands of mathematics. *Reading & Writing Quarterly*, *31*(3), 207–234. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030988

Wilkinson, L. C. (2018). Teaching the language of mathematics: What the research tells us teachers need to know and do. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 167–174. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.05.001

Planas, N. y Alfonso, J. M. (2023). Secondary-school teachers' noticing of aspects of mathematics teaching talk in the context of one-day workshops. *The Journal of Mathematical Behavior, 71*, 101084. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101084

Planas, N., Alfonso, J. M., Arnal-Bailera, A. y Martín-Molina, V. (2024). Mathematical naming and explaining in teaching talk: Noticing work with two groups of mathematics teachers. *ZDM Mathematics Education, 56*, 1211–1222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01576-w

[i] Trabajo realizado en el contexto del proyecto PID2023-149580NB-I00. La iniciativa que se ha estudiado ha sido posible gracias al equipo del curso, bajo la coordinación de Manuel de León y Antonio Moreno.

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

Pattern recognition problem-posing within the framework of computational thinking

Quevedo-Gutiérrez, E.[a], Perdomo-Díaz, J.[b], Lijó Sánchez, R.[a] y de-Armas-González, P.[b]

[a]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, [b]Universidad de La Laguna

Resumen

La inclusión del pensamiento computacional en los currículos de la educación no universitaria hace necesaria su correspondiente implementación en la formación inicial del futuro docente de Educación Primaria. Si bien varias definiciones del pensamiento computacional se refieren específicamente a la formulación de problemas, existe investigación limitada al respecto en el desarrollo de las habilidades del pensamiento computacional en relación con la formulación de problemas matemáticos. Este estudio presenta un marco específico de formulación de problemas para desarrollar las habilidades de pensamiento computacional, analizando una intervención específica en el contexto de la habilidad de reconocimiento de patrones. Se utiliza para ello un cuestionario basado en el marco de formulación de problemas Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE) que evalúa el desarrollo de 60 estudiantes del Grado de Educación Primaria en el contexto de la asignatura Didáctica de la Numeración. Los resultados presentan que solo el 41.66% de los problemas formulados pueden considerarse de calidad en términos de los elementos de nuestro marco de referencia, plausibles, redactados de forma clara, con un contexto en el que la solución es razonable y que se ajustan al indicador de la habilidad de reconocimiento de patrones.

Palabras clave: *educación primaria, formulación de problemas, pensamiento computacional, reconocimiento de patrones*

Abstract

The inclusion of computational thinking in non-university education curricula makes its corresponding implementation necessary in the initial training of future Primary Education teachers. Although several definitions of computational thinking refer specifically to problem posing, there is limited research on the development of computational thinking skills in relation to mathematical problem posing. This study presents a specific problem posing framework to develop computational thinking skills, analyzing a specific intervention in the context of the pattern recognition skill. For this purpose, a questionnaire based on Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE) that evaluates the development of 60 students of the Primary Education Degree in the context of the Didactics of Numeration subject. The results show that only 41.66% of the problems posed can be considered with enough quality, in terms of the elements of our reference framework, plausible, clearly written, with a context in which the solution is reasonable and that fits the pattern recognition skill indicator.

Keywords: *elementary education, problem posing, computational thinking, pattern recognition*

INTRODUCCIÓN

La inclusión del pensamiento computacional (PC) en los currículos de educación no universitaria hace necesaria su incorporación a la formación docente (Santaengracia et al., 2023). Esto ha generado la aparición de investigaciones en torno a este tema en distintos niveles educativos (Acosta et al., 2022; Acosta et al., 2023; Rodríguez Muelas et al., 2024), y también con profesores en ejercicio o en formación. La mayoría de los estudios realizados con docentes corresponden a mediciones de sus percepciones y autopercepciones respecto del pensamiento computacional, cómo integrarlo en el aula y cómo distintas propuestas de intervención contribuyen a mejorarlo (Rivera et al., 2023).

La incorporación del pensamiento computacional a la formación docente incluye, entre otras cosas, desarrollar su competencia profesional en formulación de problemas escolares y, en concreto, en formulación de problemas que permitan desarrollar el PC de los escolares (Carrillo et al., 2021). Por otra parte, la formulación de problemas por parte de los docentes es una fuente de información sobre el propio conocimiento del docente, sus dificultades y errores conceptuales (e.g. Embid y Perdomo-Díaz, 2024). En esta investigación, el objetivo es analizar la calidad de los problemas formulados por futuros docentes de Educación Primaria para el desarrollo, en los escolares, de una de las habilidades asociadas al pensamiento computacional: el reconocimiento de patrones.

La investigación se enmarca en una experiencia formativa diseñada para estudiantes para maestros y maestras de Educación Primaria. Tanto para el diseño, como para el posterior análisis de la calidad de los problemas, se ha construido un marco específico de formulación de problemas para el desarrollo de las habilidades de pensamiento computacional.

La presente investigación surge de la alineación entre un proyecto de innovación coordinado por la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (Lijo et al., 2023) y un proyecto de investigación coordinado por la Universidad de La Laguna (Embid y Perdomo-Díaz, 2024), ambos alineados con la tendencia europea de incorporar el PC en la educación obligatoria (Bocconi et al., 2022).

MARCO TEÓRICO

La formulación de problemas (FP) consiste en una actividad mediante la cual una persona crea una tarea matemática o modifica una tarea dada (Silver, 1994). En general, las actividades de FP constan de dos partes: una situación y un requerimiento (Cai et al., 2022). La situación es la información a partir de la cuál la persona tiene que formular el problema (algún dato, un contexto, una imagen, un problema, etc.). Dependiendo de la situación, la actividad de FP se considera menos o más estructurada (Baumanns y Rott, 2022). El requerimiento es lo que se solicita, de forma explícita (crear un problema, dos, modificar, etc.).

Una de las principales diferencias entre las actividades de resolución y formulación de problemas es el producto que se espera obtener de las mismas. En el caso de la FP, el producto es un enunciado, por lo que la actividad estará mejor o peor resuelta dependiendo de las características de dicho enunciado. Dicha actividad, en cualquier caso, debe ser plausible, carecer de errores matemáticos en su formulación (Grundmeier, 2015). Si la formulación de problemas la realiza un docente, hay otras características deseables como que el contexto sea razonable, es decir, que la solución tenga sentido en la situación planteada (Cankoy, 2014), que sea motivador para el estudiantado o que el enunciado esté formulado en un lenguaje claro (Leavy y Hourigan, 2022). En relación con la matemática involucrada, debe facilitar que los estudiantes tengan oportunidad de éxito al resolverla e involucrarles en prácticas matemáticas deseables como la formulación de hipótesis, la identificación de estrategias o el razonamiento, para lo que hay que considerar la demanda cognitiva de la actividad formulada, el número de soluciones, la variedad de estrategias que permiten obtenerlas o el número de pasos para llegar a ellas (Leavy y Hourigan, 2022). En la literatura pueden encontrarse estudios que muestran que estas características no siempre están presentes en los problemas que los docentes formulan (Perdomo-Díaz et al., 2023; Sosa-Martín et al., 2024).

La formulación de problemas, como práctica docente, atiende a los objetivos didácticos que el docente quiera lograr (Carrillo et al., 2021), por lo que deben ser coherentes a nivel curricular (Leavy y Hourigan, 2022). Así, si la FP se realiza con el objetivo de desarrollar el PC en los estudiantes, los problemas deben incluir ciertas características propias de este tipo de conocimiento.

Selby y Wollard (2013) definieron el pensamiento computacional como un conjunto de habilidades que incluían la abstracción, la descomposición, el pensamiento algorítmico, la evaluación y la generalización. De forma similar, Bell y Lodi (2019) propusieron una lista de habilidades relacionadas con el pensamiento computacional, integrando la abstracción, la descomposición, el diseño algorítmico, la generalización, el pensamiento lógico y la evaluación. La Autoridad de Evaluación y Difusión del Currículo Australiano (ACARA, 2022) define asimismo el pensamiento computacional con un conjunto de habilidades como descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción, modelado y simulación, algoritmos y evaluación.

La revisión del estado del arte de las habilidades del pensamiento computacional en relación con la formulación de problemas ha conducido a definir un modelo que propicie el desarrollo de dichas habilidades en la formación inicial del futuro docente. Se trataría pues de poner la habilidad "Evaluación" en el centro del modelo, como elemento de reflexión y revisión de la formulación y solución de un problema, para proponer así nuevos problemas, tomando los datos como punto de partida de la formulación y describiendo cuatro habilidades relacionadas de la siguiente forma: (1) Descomposición: Dividir el problema en partes más sencillas de resolver; (2) Reconocimiento de Patrones: Buscar regularidades que permitan resolver el problema; (3) Abstracción: Buscar la forma de responder al problema generalizado (generalizar); (4): Diseño e Implementación de Algoritmos: Diseñar una serie de pasos ordenados para resolver un problema (por ejemplo en un diagrama de flujo) y su correspondiente implementación para el agente de procesamiento de la información.

Entre las habilidades mencionadas, este estudio se centra en la habilidad de reconocimiento de patrones, entendiendo por patrón matemático a "cualquier regularidad predecible, que normalmente implica relaciones espaciales, numéricas o lógicas" (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p.34).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A partir de lo anterior, se establecen los siguientes objetivos específicos para esta investigación:

- Analizar la plausibilidad, razonabilidad contextual y claridad en el lenguaje de los problemas formulados por los futuros maestros y maestras de primaria para el desarrollo del reconocimiento de patrones.
- Analizar el ajuste de los problemas formulados a indicadores propios del reconocimiento de patrones, como habilidad asociada al pensamiento computacional.

METODOLOGÍA

El trabajo de investigación desarrollado es de carácter empírico, con un enfoque exploratorio, y sigue una metodología de análisis cualitativo.

Participantes y contexto

La investigación se realizó con 60 estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria que cursaban la asignatura *Didáctica de la Numeración*, de primer curso, obligatoria, y primera asignatura de matemáticas del grado. Como parte de la investigación, el alumnado recibió una formación de 6 horas enfocada hacia la formulación de problemas en el marco de cuatro de las habilidades del pensamiento computacional: descomposición, reconocimiento de patrones, abstracción y diseño e implementación de algoritmos. Esta formación introdujo a los estudiantes en la formulación de problemas para cada una de esas habilidades, enfatizando las diferencias entre las mismas. Para ello, se utilizaron ejemplos de problemas formulados de manera

que permitieran distinguir cuándo se está desarrollando una u otra habilidad, mostrando de forma explícita una serie de indicadores propios para cada habilidad. Los ejemplos mostraron, por un lado, problemas formulados con contexto numérico mediante el planteamiento de la suma de los n primeros números naturales. Por otro lado, se plantearon ejemplos con contexto asociado a la vida cotidiana, trabajando la idea de proporcionalidad vinculada a la compra de entradas de cine para un grupo variable de personas.

Procesos de recogida y análisis de datos

Los datos se obtuvieron a partir de una actividad en la que se solicitaba a los participantes formular un problema orientado a desarrollar, en escolares de primaria, el reconocimiento de patrones como habilidad específica, asociada al pensamiento computacional. Cada participante formuló un problema que redactó y envió a través de un formulario online. Para analizar cada uno de los problemas formulados, se consideraron cuatro variables de análisis: plausibilidad, razonabilidad, claridad en el enunciado y ajuste a los indicadores propios del reconocimiento de patrones.

Lo primero que se analizó fue la plausibilidad. Si el problema no era plausible, es decir, si contenía errores matemáticos, se detenía la codificación. Para los problemas que sí eran plausibles, se analizó su razonabilidad, observando si el contexto, los datos y la solución tenían sentido en su conjunto o no, o si el contexto era forzado, y su claridad, observando si la redacción del problema formulado se entendía o presentaba ambigüedades o errores gramaticales (Tabla 1).

Para la cuarta variable de análisis, se fijó como indicador propio del reconocimiento de patrones el siguiente: *Un problema será de reconocimiento de patrones cuando explicite ejemplos suficientes del uso del patrón para aplicarlo a otros casos concretos, sin llegar a solicitar una generalización*. Para cada problema se analizó si cumplía o no con el mismo, y se establecieron categorías para los errores (Tabla 2). El indicador podría no cumplirse por diferentes motivos: contribuir a una habilidad diferente o a más de una a la vez (por ejemplo, solicitando el patrón en el enunciado se contribuiría con la habilidad de *abstracción* al pedir una generalización), no contribuir a ninguna de ellas de forma específica o indicar el patrón en el enunciado (pues no se contribuye a reconocerlo).

Finalmente, en los casos que sí se ajustaban al indicador, se analizó si los problemas propuestos por el alumnado son completamente nuevos, o si plantean variantes de los ejemplos trabajados durante la formación, clasificándolos por el tipo de cambios planteados en la formulación: cambios en el contexto, en los ejemplos aportados o en los casos de aplicación solicitados (Tabla 3).

Cada uno de los problemas se codificó de forma independiente por dos investigadores. Una vez alcanzado un consenso en las codificaciones, se obtuvieron las frecuencias en cada una de las variables con el objetivo de responder a la pregunta de investigación.

Tabla 11

Razonabilidad y claridad de las formulaciones plausibles desarrolladas por el futuro profesorado (N=55)

Variable	Categoría	N	%
Razonabilidad	El contexto, los datos y la solución tienen sentido en conjunto	38	69,1
	Se presenta un contexto "forzado"	14	25,5
	Falta alguna información para decidir si el contexto, los datos y la solución tienen sentido en conjunto (unidades de medida, ...)	2	3,6
	La solución del problema no tiene sentido en el contexto indicado	4	7,3
Claridad	Se entiende y no presenta ambigüedades	49	89,1
	Presenta alguna ambigüedad que puede dar lugar a diferentes interpretaciones	5	9,1
	Tiene errores gramaticales que dificultan su comprensión (frases mal construidas, etc.)	2	3,6

RESULTADOS

En el análisis se observó que únicamente 5 de los 60 problemas formulados (8.3%) eran no plausibles. En la Tabla 11 se muestran las categorías de razonabilidad y claridad referidas a las 55 formulaciones plausibles desarrolladas. Las categorías correspondientes a errores en la formulación, tanto referidas a la razonabilidad como a la claridad, no son exclusivas, pudiendo presentarse más de una en un único problema formulado.

Con respecto a la razonabilidad, se ha observado que el 69.1% de las formulaciones plausibles presentan problemas formulados cuyo contexto, datos y solución tienen sentido en conjunto. Sin embargo, un 36.4% de las formulaciones presenta problemas de razonabilidad, entre los cuales el error más común (14 ocurrencias) implica presentar un contexto "forzado", que no representa adecuadamente una situación verosímil. Un ejemplo de este tipo de problemas sería el siguiente:

> *En una competencia de saltos, los resultados de los primeros saltos de los participantes siguen un patrón. Los saltos de los primeros seis participantes fueron los siguientes: 3, 6, 9, 12, 15, 18… ¿Qué patrón siguen los saltos de los primeros participantes? ¿Qué salto tendrá el participante número 8?* (ID.53)

Se considera que el contexto aportado es forzado debido a que el récord mundial actual en salto de longitud, obtenido por Mike Powell en 1991, fue de 8,95 metros. No se considera razonable que se plantee un contexto en el cual existen saltos de más de 10 metros, y en el que la diferencia de rendimiento entre participantes sea tan amplia. Asimismo, el ejemplo también tiene el error de no identificar adecuadamente las unidades de medida para las distancias de los saltos.

Con respecto a la claridad del enunciado, hasta un 89,1% de los problemas formulados ha presentado enunciados comprensibles y que no presenten ambigüedades. El resto muestra errores de claridad en su redacción, fundamentalmente referidos a ambigüedades que den lugar a interpretaciones diversas y a errores en la redacción que dificultan su comprensión.

Una vez analizada la formulación de los problemas, se evalúa, en la Tabla 12, en qué medida los casos plausibles (N=55) se ajustan al indicador planteado para la habilidad de reconocimiento de patrones. Se ha observado que un 69,1% de las formulaciones plausibles se ajustan al indicador, lo que actúa como muestra del grado de desarrollo del pensamiento computacional en el alumnado, particularmente en lo que respecta a la habilidad de reconocimiento de patrones.

Del 30,9% de las formulaciones plausibles que no se ajustan al indicador, se han detectado 3 causas fundamentales, representadas en la Tabla 12. El ejemplo previamente expuesto (ID.53) representa, además, una muestra de problema que no cumple con ningún indicador porque la formulación alude a más de una habilidad de pensamiento computacional. Al presentar el ejemplo de un uso concreto de un patrón, y solicitar su aplicación para casos particulares, se está trabajando el reconocimiento de patrones. Sin embargo, el hecho de pedir la descripción del patrón identificado, de manera explícita, hace que el alumnado deba plantear como respuesta una descripción de cómo la estructura repetitiva de dicho patrón sería aplicable para cualquier número. Este proceso de generalización se ubicaría, por definición, en la habilidad de abstracción de acuerdo con el marco presentado.

Tabla 12

Ajuste de las formulaciones plausibles al indicador de reconocimiento de patrones (N=55)

Categoría	N	%
Sí	38	69,1
No	17	30,9
El enunciado ya indica el patrón	3	
No cumple con ningún indicador porque alude a más de una habilidad de pensamiento computacional	8	

No se corresponde con ninguna habilidad de pensamiento computacional	6

De todos los problemas plausibles que se consideran ajustados al indicador de la habilidad (N=38), se han detectado 4 categorías principales, que se presentan en la Tabla 3. Las dos primeras, que representan un 34,2 % de los casos, se refieren a variaciones de los dos problemas presentados como ejemplo en la intervención. Existen otras dos categorías que no se basan en los problemas de referencia y se aportan a continuación estadísticas y ejemplos de su planteamiento. Por una parte, más de la mitad de los problemas formulados (55,3%) trabajan el reconocimiento de patrones mediante el planteamiento de sucesiones (C3). Un ejemplo de este caso sería el siguiente:

> *En la pizarra, el profesor escribe una secuencia de números: 2, 4, 6, 8, 10, … ¿Qué número sigue en la secuencia? Si la secuencia comienza con el número 3, ¿cuáles serían los primeros cinco números de la nueva secuencia?* (ID.31)

Tabla 13

Tipo de formulaciones planteadas para el indicador de reconocimiento de patrones (N=38)

	N	%
C1 - Plantea variaciones del problema de sumas presentado	4	10,5
C11 - Cambia el contexto	3	
C12 - Cambia los ejemplos del uso del patrón	1	
C13 - Cambia los casos en los que se debe aplicar el patrón	4	
C2 - Plantea variaciones del problema de proporcionalidad presentado	9	23,7
C21 - Plantea el problema de proporcionalidad, cambiando el contexto	9	
C22 - Plantea el problema de proporcionalidad, cambiando los ejemplos del uso del patrón	8	
C23 - Plantea el problema de proporcionalidad, cambiando los casos en los que se debe aplicar el patrón	8	
C3 - Plantea un problema de sucesiones	21	55,3
C4 - Plantea un problema diferente a los dos ejemplos y que no es de sucesiones	4	10,5

Por otra parte, un 10,5% de los participantes ha planteado un problema diferente a los ejemplos proporcionados y que, además, no es de sucesiones (C4). Un ejemplo de este caso sería el siguiente:

> *En un edificio con 3 viviendas y garaje hay 5 puertas y en otro edificio con 5 viviendas y garaje hay 7 puertas. Si ninguno de estos edificios tuviera garaje, cada uno tendría una puerta menos. ¿Cuántas puertas hay en un edificio de 10 viviendas con garaje? ¿Y sin garaje?* (ID.44)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis de los resultados nos permitió acercarnos a dar respuesta al objetivo general que guía esta investigación, conociendo cómo los futuros maestros formulan problemas de reconocimiento de patrones en el marco del pensamiento computacional, poniendo el foco tanto en la plausibilidad, razonabilidad y claridad de los problemas formulados, como en la adecuación de dichos problemas para desarrollar la habilidad de reconocimiento de patrones.

A pesar de que la práctica totalidad de los problemas formulados son plausibles, un número elevado de ellos presenta contextos no razonables o forzados y algunos cuentan con algún tipo de error o ambigüedad en la redacción del enunciado (Tabla 1). Estos resultados coinciden con los obtenidos en otros estudios donde los futuros maestros formulaban problemas escolares con otros objetivos didácticos (Perdomo-Díaz et al., 2023; Sosa-Martín et al., 2024). Es importante, como futuros docentes, que formulen problemas razonables y claros (Cankoy, 2014), pues de lo contrario los problemas planteados dejan de ser motivadores para el alumnado (Leavy y Hourigan, 2022).

Por otra parte, la mayoría de los problemas plausibles formulados por los futuros maestros se ajustaron al indicador definido para la habilidad de reconocimiento de patrones (Tabla 2). La principal dificultad a la hora de ajustarse al indicador tuvo que ver con la relación existente entre las distintas

habilidades asociadas al pensamiento computacional, siendo muy fina la línea que separa una de otra. Para el desarrollo de la habilidad de reconocer patrones, los problemas deben centrarse en promover la identificación de regularidades, lo que normalmente implica descubrir relaciones que pueden ser de distinto tipo (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Si se formula una actividad en cuyo enunciado se indica el patrón, no estaría dándose al estudiante la oportunidad de reconocerlo, por lo que no estaría contribuyendo explícitamente al desarrollo de esta habilidad.

De los 60 problemas formulados, únicamente 25 pueden considerarse de calidad, en términos de los elementos de nuestro marco de referencia, plausibles, redactados de forma clara, con un contexto en el que la solución es razonable y que se ajustan al indicador de la habilidad de reconocimiento de patrones. Esto muestra la necesidad de profundizar en esta investigación, estudiando hasta qué punto las dificultades están relacionadas con las habilidades de pensamiento computacional, con la habilidad para formular problemas o con la integración de ambas.

Por otra parte, resulta interesante observar que algo más de la mitad de esos 25 problemas con cierta calidad, son problemas sobre sucesiones (17 de 25 actividades). Ninguno de los dos ejemplos que se mostraron durante la experiencia de formación eran de sucesiones, por lo que este resultado nos hace reflexionar sobre la importancia de extender el concepto de patrón que aparece con mayor frecuencia en las aulas, relacionado con regularidades numéricas o geométricas (Acosta et al., 2023), y hacerlo explícito en otras situaciones donde las regularidades sean relaciones de otro tipo. En este sentido es fundamental apostar por formaciones en las que se plantee de forma clara la integración de las habilidades del pensamiento computacional en el currículo del área de Matemáticas, cambiando la percepción del profesorado en cuanto a su inclusión (Santaengracia et al., 2023). De los otros 8 problemas que cumplían con las cuatro condiciones de calidad establecida, solo dos fueron propuestas completamente nuevas, los otros 6 fueron adaptaciones de los ejemplos vistos en clase a los que se modificó el contexto o los valores que aparecían en el enunciado.

Cabe mencionar, como limitaciones propias del estudio, que la muestra preliminar considerada es reducida y únicamente representa la realidad de un centro educativo. Se plantea el desarrollo de trabajos futuros que abarquen una muestra mayor y que, además, aborden el estudio de las distintas habilidades de pensamiento computacional presentadas, en el contexto de la formulación de problemas. En cualquier caso, los resultados analizados permiten mostrar una visión preliminar de la naturaleza de las formulaciones planteadas por el futuro profesorado en formación, con respecto a la habilidad de reconocimiento de patrones en el contexto del pensamiento computacional.

REFERENCIAS

ACARA. (2022). *Computer thinking in practice*. https://www.australiancurriculum.edu.au

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Patrones en educación infantil: vinculando pensamiento computacional y algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 115–122). SEIEM.

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, *110*(2), 251–269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Bell, T. y Lodi, M. (2019). Constructing computational thinking without using computers. *Constructivist Foundations*, *14*(3), 342–351.

Bocconi, S., Chioccariello, A., Kampylis, P., Dagiene, V., Wastiau, P., Engelhardt, K., Earp, J., Horvath, M. A., Jasute, E., Malagoli, C., Masiulionyte-Dagiene, V. y Stupuriene, G. (2022). *Reviewing Computational Thinking in Compulsory Education*. Oficina de Publicaciones de la Unión Europea. https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC128347

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.

Cankoy, O. (2014). Interlocked problem posing and children's problem posing performance in free structured situations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 219–238.

Carrillo, J., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la Educación Matemática* (pp. 162–183). Compobell.

Embid, S., y Perdomo-Díaz, J. (2024). Herramientas Digitales en la Formulación de Problemas de Fracciones por Futuros Maestros de Primaria. En Amaduz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., Climent-Rodríguez, N. y Jiménez-Gestal, C. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 201–208). SEIEM.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer, et al. (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 411–431). Springer.

Leavy, A. y Hourigan, M. (2022). The framework for posing elementary mathematics problems (F-PosE): Supporting teachers to evaluate and select problems for use in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 111*, 147–176. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10155-3

Lijo, R., Calcines, M., López-Puig, A., Zapatera, A. y Quevedo, E. (2023). Percepción del Estudiantado para Maestro sobre la Integración Curricular del Pensamiento Computacional en su Proceso Formativo. En J. B. Alonso, D. Sánchez, J. M. Canino, A. Ravelo, C. Travieso, S. T. Pérez (Eds.), *X Jornadas Iberoamericanas de Innovación Educativa en el ámbito de las TIC y las TAC* (pp. 111-119). InnoEducaTIC. http://hdl.handle.net/10553/128283

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research*, *21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Perdomo-Díaz, J.; Sosa-Martín, D.; Almeida, R. y Pérez, P. (2023). La razonabilidad contextual en problemas de áreas formulados por futuras maestras y maestros. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática XV,* (pp. 187-201).

Rivera, S., Hummes, V. y Seckel, M. J. (2023). Pensamiento Computacional en la formación de profesores: una revisión sistemática de investigaciones empíricas recientes. En A. Vico Bosch y L. Vega Caro (Coords.), *Caminando hacia la innovación en educación: de la teoría a la práctica* (pp. 890-909). Dykinson, S.L.

Rodríguez Muelas, D., Rodríguez Sánchez, M., Fuertes Prieto, M. A. y Alonso Ruano, B. M. (2024). Pensamiento computacional. Tratamiento desconectado en el aula de educación primaria. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 622). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del Profesorado sobre Pensamiento Computacional. Estudio de una Formación. En Jiménez-Gestal, C., Magreñán, Á. A., Badillo, E. e Ivars, P. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Selby, C.C. y Woollard, J. (2013). *Computational Thinking: The Developing Definition.* University of Southampton.

Sosa-Martín, D., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., Almeida, R., y García-Alonso, I. (2024). The influence of problem-posing task situation: Prospective primary teachers working with fractions. *The Journal of Mathematical Behavior, 73*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101139.

ANÁLISIS DEL DOMINIO AFECTIVO EN LA SEIEM: TENDENCIAS Y RETOS

Analysis of the affective domain in SEIEM: trends and challenges

Rodríguez-Barreto, C. y García-Alonso, I.

Universidad de La Laguna

Resumen

El estudio del dominio afectivo ha estado presente en la mayoría de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). El estudio sistemático de las publicaciones de las actas permite observar que la investigación se centra en la medición de las actitudes y la ansiedad matemática, fundamentalmente a través de cuestionarios. Sin embargo, se ha evidenciado la necesidad de desarrollar instrumentos más precisos para distinguir las componentes afectivas, o en desarrollar estudios con enfoques cualitativos, así como analizar la influencia de metodologías emergentes en la ansiedad matemática, lo que permitiría conocer su impacto en la experiencia afectiva de los estudiantes.

Palabras clave: dominio afectivo, ansiedad matemática, actitud matemática.

Abstract

The study of the affective domain has been present in the majority of the Symposia of the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM). The systematic study of the publications in the proceedings allows us to observe that research focuses on the measurement of attitudes and mathematical anxiety, primarily through questionnaires. However, the need has been evidenced to develop more precise instruments to distinguish affective components, or to develop studies with qualitative approaches, as well as to analyze the influence of emerging methodologies on mathematics anxiety, which would allow us to understand their impact on students' affective experience.

Keywords: *affective domain, mathematical anxiety, mathematical actitude*

INTRODUCCIÓN

Durante varias décadas, el dominio afectivo ha sido un foco importante en la investigación en educación matemática. Impulsado significativamente por los trabajos de McLeod, quien lo conceptualizó como un constructo complejo que incluye subdominios interrelacionados como las actitudes, las creencias y las emociones. Estos trabajos han generado numerosas investigaciones posteriores que exploran en profundidad aspectos como las actitudes hacia las matemáticas y la ansiedad matemática, entre otros. Por su parte, las pruebas internacionales como PISA, han puesto el foco en la ansiedad ante las matemáticas que presentan los estudiantes de 15 años de los países participantes. En este sentido, los resultados señalan que los estudiantes españoles se sitúan entre los que muestran mayor ansiedad, "muy por encima de los países de la OCDE y del total de la UE" (MEFPyD, 2023, p. 135). La ansiedad hacia las matemáticas no tiene una causa única y puede darse cuando un estudiante realiza una actividad en el aula o cuando no entiende algo de matemáticas. Se puede deber a la acumulación de experiencias negativas en clase, a falta de habilidades y conocimientos matemáticos, a variables relacionadas con su autoconfianza o autoestima (Ureña, 2015). Esta ansiedad se pone de manifiesto también fuera del aula y es necesario que los docentes deban estar atentos a los estudiantes con alta ansiedad hacia ellas (Szücs y Mammarella, 2020).

Rodríguez-Barreto, C. y García-Alonso, I. (2025). Análisis del dominio afectivo en la SEIEM: tendencias y retos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

Desde los años setenta del siglo pasado se han publicado investigaciones acerca de la ansiedad matemática (Tobias, 1978; Richardson y Suinn, 1972), a partir de los cuales se ha tratado de identificar y conocer cómo abordar esta emoción negativa hacia las matemáticas. Estos estudios están de acuerdo con que la ansiedad tiene un origen con múltiples detonantes y con una amplia variedad de síntomas de diferentes tipos: físicos, cognitivos y conductuales. Estos síntomas se manifiestan a través de signos como sudoración, palpitaciones, pensamientos negativos, evitación de tareas matemáticas o bajo rendimiento académico (Suárez-Pellicioni et al., 2013).

El currículo vigente en España para todo el sistema educativo y, en particular para la educación secundaria (Real Decreto 217/2022), toma conciencia de la necesidad de que desde la escuela se atienda y guíe a los estudiantes en los aspectos emocionales que desarrollan ante las tareas matemáticas. Es por lo que incorpora dos competencias específicas relacionadas con las destrezas emocionales de ámbito personal y social, ante la actividad matemática. En concreto, con esta competencia se promueve "identificar y gestionar las emociones, reconocer fuentes de estrés, ser perseverante […] mejorar la resiliencia y mantener una actitud proactiva ante nuevos retos matemáticos" (p. 41710). Por tanto, el currículo español se alinea con lo que la investigación y los resultados en las pruebas internacionales señalan como factor que influye en la mejora del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

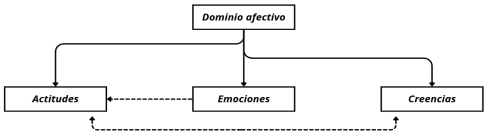
Los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) constituyen un espacio fundamental para el intercambio de avances en esta investigación en España. Su relevancia radica en que concentran buena parte de la producción científica en Educación Matemática, constituyéndose en una fuente representativa para analizar tendencias y enfoques emergentes. Así, el análisis de los trabajos presentados en estos encuentros permite tener una visión panorámica de la evolución y el estado actual de las discusiones en torno al dominio afectivo. Una revisión sistemática de las comunicaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM permitirá organizar y sintetizar el conocimiento existente y así detectar posibles oportunidades para futuras líneas de investigación.

MARCO CONCEPTUAL

El dominio afectivo en matemáticas se define como "un amplio rango de creencias, emociones y modos que, generalmente, se relacionan que van más allá del dominio cognitivo" (McLeod, 1992, p. 576). El dominio así identificado abarca tres subdominios: *emociones, actitudes* y *creencias* (McLeod, 1992). Para este autor, el término *emoción* lo reserva para los afectos más viscerales, las respuestas más intensas y de corta duración. Las *actitudes* son la predisposición positiva o negativa que determina las intenciones de una persona e influyen en su comportamiento. Finalmente, las *creencias* poseen una fuerte componente cognitiva, son más estables y, por tanto, más complejas de modificar. Pero estos subdominios están conectados e influyen entre ellos (Hannula, 2012).

Figura 1

Componentes del dominio afectivo y sus interrelaciones. Fuente: Hanula, 2012



Las actitudes hacia las matemáticas son uno de los componentes clave del dominio afectivo y se ha comprobado su fuerte vinculación con la ansiedad matemática (Akin y Kurbanoglu, 2011), influyendo en la motivación, compromiso y éxito en matemáticas de los estudiantes (Hannula, 2012). La ansiedad matemática se define como una reacción afectiva negativa ante situaciones numéricas (Ashcraft y Moore, 2009) que se manifiesta como tensión y miedo en la vida cotidiana y académica (Richarson y Suinn, 1972). Esta respuesta involucra dimensiones cognitivas (pensamientos negativos,

dificultad para concentrarse, etc) y dimensiones fisiológicas (sudoración, palpitaciones, etc.) (Sagasti-Escalona, 2019), con raíces multifactoriales y sociales. Además, interfiere en el aprendizaje de las matemáticas, afectando a la memoria de trabajo y la resolución de problemas matemáticos (Carey et al., 2016). Por tanto, aunque la ansiedad matemática se sitúa dentro de la dimensión emocional descrita por McLeod (1992), esta se distingue por su tendencia a manifestarse como un rasgo relativamente estable, intrínsecamente ligado a procesos cognitivos, como la memoria de trabajo, y conectada a factores fisiológicos y sociales (Hannula, 2012). Estos aspectos, aunque considerados dentro del dominio afectivo, requiere de un análisis específico en la investigación y así conocer mejor sus interconexiones y de ellos con el resto de los dominios afectivos.

OBJETIVOS

A partir de lo anterior, y a través de una revisión sistemática de las investigaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM se pretende responder a:

- ¿Cuáles son las principales características de las investigaciones analizadas acerca del dominio afectivo?
- ¿Qué líneas de investigación futuras se identifican a partir del análisis de los trabajos existentes sobre el dominio afectivo ?

METODOLOGÍA

Para el objetivo de este estudio desarrollamos una revisión sistemática basada en la metodología PRISMA (Artículo de información preferidos para revisiones sistemáticas y metaanálisis, por sus siglas en inglés) (Page at al., 2021) que incluye una lista de control para presentar los estudios más adecuados. Aplicamos esta metodología a las actas de los Simposios de la SEIEM atendiendo a los criterios de inclusión/exclusión (Tabla 1) seleccionados. Se excluyeron del análisis los pósteres debido a que las actas sólo proporcionan una página por póster, lo cual resulta insuficiente para determinar el alcance y la profundidad de los estudios en relación con la temática seleccionada.

Tabla 1

Criterios de inclusión/exclusión de los documentos a analizar

Criterios de inclusión/exclusión	**Inclusión**	**Exclusión**
Lugar de publicación	Actas de los simposios de la SEIEM	Otras publicaciones y/o congresos
Periodo de publicación	2002-2024	1997-2001
Tipo de publicación	Comunicaciones y seminarios	Pósteres

El período de publicación de las actas que están accesibles en la web de la SEIEM abarca desde el año 2002 hasta el 2024. Del 2002 al 2006 las actas se estructuran alrededor de los grupos de trabajo y seminarios. Mientras que, desde el 2007 hasta el 2024 se estructura en seminarios, comunicaciones y pósteres (estos últimos se añaden a partir del año 2014).

Tabla 2

Criterios de inclusión/exclusión de los documentos a analizar

	Identificación: Publicaciones SEIEM	**Detección**	**Elegibilidad**	**Inclusión**
Nº de documentos detectados	1500	25	25	25
Nº de documentos excluidos	502	977	0	

En todas las actas analizadas se identifican 1500 publicaciones. El primer criterio de selección es buscar aquellos que contienen alguno de los términos “afectivo”, “emoción”, “actitud”, “creencia” o “ansiedad”. Este criterio de búsqueda devolvió un total de 38 publicaciones en las actas. Una vez se

aplican los criterios de inclusión y exclusión (Tabla 2), contaremos con 25 unidades de análisis. Tras la selección de las unidades de análisis, se procedió a definir y estudiar los parámetros diseñados para extraer información clave y facilitar la síntesis de los hallazgos (Tabla 3). La selección de los parámetros se hace atendiendo a que permitan asegurar la trazabilidad, transparencia, observación la generalidad de los hallazgos, así como su validez y fiabilidad. Además, recopilar la pregunta de investigación y los principales resultados nos permitirán determinar la relevancia de los trabajos analizados.

Tabla 3

Parámetros a aplicar en las unidades de análisis

Parámetros	**Descripción**
Referencia bibliográfica	Registro del autor o autores y año publicación
Tipo de artículo (TA)	Teórica (T) o Empírica (E)
Metodología de investigación (MI)	Cuantitativa (QT), Cualitativa (QL) o Mixta (MX)
Sujetos de estudio (SE)	Nivel educativo: Infantil (I), Primaria (P), Secundaria (S), Universidad (U)
Instrumentos de recolección de datos (Inst)	Cuestionario (C), observación (O), entrevistas (E), rúbrica (R) o documentos de los estudiantes (D)
Pregunta de investigación/Objetivo del estudio	Pregunta de investigación y objetivo principales de cada estudio, con el fin de comprender el propósito de la investigación y su contribución
Principales resultados	Se sintetizaron los hallazgos más relevantes de los estudios, destacando las conclusiones principales y su implicación para la investigación en el área

RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados del estudio en relación con las preguntas de investigación que guían esta revisión sistemática. Primero, se exploran las características generales de los artículos seleccionados, tales como sus autores y año de publicación, el tipo de artículo (teórico o empírico), la metodología de estudio, el objeto de estudio, el nivel educativo y el instrumento de recolección de datos. Posteriormente, analizamos características específicas relacionadas con la identificación de los principales hallazgos reportados por los estudios, con el fin de determinar el enfoque de la investigación.

A. Características generales

La Tabla 3 presenta los 25 trabajos seleccionados y sus características generales.

Tabla 4

Artículos seleccionados para el análisis

Nº	Artículos	TA		MI	NE				SE	Inst
		T	E		I	P	S	U		
1	Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. (2023)		X	QT			X		185 docentes en activo.	C
2	García-García, J. y Nortes, R. (2022)		X	QL			X		269 alumnos	C,D
3	Buforn, À., Pérez-Tyteca, P., Monje, J. (2021)		X	MIX				X	2 docentes en formac.	C,D

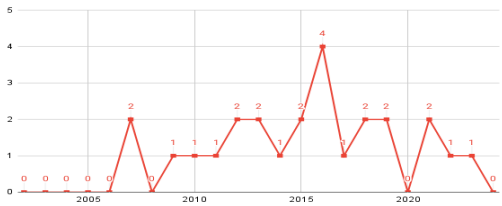
4	García-Alonso, I., Sosa-Martín, D. N., García-Díaz, A. (2021)		X	QT		X	135 estudiantes	C
5	Garrido-Martos, R., Franco-Guijar, M., González-Calvín, C., Morand, Z. C. y Ruiz-Rodríguez, L. (2019)		X	MX		X	254 docentes en formac.	C,E
6	Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2019)		X	QT		X	344 docentes en formac.	C
7	García-González, M. S. y Martínez-Sierra, G. (2018)		X	QL		X	1 docente en activo.	E,O
8	Perdomo-Díaz, J. (2018)		X	QT	X		166 estudiantes	C
9	Jorge-Pozo, D., Jiménez-Gestal, C. y Murillo, J. (2017)		X	QT		X	17 estudiantes	C,D
10	Marbán, J. M. (2016)	X						
11	Caballero, A., Cárdenas, J. y Gordillo, F. (2016)		X	MX	X		60 docentes en formac.	C,O, D
12	Gómez-Chacón, I. M. (2016)	X						
13	Palacios-Picos, A. (2016)	X						
14	Boigues, F. J, Estruch, V. y Vidal, A. (2015)		X	QT		X	89 estudiantes	C,D
15	Salinas, J. y Mayén, S. (2015)		X	QT		X	277 estudiantes	C
16	Nortes, R. y Nortes, A. (2014)		X	QT		X	506 docentes en formac.	C
17	Cárdenas, J. A., Blanco, L., Gómez del Amo, R. y Álvarez Esteban, M. R. (2013)		X	QT		X	211 docente en activo.	C
18	López, P. y Alsina, A. (2013)		X	MX		X	141 docente en formac.	C,E
19	Cauich, A. R. e Hidalgo, S (2012)		X	QT	X		430 estudiantes	C
20	Rodríguez del Tío, P., Hidalgo, S., Palacios, A. (2012)		X	QT		X	358 estudiantes	C
21	Pérez-Tyteca, P., Castro Martínez, E (2011)		X	QT		X	1242 estudiantes	C

22	Gómez-Chacón, I. (2010)	X					
23	Mato Vázquez, M. D., de la Torre, E. (2009)	X	QT		X	1220 estudiantes	
24	Estrada, A. (2007)	X	MX	X		367 estudiantes	C,E
25	Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2007)	X	QT		X	885 estudiantes	C

En la Tabla 3 se muestra que el 84% de los artículos seleccionados son estudios empíricos. En cuanto al año de publicación, observamos que, aunque esta revisión abarca desde 2002 hasta el 2024, sólo identificamos artículos a partir de 2007 (Figura 2). Observamos que el número de publicaciones dedicadas a esta temática no suele ser muy abundante, siendo lo habitual que existan entre 1 o 2 publicaciones anuales relacionadas con esta temática. El año que más artículos se publicaron coincide con la celebración de un seminario bajo esta temática.

Figura 2

Número de artículos publicados en las SEIEM ordenados por año



En relación con el método de investigación, hay estudios con los tres enfoques, aunque, la mayoría (60%) emplea una metodología cuantitativa, en la que se utilizan cuestionarios para recopilar la información. Respecto a los niveles educativos a los que se dirige la investigación, la mayoría analizan respuestas de estudiantes de secundaria (32%) y universitarios (36%). En este último caso, fundamentalmente futuros profesores. No hay investigaciones dirigidas a la educación infantil.

B. Características específicas

El estudio de las preguntas y los objetivos de investigación nos permite identificar qué aspectos del dominio afectivo son el foco de análisis (Tabla 4). Destacan los trabajos con foco en la ansiedad matemática (32%), seguidos de los que abordan las actitudes (24%) y las relaciones entre la afectividad y la cognición (24%).

Tabla 4

Número (porcentaje) de artículos por subdominio afectivo

	Actitudes	*Creencias*	*Ansiedad*	*Afecto- Cognición*	*Otros focos*
Número de artículos	1, 4, 6, 15, 23, 24	8, 14, 18	3, 5, 7, 11, 16, 20, 21,25	9, 10, 12, 13, 17, 19, 22	2
Total (%)	6 (24)	3 (12)	8 (32)	7 (28)	1 (4)

Los trabajos con foco en las actitudes hacia las matemáticas y su relación con el rendimiento, explorando variables como el género o el tipo de centro escolar, concluyen que las actitudes suelen ser más positivas en los estudiantes de centros privados y concertados y se muestra una correlación positiva entre la actitud y el rendimiento. Otros estudios analizaron la actitud ante el estudio de la

estadística y en general se muestra que los estudiantes dan importancia a este aprendizaje. Con los futuros maestros se observó que hay una relación entre la actitud y la ansiedad hacia las matemáticas. Se puede identificar que la actitud hacia las matemáticas es un predictor significativo del rendimiento.

Los tres trabajos que exploran objetivos relacionados con las creencias en diversos grupos de estudiantes abordan las creencias propias, al ingresar en ingenierías y sobre sus propias habilidades y éxito en matemáticas. Entre los futuros docentes existe una creencia que lleva a considerar que todas las personas tienen el mismo talento para las matemáticas o una baja autoestima frente a las matemáticas En cambio, los estudiantes de ingeniería presentan una mayor autoestima ante el aprendizaje de las matemáticas, que también se refleja en estudiantes de Primaria.

Los trabajos con foco en la ansiedad matemática proponen indagar sobre los niveles de ansiedad en estudiantes universitarios de diferentes disciplinas, futuros maestros de primaria y profesores noveles, estudiando si se dan diferencias significativas debidas al género, las ramas de conocimiento, el perfil académico o la percepción de utilidad de las matemáticas. En las conclusiones, estos estudios convergen en señalar una presencia notable de ansiedad matemática, especialmente en las mujeres y en ciertos campos de estudio como Ciencias de la Salud. Además, se evidencia que la ansiedad se relaciona negativamente con el rendimiento y puede influir en la elección de los estudios. No obstante, también se orientan hacia la búsqueda de estrategias e intervenciones para mitigar esta ansiedad, como el uso de materiales manipulativos, técnicas de instrucción y programas de control emocional. Los resultados de estas intervenciones demuestran la posibilidad de reducir significativamente la ansiedad, mejorar la autoconfianza y promover actitudes más positivas hacia las matemáticas.

Por su parte, en los trabajos que analizan la relación existente entre los dominios afectivo y cognitivo en el aprendizaje de las matemáticas se extrae que existe una correlación significativa entre estos dominios que, ante la evaluación de la resolución de problemas, hay un mayor peso de la cognición. Todos ellos indican que la afectividad y la cognición no son entidades separadas, sino que interactúan de manera constante y significativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, un trabajo (dentro de la categoría otros focos) aborda la relación entre la formación musical y la competencia matemática. En relación con la afectividad, el trabajo señala que los estudiantes músicos presentan niveles de ansiedad hacia las matemáticas ligeramente superiores a los no músicos. Su actitud es algo superior entre los estudiantes músicos, pero sin diferencias significativas en la autoconfianza hacia las matemáticas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un análisis sistemático de los trabajos publicados en las actas de los simposios de la SEIEM desde el año 2002 hasta 2024, con el objetivo de caracterizar e identificar aspectos relacionados con el dominio afectivo que se han abordado en la investigación.

En respuesta a la primera pregunta de investigación, se ha observado que la línea de investigación más desarrollada es la exploración de la relación entre el dominio afectivo o la ansiedad matemática y su influencia en el rendimiento o el aprendizaje de las matemáticas, con resultados similares a los obtenidos por Carey et al. (2016) o Suárez-Pellicioni et al. (2013). Se ha observado que varios estudios tratan de determinar cómo las actitudes, creencias, ansiedad y motivación influyen en el aprendizaje y el éxito en el aprendizaje de este conocimiento. Además, se han profundizado en cómo influyen variables como el género, la experiencia formativa previa, el nivel educativo, el tipo de centro escolar o el contexto sociocultural, en el desarrollo de los subdominios afectivos. Estos análisis están alineados con estudios como los de Akin y Kurbanoglu (2011) o Sagasti-Escalona (2019).

Otra característica es la creciente atención a la interacción entre el dominio afectivo y la cognición en el proceso de aprendizaje matemático. Los investigadores buscan comprender cómo los sentimientos, las emociones y las creencias se entrelazan con los procesos de pensamiento

matemático, la resolución de problemas y la comprensión conceptual, como señalan, entre otros autores, Carey et al. (2016) y Sagasti-Escalona (2019).

En respuesta a la segunda pregunta de investigación, se identifican algunas líneas de investigación futura, como el desarrollo de instrumentos de medición más precisos con los que profundizar en los componentes del dominio afectivo. Por otro lado, es necesario complementar las metodologías cuantitativas con enfoques cualitativos, como pueden ser entrevistas y estudios de casos, para obtener una comprensión más profunda de las experiencias afectivas. También se considera que puede ser interesante explorar los mecanismos emocionales y su intervención en el discurso del aula, así como en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Finalmente, queda por explorar los efectos de las metodologías emergentes, como el aprendizaje basado en juego, la gamificación, el aprendizaje basado en proyectos o el aprendizaje cooperativo, en la ansiedad hacia las matemáticas.

Existe una amplia investigación acerca del dominio afectivo y la ansiedad en relación al aprendizaje de las matemáticas, pero, aun así, sigue siendo necesario establecer puentes entre la teoría y la práctica a través del desarrollo de programas basados en la evidencia científica.

Referencias

Akin, A. y Kurbanoglu, N. I. (2011). The relationship between math anxiety, math attitude and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica, 53*(3), 263-273.

Ashcraft, M. H., y Moore, A. M. (2009). Mathematics Anxiety and the Affective Drop in Performance. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27*(3), 197-205. https://doi.org/10.1177/0734282908330580

Carey, E., Hill, F., Devine, A. y Szücs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in psychology, 6*, 1987. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01987

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137-161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes (MEPyD) (2023). *PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe Español.* INEE.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). Macmillan.

OCDE (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The state of learning and equity in education*. OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/53f23881-en

Real decreto, 157/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, 41571- 41789

Richardson, F. C. y Suinn, R. M. (1972). The Mathematics Anxiety Rating Scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*, 551–554. https://doi.org/10.1037/h0033456

Sagasti-Escalona, M. (2019). La ansiedad matemática. *Matemáticas, educación y Sociedad, 2*(2), 1–18.

Suárez-Pellicioni, M., Núñez-Peña, M. I. y Colomé, À. (2013). Abnormal Error Monitoring in Math-Anxious Individuals: Evidence from Error-Related Brain Potentials. *PLoS ONE 9*(1): https://doi.org/10.1371/journal.pone.0081143

Szücs, D. y Mammarella, I. C. (2020). *Ansiedad hacia las matemáticas.* Serie Prácticas Educativa 31. Academia Internacional de Educación (AIE).

Tobias, S. (1978). *Overcoming Math Anxiety*. New York: W.W. Norton & Company.

Ureña, M. P. (2015). *Ansiedad a las Matemáticas.* Trabajo fin de grado. Universidad de Jaén.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE CÁLCULO VECTORIAL EN LA ENSEÑANZA DE LAS DERIVADAS EN VARIAS VARIABLES[i]

Specialized Knowledge of a Vector Calculus Professor in Teaching Partial Derivatives

Rojas-Celis C.[a], Cáceres-García M.J.[b], Sánchez-Barbero, B.[b]

[a] Universidad El Bosque, [b] Universidad de Salamanca

Resumen

Este estudio examina el conocimiento especializado de un profesor universitario en la enseñanza de las derivadas en varias variables, desde el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Mediante un enfoque cualitativo y el análisis de dos sesiones de clase, se identificó la interacción entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido en su práctica docente. Los resultados muestran un énfasis en estrategias didácticas, registros de representación y herramientas tecnológicas para favorecer la comprensión conceptual. Además, se plantea la necesidad de estudios futuros sobre las creencias del docente y su influencia en la enseñanza de estos conceptos avanzados.

Palabras clave: enseñanza del cálculo, derivadas parciales, conocimiento del profesor, MTSK

Abstract

This study examines the specialized knowledge of a university professor in teaching partial derivatives in multiple variables, based on the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model. Through a qualitative approach and the analysis of two class sessions, the interaction between mathematical knowledge and pedagogical content knowledge in the teacher's practice was identified. The results highlight an emphasis on didactic strategies, multiple representations, and technological tools to enhance conceptual understanding. Additionally, the need for future studies on the teacher's beliefs and their influence on the teaching of these advanced concepts is proposed.

Keywords: teaching of calculus, partial derivatives, teacher knowledge, MTSK

INTRODUCCIÓN

Durante las últimas cuatro décadas, el estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas ha sido un área de interés central en la Educación Matemática. Diferentes marcos teóricos, basados o influenciados por la propuesta de Shulman (1986), como los desarrollados por Ball et al. (2008), Carrillo-Yáñez et al. (2018), Ernest (1989) y O'Meara (2010), han contribuido a caracterizar los distintos tipos de conocimiento que un profesor de matemáticas pone en práctica al enseñar.

En el ámbito universitario, la enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de creciente atención por parte de la investigación en educación matemática, en la medida en que se reconoce su papel fundamental en la formación de profesionales en ciencias e ingenierías, así como la necesidad de comprender qué contenidos son esenciales y cómo deben ser abordados pedagógicamente. En particular, la enseñanza del cálculo de funciones en varias variables desempeña un papel fundamental en la formación de ingenieros, ya que les permite comprender el poder de las matemáticas para modelar fenómenos y resolver problemas complejos. Dada la complejidad inherente a estos conceptos y la diversidad en los ritmos de aprendizaje de los estudiantes, el conocimiento especializado del profesor de un curso de Cálculo Vectorial adquiere una importancia significativa, requiriendo no solo

Rojas-Celis, C., Cáceres-García, M. J. y Sánchez-Barbero, B. (2025). Conocimiento especializado de un profesor de cálculo vectorial en la enseñanza de las derivadas en varias variables. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

un dominio avanzado de los conceptos matemáticos, sino también de estrategias didácticas efectivas para su enseñanza (Rojas-Celis y Cely-Rojas, 2020).

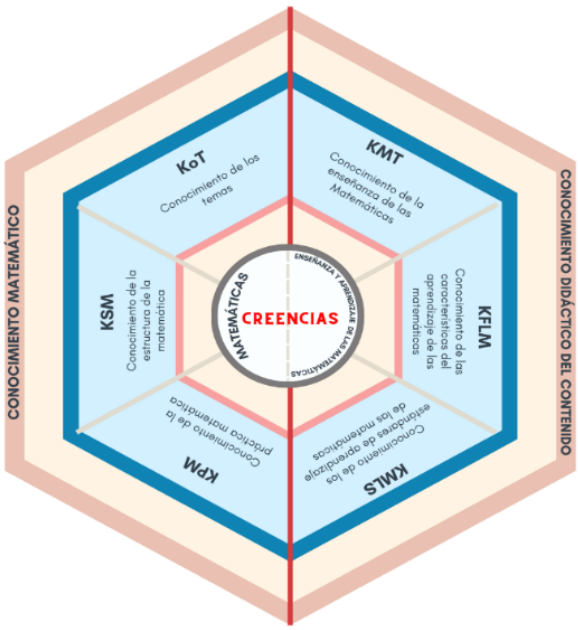
El presente estudio expone los hallazgos sobre el conocimiento del profesor, analizado a través del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*, MTSK), a partir de la observación de la práctica docente de un profesor universitario en Colombia. En particular, se buscó caracterizar el conocimiento especializado que puso en evidencia durante la enseñanza de las derivadas en varias variables, analizando la interacción entre los subdominios del Conocimiento Matemático (MK) y del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El análisis se realizó a partir de dos sesiones de clase dirigidas a estudiantes de programas de ingeniería, como parte de un estudio doctoral más amplio sobre la enseñanza del Cálculo Vectorial.

MARCO TEÓRICO

El modelo MTSK se ha consolidado como un marco teórico fundamental para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas en su práctica docente. Su estructura permite identificar los distintos tipos de conocimiento que intervienen en la enseñanza de las matemáticas, proporcionando una perspectiva detallada sobre cómo los docentes pueden comprender, organizar y transmitir los conceptos matemáticos. Considera tres dominios principales como el Conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge,* MK), Conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge,* PCK) y las Creencias (*Beliefs*). Los dos primeros dominios se subdividen en varios subdominios, que se pueden observar en la Figura 1, basado en Contreras-González et al., (2017).

Figura 19

Subdominios del MTSK



Nota: Elaboración basada en Contreras-González et al. (2017).

Conocimiento Matemático (MK)

Hace referencia a la comprensión del contenido matemático por parte del profesor, abarcando tanto la estructura teórica como su aplicación. Se divide en tres subdominios: Conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics,* KoT), que incluye la comprensión de definiciones, propiedades, registros de representación, procedimientos y aplicaciones matemáticas; Conocimiento de la estructura

matemática (*Knowledge of the Estructure of Mathematicas,* KSM), que se centra en las conexiones transversales, auxiliares, de complejización y simplificación dentro del contenido matemático; y, Conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practice in Mathematics,* KPM), que abarca el conocimiento sobre demostración, definición, resolución de problemas y uso del lenguaje matemático.

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio se enfoca en los aspectos pedagógicos de la enseñanza de las matemáticas, permitiendo analizar cómo los docentes presentan el contenido matemático a los estudiantes. Se subdivide en: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching,* KMT), que involucra las estrategias de enseñanza, el uso de diferentes representaciones, ejemplos y recursos para facilitar el aprendizaje; Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (*Knowledge of Features of Learning Mathematics,* KFLM), que analiza la relación entre el estudiante y el contenido matemático, incluyendo dificultades y estrategias para superarlas; y, Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards,* KMLS), que se refiere al conocimiento curricular sobre qué, cómo y cuándo enseñar los conceptos matemáticos.

Antecedentes en el estudio del conocimiento del profesor

Diversas investigaciones han abordado el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas desde la perspectiva del modelo MTSK, haciendo especial énfasis en cómo se movilizan sus componentes durante la práctica docente en distintos niveles educativos y contextos matemáticos. Un ejemplo es el trabajo de Vasco et al. (2016), quienes analizaron una sesión de clase universitaria sobre multiplicación de matrices, evidenciando que el profesor desplegaba conocimiento sobre el contenido (KoT) y mostraba conexiones significativas entre procedimientos, representaciones y propiedades matemáticas (KSM). Aguayo-Arriagada et al. (2023), por otra parte, exploraron el conocimiento de un grupo de docentes sobre los números decimales, identificando que, si bien los participantes mostraban familiaridad con aspectos conceptuales del contenido, sus respuestas revelaban tensiones entre el conocimiento matemático y el didáctico, especialmente en torno a las representaciones gráficas y a las posibles dificultades de los estudiantes. Asimismo, Cayo et al. (2023) examinaron el uso de ejemplos en la enseñanza y su relación con el conocimiento especializado; en su estudio, mostraron cómo el profesor seleccionaba y adaptaba ejemplos no solo para ilustrar propiedades matemáticas, sino también como una estrategia para anticipar errores, establecer conexiones con conocimientos previos y promover la participación de los estudiantes.

Estos estudios constituyen antecedentes importantes para el presente trabajo, en la medida en que ilustran distintas formas en que se evidencia el conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de contenidos específicos. Aunque se centran en distintos niveles educativos y objetos matemáticos, todos ellos comparten el interés por caracterizar cómo se articula el conocimiento matemático y didáctico en la práctica.

METODOLOGÍA

La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo con diseño de estudio de caso, orientado a caracterizar el conocimiento matemático y didáctico del contenido que moviliza un profesor universitario al enseñar derivadas en varias variables dentro de un curso de Cálculo Vectorial. El participante es un matemático con maestría en Docencia de la Educación Superior, cinco años de experiencia docente en educación universitaria y un interés investigativo centrado en la Educación Matemática. La recolección de datos combinó técnicas, iniciando con la observación no participante de dos clases presenciales, registradas en video.

En la Tabla 1 se presenta el sistema de categorías elaborado a partir de los trabajos de Carrillo-Yáñez et al. (2018), Escudero (2015) y Espinoza (2020), el cual fue adoptado sin modificaciones sustanciales

en sus categorías principales, pero con ajustes en los indicadores que permiten operacionalizar cada categoría. Estas adaptaciones se realizaron atendiendo al contenido específico abordado en las clases observadas, como la enseñanza de las derivadas parciales y direccionales. Por ejemplo, se detallaron indicadores relacionados con el uso de herramientas digitales para la representación gráfica, y las formas de conexiones auxiliares y de complejización. A partir de estos indicadores adaptados, se codificó el discurso del profesor en función de los subdominios del MK y del PCK.

Tabla 14

Categorías del MK y PCK

	Subdominio	Categorías
MK	KoT	Definiciones, Propiedades y Fundamentos, Registros de representación, Procedimientos, Fenomenología y aplicaciones
	KSM	Conexiones transversales, auxiliares, de complejización, de simplificación.
	KPM	La práctica de demostrar, la práctica de definir, la práctica de resolver problemas, el papel del lenguaje matemático.
PCK	KMT	Estrategias y técnicas, Recursos y materiales concretos y digitales (Geogebra, Python, R), Teorías de enseñanza
	KFLM	Fortalezas y dificultades, Formas de interacción con el contenido matemático, Teorías de aprendizaje, Aspectos emocionales del aprendizaje.
	KMLS	Secuenciación de temas, Expectativas del aprendizaje, Nivel de desarrollo esperado

Nota: Elaboración propia.

Las grabaciones fueron analizadas a partir del sistema de categorías, utilizando la herramienta Atlas Ti. Para ello, se generaron códigos asociados a los indicadores previamente definidos para cada categoría, agrupando posteriormente estos códigos bajo los subdominios del MK y del PCK. Esta codificación permitió marcar y analizar fragmentos tanto en los videos como en sus transcripciones. Por ejemplo, en la intervención del profesor:

> P: ¿Listo?, entonces, ¿cuál es su notación inicial? f_γ aquí en la parte inferior, pues va a estar denotada por la variable respecto a la que voy a derivar, listo, entonces eso vendría siendo la derivada parcial respecto a y.

se analizó por las investigadoras como parte de la categoría El papel del lenguaje matemático del subdominio KPM, y las Estrategias del subdominio KMT. En la Tabla 2, se presentan las categorías acordadas, que también dieron paso a encontrar las relaciones entre el MK y el PCK. El análisis de las grabaciones fue realizado de manera independiente por las investigadoras, y las discrepancias fueron resueltas mediante consenso, obteniendo un coeficiente Cu-α de Krippendorff de 0,82, lo que garantiza un alto nivel de fiabilidad en la codificación.

Como parte complementaria del análisis, se llevó a cabo una entrevista semiestructurada con el docente, que tuvo una duración aproximada de dos horas. Durante esta conversación se formularon preguntas relacionadas con el conocimiento didáctico y matemático, así como con algunas intervenciones específicas realizadas en clase. Se indagó, por ejemplo, sobre el énfasis puesto en la construcción geométrica de los conceptos o en advertencias anticipadas sobre errores comunes. La transcripción de la entrevista fue analizada por las autoras en un único momento, permitiendo triangular los datos recogidos y ampliar la comprensión del conocimiento especializado del profesor, especialmente en relación con categorías como Teorías de enseñanza, Teorías de aprendizaje y Expectativas de aprendizaje.

Tabla 2

Fragmentos del discurso del profesor que relaciona el MK con el PCK

Subdominio	Discurso del profesor	Categorías
KSM	"En el punto $(1,1)$, entonces la derivada en la dirección de u de $(1,-1)$. ¿Cuánto nos da muchachos entonces? ¿Ustedes por favor me colaboran con esa cuenta? (…) Listo, debemos buscar el $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y el seno del mismo. Entonces acá les voy a mostrar un material de su trigonometría para que lo tengan muy en cuenta."	Estrategias y técnicas Fortalezas y dificultades del aprendizaje Recursos materiales
KoT	"Aquí tengo una superficie ¿listo?, puede ser un posible paraboloide que abre hacia abajo. En este caso miren que la superficie es la que yo dibujé en color verde. Ahora, nosotros estamos analizando esa superficie en un punto en específico y, en ese punto resulta que hay un plano que en este caso vendría siendo esta parte roja. Ya lo vamos a entender usando Geogebra."	Estrategias y técnicas Expectativas de aprendizaje Recursos materiales
KPM	"¿Listo?, entonces, ¿cuál es su notación inicial? f_y aquí en la parte inferior, pues va a estar denotada por la variable respecto a la que voy a derivar, listo, entonces eso vendría siendo la derivada parcial respecto a y."	Estrategias (definición)

Nota: Elaboración propia.

RESULTADOS

Esta sección expone los resultados del análisis de dos sesiones de clase sobre derivadas parciales y direccionales. Se caracterizaron las manifestaciones del MK y del PCK en la práctica docente, así como las relaciones entre sus subdominios. A continuación, se presentan los hallazgos de cada sesión y el análisis de dichas conexiones.

En la primera sesión, el docente introdujo las derivadas parciales, explicando su definición formal y enfocándose en los procedimientos algebraicos. Destacó la importancia de identificar la variable constante en cada caso y, al cierre, empleó GeoGebra para mostrar cómo la derivada parcial representa la pendiente de la recta tangente generada al intersecar la superficie con un plano paralelo a los ejes coordenados, facilitando así la conexión entre la expresión simbólica y su interpretación geométrica.

En la segunda sesión abordó las derivadas direccionales, partiendo de su definición y mostrando su cálculo con vectores unitarios y no unitarios. Explicó cómo determinar la dirección entre dos puntos y presentó el gradiente como vector asociado a la derivada direccional mediante el producto punto. Para afianzar esta relación, propuso un ejercicio donde los estudiantes debían identificar la dirección del gradiente sobre una superficie, sin utilizar aún el Teorema del Gradiente.

Las clasificaciones en las categorías y subdominios del discurso del profesor se analizaron primero, a partir de las relaciones entre las categorías y, a partir de ello, se realizó el análisis entre los subdominios del MK y PCK, los cuales se presentan en ese orden.

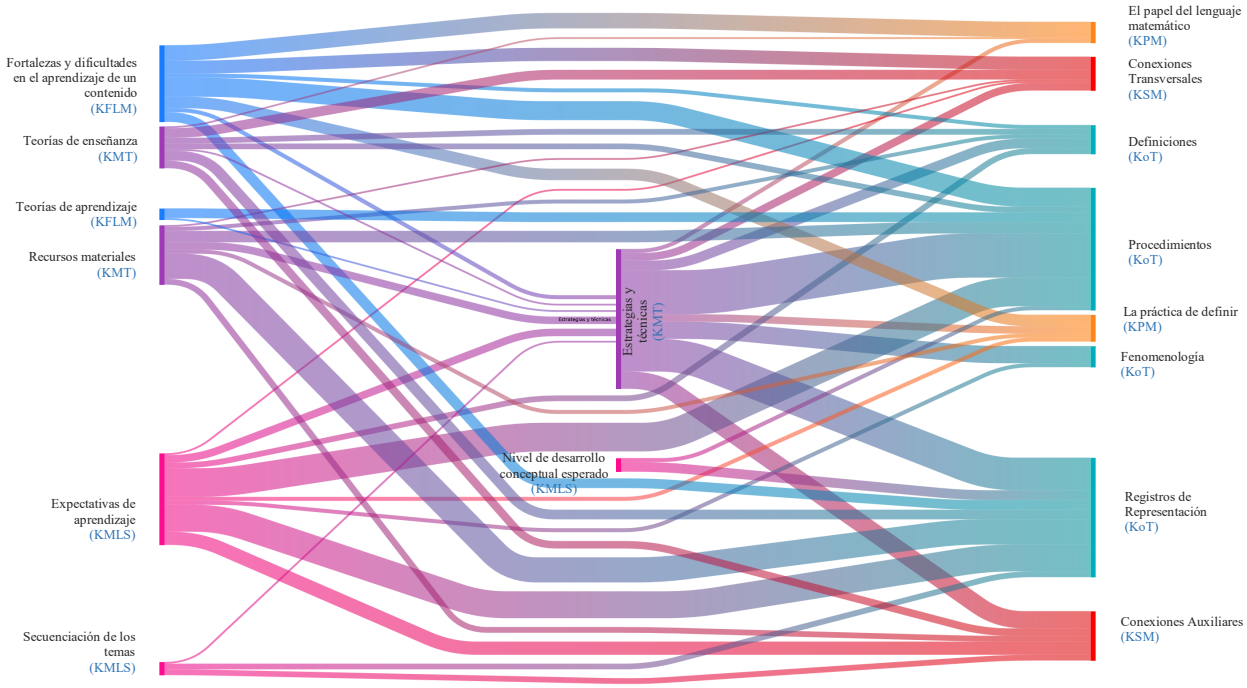
En primer lugar, se presenta, en la Figura 2, un resumen de las relaciones entre las categorías del MK (salidas de la derecha) y el PCK (salidas de la izquierda). El grosor de las líneas indica la frecuencia con la que coincidieron los discursos del profesor en dicha clasificación. Se pudo evidenciar que la categoría de Estrategias y técnicas, actúa como nodo intermedio, conectando la mayoría de las categorías de los diferentes dominios del conocimiento matemático.

Además, el docente tendió a enfatizar en la categoría de Procedimientos del MK, con las Fortalezas dificultades en el aprendizaje del tema, con las Expectativas de aprendizaje y las Estrategias y técnicas

del PCK. En cuanto a los Registros de representación, empleó diversas formas de representación (gráfica, simbólica y verbal) como parte de las Estrategias y técnicas, el Recurso de materiales y las Expectativas del aprendizaje. Sin embargo, el Papel del lenguaje matemático y las Conexiones transversales, aparecen con menor frecuencia en su discurso.

Figura 15

Relación entre las categorías de los subdominios del MK y PCK en cuanto a las frecuencias de registro.



Nota: Elaboración propia, con la herramienta Atlas Ti.

Asimismo, la categoría de Expectativas de aprendizaje, tuvo una frecuencia de registro y conexiones importantes, lo que permitió ver la intención del profesor en que sus estudiantes tengan claridad de lo que se espera que aprendan. En la entrevista con el profesor, se logra corroborar esta intención.

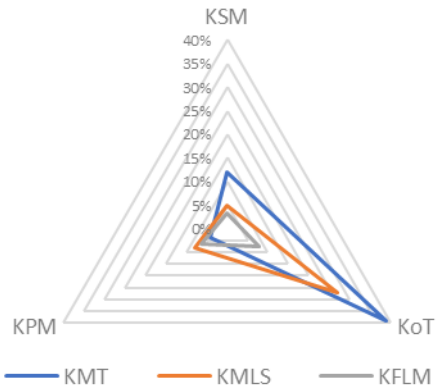
No obstante, las categorías relacionadas con la de Teorías de enseñanza y las de aprendizaje, tuvieron una menor frecuencia en el discurso del docente. Esto indica que, si bien el profesor implementó estrategias didácticas, no se evidencian modelos pedagógicos o teorías del aprendizaje explícitos, lo que sugiere un enfoque predominantemente empírico basado en la experiencia y en la aplicación directa de estrategias más que en la fundamentación teórica de su práctica.

Algunos de los hallazgos del análisis fueron respaldados por la entrevista semiestructurada realizada al docente. Por ejemplo, el énfasis observado en el uso de representaciones gráficas y herramientas tecnológicas para construir los conceptos respondió a una intención explícita, según señaló, de fortalecer la comprensión geométrica de los estudiantes. Asimismo, si bien el profesor no hace evidente en su práctica el uso de teorías pedagógicas, sus decisiones didácticas se fundamentan en la experiencia y en la identificación de dificultades recurrentes entre los alumnos. En particular, destacó la importancia de anticipar errores comunes y advertirlos durante la clase, lo cual se reflejó en su actuación al enseñar derivadas direccionales mediante estrategias anticipatorias.

En cuanto a la categoría de las Interacciones con los estudiantes, no se evidenció en las grabaciones un enfoque explícito hacia los intereses o aspectos emocionales del aprendizaje, como identificar si los estudiantes perciben el tema como fácil o difícil. Al respecto, el profesor afirma que evita influir en las emociones de los estudiantes indicando si un tema es o no complejo, permitiendo que ellos desarrollen su percepción a partir de las explicaciones y ejercicios planteados en clase.

Figura 3

Relación de porcentaje de registro en entre el MK y el PCK



Nota: Elaboración propia.

En lo referente a la relación entre los subdominios del MK y PCK, a partir del análisis de sus categorías, en primer lugar, como se evidencia en la Figura 3, el subdominio del KoT presenta las frecuencias de registro más altas de los subdominios del MK. Esto permite inferir que el conocimiento sobre el tema de derivadas en varias variables es lo que más se evidencia en el discurso del profesor, enfatizando con el KMT, a través de los indicadores como Estrategias y técnicas, así como los recursos y materiales que usa en sus clases, como el libro de texto y el uso de Geogebra.

En la relación entre el KPM y los subdominios del PCK, se evidencia conexión con el KMLS, lo cual se refleja en el uso de la categoría Expectativas de aprendizaje, destacando su importancia en la planificación docente. Asimismo, la secuenciación de los temas, presente en el discurso del profesor como otra categoría del KMLS, muestra una presencia constante y es relevante para la organización del contenido. En cuanto a la relación del KSM se destaca una mayor coincidencia con el KMT, destacado en la categoría de Estrategias y técnicas y, de Recursos y materiales.

Tanto KPM como KSM tienen valores relativamente bajos en comparación con KoT. Esto indica que, en el discurso del profesor, hay menos referencias a conectar los conceptos matemáticos con su aplicación en distintos contextos, así sobre cómo los estudiantes comprenden, interpretan y desarrollan el pensamiento matemático.

CONCLUSIONES

El análisis evidencia que el profesor enfatizó la enseñanza del contenido matemático, principalmente a través de procedimientos y registros de representación, mientras que los aspectos relacionados con la comprensión del estudiante y los procesos matemáticos tuvieron menor presencia en su discurso. Este desbalance sugiere que, aunque el docente domina la enseñanza del contenido, hay oportunidades para fortalecer la integración de conocimientos sobre el aprendizaje de los estudiantes, la relación entre los procesos matemáticos y su enseñanza y la aplicación de estos conceptos con temas propios de la ingeniería.

El uso de GeoGebra facilitó la conexión entre el cálculo simbólico y la interpretación geométrica, lo que indicó la intención de apoyar la comprensión conceptual mediante herramientas tecnológicas. Además, el profesor reconoció las dificultades de los estudiantes y adaptó estrategias para abordarlas, aunque su práctica pareció estar guiada más por la experiencia y la observación que por una fundamentación teórica explícita en modelos de aprendizaje.

Un hallazgo relevante del estudio fue la interacción entre MK y PCK, lo que permitió comprender cómo los docentes articulan su conocimiento matemático con estrategias didácticas en la enseñanza de las derivadas en varias variables. Esta relación, aún poco explorada, abre la posibilidad de

investigaciones futuras sobre cómo los profesores integran ambos dominios y cómo sus creencias y formación influyen en la construcción de su conocimiento didáctico del contenido.

Dado el carácter cualitativo y el diseño de estudio de caso, los resultados no buscaron generalizar conclusiones, sino ofrecer una reflexión sobre la manifestación del conocimiento especializado del profesor en su práctica. La interacción entre MK y PCK observada en este estudio resalta la necesidad de seguir explorando cómo estos elementos inciden en la enseñanza y en las oportunidades de aprendizaje que se brindan a los estudiantes.

Referencias

Aguayo-Arriagada, D., Méndez-Araos, M. y Catalán-Rivera, C. (2023). Estudio exploratorio sobre el conocimiento de los números decimales por parte de profesores de matemática. En A. González y J. I. Pérez (Eds.), *Actas del XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 343-352). SEIEM.

Ball, D. L., Thames, M. A. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras-González, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cayo, M., Espinoza, G. y López-Leiva, C. (2023). Caracterización del conocimiento especializado del profesor desde el uso de ejemplos en la enseñanza. En A. González y J. I. Pérez (Eds.), *Actas del XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 23–32). SEIEM.

Contreras-González, L. C., Montes, M. A., Climent, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *For-Mate, 3*, 9-17.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* [Tesis Doctoral, Universidad de Huelva]. https://observatorio-cientifico.ua.es/documentos/60379bf2a28f0c5681f27f51

Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model. *Journal of Education for Teaching*, *15*, 13–33.

Espinoza, G. (2020). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función.* [Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=431813

O'Meara, N. (2011). *Improving mathematics teaching at second level through the design of a model of teacher knowledge and an intervention aimed at developing teachers' knowledge* [Tesis de doctoral]. University of Limerick. https://hdl.handle.net/10344/3254

Rojas-Celis, C. y Cely-Rojas, V. (2020). Propuesta de enseñanza en Cálculo Vectorial: un acercamiento a la clase invertida. *Revista Científica, 37*(1), 58-66.

Shulman, L. S. (1986). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: una perspectiva contemporánea. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 3–37). Paidós Ibérica SA.

Vasco Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de Álgebra Lineal y espacios de trabajo matemático. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 222–239. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11

[i] Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto InteProReal (PIC2-2023-12) financiado por Universidad de Salamanca y está respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido Matemática Educativa).

CUESTIONARIO PARA EVALUAR EL DESARROLLO DEL TPACK EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS[i]

A questionnaire to assess the development of TPACK in mathematics teachers

Sancho-Blanco, V.[a], Arnal-Bailera, A.[a], Manero, V.[a]

[a]Universidad de Zaragoza

Resumen

El presente estudio analiza en profundidad la validez y fiabilidad de un cuestionario TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge, por sus siglas en inglés) adaptado al contexto de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria en España. Se realizó la adaptación de la versión en español del instrumento original, seleccionando y refinando los ítems pertinentes para esta área, y se sometió a rigurosos análisis estadísticos, incluyendo tanto análisis factorial exploratorio (AFE) como confirmatorio (AFC). Los resultados evidencian una estructura factorial de cuatro dimensiones que reflejan la integración tecnológica, el conocimiento técnico, el conocimiento pedagógico y el dominio del contenido, con altos niveles de consistencia interna. Esta herramienta resulta clave para diagnosticar y mejorar las competencias TIC de los docentes, aportando importantes implicaciones para la formación y la práctica educativa.

Palabras clave: TPACK, cuestionario, matemáticas, profesorado, TIC.

Abstract

This study provides an in-depth analysis of the validity and reliability of an adapted TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) questionnaire for mathematics teaching in Spanish secondary education. The Spanish version of the original instrument was refined by selecting items relevant to the mathematics field and subjected to rigorous statistical analyses, including exploratory and confirmatory factor analyses. The results demonstrate a four-dimensional factorial structure reflecting technology integration, technical knowledge, pedagogical knowledge, and content knowledge, with high internal consistency. This instrument is key to diagnosing and enhancing teachers' ICT competencies, offering valuable implications for teacher training and educational practice.

Keywords: *TPACK, questionnaire, mathematics, teachers, ICT*

INTRODUCCIÓN

La incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ha revolucionado el proceso de enseñanza-aprendizaje, modificando las prácticas pedagógicas tradicionales y generando tanto desafíos como oportunidades para el desarrollo de competencias en el ámbito educativo. En el caso de las matemáticas, la aplicación de herramientas digitales permite una mejor visualización, manipulación y comprensión de conceptos abstractos (Cheung y Slavin, 2013; Hegedus et al., 2015).

El modelo TPACK, que integra el Conocimiento Tecnológico (TK), el Pedagógico (PK) y el del Contenido (CK), se erige como un marco teórico esencial para entender y potenciar la sinergia entre estos saberes, permitiendo a los docentes diseñar experiencias de aprendizaje contextualizadas y significativas (Mishra y Koehler, 2006). En este contexto, el presente estudio se enfoca en evaluar la validez y fiabilidad de un cuestionario TPACK adaptado para docentes de matemáticas de secundaria en España, con el fin de diagnosticar sus competencias en el uso de TIC y orientar estrategias de formación innovadoras. La necesidad de esta investigación surge de la creciente demanda de

Sancho-Blanco, V., Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2025). Cuestionario para evaluar el desarrollo del TPACK en docentes de Matemáticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

incorporar tecnologías en la enseñanza y de la falta de instrumentos validados y contextualizados en el área de las matemáticas. Así, este trabajo se integra en el proyecto de la tesis, que tiene como propósito principal el de analizar el impacto del uso de las herramientas TIC y el conocimiento especial que tienen los docentes a la hora de transformarlo a contenido enseñable en un entorno tecnológico en el proceso de enseñanza de la geometría plana en secundaria, aportando evidencia empírica y un marco metodológico robusto para el análisis del TPACK en el profesorado de secundaria.

Por lo tanto, la pregunta de investigación, *ad hoc*, se formula de la siguiente manera: ¿Puede el cuestionario modificado medir de forma válida y fiable los siete componentes del TPACK para docentes de matemáticas y cómo se relacionan internamente dichas dimensiones?

MARCO TEÓRICO

El modelo TPACK postula que la eficacia en la enseñanza con TIC depende no solo del dominio tecnológico, sino también de la habilidad para integrar de forma armónica el conocimiento pedagógico y el del contenido. En este sentido, Mishra y Koehler (2006) proponen que el TPACK se compone de múltiples dimensiones interrelacionadas: el conocimiento tecnológico (TK), el conocimiento pedagógico (PK) y el conocimiento del contenido (CK), así como las intersecciones entre ellos—conocimientos tecnológicos-pedagógicos (TPK), pedagógicos-del contenido (PCK) y tecnológicos-del contenido (TCK)—que en conjunto conforman el TPACK. Esta estructura reconoce que la mera adquisición de habilidades tecnológicas no garantiza una enseñanza efectiva; es esencial saber aplicarlas en contextos pedagógicos específicos y en la transmisión del contenido, lo que repercute directamente en la calidad educativa y en el desarrollo de competencias en los estudiantes.

El modelo TPACK ha sido ampliamente utilizado en la investigación educativa para analizar la competencia docente en la integración de tecnologías digitales, especialmente en la enseñanza de las matemáticas (Li et al., 2024). Según esta revisión sistemática, el marco no solo permite evaluar el conocimiento docente, sino también orientar programas de formación y el desarrollo de recursos didácticos. Además, se subraya la necesidad de instrumentos adaptados al nivel educativo y contexto específico, lo que refuerza el valor del cuestionario de Schmidt et al. (2009) y sus versiones adaptadas.

En la literatura se han desarrollado distintos instrumentos para evaluar estas dimensiones. Por ejemplo, el cuestionario desarrollado por Schmidt et al. (2009) es uno de los más completos y ampliamente utilizados y el reducido diseñado, *a posteriori*, por Schmid et al. (2020). El primer instrumento consta de 47 ítems distribuidos en siete dimensiones, que corresponden a los elementos del modelo TPACK en diferentes materias, aunque en este estudio se centra solamente en los ítems de matemáticas. Entre sus componentes, evalúa aspectos como el manejo de herramientas digitales (TK), el conocimiento de estrategias pedagógicas para la enseñanza con TIC (TPK) y la integración efectiva de la tecnología en la enseñanza de contenidos específicos (TCK y TPACK).

Posteriormente, Cabero et al. (2015) realizaron una adaptación y validación del cuestionario para el contexto hispanohablante. Además de la traducción, esta versión incluyó ajustes metodológicos y de contenido para asegurar que los ítems reflejaran con precisión el conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinar en la enseñanza en español. En su versión adaptada, el cuestionario se estructuró en siete categorías alineadas con el modelo TPACK:

- Conocimiento tecnológico (TK): mide la capacidad del docente para utilizar herramientas tecnológicas y comprender sus funcionalidades.
- Conocimiento pedagógico (PK): evalúa el dominio de estrategias didácticas para organizar la enseñanza y adaptarla a las necesidades del alumnado.
- Conocimiento del contenido (CK): examina el nivel de especialización del docente en su área disciplinar.

Conocimiento tecnológico del contenido (TCK): analiza cómo el docente usa la tecnología para mejorar la enseñanza de su materia.

Conocimiento pedagógico del contenido (PCK): estudia la capacidad del docente para adaptar sus estrategias didácticas en función del contenido que enseña.

Conocimiento tecnológico-pedagógico (TPK): indaga sobre cómo el docente selecciona y aplica herramientas digitales para potenciar estrategias pedagógicas.

Conocimiento tecnológico-pedagógico del contenido (TPACK): representa la integración total de los tres conocimientos en el diseño y aplicación de experiencias de aprendizaje enriquecidas con tecnología.

A modo de ejemplo, se presentan algunos ítems del cuestionario de Schmidt et al. (2009), presentes también en la versión de Cabero et al. (2015), pero en castellano:

PCK: "I can select effective teaching approaches to guide student thinking and learning in mathematics", traducido como: "puedo seleccionar enfoques docentes de manera eficaz para guiar el pensamiento y el aprendizaje del alumnado en matemáticas".

TCK: "I know about technologies that I can use for understanding and doing mathematics", traducido como: "conozco tecnologías que puedo usar para comprender y elaborar contenidos sobre matemáticas".

TPK: "I can choose technologies that enhance the teaching approaches for a lesson" y "I can adapt the use of the technologies that I am learning about to different teaching activities", traducido respectivamente como: "sé seleccionar tecnologías que mejoran los enfoques docentes para una lección" y "sé seleccionar tecnologías que mejoran el aprendizaje del alumnado en una lección".

TPACK: "I can teach lessons that appropriately combine mathematics, technologies, and teaching approaches", traducido como: "puedo impartir lecciones que combinan adecuadamente matemáticas, tecnologías y enfoques docentes".

Esta adaptación ha permitido evaluar aspectos fundamentales como la capacidad de los docentes para seleccionar y aplicar tecnologías en el aula, así como su habilidad para transformar el conocimiento disciplinar en experiencias de aprendizaje significativas. Por otro lado, la consolidación de métodos de análisis factorial en estos estudios ha reforzado la validez y fiabilidad del instrumento, asegurando que cada ítem se agrupe coherentemente con la dimensión teórica que representa.

Si bien el modelo TPACK se ha consolidado como un marco teórico clave en la formación del profesorado en TIC, algunos autores han señalado desafíos en su medición. Por un lado, la variabilidad en el número de factores obtenidos en diferentes estudios sugiere que la estructura del modelo puede diferir según el contexto y el instrumento utilizado (Ladrón et al., 2021). Además, el cuestionario original de Mishra y Koehler (2006) fue diseñado de manera general para aplicarse en distintas disciplinas, lo que puede dificultar su precisión en áreas específicas como las matemáticas. En este sentido, Archambault y Barnett (2010) destacan la necesidad de desarrollar instrumentos que sean aplicables a múltiples contextos, aunque también plantean que, en caso de no ser posible, la conceptualización del TPACK debería ajustarse a cada área de conocimiento. Esta idea es respaldada por Cabero-Almenara y Barroso (2016), quienes proponen que las adaptaciones del modelo deben realizarse en función del uso de tecnologías concretas (como aplicaciones educativas o dispositivos específicos) y del contenido disciplinar en cuestión, como ocurre en la enseñanza de las matemáticas.

METODOLOGÍA

La presente investigación adopta un enfoque cuantitativo y descriptivo, sustentado en el análisis estadístico del cuestionario TPACK adaptado. A continuación, se detallan los procedimientos seguidos:

Se partió del cuestionario original de Schmidt et al. (2009), traducido y validado en español por Cabero et al. (2015). Se identificaron inicialmente 47 ítems pertinentes para evaluar las dimensiones TPACK. Tras un riguroso proceso de revisión, se seleccionaron los 29 ítems que abordan de manera directa las competencias necesarias para la enseñanza de las matemáticas, garantizando la pertinencia y el enfoque en el área de estudio.

La muestra estuvo compuesta por 211 docentes de matemáticas de secundaria en España, quienes participaron de manera voluntaria. Se aplicó un muestreo intencional, focalizado en docentes en activo, lo que permitió recopilar información específica y relevante sobre el uso de las TIC en el contexto matemático. La recogida de datos se realizó a través de un cuestionario online (*Google Forms*, diciembre 2023 - enero 2024), asegurando el anonimato y el consentimiento informado de los participantes.

Se implementaron diversas técnicas estadísticas para evaluar la validez y fiabilidad del instrumento:

Detección de valores atípicos: se utilizó la distancia de Mahalanobis para identificar casos extremos en la muestra, excluyéndose tres participantes con valores significativamente altos (Kline, 2015).

Adecuación muestral: se aplicaron el índice KMO y la prueba de esfericidad de Bartlett para confirmar la idoneidad de los datos para el análisis factorial.

Fiabilidad: el coeficiente Alfa de Cronbach se calculó para cada dimensión y para el instrumento global, obteniéndose valores superiores a 0.89 en la mayoría de los casos, lo que indica una alta consistencia interna.

Análisis factorial: se llevaron a cabo análisis factoriales exploratorios (AFE) y confirmatorios (AFC) utilizando los softwares SPSS y RStudio.

RESULTADOS

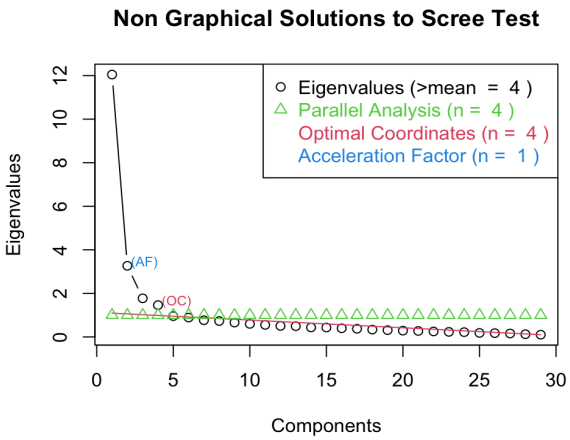
Se siguió un proceso secuencial para asegurar la robustez del instrumento. Primero, se calcularon las distancias de Mahalanobis con SPSS (utilizando el número de encuestado como variable dependiente y las medias de los 29 ítems de las 7 categorías como independientes) y se aplicó un umbral de $p < .001$ para identificar valores atípicos, eliminándose 3 casos con D^2M significativamente alta (Kline, 2015).

Luego, se evaluó la adecuación de los datos para el análisis factorial con SPSS: el índice KMO fue 0.925 y la prueba de esfericidad de Bartlett resultó significativa (χ^2 (406) = 4200.611, $p < 0.001$), lo que confirma que las correlaciones entre variables son suficientes para realizar el AFE.

Posteriormente, se compararon diversos métodos en RStudio (criterio de Kaiser, análisis paralelo, criterio MAP, gráfico de sedimentación y método CD) que convergieron en retener 4 factores. Aunque se consideró un modelo de 3 factores basado en las 3 categorías principales del TPACK, la solución de 4 factores permitió diferenciar de manera más precisa: separando el conocimiento tecnológico puro (TK) de la integración tecnológica en la enseñanza (TCK, TPK y TPACK) y distinguiendo el conocimiento pedagógico (PK, PCK) del conocimiento del contenido (CK). Esta diferenciación y los buenos índices de ajuste justifican la elección final del modelo de 4 factores para el cuestionario adaptado. En lo que se refiere al análisis AFE realizado con RStudio, la gráfica 1 (Figura 1) puede ayudar a complementar la visión de los resultados obtenidos con los criterios mencionados.

Figura 1

Resultados de las soluciones no gráficas más comunes con Scree test obtenidos con RStudio



Los cuatro factores que se obtienen son los siguientes:

- Factor 1: Integración Tecnológica en la Enseñanza (agrupa TCK, TPK y TPACK).
- Factor 2: Conocimiento Tecnológico (TK).
- Factor 3: Conocimiento Pedagógico (PK y PCK).
- Factor 4: Conocimiento del Contenido (CK).

Brown (2015) señala que, para seleccionar el modelo adecuado a partir del AFC, es imprescindible que al menos uno de los índices de bondad de ajuste de cada tipo (absoluto, de parsimonia y comparativo) alcance el valor óptimo recomendado para ese índice. En nuestro estudio se siguió este criterio durante la validación del modelo.

El análisis factorial exploratorio evidenció que los cuatro factores identificados explican aproximadamente el 64 % de la varianza total de las respuestas. Durante este proceso se detectó que un ítem (CK213: “Tengo varios métodos y estrategias para desarrollar mi conocimiento sobre matemáticas”) presentaba una varianza estimada negativa —un fenómeno conocido como caso Heywood— por lo que se optó por eliminarlo, lo que mejoró significativamente el ajuste del modelo (Chen et al., 2001).

El AFC confirmó la estructura propuesta, mostrando índices de ajuste robustos que cumplen con los valores de referencia propuestos por Brown (2015):

- CFI y TLI: con 0.995 y 0.996 respectivamente, indicando un excelente ajuste comparativo.
- RMSEA y SRMR: Ambos con 0.061, lo que se acerca al límite óptimo (con RMSEA idealmente < 0.06 y SRMR < 0.08), reflejando un error de aproximación reducido.

Además, el análisis de fiabilidad arrojó los siguientes valores de Alfa de Cronbach:

- Factor 1 (Integración Tecnológica): 0.934
- Factor 2 (Conocimiento Tecnológico): 0.908
- Factor 3 (Conocimiento Pedagógico): 0.891
- Factor 4 (Conocimiento del Contenido): 0.760

Estos resultados confirman que el cuestionario posee una alta consistencia interna y que cada factor refleja de manera precisa las dimensiones del TPACK en el contexto de la enseñanza de las matemáticas.

DISCUSIÓN

Los hallazgos de este estudio confirman que el cuestionario TPACK adaptado es una herramienta válida y fiable para evaluar las competencias TIC de los docentes de matemáticas. La estructura factorial de cuatro factores obtenida en este análisis permite diferenciar entre la integración tecnológica en la enseñanza, el conocimiento tecnológico puro, el conocimiento pedagógico del contenido y el dominio del contenido específico. No obstante, es importante señalar que este modelo simplifica la estructura original del TPACK, reduciendo el número de factores en comparación con los siete subdominios propuestos por Mishra y Koehler (2006). Esta simplificación puede deberse a la formulación de los ítems y a la fusión de ciertas dimensiones, lo que podría afectar la precisión en la evaluación de algunos aspectos específicos del modelo.

Cabe destacar que los cuestionarios desarrollados para medir los conocimientos del profesorado en base al modelo TPACK han producido estructuras factoriales con un número variable de factores (Ladrón et al., 2021). Esto se debe, en parte, a que la medición del conocimiento en el modelo TPACK se diseñó de manera general para que los docentes pudieran aplicarlo a diversas áreas, como matemáticas, ciencias o lenguaje. En este sentido, Archambault y Barnett (2010) subrayan que uno de los principales desafíos en la investigación del TPACK es desarrollar un instrumento que sea válido en distintos contextos y disciplinas. Si esto no es posible, la conceptualización del modelo podría necesitar adaptaciones específicas para cada área de conocimiento. Esta idea es apoyada por Cabero y Barroso (2016), quienes defienden que las ampliaciones del modelo deben realizarse en función de tecnologías concretas (por ejemplo, tablets o aplicaciones) y de disciplinas específicas, como las matemáticas.

Desde el punto de vista metodológico, la decisión de retener cuatro factores en este estudio se basó en la convergencia de diferentes métodos de análisis factorial en RStudio (criterio de Kaiser, análisis paralelo, criterio MAP, gráfico de sedimentación y método CD), lo que refuerza la validez del modelo. Asimismo, siguiendo las recomendaciones de Brown (2015), se comprobó que los índices de ajuste cumplieran con los valores óptimos para considerar adecuado el AFC: el CFI y el TLI fueron superiores a 0.95, mientras que los valores de RMSEA y SRMR se situaron en 0.061, dentro de los límites aceptables.

Estos resultados se alinean con estudios previos como los de Ladrón et al. (2021) y Mouza et al. (2014), que han señalado que la estructura factorial del TPACK no siempre se presenta de manera uniforme, sino que puede variar en función del contexto y del instrumento utilizado. En investigaciones anteriores, se ha reportado que ciertos subdominios pueden solaparse, lo que refuerza la idea de que el modelo TPACK no siempre se distribuye en siete factores claramente diferenciados. En línea con Schmid et al. (2020), se observaron intercorrelaciones significativas entre las subescalas, con valores particularmente altos entre PK y PCK, así como entre TPK y TPACK. Estos patrones coinciden con los resultados de otros estudios (Schmidt et al., 2009; Valtonen et al., 2019) y pueden explicarse también desde el punto de vista teórico (Koehler et al., 2014), lo que sugiere que algunos componentes del modelo pueden estar más estrechamente relacionados en la práctica de lo que la teoría inicialmente propone. Aunque la solución de cuatro factores obtenida en nuestro estudio facilita la interpretación de los datos, también implica una limitación, ya que algunos subdominios pueden estar menos representados debido a la cantidad de ítems disponibles.

Si bien el modelo obtenido es estadísticamente sólido y válido, existen ciertas limitaciones a considerar. El tamaño muestral podría ampliarse en futuras investigaciones para mejorar la generalización de los resultados. Asimismo, la naturaleza autoadministrada del cuestionario puede introducir sesgos en las respuestas, como la deseabilidad social o la interpretación subjetiva de los

ítems. Sería recomendable realizar nuevas validaciones del instrumento con muestras más amplias y explorar la posibilidad de reformular o añadir ítems en los subdominios menos representados. De esta manera, se podría evaluar con mayor precisión la interacción entre los distintos conocimientos que conforman el TPACK en docentes de matemáticas y avanzar en la adaptación del modelo a las particularidades de cada disciplina.

CONCLUSIONES

El estudio demuestra que el cuestionario TPACK adaptado para docentes de matemáticas constituye un instrumento sólido para diagnosticar las competencias tecnológicas, pedagógicas y de contenido. La estructura de cuatro factores identificada facilita una evaluación diferenciada y detallada de cada dimensión, lo que resulta fundamental para orientar procesos de mejora en la integración de TIC en el aula. A partir de estos resultados, pueden extraerse algunas conclusiones para la formación y el desarrollo profesional docente. Por ejemplo, sería necesario promover de manera intencionada la conexión entre los distintos dominios de conocimiento. En consecuencia, la formación docente debe proporcionar experiencias de aprendizaje específicas que permitan no solo desarrollar cada componente del conocimiento por separado, sino también aplicar e integrar sus combinaciones de forma efectiva. Los altos índices de fiabilidad y los adecuados ajustes factoriales confirman la pertinencia del instrumento.

Futuras investigaciones deberían ampliar la muestra e incorporar metodologías mixtas que combinen el análisis cuantitativo con enfoques cualitativos, como entrevistas, observaciones o tareas tipo MathTask[ii], a fin de profundizar en la comprensión del desarrollo del TPACK en diversos contextos educativos. Ya que, como menciona Schmid et al. (2020) podría ser que la interacción entre los componentes del TPACK variase según el contexto (por ejemplo: asignatura, nivel educativo, cultura formativa). Asimismo, estos estudios podrían examinar en mayor detalle la relación entre la experiencia docente, la formación específica en TIC y su aplicación práctica, lo que aportaría datos valiosos para diseñar estrategias formativas más eficaces y contextualizadas. De esta manera, se favorecería un uso más reflexivo e integrado de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, impulsando la innovación pedagógica y la mejora continua de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

Angeli, C. y Valanides, N. (2005). Preservice elementary teachers as ICT designers: An instructional design model based on an expanded view of Pedagogical Content Knowledge. *Journal of Computer Assisted Learning, 21*(4), 292–302. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.2005.00135.x

Bishop, A. J., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Leung, F. K. (2013). Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West. *Springer.* https://doi.org/10.1007/0-387-29723-5_1

Cabero, J. (Dir.). (2014). *La formación del profesorado en TIC: Modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico, Pedagógico y de Contenido).* Secretariado de Recursos Audiovisuales de la Universidad de Sevilla – Publidisa S.A.

Cabero Almenara, J., Marín-Díaz, V. y Castaño Garrido, C. (2015). Validación de la aplicación del modelo TPACK para la formación del profesorado en TIC. *@TIC. Revista d'innovació educativa*, 13–22. https://doi.org/10.7203/attic.14.4001

Chen, F., Bollen, K. A., Paxton, P., Curran, P. J. y Kirby, J. B. (2001). Improper solutions in structural equation models: Causes, consequences, and strategies. *Sociological Methods & Research, 29*(4), 468–508. https://doi.org/10.1177/0049124101029004003

Cheung, A. y Slavin, R. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review, 9*, 88–113. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.001

Hegedus, S. J., Dalton, S. y Cambridge, L. (2015). Integrating technology into the mathematics classroom: The role of teacher knowledge and experience. *Mathematics Education Research Journal, 27*(1), 1–25.

Ladrón-de-Guevara, L., Almagro, B. J. y Cabero-Almenara, J. (2021). Cuestionario TPACK para docentes de Educación Física. *Campus Virtuales, 10*(1), 173-183.

Li, M., Vale, C., Tan, H. y Blannin, J. (2024). A systematic review of TPACK research in primary mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*, 1-31. https://doi.org/10.1007/s13394-024-00491-3

Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Mouza, C., Karchmer-Klein, R., Nandakumar, R., Ozden, S. Y. y Hu, L. (2014). Investigating the impact of an integrated approach to the development of preservice teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK). *Computers & Education, 71*, 206–221. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.09.020

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 509–523. https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.006

Schmidt, D. A., Baran, E., Thompson, A. D., Mishra, P., Koehler, M. J. y Shin, T. S. (2009). Technological pedagogical content knowledge (TPACK): The development and validation of an assessment instrument for preservice teachers. *Journal of Research on Technology in Education, 42*(2), 123–149. https://doi.org/10.1080/15391523.2009.10782544

Schmid, M., Brianza, E. y Petko, D. (2020). Developing a short assessment instrument for Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK. xs) and comparing the factor structure of an integrative and a transformative model. *Computers & Education*, *157*, 103967. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103967

Valtonen, T., Sointu, E., Kukkonen, J., Mäkitalo, K., Hoang, N., Häkkinen, P., et al. (2019). Examining pre-service teachers' technological pedagogical content knowledge as evolving knowledge domains: A longitudinal approach. *Journal of Computer Assisted Learning, 35*, 491–502. https://doi.org/10.1111/jcal.12353

[i] Este trabajo se ha realizado en el contexto del proyecto PID2023-149580NB-I00, con fondos del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Este estudio ha sido financiado parcialmente por el Grupo de Investigación en Educación Matemática del Gobierno de Aragón S60_23R.

[ii] En MathTASK (Universidad de East Anglia) se exploran los conocimientos docentes mediante tareas hipotéticas basadas en problemas reales de enseñanza, permitiendo evaluar opiniones e intenciones pedagógicas. Las respuestas y entrevistas posteriores han revelado diversas perspectivas epistemológicas y pedagógicas de los profesores.

¿QUÉ CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EMERGE TRAS UNA FORMACIÓN SOBRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL?

What specialized knowledge emerges after a computational thinking training?

Santaengracia, J. J.a, Palop, B.b, Rodríguez-Muñiz. L. J.a

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

Este estudio analiza el conocimiento especializado que emergió entre docentes de educación primaria en activo al finalizar una formación sobre pensamiento computacional. La formación, de 14 horas, fue llevada cabo con 40 docentes de educación primaria, y abordó tanto aspectos conceptuales como didácticos del pensamiento computacional. Se realizó una categorización deductiva de las respuestas a una pregunta planteada al final de la formación. Se identificó una mayor presencia de subdominios del conocimiento didáctico del contenido, especialmente en estrategias de enseñanza y aprendizaje. También se apreció una fuerte conexión entre los contenidos de matemáticas y pensamiento computacional. Se concluye la necesidad de profundizar en los subdominios relacionados con el aprendizaje del pensamiento computacional y la posibilidad de incluir elementos del pensamiento computacional en el modelo MTSK.

Palabras clave: conocimiento especializado, formación docente, MTSK, pensamiento computacional.

Abstract

This study analyzes the specialized knowledge that emerges after a training on computational thinking. A 14-hour training was conducted with 40 primary school teachers, addressing both conceptual and didactic aspects of computational thinking. Content analysis of the responses to a question posed at the end of the training was performed. A greater presence of subdomains of pedagogical content knowledge was identified, particularly in teaching and learning strategies. It was also noted a strong connection between mathematics and computational thinking. It is concluded the need to deepen into the subdomains related to the learning of computational thinking, and the possibility of including of computational thinking elements into the MTSK model.

Keywords: *computational thinking, MTSK, specialized knowledge, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

La incorporación del pensamiento computacional (en adelante, PC) en los currículos de matemáticas escolares en España y en otros países ha generado la necesidad de formar al profesorado tanto en conocimientos conceptuales como en estrategias didácticas para su enseñanza, dada la ausencia de conocimientos previos y la ausencia de experiencia vital como docente o discente en procesos de enseñanza-aprendizaje del PC. A falta de un modelo teórico adaptado al PC y dadas sus evidentes conexiones con las matemáticas, para analizar el impacto de estas formaciones en el conocimiento especializado del profesorado, resulta pertinente apoyarse en modelos teóricos como el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018), que permiten explorar tanto el desarrollo del conocimiento especializado como la intersección entre matemáticas y PC.

El objetivo de este trabajo es explorar el conocimiento especializado, entendido según el modelo MTSK, que emergió en un grupo de 40 docentes en activo de educación primaria tras una formación disciplinar y didáctica sobre PC. A la vista del objetivo, se plantean las dos siguientes preguntas de

Santaengracia, J. J., Palop, B., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2025). ¿Qué conocimiento especializado emerge tras una formación sobre pensamiento computacional? En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

investigación: (1) ¿Qué subdominios del modelo MTSK emergen con las actividades propuestas en esta formación sobre PC? Y (2) ¿Cómo se relaciona el conocimiento especializado de matemáticas con el conocimiento especializado de PC?

MARCO TEÓRICO

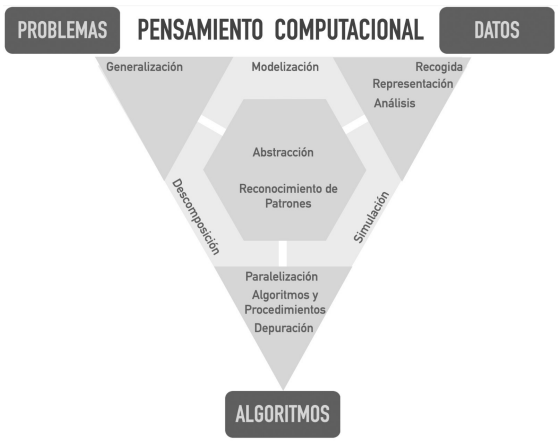
Pensamiento computacional

El término PC fue popularizado por Jeannette Wing (2006), quien lo conceptualizó como una práctica basada, fundamentalmente, en la resolución de problemas a través de la informática. Desde entonces, múltiples estudios han explorado el término y su aplicación en la educación. Sin que exista aún un consenso absoluto sobre su definición (Tang et al., 2020), es posible vislumbrar determinadas características comunes en las diferentes propuestas teóricas. Entre las corrientes teóricas destacan las que entienden que el PC es un proceso esencialmente basado en la resolución de problemas (p. ej., Palts y Pedaste, 2020). Barr y Stephenson (2011) consideran que, que además de la resolución de problemas, debe existir una herramienta informática de por medio. Brennan y Resnick (2012), con una visión más metodológica que epistemológica, dividen el PC en tres partes: conceptos, prácticas y perspectivas computacionales, basándose las dos primeras categorías en la algoritmia y la tercera en competencias generales tales como expresar o comunicar. Una de las conceptualizaciones más aplicadas a la educación y más reconocida en la enseñanza del PC es la que propone el proyecto Bebras (Dagiene y Dolgopolovas, 2022), un concurso educativo que propone problemas basados en contenidos informáticos diseñados para desarrollar componentes del PC, como el pensamiento algorítmico, la descomposición, la abstracción, la evaluación y la generalización.

En este trabajo se adopta el modelo de tres pilares (MTP) propuesto en Palop et al. (2025), en el que se da una mayor importancia a los datos frente a otros modelos propuestos anteriormente, situándolos como un pilar fundamental y al mismo nivel que los algoritmos y la resolución de problemas computacionales. Según este modelo, el PC se define como "la manera de razonar que nos permite enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva" (p. 12). Según este modelo, el PC se estructura en tres pilares: datos, problemas y algoritmos, con distintas componentes que representan habilidades, competencias o dimensiones y que se relacionan con distinta intensidad con estos pilares (Figura 1).

Figura 1

Conceptualización del modelo de tres pilares (MTP). Palop et al. (2025, p. 14).



Modelo MTSK

MTSK es un modelo analítico que busca caracterizar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas (Carrillo et al., 2018). Se estructura en tres dominios que, a su vez, se dividen en varios subdominios.

Conocimiento Matemático (MK, por sus iniciales en inglés): engloba el saber matemático que tiene un docente. Se subdivide en tres subdominios. El Conocimiento de los Temas (KoT) abarca el dominio de conceptos matemáticos, sus propiedades, fundamentos y distintos modos de representación, así como los procedimientos y la fenomenología o aplicaciones asociadas a cada tema. El Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) se refiere a la interconexión entre los distintos entes matemáticos, las relaciones entre conceptos y la estructura interna de la disciplina. El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) comprende las formas en las que se desarrolla y valida el conocimiento matemático, incluyendo la argumentación y demostración.

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK): está relacionado con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se compone de tres subdominios. El Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) engloba el dominio de estrategias, recursos y enfoques didácticos y pedagógicos necesarios para la enseñanza efectiva de las matemáticas. El Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático (KFLM) se centra en la comprensión de cómo aprenden los estudiantes, abordando aspectos como dificultades, fortalezas y formas de interacción con el contenido. Por último, el conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) incluye el conocimiento sobre los objetivos curriculares y las expectativas de aprendizaje establecidas para cada nivel educativo.

El tercer dominio, de Creencias y Concepciones sobre la Matemática y su Enseñanza y Aprendizaje, reconoce la influencia que las creencias y concepciones del docente tienen sobre su conocimiento didáctico y matemáticos. Estas ideas afectan sus decisiones en el aula y su percepción sobre cómo los estudiantes deben aprender matemáticas (Aguilar-González et al., 2018).

Formación continua del profesorado en PC

La inclusión del PC en los currículos educativos internacionales y, en particular, en España con la LOMLOE, plantea el problema de diseñar formación inicial y continua del profesorado sobre PC tanto a nivel disciplinar como didáctico. Dado que muchos docentes carecen de formación específica en aspectos relacionados con aspectos computacionales, esto puede dificultar la llegada del PC al aula (García-Peñalvo y Mendes, 2018). Esta carencia podría también generar resistencia entre los docentes o derivar en una integración superficial del PC en la enseñanza de las matemáticas (Hubbard, 2018).

Darling-Hammond et al. (2017) destacaron que una formación efectiva debe incluir experiencias prácticas, talleres y reflexión sobre la enseñanza, evitando un enfoque basado únicamente en la recepción de información. Por lo tanto, para abordar el PC en el desarrollo profesional del profesorado se debe fomentar su participación. En este sentido, Weintrop et al. (2016) y Bower et al. (2017) señalaron que la integración de conceptos teóricos y estrategias didácticas permea la docencia incluso con formaciones de corta duración. Para abordar este desafío, desde la investigación se han desarrollado diferentes programas formativos sobre PC para el profesorado de educación primaria y secundaria (por ejemplo, Santaengracia et al., 2023a, 2023b), descubriendo el efecto positivo en las actitudes y mostrando una mayor iniciativa a introducirlo en el aula.

MÉTODO

Esta comunicación se enmarca en un estudio de caso exploratorio (Simons, 2008). Para el análisis de los datos, se empleó una clasificación deductiva doble sobre los datos obtenidos (Mayring, 2014).

Participantes

Los participantes de este estudio fueron 40 docentes de educación primaria en activo de las Islas Baleares, que se forman como futuros acompañantes de otro profesorado, en un proyecto en cascada organizado por la Consejería de Educación y Universidad. Los investigadores diseñaron la formación y la pusieron en práctica, informando a los participantes sobre la recogida de información anónima con fines de investigación, para lo que todos los participantes dieron su consentimiento.

Diseño de la formación

La formación transcurrió en dos días de noviembre de 2024, con una duración total de 14 horas. Se realizaron varias sesiones y talleres prácticos, en grupos, en torno al PC y su didáctica en educación primaria. Esta formación se rediseñó sobre la base de Santaengracia et al. (2023a, 2023b) a partir del análisis de la realimentación recibida por los participantes en las formaciones anteriores, modificando ligeramente cuatro de los talleres, eliminando uno de ellos e incluyendo tres nuevos, como se explica a continuación. La formación comenzó con la aproximación teórica al PC a partir del MTP de Palop et al. (2025) y, a continuación, se sucedieron siete talleres con el siguiente esquema: (1) Algoritmos de ordenación, desarrollados manipulativamente. (2) Sentido estocástico y PC, a través de *Dollar Street*. (3) Sentido numérico y algebraico y PC, a través de *Exploding Dots*® (Global Math Project y Buzzmat, 2023). (4) Charla aproximación al sentido socioafectivo. (5) Simulación de datos con hoja de cálculo. (6) PC desenchufado, con el material Bebras® (Dagiene y Dolgopolovas, 2022). (7) Scratch® online (Massachusetts Institute of Technology, s.f.). La formación finalizó con una ponencia en la que se analizó el PC en el nuevo currículo de matemáticas.

Recogida de datos

Al finalizar la formación se realizó la recogida de datos a través de la dinámica de recogida de información cualitativa Metaplan® (2015), que permite obtener información acerca de ideas, planes y opiniones y organizarla conceptualmente, siendo exitosa en formación continua de docentes (Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021). Para llevar a cabo la recogida se proporcionó la siguiente instrucción: “Por grupos, tomad pósits y escribid ideas que este curso os haya sugerido (una idea-un pósit). por ejemplo: saberes (conceptos, contenidos, procedimientos), actividades, prácticas, ideas relacionadas con el currículo, con tu actividad profesional, con tu alumnado, con tu formación, etc.”. Tras cinco minutos, siguiendo la dinámica Metaplan®, los investigadores recogieron los pósit, discutiendo las ideas comunes y las diferencias y agruparon conceptos e ideas similares de manera organizada en una pizarra blanca. Tras recoger y discutir todas las ideas, se proyectó en la pizarra el hexágono del modelo MTSK, realizando una reflexión conjunta acerca del modelo MTSK a partir de sus respuestas. Los investigadores, conocedores de la intención de la actividad, organizaron los pósits de manera que se colocasen cerca del lugar físico que el subdominio correspondiente ocuparía al ser proyectado el hexágono del MTSK (Figura 2).

Figura 2

Categorización en directo de las ideas propuestas por los docentes. Fuente: elaboración propia.

Análisis de datos

Además del agrupamiento propio del Metaplan®, realizado *in situ*, se realizó posteriormente una clasificación deductiva de las respuestas recogidas en los pósits, categorizándolas en función de los subdominios del modelo MTSK, independientemente de si los términos se referían a matemáticas, a PC o a su intersección. De manera independiente, los tres investigadores, que cuentan con amplia

experiencia tanto en PC como en el modelo MTSK, realizaron la clasificación, triangulando en una segunda fase las respuestas. Tras categorizar las respuestas respecto al subdominio, de nuevo a través de una clasificación deductiva, se categorizaron las respuestas dependiendo de si se referían a PC, matemáticas o ambos campos simultáneamente.

RESULTADOS

Subdominios y campos

Para clasificar las ideas producidas por el profesorado se utilizaron las definiciones de cada subdominio proporcionadas en el marco del MTSK, identificando todos los subdominios presentes en cada idea. Así, siempre que apareció, por ejemplo, un recurso, se categorizó como KMT o cuando apareció, por ejemplo, un contenido concreto, ya fuera de PC o de matemáticas, se categorizó como KoT. Adicionalmente, se realizó otra clasificación deductiva identificando si las ideas de los pósits se referían únicamente a matemáticas (p. ej., sistema decimal o matemáticas manipulativas), a PC (p. ej., Bebras o PC no son solo robots) o bien a ambos campos de forma simultánea (p. ej., transversalidad, binario o DUA). A partir de estas dos clasificaciones se elabora la Tabla 1.

Tabla 16

Frecuencia de aparición por subdominio y campos

Subdominio	KoT	KSM	KPM	KMT	KFLM	KMLS	Creencias
PC	3	3	0	5	0	1	0
Matemáticas	2	2	0	0	3	0	0
Ambos	10	9	10	29	19	5	3
Total	15	14	10	33	22	6	3

A la vista de los resultados, se destaca una mayor concentración en el dominio PCK, específicamente en los subdominios KMT y KMLF, aunque el subdominio KMLS tiene una muy baja frecuencia de apariciones. Por el contrario, los subdominios del MK tienen una distribución equilibrada de apariciones, aunque menor en términos absolutos que las frecuencias del dominio PCK. A nivel general, se aprecia que el profesorado conectó ambos campos para la mayoría de los subdominios, mostrando ideas que se refieren únicamente a uno de ellos de forma más anecdótica (como Bebras referido al PC o sistema decimal referido únicamente a matemáticas). Esto se refleja especialmente en el subdominio KPM, en el que las ideas se refieren a prácticas tanto matemáticas como computacionales, con ideas como enseñar a pensar, extrapolar resultados o metacognición. Se destaca también la ausencia de ideas relacionadas únicamente con matemáticas en el KMT, apartado en el que fundamentalmente se han detectado metodologías aplicables a ambos campos y recursos orientados a la enseñanza del PC. En el subdominio KFLM, al contrario que en el KMT, no se encuentran referencias únicas al PC mientras que sí se observan a las matemáticas y, además, las ideas comunes se refieren fundamentalmente a la atención a la diversidad y el sentido socioafectivo.

Relación entre las ideas en cada subdominio

Dentro del dominio MK, en el subdominio KoT, los docentes identificaron tanto conceptos básicos del PC (por ejemplo: código binario, creación de algoritmos, sistemas de ordenación) como matemáticos (por ejemplo: sistema decimal, números y operaciones). Además de esto, los docentes expresaron ideas como “conocer la fundamentación teórica del PC y de la estocástica”, conectando de nuevo ambos campos. En el KSM la idea más repetida fue la transversalidad y la conexión del PC con las matemáticas, apareciendo otras expresiones como: conexión PC-matemáticas-informática, apertura de mirada hacia el pensamiento matemático, o, simplemente, transversalidad de materias y conceptos. Por su parte, en el KPM, las ideas reflejaron una atención hacia los procesos de razonamiento propios de las matemáticas y del PC, tales como modelizar, reflexión sobre el proceso, metacognición o construcción del pensamiento. En este apartado, sin embargo, no se hizo referencia alguna a la lógica matemática formal o los axiomas matemáticos.

Dentro del dominio PCK, en el KMT, los docentes centraron su atención en recursos para la enseñanza del PC y las matemáticas, mencionando algunos como: Bebras® (Dagiene y Dolgopolovas, 2022), Scratch® (Massachusetts Institute of Technology, s.f.) y Mathigon, y metodologías específicas, como la *Thinking Classroom* (Liljedahl, 2021). En el KFLM, las ideas mostraron una especial preocupación por la diversidad en el aprendizaje y el sentido socioafectivo, destacando temas como: ansiedad matemática, el aprendizaje significativo, el DUA, la flexibilidad del tiempo y los sesgos de género en el aprendizaje de las matemáticas y del PC. Por último, el KMLS fue el subdominio con menor cantidad de ideas asociadas. Entre ellas se sugirió una falta de claridad en la integración del PC dentro del currículo. No obstante, los docentes mostraron ideas referidas a los sentidos del currículo e incluso llegaron a plantear si el PC es una competencia o un saber (recuérdese que en el currículo aparece de ambas formas).

DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos reflejan que las actividades propuestas contribuyen a la construcción del conocimiento especializado del profesorado en matemáticas y PC dada la aparición de términos que reflejan conocimiento sobre el contenido y la didáctica de la matemática y el PC así como de sus conexiones. Como primer ejemplo, a diferencia de otros estudios en los que el KoT suele predominar por encima del resto de subdominios (p.ej., Muñiz-Rodríguez et al., 2022), los resultados revelan un predominio del PCK, específicamente de los subdominios KMT y KFLM. A lo largo de la formación, si bien se profundizó en conceptos teóricos, tanto los formadores como el profesorado han dado suma importancia a la didáctica a través de los recursos y metodologías presentadas, lo que refuerza la idea de la necesidad de formar en un cuerpo de conocimiento tanto teórico como aplicado (Darling-Hammond et al., 2017) lo que es reflejado en el predominio del subdominio KMT, específicamente referido a recursos por encima del resto.

Más allá de los recursos expuestos por el profesorado catalogados dentro del KMT, dentro del KFLM, se observa que, principalmente, las ideas están referidas al sentido socioafectivo (lo cual resulta lógico al haber realizado una charla sobre ello). Sin embargo, dentro de este subdominio no encontramos ninguna referencia al aprendizaje del PC *per se.* En Climent et al. (2016), se propone que el KFLM debe estar sustentado por un buen nivel de KoT como condición necesaria pero no suficiente para ser construido y, en este caso, aun mostrando un buen nivel de KoT, no se encuentra ninguna palabra referida al KFLM respecto al PC. En respuesta a esto hay que tener en cuenta que Muñiz-Rodríguez et al. (2022) proponen que el no haber vivido el proceso de enseñanza-aprendizaje de un contenido influye en no conocer cómo se aprende; si a este hecho le añadimos que la didáctica del PC está aún en desarrollo podemos concluir que el cuerpo de conocimiento especializado relativo al PC dentro del KFLM aún debe ser construido, con nueva investigación al respecto.En contraste con los dos subdominios mencionados, se observa una muy baja presencia de KMLS. No se puede concluir que este subdominio no se trabajó en la formación, ya que se abordó en distintos momentos, pero los datos sugieren que no fue una preocupación prioritaria para el profesorado o que no lo percibieron como un elemento clave en su aprendizaje.

Si, además de en el PCK también nos fijamos en los conceptos dentro del MK, los docentes muestran ideas que establecen fuertes conexiones entre las matemáticas y el PC, así como otros bien diferenciados, determinando ideas que únicamente se pueden asociar a cada uno de los campos. Como se apuntó en Santaengracia et al. (2024, p. 495) respecto a las posibles inclusiones del PC en el modelo MTSK, a la vista de las relaciones evidenciadas en este trabajo, y considerando las diferencias entre ambos campos, sería razonable plantear una ampliación del modelo MTSK con las ideas únicamente computacionales. Estas ideas podrían tener cabida en cada uno de los subdominios en forma de recursos, cuerpos de conocimiento, o formas de proceder propias del PC, como se ejemplifica en Palop et al. (2025).

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos reflejan que la formación en PC ha contribuido al desarrollo del conocimiento especializado del profesorado en todos los subdominios, destacando especialmente los subdominios KMT y KFLM, siendo los que más apariciones tienen al haber dado a conocer tanto recursos como características del aprendizaje del PC y las matemáticas. La excepción ha sido el KMLS, que ha emergido en menor medida. Asimismo, se constata que la formación planteó adecuadamente la conexión entre el PC y las matemáticas, a la vista de las ideas que emergieron.

Este tipo de análisis también aportan información para la mejora del diseño de futuras formaciones en PC al permitir identificar tanto los aspectos que los docentes perciben como relevantes como aquellos que requieren mayor atención. En particular, la baja presencia del KMLS obliga a reflexionar sobre las posibles causas de su escasa aparición, replanteando su tratamiento en futuras ediciones.

Por último, debemos señalar algunas limitaciones del estudio. En primer lugar, varias de las ideas expresadas por los docentes no han podido ser analizadas bajo el marco del modelo MTSK por no poder catalogarse de conocimiento docente (como por ejemplo opiniones sobre la formación o frases sin relación directa) lo que impide una categorización completa de todas las ideas emergentes. En segundo lugar, aunque en el Metaplan® se recogieron percepciones del profesorado, no se realizaron entrevistas en profundidad que permitieran explorar con mayor precisión sus conocimientos y creencias sobre el pensamiento computacional y su enseñanza.

Referencias

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA, 13*(1), 41–61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Barr, V., y Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads, 2*(1), 48–54. https://doi.org/10.1145/1929887.1929905

Bower, M., Wood, L. N., Lai, J. W., Howe, C. y Lister, R. (2017). Improving the computational thinking pedagogical capabilities of school teachers. *Australian Journal of Teacher Education, 42*(3), 53–72. https://doi.org/10.14221/ajte.2017v42n3.4

Brennan, K. y Resnick, M. (2012). New Frameworks for Studying and Assessing the Development of Computational Thinking. *En Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Vancouver, Canada (Vol. 1, p. 25).

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, E., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018): The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Montes, M. A., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V. J. y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9*, 85–103. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108

Dagiene, V., y Dolgopolovas, V. (2022). Short tasks for scaffolding computational thinking by the global Bebras challenge. *Mathematics, 10*(17), 31-94. https://doi.org/10.3390/math10173194

Darling-Hammond, L. (2017). Teacher education around the world: What can we learn from international practice? *European Journal of Teacher Education, 40*(3), 291–309. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1315399

García-Peñalvo, F. J., y Mendes, A. J. (2018). Exploring computational thinking in primary education. *Computers in Human Behavior, 80*, 74–78. https://doi.org/10.1016/j.chb.2017.10.007

Global Math Project y Buzzmat, (13 de marzo de 2023). *The Exploding Dots Experience – The Global Math Project. Exploding Dots*. https://www.explodingdots.org/

Hubbard, A. (2018). Pedagogical content knowledge in computing education: A review of the research literature. *Computer Science Education, 28*(2), 117–135. https://doi.org/10.1080/08993408.2018.1509580

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin Mathematics.

Massachusetts Institute of Technology (s.f.). *Scratch - Imagine, Program, Share*. Scratch. https://scratch.mit.edu/

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Beltz.

Metaplan. (2015). *Metaplan® basic techniques: Moderating group discussions using the Metaplan approach.* Metaplan.

Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la práctica docente en el ámbito de la educación estadística en educación secundaria. *Paradigma*, *42*(Extra 1), 191–220. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.P191-220.ID1023

Muñiz-Rodríguez, L., Valenzuela-Molina, M., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). ¿Qué aprendemos sobre el conocimiento de los estudiantes para maestro a partir de su autoconcepto? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 391–399). SEIEM.

Palop, B., Díaz, I., Rodríguez-Muñiz, L.J., y Santaengracia, J. J. (2025). Redefining computational thinking: A holistic framework and its implications for K-12 education. *Education and Information Technologies*. https://doi.org/10.1007/s10639-024-13297-4

Palts, T., y Pedaste, M. (2020). A model for developing computational thinking skills. *Informatics in Education, 19*(1), 113–128. https://doi.org/10.15388/infedu.2020.06

Santaengracia, J. J., Aguilar-González, A., Palop, B., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 489-496). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Palop, B., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023a). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

Santaengracia, J. J., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Palop, B. (2023b). Diseño de una formación sobre el pensamiento computacional con un enfoque multidimensional. En A. P. Canavarro, I. Cabrita, N. Branco, R. Ferreira y T. Neto (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática. EIEM 2023: Resolução de Problemas* (pp. 184–188). SPIEM

Simons, H. (2008). *Case study research in practice*. SAGE.

Tang, X., Yin, Y., Lin, Q., Hadad, R. y Zhai, X. (2020). Assessing computational thinking: A systematic review of empirical studies. *Computers & Education, 148*, 103-798. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103798

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M. S., Orton, K., Jona, K., Trouille, L. y Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127–147. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE LA PRÁCTICA DE PLANIFICAR LECCIONES USANDO PRINCIPIOS DE LA ENSEÑANZA EXPLORATORIA

Characteristics of prospective secondary mathematics teachers' learning of the professional practice of lesson planning supporting inquiry-based teaching

Santonja, P., Moreno M., Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el aprendizaje de estudiantes para profesor del uso de los principios de la enseñanza exploratoria al planificar lecciones. Se analizaron 25 planes de lecciones considerando las tareas matemáticas y su gestión, lo que permitió identificar ciclos exploratorios como un rasgo característico del uso de los principios de la enseñanza exploratoria al planificar una lección. Identificamos tres grupos de planificaciones en función de los ciclos exploratorios. Los resultados indican que el grupo de planificaciones que incluían una sucesión de ciclos exploratorios se relacionaban con la manera en que los estudiantes para profesores definían los objetivos de aprendizaje. Se concluye que es posible aprender a usar los principios de la enseñanza exploratoria para planificar lecciones y la gestión de la interacción en el aula, si bien resulta complejo.

Palabras clave: Enseñanza exploratoria, Futuros profesores de Matemáticas de secundaria, Planificación de lecciones.

Abstract

The aim of this communication is to identify characteristics of prospective secondary teachers learning of the professional practice of lesson planning supporting inquiry-based teaching. 25 lesson plans were analysed considering tasks and its management, allowing us to identify exploratory cycles as a characteristic feature of the use of inquiry-based teaching principles when planning lessons. Three groups of lesson plans were identified considering those cycles. Results indicate that lesson planning reflecting sequences of exploratory cycles is connected to the way prospective teachers defined the learning goals. Results also show that learning to use exploratory principles and planning the management of the interaction in the lesson plans is difficult but complex.

Keywords: *Inquiry-based teaching. Prospective secondary mathematics teachers, Lesson plan*

INTRODUCCIÓN

La planificación de lecciones se considera una práctica profesional específica de los profesores de matemáticas (Cevikbas et al., 2024). En un contexto curricular basado en competencias, se anima a los profesores a diseñar lecciones que promuevan el pensamiento matemático de los estudiantes apoyándose en prácticas matemáticas como estudiar casos particulares, establecer conjeturas, generalizar, ejemplificar, comunicar y probar. Desarrollar estas prácticas matemáticas en los estudiantes requiere adoptar modelos de enseñanza entre los que se encuentra la Enseñanza Exploratoria (Artigue y Blomhøj, 2013). La enseñanza exploratoria está dirigida a favorecer que los estudiantes actúen y piensen como lo harían los matemáticos frente a tareas matemáticas. Investigaciones previas han destacado los beneficios de esta aproximación a la enseñanza para

Santonja, P., Moreno, M. y Llinares, S. (2025). Características de las planificaciones que favorecen la enseñanza exploratoria diseñadas por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, pero también señalan las dificultades que tienen los profesores al planificar e implementar este modelo de enseñanza (Henriques y Martins, 2022; Turan y Matteson, 2021). Un aspecto clave del proceso de aprender a planificar lecciones y su gestión que reflejen principios de la enseñanza exploratoria es considerar ciertas prácticas matemáticas como objetivos de aprendizaje de los estudiantes (Moreno et al. 2024). Además, al experimentar con estas aproximaciones, los profesores (estudiantes para profesor) pueden anticipar posibles intervenciones en sus planificaciones (Calleja et al., 2024). Estos resultados previos indican la necesidad de comprender mejor cómo se aprende a usar los principios de la enseñanza exploratoria al planificar lecciones.

Un desafío de los programas de formación de estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria es crear oportunidades para aprender a planificar lecciones usando los principios de la enseñanza exploratoria, así como las ideas que pueden organizar su gestión. Por tanto, el objetivo de esta investigación es caracterizar el aprendizaje de los estudiantes para profesor del uso de los principios de la enseñanza exploratoria al planificar de lecciones. En particular, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las características de los planes de lecciones diseñadas por los estudiantes para profesor que favorecen la enseñanza exploratoria?

MARCO CONCEPTUAL

La enseñanza exploratoria se define como un modelo de enseñanza en el que el docente crea oportunidades para que los estudiantes observen fenómenos, se cuestionen e investiguen métodos matemáticos para dar respuesta a las cuestiones planteadas (Artigue y Blomhøj, 2013). Artigue (2017) definió las características de un enfoque exploratorio a partir de las semejanzas con la exploración en ciencias indicando: se partirá de un problema o una cuestión abiertos, invitando a los alumnos a buscar respuestas mediante la observación e indagación; se buscarán conexiones con preguntas ya respondidas, aplicando y adaptando técnicas matemáticas conocidas; el proceso conducirá a hipótesis que requieren de validación, lo que conllevará revisar y cuestionarse las definiciones de los objetos matemáticos implicados; finalmente; el proceso podrá conducir a formular nuevas preguntas o problemas, cuya respuesta podría influir en la formulación o respuesta a la cuestión o al problema inicial.

Los principios de la enseñanza exploratoria están vinculados a generar oportunidades de aprendizaje a los estudiantes para desarrollar las prácticas matemáticas específicas: generar casos particulares; organizar los datos; buscar patrones o relaciones en los datos (propiedades matemáticas) y conjeturar; generalizar (extender el dominio de aplicación de una propiedad); argumentar matemáticamente y comunicar (Moreno et al., 2024). Las características de las tareas que generan estas oportunidades están vinculadas con su demanda cognitiva (Smith y Lane, 1996) y su gestión está vinculada con la generación de discusiones matemáticas en el aula (Stein et al., 2008).

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 25 estudiantes para profesor de matemáticas (EP) matriculados en un máster en formación de profesores de educación secundaria y bachillerato. Su formación previa era variada, siendo 11 matemáticos, 7 físicos, 6 ingenieros y un arquitecto. Estos EPs estaban matriculados en una asignatura de 50 horas organizada en módulos formativos que incluían la resolución de diferentes tareas profesionales (modificar tareas matemáticas, planificar lecciones, diseñar posibles gestiones de la interacción en el aula, etc.), las cuales consistían en un registro de la práctica (por ejemplo, transcripción de una interacción profesor-alumno, tarea de un libro de texto y/o descripciones de una situación de enseñanza) y cuestiones cuyo objetivo era que los EPs estructuran su mirada sobre la situación propuesta. Se esperaba que las tareas profesionales se resolvieran usando información

teórica proporcionada en el programa formativo. Para la tarea relacionada con la planificación de lecciones y su gestión basada en la enseñanza exploratoria, los EPs disponían de información, la cual era síntesis de investigaciones sobre los principios de la enseñanza exploratoria (Artigue y Blomhøj, 2013), demanda cognitiva de las tareas y modificación de tareas (Stein y Lane, 1996) y prácticas docentes que apoyan la gestión de las discusiones matemáticas en las aulas (Stein et al., 2008).

Instrumento

El instrumento de recogida de datos consistió en una práctica individual, que formaba parte de la evaluación de la asignatura. Se solicitó a los EPs planificar una lección que favoreciese la enseñanza exploratoria siguiendo un guion (Figura 1). Debían escoger el contenido de la lección entre: proporcionalidad, semejanza, teorema de Tales y escalas (3º-4º ESO); derivada de una función, propiedades y aplicaciones (1º-2º Bachillerato); secuencias numéricas, sucesiones y series (3-4º ESO); sistemas de ecuaciones lineales e interpretación geométrica (3º-4º ESO).

Figura 20

Guion para elaborar la planificación de la lección

PLANIFICACIÓN: Planifica una lección de una semana (4 sesiones aprox., que integre Tics) que te permita desarrollar el contenido elegido desde una enseñanza exploratoria. Indica: objetivos específicos, secuencia de tareas, aspectos específicos de la enseñanza exploratoria, y criterios de evaluación.

a. Justifica por qué tu propuesta favorece la enseñanza exploratoria, y el papel que juegan las Tics.
b. Justifica la situación de aprendizaje elegida: situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a las competencias específicas y a las competencias clave que contribuyen a su adquisición y desarrollo.

Anticipa una gestión de la discusión en gran grupo, según el modelo de Stein et al. (2008), mostrando las fases y ejemplificando las prácticas. Justifica la respuesta.

Análisis

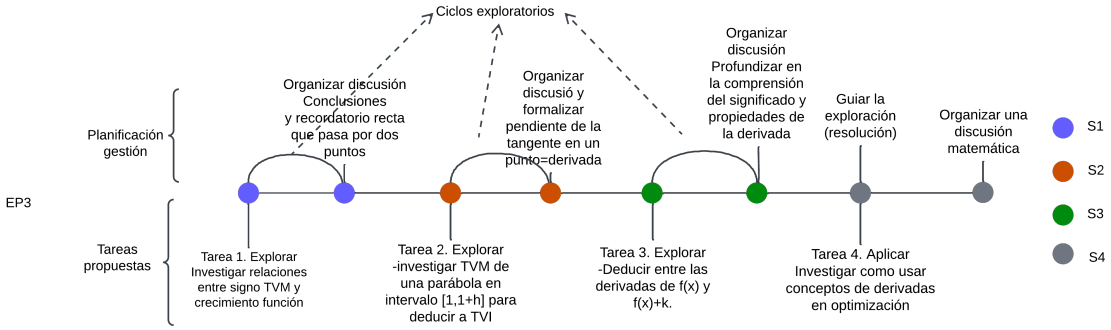
Los datos de este estudio fueron las 25 planificaciones entregadas como práctica final individual. El análisis de las planificaciones consistió en un análisis de contenido cualitativo, que se realizó en cuatro fases. La primera fase consistió en un análisis inductivo de las tareas en el contexto de la lección y de los objetivos pretendidos explícitos o inferidos del contexto (aplicar un concepto previamente introducido, explorar una propiedad, generalizarla o demostrarla). La segunda fase consistió en un análisis deductivo de la manera en la que los EPs planificaban la gestión de la lección considerando las fases y prácticas de Stein et al. (2008) (monitorizar el trabajo de los estudiantes, apoyar las exploraciones, guiar discusiones matemáticas). Aquellas categorías que no se correspondían con las anteriores se codificaron inductivamente (explicaciones directas del profesor, ejemplificaciones y momentos de síntesis).

La tercera fase consistió en la identificación de ciclos exploratorios a partir del análisis global de la lección considerando todas las tareas, tal y como aparecían en el diseño, y los aspectos relativos a planificación de la gestión identificados. Un ciclo exploratorio es una secuencia de oportunidades para que los estudiantes generen algunas prácticas matemáticas específicas que les permitan, como mínimo, establecer conjeturas y comunicarlas matemáticamente.

Para ello, representamos las tareas planteadas y los aspectos relativos a la planificación de la gestión en una línea temporal. Mediante colores diferenciamos las sesiones que proponían los EPs. En la parte superior situamos los aspectos relativos a la planificación de la gestión y en la inferior las tareas planteadas. En esta línea temporal identificamos los ciclos exploratorios dirigidos al aprendizaje de propiedades y conceptos matemáticos. En la línea temporal, estos ciclos se representaron mediante arcos, con su principio y su final. La figura 2 muestra la estructura de la planificación de EP3, en la que se evidencian los ciclos exploratorios.

Figura 2

Estructura de la planificación



En la cuarta fase se realizó un análisis de comparación por pares de las 25 planificaciones para buscar semejanzas y diferencias, y se agruparon tomando como referencia, en primer lugar, a la presencia de ciclos exploratorios a lo largo de la lección. En segundo lugar, en las partes que no formaban un ciclo exploratorio, se buscaron semejanzas en las tareas planteadas en el contexto de la lección y en los aspectos relativos a la planificación de la gestión.

RESULTADOS

Los resultados mostraron tres grupos de planificaciones según el uso de los principios de la enseñanza exploratoria (Tabla 1). El primer grupo lo forman las planificaciones en las que los EPs usan los principios de la enseñanza exploratoria como ítems aislados y no se identificaron ciclos exploratorios. Estas planificaciones se estructuraban en explicaciones directas del profesor y propuesta de tareas de aplicar. En el segundo grupo se incluyen las planificaciones en las que los EPs usan los principios solo en partes de la lección (incluyen algún ciclo exploratorio, explicaciones directas y/o tareas de aplicar). El tercer grupo lo forman planificaciones en las que los EPs usan los principios de la enseñanza exploratoria de manera sistemática (identificando secuencias de ciclos exploratorios que concluyen en tareas de aplicar). En esta comunicación presentaremos las características de este último grupo a través de un estudio de caso.

Tabla 17

Tipos de planificaciones

	Planificaciones	
	fi	
Planificaciones en las que usan los principios como elementos aislados	6	EP1, EP10, EP11. EP14, EP17, EP21
Planificaciones en las que usan los principios en partes de la lección (algún ciclo exploratorio)	11	EP4, EP5, EP7, EP8, EP9, EP13, EP18, EP20, EP22, EP24, EP25
Planificaciones en las que usan los principios de manera sistemática (secuencias de ciclos exploratorios)	8	EP2, EP3, EP6, EP8, EP15, EP16, EP19, EP23

Planificaciones en las que usan los principios de la enseñanza exploratoria de manera sistemática.

Usar los principios de la enseñanza exploratoria de manera sistemática significa organizar una lección en secuencias de ciclos exploratorios y definir como objetivos de aprendizaje las prácticas matemáticas. Estas planificaciones se caracterizan por crear oportunidades para que los alumnos construyan los significados de los conceptos y propiedades matemáticas a través de prácticas matemáticas específicas. El conocimiento generado en cada ciclo se construye a partir del

conocimiento previo de los estudiantes. Evidenciaremos estas características a partir de la planificación del EP3 para el contenido derivada de una función, propiedades y aplicaciones (1º-2º Bachillerato).

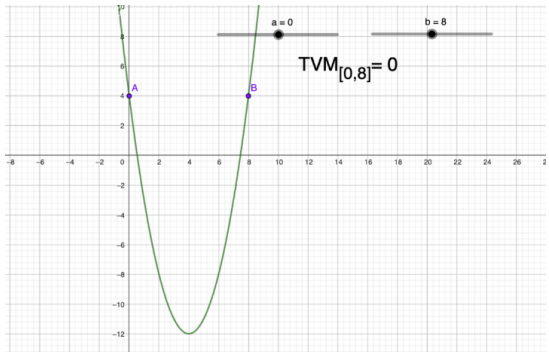
El EP3 planificó una lección formada por 3 ciclos exploratorios y una tarea de aplicación (Tarea 4). Los ciclos exploratorios tenían como objetivos de aprendizaje, determinar la relación entre el crecimiento y decrecimiento de una función y el signo de la tasa de variación media; proporcionar la interpretación geométrica de la derivada; y establecer la igualdad de las derivadas en un punto de funciones trasladadas. En el primer ciclo exploratorio se identificó una tarea que generaba una secuencia de oportunidades de desarrollar prácticas matemáticas a través de un applet para que los alumnos establecieran relaciones entre el crecimiento y decrecimiento de una función y el signo de la tasa de variación media (TVM)

- "¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta y da un ejemplo que lo verifique o contraejemplo que lo desmienta. a) Si f es creciente en [a, b], su TVM en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su TVM es negativa. b) ¿Se cumple el recíproco? Es decir, ¿si el TVM es positivo significa que f es creciente en todo el intervalo [a, b] y si el TVM es negativo significa que f es decreciente en todo el intervalo [a, b]? c) Si la TVM de f en [a, b] es 0, significa que f es constante en [a, b]."

El applet (Figura 3) permitía modificar los extremos del intervalo, usando deslizadores, y determinar el valor de la TVM en el intervalo creado (sin incluir la fórmula para determinar la TVM).

Figura 3

Applet para realizar la tarea del primer ciclo exploratorio



La tarea crea oportunidades para generar diferentes intervalos usando deslizadores (casos particulares) lo que permitía anotar el valor y el signo de la TVM de cada uno (organizar sistemáticamente los casos particulares). Esta forma de proceder permitía conjeturar relaciones del tipo "crecimiento de una función en un intervalo implica TVM positiva en dicho intervalo", aunque con limitaciones. Estas limitaciones se debían a dos factores. Por un lado, la formulación de la pregunta "¿si el TVM es positivo significa que f es creciente en todo el intervalo [a, b] y si el TVM. es negativo significa que f es decreciente en todo el intervalo [a, b]?" indicaba a los alumnos la relación a buscar, lo que limitaba realizar una conjetura. Por otro lado, el applet (Figura 3), solo permitía explorar en una parábola específica, impidiendo usar diferentes funciones para comprobar. Estas limitaciones dificultaban la creación oportunidades para generalizar la propiedad.

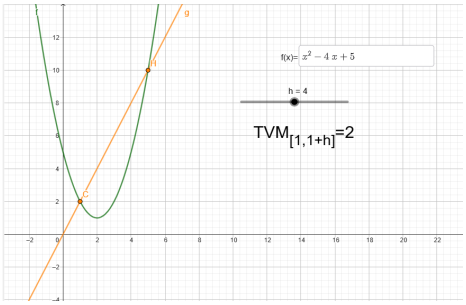
En el segundo ciclo exploratorio, se identificó una tarea que generaba oportunidades de desarrollar prácticas matemáticas a través de un applet para que los alumnos conectaran la TVM con el paso a la TVI (el concepto de función derivada) con la pendiente de la recta tangente a una función en un punto:

- "Halla la TVM de f(x)= x^2-8x+12 en el intervalo variable [1,1+h]. ¿Qué pasaría al variar h? ¿Y si h fuese prácticamente 0?"

El applet representaba la gráfica de una función, que se podía modificar, la recta que pasaba por los extremos del intervalo [1, 1+h] (x=1 no se podía cambiar) y un deslizador que permitía modificar los valores de h (h=4,3,2,1,0, usando solo valores enteros) (Figura 4).

Figura 4

Applet para realizar la tarea del segundo ciclo exploratorio



Fijada una función, esta tarea creaba oportunidades para que los alumnos generasen varios intervalos (casos particulares) al cambiar el valor de h permitiendo observar cómo el valor de la tasa de variación media tendía a la TVI (buscar relaciones). El applet generaba una oportunidad para que los alumnos conjeturasen que cuando h tendía a 0, el valor de la TVM tendía a la TVI (valor de la pendiente de la tangente en el punto (x=1)). El applet también permitía modificar la función, lo que proporcionaba oportunidades de comprobar la conjetura en nuevas funciones (generalizar). De esta manera, al variar la función esta tarea abría la oportunidad de introducir propiedades como "si la derivada de una función en un punto es 0 (la recta tangente en dicho punto es paralela al eje OX), entonces la función tiene un máximo o un mínimo en dicho punto" (por ejemplo, usando la función $f(x)= -(x-1)^2+1$, en x=1 hay un máximo). Las características de esta tarea permiten asumir su potencial para establecer una conjetura sobre la relación entre la nulidad de la derivada y la existencia de máximos o mínimos. Una limitación de la tarea es que el applet propuesto únicamente permitía usar valores enteros de h, lo que limitaba explorar los intervalos próximos a 1 obtenidos con valores decimales de h.

En el tercer ciclo exploratorio se identificó una tarea que generaba una secuencia de oportunidades de desarrollar prácticas matemáticas a través de otro applet para que los estudiantes explorasen las tangentes en un punto de una familia de funciones trasladadas.

La exploración permitía que los estudiantes dedujeran que las rectas tangentes en ese punto eran paralelas y, por tanto, tenían la misma pendiente, es decir, la derivada en el punto era la misma.

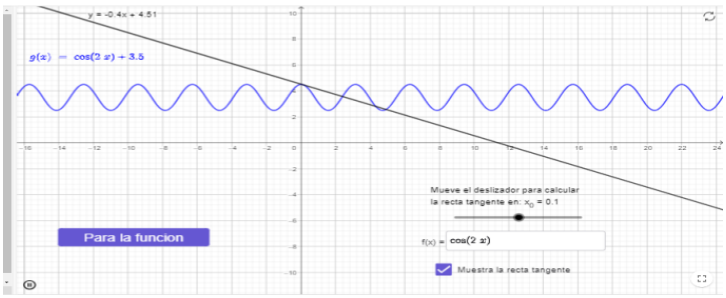
"Teniendo 2 funciones g1(x)=f(x) y g2(x) = f(x)+k ¿Qué relación tendrían las derivadas de ambas funciones?" (En un punto determinado, que viene dado por el deslizador)

El applet (Figura 5) permitía generar casos particulares al variar tanto las funciones como los puntos. Una vez identificada una función (f(x)), permitía visualizar las traslaciones de dicha función (f(x)+k). Para cada función, y fijado un punto, el applet representaba las rectas tangentes a dicho punto en la familia de funciones trasladadas (lo que permitía buscar relaciones entre las pendientes de las rectas tangentes).

Las rectas tangentes son paralelas, por lo que se creaban oportunidades para conjeturar la propiedad matemática que era el objetivo planteado (las derivadas en un punto de una familia de funciones trasladas son iguales). Además, al modificar las funciones y repetir todo el proceso anterior, se creaban oportunidades para generalizar dicha propiedad.

Figura 5

Applet para realizar la tarea del segundo ciclo exploratorio



La planificación concluía con una tarea de aplicación de la propiedad identificada en el ciclo 2 "si la primera derivada en un punto vale 0, ese punto será un máximo o un mínimo de la función":

- *"Se buscan un par de números positivos, cuya suma sea igual a 12. Hallar aquel cuyo producto del cuadrado del mayor por el menor es máximo."*
- Esta tarea se usó para ejemplificar la gestión de las diferentes tareas, a través de un diálogo inventado (Script) (Zazkis y Herbst, 2017), lo que permitió identificar su intención de crear oportunidades para comunicar y argumentar matemáticamente. Por ejemplo, en un momento dado, imaginó un diálogo con unos estudiantes que estaban trabajando (Figura 6)

Figura 6

Diálogo inventado por EP3

- Matías pregunta: Profe, lo del máximo, ¿hay que relacionarlo con las derivadas?
- Profesora: ¿Tú qué crees?
- Matías dice: Yo creo que sí.
- Profesora: ¿Qué es un máximo?

Ana, que está a su lado, dice:

-Ana: El pico más alto de una función.

- Profesora: Bien Ana, y ¿cómo se podría relacionarlo con las derivadas como decía Matías?
- Matías: Bufff....
- Ana: Pues será 0, ¿no?
- Profesora: Exacto, ya que la recta tangente en ese punto será horizontal. Pues averiguad ahora como podríais calcular esos máximos.

Este diálogo evidenciaba cómo la EP pretendía generar oportunidades para comunicar sus ideas. Por ejemplo, al responder con la pregunta "¿Tú qué crees?" a la pregunta de Matías "¿hay que relacionarlo con las derivadas?", trata de que sea el estudiante quien comunique su hipótesis (el máximo se puede hallar a través de las derivadas) en vez de indicar la respuesta. Además, en vez de decirle que es correcto, anticipaba una nueva pregunta "¿Qué es un máximo?", generando una oportunidad para que los estudiantes argumentaran matemáticamente, lo que se manifestaba a través de las explicaciones de otra alumna (Ana) quien razonaba que, en dicho punto, la derivada valía cero, respuesta que la EP aprovechaba para vincular la derivada con la pendiente de la tangente en un punto (conectando con conceptos de la lección).

La EP explicitó que la gestión de las tareas respondía a la estructura "Presentación del problema-Exploración de los alumnos -Discusión en gran grupo". Esta estructura se ejemplificó en la planificación para la tarea 4 ya que el instrumento solicitaba anticipar la gestión para una sola tarea de la planificación. La estructura era coherente con todas tareas descritas y permitía asumir que su gestión generaría oportunidades para comunicar los resultados y argumentar matemáticamente. Esto permitió confirmar que cada tarea formaba un ciclo exploratorio ya que en cada caso se generaban oportunidades de desarrollar prácticas matemáticas específicas que permitían como mínimo establecer conjeturas y comunicarlas matemáticamente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar el aprendizaje de los/las estudiantes para profesor del uso de los principios de la enseñanza exploratoria al planificar lecciones exploratorias. El análisis nos ha permitido identificar como una característica de este proceso de aprendizaje la articulación del plan de la lección en ciclos exploratorios, que evidencian el uso de los principios de la enseñanza exploratoria. Los resultados muestran que 19 de 25 EPs planificaron una lección con al menos un ciclo exploratorio; lo que demuestra que los principios de la enseñanza exploratoria son una herramienta eficaz para aprender a planificar lecciones. Únicamente, ocho EPs usaron los principios de forma sistemática. Estos resultados pueden deberse a que solo sus planificaciones planteaban como objetivos de aprendizaje las prácticas matemáticas específicas, en línea con Moreno et al. (2024). Estos resultados complementan los estudios sobre los aspectos de calidad de los planes de lecciones y apoyan la transición desde enfoques centrados en el profesor a enfoques centrados en la actividad matemática de los estudiantes, y el papel que desempeña el uso de recursos tecnológicos para apoyar dicha transición (Cevikbas et al, 2024). Para futuras investigaciones, consideramos necesario profundizar en el tipo de exploración propuesta por los EPs y determinar así el grado de comprensión de la enseñanza exploratoria. También es necesario investigar posibles conexiones entre el contenido matemático y su potencial para favorecer una enseñanza exploratoria. Una limitación del estudio es que solo se han analizado los planes de lecciones y sería conveniente completar los resultados con el análisis de las implementaciones.

Reconocimiento. Este trabajo forma parte de los proyectos Referencia: PID2020-116514GB-I00, PID2023-149624NB-100 y el contrato predoctoral PRE2021-097154. Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Artigue, M. (2017). ¿Qué es la educación matemática basada en la indagación? *La Gaceta de la RSME, 20*(3), 593-609.

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*(6), 797-81 https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Calleja, J., Foster, C., y Hodgen, J. (2024). Teachers' structuring of mathematical inquiry lessons: shifting from "task-first" to "scaffolded inquiry". *Research in Mathematics Education, 26*(3), 460-493. https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2176915

Cevikbas, M., Koenig, J., y Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(1), 101-113. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2

Henriques, A., y Martins, M. (2022). Mathematical reasoning in linear systems learning: a higher education exploratory teaching experiment with prospective teachers. *AIEM -Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 65-85. https://doi.org/10.35763/aiem21.4238seiem.es

Moreno, M., Llinares, S., y Santonja, P. (2024). Prospective secondary mathematics teachers' use of inquiry-based teaching principles as conceptual tools when modifying mathematical tasks. *Journal on Mathematics Education, 15*(4), 1129-1150. https://doi.org/10.22342/jme.v15i4.pp1129-1150

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., y Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., y Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50-80.https://doi.org/10.1080/1380361960020103

Zazkis, R., y Herbst, P. (2017). *Scripting Approaches in Mathematics Education. Mathematical Dialogues in Research and Practice.* Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62692-5

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN TESIS DE DOCTORADO Y DISERTACIONES DE MAESTRÍA EN BRASIL

Teacher knowledge for teaching statistics in doctoral theses and master's dissertations in Brazil

Silva-Lima, L. R.[a], Matesco-Cristovão, E.[a] y Climent, N.[b]

[a]Universidade Federal de Itajubá, [b]Universidade de Huelva

Resumen

Este estudio cualitativo y bibliográfico tiene como objetivo comprender cómo se ha investigado en Brasil el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la estadística. Consiste en una revisión sistemática de tesis de doctorado y disertaciones de maestría brasileñas. Los resultados muestran que estas investigan la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas de primaria y secundaria, centrándose en la ampliación de sus conocimientos de estadística a través de cursos, talleres y reflexiones prácticas, tratando de integrar los conceptos de enseñanza, el currículo y el uso de las tecnologías. Faltan investigaciones que utilicen modelos específicos de conocimiento matemático y hay una fuerte tendencia a utilizar la base de conocimientos de Shulman y otros autores que discuten el conocimiento profesional de los profesores de modo general, sin un modelo de conocimiento concreto.

Palabras clave: *estadística, formación del profesorado, conocimiento del profesor, estudio bibliográfico.*

Abstract

This study, with a qualitative approach and a bibliographic nature, aims to understand how teachers' knowledge for teaching Statistics has been investigated in Brazil. It consists of a systematic review of Brazilian master's theses and dissertations. The results indicate that this research investigates the training and professional development of Mathematics teachers in primary and secondary education, focusing on expanding their knowledge of Statistics through courses, workshops, and practical reflections, aiming to integrate teaching concepts, curriculum, and the use of technology. The absence of studies using specific models of mathematical knowledge is highlighted, along with a strong tendency to use Shulman's knowledge base and other authors who discuss the professional knowledge of teachers in a general way, without a specific knowledge model.

Keywords: *statistics, teacher education, teachers' knowledge, bibliographic study.*

INTRODUCCIÓN

Los avances tecnológicos y la globalización requieren habilidades estadísticas y probabilísticas para interpretar la información y tomar decisiones informadas (Franklin et al., 2007). En Brasil, el Currículo Nacional Básico Común (Brasil, 2018) hace hincapié en la necesidad de incluir este contenido desde la escuela primaria, reforzando la importancia de la alfabetización estadística (Fernandes, 2017; Gal, 2002). Mientras que a nivel internacional se aboga por que la estadística se enseñe de forma exploratoria, implicando el análisis crítico de datos y la interpretación de la incertidumbre (Garfield y Ben-Zvi, 2008), los profesores siguen priorizando técnicas mecánicas sobre la comprensión (Mendes y Rocha, 2019). En este sentido, Batanero et al. (2011) destacan que la formación docente debe enfatizar la didáctica específica de la enseñanza de la estadística para evitar

Silva-Lima, L. R., Matesco-Cristovão, E. y Climent, N. (2025). Conocimiento del profesor para la enseñanza de la estadística en tesis de doctorado y disertaciones de maestría en Brasil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

vacíos conceptuales. Así, una enseñanza efectiva en la educación básica requiere de una formación docente centrada en el desarrollo del conocimiento docente, ya que este influye directamente en cómo se abordan los conceptos en el aula. En el campo de la formación de profesores de matemáticas, la discusión sobre el conocimiento propuesta por Shulman (1986, 1987) ha llevado al surgimiento de diversos modelos de análisis de ese conocimiento (e.g. Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Godino et al., 2017; Rowland et al., 2005). Investigaciones brasileñas e internacionales han estudiado la formación de profesores para enseñar estadística utilizando estos modelos, señalando tanto lagunas como formas de remediarlas (e.g. Arteaga et al., 2014; Araújo y Carvalho, 2021; Schreiber y Porciúncula, 2021; Franco y Alsina, 2022).

Teniendo en cuenta lo anterior, esta investigación pretende indagar sobre cómo se ha investigado en Brasil el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la Estadística. Para ello, se buscó responder a las siguientes preguntas: (i) ¿Cuál es el objetivo de la investigación? (ii) ¿Quiénes son los participantes? (iii) ¿Qué tipos de instrumentos se utilizaron para recoger datos y/o intervenir en la formación?[i] (iv) ¿Qué lentes teóricas se utilizaron para analizar el conocimiento? (v) ¿Qué conocimientos se presentan y discuten en los análisis? Para darles respuesta, se realizó una revisión sistemática de las tesis de doctorado y disertaciones de maestría brasileñas que componen el corpus de un estudio nacional sobre el Conocimiento Matemático de la Enseñanza (Pereira et al., 2024). El procedimiento de selección de las investigaciones y los resultados alcanzados serán detallados después de la presentación del marco teórico.

MODELOS DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Shulman (1987) propone varios dominios de conocimientos que un profesor requiere para la enseñanza de una materia, de entre los que destacamos el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), ya que se refiere al conocimiento específico sobre su enseñanza. A partir de estas ideas, como señalábamos, algunos autores han trabajado para crear sus propios modelos para profesores de matemáticas. Uno de los modelos más conocidos en el campo de la Educación Matemática fue desarrollado por Ball et al. (2008) y se denomina Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). Según los autores, el MKT propone considerar dos dominios del conocimiento del profesor: Conocimiento del Contenido (CK) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), que a su vez se dividen en dos subdominios cada uno. Los subdominios que componen el CK son: Conocimiento Común del Contenido (CCK) y Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), mientras que el dominio PCK está formado por los subdominios Conocimiento del Contenido y los Alumnos (KCS) y Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT). Además de estos cuatro subdominios, Ball et al. (2008) establecen dos categorías en discusión para su inclusión en el modelo: Horizon Content Knowledge (HCK) y Knowledge of Content and Curriculum (KCC).

Otras investigaciones que han tratado de contribuir a la especificación de los conocimientos que deben tener los profesores para enseñar matemáticas son la propuesta de Rowland y sus colaboradores (2005) sobre el Cuarteto de Conocimientos (KQ), el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) (Godino et al., 2017) y el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018). El KQ considera cuatro categorías del conocimiento del profesor: Fundamentos, Transformación, Conexión y Contingencia. El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) amplía el del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015), basándose en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2009). El CCDM contempla los conocimientos didáctico-matemáticos y las competencias didáctico-matemáticas que el profesor de Matemáticas debe conocer para poder ejercer su práctica docente. Por su parte, el modelo MTSK, considera dos dominios del conocimiento del profesor (Conocimiento Matemático y Conocimiento Pedagógico del Contenido. Además, considera las creencias del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.

El modelo Technological Pedagogical And Content Knowledge (TPACK) considera la intersección de tres tipos de conocimientos para la enseñanza mediada por tecnologías: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento tecnológico (Mishra y Koehler, 2006). Existen otros marcos teóricos que, aunque no se constituyen como modelos específicos de análisis de los conocimientos que requiere o usa el profesorado de matemáticas, pueden contribuir a la investigación de los conocimientos docentes. A continuación, presentamos algunos de estos marcos que ayudarán en la comprensión de los resultados de esta investigación.

El conocimiento profesional docente es concebido por diversos autores como un saber complejo, construido a partir de la articulación de diferentes dimensiones y fuentes. Roldão (2007) lo define como un saber integrador que reúne conocimientos científicos, didácticos y pedagógicos de forma situada y contextualizada. Fiorentini, Nacarato y Pinto (1999) destacan su carácter reflexivo, plural e histórico, compuesto por saberes científicos, de la experiencia y de la tradición pedagógica. Tardif (2002) refuerza la complejidad de este conocimiento, resaltando la necesidad de adaptación a la práctica y la importancia de la formación continua. En esta misma línea, Azcárate (1996) propone dos dimensiones para su construcción: la estructural, que abarca los conocimientos sobre lo que debería suceder, y la dinámica, relacionada con lo que se observa en la práctica, englobando conocimientos procesuales y evolutivos. Con un enfoque distinto, Robert (1998) propone niveles de funcionamiento del conocimiento. Estos niveles representan formas distintas en que el profesorado usa dicho conocimiento, diferenciándose tres niveles: técnico, movilizable y disponible. Según Serrazina (2012), el conocimiento matemático para la enseñanza va más allá del dominio de los contenidos: implica saber cómo enseñarlos de forma comprensible para los alumnos, adaptando definiciones, representaciones, ejemplos y estrategias a las etapas del aprendizaje. También requiere sensibilidad para interpretar respuestas, formular buenas preguntas, evaluar materiales y promover conexiones entre ideas matemáticas, articulando saberes matemáticos, didácticos y curriculares.

Finalmente, desde la perspectiva materialista histórico-dialéctica, el conocimiento es resultado de la actividad humana transformadora y social. No refleja la realidad de forma pasiva, sino que capta sus relaciones dinámicas, considerando la totalidad, la contradicción y el contexto histórico. Como el conocimiento se entiende desde la lógica dialéctica, y no desde la lógica formal, se manifiesta en dos formas interrelacionadas: el conocimiento teórico y el empírico (Davydov, 1982).

METODOLOGÍA

Este estudio se llevó a cabo utilizando un enfoque cualitativo. Así, optamos por un estudio exploratorio, explicativo y bibliográfico (Fiorentini y Lorenzato, 2012). Para alcanzar el objetivo de este estudio, se analizaron, en primer lugar, las tesis y disertaciones brasileñas que componen el corpus del proyecto denominado O conhecimento matemático próprio da docência na pesquisa em Educação Matemática (2024-2026), identificando las relacionadas con la estadística. Estos trabajos fueron analizados en etapas de revisión sistemática inspiradas en el protocolo propuesto por Ramos et al. (2014). La segunda fase consistió en la definición de la pregunta de investigación. En la tercera fase, realizamos una búsqueda entre las 130 tesis y disertaciones relacionados con la estadística, utilizando la palabra clave «conocimiento». Esta búsqueda arrojó 53 documentos, que formaban parte del corpus de esta investigación. A continuación, tras leer los títulos y resúmenes de estos 53 trabajos, seleccionamos 18 que a priori estudiaban el conocimiento del profesorado para la enseñanza de la estadística. En la quinta fase, realizamos una evaluación crítica de los estudios, teniendo en cuenta los aspectos metodológicos. Comprobamos que cinco no presentaban un marco teórico de conocimiento, por lo que fueron excluidos del corpus. Además, uno de los estudios no estaba autorizado para su publicación. Quedaban así 12 estudios por investigar. La siguiente fase consistió en la recopilación de datos, analizando, en cada estudio, el objetivo, los participantes, el tipo de instrumentos o intervención, las referencias teóricas y los resultados. Finalmente, en la última fase, resumimos los datos obtenidos.

RESULTADOS

Presentamos los datos recogidos de las tesis y disertaciones, que pretenden responder a las subpreguntas de investigación enumeradas en la introducción. La tabla 1 muestra estos datos.

Tabla 1

Tesis y disertaciones que estudian el conocimiento de los profesores para enseñar estadística

Autoría	Participantes	Instrumentos	Referencial teórico	Conocimientos
Amaral (2010)	Profesores de Educación Primaria (EP) sin formación específica	Secuencia didáctica	Niveles de Funcionamiento de los Conocimientos	Matemático, técnico, movilizable y disponible
Corrêa (2010)	Profesores de Matemáticas de la EP, Secundaria (ES) y Superior	Entrevistas	Conocimiento Profesional del Profesor	Profesional del Profesor, Específico y Pedagógico del Contenido
Alves (2016)	Profesores de Matemáticas de la EP y ES	Cuestionarios y Encuentros Formativos	MKT y Alfabetización Estadística	KCS, KCT, HCK CCK, SCK, Estadístico y Contextual
Macedo (2016)	Profesores de Matemáticas de la EP y ES	Cuestionarios y Encuentros Formativos	Base de Conocimientos para la Enseñanza de Shulman	Del Currículo, del Contenido y PCK
Sera (2016)	Profesores de Matemáticas de la EP y ES	Cuestionarios y Encuentros Formativos	MKT	KCT, KCC, SCK, CCK
Melo (2019)	Profesores de Matemáticas de la EP	Proceso formativo	TPACK	Tecnológico, Pedagógico y del Contenido
Souza (2019)	Profesores de Matemáticas de la EP y ES	Curso de extensión	Conocimiento Profesional Docente	En Estadística, contexto, intervención, analítico, teórico y metodológico
Araújo (2020)	Profesores de Matemáticas de la ES	Cuestionarios y Encuentros Formativos	CCDM	Del Contenido, Epistémico, Didáctico-Matemático
Oliveira (2020)	Futuros profesores de Matemáticas	Cuestionarios y entrevistas	Base de Conocimientos para la Enseñanza de Shulman	Del Currículo, del Contenido, PCK
Santos (2020)	Profesores de Matemáticas de la EP y ES	Curso de formación	Base de Conocimientos para la Enseñanza de Shulman	Del Contenido y PCK
Brandelero (2021)	Profesora-investigadora	Planificación compartida de planes de enseñanza	Base de Conocimientos para la Enseñanza de Shulman y Matemáticos para la Enseñanza	Para enseñar Estadística y de su perspectiva metodológica
Fabri (2022)	Profesores y futuros profesores de Matemáticas	Taller Pedagógico de Matemáticas	Perspectiva materialista histórico-dialéctica	Estadístico

Fuente: Elaborada por las autoras.

En relación con los objetivos de la investigación, encontramos que, en general, investigan la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en la etapa de educación

primaria (6-15 años) y educación secundaria (15-18), centrándose en la ampliación de sus conocimientos de estadística y probabilidad a través de cursos de formación continua, talleres pedagógicos y reflexiones prácticas, buscando integrar los conceptos de enseñanza, el currículo y el uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje. De los 12 estudios analizados, 10 se referían a profesores que enseñan matemáticas en estas etapas. En cuanto a los instrumentos que se utilizaron para recoger datos y/o intervenir en la formación, se destacan los cuestionarios (Alves, 2016; Araújo, 2020; Macedo, 2016; Oliveira, 2020; Sera, 2016) y las reuniones de formación (Alves, 2016; Araújo, 2020; Macedo, 2016; Sera, 2016). Es importante destacar que los cuestionarios no se utilizaron exclusivamente para investigar los conocimientos de los profesores, sino que a menudo se acompañaron de reuniones de formación o entrevistas. Varios estudios (Alves, 2016; Araújo, 2020; Macedo, 2016 y Sera, 2016), comenzaron aplicando cuestionarios para identificar el perfil de los profesores y sus conocimientos previos sobre contenidos estadísticos. Mientras, las reuniones de formación se llevaron a cabo con el objetivo de discutir los significados, relaciones y propiedades de los contenidos estadísticos, así como para promover la formación continua de los profesores. En estas reuniones se utilizaron actividades prácticas, a menudo basadas en los principios de la Ingeniería Didáctica, para fomentar el debate y profundizar en la comprensión de los contenidos, con el objetivo de (re)construir el conocimiento estadístico de los profesores.

Los conocimientos más discutidos son los del contenido (Alves, 2016; Amaral, 2010; Araújo, 2020; Corrêa, 2010; Fabri, 2022; Macedo, 2016; Melo, 2019; Oliveira, 2020; Santos, 2020; Sera, 2016; Souza, 2019), el PCK (Corrêa, 2010; Macedo, 2016; Melo, 2019; Oliveira, 2020; Santos, 2020; Sera, 2016) y el curricular (Macedo, 2016; Oliveira, 2020; Sera, 2016). La presencia del PCK destaca la importancia de estrategias pedagógicas que consideren cómo presentar el contenido matemático a los alumnos, lo que incluye el uso de métodos variados, recursos didácticos y enfoques que reconozcan las dificultades y características de los alumnos. Los estudios apuntan a la necesidad de que los profesores desarrollen no sólo el conocimiento de los contenidos, sino también las competencias necesarias para enseñarlos. Además, la presencia de conocimientos sobre el currículo pone de relieve que los profesores deben ser conscientes de lo que se espera en términos de aprendizaje, lo que contribuye a la selección de los contenidos que deben cubrirse y a la adaptación de las prácticas docentes a los requisitos del currículo.

La revisión sistemática también permitió identificar los marcos teóricos utilizados para investigar el conocimiento del profesor. En este sentido, el enfoque teórico más recurrente, utilizado en cuatro estudios, fue la base de conocimientos para la Enseñanza de Shulman (1986, 1987), lo que demuestra que muchos estudios sobre el conocimiento de los profesores para la enseñanza de la estadística siguen basándose en uno de los pioneros de este estudio. Un trabajo utiliza un modelo genérico que puede utilizarse en todas las áreas (TPACK). Cabe destacar que no se encontraron tesis o disertaciones que utilizaran los modelos MTSK y KQ, y que cuatro trabajos recurren a diferentes autores que discuten el conocimiento, pero sin asociarlo a un modelo (Amaral, 2010; Corrêa, 2010; Souza 2019; Fabri, 2022). Esto puede estar relacionado con la diferencia entre la naturaleza del pensamiento matemático (determinista) y estadístico (aleatorio) (Pamplona, 2012), que puede influir en la preferencia por la Base de Shulman y otros autores, en lugar de modelos para investigar el conocimiento matemático.

En cuanto a los conocimientos presentados y discutidos, la mayoría de los estudios discutieron aquellos relacionados con las medidas de tendencia central (Alves; 2016; Amaral; 2010; Araújo, 2020). Además, los conocimientos sobre la curva normal y la interrelación entre estadística y probabilidad fueron temas frecuentes en las investigaciones (Araújo, 2020; Macedo, 2016). Algunos estudios, como los de Araújo (2020), Brandalero (2021) y Macedo (2016) mostraron que los profesores se enfrentan a dificultades en la aplicación práctica de conceptos estadísticos, como las medidas de dispersión y el uso de la curva normal, lo que revela que existen lagunas sustanciales tanto en el conocimiento teórico como en la aplicación práctica de estos conceptos. Por último,

también se destacó la necesidad de una mayor formación, ya que los profesores reconocieron que la participación en reuniones de formación y grupos de estudio ayudó a superar inseguridades y mejorar sus prácticas (Alves, 2016; Amaral, 2010; Macedo, 2016; Santos, 2020).

CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

La revisión sistemática permitió comprender cómo se ha estudiado este conocimiento en Brasil. Se observó un predominio de investigaciones centradas en profesores de matemáticas en ejercicio, a diferencia de los resultados encontrados por Franco y Alsina (2022), quienes, al analizar investigaciones españolas sobre profesores de enseñanza primaria, destacaron un predominio de investigaciones centradas en futuros profesores. En cuanto al uso de modelos, señalan que el predominio es en CCDM y MKT. Entre las similitudes, los autores también destacaron la no utilización del modelo MTSK y el uso predominante de cuestionarios.

La diversidad de enfoques y la falta de uso de modelos específicos de matemáticas indican que no existe consenso entre los investigadores de la enseñanza de la estadística sobre el uso de modelos. Teniendo en cuenta las diferencias entre la naturaleza del razonamiento determinista, predominante en matemáticas, y el razonamiento aleatorio, predominante en el ámbito de la estadística, podría ser interesante adaptar un modelo más específico para investigar el conocimiento estadístico.

Como limitación de la investigación, se destaca el alcance restringido al corpus del proyecto (2024-2026). Para trabajos futuros, se sugiere ampliar las fuentes, incluyendo estudios externos al proyecto. Aun así, este estudio presenta importantes implicaciones, especialmente al evidenciar la relevancia del conocimiento curricular en los resultados. Esto refuerza la necesidad de que los docentes comprendan las expectativas de aprendizaje para seleccionar contenidos y secuencias didácticas que aseguren la progresión conceptual en Estadística. Además, la investigación reveló el potencial de los encuentros formativos como espacios para la movilización de conocimientos docentes.

AGRADECIMIENTOS

A los miembros del proyecto (2024-2026) y a la Capes, por la bolsa de mestrado.

Referencias

Alves, T. A. dos S. (2016). *Conhecimentos de professores de Matemática da Educação Básica sobre o ensino de medidas de tendência central* [Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo]. Repositório Cogna. https://repositorio.pgsscogna.com.br/bitstream/123456789/21824/1/TIAGO%20ALVES.pdf

Amaral, F. M. do. (2010). *Validação de sequência didática para (re) construção de conhecimentos estatísticos por professores do ensino fundamental* [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Repositório PUCSP. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11443

Araújo, A. F. Q. (2020). *A inter-relação entre a estatística e a probabilidade: Um estudo com professores de matemática do ensino médio sobre a curva normal* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco]. Repositório UFPE. https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/38020

Araújo, A. F. Q., y Carvalho, J. I. F. D. (2021). Conhecimentos didático-matemáticos de licenciandos e professores de matemática para abordagem da curva normal. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *23*(4), 273–302. https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p273-302

Arteaga Cezón, P., Contreras García, J. M., y Cañadas De La Fuente, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: Un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 63–84. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.97

Azcárate, P. G. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Comares.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (Orgs.), (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (Vol. 14). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0

Brandelero, D. S. (2021). *Aprendizagem profissional de uma professora na realização de práticas de ensino exploratório de Estatística* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Paraná].

Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base nacional comum curricular*. MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Corrêa, M. C. (2010). *O Conhecimento Profissional e a Abordagem do Ensino da Probabilidade: Um Estudo de Caso* [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Repositório PUCSP. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11459

Davydov, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza*. Pueblo y Educación.

Fabri, G. J. C. (2022). *Nexos conceituais da Estatística manifestados por professores em formação na Oficina Pedagógica de Matemática* [Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná]. Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/29436/1/estatisticaoficinapedagogicamatematica.pdf

Fernandes, A. (2017). Letramento estatístico e seu impacto no ensino básico. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, *12*(3), 45–60.

Fiorentini, D. y Lorenzato, S. (2012). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos* (3ª ed.). Autores Associados.

Fiorentini, D., Nacarato, A. M., y Pinto, A. R. (1999). Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. *Quadrante*, *1–2*(8), 33–60.

Franco, J., y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, *51*(1), 7–16. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.7-16

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K-12 Curriculum Framework.* American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1–25.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice.* Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. BOLEMA: *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Macedo, R. C. (2016). *Conhecimentos de professores de Matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas – curva normal* [Dissertação de mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo]. Repositório Cogna. https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/21816

Melo, E. M. (2019). *A integração do smartphone em sequência de ensino de estatística para o desenvolvimento do Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e do Conteúdo* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte]. Repositório Institucional UFRN. https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/28590

Mendes, L., y Rocha, E. (2019). Dificuldades no ensino da Probabilidade: uma análise das práticas docentes. *Educação e Matemática em Debate*, *14*(2), 75–90.

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054. Disponible en: https://www.tcrecord.org

Oliveira, T. C. (2020). *Contribuições das disciplinas de estatística na formação do futuro professor de matemática para a educação básica* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Santa Cruz].

Pamplona, A. S. (2012). A formação estatística e pedagógica do professor de matemática. *Zetetike*, *20*(1), 85–99. https://doi.org/10.20396/zet.v20i37.8646637

Pereira, P. S., Rodrigues, V. C. da S., y Zaidan, S. (2024). Mathematics knowledge specific to teaching as a possibility to advance in mathematics teachers' education. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *14*(2), 1–14. https://doi.org/10.37001/ripem.v14i2.3833

Prado Junior, C. (1973). Teoria marxista do conhecimento e método dialético materialista. *Discurso, 4*, 41-78. https://doi.org/10.11606/issn.2318-8863.discurso.1973.37760

Ramos, A., Faria, PM y Faria, Á. (2014). Revisão sistemática de literatura: contribuição para a inovação na investigação em ciências da educação. Revista Di*álogo Educacional*, *14*(41), 17. https://doi.org/10.7213/dialogo.educ.14.041.ds01

Robert, A. (1998). *Ferramentas de análise de conteúdos matemáticos à ensinar no liceu e na universidade. France*, *18*(2), 139–190.

Roldão, M. D. (2007). Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. *Revista Brasileira de Educação*, *2*(34), 94–103.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005) 'Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi'. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281.

Santos, L. R. O. (2020). *Formação reflexiva do professor de matemática: Uma proposta de desenvolvimento do pensamento estatístico* [Tese de doutorado, Universidade Federal do Piauí].

Sera, E. K. (2016). *Conhecimentos de professores para o ensino da leitura e construção de gráficos estatísticos na educação básica* [Dissertação de mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo]. Repositório Cogna. https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/21796?mode=full

Serrazina, M. L. M. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Eletrônica de Educação*, *6*(1), 266–283.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(4), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of a new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1–22.

Souza, J. R. de. (2019). *O conhecimento profissional sobre educação estatística que são revelados em narrativas de professores de matemática* [Dissertação de mestrado, Universidade Cruzeiro do Sul].

Schreiber, K. P., y Porciúncula, M. (2021). Conhecimentos docentes para ensinar estatística: Olhar do professor sobre os estudantes e as estratégias pedagógicas. *Zetetike*, *29*(00), e021003. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661814

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Vozes.

[i] No separamos los instrumentos de recogida y de intervención porque a veces sus funciones se solapan.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS REALIZADAS POR MAESTROS EN FORMACIÓN AL REFORMULAR PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Graphic representations created by pre-service teachers when reformulating geometric problems

Sosa-Martín, D., García-Alonso, I. y Bruno, A.

Universidad de La Laguna

Resumen

Este trabajo se centra en el análisis de las representaciones gráficas realizadas por futuros docentes de Educación Primaria en dos tareas, una sin tecnología y otra con apoyo tecnológico, en las que se les proponía, en primer lugar, resolver un problema sobre áreas y, posteriormente, plantear dos reformulaciones de dicho problema. Se analizaron las representaciones gráficas de los 287 problemas reformulados por los 73 participantes atendiendo al rol que tienen en el enunciado, su relación con las representaciones gráficas del problema inicial y el rigor con que se incluyen longitudes en ellas. Los resultados indican que el uso de la tecnología fomenta la inclusión de representaciones gráficas en la reformulación, que contienen información necesaria para la resolución del problema, así como la creación de nuevas representaciones compuestas diferentes a las dadas. Además, en caso de incluir longitudes en las representaciones gráficas, se observa un mayor rigor al indicarlas con la utilización de la tecnología.

Palabras clave: *representación gráfica, formulación de problemas, reformular problemas, futuros docentes de Educación Primaria.*

Abstract

This study focuses on the analysis of the graphical representations considered by pre-service primary school teachers in two tasks, one without technology and the other with technological support, in which they were asked, first, to solve a given problem and, subsequently, to carry out two reformulations of that problem. The graphical representations of the 287 problems reformulated by the 73 participants were analyzed, considering the role they play in the statement, their relationship with the graphical representations of the initial problem, and the rigor with which lengths are included in them. The results indicate that the use of technology encourages the inclusion of graphical representations in the reformulation, which also contains information necessary for solving the problem, as well as the creation of new composite representations different from those given. Furthermore, if lengths are included in the graphical representations, greater rigor is observed when indicating them with the use of technology.

Keywords: *graphic representation, problem posing, problem reformulation, pre-service primary school teachers.*

INTRODUCCIÓN

En la educación matemática, la formulación de problemas (FP) o *problem posing* hace referencia a varios tipos de actividades en las que profesores y/o estudiantes crean y expresan (o modifican) un problema o tarea basándose en una información particular (Cai y Hwang, 2020). En los últimos años, la formulación de problemas como tópico de estudio ha suscitado el interés de numerosos investigadores. Este hecho, ha propiciado el desarrollo de trabajos que exploran, entre otros aspectos,

Sosa-Martín, D., García-Alonso, I., Bruno, A. (2025). Representaciones gráficas realizadas por maestros en formación al reformular problemas geométricos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

su naturaleza, su papel en la enseñanza de matemáticas o las variables de las tareas (Cai et al., 2022; Cai y Hwang, 2020; Singer et al., 2015).

En la literatura, pueden encontrase varias clasificaciones de las tareas de FP. Baumanns y Rott (2021) distinguen entre tareas no estructuradas (se basan en la creación de un problema a partir de una información inicial, pero sin apoyarse en uno dado) y estructuradas (basadas en la creación de un problema a partir de otro ya mostrado). Por su parte, Cai et al. (2022) proponen un formato de tarea con dos partes: la situación (información inicial) y el requerimiento o *prompt* (tipo de formulación solicitada). Por tanto, consideramos la reformulación de un problema dado como una tarea estructurada, cuya situación será el problema y el requerimiento lo que se deba realizar con él.

Los estudios relacionados con la FP, tanto con alumnado de primaria y secundaria como con docentes en formación y en activo (Cai y Hwang, 2020; Ellerton, 1986), han mostrado que formular problemas es un proceso que permite, no solo de aprender matemáticas, sino también evaluar la comprensión de los conceptos matemáticos adquiridos. En particular, Savin y Orbay (2024) observaron una escasa competencia en FP para problemas de medida por futuros maestros. Y, en el contexto de la FP de medida de áreas, Vargas et al. (2023) identificaron tareas geométricas con bajo nivel cognitivo, centradas en cálculos aritméticos en lugar de procesos geométricos clave. Estas características identificadas junto a la escasez de estudios relacionados con áreas y su medida desde el enfoque de la FP, justifica el desarrollo del presente trabajo.

El currículo español de matemáticas (Real decreto, 157/2022) pone de relieve la importancia de la FP y de las representaciones matemáticas a través de dos competencias específicas en la educación primaria: CE1 y CE6. Además, señala que una "buena representación o visualización del problema ayuda a su interpretación, así como a la identificación de los datos y las relaciones más relevantes" (p. 94). En geometría, las representaciones gráficas creadas por los estudiantes apoyan la comprensión de conceptos, el razonamiento espacial y la resolución de problemas (Crespo y Kyriakides, 2007). Así, por ejemplo, las tareas de replicar formas y completar imágenes de estructuración espacial son un medio habitual para evaluar la comprensión geométrica (Mulligan y Mitchelmore, 2009). De este modo, se pone de manifiesto que las representaciones de los objetos geométricos 2D y 3D son fundamentales en el aprendizaje de la geometría, por lo que los futuros docentes de primaria deberían utilizarlas de forma rigurosa. Por otro lado, el uso de herramientas tecnológicas digitales puede motivar y apoyar las actividades de FP (Abramovich y Cho, 2015).

En este contexto, el objetivo de este trabajo es analizar las representaciones gráficas (figuras geométricas) propuestas por futuros docentes de primaria, al reformular problemas de geometría vinculados al concepto de área. Previamente, resolvieron un problema basado en la representación gráfica de dos figuras planas, haciendo uso de tecnología y sin ella.

De manera más detallada, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuál es el rol que tienen las representaciones gráficas en el enunciado del problema reformulado? ¿Y qué papel juega la tecnología?
2. ¿Cómo influyen las representaciones gráficas de un problema resuelto previamente en la reformulación del mismo respecto a la creación de nuevas representaciones hechas con y sin tecnología?
3. ¿Cómo se reflejan los datos asociados a la medida en los problemas o en las representaciones gráficas de nueva creación respecto a su rigor, con y sin tecnología?

MARCO CONCEPTUAL

La actividad matemática necesita disponer de diferentes sistemas de representación semiótica que puedan utilizarse libremente en función de la tarea que se vaya a realizar, o según la pregunta que se formule (Duval, 1999). La enseñanza de la geometría está relacionada directamente con la

representación de objetos a los que alude, tales como figuras y cuerpos. Por ello, indica Duval (2006) que en geometría es necesario combinar el uso de al menos dos sistemas de representación semióticos, uno para la expresión verbal de las propiedades o para la expresión numérica de la magnitud y el otro de tipo figurativo o gráfico para la visualización. Las figuras son importantes porque a través de ellas se observan conexiones y relaciones que serían difíciles de realizar a través de otras representaciones semióticas como el discurso verbal o simbólico. No es posible enseñar geometría sin utilizar representaciones figurativas o gráficas. Este trabajo analiza la construcción de representaciones gráficas realizada por futuros docentes cuando reformulan problemas, estudiando su rigor y precisión con tecnología (Abramovich y Cho, 2015).

El uso de representaciones gráficas realizadas en papel o con medios tecnológicos constituyen una herramienta cognitiva clave en el aprendizaje de la geometría (Csíkos et al., 2012; Ott, 2020). Investigaciones recientes señalan que la combinación de herramientas tecnológicas para la representación gráfica fomenta el proceso de visualización y el razonamiento espacial y geométrico, fundamental en la resolución de este tipo de problemas matemáticos (Žakelj y Klančar, 2022). Ott (2017, 2020) analiza las representaciones gráficas o dibujos generados por estudiantes de primaria al resolver problemas distinguiendo en sus resultados entre:

- No hay gráficas: sólo consta de cálculos o texto escrito.
- Externa al texto: no hay ningún vínculo de la representación con el texto en cuanto al contenido.
- Ilustrativa: existe un vínculo de la representación con el texto, pero no se representan objetos estructuralmente relevantes desde la matemática.
- Relacionada con el objeto: existe un vínculo con el texto y se representan objetos estructuralmente relevantes aunque las relaciones entre ellos no son identificables.
- Diagrama implícito: existen elementos gráficos con un enlace al texto, se representan objetos estructuralmente relevantes y las relaciones entre ellos se pueden identificar, pero no se enfatizan explícitamente (por lo tanto, es necesario deducirlas).
- Diagrama explícito: si posee elementos gráficos con un vínculo al texto, se representan objetos estructuralmente relevantes y las relaciones entre ellos se pueden identificar y se destacan explícitamente.

Cuando los estudiantes generan una representación gráfica para resolver un problema, deben comprender qué objetos intervienen en la tarea y cómo se relacionan entre sí. Una representación gráfica es útil si refleja correctamente la estructura del problema matemático y los datos numéricos o relaciones relevantes (Larkin y Simon, 1987). Estos mismos principios pueden aplicarse al utilizar representaciones gráficas en el proceso de formular o reformular problemas y, en especial, cuando se plantean problemas cuyo enunciado incorpora información con una representación gráfica. En el caso que nos ocupa esta representación gráfica son figuras geométricas planas irregulares.

METODOLOGÍA

Participantes e instrumento

Se ha realizado un estudio con una muestra formada por 73 estudiantes de tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria en la Universidad de La Laguna (España), elegidos mediante muestreo aleatorio simple entre los 199 estudiantes matriculados en la asignatura de Didáctica de la Medida y de la Geometría (DMG). Estos estudiantes, con formación disciplinar y didáctica en matemáticas, pero sin instrucción previa en FP, respondieron dos cuestionarios elaborados al efecto, uno con lápiz y papel (ST) y otro con apoyo digital (CT). Cada cuestionario incluyó tres actividades: dos no estructuradas (con un número y un contexto) y una estructurada (FP basada en un problema

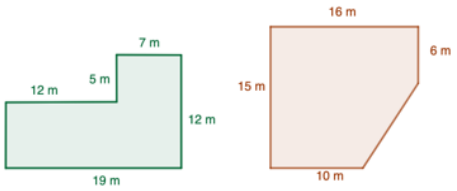
dado con representaciones gráficas). En el CT tenían la oportunidad de utilizar un Geoplano online (Geoboard) como soporte para resolver o elaborar los nuevos problemas, herramienta con la que habían trabajado la medición de áreas de figuras planas compuestas en la asignatura DMG. La Figura 1 muestra la actividad 3 realizada, sobre la que realizaremos el estudio.

Figura 1

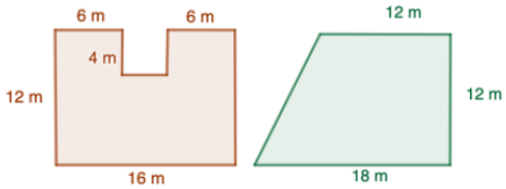
Actividad 3 propuesta a los estudiantes, sin tecnología (izda.) y con tecnología (dcha.).

Requerimiento: Resolver el siguiente problema y, a partir de él, formula dos nuevos problemas.

Las siguientes imágenes son fotografías aéreas de las huertas de Tino y María. Sabemos que la superficie de la huerta de María es mayor que la de Tino. ¿Cuál es la huerta de cada uno?



Las siguientes imágenes son fotografías aéreas de dos aparcamientos, A y B. Sabemos que la superficie del aparcamiento A es mayor que la del B. ¿Qué imagen corresponde a cada aparcamiento?



Proceso de análisis

Los 73 participantes seleccionados realizaron 131 resoluciones de los problemas propuestos (69 ST y 62 CT) y reformularon 287 problemas. En la Tabla 1 se muestra su desempeño en la actividad 3.

Tabla 1

Número de resoluciones y reformulaciones realizadas en la actividad 3.

Actividad	Resolución			Reformulación		Total
	C*	NC*	NR*	1 Prob*	2 Prob*	
Sin Tecnología (ST)	30	39	4	1	72	145
Con Tecnología (CT)	34	28	11	4	69	142

*C=Correcto, NC=No correcto, NR=No resuelto; 1 Prob= reformula 1 problema, 2 Prob= reformula 2 problemas

Se ha seguido una metodología mixta, descriptiva y exploratoria (McMillan y Schumacher, 2005), basada en un análisis del contenido de tipo convencional (Hsieh y Shannon, 2005). Se desarrolló un análisis interpretativo de las representaciones presentes en los problemas reformulados, que constituyen las unidades de análisis del estudio. Cada problema se codificó con un proceso múltiple ciego con tres codificadores atendiendo a tres aspectos de la representación gráfica: Rol de la representación, Relación y complejidad (figura simple/básica o compuesta) de la representación en comparación con la dada en el problema inicial, y Coherencia de las longitudes dadas en la representación. Las discrepancias se resolvieron por triangulación entre los investigadores. Para el primer aspecto se siguen las categorías adaptadas de la reformulación de Ott (2017) (Tabla 2).

Tabla 2

Categorías del rol de la representación. Fuente: adaptación de Ott (2017).

Ilustrativa o solución		La representación es prescindible o es solución
Imprescindible	Implícita	Representación imprescindible con información deducible
	Explicita	Representación imprescindible con toda la información
Sin representación		No contiene representación

Para los otros dos aspectos las categorías de codificación fueron definidas directamente a partir de los datos, ya que no se encontraron categorías en la literatura analizada. Este enfoque permite obtener información directa sin imponer categorías preconcebidas o perspectivas teóricas (Hsieh y Shannon, 2005). Las categorías resultantes se centraron, por un lado, en la relación de la representación con la imagen de la actividad 3 (Figura 1), y en la complejidad de las nuevas representaciones

proporcionadas. Y, por otro, en observar la corrección y el rigor de las cantidades numéricas de las longitudes respecto a las representaciones, atendiendo a si son deducibles, erróneas matemáticamente o no proporcionales. Los problemas siguen un código XXXA/B-ST/CT, indicando el primer (A) o segundo (B) problema reformulado y si fue ST o CT.

RESULTADOS

A. Rol de la representación en el problema reformulado

En el análisis del rol de la representación en el problema (Tabla 3) destaca que, la mayoría de los problemas reformulados ST no posee representaciones gráficas (51.7%) mientras que, en los problemas reformulados CT predominan las representaciones con información necesaria e implícita (54.9%). Esto último indica que las representaciones realizadas no explicitan toda la información, sino que se debe deducir a partir de sus relaciones geométricas. También se observa que muy pocas representaciones gráficas son ilustrativas o forman parte de la resolución del problema.

Tabla 3

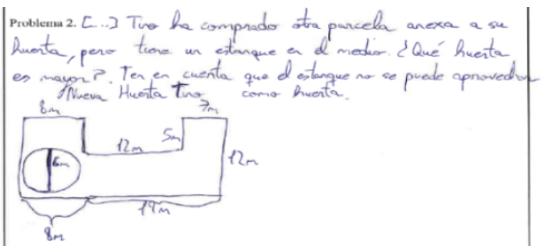
Número (%) de problemas por categorías de representación gráfica.

Rol de la representación		ST	CT
Ilustrativa o solución		4 (2.8)	2 (1.4)
Imprescindible	Implícita	47 (32.4)	78 (54.9)
	Explícita	19 (13.1)	20 (14.1)
Sin representación		75 (51.7)	42 (29.6)
Total		145	142

A modo de ejemplo de representación gráfica explícita, la reformulación 197B-ST (Figura 2) contiene toda la información necesaria para el cálculo del área.

Figura 2

Ejemplo de representación gráfica imprescindible y explícita. Fuente: problema 197B-ST.



[…] Tino ha comprado otra parcela nueva a su huerta, pero tiene un estanque en el medio. ¿Qué huerta es mayor? Ten en cuenta que el estanque no se puede aprovechar como huerta.

Figura 3

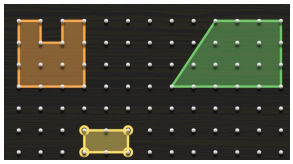
Ejemplo de representación imprescindible implícita. Fuente: problema 12A-CT.

Calcular el área de las siguientes figuras:

Figura 4

Ejemplo de representación imprescindible explícita. Fuente: problema 12B-CT.

Calcula el área de las siguientes figuras, incluido el rectángulo, tomando como unidad de medida el rectángulo amarillo.



En cambio, en las reformulaciones del mismo estudiante, 12A-CT y 12B-CT (Figuras 3 y 4, respectivamente), se observa que la primera no indica las unidades y las sobreentiende dadas por el propio geoplano, por lo que se considera implícita. Mientras que la segunda sí señala cuál será la unidad de área, y está dentro de la categoría explícita.

B. Influencia de las representaciones gráficas dadas

En cuanto al tipo de representación gráfica utilizada (Tabla 4) en relación con la dada (Figura 1), se observa que la mayoría de los problemas ST no añaden una nueva representación (59.4%) y, de estos, prefieren referenciar de manera verbal las del problema resuelto. En cambio, en los problemas reformulados CT, la mayoría añaden una nueva representación (51.1%) y, además, lo hacen principalmente con una figura compuesta, sin relación con la del problema inicial (25.4%).

Tabla 4

Número (%) de problemas por categorías de representación gráfica.

Tipos de representación		ST	CT
Sin representación		13 (9.0)	13 (9.2)
Utiliza la representación propuesta	con referencia verbal en el enunciado	62 (42.8)	29 (20.4)
	replicándola	11 (7.6)	28 (19.7)
Utiliza una representación nueva con un/una	triángulo, rectángulo o cuadrado	12 (8.3)	14 (9.9)
	figura compuesta, inspiradas en la propuesta	18 (12.4)	22 (15.5)
	figura compuesta, sin relación con la propuesta	29 (20.0)	36 (25.4)
Total		145	142

Como ejemplo podemos ver el problema 197B-ST (Figura 2) cuya representación es compuesta y sin relación con la propuesta. En cambio, los problemas 12A-CT y 12B-CT (Figuras 3 y 4, respectivamente) son ejemplos que utilizan la representación propuesta, replicándola.

C. Coherencia entre la representación gráfica con las longitudes asignadas

Finalmente, seleccionamos los 104 problemas reformulados (55 ST y 49 CT) cuyas representaciones gráficas poseen medidas de longitud en sus lados. Se observa que (Tabla 5) cerca de un 60% de los problemas CT poseen una información correcta, pero en los problemas ST es solo un 34.5%. Además, en los problemas ST las longitudes con errores y no proporcionales son muy frecuentes (58.2%), mientras que en los problemas CT son solo el 32.7%.

Tabla 5

Número (porcentaje) de problemas según la coherencia de la representación con las longitudes asignadas.

Categorías de coherencia	ST	CT
Longitudes correctas	19 (34.5)	29 (59.2)
Longitudes no deducibles	4 (7.3)	4 (8.2)
Longitudes erróneas	11 (20.0)	2 (4.1)
Longitudes no proporcionales	21 (38.2)	14 (28.6)
Total	55	49

Figura 5

Ejemplo de representación con longitudes no proporcionales. Fuente: problema 231B-ST.

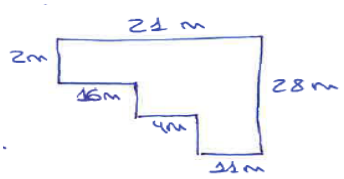
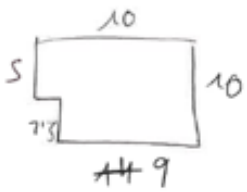


Figura 6

Ejemplo de representación con longitudes erróneas. Fuente: problema 76A-ST.



El problema 231B-ST (Figura 5) es un ejemplo de representación gráfica con longitudes no proporcionales, pues las longitudes 2, 16, 4, 11 se representan de forma similar. El problema 76A-ST

(Figura 6) es un ejemplo de una representación con medidas imposibles, dado que el lado derecho mide 10 unidades y en el derecho habría un total de 7.5 unidades (5+2.5 unidades).

CONCLUSIONES

En este estudio se han analizado las representaciones gráficas en la reformulación de problemas de áreas llevada a cabo por 73 docentes en formación de Educación Primaria, y en concreto, la influencia de la representación gráfica del problema resuelto previamente y de la tecnología.

Se ha podido observar que en la actividad CT los futuros docentes incluyen una representación gráfica en mayor proporción que ST. De hecho, en más de la mitad de los problemas ST, los futuros docentes no incluyen una representación gráfica, mientras que en CT predominan las representaciones gráficas necesarias con información implícita (Larking y Simon, 1987). Según Žakelj y Klančar (2022), el uso de tecnología en el aprendizaje de la geometría fomenta la comprensión de los conceptos matemáticos, la exploración de relaciones así como las representaciones gráficas precisas. Por otra parte, queda abierto investigar si en los problemas con información implícita, los futuros docentes han sido conscientes de ello, analizando la posibilidad de resolución con los datos aportados.

En cuanto a la relación entre la representación gráfica del problema inicial con el reformulado, se ha observado que la herramienta tecnológica ha favorecido que los problemas reformulados cuenten con nuevas representaciones, principalmente compuestas y diferentes a las del problema dado (Abramovich y Cho, 2015). Por su parte, la reformulación ST suele referenciar o copiar la imagen facilitada en el problema resuelto, aunque, cuando agregan una representación gráfica nueva, esta también suele ser compuesta y diferente a la proporcionada.

Finalmente, un tercer hallazgo se relaciona con el uso de las longitudes de medida en las representaciones utilizadas. En este caso, también se observan diferencias entre las representaciones en problemas CT, que la mayoría incorpora estas unidades de forma correcta, mientras que los problemas ST suelen presentar representaciones no proporcionadas, poniendo de relieve poco rigor en ellas cuando agrega la información numérica necesaria para resolver el problema. Este resultado concuerda con lo señalado por Žakelj y Klančar (2022) quienes abogan por el uso de tecnologías y recursos digitales por su precisión en las representaciones gráficas.

La presente investigación revela la importancia de dedicar más atención al estudio de la representación de figuras geométricas y la relación con sus longitudes en la formación docente, de forma que se combinen correctamente estos dos sistemas de representación (Duval, 2006). Si bien, el tamaño de la muestra puede constituir una limitación, los hallazgos iniciales subrayan la necesidad de profundizar en estos conocimientos para mejorar la formación de los futuros docentes. Quedará para futuros estudios cómo integrar de manera efectiva estos hallazgos en los programas de formación inicial de docentes.

Agradecimiento

Trabajo financiado por PID2022-139007NB-I00, MCIN/AEI.

Referencias

Abramovich, S. y Cho, E. K. (2015). Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. En F.M. Singer, N.F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing, Research in Mathematics Education* (pp. 71-102). Springer. http://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_4

Baumanns, L. y Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Leaning*, *13*(2), 59–76. https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 119-145.

Crespo, S. M. y Kyriakides, A. O. (2007). To draw or not to draw: Exploring children's drawings for solving mathematics problems. *Teaching Children Mathematics*, *14*(2), 118-125. https://doi.org/10.5951/TCM.14.2.0118

Csíkos, C., Szitányi, J. y Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 47–65. http://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–26). Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Duval, R. (2006). A Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. http://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems—A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 261–271. https://doi.org/10.1007/BF00305073

Hsieh, H. F. y Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, *15* (9), 1277-1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

Larkin, J. H. y Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, *11*, 65–99. https://doi.org/10.1111/j.1551-6708.1987.tb00863.x

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa.* Prentice-Hall.

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Ott, B. (2017). Children's drawings for word problems-design of a theory and an analysis tool. *Proceedings of the CERME 10*. Dublin. hal-01950540

Ott, B. (2020). Learner-generated graphic representations for word problems: an intervention and evaluation study in grade 3. *Educational Studies in Mathematics*, *105*, 91–113. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09978-9

Real decreto, 157/2022, 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, de 02 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157/con

Savin, V. y Orbay, K. (2024). Examining the Problem-Posing Skills of Prospective Classroom Teachers. *Participatory Educational Research* (PER), *11*(5), 1-23. http://dx.doi.org/10.17275/per.24.61.11.5

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice*. Springer.

Vargas, J. P., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2023). Diseño de tareas geométricas en la formación de futuros profesores de primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 531–538). SEIEM.

Žakelj, A. y Klančar, A. (2022). The role of visual representations in geometry learning. *European Journal of Educational Research*, *11*(3), 1393-1411. https://doi.org/10.12973/eu-jer.11.3.1393

SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD A TRAVÉS DEL JUEGO: LA MIRADA DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO/A

Meanings of probability through play: A perspective from prospective teachers

Suárez-González, C.[a], de la Fuente, A.[b], Aguilar-González, Á.[a] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

Este estudio analiza a 54 futuros maestros de primaria (EPM) cuando identifican, definen y ejemplifican los diferentes significados de la probabilidad que aparecen durante una experiencia de juego de mesa. Los resultados muestran que, aunque el juego aborda los significados clásico e intuitivo, la mayoría también indicó los significados subjetivo y frecuencial. Aunque la mayoría de las definiciones dadas fueron correctas, tuvieron dificultades para proporcionar ejemplos concretos de los significados subjetivo y frecuencial. Esto resalta la necesidad de mejorar la formación inicial de los y las EPM tanto en conocimientos conceptuales como didácticos sobre significados de probabilidad.

Palabras clave: formación inicial, juego, significados de probabilidad.

Abstract

This study analyses 54 prospective primary school teachers (PT) as they identify, define, and exemplify the different meanings of probability that emerge during a board game experience. The results show that, although the game addresses the classical and intuitive meanings, most participants also indicated the subjective and frequentist meanings. While most definitions provided were correct, they struggled to give concrete examples of the subjective and frequentist meanings. This highlights the need to improve the initial training of PT in both conceptual and didactic knowledge of probability meanings.

Keywords: *initial training, meanings of probability, play.*

INTRODUCCIÓN

En la era de la información, la alfabetización probabilística se ha convertido en una necesidad para tomar decisiones fundamentadas en datos. Dado que el azar, la aleatoriedad y la probabilidad son fenómenos ligados a contextos cotidianos, su adecuada enseñanza y comprensión es esencial para afrontar problemas con suficientes herramientas y visión crítica, así como desenvolverse en el mundo real (Gal, 2005). Reconocida esta importancia, la enseñanza de la probabilidad se ha ido introduciendo progresivamente en los currículos de las primeras etapas educativas (Alsina y Vásquez, 2016), apareciendo como contenido curricular en Primaria en el 2006, con la Ley Orgánica de Educación (LOE). Actualmente, con la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE) se incluye en los saberes básicos la probabilidad como medida subjetiva de incertidumbre.

A pesar de la relevancia de la probabilidad, sigue representando un desafío para los y las estudiantes para maestro/a en Educación Primaria (EPM), que presentan dificultades con el razonamiento combinatorio que obstaculizan su trabajo con el significado clásico y la movilización tanto de su conocimiento disciplinar como pedagógico (p. ej., Alonso-Castaño et al., 2021). Batanero y Álvarez-Arroyo (2024) señalan que los EPM incurren en sesgos de representatividad, como la insensibilidad al tamaño muestral, y dificultades para percibir la independencia de sucesos. Esto podría generar ciertos desafíos en su enseñanza, como puede ser la elección y el manejo de distintas representaciones

Suárez-González, C., de la Fuente, A., Aguilar-González, Á. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2025). Los significados de la probabilidad a través del juego: Una mirada desde los estudiantes para maestro. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

de ideas matemáticas (Contreras et al., 2011). Para superar estos obstáculos, es fundamental fortalecer la formación inicial del profesorado tanto en aspectos conceptuales como didácticos (Alsina et al., 2020; Franco y Alsina, 2022), ya que la escasa preparación docente repercute negativamente en el alumnado.

En este contexto, presentamos una experiencia centrada en el uso de un juego de mesa diseñado específicamente para trabajar con la probabilidad, en el que los futuros docentes deben identificar los distintos significados de la probabilidad que intervienen. Comprender estos significados es fundamental para que puedan anticipar y abordar los obstáculos y dificultades del alumnado (Vásquez et al., 2020), por lo que la presente investigación pretende contribuir aportando evidencias sobre el desempeño de los y las EPM en una tarea que requiere conocer tanto las bases teóricas sobre los significados de probabilidad como su aplicación práctica en un contexto determinado. Este conocimiento contribuirá a que puedan seleccionar, diseñar y evaluar las actividades más adecuadas para su futura docencia (Alsina et al., 2020).

Nos planteamos los siguientes objetivos: (1) determinar qué significados de probabilidad son identificados por los y las EPM a partir del uso del juego de mesa, y (2) identificar si los y las EPM definen y ejemplifican correctamente los significados que han identificado en el contexto de juego.

MARCO TEÓRICO

Significados de probabilidad y dificultades de los EPM

Batanero et al. (2005) definieron cinco significados de la probabilidad. Dado que este estudio se ha realizado con EPM y el significado axiomático no es aplicable a la etapa de Educación Primaria, a continuación, se describen los cuatro significados de probabilidad que estos EPM deben manejar.

El significado intuitivo surge de manera espontánea, tiene un carácter cualitativo (Fischbein, 1975) y emplea términos como “seguro” o “probable”. Este significado está muy presente en los primeros cursos de primaria, donde aparecen intuiciones vinculadas al azar (Vásquez y Alsina, 2019). El significado frecuencial se basa en la Ley de los Grandes Números, que establece que la probabilidad de un suceso se aproxima a la frecuencia relativa obtenida al repetir muchas veces un experimento en condiciones similares (Alsina y Vásquez, 2016). Gómez et al. (2014) evidencian que los y las EPM presentan intuiciones iniciales pobres sobre experimentos aleatorios, y sesgos como la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad y la imposibilidad de la predicción. En los últimos cursos de primaria comienza a consolidarse el significado clásico (Vásquez y Alsina, 2019), fundamentado en la regla de Laplace, que define la probabilidad como la razón entre el número de casos favorables y posibles. Este significado está estrechamente relacionado con el razonamiento proporcional (Hernández-Solís y Batanero, 2023). Estudios han constatado la dificultad de EPM para calcular probabilidades compuestas de sucesos dependientes (p. ej., Castillo-Mora et al., 2021).

El significado subjetivo se fundamenta en las creencias, experiencias y conocimientos previos del individuo para estimar la posibilidad de que ocurra un suceso (de Finetti, 1974). A medida que se obtiene nueva información sobre el experimento, esta puede incorporarse para modificar la probabilidad previamente asignada. Este significado es el más presente en la vida cotidiana, y enfatiza la naturaleza de las justificaciones utilizadas para respaldar la estimación dada. Sin embargo, tiene poca presencia en la enseñanza escolar (Rodríguez-Muñiz et al., 2022, 2023).

Relación del juego con el desarrollo de la probabilidad

Desde sus inicios, la probabilidad ha estado vinculada a los juegos de azar. Batanero et al. (2005) describen la relación entre los significados clásico e intuitivo y el juego, remontándose a la correspondencia entre Pascal y Fermat en el siglo XVII. El contexto de los juegos de azar sirvió de base también para los trabajos posteriores de De Moivre y Laplace. Esta relación adquiere más relevancia si se considera que el juego es una actividad presente en la vida de los niños y las niñas

desde una edad temprana, mientras que su enseñanza en la escuela no recibe la misma atención (Malaspina y Malaspina, 2020). Para fomentar una alfabetización probabilística en la etapa escolar, es esencial adoptar enfoques que transciendan lo meramente algorítmico y promuevan ambientes de aprendizaje significativos (Rodríguez-Alveal et al., 2022). En este sentido, los juegos de azar desempeñan un papel clave en la enseñanza de la probabilidad, ya que permiten que el alumnado comprenda la aleatoriedad y realice estimaciones probabilísticas incluso antes de recibir instrucción formal (Batanero et al., 2015). A través de la interacción con los juegos, el alumnado puede desarrollar estrategias, recibir retroalimentación y reformular sus errores, convirtiendo el aprendizaje en un proceso activo y significativo (de la Fuente y Garrido-Martos, 2023).

Además, Rodríguez-Alveal et al. (2022) destacan la importancia de investigar las competencias que adquieren los y las EPM cuando trabajan con la probabilidad en situaciones contextualizadas. Este hecho refuerza el valor del juego no solo como estrategia de aprendizaje, sino también como una herramienta para evaluar el conocimiento matemático y didáctico del profesorado. Malaspina y Malaspina (2020) subrayan que la invención y la modificación de juegos constituyen estrategias eficaces para explorar el azar en contextos reales, fomentando el debate, la experimentación y la construcción colectiva de argumentos. En esta línea, Rodríguez-Alveal y Koparan (2023) analizaron la interacción y argumentación de EPM al responder preguntas sobre juegos aleatorios, evidenciando una escasa interacción oral que limitaba el aprendizaje colaborativo y la argumentación probabilística. Finalmente, Dayal y Sharma (2020) encontraron que, en experiencias de juegos equitativos con simulaciones con dados, los y las EPM lograban acercarse a una explicación completa, aunque aún requerían mayor precisión y detalle en sus justificaciones.

MÉTODO

Este trabajo se enmarca en una investigación de tipo estudio de caso, con carácter exploratorio y descriptivo (Cohen et al., 2017).

Participantes y contexto

Los participantes de este estudio son 54 EPM de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo, seleccionados por criterio de accesibilidad. Esta es la tercera y última asignatura en el grado relacionada con las matemáticas y su didáctica y en ella se tratan contenidos de estadística, probabilidad y resolución de problemas. Este estudio se realizó después de haber impartido los dos primeros bloques. Los y las EPM dieron su consentimiento para la recogida y uso de los datos, que fueron tratados de forma anónima.

Los y las EPM participaron en el aula en una sesión de *¡Alerta Zorro!*, un juego de mesa cooperativo cuyo objetivo consiste en llenar cuatro cestas con moras negras y rojas. El desarrollo del juego se ve condicionado por la aparición de un zorro. Cuando el zorro entra en acción, el grupo decide de qué cesta va a coger una mora el zorro. Cabe destacar que el zorro es ciego: si coge una mora negra, el juego continúa porque son las que le gustan. En cambio, si saca una mora roja, la partida acaba inmediatamente. Se puede consultar más información sobre el juego en este vídeo.

El juego de mesa se ha diseñado a partir de investigaciones previas sobre la toma de decisiones en contextos de urnas (Hernández-Solís y Batanero, 2023). Su mecánica busca acercar al jugador a la noción de probabilidad desde los significados intuitivo y clásico, dada su evidente relación con el pensamiento proporcional. Por otro lado, incorpora elementos como dados, cartas y ruletas, recursos frecuentemente utilizados en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. No obstante, en este caso, dichos elementos no tienen como objetivo contribuir a la construcción conceptual de la probabilidad desde otros enfoques, sino que operan como factores de azar que introducen sorpresa en el desarrollo del juego.

Instrumento y procedimiento de análisis

Tras haber jugado un par de partidas durante una sesión de la asignatura para familiarizarse con la dinámica, los y las EPM realizaron individualmente una tarea evaluable que entregaron a través del Campus Virtual y que sirvió como instrumento de recogida de información de este estudio. La tarea consistía en la identificación de los significados de probabilidad y los experimentos que aparecían en el juego, así como en analizar los sesgos en el razonamiento probabilístico del alumnado de primaria al jugar una partida de *¡Alerta Zorro!* En este estudio, nos centramos en la primera parte de la tarea, planteada a los y las EPM en los términos siguientes: *Identifica los significados de la probabilidad que aparecen durante la experiencia de juego de ¡Alerta Zorro! y pon ejemplos concretos.*

El análisis se llevó a cabo en dos fases, para dar respuesta a los dos objetivos propuestos. En primer lugar, se analizaron los significados que los y las EPM identificaron en la experiencia de juego. En este caso, aparecen los significados clásico e intuitivo, pero dado que el juego incorpora elementos como dados, cartas y ruletas, recursos frecuentemente utilizados en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, era previsible que pudieran identificar erróneamente otros significados.

Por otro lado, para cada uno de los significados indicados por los y las EPM (adecuados o no) se analizaron las definiciones que ofrecieron, considerándolas correctas si coincidían con los significados descritos por Batanero et al. (2005). Aunque definir no era un requisito explícito de la tarea, se decidió incluir este análisis debido al elevado número de estudiantes que incorporaron definiciones en su tarea. En todos los casos, se evaluó también la adecuación de los ejemplos proporcionados, verificando si, con los elementos del juego, ilustraban correctamente el significado al que hacían referencia a pesar de que no apareciese explícitamente en la partida.

RESULTADOS

Se analizaron las respuestas de los y las 54 EPM participantes. En cada respuesta se identificaron entre uno y cinco significados, por lo que se registraron 166 significados (Tabla 1). Algunos EPM no incluyeron ni definición ni ejemplo en sus respuestas, por lo que en la Tabla 1 se registran como NA. El significado más habitual fue el clásico, identificado correctamente por 49 EPM (90,7 %). El intuitivo fue identificado correctamente por 25 EPM (46,3 %). Hay que señalar que un número considerable de EPM también identificó otros significados que no estaban presentes en el juego: el significado subjetivo fue identificado por 45 EPM (83,3 %) y el frecuencial por 36 (66,7 %). Además, 11 EPM identificaron la probabilidad condicionada como un significado de probabilidad, a pesar de que esta no se trata propiamente de un significado.

Tabla 1

Frecuencia de definiciones y ejemplos para cada significado identificados por el alumnado

		Definición			Ejemplo		
	N	*Correcta*	*Incorrecta*	*NA*	*Adecuado*	*Inadecuado*	*NA*
Clásico	49	42	1	6	48	1	0
Intuitivo	25	18	2	5	18	7	0
Subjetivo	45	35	7	3	0	44	1
Frecuencial	36	18	17	1	10	25	1
Condicionada	11	8	0	3	4	7	0
Total	166	121	27	18	80	84	2

En cuanto a las definiciones aportadas, el 81,7 % de ellas fueron correctas. El significado clásico es el que cuenta con mayor proporción de definiciones correctas, con un 85,7 % de los y las EPM. En cuanto al significado intuitivo, solo 18 definiciones fueron correctas. Los siguientes extractos muestran algunas definiciones correctas para cada uno de los significados:

EPM1 [Definición de sig. clásico] se basa en el cálculo teórico de eventos equiprobables (es decir, de eventos igualmente probables). Es el único caso en el que se puede hablar de probabilidad propiamente dicha y se calcula como la proporción entre los casos/sucesos favorables y los casos posibles (que son finitos ambos).

EPM2 [Definición de sig. intuitivo] expresa mi creencia de que ocurra un suceso, la confianza de que ocurra. Se reconoce porque se utiliza el lenguaje como imposible, probable… términos que se marcan en todo el lenguaje y que pueden ser cotidianos y polisémicos.

EPM3 [Definición de sig. subjetivo] entrando en juego la probabilidad como grado de creencia ya que asignamos el grado de probabilidad en función de la información y creencias que tengamos sobre el suceso.

EPM4 [Definición de sig. frecuencial] la estabilidad de la frecuencia relativa en largas series de ensayos, junto con el hecho de que haya fenómenos para los cuales los sucesos elementales no son equiprobables, hace que pueda estimarse el valor aproximado de la probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa obtenida en un número elevado de pruebas.

En cuanto a los ejemplos aportados, se observa que solo el 48,2 % fueron adecuados, lo que contrasta con el alto porcentaje de definiciones correctas. El significado con más ejemplos adecuados es el clásico, con un solo ejemplo inadecuado. Respecto al significado intuitivo, el 72 % de los ejemplos descritos fueron adecuados. A continuación, se muestran ejemplos adecuados aportados para estos dos significados, clásico e intuitivo:

EPM5 [Ejemplo adecuado de sig. clásico] al lanzar un dado para recolectar moras, cada resultado tiene una probabilidad igual de ocurrir (1/6 para cada número en un dado estándar).

EPM6 [Ejemplo adecuado de sig. intuitivo] el momento en el que el zorro coge una mora de la caja, ya que esto depende de la cantidad que haya de cada color. Podríamos decir que la probabilidad de coger una mora roja es muy alta (si hay muchas más rojas que negras) o que es casi imposible (si hay muy pocas de este color.)

Sin embargo, se destaca que ninguno de los 45 EPM que identificaron el significado subjetivo aportó un ejemplo adecuado. Por último, solo el 27,8 % de los ejemplos proporcionados por los y las EPM que identificaron el significado frecuencial fueron adecuados. A continuación, se presentan varios ejemplos inadecuados de los significados subjetivo y frecuencial.

EPM7 [Ejemplo inadecuado de sig. subjetivo] esto puede observarse de nuevo a la hora de ofrecer una caja al zorro, cada jugador puede tener una creencia diferente sobre de qué caja es más probable que el zorro extraiga una mora negra.

EPM8 [Ejemplo inadecuado de sig. subjetivo] va a salir otra vez en la ruleta la caja blanca, porque siempre cae en esa zona.

EPM9 [Ejemplo inadecuado de sig. subjetivo] si se juegan varias rondas y el mismo jugador sacó dos veces la carta de zorro, es posible que un alumno piense “cuando vuelva a sacar una carta, saldrá otra vez la carta de Alerta Zorro”.

EPM10 [Ejemplo inadecuado de sig. frecuencial] se podría determinar empíricamente la posibilidad de ganar al final al medir cuántas veces se logra ganar y cuántas veces se pierde.

En el caso de EPM9, su ejemplo es inadecuado ya que en realidad está haciendo referencia a un sesgo, en concreto, a la falacia del jugador. Por otro lado, EPM10 comete el error de utilizar el significado frecuencial para estimar una probabilidad de ganar o perder cuando el experimento no se puede repetir bajo las mismas condiciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se resalta la necesidad de que los y las EPM sean capaces de manejar un conocimiento tanto teórico como didáctico respecto a la probabilidad (Franco y Alsina, 2022). En relación con el objetivo (1), un elevado porcentaje de EPM identificó correctamente el significado clásico, siendo

menor el porcentaje que identificó el intuitivo. Dado el peso del significado clásico respecto a los demás a partir de los últimos cursos de Educación Primaria (Vásquez y Alsina, 2019), los y las EPM no han tenido dificultad al identificarlo. Un porcentaje significativo de EPM identificó también otros significados que no están presentes en el juego. Creemos que puede ser un indicio de una cláusula percibida por los y las EPM en el contrato didáctico de la asignatura (Brousseau, 1986): los y las EPM parecen intentar demostrar todo su conocimiento, incorporando todos los significados estudiados en clase y asumiendo que, cuanto más mencionen, más se reforzará su respuesta. Para comprender la elección de los significados propuestos por los y las EPM, se analizaron también los ejemplos que ofrecieron, llegando a la conclusión de que el uso de cartas y dados a lo largo del juego llevó a algunos estudiantes a vincular el juego con situaciones similares trabajadas previamente en clase con estos materiales. Esta asociación, sin embargo, provocó que identificaran erróneamente dichos elementos como representativos del significado frecuencial, sin considerar que su función en el juego era meramente introducir el azar.

En relación con el objetivo (2), la consigna de la tarea no pedía explícitamente que se definiese el significado. No obstante, la mayoría de los EPM (89,2 %) sintió la necesidad de definirlos para justificar el ejemplo aportado. Aunque el hecho de que los y las EPM no hayan incluido la definición, no significa que no dispongan de ella, ya que no se solicitaba explícitamente en la tarea. Los resultados muestran que para el 72,9 % de los y las EPM no supuso una dificultad definir los significados correctamente. Este dato refleja que manifiestan un buen conocimiento de las definiciones de los significados de probabilidad. No obstante, como señalan Dayal y Sharma (2020), aún es necesario reforzar este aspecto en la formación inicial de los y las EPM, ya que las definiciones ofrecidas, aunque son válidas, requieren mayor precisión y detalle en el lenguaje matemático. Cabe destacar que el significado menos identificado por los EPM fue el intuitivo, a pesar de que sí aparece en el juego. Esto indica la necesidad de reforzar la formación inicial en cuanto a este significado para que los y las EPM puedan abordarlo de manera correcta, ya que según (Vásquez y Alsina, 2019) este significado es, con diferencia, el más trabajado en los primeros cursos de Educación Primaria.

La facilidad que han tenido los y las EPM para definir los significados contrasta con las dificultades que han experimentado al plantear ejemplos en el contexto de juego, relacionados con el proceso de enseñanza. Estos resultados indican que es necesario fomentar situaciones de selección y manejo de representaciones de ideas matemáticas en la formación inicial (Contreras et al., 2011) lo que es clave para poder reconocer las barreras y desafíos que enfrenta el alumnado (Vásquez et al., 2020). La dificultad de proporcionar ejemplos para los significados subjetivo y frecuencial fue uno de los mayores retos para los EPM, en línea con lo señalado por Huerta (2020), quien advierte de los riesgos de limitar la experimentación o la simulación con materiales como dados, urnas, bolas o monedas debe abordarse con cuidado.

Los resultados muestran que ninguno de los y las EPM que identificó el significado subjetivo aportó un ejemplo adecuado. Además, en algunas respuestas se identificaron tomas de decisiones y estrategias interpretadas como ejemplos de probabilidad subjetiva. En otros casos (EPM8 y EPM9), se observa que los EPM incurren en sesgos de razonamiento, como la falsa propiedad compensatoria, asignándoles un significado subjetivo. Este hallazgo coincide con lo señalado por Batanero y Álvarez-Arroyo (2024), quienes destacan la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico de EPM. Dada la reciente incorporación al currículo del significado subjetivo, y en línea con lo señalado por Castilla-Mora et al. (2021), creemos que es fundamental que la formación inicial de maestros y maestras aborde este significado para reducir las dificultades que presentan los y las EPM al trabajar con él.

Por otro lado, algunos ejemplos inadecuados del significado frecuencial incluyen experimentos irrepetibles bajo las mismas condiciones (como EPM10). Además, ciertos ejemplos parecen alinearse más con el significado subjetivo, ya que permiten ajustar la estimación de probabilidad y toma de

decisión a partir de nueva información. Este hallazgo coincide con Batanero y Álvarez-Arroyo (2024), quienes encuentran que los y las EPM tienen dificultades con conceptos como muestreo, aleatoriedad y representatividad.

Finalmente, se considera que el diseño del juego facilita la exploración de la probabilidad en un contexto real sin necesidad de aritmetizar el contenido (de la Fuente y Garrido-Martos, 2023; Rodríguez-Alveal et al., 2022). Para que estas experiencias lleguen de manera efectiva a las aulas, es crucial que estos cambios se integren desde la formación inicial (Rodríguez-Alveal y Koparan, 2023), abordando tanto los aspectos conceptuales como didácticos (p. ej. Alsina et al., 2020). En concordancia con Malaspina y Malaspina (2020), este tipo de experiencias debe de considerarse también una herramienta para evaluar el conocimiento matemático y didáctico del profesorado, ya que su objetivo final es promover la reflexión de los docentes sobre estas tareas y su integración en la práctica educativa.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes a través de la Ayuda para la Formación de Profesorado Universitario (FPU) con número FPU23/03267. También ha sido financiada por el proyecto GRUPIN-IDE/2024/000713 de la Agencia de Ciencia, Competitividad e Innovación Empresarial Asturiana SEKUENS. Carmela Suárez-González, Álvaro Aguilar-González y Luis J. Rodríguez-Muñiz pertenecen a la Red MTSK (https://redmtsk.net/).

Referencias

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics, 9*(24), 3300. https://doi.org/10.3390/math9243300A

Alsina, Á., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Vásquez, C. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épilson, 104*, 99-128.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 48*, 41-58.

Batanero, C., y Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education, 56*(1), 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Práxis educativa, 10*(1), 11-34. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

Batanero, C., y Hernández-Solís, L. A. (2023). Un estudio comparado del razonamiento proporcional de estudiantado costarricense y español en tareas de comparación de razones. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Castilla-Mora, L., Rifo, L., y Climent, N. (2021). Conocimiento de futuros profesores sobre incertidumbre. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 189 – 196). SEIEM.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2017). *Research Methods in Education* (8.ª ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., y Fernandes, J. A. (2011). Prospective teachers' common and specialized knowledge in a probability task. *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7).*

Dayal, H. C., y Sharma, S. (2020). Investigating Probability Concepts of Secondary Pre-service Teachers in a Game Context. *Australian Journal of Teacher Education, 45*(5). https://doi.org/10.14221/ajte.2020v45n5.6

De la Fuente, A., y Garrido-Martos, R. (2023). Aprendizaje basado en juegos. En L. Cañadas y N. Hidalgo (Eds.), *Materiales docentes para el empleo de metodologías y procesos de evaluación formativa en la formación inicial de profesorado* (pp. 101-118). Dykinson. https://doi.org/10.14679/2310

De Finetti, B. (1974). *Theory of probability. A critical introductory treatment.* John Wiley.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* D. Reidel Publishing Company.

Franco, J., y Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta, 51*(1), 7-16. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema, 28*(48), 209-229. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Hernández-Solís, L. A., y Batanero, C. (2023). Un estudio comparado del razonamiento proporcional de estudiantado costarricense y español en tareas de comparación de razones. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Huerta, M. P. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 23*(1), 7-28. https://doi.org/10.12802/relime.20.2313

Malaspina, M., y Malaspina, U. (2020). Game invention as means to stimulate probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 19*(1), 57–72. https://doi.org/10.52041/serj.v19i1.119

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., y Aguerrea, M. (2022). Alfabetización y pensamiento probabilístico en docentes de matemática, en formación inicial y en activo. *Uniciencia, 36*(1), 347-368. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.22

Rodríguez-Alveal, F., y Koparan, T. (2023). Pensamiento probabilístico en profesores en formación matemática: Un acercamiento desde juegos aleatorios. *Revista Fuentes, 25*(3), 293–304. https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2023.22921

Rodríguez-Muñiz, L. J., Rodríguez-Suárez, L., y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Subjective probability in use: reasoning about a chess game. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Suárez, C., y Muñiz-Rodríguez, L. (2023). Two situations to deal with the subjective meaning of probability in the elementary school: students' productions and teachers' knowledge. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13).*

Vásquez, C., y Alsina, Á. (2019). Observing Mathematics Teaching Practices to Promote Professional Development: An Analysis of Approaches to Probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 719-733. https://doi.org/10.29333/iejme/5866

Vásquez, C., Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para la Educación Secundaria. *Números, 104*, 239-260.

FORMULACIÓN DE RELACIONES DE RECURRENCIA UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE PATRONES

Formulation of recurrence relations used by engineering students for pattern identification

Trigueros-Rodríguez, E[a]. Montejo-Gámez, J[b].

[a]Universidad Nacional de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Esta investigación explora las características de las estrategias que surgen para expresar relaciones de recurrencia generales. Para ello, se propuso a 49 estudiantes de ingeniería de sistemas la tarea de identificar un patrón de orden cuadrático. El análisis de sus producciones escritas reveló el predominio de estrategias basadas en la obtención y análisis, en ocasiones reiterado, de las diferencias entre los términos de la secuencia numérica asociada al patrón. Estas también fueron las estrategias más frecuentes entre las que identificaron correctamente la relación recursiva dentro del patrón. Se constató también que estas estrategias de éxito son las que se fundamentan en múltiples representaciones (principalmente numéricas y pictóricas). El interés de la actividad de generalización recursiva en la formación de ingenieros y la necesidad de reforzar el lenguaje algebraico en el contexto del estudio son implicaciones de interés derivadas del estudio.

Palabras clave: *recursividad, pensamiento algebraico, generalización, formación de ingenieros.*

Abstract

This research explores the characteristics of the strategies that emerge to express general recurrence relations. For this purpose, 49 systems engineering students were given the task of identifying a quadratic order pattern. The analysis of their written productions revealed the predominance of strategies based on obtaining and analyzing, sometimes repeatedly, the differences between the terms of the numerical sequence associated with the pattern. These were also the most frequent strategies among those who correctly identified the recursive relations within the pattern. It was also found that these successful strategies are those based on multiple representations (mainly numerical and pictorial). The interest of the recursive generalization activity in engineering education and the need to reinforce the algebraic language in the context of the study are implications of interest derived from the study.

Keywords: *recursion, algebraic thinking, generalization, engineering education.*

INTRODUCCIÓN, MARCO TEÓRICO Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de la recursividad se presenta como una actividad fundamental en computación, pues permite resolver problemas dividiéndolos en versiones más simples de sí mismos (Johnsonbaugh, 2005). Uno de los primeros algoritmos desarrollados y que se abordan en los cursos iniciales de ingeniería en sistemas es el algoritmo de Euclides que, a pesar de que fue diseñado alrededor de 300 años a.C., se fundamenta en un proceso recursivo. Además, según Vílchez (2015), la recursividad se utiliza en muchas áreas relacionadas como son el diseño de algoritmos, la teoría de grafos y árboles, la creación de bases de datos y la teoría de autómatas, entre otros. La enseñanza de estrategias de detección y formulación de procesos recursivos es, por tanto, de interés en la formación de ingenieros.

La recursividad se concibe tomando como base un objeto que es definido a partir del mismo objeto (Rosen, 2019). Las sucesiones numéricas son ejemplo de objetos que se pueden definir de forma

Trigueros-Rodríguez, E. y Montejo-Gámez, J. (2025). Formulación de relaciones de recurrencia utilizadas por estudiantes de ingeniería para la identificación de patrones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

recursiva, en los casos en los que la obtención de alguno de sus términos implica recurrir a uno o varios términos anteriores (Murillo-Tsijli, 2018). En estos casos, las definiciones autorreferentes pueden expresarse utilizando relaciones de recurrencia (RR). Johnsonbaugh (2005) define una RR para una sucesión como una fórmula que relaciona un término *a(n)* con ciertos predecesores desde el *a(0)* hasta *a(n-1)*. En estos casos, las condiciones iniciales de la sucesión (sus primeros términos) son un número finito de términos que se dan en forma explícita. Las RR se pueden clasificar según este número finito *k,* al que se denomina *orden* de la relación recursiva. La literatura también hace una distinción entre aquellas recursiones que mantienen una relación lineal y homogénea o no. Una RR lineal es homogénea si se puede escribir de la forma $c0 \cdot a(n)+c1 \cdot a(n-1)+\ldots+cn \cdot a(0)=0$, mientras que la relación será no homogénea si escribe de la forma $c0 \cdot a(n)+c1 \cdot a(n-1)+\ldots+cn \cdot a(0)=f(n)$, donde los valores *ci* corresponden a constantes y *f(n)* a una función no trivial (Murillo-Tsijli, 2018; Vílchez, 2015). Como se puede observar, la expresión de las RR está relacionada con representaciones propias del álgebra escolar. Así, una sucesión se puede expresar en forma de secuencia numérica/tabla, mediante la RR que la define o a través de la fórmula explícita, representaciones que son relevantes para su aplicación conveniente en ingeniería.

La naturaleza de las habilidades involucradas en la detección y formulación de las RR puede enfocarse desde diversos puntos de vista teóricos. En ese sentido, se puede considerar que estas actividades contribuyen al desarrollo del pensamiento computacional. Aunque aún no hay consenso sobre una definición de pensamiento computacional, Wing (2006) indica que este involucra acciones como la resolución de problemas y el diseño de sistemas. Por su parte, Santaengracia et al. (2024) destacan que el pensamiento computacional engloba destrezas de pensamiento algorítmico, descomposición, abstracción, evaluación y generalización. Palop et al. (2025), a su vez, establecen que el pensamiento computacional se compone de tres pilares: problemas, datos y algoritmos que son mediados por la abstracción y reconocimiento de patrones. Por otra parte, la recursividad también está relacionada con la generalización de patrones y la comparación de estructuras desconocidas con otras familiares para el estudiante, que son aspectos propios del pensamiento estructural (Harel y Soto, 2017).

En esta investigación, sin embargo, se toma el pensamiento algebraico (p.e., Blanton et al., 2018; Burgos et al., 2024; Kaput, 2008) como marco de referencia para investigar situaciones recursivas, principalmente por dos razones. La primera es que las RR se pueden expresar utilizando representaciones simbólicas usuales en álgebra, como se señaló previamente. La segunda razón es la conexión existente entre la identificación de las RR y la generalización, que es un proceso fundamental en el aprendizaje del álgebra (Radford, 2006; Stener, 2023). Existe, de hecho, literatura de investigación sobre pensamiento algebraico que documenta el uso de las RR en tareas de identificación de patrones. Se presentan a continuación algunos para motivar el presente estudio.

Recursividad en el marco del pensamiento algebraico

Si bien la mayoría de investigaciones sobre pensamiento algebraico están planteadas para alumnado o profesorado de primaria o secundaria (Narvaez et al, 2025; Sibgatullin et al., 2022), los fundamentos del pensamiento algebraico se plantean de forma general y son aplicables a cualquier nivel educativo. Según Kaput (2008), el pensamiento algebraico se caracteriza principalmente a través de la generalización y cómo ésta se hace evidente por medio de representaciones formalizadas, así como del razonamiento y la manipulación de expresiones simbólicas. Para Radford (2006) la generalización de un modelo algebraico se basa en la capacidad de captar las regularidades observadas en los elementos de una secuencia.

La investigación educativa sobre pensamiento algebraico apoya la idea de que los patrones constituyen un elemento pertinente para el desarrollo de la capacidad de generalización (Kaput, 2008; Kieran, 2022). Algunos estudios abordan lo que llamaremos estrategias *recursivas* en tareas de patrones, es decir, aquellas en las que los estudiantes encuentran términos “cercanos” a partir de uno

o varios elementos anteriores del patrón. En estos trabajos, se suele observar que las estrategias recursivas representan niveles bajos de generalización (Pinto y Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017; Sterner, 2024), debido a que los patrones objeto de estudio suelen ser sencillos (funciones afines) y las fórmulas explícitas son accesibles a los participantes, por lo que son estas fórmulas las que constituyen el objeto de la generalización. En la formación de ingenieros, sin embargo, el tipo de patrones objeto de estudio presenta mayor complejidad, por lo que se pretende que los estudiantes puedan encontrar cualquier término en función de elementos anteriores y esto los lleve a encontrar una estructura recursiva general que pueda o no ser expresada por una fórmula explícita. Por ejemplo, en la sucesión de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), la relación de recurrencia F(n)=F(n-1)+F(n-2) es una generalización de la sucesión de carácter más intuitivo que la correspondiente fórmula explícita. Este estudio parte del interés de explorar patrones en los que se da esta situación.

Pregunta de investigación y objetivos específicos

Se han recogido investigaciones que documentan el empleo de estrategias recursivas en la identificación de patrones. Muchos de ellos prestan mayoritariamente atención a patrones numéricos cuya fórmula explícita es afín (de tipo $f(n)= An + B$), por lo que las estrategias recursivas suelen implicar un nivel de generalización bajo. Sin embargo, en la formación de ingenieros aparecen patrones en los que la identificación de las RR generales (análogas a la relación de Fibonacci F(n) expresada previamente) es fundamental para entender el patrón analizado. Esto motiva la pregunta de investigación de este estudio: *¿Cómo abordan los estudiantes de ingeniería la identificación de relaciones de recurrencia en una tarea de patrones y cómo se caracterizan las estrategias exitosas?*

Para responder a esta pregunta de investigación se proponen dos objetivos específicos:

O1. Clasificar las estrategias que sigue el estudiantado universitario de segundo nivel de ingeniería en sistemas para identificar relaciones de recurrencia generales en un patrón cuadrático.

O2. Identificar las características de las estrategias que permiten identificar la recurrencia general.

MÉTODO

El presente estudio es parte de una investigación más amplia enfocada a evaluar las estrategias que emplean los estudiantes de ingeniería para expresar RR generales en función del tipo de patrón y la representación en la que este se muestra al estudiantado.

Tipo de estudio y participantes

En este caso, para responder a la pregunta de investigación planteada se desarrolló un estudio exploratorio y descriptivo basado en datos cualitativos. Los participantes fueron un conjunto de 49 estudiantes de segundo nivel de ingeniería en sistemas de una universidad costarricense, y que han recibido formación específica sobre recursividad en el marco de la asignatura “Estructuras Discretas para Informática”, que estaban cursando en el momento de la recogida de datos. Concretamente, estos participantes habían trabajado las representaciones simbólicas de secuencia numérica, sucesiones escritas a partir de la notación de suma/serie, fórmula explícita y fórmula recursiva. Abordaron estrategias específicas de cambio entre representaciones, como utilizar las propiedades de la notación de suma, analizar posibles relaciones recursivas que se encuentran en patrones a partir de diferencias o productos, encontrar una fórmula explícita a partir de una RR lineal homogénea de orden 2 o mayor (Vilchez, 2015), y aplicaciones de estos contenidos en un lenguaje de programación como Python.

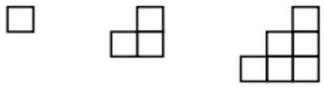
Recogida y análisis de datos

La Figura 1 muestra la tarea propuesta a los estudiantes, que consiste en identificar el número de palillos necesarios para construir la n-ésima figura de una secuencia mostrada de forma pictórica.

Figura 1

Tarea analizada en el estudio

Considere la siguiente figura:



Si las figuras se forman con palillos. ¿Cuántos palillos tiene la figura n?

Esta secuencia ilustra que la *n*-ésima figura se obtiene añadiendo *n* cuadrados a la figura anterior, dando lugar a una relación recursiva no homogénea de orden 1 que se puede expresar usando la fórmula $a(n) = a(n-1) + 2(n+1)$, siendo $a(n)$ la cantidad de palillos necesaria para construir la n-ésima figura, y donde $a(1) = 4$. Esta relación se puede expresar de forma explícita contabilizando los palillos externos y añadiendo los palillos "interiores", cuya cantidad coincide con la suma 1+...+n-1. La identificación de la fórmula explícita para esta suma no resulta evidente para el estudiantado del estudio, por lo que la obtención de la fórmula explícita $a(n) = n^2+3n$ se considera una tarea desafiante. El método para llegar a esta fórmula a partir de la RR no se había trabajado antes de la recogida de datos, lo que apoya la pertinencia de la tarea para explorar el empleo de estrategias recursivas.

Los participantes del estudio abordaron la tarea individualmente durante 30 minutos sin indicaciones adicionales ni posibilidad de interacciones entre compañeros, lo que dio lugar a 49 producciones escritas. El análisis de estos datos se organizó en torno a la identificación de cuatro unidades de análisis: (i) las categorías de representaciones en las que los estudiantes expresaron sus ideas (pictórica, verbal, numérica, tabla, fórmula recursiva y fórmula explícita), (ii) las estrategias utilizadas para abordar los problemas, de carácter emergente, y (iii) las RR identificadas y (iv) los errores y dificultades encontrados, también de carácter emergente. De esta manera, en una primera fase del análisis los investigadores recopilaron la información relacionada con las cuatro unidades a lo largo de todas las producciones recogidas. A continuación, para alcanzar el objetivo O1, se etiquetaron como estrategias no recursivas aquellas en las que no se encontró evidencia de cálculo de un término a partir de los anteriores. Entre las demás, etiquetadas como recursivas, se identificaron las RR subyacentes, lo que permitió consensuar las categorías de estrategias encontradas. Finalmente, para lograr O2, se tomaron las producciones *exitosas*, que son las que identificaron las relaciones de recurrencia $a(n)=a(n-1)+2(n+1)$ o $a(n)=a(n-1)+(a(n-1)-a(n-2))+2$, y se describieron las representaciones, las estrategias y los errores y dificultades característicos de estas producciones.

RESULTADOS

La exposición de los resultados obtenidos se articula en torno a los objetivos de esta investigación.

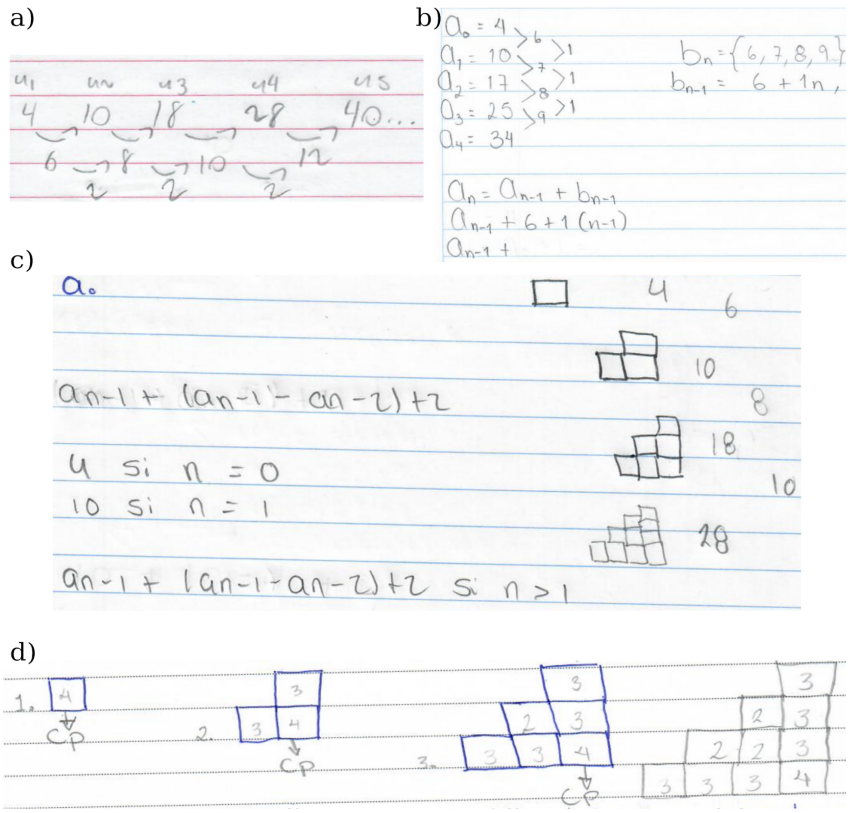
Estrategias para la identificación de la relación de recurrencia general

El análisis de los datos mostró que 6 de las producciones escritas no abordaron la tarea y contenían estrategias no identificables. Entre las restantes se encontraron dos grandes grupos de producciones. El primero, conformado por 38 de ellas, utilizaron estrategias basadas en el cálculo de $a(n)$ a partir de $a(n-1)$ y eventualmente de $a(n-2)$. Se encontraron así 40 estrategias recursivas (dos producciones ofrecieron dos estrategias recursivas diferentes), que se distribuyeron en cuatro categorías. En primer lugar, se encontró la categoría de estrategias basadas en el *Análisis de las Diferencias* entre términos del patrón, registradas 26 veces. Estas estrategias escriben la secuencia numérica para $a(n)$ y calculan la secuencia de las diferencias entre términos de diferentes maneras: (i) obteniendo solo estas diferencias, (ii) encontrando también las diferencias entre diferencias de términos, que en este caso es una secuencia constante e igual a 2 (Figura 2a), (iii) renombrando expresamente $a(n+1)- a(n)$ como

una nueva sucesión *b(n)* y buscando una fórmula explícita para *b(n)* (Figura 2b), o (iv) reformulando esta diferencia en forma de relación recursiva de orden 2 (Figura 2c).

Figura 2

Ejemplos de estrategias recursivas basadas en el Análisis de las Diferencias entre términos del patrón (a, b y c) y de una estrategia de Conteo no recursivo (d).



La segunda categoría de estrategias recursivas que se ha registrado se ha denominado *Ajuste de la Cantidad de Palillos.* Estas, relacionadas con las de Análisis de las Diferencias, parten de una representación pictórica y buscan identificar el número de palillos que deben añadirse a una figura para obtener la cantidad de palillos que conforman la siguiente. La tercera categoría contiene estrategias de *Unión de Figuras,* en las que se observa que dos figuras consecutivas unidas forman un cuadrado o se busca añadir cuadrados a una para llegar a la siguiente. La última categoría considerada engloba estrategias de *Conteo Recursivo*, que se enfocan en describir características de las figuras del enunciado de la tarea sin dejar evidencia de reflexión sobre el caso general, calcular algunos casos sencillos y enunciar verbalmente la relación general entre un término y los anteriores, o ajustar una fórmula para la RR a partir de los primeros términos.

Por otra parte, el segundo gran grupo de estrategias observadas son aquellas en las que no se han identificado las RR. Estas, encontradas en 5 producciones, se categorizaron como de *Conteo no Recursivo,* y se fundamentan en el conteo de los palillos en las primeras figuras de la secuencia (Figura 2d), o la obtención de una fórmula general para el número de palillos en función de la posición de la figura en la secuencia.

Caracterización de las producciones *exitosas*

La Tabla 1 muestra las características de las 20 producciones que identificaron correctamente la RR general en la tarea propuesta. En ella se observa que las representaciones pictóricas y el cálculo de los primeros términos de la secuencia numérica de las cantidades de palillos fueron las más relevantes a la hora de identificar la RR. De forma adicional, se encontró que 16 participantes recurrieron a

múltiples representaciones, lo que indica que la diversidad en las estrategias es un factor relevante en el éxito. Otra característica destacable de las producciones exitosas es que solo 11 de las 20 emplearon representaciones puramente algebraicas (fórmulas recursivas o explícitas). Este dato, junto con la incidencia de errores y dificultades relacionados con la escritura algebraica y el formalismo, reflejan que los estudiantes fueron más solventes para alcanzar la generalización recursiva que para escribirla algebraicamente.

Tabla 1

Representaciones, estrategias y errores observados en las producciones escritas exitosas

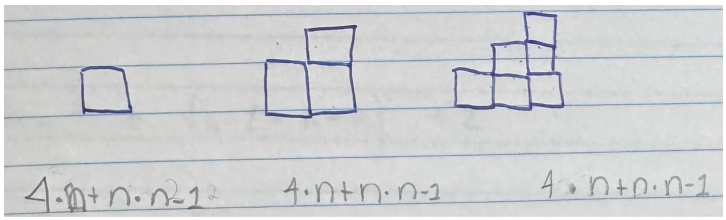
Representaciones	Pictórica	Numérica	Tabla	Recursiva	Explícita
	13	12	4	9	2
Estrategias	Análisis de Diferencias			Ajuste de Palillos	
	18			2	
Errores	Generalización Imprecisa	Escritura Algebraica	Errores de Formalismo	Errores de Cálculo	No hay Generalización
	3	9	3	2	1

Nota: en las Representaciones y Errores hay estudiantes que se clasificaron en más de una categoría.

Finalmente, en relación con las estrategias, se ha visto que las estrategias de Análisis de las Diferencias fueron utilizadas en 18 casos, mientras que la de Ajuste de la cantidad de palillos apareció en 2 casos. Este predominio de estrategias, basadas en la diferencia de palillos necesarios para conformar figuras consecutivas, puede estar relacionado con la tendencia de los estudiantes a iniciar la exploración utilizando operaciones de suma y resta y con los procedimientos heurísticos de análisis recursivos trabajados en la asignatura.

Figura 3

Ejemplo de estrategia de Conteo no Recursivo. Esta producción escrita no contenía información adicional



Debe señalarse, a modo de conclusión de este apartado, el registro de una producción escrita que identificó la fórmula explícita para la RR partiendo directamente de las figuras del enunciado (Figura 3). Esta producción no fue codificada como exitosa, ya que no identifica la RR general, pero se incluye en este apartado ya que supone una actividad de generalización que supera la expectativa del estudio.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

La presente investigación documenta las estrategias útiles para obtener RR en un patrón cuadrático. Los hallazgos del estudio ilustran la capacidad de los estudiantes de ingeniería para extraer RR generales en la resolución de tareas de patrones complejas y la pertinencia del fomento de la actividad de generalización recursiva en la formación de ingenieros, lo que constituye la mayor contribución del trabajo.

El estudio ha revelado que el análisis de las diferencias de los términos de una sucesión fue la estrategia más empleada por los ingenieros en formación, especialmente dentro de las producciones que identificaron con éxito la relación general de recurrencia. Este resultado es consistente con los hallazgos obtenidos por Pinto y Cañadas (2021), Stephens et al. (2017) y Sterner (2024), que indican que la identificación de relaciones recursivas partiendo de sumas y restas es uno de los primeros

procesos en la búsqueda de generalización. Sin embargo, con el estudio quedó evidenciado que el proceso de escribir una relación recursiva general puede implicar alto nivel abstracción y niveles de pensamiento algebraico, que puede depender del patrón planteado (dependencia de la posición y las RR involucradas en él) y de la representación de partida. Esto da pie a dos posibles líneas de trabajo futuros, basadas en el estudio de las características de las tareas más apropiadas para explorar las habilidades de generalización de las RR, así como sobre las bondades que tiene la heurística del análisis de las diferencias en este sentido.

Las estrategias exitosas también se caracterizaron por el uso autónomo de múltiples representaciones por parte del resolutor de la tarea, de forma coherente con los resultados de Pinto et al. (2022). Debe señalarse, la alta incidencia de dificultades relacionadas con la formulación algebraica de las RR, incluso en las estrategias de éxito. Estos resultados pueden estar originados por una insuficiente formación algebraica durante la formación secundaria, que podría deberse a una brecha existente entre el currículo y las prácticas efectivas de enseñanza de las matemáticas en Costa Rica, situación coherente con los últimos resultados de evaluaciones diagnósticas (p. e., OCDE, 2023). Se plantea en este escenario la necesidad de trabajar específicamente el lenguaje algebraico para fomentar la formulación de las RR generales en la formación de ingenieros.

Finalmente, a modo de conclusión, deben señalarse las limitaciones del estudio planteado. En primer lugar, el eventual sesgo causado por el contexto educativo de la propuesta, que ha podido originar la alta incidencia de estrategias de análisis de las diferencias y la baja frecuencia de uso de fórmulas recursivas. Esta situación pone de manifiesto la necesidad de contrastar los resultados en contextos en los que no se haya trabajado expresamente este tipo de estrategias. También sería de interés evaluar en qué medida las limitaciones con relación a la escritura formal de fórmulas recursivas que se desprenden del estudio han determinado los resultados observados. Otra limitación del estudio está relacionada con la tarea utilizada, que se seleccionó con la intención de fomentar la búsqueda de las RR generales ante la imposibilidad esperada de que los participantes buscaran directamente la fórmula explícita. Esta expectativa se cumplió en casi todos los casos, pero pudo condicionar los resultados obtenidos, lo que plantea la necesidad de encontrar tareas específicas para evaluar y trabajar la generalización recursiva. Esta puede ser otra posible línea de trabajo que se reserva para investigaciones futuras.

Referencias

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N.,L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13* (Monograph) (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(7), em2475. https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Harel, G. y Soto, O. (2017). Structural Reasoning. *International Journal Research in Undergraduate Mathematics Education 3,* 225-242. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0041-2

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M.Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp 5-17). Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group. National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education 54*, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Johnsonbaugh, R. (2005). *Discrete Mathematics*. Pearson Education.

Murillo-Tsijli, M. (2018). *Introducción a la matemática discreta. 5° edición.* Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2025). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 27*, 43-65. https://doi.org/10.35763/aiem27.5825

OECD (2023). PISA 2022 Assessment and Analytical Framework, PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Palop, B., Díaz, I., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Santaengracia, J. J. (2025). Redefining computational thinking: A holistic framework and its implications for K-12 education. *Education and Information Technologies*. https://doi.org/10.1007/s10639-024-13297-4

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematical Education Research Journal, 33*, 113-134 . https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 1183–1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Rosen, K. H. (2019). *Discrete mathematics and its applications* (8th ed.). McGraw-Hill Education.

Santaengracia, J. J., Aguilar-González, A., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2024). Conocimiento especializado de estudiantes para maestro/a en una tarea sobre pensamiento computacional. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 489-496). SEIEM

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V. y Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. EURASIA *Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(4), em2065. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking, Mathematical Thinking and Learning, 19:3, 143-166, https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Sterner, H. (2024). Using graphical representations to develop students' correspondence relationships and covariational thinking in pattern generalizations in primary school. *International Journal of Science and Math Educ.* https://doi.org/10.1007/s10763-024-10520-z

Vílchez Quesada, E. (2015). *Estructuras discretas con Mathematica*. Alphaomega.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the Association of Computer Machinery, 49(3)*, 33-35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

ELECCIÓN DE UNA MEDIDA DE POSICIÓN CENTRAL EN PRESENCIA DE VALORES ATÍPICOS POR MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN

Prospective primary school teachers' choice of a measure of central location in the presence of outlier

Valenzuela-Ruiz, S. M.[a], Batanero, C.a y Pallauta, J. D.b

[a]Universidad de Granada, España, [b]Universidad de los Lagos, Chile

Resumen

La inclusión de las medidas de posición central en el currículo de educación primaria requiere el conocimiento de éstas por parte de los maestros. El objetivo de este trabajo fue evaluar la capacidad de los maestros en formación de educación primaria para elegir una medida de posición central adecuada en presencia de valores atípicos. Para ello, se propone a 51 participantes una tarea abierta. Utilizando análisis de contenido, se analizan las respuestas, clasificándolas por la medida de posición central elegida, su cálculo correcto y si se tiene en cuenta los valores atípicos. Fueron pocos los participantes que eligieron y calcularon correctamente la media eliminando el valor atípico y la proporción mayor dio una respuesta incorrecta o no resolvió el problema. Se deduce la necesidad de reforzar la preparación estadística de los maestros en formación.

Palabras clave: *Medidas de posición central, maestros en formación, educación primaria, evaluación.*

Abstract

The introduction of central position measures in primary education curricula requires knowledge of these measures on the part of pre-service teachers. The aim of this work was to evaluate their competence in choosing an appropriate central tendency measure in the presence of outliers, for which an open-ended task is proposed to a sample of 51 primary school pre-service teachers. Using content analysis, the responses were analyzed, classifying them according to the measure of central position chosen, its correct calculation and whether outliers were taken into account. Few participants chose and correctly calculated the mean by eliminating the outlier and the largest proportion gave an incorrect answer or did not solve the problem. We deduce the need to reinforce the statistical preparation of pre-service teachers

Keywords: *Central tendency measures, pre-service teachers, primary education, assessment.*

INTRODUCCIÓN

Las medidas de tendencia central son uno de los primeros conocimientos estadísticos propuestos en el currículo y junto con las de dispersión permiten caracterizar una distribución de datos y comparar varias distribuciones, pero la investigación señala dificultades en su comprensión (Balderas et al., 2007, Jacobbe y Carvalho, 2011).

Debido a su importancia, su enseñanza comienza en la educación primaria (MEFP, 2022a), como parte del sentido estocástico, introduciendo el estudio de la moda y su interpretación como dato más frecuente en el segundo ciclo (niños de 8 y 9 años) y en tercer ciclo (10-11 años) la media y moda, su interpretación, cálculo y aplicación. En la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (MEFP, 2022b), para los cursos 1º a 3º (12-14 años) se estudian tanto las medidas de tendencia central como las de dispersión, su interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales. Para el 4º

Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C. y Pallauta, J. D. (2025). Elección de una medida de posición central en presencia de valores atípicos por maestros de educación primaria en formación. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

curso (15 años) se añade el estudio de la correlación y regresión, en que la media cobra un papel relevante, puesto que la covarianza (a partir de la cual se calcula el coeficiente de correlación) se define como la media aritmética de la suma de los productos de las diferencias de los valores de las dos variables a su media, y la recta de regresión viene dada en función de las medias de las dos variables, la covarianza y la varianza de la variable independiente (que también se define como una media). Además, el estudio y aplicación de la media aparece transversalmente en diferentes campos de la matemática (Rondero y Font, 2015).

Para conseguir una enseñanza y aprendizaje efectivos de estas medidas en la educación primaria, será necesario que los maestros en formación reciban una preparación adecuada, basada en una evaluación previa de sus conocimientos. En esta línea, el objetivo de este trabajo es evaluar la capacidad de los maestros en formación para elegir una medida de posición central adecuada en presencia de valores atípicos, a partir de una tarea de respuesta abierta sobre la aplicación de las medidas de posición central en presencia de valores atípicos. En lo que sigue se describen los fundamentos, métodos, resultados y conclusiones del estudio.

FUNDAMENTOS

Antecedentes

Algunas investigaciones sobre la media están centradas en el conocimiento del profesor y se han basado principalmente en maestros de educación primaria en formación. Así, Batanero et al. (1997) analizan las respuestas a cuatro ítems de opción múltiple que evaluaban la comprensión de distintas propiedades de la media aritmética por 273 maestros en formación, el 25% de los cuales mostraron poca comprensión del algoritmo y el 34% del efecto de los valores atípicos sobre la media. Estrada et al. (2004) obtuvieron similares resultados en una replicación del estudio. Groth y Bergner (2006) estudiaron la comprensión de 46 maestros en formación sobre las diferencias y semejanzas entre la media, mediana y moda, definiendo niveles, desde ser solo capaz de definir los conceptos hasta poder decidir cuándo una medida es más adecuada que otra.

Leavy y O'Loughlin (2006) propusieron a 264 maestros en formación el cálculo de la media ponderada, la construcción de un conjunto de datos con una media dada y la estimación de la media a partir de un gráfico. El 52% de los participantes aplicó el término media tanto a la media, como a la mediana o la moda, sólo el 21% calculó correctamente la media ponderada y el 25% confundió la media con la moda. Estrella (2016) analizó las respuestas de 27 maestros en formación continua a una tarea sobre la utilidad de la media en presencia de valores atípicos en los datos. Los resultados mostraron concepciones correctas e incorrectas y revelaron que la idea de representatividad de un conjunto de datos no era familiar para dichos maestros.

En Valenzuela-Ruiz et al. (en prensa) se analiza el conocimiento didáctico-matemático sobre la media aritmética de 78 maestros formación. Se propuso a los participantes una tarea abierta en que se pide explicar el significado de un valor decimal para la media de una variable con valores enteros y proporcionar una distribución de 10 valores en la que se obtenga el valor numérico dado de la media. Para dicha tarea el porcentaje de respuestas correctas fue 50,7% en la explicación del significado de un valor decimal de la media y el 67% en la propuesta de una distribución con el valor dado de la media. Continuando el trabajo anterior, en el presente estudio se analiza el conocimiento requerido para elegir una medida de posición central en presencia de valores atípicos.

Marco teórico

Nos apoyamos, en primer lugar, en la clasificación de objetos matemáticos, considerados en el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino, 2024; Godino et al. 2007), que intervienen en las medidas de posición central:

- *Situaciones problemas* que inducen actividad matemática, de donde surgen las medidas de

posición central, como la situación problema propuesta a los participantes en este trabajo.

- *Lenguaje* verbal, simbólico, tabular o gráfico utilizado en la resolución de las situaciones problemas para representar los datos, operaciones o resultados obtenidos. Por ejemplo, los términos media, mediana, moda y valor atípico, símbolos que los representan o tablas y gráficos estadísticos.
- *Conceptos* o abstracciones matemáticas que pueden ser definidas, como medida de posición central, dato, media, mediana, moda o distribución.
- *Propiedades* que relacionan entre sí los conceptos; por ejemplo, que la media es muy sensible a los valores atípicos, mientras que la mediana no lo es.
- *Procedimientos* de cálculo y estrategias que permiten resolver los problemas. Por ejemplo, sumar los datos y dividir entre el número de datos para obtener la media u ordenar el conjunto de datos y tomar el valor central para hallar la mediana.
- *Argumentos* empleados para probar las propiedades de la media o justificar las soluciones a los problemas.

Se utiliza también la división del conocimiento matemático en conocimiento matemático común y conocimiento matemático avanzado, propuesta en el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (CDM) (Godino, 2009; 2024; Pino-Fan et al. 2015). El primero es compartido con los estudiantes del nivel educativo en que el profesor imparte su docencia; en nuestro caso, la educación primaria. El segundo es más amplio que el anterior y permite que el profesor relacione su enseñanza con la correspondiente al mismo tema en niveles educativos superiores.

Puesto que la tarea que analizamos ha sido utilizada con estudiantes de ESO y Bachillerato por Balderas et al. (2007), en este trabajo se evalúa el conocimiento matemático avanzado sobre las medidas de posición central de los participantes.

METODOLOGÍA

Muestra y contexto

La recogida de datos fue parte de una acción formativa destinada a reforzar el conocimiento estadístico de los maestros en formación. Tras la recopilación de los datos, se resolvieron y corrigieron otras tareas estadísticas. Participaron 51 estudiantes españoles de 2º curso del Grado en Educación Primaria en una universidad española, en una asignatura de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se contó con el permiso de los participantes y sus profesores, respetando los principios éticos de anonimato e interés de la actividad para la formación de los maestros.

Tarea propuesta

A los participantes se les propuso la tarea presentada en la Figura 1 y tomada de Balderas et al. (2007) cuyo contenido matemático se resume en la Tabla 1.

Figura 21.

Tarea propuesta a los maestros en formación

Diez estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación: 6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2 Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

Aunque la respuesta esperada es la media, los maestros en formación podrían optar por la mediana o la moda. Se trata de un ejemplo de situación problema consistente en estimar una cantidad

desconocida en presencia de errores de medida (SP1). Además de los conceptos de media, mediana y moda, utiliza las siguientes propiedades: P1: La media es el mejor estimador de una cantidad desconocida; P2: La media no es resistente al efecto de los valores atípicos y P3: La mediana es resistente al efecto de los valores atípicos. También involucra los algoritmos de cálculo de las medidas de posición central. Balderas et al. (2007) obtuvieron un 86% de respuestas correctas en los estudiantes mexicanos de bachillerato (17-18 años) y un 67% en los estudiantes españoles de ESO (12 y 14 años). En una tarea similar, Molero et al. (2019) obtuvo 56% de respuestas correctas con estudiantes de 1º curso de ESO (12-13 años).

Tabla 22

Conocimientos evaluados en la tarea

Situaciones problemas	SP1. Estimar una cantidad desconocida en presencia de errores de medida
Conceptos	Media, mediana, moda, valor atípico
Propiedades	P1. La media es el mejor estimador de una cantidad desconocida
	P2. La media no es resistente al efecto de los valores atípicos
	P3. La mediana es resistente al efecto de los valores atípicos
Procedimientos	PR1. Cálculo de la media
	PR2. Cálculo de la mediana en caso de indeterminación
	PR3. Cálculo de la moda

Análisis

Las respuestas escritas individuales de los participantes se estudiaron mediante análisis de contenido (Krippendorff, 2013). Esta es una técnica especialmente indicada para el estudio de datos cualitativos, particularmente de documentos escritos. Para llevarlo a cabo, cada estudiante se consideró una unidad de análisis y, al codificar las respuestas, se considera primero la elección de la media, mediana o moda para resolver el problema y, posteriormente, la forma en que se calculan estas medidas. A partir de este proceso, se obtiene la lista de categorías que se describe a continuación. A priori, se tuvieron en cuenta las categorías utilizadas en Balderas et al. (2007), siendo éstas refinadas mediante un proceso inductivo, junto con revisiones independientes y sucesivas de la codificación realizada por las autoras del estudio, con el fin de garantizar la fiabilidad de los datos.

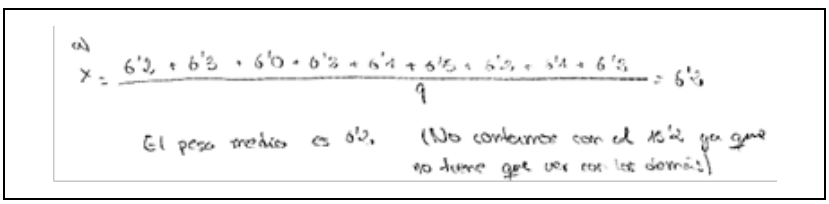
Categorías de análisis

C1. Se elige la media como solución al problema. En todas las siguientes variantes se reconoce que la media es el mejor estimador de una cantidad desconocida.

C1.1. Se elimina previamente el valor atípico y se calcula correctamente la media de los restantes valores. Esta sería la solución correcta, que tiene en cuenta la propiedad anterior y, además, el efecto de los valores atípicos sobre el valor de la media, por lo que eliminan dicho valor para no desvirtuar la solución (ver respuesta de E7 en la Figura 2).

Figura 2

Cálculo de la media eliminando del valor atípico

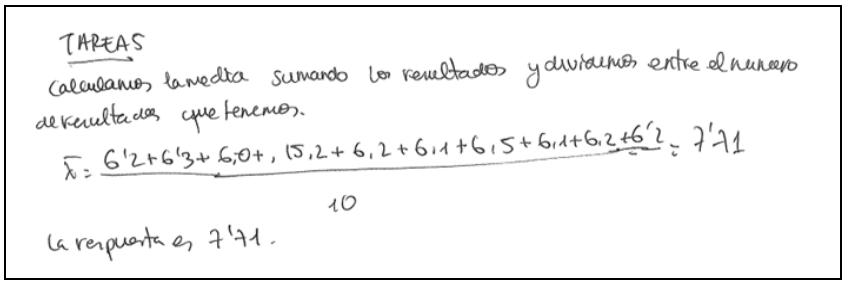


C1.2. Se calcula la media con todos los valores incluyendo el valor atípico. Se utiliza la propiedad de que la media es el mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida, pero no se aprecia el sesgo producido por el valor atípico. Una respuesta se presenta en la Figura 3, en la que se observa cómo se obtiene un valor muy diferente de la mayoría de medidas

del peso del objeto.

Figura 3

Cálculo de la media sin eliminar el valor atípico

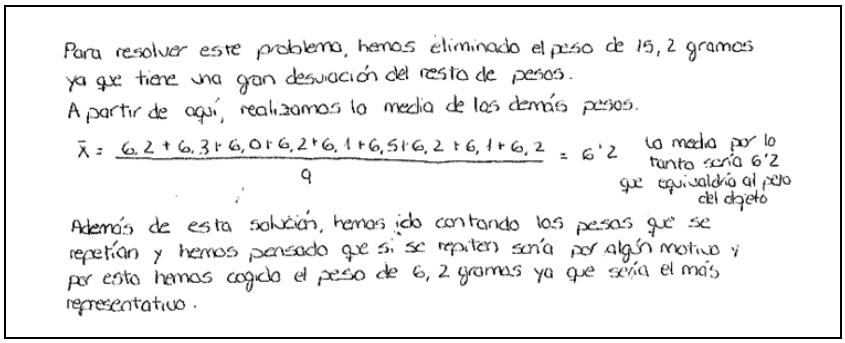


C1.3. Se calcula la media con y sin el valor atípico. Se muestra una indecisión del participante sobre si el valor atípico afecta o no al valor de la media.

C1.4. Se calcula la media sin el valor atípico y la moda. Aunque se muestra que comprende las propiedades citadas de la media, se calcula también la moda, lo que indica una indecisión sobre cuál es la respuesta correcta. Un ejemplo se muestra en la respuesta de E17 en la Figura 4.

Figura 4

Cálculo de la media sin valor atípico y moda.



C1.5. Se indica que hay que calcular la media, pero no se calcula. Por ejemplo, E11 no deja claro si recuerda el cálculo de la media o bien piensa que no es necesario calcularla. No obstante, reconoce las propiedades citadas de la media.

E11: Quitamos el 15,2 que está muy alejado de los demás valores, por lo que seguramente es erróneo y calculamos la media de todos los demás.

C2. Se elige la mediana. También sería una respuesta aceptable, ya que la mediana es resistente a los valores atípicos. Se han identificado las siguientes variantes:

C2.1. Se calcula correctamente la mediana. Se ordenan de manera ascendente o descendente los valores y, dado que los dos valores centrales son iguales a 6.2, la mediana tomaría este valor. No es claro que, en este caso, se reconozcan las propiedades citadas de la media aritmética. A pesar de ello, reconoce que la mediana es resistente a los valores atípicos y sabe calcularla en el caso de indeterminación.

C22. Se calculan correctamente el rango y la mediana. En la respuesta de E3 se comienza por el cálculo del rango y, al ver que es amplio, se elige la mediana, que se calcula correctamente, por lo que el estudiante aplica adecuadamente la propiedad P3, así como el algoritmo de cálculo en caso de indeterminación (PR2).

E3: Tendría en cuenta el rango 15.2-6=9,2 para saber cuál es el margen de diferencia entre el valor máximo y el mínimo obtenido. Al ver que existe bastante diferencia, descartaría la media y me

decantaría por la mediana (6,0-6,1-6.1-6,2-6,2-6.2-6.3-6.5-15,2). La mediana es 6.2.

C2.3. *Se calcula correctamente la mediana y además la moda*. En esta tarea, ambas medidas coinciden, por lo que algunos participantes no llegan a decidir entre una de ellas, como E26. Aunque en el caso general la moda no sería una solución, para este ejemplo particular, puesto que coincide con la mediana cualquiera de las dos medidas sería aceptable.

E26: Resolución: 6,0-6,1-6.1-6,2-6,2-6.2-6.3-6.5-15.2. Mediana=6,2; Moda=6.2.

C3. Se elige la moda. Aunque en esta tarea el valor de la moda es muy próximo al de la media, eliminado el valor atípico y coincide con la mediana, no sería una solución aceptable en cualquier otro conjunto de datos. Se han encontrado dos variantes según se calcule correctamente la moda, obteniendo el valor 6.2 (C3.1), o bien se indique que es preferible la moda, pero no se calcule (C3.2).

RESULTADOS

En la Tabla 2 se presentan los resultados obtenidos en la tarea, en la que un 29,4% de los maestros en formación eligen correctamente la media como solución de la tarea, de los cuales sólo un 18,6% elimina el valor atípico en el cálculo. Este tipo de respuesta ha sido identificado en investigaciones previas con estudiantes de secundaria y bachillerato (Balderas et al., 2007; Molero et al., 2019) y estudiantes universitarios (Madrid et al. 2022). Otro 7,8% de los participantes elige y calcula correctamente la mediana, lo que sería también una solución satisfactoria, dado que la mediana es resistente a los valores atípicos. En total estas dos soluciones (media y mediana) suponen un 37,3%, porcentaje muy inferior al obtenido por Balderas con estudiantes de ESO (67%) y bachillerato (86%) y por Molero con estudiantes de ESO (67%). Parte de este resultado se explica porque algunos maestros en formación pudieran venir de especialidades no científicas de bachillerato pero, aun así, han debido estudiar las medidas de posición central en la ESO.

Tabla 2

Respuestas de los participantes a la tarea

Medida de posición central elegida	*Cálculo de la medida*	*Frecuencia*	*Porcentaje*
C1.Media	C1.1. Elimina el valor atípico	5	9,8
	C1.2. Utiliza todos los valores	2	3,9
	C1.3. La calcula con y sin valor atípico	1	2,0
	C1.4. Media sin valor atípico y moda	4	7,8
	C1.5. Elige la media pero no la calcula	3	5,9
C2. Mediana	C2.1. Cálculo correcto	1	2,0
	C2.2. Cálculo correcto de mediana y rango	2	3,9
	C2.3. Cálculo correcto de mediana y moda	1	2,0
C3. Moda	C3.1. Cálculo correcto	21	41,2
	C3.2. Elige la moda pero no la calcula	3	5,9
No responde		8	15,7
Total		51	100

Además, la solución más frecuente fue elegir la moda (47,1% de participantes), que sería incorrecta para el caso general, aunque en esta tarea su valor es coincidente con la mediana. Se añaden 15,7% de futuros maestros que no responden la tarea.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se evaluó la capacidad de 51 maestros en formación de educación primaria para elegir una medida de posición central adecuada en presencia de valores atípicos, a partir de una tarea de respuesta abierta. Basados en el modelo CDM (Godino, 2009; 2024; Pino-Fan et al. 2015), los

resultados del estudio revelan carencias en el conocimiento avanzado sobre las medidas de posición central entre los maestros en formación que participaron en la investigación. Esto es especialmente relevante considerando que la tarea utilizada en el estudio y otra similar ha sido previamente aplicada a estudiantes de ESO y bachillerato (Balderas et al., 2007; Molero et al., 2019), quienes obtuvieron un porcentaje mayor de respuestas correctas en comparación con los participantes de nuestro estudio. Con ello se añade nueva información al trabajo de Valenzuela et al. (en prensa) y de los autores citados en la sección de antecedentes.

Estos resultados son consistentes con los de Batanero et al. (1997), Estrada et al. (2004) y Estrella (2016), quienes también identificaron un desconocimiento por parte de los maestros en formación sobre el impacto de los valores atípicos en el valor de la media. Asimismo, coinciden con los resultados de Leavy y O'Loughlin (2006) respecto a la dificultad para distinguir las situaciones en las que es adecuado utilizar la media, mediana o moda. Como consecuencia, los participantes no alcanzan el nivel más alto de comprensión de estos estadísticos definido por Groth y Bergner (2006).

Es evidente que el estudio de las medidas de posición central y sus propiedades, abordado a lo largo de la educación primaria y secundaria obligatoria, ha sido insuficiente en esta muestra para desarrollar un conocimiento adecuado. Esto ha limitado su capacidad para identificar correctamente las situaciones en las que es conveniente aplicar cada una de estas medidas y para resolver problemas relacionados.

Se deduce, por consiguiente, la necesidad de reforzar el conocimiento matemático de los maestros en formación sobre las medidas de posición central, que juegan un papel relevante en estadística y otras materias y cuyo conocimiento contribuye a la educación para la sostenibilidad de los maestros (Vásquez et al., 2023). Sería también importante incluir en los libros de texto más situaciones de aplicación, disminuyendo el número de actividades exclusivamente procedimentales (Landtblom, 2023). No obstante, reconocemos la limitación del estudio, debido a que la muestra de maestros en formación tuvo un tamaño moderado y que sólo se utilizó una tarea. Esta decisión se debió a la complejidad inherente a un estudio de tipo cualitativo basado en el análisis de contenido. Surge, por tanto, el interés de continuar la investigación sobre los conocimientos de los maestros en formación sobre la media aritmética. Además de ampliar la evaluación realizada utilizando otras tareas diferentes, sería importante diseñar y evaluar acciones formativas dirigidas mejorar dichos conocimientos. Estas acciones deberían considerar no sólo su conocimiento matemático, sino también los aspectos didácticos relacionados con la enseñanza del tema.

Agradecimiento:

Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y FEDER, UE

Referencias

Balderas, P., Batanero, C., Cobo, B. y Mayén, S. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *UNIÓN, 3*(9), 187-201.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática, 16*(1), 89-111.

Estrella, S. (2016). Comprensión de la media por profesores de educación primaria en formación continua. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 18*(1), 13-22.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* Aula Magna.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Groth, R. E. y Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(1), 37–63. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0801_3

Jacobbe, T. y Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 199-209). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_21

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: An introduction to its methodology* (4th ed.). Sage.

Landtblom, K. (2023). Opportunities to learn mean, median, and mode afforded by textbook tasks. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), 1-17. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.655

Leavy, A. y O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education 9*, 53–90. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9003-y

Madrid A. E., Valenzuela-Ruiz, S. M. V., Batanero, C. y Garzón J. A. (2022). Comprensión de la mediana por estudiantes universitarios. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22,* 1-21. https://doi.org/10.35763/aiem22.3902

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022a). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. MEFP.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP (2022b). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* MEFP.

Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2019). ¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 423-432). SEIEM.

Pino-Fan, L. R., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(6), 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C. y Vera, O. (en prensa). Conocimiento didáctico-matemático de profesores de educación primaria en formación sobre la media aritmética. *Educación Matemática.*

Vásquez, C., Seckel, M. J. y Rojas, F. (2023). Connecting statistics education and sustainability: beliefs of Primary Education teachers. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 23,* 127-146. https://doi.org/10.35763/aiem23.5415seiem.es

CONOCIMIENTO ALGEBRAICO DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA: EL CASO DE LOS PATRONES Y SUCESIONES

Algebraic Knowledge of Prospective Teachers of Primary Education: The Case of Patterns and Sequences

Vargas, M. F.[a]

[a]Universidad de Costa Rica

Resumen

La inclusión del álgebra en los primeros años de escolaridad se plantea como una solución a la ruptura entre la aritmética y el álgebra. Esta propuesta implica que los docentes deben estar capacitados para introducir conceptos de pensamiento y razonamiento algebraico en el aula, lo cual a su vez requiere que ellos mismos comprendan y desarrollen habilidades algebraicas. El presente estudio examina cómo respondieron 38 futuros maestros a tres tareas relacionadas con patrones y sucesiones. Se utilizó un cuestionario de respuesta abierta, y los datos fueron analizados mediante el método de análisis de contenido. Los resultados revelan ciertas dificultades para expresar la ley de formación de una sucesión, a pesar de que los participantes pudieron identificar los primeros términos de esta. Aunque son capaces de entender de alguna manera el patrón, explicarlo de manera verbal o simbólica les resulta ser una tarea compleja.

Palabras clave: pensamiento algebraico, educación primaria, álgebra temprana, formación docente.

Abstract

The inclusion of algebra in the early years of schooling is proposed as a solution to the challenges that arise when transitioning from arithmetic to algebra. This proposal suggests that teachers need to be trained to introduce concepts of algebraic thinking and reasoning in the classroom, which in turn requires them to understand and develop algebraic skills themselves. This study examines how 38 future teachers responded to three tasks related to patterns and sequences. An open-response questionnaire was used, and the data were analyzed using content analysis. The results reveal certain difficulties in expressing the formation rule of a sequence, despite the participants being able to identify the first terms of it. Although they are somewhat able to understand the pattern, explaining it verbally or symbolically proves to be a complex task for them.

Keywords: *Algebraic thinking, Primary education, early algebra, Teacher training.*

INTRODUCCIÓN

El álgebra es indudablemente un área crucial de las matemáticas debido a su utilidad y su conexión con otras ramas de la disciplina. No obstante, su complejidad ha generado dificultades en el estudiantado, generando grandes desafíos al pasar de la aritmética al álgebra, lo que ha motivado a investigadores de todo el mundo a estudiar la naturaleza de estos problemas y buscar posibles soluciones (Cañadas, 2023; Narváez, Adamuz-Povedano, y Cañadas, 2023, McAuliffe y Vermeulen, 2018).

A raíz de esto, varios investigadores (Cai y Knuth, 2011; Callejo, García-Reche y Fernández, 2016; Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2017; Kieran et al., 2016; Kaput, 2000) y diversas propuestas curriculares (NCTM, 2000; NCTM, 2006) han sugerido la incorporación del pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos. Actualmente, se ha comprobado que la exposición temprana

Vargas, M. F. (2025). Conocimiento algebraico de futuros docentes de primaria: el caso de los patrones y sucesiones. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

de los niños al pensamiento algebraico facilita la creación de conexiones significativas entre la aritmética y el álgebra (McAuliffe y Vermeulen, 2018).

En Costa Rica, esta idea fue incorporada en los Programas de Estudio de Matemática en 2012. Se busca que, en los primeros años de escolaridad, los estudiantes desarrollen relaciones entre los números naturales y la resolución de expresiones con valor faltante. En los años siguientes, se pretende profundizar en estos aprendizajes, determinando términos de una sucesión a partir de su ley de formación o, a la inversa, identificando dicha ley al analizar las relaciones entre los términos de la sucesión. También se introduce el concepto de proporcionalidad directa, razón y proporción, además de aumentar el nivel de abstracción al comenzar a representar simbólicamente cantidades matemáticas variables (MEP, 2012).

Este enfoque tiene como objetivo que "la introducción temprana de relaciones, patrones y manipulación simbólica facilite una mayor conexión con los ciclos educativos posteriores y desarrolle una forma de pensamiento matemático esencial para la comprensión de conceptos relacionados con las funciones y la geometría" (MEP, 2012, p. 135). Si bien el álgebra es más que el uso y manipulación de expresiones simbólicas, la comprensión en la realización de estas transformaciones con literales es una característica indiscutible del álgebra formal (Aké, 2019).

Ahora bien, esta iniciativa requiere de docentes debidamente formados para enfrentar este desafío, es decir, maestros con conocimientos en el área que sean capaces de fomentar el pensamiento algebraico en el aula. Pese a esto, diversos estudios señalan algunas deficiencias en la formación inicial de maestros quienes debido a esto podrían desaprovechar las competencias algebraicas espontáneas de los niños (Castro et al., 2011).

En esa línea, este trabajo forma parte de una investigación más amplia que pretende analizar la forma en que los futuros maestros entienden el álgebra. Particularmente, se describirán las producciones de futuros maestros al resolver tres tareas sobre patrones y sucesiones. Se espera que este estudio proporcione un diagnóstico sobre algunos aspectos del conocimiento de los futuros maestros, brindando información valiosa que permita tomar decisiones en su formación.

MARCO TEORICO

Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico “considera las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra y, en particular, el álgebra escolar” (Cañadas, 2016, p. 8). El objetivo principal de incorporar el álgebra en los primeros niveles de escolaridad es justamente fomentar el pensamiento algebraico de forma gradual. Ahora bien, esta iniciativa del álgebra temprana o *early algebra*, debe entenderse mucho más que manipular letras o símbolos en matemática.

Para Blanton y Kaput (2004) el pensamiento algebraico implica construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones.

Los componentes que organizan las habilidades a desarrollar en cuanto al pensamiento algebraico son (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022):

1. Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
2. Resolución de problemas
3. Situaciones funcionales
4. Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

METODOLOGIA

La investigación desarrollada es cualitativa de naturaleza descriptiva (Cohen et al., 2018) pues su finalidad es describir el trabajo desarrollado por futuros maestros al resolver unas tareas sobre patrones y sucesiones.

Los datos se recolectaron a finales del 2023 con un grupo de 38 futuros docentes de primaria que cursaban su carrera en la Universidad de Costa Rica. Se solicitó la participación de estudiantes que cursaran su tercer o cuarto año (últimos dos años de la carrera de Educación Primaria). La mitad de ellos estaban finalizando su tercer año, y estaban matriculados en su segundo y último curso de Didáctica de la Matemática para Educación Primaria (codificados con GD_i, donde i está entre 1 y 19), los otros 19 participantes se encontraban finalizando su práctica profesional codificados con GP_i, i está entre 1 y 19). La participación de todos fue voluntaria y estuvieron de acuerdo en participar de la investigación.

Para el desarrollo de este trabajo, se diseñó un cuestionario de respuesta abierta que permitiera estudiar algunos de los elementos y componentes que distintos autores sugieren que organizan o delimitan el pensamiento algebraico. Para ello se diseñaron 10 preguntas:

- Preguntas 1, 2 y 3: sobre patrones y sucesiones
- Preguntas 4: sobre traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje común habiendo uso de letras.
- Pregunta 5: sobre la idea de ecuación y los diferentes valores que puede tomar la incógnita según sea el caso.
- Preguntas 6 y 7: resolución de problemas, uno modelado por una ecuación y otro mediante una relación funcional.
- Preguntas 8, 9 y 10: estas tenían un corte distinto, y más pensadas en su trabajo en el aula, se les preguntaba: (a) ¿qué es el álgebra?, (b)mencione al menos dos áreas en las que usamos el álgebra, y (c)redacte un problema o ejercicio para desarrollar el pensamiento algebraico en la escuela.

El instrumento fue discutido con otros investigadores, y se realizó una prueba piloto con 8 futuros docentes. En este trabajo abordaremos las primeras tres de ellas, en las que se les presentaba una sucesión y se le solicitaba: (a) Hallar los siguientes dos términos de la sucesión, (b) ¿Cómo le explicaría el patrón de la sucesión a un alumno suyo?, (c) De ser posible, escriba simbólicamente la ley de formación, y (d) Halle el término 20 de la sucesión. El punto (b) no se preguntó en la tercera pregunta.

Para analizar los datos, se utilizó el método del análisis de contenido. Este se puede definir como un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación, que permite hacer inferencias válidas y confiables respecto a nuestro tema de interés (McMillan y Schumacher, 2005). Este análisis nos permite destacar las características relevantes de un mensaje, lo cual a su vez facilita la descripción y análisis de los datos (Hernández-Sampieri et al., 2006). En nuestro caso, nos permitió organizar la información para realizar la descripción aquí presentada.

RESULTADOS

A continuación, se describen los principales resultados obtenidos en las primeras tres preguntas del instrumento.

Pregunta #1

En esta pregunta se les pidió que consideraran la sucesión $9, 15, 21, 27, \ldots$. Al preguntarles por los dos siguientes términos de la sucesión, 33 de los participantes lograron indicarlos de manera correcta. Al preguntarles cómo lo explicarían a sus alumnos, la mayoría de ellos hace referencia a que es una

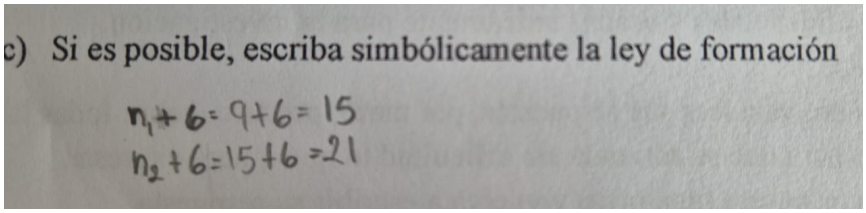
sucesión que va "de 6 en 6", destacando la importancia de identificar la diferencia entre los términos sucesivos. Doce de los participantes centraron su respuesta en la importancia de apoyarse en algún material para explicar el tema a sus alumnos, y otros tres no respondieron.

Ahora bien, aunque se aprecia que la mayoría entendió el patrón que sigue la sucesión, al pedirles expresarlo de manera simbólica, solo 7 de ellos lograron dar una expresión similar a: $a_n = 6n + 3$. Sin embargo, algunos cometen errores de escritura, como colocar expresiones como $n = 6n + 3$, o simplemente $6n + 3$. Otros tres escribieron $9 + 6n$, lo cual podría funcionar si se adecua el dominio a considerar, pero en este caso no se realiza, o indica, dicho ajuste.

Por otro lado, muchos de ellos (14 participantes) intentaron expresar la idea de "ir sumando 6 al término anterior", mediante expresiones como: $n + 6$ o $a_{n-1} + 6$; aunque algunos no logran expresarlo como tal, hicieron el esfuerzo por escribir la idea, tal es el caso de GD4 quien respondió lo que se aprecia en la figura 1.

Figura 23

Respuesta dada por GD4, pregunta 1, ítem c

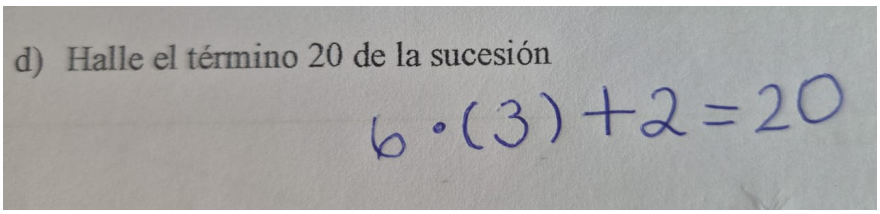


Los 17 participantes restantes escribieron expresiones completamente erróneas o no escribieron nada.

De esta forma, en el ítem (d), al pedirles el término 20 de la sucesión, 15 de los participantes lo indicaron correctamente, aunque muchos de ellos tuvieron que calcular todos los términos, pues su ley de formación requería conocer el término anterior y no solo la posición. Un caso interesante fue el participante GP13, quien, aunque colocó correctamente la ley de formación $6n + 3$, al pedírsele el término 20 de la sucesión hizo lo que se muestra en la figura 2. En donde interpretó que debía buscar un n que, según el patrón, diera como resultado 20, pero esto lo llevó incluso a alterar el patrón dado.

Figura 2

Respuesta dada por GP13 a la pregunta 1, ítem d

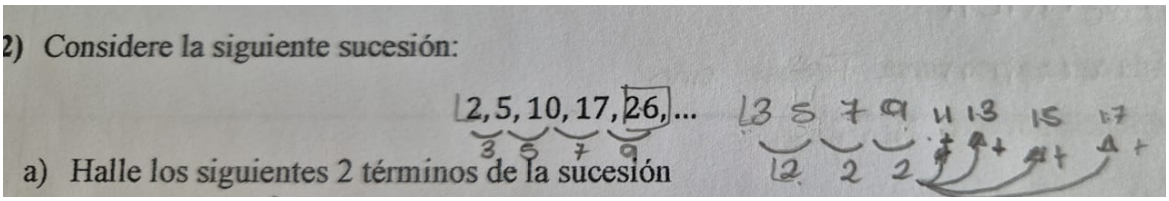


Pregunta #2

Esta pregunta se les presentaba la sucesión: $2, 5, 10, 17, 26, ...$ En esta ocasión, 26 participantes indicaron correctamente los dos siguientes términos de la sucesión. Sin embargo, solo uno de ellos fue capaz de escribir simbólicamente la relación $a_n = n^2 + 1$. Los demás trataron de explicar el patrón, pero la mayoría de ellos (20 participantes) se centraron en el hecho de que, al buscar la diferencia entre los términos de la sucesión, aparecían los números impares (tal como se muestra en la figura 3). Por lo tanto, la explicación se enfocó en esto y no en buscar una relación entre la posición del término y este. Los 17 participantes restantes intentaron dar alguna explicación, pero sin mucho éxito.

Figura 3

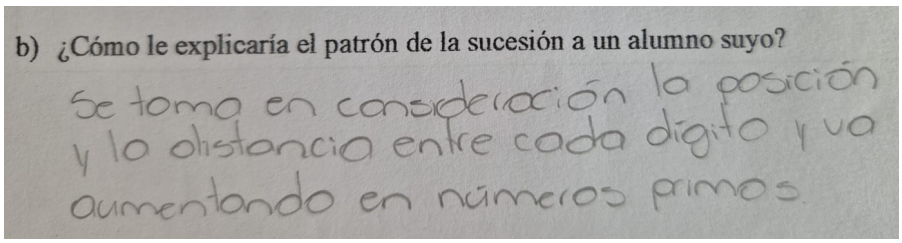
Respuesta dada por GD_{12} a la pregunta 2



Dentro de las respuestas dadas, hay un par de detalles o afirmaciones que llamaron la atención. El participante que indicó correctamente la ley de formación afirmó que la sucesión se podía expresar como $n^2 + 1$ o como $2n + 1$, lo cual implica que considera $n^2 = 2n$, un error importante en álgebra. En esa misma línea de errores conceptuales, entre quienes se centraron en que la diferencia entre los términos tenía alguna relación con los números impares, estaba GD_{15} (cuya respuesta se muestra en la figura 4), quien manifestó una confusión entre el concepto de números impares y primos.

Figura 4

Respuesta dada por GD_{15} a la pregunta 2, ítem b



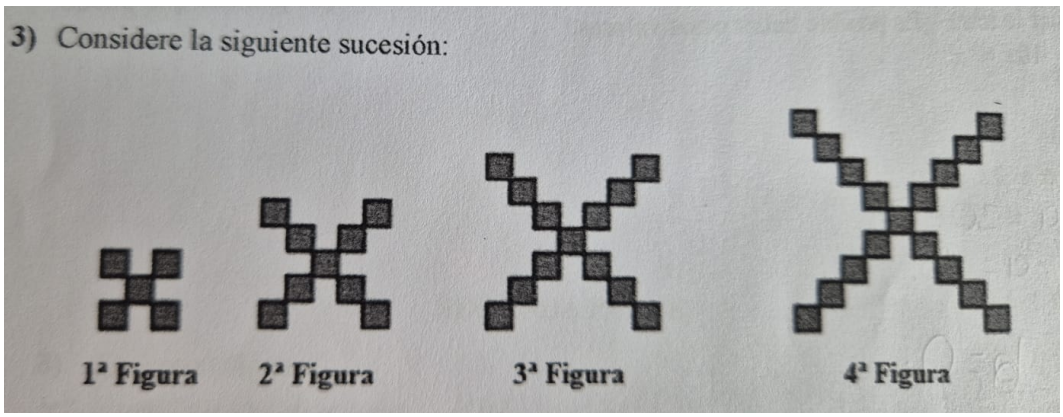
Dado lo anterior, y como era de esperarse, solo 1 participante logró indicar correctamente cuál sería el término 20 de la sucesión. Otros tres estuvieron bastante cerca, pero al calcular todos los 20 términos, cometieron errores de cálculo que los llevaron a dar una respuesta incorrecta.

Pregunta #3

En esta pregunta se le presentaba a los participantes la sucesión que se muestra en la figura 5.

Figura 5

Pregunta 3 del cuestionario

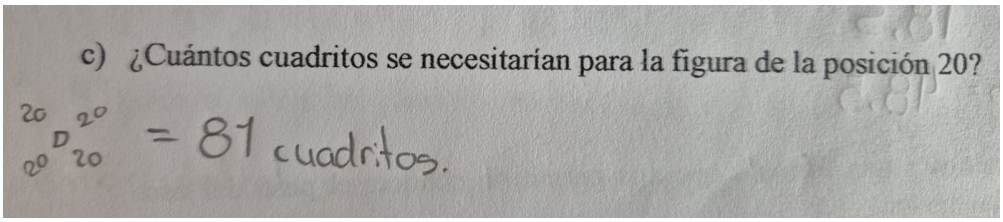


En esta ocasión, 28 de los participantes demostraron entender el patrón de las figuras. De ellos, 16 indicaron simbólicamente la ley de formación como $4n + 1$, y otros 10, al igual que en la pregunta 1, se centraron únicamente en que lo que ocurría era el aumento de 4 cuadrados respecto a la figura anterior. En algunos casos, esto lo expresaron correctamente como $a_n = a_{n-1} + 4$, pero en otros casos solo como $a_n = n + 4$, lo que nuevamente pone de manifiesto una débil comprensión del significado que puede tener una letra en álgebra y sus distintos usos.

Finalmente, solo 13 participantes lograron indicar correctamente el término 20 de la sucesión, y no coincide con aquellos que indicaron bien la ley de formación. Por ejemplo, GD_8 explicó la ley de formación como una sucesión recurrente, pero al pedirle indicar cuántos cuadritos tendría la figura 20, escribió lo que se muestra en la figura 6. El dibujo que realiza en la parte inferior izquierda demuestra que el participante entendía el patrón no solo como algo recurrente, pero no fue capaz de verbalizarlo de esa forma.

Figura 6

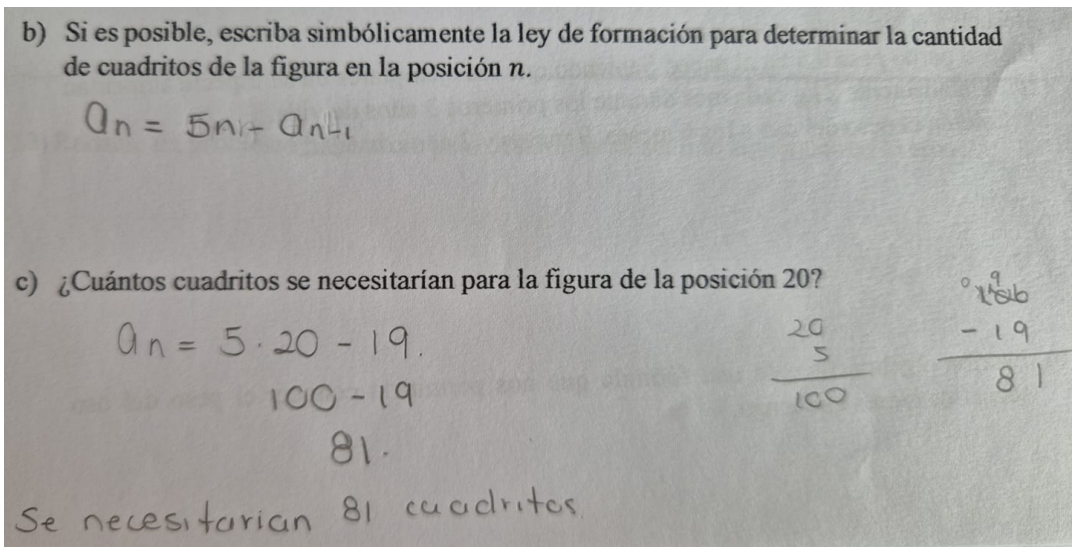
Respuesta dada por GD_8 a la pregunta 3, ítem c



Un caso interesante es el participante GD_{17}, quien explicó la ley de formación como $a_n = 5n - a_{n-1}$, tal como se aprecia en la figura 7; sin embargo, en el siguiente ítem, se aprecia que realmente lo que quiso decir es que $a_n = 5n - (n-1)$, lo cual es lo mismo que $a_n = 4n + 1$, pero claramente con un razonamiento distinto.

Figura 7

Respuesta dada por GD_{17} a la pregunta 3, ítem b y c



CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo era describir las producciones de futuros maestros al resolver tres tareas sobre patrones y sucesiones, como una aproximación al conocimiento y entendimiento que se tiene del álgebra al respecto.

Kieran (2017) resaltaba que, para lograr una transición exitosa entre la aritmética y el álgebra, es necesario que los docentes entiendan las dificultades existentes en torno al uso de la letra y la importancia de dotar a esta actividad de significado. Esto merece espacial atención, pues los resultados muestran que incluso los futuros maestros enfrentan dificultades entorno al uso de la letra y su significado.

Aunque se requiere un análisis más profundo, algunos hallazgos son interesantes. Por ejemplo, las sucesiones aritméticas les resultan más sencillas, como se refleja en el número de respuestas correctas obtenidas en estos casos. También se observa una tendencia a ver todas las sucesiones como recurrentes, interpretando el patrón como el cambio que ocurre sobre el término anterior en la sucesión.

Particularmente, se observó una gran dificultad para explicar verbalmente el patrón que sigue una sucesión, a pesar de que los participantes demostraron entenderlo al identificar correctamente los siguientes términos. Este aspecto merece especial atención, ya que serán ellos quienes, en el futuro, deberán explicar y fomentar el entendimiento de estos patrones entre el estudiantado.

Además, se destacan malas concepciones y errores en cuanto a la escritura simbólica, lo que lleva al uso incorrecto de símbolos, como la utilización de la misma letra para denotar variables distintas. Igualmente, al explicar las sucesiones de forma recursiva, se observa que se hace referencia al término anterior utilizando la misma letra, lo que también es incorrecto.

Finalmente, es relevante destacar que, al menos en las tres preguntas estudiadas, los participantes de tercer año mostraron un mejor desarrollo y desempeño que los de cuarto. Esto podría explicarse por el hecho de que en tercer año cursan la asignatura de Didáctica de la Matemática II, lo que hace que los contenidos, al estar más recientes, les resulten más familiares.

Se espera que lo resultados mostrados sirvan para la toma de acciones y decisiones en torno a la formación de maestros, los futuros docentes deben aprender matemáticas con sentido y estar preparados para enseñar matemáticas con sentido (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022).

Referencias

Aké, L. (2019). Conocimiento matemático de maestros en formación sobre la simbología algebraica. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 10*(19), 55-70. https://doi.org/10.33010/ierierediech.v10i19.506

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Blanton, M. y Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears: Understanding characteristics of professional development that promote generative and selfsustaining change in teacher practice. *Teaching Children Mathematics,* (10), 70-77. https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/10/2/article-p70.xml

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-17735-4

Callejo, M.J., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5–25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 73*, 7-13.

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.

Castro, W., Godino, J. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNION, 25*, 73-78.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 669- 705). Information Age Publishing, NCTM. https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781315097435-12/early-algebra-algebra-early-david-carraher-anal%C3%BAcia-schliemann-judah-schwartz

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8th ed.). Routledge. https://www.routledge.com/Research-Methods-in-Education/Cohen-Manion-Morrison/p/book/9781138209886

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta edición). McGraw Hill.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity for an engine of mathematical power by "algebraizing" the K-12 curriculum.* NCTM, National Academy Press.

Kieran, C. (2017). *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-old: The global evolution of an emerging field of research and practice.* Springer.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Fong, D. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching.* Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (pp. 45–70). Kluwer Academic. https://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-8131-6_4

McAuliffe, S. y Vermeulen, C. (2018). Preservice Teachers' Knowledge to Teach Functional Thinking. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds.* Springer. http://www.springer.com/series/15585

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: Una introducción conceptual* (Quinta edición). Pearson Educación, S. A.

MEP. (2012). *Programas de Estudio de Matemática*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2023). Análisis de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en SCOPUS. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 411–418). SEIEM.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM.

NCTM. (2006). *Principles and Standards for School Mathematics.* NCTM.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático Escolar. En L. Blanco-Nieto, N. Climent-Rodríguez, M. T. González-Astudillo, A. Moreno-Verdejo, G. Sánchez-Matamoros García, C. Castro-Hernández y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*. Editorial Universidad de Granada.

Samson, D. y Schafer, M. (2007). An analysis of the influence of question design on learners' approaches to number pattern generalization tasks. *Pythagoras, 66*, 43–51.

¿QUÉ SE ESCONDE DENTRO DE LA BOTELLA? UNA PROPUESTA DE RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN ESTADÍSTICA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA

What's hidden inside the bottle? A study and research path in statistics for secondary education

Vásquez, S.[a,b], Barquero, B.[a], Bosch, M.[a]

[a] Universitat de Barcelona [b] Col.legi Natzaret (Esplugues, Barcelona)

Resumen

Este trabajo tiene por objetivos abordar el fenómeno didáctico de la invisibilidad del tratamiento de datos y explorar la introducción del razonamiento inferencial informal en la etapa de educación secundaria. Situada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, nuestra investigación presenta un recorrido de estudio e investigación (REI) para la enseñanza de la inferencia estadística, elaborado a partir de una propuesta original de Guy Brousseau. Analizamos una primera implementación con 60 estudiantes de 1º de ESO que permite poner de manifiesto algunos aspectos del fenómeno, como la falta de espontaneidad en la recogida de datos, poco consenso en las técnicas y limitaciones para emplear terminología específica y formular justificaciones razonadas. Los resultados indican que el diseño del REI ofrece condiciones favorables para superar algunas de estas limitaciones, pero que es necesario un diseño cuidadoso que tenga en cuenta este fenómeno y lo aborde explícitamente.

Palabras clave: estadística inferencial, educación secundaria, recorrido de estudio e investigación.

Abstract

This paper aims to address the didactic phenomenon of the invisibility of data treatment and to explore the introduction of informal inferential reasoning in secondary education. Grounded in the Anthropological Theory of the Didactic, our research presents a Study and Research Path (SRP) for teaching statistical inference, based on Guy Brousseau's original proposal. We analysed an initial implementation with 60 first-year secondary students, which reveals some aspects of the phenomenon, like the lack of spontaneity in data collection, limited consensus on the techniques, and challenges in using precise terminology and providing well-reasoned justifications. The results indicate that the SRP design provides favourable conditions to overcome some of these limitations, but it also highlights the need for a careful design that explicitly considers this phenomenon and addresses it directly.

Keywords: *inferential statistics, secondary education, study and research path.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística en la educación secundaria enfrenta diversas dificultades y obstáculos conceptuales y didácticos. Batanero (2013) describe cómo, desde la psicología, se analizan las dificultades y errores asociados a concepciones intuitivas erróneas, como la "ley de los pequeños números", que lleva a asumir que una muestra pequeña representa toda la población, un error sistemático relacionado con la heurística de la representatividad (Kahneman y Tversky, 1972). Autores como Begué et al. (2018) han estudiado la comprensión por parte de los estudiantes del concepto de variabilidad en el muestreo, concluyendo que la mayoría de los estudiantes no la comprenden bien e incluso perciben más variabilidad en muestras grandes que en las pequeñas, lo que constituye un obstáculo epistemológico clave en la comprensión de la ley de los grandes números.

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2025). ¿Qué se esconde dentro de la botella? Una propuesta de recorrido de estudio e investigación para la educación secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial-final). SEIEM.

De manera similar, el estudio de Shaughnessy et al. (2004) propone tres niveles progresivos en el razonamiento sobre el muestreo: el aditivo, que tiende a basarse en las frecuencias absolutas; el proporcional, que utiliza implícita o explícitamente proporciones de muestra o proporciones de población, probabilidades o porcentajes; el distribucional, que integra las ideas de frecuencia observada, frecuencia esperada y variabilidad al realizar estimaciones.

Al considerar los procesos de transposición didáctica y su impacto en la enseñanza de la estadística, Verbisck et al. (2023) analizan el fenómeno didáctico de la *transparencia o invisibilidad del tratamiento de datos* relacionado con las dificultades asociadas a dar un estatus claro a todo aquello relativo a la búsqueda, selección y organización de datos, entre otros aspectos, al tratarse de un ámbito de conocimiento que las instituciones escolares difícilmente asocian a la matemática o estadística. Este fenómeno está todavía poco estudiado, como muestra la revisión sistemática realizada por De la Fuente y Garrido-Martos (2024).

Nuestra investigación persigue un doble objetivo. El primero, más general y que marca la línea de investigación en la que estamos trabajando, se centra en analizar qué condiciones pueden crearse para estudiar el fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos al potenciar en el aula un trabajo sistemático de recogida y organización de datos. Y, el segundo consiste en analizar el potencial de la situación didáctica de las bolas ocultas dentro de la botella para introducir la inferencia estadística informal en primeros cursos de la educación secundaria obligatoria, sujeto a un proceso de recogida y análisis de datos experimentales, la formulación de hipótesis y la creación de un medio empírico para su validación a partir del estudio de la variabilidad muestral.

Para abordar ambos objetivos, partimos del diseño y análisis de una propuesta para enseñar estadística en la ESO, basada en el trabajo pionero de Guy Brousseau sobre muestreo e inferencia estadística a partir de la composición de una botella opaca con bolas de distintos colores (Brousseau et al., 2002). Este trabajo analizaba las condiciones para que estudiantes de primaria pudieran "construir por sí mismos una comprensión genuina del carácter aleatorio y de la significación del muestreo estadístico" (Brousseau et al., 2002, p. 364, traducción propia), posibilitando la emergencia de la inferencia estadística informal (Batanero y Brovcnik, 2016; Ben-Zvi et al., 2015). Nuestra investigación se propone continuar con las adaptaciones de esta propuesta en distintos niveles escolares (Granell y Barquero, 2019; Briand, 2005 y Nilsson, 2020) y en formación del profesorado (Hakamata et al., 2023), considerando el caso de la educación secundaria y añadiendo un foco sobre la cuestión de la recogida y tratamiento de los datos para abordar nuestros objetivos de investigación.

LA PROPUESTA ORIGINAL DE BROUSSEAU Y SUS ADAPTACIONES

La propuesta original de Brousseau se desarrolla en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas. El experimento prototípico parte de considerar una botella totalmente opaca con cinco bolas de dos colores. La única forma de obtener información sobre su contenido es agitar, girar la botella y observar el color de una de las bolas que aparece a través de un pequeño agujero en el tapón, simulando un muestreo aleatorio con reemplazo. A partir de estas observaciones, los alumnos formulan hipótesis sobre la composición oculta de la botella, haciendo emerger conceptos fundamentales de probabilidad y estadística inferencial. Brousseau diseñó esta actividad para alumnos de quinto curso de educación primaria. La implementación completa abarcaba un total de seis fases, distribuidas en veintiséis sesiones de clase, en las que, según Brousseau:

> Los estudiantes construyen una experiencia (un conocimiento no institucionalizado) de las fluctuaciones de las series estadísticas, de la ley de los grandes números, de una forma de convergencia hacia una frecuencia teórica, de una aproximación de los intervalos de confianza y de la noción de prueba de hipótesis, del aumento del nivel de confianza, todo esto sin definiciones formales, sino como respuesta a preocupaciones deterministas, y con una epistemología empirista espontánea característica de su desarrollo (Brousseau, 2009, p. 6, traducción propia).

Brousseau buscaba evitar una introducción prematura al cálculo de probabilidades y que los estudiantes se aproximaran experimentalmente a la relación entre estos cálculos, la ley de los grandes números y las pruebas de hipótesis. Así, se evitaba la "retórica del azar" y la interpretación de eventos asilados. La propuesta de Brousseau representa un modelo dinámico para la construcción del conocimiento estadístico, que difiere del enfoque tradicional que suele postergar la experimentación con fenómenos aleatorios hasta el final de la educación secundaria. Más adelante, Briand (2005) adapta la situación para estudiantes del último curso de la educación secundaria obligatoria (15-16 años) y busca identificar los obstáculos que dificultan a los estudiantes desarrollar un enfoque probabilístico, introduciendo y problematizando el "muestreo" desde el principio, en contraposición con la propuesta de Brousseau, donde los estudiantes descubren estos conceptos por sí mismos. También Nilsson (2020) parte de la propuesta de Brousseau e investiga el razonamiento detrás de la generación de hipótesis, adaptando la propuesta a estudiantes de quinto curso de educación primaria. Su objetivo es examinar cómo los estudiantes realizan inferencias sobre distribuciones de probabilidad. La actividad se desarrolla en tres fases: observación de frecuencias con una botella transparente, formulación de hipótesis con una botella opaca e investigación entre muestras para detectar variaciones y controlar el sesgo.

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Granell y Barquero (2019) proponen una adaptación de la situación de la botella en forma de recorrido de estudio e investigación (REI) para educación primaria. Esta versión, diseñada para estudiantes de cuarto curso, simplifica la estructura en tres fases: formulación de hipótesis con botellas comunes (cinco bolas de dos colores), intercambio de botellas compuestas por los propios grupos de alumnos y aplicación en un contexto real con botellas de 10 bolas y cuatro colores, simulando un control de calidad. Esta adaptación, además de reducir el número de sesiones, introduce escenarios más cercanos a la experiencia cotidiana de los estudiantes, promoviendo técnicas aditivas y la reflexión sobre el tamaño muestral desde edades más tempranas. No aborda, sin embargo, el estudio de la relación entre el tamaño muestral y el nivel de confianza a partir de simulaciones con botellas de distinto contenido.

EL ENIGMA DE LA BOTELLA PARA UN PRIMER CURSO DE SECUNDARIA

Metodología y condiciones de la experimentación

El trabajo que presentamos aquí adopta el marco de investigación de la TAD, junto con la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2020) que distingue cuatro fases dentro de un proceso cíclico de diseño, experimentación y rediseño de propuestas de enseñanza. La primera fase, con el análisis preliminar, identifica los objetivos de la propuesta, generalmente vinculados al estudio de fenómenos didácticos por explorar. La segunda fase, el análisis *a priori*, detalla los elementos del diseño de la propuesta poniendo especial énfasis en anticipar el juego entre las variables didácticas principales, las cuestiones o problemas planteados y las respuestas esperadas en su supuesta implementación. El análisis *in vivo*, tercera fase, corresponde a la implementación de la propuesta e incluye las decisiones y ajustes que se realizan durante el propio proceso didáctico. Finalmente, el análisis *a posteriori* considera los principales elementos de la implementación tanto en relación con los fenómenos didácticos considerados, como el análisis *a priori*, destacando aspectos del diseño por modificar de cara a posibles nuevas implementaciones.

La experimentación se realizó en el Col·legi Natzaret, de Esplugues de Llobregat (Barcelona), con 60 estudiantes de 1º de la ESO (12-13 años) y cuatro profesoras, incluida la primera autora. La organización de clases es flexible, permitiendo tanto un trabajo conjunto de todos los estudiantes de manera simultánea, como divididos en dos clases. La experimentación siguió el diseño previsto en el análisis *a priori*. Los datos se recogieron a partir de las producciones finales de los estudiantes y de observaciones sistemáticas de aula, por parte de una observadora externa al equipo docente, sobre las interacciones y participación de los estudiantes. Las tres profesoras participantes, ajenas al equipo de

investigación, fueron instruidas en la propuesta a través de documentos guía y reuniones de coordinación. Aun así, la puesta en aula fue conducida, principalmente, por la primera autora.

Análisis preliminar

Recordemos que la propuesta persigue un doble objetivo: estudiar qué condiciones se han creado y qué restricciones aparecen asociadas al fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos; y estudiar las condiciones para introducir actividades relativas a la estadística inferencial informal en secundaria. Para el diseño de esta propuesta, basada en un REI, partimos del modelo epistemológico de referencia (MER) propuesto por Hakamata et al. (2023, p. 6) que se esquematiza en un mapa de cuestiones y respuestas. Este modelo de referencia opera como una herramienta emancipadora para desvincular al investigador de los modelos dominantes sobre estadística en las instituciones escolares consideradas. El modelo considera cinco fases: exploración del experimento (Q_1), diseño del muestreo (Q_2), recogida de datos (Q_3) y su análisis (Q_4) y formulación y validación de hipótesis (Q_5).

Diseño y análisis *a priori*

Se planifican un total de cinco sesiones. La actividad comienza con los estudiantes organizados en grupos de tres o cuatro integrantes. Cada equipo recibe una botella opaca, sellada y numerada, para que se pueda posteriormente identificar, cuyo contenido no se puede ver directamente ni abrir en ninguna circunstancia. Las botellas contienen 25 bolas de cuatro colores (Tabla 1). Su composición se ha elegido para: evitar técnicas directas en la comparación de las frecuencias observadas para la formulación de hipótesis ("tantas rojas como azules"); facilitar la identificación de dos tipos de botellas para poder acumular los datos recogidos por los grupos de estudiantes con botellas supuestamente idénticas; generar distintos tipos de variabilidades en el muestreo con proporciones grandes y pequeñas de algunos colores. En el análisis *in vivo* y *a posteriori* discutiremos el acierto de estas decisiones *a priori* y su posible modificación de cara a futuras implementaciones.

Tabla 1

Composición de las botellas

Botella	Azul	Rojo	Amarillo	Rosa	Total
A	12	7	5	1	25
B	1	8	2	14	25

En la primera sesión, las docentes entregan una botella sellada a cada grupo, permiten que experimenten con ellas y plantean la cuestión Q_0: *¿Cuál es el contenido de cada botella?* A continuación, guían una discusión colectiva para identificar qué información se puede conocer (colores presentes y recogida de datos para el cálculo de frecuencias observadas) y qué información permanece desconocida (número exacto de bolas de cada color). Las docentes revelan posteriormente que la única información que puede proporcionar es que dentro de cada botella hay 25 bolas idénticas de tamaño de distintos colores, pero desconoce la composición. Piden a los estudiantes que antes de acabar la primera sesión (en un límite de 20 minutos) generen sus propias hipótesis sobre el contenido oculto de la botella. El objetivo principal de esta fase es que los estudiantes realicen una primera recogida de datos, formulen hipótesis iniciales sobre la distribución de colores en el interior de la botella y reflexionen sobre cómo se organiza un estudio estadístico. Para ello, los estudiantes observan el color de las bolas a través de un pequeño orificio en la botella (simulando un muestreo aleatorio con reemplazo) y registran los primeros datos y sus primeras impresiones. Se prevé que surjan las cuestiones derivadas $Q_{1.1}$: *¿Cuántos colores hay?* y $Q_{1.2}$: *¿Cómo saber con seguridad que no hay más colores?* Se prevé que la sesión finalice con una puesta en común donde los estudiantes comparten sus hipótesis, basadas en el razonamiento aditivo y con una recogida de datos aún no suficiente. Las docentes deberán comparar las técnicas de recogida de datos y dar importancia a ser metódicos en la recogida de datos y registrar el máximo de información disponible, además pueden surgir reflexiones sobre tamaño muestral y cómo tomarlo en cuenta para avanzar en el grado de

seguridad de las hipótesis consideradas. Entre las posibles nuevas cuestiones previstas están las relativas al tamaño de las muestras: Q_2: *¿Cuántas observaciones son necesarias? ¿Cuál es el número mínimo para validar o invalidar una hipótesis?* Y también sobre el tipo de muestreo y las técnicas de recogida de datos Q_3: *¿Qué información se debe recopilar del experimento?* $Q_{3.1}$: *¿Se debe considerar solo la frecuencia del color o también el orden de aparición?* $Q_{3.2}$: *¿Qué tipo de información se gana o pierde en cada caso?* Al acabar la primera sesión, se puede proporcionar a los estudiantes un glosario para completar, con vocabulario clave en la situación (formulación de hipótesis, tamaño de la muestra, organizar y analizar datos, validar hipótesis) para introducir la terminología que permitirá designar e institucionalizar las técnicas de recogida y tratamiento de los datos. Se prevé que los estudiantes completen el glosario individualmente como tarea.

En una segunda fase, los estudiantes siguen considerando la cuestión generatriz Q_0, pero, en este caso, las docentes dan instrucciones más claras sobre la recogida de datos y piden una muestra de, como mínimo, $n = 100$ visualizaciones. En esta fase se prevé que los estudiantes exploren diferentes técnicas de recogida de datos y su eficacia. La sesión termina con una puesta en común de los resultados de las observaciones de cada equipo y las hipótesis que estos proponen sobre la distribución de piezas de cada color en el interior de la botella. Se espera que las 100 visualizaciones orienten a los estudiantes a considerar las frecuencias relativas (como fracciones o como porcentajes), que usen entonces para justificar la hipótesis sobre la distribución de colores respecto a las 25 bolas. Otra de las cuestiones que se espera es si todas las botellas tienen la misma composición.

Para verificar la hipótesis de los dos tipos de botellas, en la siguiente sesión se repite la misma estrategia, pero aumentado el tamaño muestral (150, 200 o 300 visualizaciones). En esta fase se deberían abordar cuestiones relativas a las frecuencias absolutas como Q_4: *¿Cómo analizar los datos observados?* $Q_{4.1}$: *¿Cómo representar las frecuencias absolutas observadas?* $Q_{4.1.1}$: *¿Cómo comparar los resultados al variar el tamaño de la muestra?* $Q_{4.1.2}$: *¿Cómo interpretar las diferencias entre frecuencias y su variación dependiendo del tamaño de la muestra?* Deberían entonces aparecer los cálculos de las frecuencias relativas y abordar nuevas cuestiones asociadas $Q_{4.2}$: *¿Cómo calcular las frecuencias relativas?* $Q_{4.3}$: *¿Cómo deducir las hipótesis a partir de las frecuencias observadas?* $Q_{4.3.1}$: *¿Cómo gestionar los errores de redondeo?* La sesión terminará con la propuesta de comparar las botellas según estos dos tipos: aquellas con más bolas azules y aquellas con más bolas rosas.

En la fase final, los grupos se separan según esta clasificación para poder recopilar y analizar conjuntamente los datos de los equipos con botellas equivalentes, ampliando así considerablemente la muestra considerada y mejorando la precisión de sus estimaciones. Los estudiantes revisan sus hipótesis a la luz de estos nuevos datos y generan una hipótesis final sobre la composición de la botella basada en aproximadamente 2000 visualizaciones. Se espera que surjan reflexiones sobre la variabilidad de los datos en muestras más pequeñas (las de cada equipo) y muestras más amplias (cuando se han juntado los datos): $Q_{4.4}$: *Si las botellas tienen la misma composición, ¿por qué hay tanta diferencia entre lo que ha observado un grupo u otro?* $Q_{4.1}$: *¿Las diferencias observadas dependen del color de la bola?* Y, sobre el grado de fiabilidad o validez de las hipótesis Q_5: *¿Cuándo y por qué se debe cambiar la hipótesis? ¿Qué nos hace estar más seguros? ¿En qué casos se puede validar o refutar una posible hipótesis? ¿Cómo varía el nivel de confianza que asignamos a las distintas hipótesis?* Los docentes deberán guiar una discusión para reflexionar sobre el proceso seguido, destacando la importancia de la precisión en la recolección de datos, el tamaño de la muestra, la generación de las hipótesis, la variabilidad de los datos y recalcarán que las hipótesis generadas son *coherentes* o no con los datos analizados, pero no se puede determinar si son *ciertas*, ya que el experimento realizado solo permite dar una estimación de la realidad. Finalmente, se solicitará a cada grupo que elabore un informe que describa las distintas etapas del experimento, justifique sus conclusiones a partir de los datos recolectados y evalúe el nivel de confianza en las hipótesis consideradas.

RESULTADOS: ANÁLISIS *IN VIVO*

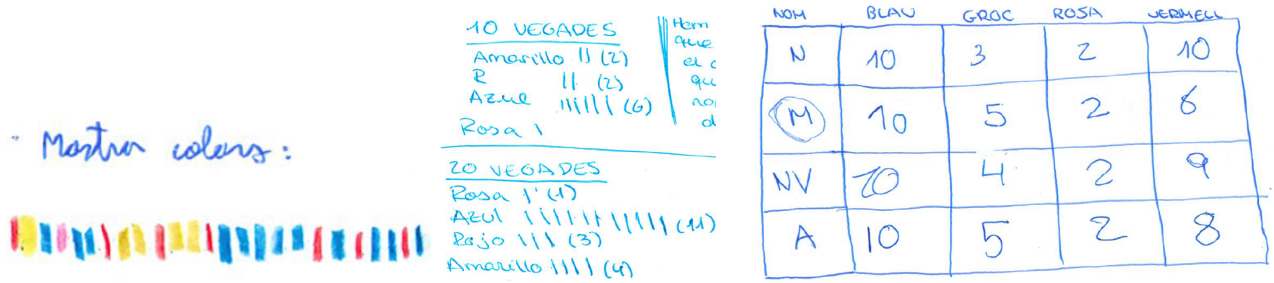
La primera sesión se realizó siguiendo el diseño previsto, abordando las cuestiones Q_0 y Q_1. En esta fase apareció la cuestión prevista $Q_{1.1}$: *¿Cuántos colores hay?* pero no $Q_{1.2}$: *¿Cómo saber con seguridad que no hay más colores?* Se observó que las docentes insistieron en la recogida de datos, pero tres de los diez equipos no los registraron. Por ejemplo, un equipo que escribe:

> Hemos observado que hay 4 colores, el rojo, el azul, el amarillo y el rosa. Hay 25 bolitas de pulseras. Creemos que no todas las botellas son iguales y que los colores no son equitativos. El azul es el que sale más, después el rojo, a continuación, el amarillo y por último el rosa.

Los demás grupos sí recogen los datos y lo hacen de maneras muy diversas, con recuentos agrupados de una sola muestra (Figura 1, izquierda), con muestras de tamaños diferentes (Figura 1, central) o con muestras del mismo tamaño, pero repetidas varias veces (Figura 1, derecha).

Figura 1

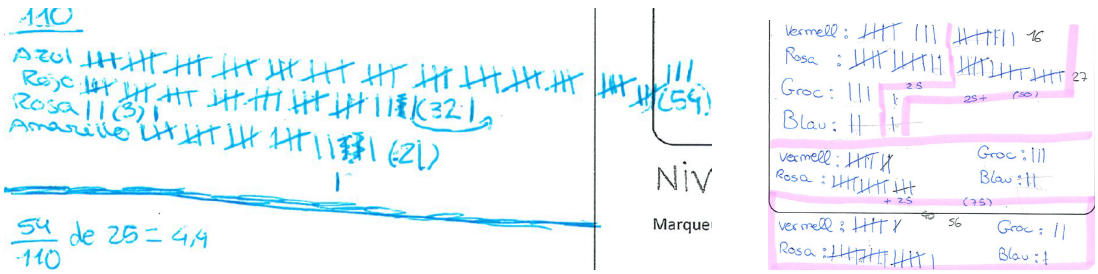
Ejemplos de producciones de estudiantes con diferentes técnicas para la recogida de datos.



En la segunda sesión, las docentes siguieron el diseño previsto: algunos equipos explicaron sus hipótesis y cómo habían llegado a ellas; las docentes propusieron una recogida de datos por equipo con una muestra de 100 visualizaciones. Se observan dos estrategias principales que usaron los estudiantes: un único muestreo de 100 (Figura 2, izquierda) y cuatro muestreos de 25 (Figura 2, derecha). En el primer caso, deducen la hipótesis dividiendo las frecuencias observadas entre 4 o aplicando el porcentaje observado al conjunto de 25 bolas. En el segundo, cada muestra da lugar a una hipótesis parcial y se elige como hipótesis final una propuesta coherente con las cuatro.

Figura 2

Ejemplos de producciones de estudiantes con diferentes técnicas para la recogida de datos.



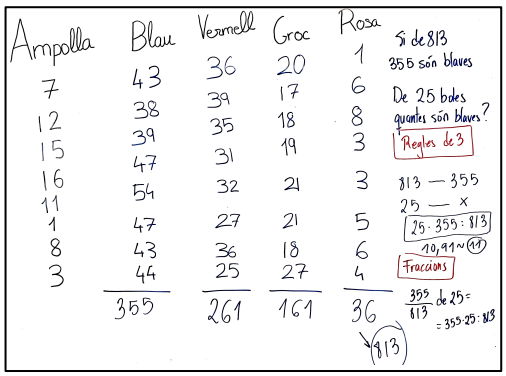
Al tomar la decisión de fijar el tamaño de la muestra, no surgieron ni se abordaron las cuestiones Q_2 y Q_3, relativas al diseño del experimento y Q_4, relativas a la variabilidad del muestreo. Tampoco aparecieron nuevas cuestiones sobre cómo gestionar el redondeo ni cómo determinar la hipótesis más cercana a las cuatro muestras obtenidas. En la puesta en común grupal, al final de esta sesión, se consiguió poner en evidencia que había dos bloques muy diferenciados de frecuencias observadas.

Por motivos de calendario, se dispuso de dos sesiones menos de las previstas y se decidió eliminar el muestreo de tamaños intermedios y pasar directamente a la fase final de unificación de las muestras para los dos tipos de botellas. Para los dos tipos de botella se consideraron los resultados obtenidos por cada grupo y el resultado global (Figura 3). Aquí surgió la cuestión prevista $Q_{4.3}$: *¿Cómo deducir*

las hipótesis a partir de las frecuencias observadas? Algunas de las docentes mencionaron la regla de tres, refiriéndose al tema de las escalas en geometría que se había visto la semana anterior. Este comentario dirigió mucho las técnicas de los alumnos y varios equipos (7 de 16) abandonaron el uso de las frecuencias relativas, en fracciones o porcentajes, que había surgido como técnica principal en la fase anterior, facilitada por la muestra de tamaño 100. Aquí sí surgió la cuestión del redondeo decimal, pero no hubo tiempo para comentar cuestiones relativas a la variabilidad muestral de cada color ni a la comparación de las hipótesis respecto su nivel de confianza asignado.

Figura 3

Ejemplo de la pizarra de clase después de la puesta en común de la fase final



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En cuanto al primer objetivo de investigación sobre el fenómeno de la invisibilidad del tratamiento de datos, la implementación del REI muestra la falta de espontaneidad de los estudiantes en el registro de datos. Como describimos previamente, en los primeros muestreos, los estudiantes no ven la necesidad registrar las observaciones realizadas. Las docentes deben recordar constantemente, en las puestas en común, la necesidad de realizar esta recogida para poder justificar numéricamente las primeras hipótesis formuladas. Lo interpretamos como un síntoma de la ausencia de un tratamiento de datos en la cultura matemática escolar. Otra manifestación de este fenómeno es la falta de consenso y terminología asociada al registro de los datos. Aun así, ante estas limitaciones, el diseño del REI ofreció un buen escenario para construir dar sentido a la recogida de datos, construir colectivamente estas técnicas ausentes y asociar una termología específica a las herramientas usadas.

Sobre el segundo objetivo, en este trabajo se presenta un primer estudio exploratorio de la propuesta del REI sobre qué se esconde dentro de la botella para primeros cursos de Secundaria. A partir del análisis *a posteriori*, se destacan varios aspectos relativos a las variables didácticas del diseño, algunos vinculados con las limitaciones previamente comentadas. En primer lugar, traer las botellas ya construidas y selladas implica dedicar mucho tiempo a discutir el tipo de contenido. Sería más apropiado, en la primera sesión, mostrar el tipo de bolas que se ocultan para que los estudiantes pudieran comprobar que se trata de piezas del mismo tamaño y peso tal como se proponía en el diseño original (Brousseau et al., 2002). En segundo lugar, la composición extrema de los dos tipos de botellas facilita su distinción prácticamente inmediata cuando los datos se exponen de manera conjunta. Además, el augmento en su complejidad (25 bolas de 4 colores) en comparación con la adaptación en primaria (5 bolas y 2 colores o 10 bolas y 4 colores) facilita la emergencia de técnicas proporcionales y distribucionales (Shaughnessy et al., 2004) que no aparecieron en el caso de primaria (Granell y Barquero, 2019). Sin embargo, se ha observado que tan pronto como algunas de las docentes mencionaron la regla de tres, por tradición o cercanía a otros temas abordados, desapareció la justificación de las hipótesis a partir de la interpretación de las frecuencias relativas. Este hecho jugó en detrimento de la construcción de una justificación de las técnicas basada en el uso e interpretación de fracciones y porcentajes. Es posible que una sesión de muestreo intermedio (n = 150 o n = 200), que no se pudo realizar en esta ocasión, facilite la institucionalización de técnicas

proporcionales y distributivas, que emergieron de forma incipiente, para dotarlas de un papel prioritario en la inferencia. También consideramos conveniente, en futuras implementaciones, incluir cuestiones sobre el estudio de la dispersión de los datos obtenidos a partir de diferentes composiciones de botellas y la relación del tamaño muestral con el nivel de confianza de las hipótesis, como también se propone en Hakamata et al. (2023).

Agradecimientos

Proyectos PID2021-126717NB-C31 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y PDC2022-133812-C22.

Referencias

Artigue, M. (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 202–206). Springer.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 55–64). https://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/Actas%20jornadas.pdf

Batanero, C. y Brovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Sense Publishers.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 291–303. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las ciencias, 36*(2), 63–79. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256

Briand, J. (2005). Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(2), 247–282. https://revue-rdm.com/2005/une-experience-statistique-et-une/

Brousseau, G. (2009). Alternatives en didactique de la statistique. *41èmes Journées de Statistique, SFdS*, Bordeaux. https://inria.hal.science/inria-00386626/

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 363–411. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00078-0

De la Fuente, A. y Garrido-Martos, R. (2024). El Sentido Estocástico en los simposios de la SEIEM (2010-2023). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 185-192). SEIEM.

Granell, C. y Barquero, B. (2019). Experiència amb un recorregut d'estudi i investigació sobre la inferència estadística a l'educació primària. Què s'amaga dins l'ampolla*? Noubiaix, 44*, 54–69. https://raco.cat/index.php/Noubiaix/article/view/371495

Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*(3), 430-454. https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3

Nilsson, P. (2020). Students' informal hypothesis testing in a probability context with concrete random generators. *Statistics Education Research Journal, 19*(3), 53–73. https://doi.org/10.52041/serj.v19i3.56

Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the PME* (vol. 4, pp. 177-184). PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED489640.pdf

Verbisck, J., Barquero, B., Bittar, M. y Bosch, M. (2024). A study and research path for teacher education in statistics: dealing with the transparency of data treatment. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the CERME13*. Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME. https://hal.science/hal-04413704v1

PÓSTERES

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL VOLUMEN EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Analysis of Secondary students' understanding of volume

Alarcón-Díaz, E. M.[a] y Carrillo-Gallego, D.[b]

[a] IES Los Molinos (Cartagena), [b] Universidad de Murcia

La enseñanza de la medida constituye un eje fundamental en la educación matemática, tanto por su presencia constante en la vida cotidiana como por su capacidad para establecer conexiones entre el conocimiento escolar y el mundo real. Diversos estudios como los de Fraile-González et al. (2024) y García y Romero (2024) subrayan la necesidad de contextualizar los contenidos de medida para promover aprendizajes significativos. Por otro lado, algunas investigaciones ponen de manifiesto dificultades persistentes en la comprensión del volumen como magnitud, que se observan incluso entre futuros docentes (Caro y Planas, 2021).

El objetivo general del trabajo es valorar la comprensión del volumen en estudiantes de secundaria. En el póster se presentan los resultados de un estudio exploratorio realizado con una muestra de 53 estudiantes de 3.º de la ESO, con edades entre 14 y 16 años, que estudian en un Instituto de Educación Secundaria de la Región de Murcia.

Se les presentó un cuestionario basado en el estudio de Hart (1981), desarrollado en el marco del proyecto Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS), referido a cómo entienden el volumen los estudiantes de secundaria. El cuestionario se organiza en torno a dos conceptos diferenciados: volumen externo (volumen ocupado, la cantidad de espacio que ocupa un objeto) y volumen interno (capacidad de un objeto hueco). En el análisis de las respuestas se han identificado y categorizado las estrategias empleadas por el alumnado en la resolución de las pruebas, así como errores recurrentes al llevar a cabo dichas estrategias, aspectos que no son abordados explícitamente en el estudio CSMS.

Los resultados obtenidos inciden en la complejidad que entraña la comprensión de los conceptos y procedimientos relativos al volumen. Los sujetos del estudio usan la fórmula del volumen en mayor proporción en el CSMS, lo que explica el mayor porcentaje de respuestas correctas. Se ha planteado continuar el estudio analizando los libros de texto de este nivel, utilizados en el centro educativo, en lo que se refiere al volumen, para contrastar los resultados con las estrategias detectadas en esta parte del estudio.

Referencias

Fraile-González, J., Méndez, M., Palop, B. y Belmonte, J. M. (2024). Análisis de los errores en la medida de longitudes en el mesoespacio en el contexto de un proyecto STEAM. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 233-240). SEIEM.

García, M. M. y Romero, I. M. (2024). Relación entre superficie y volumen mediante manipulativos y realidad virtual. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 257-264). SEIEM.

Hart, K.M. (1981). *Children's understandings of mathematics: 11-16*. John Murray.

Caro, A. y Planas, N. (2021). Estudio exploratorio con futuras maestras sobre lenguas matemáticas para enseñar la relación entre área y volumen. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *19*, 117-131. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i19.361

Alarcón-Díaz, E. M. y Carrillo-Gallego, D. (2025). Análisis de la comprensión del volumen en estudiantes de secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

EL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO AL ANALIZAR RESPUESTAS GENERADAS POR IA

Prospective teachers' geometric knowledge when analysing AI-generated responses

Alonso-Castaño, M., Abella-Vázquez, M., Tagarro, D. y Santaengracia, J. J.

Universidad de Oviedo

La incorporación de la IA en el ámbito educativo está transformando los procesos de enseñanza-aprendizaje, pero plantea desafíos relacionados con el pensamiento crítico y el uso responsable de estas herramientas (Delgado de Frutos et al., 2024). Teniendo en cuenta que los estudiantes para maestro (EPM) a menudo muestran imprecisiones al definir objetos geométricos (González-Regaña et al., 2021), resulta relevante explorar cómo interpretan, analizan y corrigen respuestas generadas por IA sobre estos contenidos. Así, se planteó una actividad en la que los EPM debían solicitar a una IA una explicación sobre algún aspecto relacionado con la circunferencia que, posteriormente, debían analizar para detectar errores y proponer mejoras didácticas. El objetivo era comprobar si los EPM mostraban un conocimiento didáctico y del contenido que les permitiese discriminar qué información resultaba incorrecta o se podía mejorar. Se analizaron 19 producciones de EPM mediante un análisis de contenido bajo el prisma del modelo MTSK (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Los resultados muestran que ninguno de los EPM fue capaz de identificar todos los errores conceptuales cometidos por la IA, destacando el uso indistinto de los términos *círculo* y *circunferencia* o expresiones incorrectas como *borde del círculo*. Asimismo, las propuestas de mejora se centraron predominantemente en el acompañamiento visual mediante dibujos. Los resultados evidencian carencias en el conocimiento matemático y en la capacidad de los EPM para anticipar errores comunes en el aprendizaje del alumnado. Estas dificultades pueden relacionarse con una débil aprehensión discursiva (Clemente y Llinares, 2013) que compromete su futura enseñanza, subrayando la importancia de reforzar la comprensión conceptual y lingüística en la formación docente.

Agradecimientos

Proyecto GRUPIN-IDE/2024/000713 (Agencia SEKUENS). JJS está financiado por FPU21/05874 del Ministerio de Ciencia e Innovación. MAC y JJS pertenecen a la Red MTSK.

Referencias

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236). SEIEM.

Delgado de Frutos, N., Campo-Carrasco, L., Sainz de la Maza, M. y Extabe-Urbieta, J. M. (2024). Aplicación de la Inteligencia Artificial (IA) en Educación: Los beneficios y limitaciones de la IA percibidos por el profesorado de educación primaria, educación secundaria y educación superior. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 27*(1), 207-224. https://doi.org/10.6018/reifop.577211

González-Regaña, A. J., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039

Alonso-Castaño, M., Abella-Vázquez, M., Tagarro, D. y Santaengracia, J. J. (2025). El conocimiento geométrico de estudiantes para maestro al analizar respuestas generadas por IA. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS PARA LA SOSTENIBILIDAD

Professional development of mathematics teachers for sustainability

Alsina, Á.[a], López-Serentill, P.[a], Pincheira, N.[a], Acosta, Y.[a] y Berciano, A.[b]

[a]Universitat de Girona, [b]Universidad del País Vasco

La Educación Matemática puede desempeñar un papel relevante en la construcción de un futuro inclusivo, sostenible y resiliente para las personas y el planeta (Alsina y Mulà, 2022). Para ello, durante la formación inicial del profesorado de matemáticas se precisa integrar la sostenibilidad, proporcionando los conocimientos y herramientas para que los docentes de matemáticas puedan convertirse en agentes del cambio social (Alsina, 2023). Las Naciones Unidas, la Unión Europea o la UNESCO promueven este enfoque integrado, que ha sido recogido en la LOMLOE (López-Serentill et al., 2024). El principal propósito es aumentar las oportunidades formativas de toda la población y satisfacer la demanda generalizada en la sociedad española de una educación de calidad, tomando como referencia el marco europeo de competencias sobre sostenibilidad *GreenComp* (Bianchi et al., 2022).

Con base en estos fundamentos, el proyecto de investigación orientado *GREENMATH* tiene por objeto, a través de las matemáticas, contribuir al desarrollo de las competencias de sostenibilidad. Dicho proyecto se focaliza en: (a) identificar las oportunidades y retos asociados a la integración de estas competencias en la educación matemática; (b) co-diseñar, implementar y analizar secuencias de enseñanza-aprendizaje, a través del Método *Lesson Study*; y (c) promover el desarrollo profesional docente en torno a la integración de competencias de sostenibilidad en la educación matemática. En este marco, este póster muestra los resultados iniciáticos sobre el análisis integrado de las competencias y saberes de matemáticas y sostenibilidad que consideran las escuelas participantes al diseñar secuencias de tareas: (a) las competencias específicas de matemáticas más presentes se vinculan con las conexiones, la representación y la comunicación, mientras que las menos frecuentes son la resolución de problemas, el razonamiento y lo socioafectivo; (b) los sentidos matemáticos que más se vinculan con la sostenibilidad son el estocástico y el numérico, mientras que el menos frecuente es el algebraico; y (c) las competencias de sostenibilidad que más se integran son asumir la complejidad de la sostenibilidad (pensamiento sistémico y crítico), y las menos frecuentes se vinculan con prever futuros sostenibles (adaptabilidad y pensamiento exploratorio). Estos datos iniciales son el punto de partida para diseñar formaciones que permitan superar las lagunas identificadas.

Referencias

Alsina, Á. (2023). Mathematics teacher education for sustainability (MTEfS): An emerging research agenda. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 23* ,1-4. https://doi.org/10.35763/aiem23.5726seiem.es

Alsina, Á. y Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability, 11,* 4039. https://doi.org/10.3390/su11154039

Bianchi, G., Pisiotis, U. y Cabrera Giraldez, M. (2022). *GreenComp – El marco europeo de competencias sobre sostenibilidad.* Oficina de Publicaciones de la Unión Europea. https://doi.org/10.2760/094757.

López-Serentill P., Alsina Á., Gual M. y Pincheira N. (2024). Integrating sustainability in mathematics education: An approach to the spanish primary curriculum. *Journal of Sustainability Research, 6*(3), e240058. https://doi.org/10.20900/jsr20240058

Alsina, Á., López-Serentill, P., Pincheira, N., Acosta, Y. y Berciano, A. (2025). Desarrollo profesional del profesorado de matemáticas para la sostenibilidad. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

.

EFICACIA DE LA METODOLOGÍA CRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS POR UN ESTUDIANTE CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

Effectiveness of the CRA methodology in solving multiplicative problems by a student with special educational needs

Andrés-Cirillo, L., Goñi-Cervera, J. y Flores-Lamolda, L.

Universidad de Cantabria

Entre los contenidos matemáticos en Educación Primaria destaca la resolución de problemas que va incrementando en dificultad conforme avanzan los cursos. Según Vergnaud (1983), los problemas de isomorfismos de medidas pueden clasificarse en tres tipos: multiplicación, división partitiva y división medida, en función de si la incógnita es el total de objetos, la cantidad por grupo o el número de grupos. Este tipo de problemas se abordan habitualmente en el tercer ciclo de Educación Primaria. Se espera que los alumnos escolarizados en los últimos cursos de Educación Primaria sean capaces de resolver problemas de isomorfismos de medida, aunque para muchos estudiantes con necesidades educativas especiales (NNEE) esto puede suponer un desafío. Algunas investigaciones en NNEE y matemáticas ponen de manifiesto la eficacia de la metodología Concreta-Representacional-Abstracta (CRA) para la enseñanza de diversos contenidos matemáticos (e.g., Goñi-Cervera et al., 2024). Este estudio analiza la efectividad de la metodología CRA, para el aprendizaje de la resolución de problemas de multiplicación en un caso específico de un estudiante con 11 años con NNEE escolarizado en 5º de Educación Primaria en un colegio ordinario. Alex (pseudónimo) presenta retraso madurativo asociado a alteraciones del desarrollo por cromosomopatía, hipoacusia y epilepsia. Además, presenta discapacidad intelectual y trastorno específico del lenguaje. En el ámbito académico, el estudiante no presenta dificultades en la comprensión lectora, pero sí en el área de matemáticas. Es capaz de leer, comprender y resolver sin ayuda problemas aditivos, mostrando dificultades en los multiplicativos. En base a estudios previos, cada sesión siguió la secuencia modelo, guía y práctica independiente; donde el apoyo de la instructora iba decreciendo a favor de la autonomía del estudiante. Se evaluó el desempeño en tres problemas de multiplicación en la práctica independiente de cada sesión. En las sesiones de fase Concreta-Abstracta, se trabajó con materiales cotidianos teniendo en cuenta los intereses del participante. Posteriormente, en la fase Representacional-Abstracta se emplearon dibujos para representar la situación del problema. Dado que el estudiante no tenía adquirido el algoritmo de la multiplicación, se fomentó el uso de estrategias informales como el conteo y la suma reiterada, mostrando una notable mejoría desde el pre-test (donde no resolvió correctamente ningún problema multiplicativo), hasta el post-test. Aunque las características únicas de Alex limitan la posibilidad de generalizar los resultados a otros estudiantes con NNEE, este estudio ofrece un ejemplo de cómo adaptar metodologías a estudiantes con perfiles tan particulares. De este modo, la metodología CRA y los materiales asociados puede ser una herramienta para el profesorado generalista y especialista, para que aborden la resolución de problemas y otros contenidos matemáticos en contextos de diversidad.

Referencias

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I., Bruno, A. y Tregón, N. (2024). The concrete-representational-abstract sequence for the acquisition of the cardinal principle in preschool children with autism. *International Journal of Developmental Disabilities*. https://doi.org/10.1080/20473869.2024.2341195

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Andrés-Cirillo, L., Goñi-Cervera, J. y Flores-Lamolda, L. (2025). Eficacia de la metodología cra en la resolución de problemas multiplicativos por un estudiante con necesidades educativas especiales. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS EN EL MARCO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

Formulation of design and implementation problems of algorithms within the framework of computational thinking

Arencibia, J. M.[a], Quevedo, E.[a], Perdomo-Díaz, J.[b], Lijó, R.[a] y de-Armas-González, P.[b]

[a]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, [b]Universidad de La Laguna

La incorporación del pensamiento computacional (PC) en la educación obligatoria ha generado la necesidad de preparar al profesorado. Entre las habilidades asociadas al desarrollo del PC se encuentra el diseño e implementación de algoritmos (DIA) (Tran y Nguyen, 2023). La investigación sobre el desarrollo de esta habilidad en contextos educativos concretos sigue siendo limitada. El objetivo de esta investigación es estudiar el potencial de la formulación de problemas matemáticos como estrategia para promover el DIA en la formación docente.

Esto es un estudio exploratorio y experimental para el que se llevó a cabo una intervención con 60 estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. El diseño de la intervención y el análisis posterior se basaron en un marco que integra elementos de un modelo específico que describe las habilidades involucradas en el desarrollo del PC (Tran y Nguyen, 2023) y otro orientado a la formulación de problemas (Leavy y Hourigan, 2022). A los participantes se les pidió que formularan un problema en el que se requiriera ejecutar un algoritmo que resolviera una situación matemática, tras haberles presentado dos ejemplos. Para cada propuesta se realizó un análisis de contenido, en función de cuatro criterios: plausibilidad, razonabilidad, claridad y de su ajuste a la habilidad de DIA, entendida esta última como la capacidad de identificar explícitamente las variables relevantes en un problema y solicitar la creación de un algoritmo que permita su resolución, de forma que este pueda ser ejecutado por un agente de procesamiento de la información. Asimismo, se consideraron los cambios introducidos respecto a los problemas presentados como ejemplo.

Los resultados muestran que el 96,67 % de los problemas formulados puede resolverse, de los cuales el 89,1 % se ajustan al indicador propio de la habilidad de DIA. Únicamente un 38,78 % propuestas presentaban formulaciones distintas a los ejemplos trabajados en clase. Estos hallazgos reflejan un buen nivel de desarrollo en el diseño de problemas orientados a la implementación de algoritmos por parte de los futuros docentes. Asimismo, destacan la necesidad de seguir fortaleciendo las estrategias formativas que promuevan la originalidad, la precisión en los enunciados y una comprensión más profunda de la lógica algorítmica dentro del pensamiento computacional.

Referencias

Leavy, A. y Hourigan, M. (2022). The framework for posing elementary mathematics problems (F-PosE): Supporting teachers to evaluate and select problems for use in elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 111*(1), 147-176. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10155-3

Tran, K. M. y Nguyen, N. T. (2023). Developing computational thinking: An unplugged problem-solving approach. En M. Trigueros, A. Estepa, A. Gagatsis y P. Radeva (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3063-3070). ERME. https://hal.science/hal-04420633

Arencibia, J. M., Quevedo, E., Perdomo-Díaz, J., Lijó, R. y de-Armas-González, P. (2025). Formulación de problemas de diseño e implementación de algoritmos en el marco del pensamiento computacional. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

LA SIMETRÍA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA: UNA MIRADA DESDE LA DEFINICIÓN E IMAGEN CONCEPTUAL

Symmetry in primary school textbooks: A perspective from concept imagen and concept definition

Arias, J. R. y Arce, M.

Universidad de Valladolid

La simetría es un concepto geométrico relevante en Educación Primaria puesto que, como comentan Götz y Gasteiger (2022), una adquisición sostenible de la simetría desempeña un papel clave en la resolución de problemas, sirviendo para conectar posteriormente ramas como el álgebra y la geometría. Sin embargo, su aprendizaje presenta frecuentes dificultades. Jaime y Gutiérrez (1996) señalan que el alumnado no suele considerar la equidistancia o la perpendicularidad al eje, y tiene una frecuente interpretación deformada del eje de simetría, al dibujar la figura simétrica siempre paralela a la figura original, derivada del uso de ejemplos con el eje de simetría en posición vertical.

Los libros de texto siguen siendo un recurso muy utilizado en las aulas, influyendo de forma notoria en el currículo realmente implementado. Este trabajo parte de las dos estructuras propuestas por Vinner (1991): *imagen conceptual*, formada por todas las representaciones visuales, construcciones con materiales o experiencias asociadas al concepto, y *definición conceptual*, constituida por información verbal, como definiciones y enunciados verbales de propiedades. El objetivo es analizar y caracterizar la presentación del concepto de simetría axial en cuatro editoriales de amplio uso en Educación Primaria (Anaya, Edebé, Santillana y SM) adaptadas a la LOMLOE, en términos de las oportunidades de desarrollo de la imagen y definición conceptuales que proporcionan. A partir de Jaime y Gutiérrez (1996) y de Götz y Gasteiger (2022), se determinan propiedades de la simetría axial (para una figura simétrica y dos figuras simétricas entre sí) y se analiza su presencia en las definiciones conceptuales; así como aspectos relevantes para la imagen conceptual como el tipo de figura, la posición del eje y la presencia de cuadrícula y de marcas gráficas de las propiedades.

Los resultados muestran una presencia mayoritaria, en todos los cursos y editoriales, de la coincidencia al doblar por una línea (eje) como caracterización principal tanto de una figura simétrica como de figuras simétricas entre sí. En los cursos de 5.º y 6.º se menciona la equidistancia al eje, pero en ningún caso se enuncia la perpendicularidad a este. Si nos fijamos en el desarrollo de la imagen conceptual, el número de ejemplos gráficos es escaso (uno o dos por curso y editorial), y hay una tendencia muy mayoritaria a presentar el eje en posición vertical, con tan solo dos ejemplos con eje no vertical ni horizontal. La presencia de la cuadrícula es mayor en los cursos de 5.º y 6.º, pero no se remarcan gráficamente las propiedades (puntos correspondientes, distancia al eje, perpendicularidad). Es destacable también la ausencia en las presentaciones de figuras asimétricas, como contraejemplos. Estos comportamientos pueden limitar las oportunidades para que el alumnado desarrolle su imagen y definición conceptual del concepto y contribuir a la persistencia de las dificultades antes referidas.

Referencias

Götz, D. y Gasteiger, H. (2022). Reflecting geometrical shapes: Approaches of primary students to reflection tasks and relations to typical error patterns. *Educational Studies in Mathematics, 111*, 47-71. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10145-5

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El grupo de las isometrías del plano.* Síntesis.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Arias, J.R. y Arce, M. (2025). La simetría en los libros de texto de primaria: una mirada desde la definición e imagen conceptual. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

DESARROLLO DE DESTREZAS DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO CON ENTORNOS DE REALIDAD VIRTUAL

Introducing computational thinking skills in mathematics of primary education using virtual reality environments

Arjona-Aranda, G.[ab], Sánchez-Cruzado, C.[a], Sánchez-Compaña, M. T.[a] y León-Mantero, C. M.[b]

[a]Universidad de Málaga, [b]Universidad de Córdoba

Desde su introducción por Wing (2006), el pensamiento computacional (CT) experimenta un auge en la investigación en educación matemática. Las tareas "desenchufadas" son un punto de partida habitual por sus beneficios (Kotsopoulos et al., 2017), pero existe una brecha en la literatura sobre cómo conectarlas eficazmente con entornos "enchufados". El objetivo de esta investigación es analizar cómo el futuro profesorado desarrolla destrezas del pensamiento computacional en un entorno de realidad virtual (VR), en este caso Neotrie VR, un entorno en el que se puede desarrollar geometría espacial y localización.

Se realizó un estudio de caso en con estudiantes universitarios del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Málaga en la asignatura de Didáctica de la Geometría. Participaron nueve grupos de entre 5 y 6 personas en una sesión de 3,5 horas, divididas en tres turnos con tres gafas VR. La tarea buscó desarrollar la organización, análisis y representación de datos, y el diseño de algoritmos. El alumnado debía clasificar poliedros dispuestos aleatoriamente en distintas zonas por tipo (prismas, pirámides, etc.). Esta ordenación algorítmica, basada en tareas desenchufadas equivalentes (Namukasa et al., 2015), implicó una toma de decisiones sobre el método de organizar los cuerpos. Con apoyo de una ficha que incluía definiciones e imágenes, un estudiante describía dentro del entorno de VR los cuerpos, y el resto identificaba el tipo para que la persona con las gafas hiciera la clasificación.

Se realizó un análisis cualitativo en forma de entrevista estructurada, en la que debían especificar los métodos de resolución. Cinco grupos ordenaron sistemáticamente (lado a lado, adelante-atrás), dos clasificaron por tipo completando zonas; y dos no siguieron una organización definida. Todos los grupos organizaron correctamente, reconociendo la pertenencia de poliedros a múltiples categorías. Además, ubicaron los ejemplos de forma prototípica, según las imágenes conceptuales de la ficha de apoyo. Como principal aporte, esta investigación evidencia que el uso de la VR facilita el desarrollo de las destrezas de CT mencionadas y proporciona al alumnado ideas para integrar esta forma de pensar en el aula conectando tareas desenchufadas y enchufadas.

Referencias

Kotsopoulos, D., Floyd, L., Khan, S., Namukasa, I. K., Somanath, S., Weber, J. y Yiu, C. (2017). A pedagogical framework for computational thinking. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*, 154-171.

Namukasa, I. K., Kotsopoulos, D., Floyd, L., Weber, J., Kafai, Y. B., Khan, S., Yiu, C., Morrison, L. y Somanath, S. (2015). From computational thinking to computational participation: Towards achieving excellence through coding in elementary schools. En G. Gadanidis (Ed.), *Math + coding symposium*. Western University.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33-35.

Arjona-Aranda, G., Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compaña, M. T. y León-Mantero, C. M. (2025). Desarrollo de destrezas del pensamiento computacional en la formación inicial del profesorado con entornos de realidad virtual. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

LEYENDO UN MANUAL DE ARITMÉTICA PARA MAESTRAS DE 1896. UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES DE PRIMARIA EN FORMACIÓN

Reading an 1896 arithmetic textbook for female primary education teachers. an experience in primary education teacher training

Arnal-Palacián, M. y Oller-Marcén, A. M.

Universidad de Zaragoza

El uso de la historia de las matemáticas en formación de profesorado puede mejorar el conocimiento matemático para la enseñanza y proporciona una perspectiva histórica sobre los conocimientos disciplinares (Clark, 2012). Existen pocos trabajos acerca del uso de la historia de la educación matemática en un contexto similar. En este trabajo empírico de carácter exploratorio indagamos acerca del modo en que estudiantes de magisterio abordan la lectura de fuentes originales relacionadas con la enseñanza de la aritmética, poniendo en juego elementos de su conocimiento especializado y desarrollando conciencia histórica y de género sobre la enseñanza de las matemáticas. Para ello se diseñó una sesión de trabajo de 2 horas en la que participaron 70 estudiantes de la asignatura Didáctica de la Aritmética I del Grado en Magisterio en Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza. La actividad comenzó con una lectura guiada (Barnett et al., 2014) por parejas del prólogo e índice de la *Aritmética elemental* (de la Rigada y Tella, 1896) y de su reseña publicada en la revista mensual *La España Moderna* en 1897. La lectura se orientó hacia el análisis del contenido y la búsqueda de información y, tras ella, los participantes elaboraron individualmente una narrativa recogiendo reflexiones acerca de su impacto y valor para su formación como docentes. Las producciones escritas se han analizado cualitativamente con MAXQDA y aquí reportamos resultados parciales sobre una de las preguntas de la lectura guiada: "¿Qué aspectos relacionados con la didáctica de la aritmética aparecen en el prólogo?". Para ello se han codificado 81 fragmentos considerando las categorías 'contenido matemático', 'aspectos metodológicos' y 'género'. Los comentarios sobre contenido matemático (19) se centran en la numeración, operaciones y sistema métrico. Los relativos a aspectos metodológicos (51) destacan evitar la memorización mecánica y fomentar el uso de procedimientos intuitivos. Los referidos al género (11) resaltan las dificultades educativas a las que se enfrentaba la mujer española y la tendencia en la enseñanza femenina a transformar la aritmética en una ciencia aplicable. Los resultados parecen indicar que los estudiantes son capaces de abordar la lectura de este tipo de fuentes de manera significativa para su formación.

Agradecimientos

Grupo S60_23R del Gobierno de Aragón y PIIDUZ_5193 (Programa para la Incentivación de la Innovación Docente en la Universidad de Zaragoza).

Referencias

Barnett, J. H., Lodder, J. y Pengelley, D. (2014). The pedagogy of primary historical sources in mathematics: Classroom practice meets theoretical frameworks. *Science & Education*, *23*, 7–27. https://doi.org/10.1007/s11191-013-9618-1

de la Rigada, M. E. y Tella, M. M. (1896). *Aritmética elemental*. Imprenta de Juan Iglesias Sánchez.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 67–84. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9361-y

Arnal-Palacián, M. y Oller-Marcén, A. M. (2025). Leyendo un manual de aritmética para maestras de 1896. Una experiencia con docentes de primaria en formación. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. X). SEIEM.

METODOLOGÍA FREINET Y LOS PROCESOS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN INFANTIL: UN ESTUDIO DE CASO

Freinet methodology and process standards in early childhood education: A case study

Bartolomé, Á. M. y Maroto, A.

Universidad de Valladolid

En un contexto educativo en constante transformación, impulsar la práctica de procesos matemáticos es necesario para lograr aprendizajes duraderos y significativos. Alsina (2012) subraya la importancia de orientar la enseñanza matemática hacia un uso práctico y contextualizado desde la Educación Infantil. Por otro lado, las técnicas Freinet, basadas en el tanteo experimental y la exploración autónoma, favorecen la construcción de conocimientos con sentido, frente a metodologías centradas en la memorización (Imbernón, 2017). Ante esto, nos preguntamos si es posible que el alumnado de Infantil desarrolle procesos matemáticos en un aula que emplea técnicas Freinet como la asamblea cooperativa o el periódico. Este trabajo tiene como objetivo analizar la presencia de los cinco procesos matemáticos propuestos por el NCTM (2000) en un aula de Educación Infantil que aplica los principios de la pedagogía Freinet. La investigación adopta una metodología cualitativa con un diseño de estudio intrínseco de caso, centrado en una experiencia singular por su valor educativo. Participaron los 18 estudiantes de un aula del segundo curso del segundo ciclo de Educación Infantil.

Para la recogida de datos se emplearon registros gráficos de las actividades del aula, principalmente fotografías y grabaciones que reflejan las vivencias experimentadas por el alumnado. El registro documental fue analizado con el instrumento validado de Alsina y Coronata (2014), que consta de 7 indicadores para evaluar los 5 procesos matemáticos. Los resultados muestran que la pedagogía Freinet, mediante metodologías centradas en el niño, favorece el aprendizaje natural de las matemáticas y el desarrollo equilibrado de los cinco procesos del NCTM: resolución de problemas, mediante situaciones reales que fomentan el tanteo y la búsqueda de soluciones (necesidad de paginar un periódico); razonamiento y prueba, a través de la formulación de hipótesis y su verificación; comunicación, mediante el diálogo entre iguales y con adultos; conexiones, relacionando las matemáticas con el entorno (rocódromo, naturaleza y cumpleaños) y otras áreas; y representación, mediante materiales, dibujos y símbolos. Se concluye que promover aulas freinetianas beneficia el desarrollo infantil, facilitando el aprendizaje contextualizado de las matemáticas y dándoles un uso práctico. Como acción de transferencia, se propone adaptar esta propuesta metodológica a otras aulas de Educación Infantil, ofreciendo una alternativa pedagógica humanista que respeta el ritmo, fomenta la autonomía y promueve aprendizajes matemáticos significativos y emocionalmente positivos.

Referencias

Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 1-14. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2012.1-14

Alsina, Á. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 23-36. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2014.23-36

Imbernón, F. (2017). Célestin Freinet, una pedagogía actual y vigente. *Revista Iberoamaerica de Estudios en Educación, 12*(1), 591-595. https://doi.org/10.21723/riaee.v12.n.esp.1.2017.9664

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.1-23

Bartolomé, Á. M. y Maroto, A. (2025). Metodología Freinet y los procesos matemáticos en Educación Infantil: Un estudio de caso. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVIII (pp. X). SEIEM.

UNA HERRAMIENTA DIGITAL PARA PROMOVER EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

A digital tool to promote mathematical reasoning

Benjumeda, F. J.[a] y Romero, I.[b]

[a]IES El Parador (Almería), [b]Universidad de Almería

Fomentar el razonamiento matemático es una demanda de nuestro sistema educativo que requiere la búsqueda de contextos, tareas, estrategias e instrumentos que favorezcan su desarrollo. Con este fin, además del diseño de dos tareas, presentamos una herramienta digital con casillas de verificación (CV) que informan al alumnado de la validez o posibles errores en los resultados introducidos. Se analiza su influencia sobre varias dimensiones vinculadas al razonamiento matemático (OECD, 2023; Smit et al., 2024) agrupadas en tres componentes: (a) metacognitiva: contribución de las CV a la autorregulación del alumnado sobre su proceso de aprendizaje (autonomía, autoevaluación y autoconfianza), (b) afectiva y emocional: importancia que el estudiante otorga a las respuestas de las CV y su incidencia en la motivación y el esfuerzo por mejorar los resultados (relevancia, interés y satisfacción) y (c) actitudinal y comportamental: capacidad de las CV para promover la revisión y mejora de los procesos y el aprendizaje a partir de sus errores (revisión, perseverancia y errores).

Este estudio es parte de una investigación de diseño desarrollada desde la asignatura Matemáticas en un Instituto de Secundaria donde se trabaja mediante proyectos interdisciplinares (Benjumeda et al., 2015). Tiene como objetivo mostrar dos tareas de modelización y resolución de problemas para analizar cómo la herramienta descrita, unida al potencial de este tipo de tareas, fomentan numerosos aspectos del razonamiento matemático. Para ello, se ha diseñado un cuestionario digital de valoración de escala según el grado de acuerdo o desacuerdo (1-5) con cada enunciado. Sus 18 ítems incluyen una afirmación positiva y otra en sentido contrario para cada dimensión anteriormente descrita, lo que permite detectar incoherencias y contrastar entre puntuaciones positivas y sus opuestas. Para interpretar los resultados, además de la puntuación otorgada al ítem positivo, se ha calculado la media entre esta y la diferencia sobre 6 de la puntuación de su opuesto, midiendo así la amplitud del rango entre ambas valoraciones. De esta forma, se ha considerado exitosa una dimensión cuando, además de tener una puntuación mayor o igual que 4 en la afirmación positiva, esta media supera el 3,5.

Siguiendo este criterio, y tras pasar el formulario a una muestra de 112 estudiantes de 1º y 2º ESO, se han obtenido buenos resultados para las tres dimensiones de la componente afectiva y emocional (relevancia: 68%; interés: 50% y satisfacción: 79,5%), dos de las dimensiones de la componente actitudinal y comportamental (revisión: 80,77% y perseverancia: 77,5%) y la dimensión de autoevaluación (61,33%) dentro de la componente metacognitiva. Estos resultados reflejan la validez de esta herramienta para promover en el alumnado varios de los procesos considerados en el estudio para fomentar el razonamiento matemático, así como la evaluación formativa.

Referencias

Benjumeda, F. J., Romero, I. y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 163-172). SEIEM.

OECD (2023). *PISA 2022 Assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Smit, R., Bachmann, P., Dober, H., y Hess, K. (2024). Feedback levels and their interaction with the mathematical reasoning process. *The Curriculum Journal*, *35*, 184–202. https://doi.org/10.1002/curj.221

Benjumeda, F. J. y Romero, I. (2025). Una herramienta digital para promover el razonamiento matemático. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

¿QUÉ SIENTE EL ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA HACIA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA?

What do primary school pupils feel about learning geometry?

Caballero-Carrasco, A., López García, R., Melo-Niño, L., Calle-Alonso, F. y Ochoa de Alda, J. A. G.

Universidad de Extremadura

La ansiedad matemática se conceptualiza como una respuesta predominantemente emocional, caracterizada por tensión, miedo o bloqueo mental, que interfiere con el manejo de números y la resolución de problemas matemáticos (Villamizar et al., 2020). La ansiedad hacia la geometría, si bien correlaciona con la ansiedad matemática, parece poseer características distintivas debido a las demandas cognitivas propias de esta área, que incluyen un fuerte componente de razonamiento espacial, visualización e interpretación de representaciones gráficas, así como el manejo de un lenguaje formal específico (Pérez, 2022). Según Pérez (2022), la ansiedad hacia la geometría se presenta como una dimensión específica dentro de la ansiedad matemática general, asociada a factores como la dificultad para visualizar objetos tridimensionales, comprender relaciones espaciales o interpretar representaciones gráficas.

El objetivo de este trabajo es analizar la ansiedad hacia el aprendizaje de la geometría en alumnado de 4º y 6º Educación Primaria. Para ello se desarrolla una investigación no experimental a través de un estudio descriptivo y una metodología cuantitativa. La muestra, constituida mediante un muestreo no probabilístico de conveniencia, la conforman 221 alumnos, 109 de 4º de Primaria y 112 de 6º de Primaria. Como instrumento de recogida de datos se utiliza el cuestionario de Ansiedad Matemática de Sağlam et al. (2011), adaptándolo a la población objeto de estudio para su comprensión. Dicho instrumento está compuesto por 15 ítems formulados en una escala tipo Likert de 1 a 5, donde 1 corresponde a "totalmente en desacuerdo" y 5 a "totalmente de acuerdo".

El alumnado de Educación Primaria manifiesta no sentir gusto o aprecio por la geometría y no sentirse seguros al estudiar los contenidos de geometría. Así, indican presentar timidez a la hora de realizar preguntas en clase de geometría o salir a la pizarra, además de falta de confianza en los exámenes de este contenido matemático. Expresan sus dificultades para comprender los contenidos geométricos lo cual puede derivar, incluso, a un estado de nerviosismo tanto en el desarrollo de las sesiones como en la realización de los exámenes de dicha materia.

Esta investigación ha sido financiada por la Junta de Extremadura y la Unión Europea, proyecto GR24178, y por el proyecto PID2022-139684NB-I00 de la Agencia Estatal de Investigación.

Referencias

Pérez, R. C. (2022). Ansiedad matemática y aprendizaje geométrico: una reflexión acerca de sus implicaciones en el contexto formativo. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 6*(4). 3353-3567.

Ramos, C. y Solórzano, L. (2022). Ansiedad matemática y aprendizaje geométrico: una reflexión acerca de sus implicaciones en el contexto formativo. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 6*(1), 1455-1468.

Sağlam, Y., Türker, B. y Umay, A. (2011). Geometry anxiety scale for secondary school students. *Procedia Social and Behavioral Sciencies, 15*, 966-970. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.03.222

Villamizar, G., Araujo, T. Y. y Trujillo, W.J. (2020). Relación entre ansiedad matemática y rendimiento académico en matemáticas en estudiantes de secundaria. *Ciencias Psicológicas, 14*(1), e-2174.

Caballero-Carrasco, A., López García, R., Melo-Niño, L., Calle-Alonso, F. y Ochoa de Alda, J. A. G. (2025). ¿Qué siente el alumnado de Educación Primaria hacia el aprendizaje de la geometría? En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

LA INTELIGENCIA ARTICUFICIAL EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS: VALIDACIÓN Y RESULTADOS

Artificial intelligence in mathematics teacher education: Validation and results

Cabezas-Barragán, D., Calle-Alonso, F., Ochoa de Alda, J. y Melo-Niño, L.

Universidad de Extremadura

Los informes PISA revelan un descenso en el rendimiento matemático del alumnado español en la última década. Por tanto, son urgentes nuevas vías para fortalecer la formación del profesorado. Observando países líderes en esta materia (Singapur, Japón) se han hecho propuestas innovadoras en los últimos años. Una de ellas es la incorporación de la Inteligencia Artificial (IA) como herramienta didáctica. Su uso integrado puede mejorar la calidad de las clases y en general del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Como paso inicial a su integración, se ha desarrollado un estudio sobre la aceptación y el uso de la IA por parte de los maestros en formación. Se ha utilizado un cuestionario basado en el Modelo de Aceptación Tecnológica (TAM) como marco teórico, incluyendo constructos como utilidad percibida, facilidad de uso, intención de uso y ansiedad, entre otros.

Los resultados indican un buen ajuste del modelo con $X^2/gl= 1.93$, CFI= 0.945, TLI= 0.935, RMSEA= 0.055 y SRMR= 0.056, cumpliendo los criterios de Hu y Bentler (1999). Todos los indicadores muestran una excelente consistencia interna, validez convergente y validez discriminante ($\alpha>0.70$) del instrumento. Participaron 304 estudiantes de la Facultad de Formación del Profesorado de Cáceres. El cuestionario se aplicó online y de forma anónima.

Se identifica que los futuros docentes mostraron actitudes favorables hacia la IA, principalmente en la utilidad percibida, facilidad de uso e intención de uso, con ansiedad moderada. La ansiedad mostró correlaciones negativas con la utilidad y la intención, indicando que el miedo a la tecnología limita su adopción. Estos resultados coinciden con Zhang et al. (2023), que identificaron la ansiedad como una barrera en los docentes alemanes. No obstante, se establecen correlaciones positivas entre la utilidad y la intención de uso; la autoeficacia y la facilidad de uso, resaltando la importancia de la formación práctica; y el disfrute percibido con la intención de uso. Finalmente, los hombres reportaron actitudes más positivas en casi todos los constructos, mientras que las mujeres mostraron mayor ansiedad. Esta diferencia refleja hallazgos de Ozden et al (2025), donde los hombres mostraron mayor confianza en IA.

Referencias

Hu, L. T. y Bentler, P. M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural Equation Modelling: A Multidisciplinary Journal*, *6*(1), 1-55

Özden, M., Yaşar, F. Ö. y Meydan, E. (2025). The relationship between pre-service teachers' attitude towards artificial intelligence (AI) and their AI literacy. *Pegem Journal of Education and Instruction*, *15*(3), 121-131

Zhang, C., Schießl, J. y Gläser-Zikuda, M. (2023). Acceptance of artificial intelligence among pre-service teachers. *International Journal of Educational Technology in Higher Education, 20*(1), 49

Cabezas-Barragán, D., Calle-Alonso, F., Ochoa de Alda, J. y Melo-Niño, L. (2025). La inteligencia artificial en la formación de docentes de matemáticas: Validación y resultados. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

INSTRUCCIÓN BASADA EN ESQUEMAS COMO APOYO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS POR DOS JÓVENES CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL

Schema-based instruction to support additive problem solving by youth with intellectual disabilities

Calderón-Macho, C., Goñi-Cervera, J., y Flores-Lamolda, L.

Universidad de Cantabria

La adquisición de habilidades matemáticas funcionales es fundamental para fomentar la autonomía, la autodeterminación y la inclusión social de jóvenes con discapacidad intelectual. Dentro de estas habilidades, la resolución de problemas aditivos representa una competencia esencial para desenvolverse con éxito en contextos cotidianos y laborales (Browder et al., 2018). Numerosas investigaciones han demostrado que una enseñanza contextualizada, centrada en situaciones reales y significativas, resulta efectiva para el aprendizaje matemático. Por ejemplo, el uso de la instrucción con esquemas modificados (MSBI) ha mejorado la capacidad de resolver problemas matemáticos relacionados con compras, uso de dinero o propinas en estudiantes con discapacidad intelectual moderada (Root et al., 2017). Este estudio muestra la eficacia de una metodología MSBI para la resolución de problemas aditivos contextualizados en el *Programa Específico de Formación Profesional Básica de Operaciones Básicas de Pisos en Alojamientos.* En el estudio participaron dos alumnas de 22 y 24 años, con discapacidad intelectual, que cursaban sus estudios en un centro de educación especial y que previamente habían mostrado no comprender los problemas aditivos de cambio. Al inicio del estudio mostraron una edad matemática equivalente a 5 años y 11 meses y 6 años, respectivamente. Las dos participantes tenían capacidad de comunicarse de manera verbal, sabían leer, y no tenían dificultades motoras. La instrucción se diseñó de forma contextualizada, utilizando materiales vinculados a la temática de sus estudios (e.g., platos y cubiertos en el comedor escolar) con el fin de dar sentido funcional al aprendizaje. El proceso instruccional incluyó un pretest, una sesión de familiarización con el esquema, la intervención con MSBI utilizando material concreto de la vida cotidiana, y finalmente un postest para valorar los aprendizajes. Cada sesión siguió la secuencia: modelado por parte de la instructora, práctica guiada con la participación del grupo, y práctica independiente para evaluar el desempeño individual. Las fases modelado y práctica guiada se llevaron a cabo de forma grupal con las dos alumnas participantes, mientras que la práctica individual permitió observar el progreso autónomo de cada estudiante. Se observó una mejora significativa en la resolución de problemas aditivos, el uso autónomo del esquema y una mejor comprensión de la estructura del problema. A pesar de la brevedad de la intervención, los resultados son positivos y sugieren que la metodología empleada favorece el aprendizaje de problemas aditivos en contextos funcionales. Se espera que las participantes puedan transferir estas habilidades a su futura práctica laboral, contribuyendo de esta manera a los objetivos del programa y promoviendo una mayor autonomía y competencia en entornos cotidianos.

Referencias

Browder, D., Spooner, F., Lo, Y.-y., Saunders, A. F., Root, J. R., Davis, L. L. y Brosh, C. R. (2018). Teaching students with moderate intellectual disability to solve word problems. *The Journal of Special Education, 51*(4), 222-235. https://doi.org/10.1177/0022466917721236

Root, J. R., Saunders, A. F., Spooner, F. y Brosh, C. R. (2017). Teaching personal finance mathematical problem solving to individuals with moderate intellectual disability. *Career Development and Transition for Exceptional Individuals, 40*(1), 14-25. https://doi.org/10.1177/2165143416681288

Calderón-Macho, C., Goñi-Cervera, J. y Flores-Lamolda, L. (2025). Instrucción basada en esquemas como apoyo en la resolución de problemas aditivos por dos jóvenes con discapacidad intelectual. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS Y EMOCIONES EN LA ENCRUCIJADA

Mathematics learning and emotions at the crossroads

Calle-Alonso, F.[a], Mestrinho, N.[b], Caballero Carrasco, A.[a], Mochón, J. F. C.[c], Gómez-González, R.[a] y Ochoa de Alda, J. A. G.[a]

[a]Universidad de Extremadura, [b]Instituto Politécnico de Santarem, [c]Universidad de Murcia

En el aula, la motivación hacia el aprendizaje es un elemento clave que determina el comportamiento y el rendimiento académico del alumnado. Las emociones que se experimentan hacia las matemáticas, junto con el valor que se le atribuye, configuran dicha motivación. Sin embargo, los instrumentos actuales para medir emociones y valor subjetivo en el aula suelen ser demasiado extensos o se limitan a un número reducido de emociones. Basado en la teoría de la expectativa-valor (Eccles and Wigfield, 2002), este estudio presenta el desarrollo de un instrumento breve que permite evaluar 14 emociones discretas, así como las escalas de interés, utilidad y coste que conforman el valor subjetivo hacia las matemáticas. Para su validación, se llevó a cabo un análisis integral de las emociones y del valor subjetivo percibido por futuros maestros de educación primaria de la Universidad de Extremadura, la Universidad de Murcia y el Instituto Politécnico de Santarém, con un total de 180 encuestas completadas.

Se ha demostrado la validez del instrumento utilizado, confirmando la estructura propuesta de 5 factores latentes: interés, coste, utilidad, emociones activadoras positivas (PAE) y emociones activadoras negativas (NAE). Los resultados indican un ajuste excelente del modelo con $\chi^2/gl = 1.63$, $SRMR = 0.048$, $RMSEA = 0.060$, $CFI = 0.960$ y $TLI = 0.954$, cumpliendo todos los criterios de West et al. (2012). Todos los indicadores muestran además una excelente consistencia interna, validez convergente y validez discriminante. Las cargas factoriales oscilan entre 0.673 y 0,908, confirmando la validez estructural factorial propuesta.

Se identifica que mayores niveles de interés, utilidad y emociones positivas, así como menores niveles de coste y emociones negativas, están asociados con un mejor rendimiento académico. Las diferencias de género son pronunciadas en el componente emocional, con las mujeres experimentando niveles significativamente más altos de emociones negativas y coste percibido, a pesar de valorar la utilidad y obtener rendimientos académicos similares a los hombres.

En el análisis de redes, la conexión coste-NAE ($\beta = 0.811$) y la relación interés-utilidad ($\beta = 0.798$) validan el postulado de Pekrun et al. (2017). Las emociones de logro y las creencias motivacionales están recíprocamente relacionadas, actuando tanto como antecedentes como consecuencias en el proceso de aprendizaje. La centralidad del Interés actúa como puente entre componentes emocionales positivos y cognitivos (utilidad) y sirve como predictor del rendimiento. Además, que los estudiantes STEM desarrollan mecanismos de regulación cognitiva que amortiguan el impacto emocional, mientras los no-STEM presentan mayor vulnerabilidad a ciclos emocionales negativos.

Referencias

Eccles, J. S. y Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology, 53*, 109-132. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153

Pekrun, R., Lichtenfeld, S., Marsh, H. W., Murayama, K. y Goetz, T. (2017). Achievement emotions and academic performance: Longitudinal models of reciprocal effects. *Child Development, 88*(5), 1653-1670. https://doi.org/10.1111/cdev.12704

West, S. G., Taylor, A. B. y Wu, W. (2012). Model fit and model selection in structural equation modeling. En R. H. Hoyle (Ed.), *Handbook of structural equation modeling* (pp. 209-231). The Guilford Press

Calle-Alonso, F., Mestrinho, N., Caballero Carrasco, A., Mochón, J. F. C., Gómez-González, R. y Ochoa de Alda, J. A. G. (2025). Aprendizaje de matemáticas y emociones en la encrucijada. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

PROPUESTAS METODOLÓGICAS RECIENTES EN ARITMÉTICA: ANÁLISIS DIDÁCTICO E HISTÓRICO

Recent methodological proposals in arithmetic: A didactic and historical analysis

Colmena, S. y Sánchez-Jiménez, E.

Universidad de Murcia

En las últimas décadas, el discurso sobre la innovación en didáctica de las matemáticas ha favorecido la proliferación de diversas propuestas metodológicas para la enseñanza de la aritmética en Educación Primaria. En este trabajo se analizan algunas de las más difundidas, así como sus fundamentos epistemológicos y pedagógicos declarados. El segundo objetivo es establecer una comparación con propuestas históricas para el cálculo, desarrolladas por profesores normalistas durante el primer tercio del siglo pasado.

La metodología es de tipo cualitativo-descriptivo. Se combina el uso del método histórico y de herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). A partir de libros de texto y otros documentos de los promotores y difusores de las propuestas consideradas, se realiza un estudio praxeológico de las técnicas de cálculo que promueven, identificando los dispositivos y gestos característicos de cada una.

El análisis de las técnicas muestra que el intento de difusión masiva de algunos de estos métodos va en detrimento de los propósitos didácticos declarados por sus promotores. Por otro lado, el análisis histórico revela puntos de convergencia significativos entre las técnicas históricas y las actuales, no reconocidos, en general, por los autores de las propuestas más recientes. Muchas de las prácticas hoy consideradas como innovadoras se encontraban presentes en la tradición didáctica, lo que lleva a matizar el uso del término innovación. Este trabajo, a la vez, pone de relieve el interés de incluir el punto de vista histórico en la investigación en didáctica de la matemática, como herramienta para analizar propuestas desde una perspectiva más amplia y más contextualizada.

Bibliografía

Broitman, C., Santamaría, F., Scheuer, N., Cobeñas, P., Escobar, M., Sancha, I., Grimaldi, V., Escobar, P. y Charlot, B. (2018). El método "Singapur": Entrevista al Equipo de Didáctica de las Matemáticas (EDM) de FAHCE (Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación) de UNLP (Universidad Nacional de La Plata). *Para el Día a Día en la Escuela,* 44, 9-23.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Ferrando, I. y Segura, C. (2017). Una pequeña romería por los métodos milagro para la enseñanza de las matemáticas. *El Escéptico, 21,* 38-41.

Martín Adrián, A. R. (2019). El movimiento "Matemáticas OAOA". *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 101,* 41-44.

Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón. Revista de pedagogía, 63*(4), 95–110.

Peng Yee, L. (2013). *La enseñanza de matemática en educación básica: Un libro de recursos* [Traducción del original]. Academia Chilena de Ciencias.

Sánchez-Jiménez, E. (2015). *Las escuelas normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936).* [Tesis doctoral, Universidad de Murcia].

Colmena, S. y Sánchez-Jiménez, E. (2025). Propuestas metodológicas recientes en aritmética: Análisis didáctico e histórico. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

SENTIDOS PRODUCIDOS SOBRE VALIDACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN EL MARCO DE TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Senses produced about validation in initial teacher education within the framework of mathematical modelling tasks

Cruz, M. F.[a], Esteley, C.[b] y Moreno, A.[a]

[a] Universidad de Granada, [b] Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

El estudio de la validación en el marco de la Modelización Matemática (MM) y su papel en la construcción de los sentidos matemáticos resulta de interés para la comunidad investigadora (Stillman et al., 2020). En particular, en la formación inicial docente, es clave reconocer y comprender la diversidad de modos de validación en la MM, dado que se espera que, en el aula de matemática, el futuro profesorado promueva diversos modos de razonamiento y validación (NCTM, 2009).

Atendiendo a este interés, este estudio tiene como objetivo identificar sentidos atribuidos a la validación por cuatro futuras profesoras en matemática de una universidad pública argentina que participaron en un escenario de MM en el marco de un curso de geometría. El estudio busca aportar información sobre las diferencias entre los sentidos producidos por ellas en su trayectoria formativa previa a la inmersión en el escenario de MM y aquellos elaborados durante y después de dicha inmersión. Realizamos una investigación cualitativa con un enfoque de investigación de diseño. Las fuentes de información incluyeron narrativas sobre la validación antes y durante la inmersión, vídeos de clases, producciones escritas y una entrevista posterior a la inmersión. Para el diseño del escenario recurrimos a los desarrollos de Bassanezi (2002) en relación con MM. Para caracterizar la noción de sentido nos basamos en aportes como los de Levrini et al. (2015) para quienes implica una comprensión conceptual profunda y la transformación del discurso matemático de una manera personal. En el análisis de la validación, recurrimos a los trabajos de Balacheff; Lakatos; y Bassanezi, entre otros.

Inicialmente las futuras profesoras en matemática asocian la validación con la demostración, utilizando el método axiomático-deductivo y modos euclidianos. Tras participar en el escenario de MM, distinguen la validación de la demostración, entendiéndola como un proceso complejo y reflexivo que implica la contrastación del modelo, la autorregulación y el consenso social. El cambio observado muestra que la construcción de sentidos matemáticos en torno a la validación requiere experiencia y contextualización. Incluir tempranamente discusiones sobre validación en la formación docente contribuiría a ampliar la comprensión y a favorecer el reconocimiento de métodos diversos.

Referencias

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: Uma nova estratégia*. Contexto.

Stillman, G. A., Kaiser, G. y Lampen, C. E. (Eds.). (2020). *Mathematical modelling education and sense-making*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4

Levrini, O., Fantini, P., Tasquier, G., Pecori, B. y Levin, M. (2015). Defining and operationalizing appropriation for science learning. *Journal of the Learning Sciences, 24*(1), 1-44. https://doi.org/10.1080/10508406.2014.928215

National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making*. Autor.

Cruz, M. F., Esteley, C. y Moreno, A. (2025). Sentidos producidos sobre validación en la formación inicial docente en el marco de tareas de modelización matemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA EN LA REVISTA DE INSTRUCCIÓN PRIMARIA (1849-1851)

The teaching of arithmetics in the *Revista de Instrucción Primaria* (1849-1851)

Dólera-Almaida, J.[a], López-Cánovas, V.[b] y Carrillo-Gallego, D.[a]

[a]Universidad de Murcia, [b]IES Miguel Hernández (Alhama de Murcia)

Para estudiar la educación matemática que se impartía en una época, un tipo de fuente es la prensa y, en particular, las revistas profesionales que se dirigían a profesores de un cierto nivel educativo (Dólera y Sánchez-Jiménez, 2020; Madrid *et al*., 2023; Muñoz-Escolano *et al.*, 2022; Oller-Marcén, 2019). Una de las revistas profesionales del siglo XIX, dirigida al magisterio primario, fue la *Revista de Instrucción Primaria (RIP)*, publicada entre 1849 y 1851 con frecuencia quincenal. La revista estuvo dirigida por Mariano Carderera y Joaquín Avendaño, inspectores generales de enseñanza primaria, y en ella publicaban profesores de la Escuela Normal Central, profesores de Escuelas Normales, inspectores de enseñanza primaria y algunos maestros.

El objetivo del trabajo es identificar las cuestiones sobre la enseñanza de la aritmética que se trataron en la Revista de Instrucción Primaria durante los años de su publicación (1849-1851).

Este trabajo forma parte de las investigaciones que se están realizando sobre la enseñanza de la numeración en las escuelas primarias españolas durante el siglo XIX (Espín-Buendía et al., 2024; López-Cánovas et al., 2025). Se trata de un estudio descriptivo en el que se ha utilizado el método histórico y cuya fuente principal es la Revista de Instrucción Primaria, de la que se han consultado todos los números publicados.

Se han encontrado tres artículos sobre contenidos matemáticos en la enseñanza primaria, tres sobre enseñanza de la aritmética y uno sobre el sistema métrico decimal, así como párrafos en artículos sobre métodos de enseñanza, informes sobre la enseñanza en Prusia, o exámenes en escuelas.

Referencias

Dólera, J. y Sánchez-Jiménez, E. (2020). Las matemáticas en la Revista de Pedagogía. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(1), 71-92.

Espín-Buendía, J.G., López-Cánovas, V. y Carrillo-Gallego, D. (2024). Sobre la enseñanza del sistema de numeración en España (siglo XIX). En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 209-216). SEIEM.

López-Cánovas, V., Dólera-Almaida, J. y Carrillo-Gallego, D. (2025). ¿Había en España en el siglo XIX una enseñanza primaria intuitiva del sistema de numeración? *Educatio Siglo XXI* (en prensa).

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Maz-Machado, A. (2023). Recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas en la prensa para mujeres del siglo XIX: Materiales y recursos. En C. Jiménez-Gestal, Á.A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 331-338). SEIEM.

Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., y Santágueda-Villanueva, M. (2022). La sección de problemas matemáticos del boletín *La Escuela* (1913-1916). *Historia y Memoria de la Educación*, *16*, 425-458. https://doi.org/10.5944/hme.16.2022.30828

Oller-Marcén, A. M. (2019). Arithmetic in Joan Benejam's la enseñanza racional (1888). En K. Bjarnadóttir, J. Krüger, J. Prytz, G. Schubring y H. J. Smid (Eds.), *Dig where you stand 5. Proceedings of the fifth international conference on the history of mathematics education* (pp. 285-302). Utrecht University.

Dólera-Almaida, J., López-Cánovas, V. y Carrillo-Gallego, D. (2025). La enseñanza de la aritmética en la Revista de Instrucción Primaria (1849-1851). En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

CREENCIAS Y CONCEPCIONES SOBRE DISCALCULIA EN EL ENTORNO FAMILIAR

Beliefs and conceptions about dyscalculia in the family environment

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I.

Universidad de Valladolid

La discalculia es una condición del aprendizaje que afecta a la correcta adquisición de las habilidades matemáticas y que tiene una prevalencia estimada del 5% entre la población escolar (Lamb et al., 2024). Las familias, junto al profesorado, juegan un papel muy importante en la detección precoz de la discalculia, debido a que pueden comenzar a observar los primeros síntomas en el entorno familiar y cotidiano de los niños (Calderón-Delgado et al., 2019). Desde esta perspectiva, nos hemos preguntado: ¿qué creencias y concepciones tienen las familias con hijos en Educación Infantil y Primaria sobre la discalculia? Para dar respuesta a la pregunta de investigación, se diseñó un cuestionario que incorporaba una escala tipo Likert generada a partir de una revisión sistemática previa de la literatura y conformado por 17 afirmaciones relativas a características de la discalculia ante las cuales debía manifestarse el grado de acuerdo o desacuerdo en una escala de 5 puntos. El cuestionario se aplicó, mediante diseño muestral no probabilístico accidental, en Castilla y León y en la región de Lisboa e Vale do Tejo (Portugal) con el objetivo de explorar también posibles diferencias entre dos contextos socioculturales muy similares, pero con diferentes políticas educativas. La muestra española estuvo compuesta por 132 familiares, mientras que la portuguesa incluyó a 107.

El análisis de las respuestas a la escala revela resultados muy similares entre ambos contextos regionales, observándose cómo las familias poseen concepciones erróneas y creencias que podrían considerarse limitantes sobre lo que es la discalculia y cómo esta afecta o puede afectar al desarrollo de la competencia matemática de sus hijas e hijos. Así, en particular, las familias participantes manifestaron cierto grado de acuerdo con un elevado número de afirmaciones que las evidencias científicas identifican como falsas (55,3% en Castilla y León y 62,62% en la región de Lisboa), destacando las siguientes: creen que la discalculia es una dificultad del aprendizaje que se adquiere, que se debe a una enseñanza insuficiente o deficiente, que su origen no es neurológico o genético, que es una dificultad del aprendizaje rara (menos de un 1%), que desaparece con una adecuada intervención, que no es causa de ansiedad matemática, que se presenta más en un género que en el otro y que si se padece no se puede rendir bien en matemáticas. Sí parecen tener más claras, sin embargo, las siguientes características de la discalculia: que la discalculia no se debe a un coeficiente intelectual bajo, que no se debe a una lesión cerebral, que interfiere significativamente en el rendimiento académico y en las actividades de la vida cotidiana y que no todos los niños con dificultades matemáticas tienen discalculia. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de una mayor formación también en el ámbito familiar sobre la discalculia con el objetivo último de facilitar su identificación temprana en el entorno familiar, que ayude a favorecer tanto el aprendizaje como el disfrute de las matemáticas por parte del alumnado con discalculia.

Referencias

Calderón-Delgado, M. A., Zamora-Delgado, R. I., Palma-Palma, R. y Moya, M. E. (2019). Dyscalculia and pedagogical intervention. *International Research Journal of Management, IT & Social Sciences, 6*(5), 95-100. https://doi.org/10.21744/irjmis.v6n5.710

Lamb, S., Krieger, F. y Kuhn, J. T. (2024). Delayed development of basic numerical skills in children with developmental dyscalculia. *Frontiers in Psychology, 14*(1187785). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1187785

Espina, E., Marbán, J. M. y Maroto, A. I. (2025). Creencias y concepciones sobre discalculia en el entorno familiar. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

EVOLUCIÓN DE ESTRATEGIAS DE REPARTO POR UN ESTUDIANTE CON AUTISMO BAJO UN ENFOQUE DE INSTRUCCIÓN BASADA EN ESQUEMAS MODIFICADA

Development of sharing strategies by a student with autism through a modified schema-based instruction approach

Flores-Lamolda, L., Polo-Blanco, I. y Fernández-Cobos, R.

Universidad de Cantabria

Estudios previos con alumnado de desarrollo típico han puesto de manifiesto la importancia de trabajar estrategias de reparto para desarrollar los significados de la división (e.g., Dowton, 2008). Dado que algunos alumnos con autismo presentan más dificultades en la resolución de problemas aritméticos verbales, se diseñan metodologías de instrucción adaptadas a sus necesidades (Bruno et al., 2025). Una de estas metodologías es la instrucción basada en esquemas modificada (MSBI; Spooner et al., 2017), pensada para estudiantes con discapacidad moderada y severa, que incorpora medidas como el uso de esquemas, instrucción explícita y sistemática, organizadores gráficos, material manipulativo pictogramas y análisis de tareas. El objetivo es describir la evolución de las estrategias de reparto que evidencia un estudiante con autismo de 19 años en la resolución de problemas multiplicativos de comparación bajo una instrucción basada en esquemas modificada. Se detallan las estrategias empleadas durante las pruebas previas y en las sesiones de instrucción (trabajando secuencialmente problemas consistentes, inconsistentes y mezclados). Cada sesión de instrucción siguió una secuencia de modelización, guía y práctica independiente. El análisis se restringe a los problemas de división de reparto durante la práctica independiente, utilizando como categorías de análisis las estrategias de modelización siguientes: reparto uno a uno, reparto por ensayo y error, respuesta directa, reparto por múltiplos y estrategias incorrectas. Los resultados muestran que, en las pruebas previas a la instrucción, el estudiante no comprende los problemas, que aborda mediante estrategias aditivas sin emplear el esquema con manipulativos. En la instrucción de problemas consistentes predomina la estrategia de reparto por múltiplos, mientras que en la de inconsistentes la estrategia más empleada es la de respuesta directa. En la instrucción de mezclados, la estrategia más frecuente es la de reparto uno a uno. En conjunto, el estudiante evidencia una variedad de estrategias informales que le ayudan a comprender los problemas y consolidar estrategias de hechos numéricos. Se pone de manifiesto la importancia de llevar a cabo propuestas docentes para la enseñanza de la resolución de problemas a través del empleo de estrategias informales que se adapten a las necesidades de este alumnado.

Referencias

Bruno, A., Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y González-López, M. J. (2025). Strategies for solving multiplicative problems using a conceptual model-based problem-solving approach. A case study with a student with autism spectrum disorder. *ZDM–Mathematics Education, 56*(6), 12391256. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01568-w

Spooner, F., Saunders, A., Root, J. y Brosh, C. (2017). Promoting access to common core mathematics for students with severe disabilities though maathematical problem solving. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilitites, 42*(3), 171-186. https://doi.org/10.1177/1540796917697119

Downton, A. (2008). Links between children's understanding of multiplication and solution strategies for division. En M. Goos y K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 171-178). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Flores-Lamolda, L., Polo-Blanco, I. y Fernández-Cobos, R. (2025). Evolución de estrategias de reparto por un estudiante con autismo bajo un enfoque de instrucción basada en esquemas modificados. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ANÁLISIS DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DESDE UN ENFOQUE STEM

Analysis of the mathematics curriculum from a STEM perspective

Fraile-González, J. y Palop, B.

Universidad Complutense de Madrid

La Educación STEM, basada en la integración disciplinar y la resolución de problemas contextualizados, ofrece un gran potencial para desarrollar habilidades y conocimientos matemáticos (Rodrigues-Silva y Alsina, 2022). Sin embargo, con frecuencia las matemáticas se reducen a un rol meramente instrumental al servicio de otras disciplinas (Li y Schoenfeld, 2019). Por otro lado, en el perfil de salida de Educación Primaria y Secundaria (Real Decreto 157/2022 y Real Decreto 217/2022), se recoge la necesidad de desarrollar un pensamiento sistémico, ético y crítico para abordar los problemas globales. Esta necesidad entronca de manera natural en el marco propuesto por English (2023), quien sostiene que la resolución de problemas matemáticos en STEM promueve el desarrollo de tres formas transversales de pensamiento: sistémico (PS), basado en diseño (PBD) y crítico; este último incluye dos componentes: modelización matemática crítica (MMC) e indagación filosófica (IF). Este estudio analiza la contribución del currículo de Matemáticas de las etapas de Educación Primaria y Secundaria al desarrollo de dichas formas de pensamiento. Desde un paradigma interpretativo, se realiza un análisis de contenido deductivo tomando como unidades de análisis las dieciocho competencias específicas del área y los cuarenta criterios de evaluación de ambas etapas y como categorías de análisis las formas de pensamiento definidas por English (2023).

El análisis revela que la mitad de los elementos curriculares no corresponden a ninguna de las formas de pensamiento. Las competencias 1, 2 y 4 de Primaria y 1, 2, 4 y 7 de Secundaria corresponden a MMC; la competencia 5 de Primaria y las competencias 5 y 6 de Secundaria corresponden a PS; la competencia 4 de ambas etapas corresponde a PBD; y ninguna competencia completa corresponde a IF. El resto de las competencias de ambas etapas no encuentra correspondencia. En Secundaria encontramos dos criterios correspondientes a IF que evalúan la repercusión ética de las soluciones (2.2) y el rol de las matemáticas ante retos globales (6.3), aunque sus respectivas competencias (2 y 6), no corresponden a IF. Sin embargo, en Primaria ningún criterio de evaluación corresponde a IF. Por otra parte, las competencias y criterios orientados a la modelización carecen de la dimensión crítica que otorga el marco de English y tampoco contribuyen a la indagación filosófica, resultando en una presencia marginal del pensamiento crítico en el currículo de matemáticas. Consideramos estos hallazgos como una oportunidad para replantear y, si fuese necesario, ampliar el marco y/o las definiciones de English para incorporar las competencias no incluidas.

Referencias

English, L. D. (2023). Ways of thinking in STEM-based problem solving. *ZDM-Mathematics Education, 55*(7), 1219-1230. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01474-7

Li, Y. y Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International journal of STEM education, 6*(1), 1-13. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Rodrigues-Silva J. y Alsina Á. (2022). Las matemáticas desde el abordaje STEAM en la educación primaria: una revisión sistemática de la literatura. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 509-518). SEIEM.

Fraile-González, J. y Palop, B. (2025). Análisis del currículo de matemáticas desde un enfoque STEM. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

BARRERAS A LA INTEGRACIÓN DE TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Barriers to the integration of technology in early childhood mathematics teaching

Gallego-Sánchez, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

La integración de tecnología en el aula de Educación Infantil (EI) para mejorar el aprendizaje matemático es un desafío en la sociedad actual. Dado el relevante papel que juegan los maestros en dicha integración, se está desarrollando una experiencia de formación inicial que pretende que los estudiantes para maestro de Educación Infantil (EMEI) desarrollen la competencia profesional de planificación de la enseñanza integrando tecnología. La investigación que se está realizando (Gavilán-Izquierdo y Gallego-Sánchez, 2025) sobre la propuesta de formación inicial se basa en el marco del conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido (TPACK) (Mishra y Koehler, 2006). Entre los objetivos de esta investigación se incluye la identificación de las percepciones de los EMEI respecto a la experiencia de formación. En particular, este trabajo se centra en la identificación y clasificación de las barreras que los EMEI evocan o sugieren en relación con la integración de tecnología en el aula. Para la clasificación de las barreras partimos de la propuesta de Ertmer (1999).

Los participantes fueron 28 EMEI, que debían elaborar dos trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon, 1995) sobre geometría y aritmética, donde debían explicitar los objetivos de aprendizaje, la secuencia de tareas diseñadas con el software JClic y el aprendizaje hipotético pretendido. Se plantearon dos preguntas a los EMEI relativas a las potencialidades y dificultades que tenía el uso dado a la tecnología. Los datos analizados para este trabajo corresponden a las respuestas de los EMEI a la pregunta sobre dificultades. El procedimiento de análisis de datos empleado fue un análisis temático de tipo inductivo (Braun y Clarke, 2006).

Los resultados preliminares que se presentan indican que los EMEI sugieren distintas barreras para la integración de tecnología, algunas de ellas relacionadas con el contexto, otras relacionadas con el software y otras relacionadas con el aprendizaje matemático que este puede promover. Actualmente, se están clasificando las distintas barreras identificadas.

Referencias

Braun, V. y Clarke, V. (2006) Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Ertmer, P. A. (1999). Addressing first-and second-order barriers to change: Strategies for technology integration. *Educational Technology Research and Development, 47*(4), 47-61. https://doi.org/10.1007/BF02299597

Gavilán-Izquierdo, J. M. y Gallego-Sánchez, I. (2025). Developing TPACK through task design: Exploring the use of multiple modes of representation and the promotion of mathematical processes. *Journal of Education for Teaching*, *51*(1), 28-45. https://doi.org/10.1080/02607476.2024.2422507

Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers' College Record, 108*(6), 1017-1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Gallego-Sánchez, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2025). Barreras a la integración de tecnología en la enseñanza de las matemáticas en educación infantil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR EN EL USO DE RECURSOS INTRODUCIENDO LA MULTIPLICACIÓN

Teacher's specialized knowledge in the use of resources introducing multiplication

García-Viso, P., Climent, N. y De las Heras, M. A.

Universidad de Huelva

El modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (Carrillo et al., 2018) nos permite analizar tanto conocimiento del contenido como didáctico del contenido que moviliza el profesorado cuando enseña matemáticas. Este modelo describe el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas como conocimiento sobre teorías de enseñanza, estrategias y técnicas que faciliten el aprendizaje del contenido matemático, así como el empleo de recursos. Esta última categoría contempla el conocimiento sobre la potencialidad de herramientas, materiales y representaciones que contribuyen a la construcción del conocimiento matemático. La simple introducción de notación simbólica (x), no garantiza por sí sola el desarrollo del razonamiento multiplicativo (Clark y Kamii, 1996). Del mismo modo, conocer el algoritmo no implica comprensión conceptual, especialmente si se enseña de forma mecánica (Thompson y Saldanha, 2003). Asimismo, el uso consciente de recursos didácticos cobra importancia en la movilización de conocimiento matemático en el aula.

El objetivo de esta investigación es analizar el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas de una maestra de primaria en el uso de recursos durante la introducción de la multiplicación. Se trata de un estudio de caso con diseño metodológico cualitativo, centrado en una maestra experta que trabaja con estudiantes de 7 y 8 años. La información se obtuvo mediante la observación directa en el aula y grabaciones en vídeo de tres sesiones que fueron transcritas y analizadas posteriormente.

Los resultados muestran que la docente conoce distintos recursos, que emplea de forma intencionada, usa gestos (simulando, con la mano, un movimiento circular, para enfatizar el significado fenomenológico de repetición de la suma del mismo número que lo asocia con la multiplicación), imágenes (para contextualizar los problemas y favorecer la identificación de agrupamientos iguales, relacionado así con su conocimiento de la propiedad conmutativa de la multiplicación), y una tira plegable para representar la tabla del 2 (conjuntos de dos muñecos) de forma visual y progresiva, evidenciando conocimiento del significado que le asocia a la multiplicación como tantas veces una misma cantidad. Estos resultados revelan el conocimiento especializado de la maestra para favorecer la comprensión del concepto y del significado de la multiplicación. Como acción de transferencia proponemos el diseño de tareas formativas que inviten a identificar y reflexionar sobre la potencialidad de los posibles recursos que emplea la maestra en su práctica.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1–5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41-51. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.1.0041

Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). National Council of Teachers of Mathematics.

García-Viso, P., Climent, N. y De las Heras, M. A. (2025). El conocimiento especializado del profesor en el uso de recursos introduciendo la multiplicación. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

LA PAREJA MATEMÁTICA COMO MODELO DE AGRUPAMIENTO PARA ATENDER EL SENTIDO SOCIAFECTIVO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

The mathematical pair as a grouping model to address the socio-affective dimension in primary education

Garrido-Martos, R., De la Fuente, A. y Benito, A.

Universidad Autónoma de Madrid

El actual currículo de Educación Primaria en España destaca la importancia de fomentar competencias socioemocionales mediante metodologías activas y colaborativas. El Real Decreto 157/2022 promueve el trabajo en equipo, el desarrollo de habilidades interpersonales y la creación de ambientes de aprendizaje inclusivos. Dentro de un estudio de caso en un CRA de la Comunidad de Madrid, este trabajo tiene como objetivo analizar el modelo de agrupamiento que realizan, la pareja matemática, y su impacto en el sentido sociafectivo del alumnado, con los objetivos específicos: (i) describir los criterios que guían la formación de estas parejas por parte del profesorado, y (ii) valorar su efecto en aspectos como la cooperación, la autoconfianza y la motivación hacia las matemáticas. Investigaciones recientes en formación docente inicial también destacan el potencial de este enfoque para generar ambientes de aula positivos y dinámicos (Gómezescobar et al., 2024). El estudio se llevó a cabo mediante entrevistas semiestructuradas a docentes y alumnado, así como observaciones de aula durante sesiones de matemáticas, analizadas cualitativamente a partir de categorías tanto inductivas como deductivas con el software Atlas.ti. Estas sesiones incluían el uso de material manipulativo y prácticas inspiradas en el enfoque *thinking classrooms* (Liljedahl, 2020). Las docentes formaban parejas matemáticas intencionalmente, atendiendo a diferentes aspectos: rendimiento académico (similar o diferente), estilos de abordar la resolución de problemas, complementariedad o afinidad emocional, entre otros. Este tipo de agrupamiento permitía atender tanto a la diversidad como a las necesidades socioafectivas del alumnado. Los resultados muestran, en relación con el primer objetivo, que el agrupamiento responde a una reflexión docente orientada a favorecer la complementariedad y el equilibrio socioemocional. Respecto al segundo, se evidenció una cooperación sostenida entre los miembros de cada pareja, con comunicación fluida y ayuda mutua durante las tareas. Además, se observó una mejora en la autoconfianza y el interés por las matemáticas en la mayoría del alumnado. El modelo de agrupamiento de pareja matemática se revela como una estrategia eficaz para atender el sentido socioafectivo en el aprendizaje de las matemáticas, reforzando la empatía, la motivación y la comprensión. Su implementación da respuesta a los objetivos pedagógicos del centro y a las exigencias del marco legislativo actual.

Referencias

Gómezescobar, A., De la Fuente, A., Garrido-Martos, R., Benito, A. y Morales, L. (2024). *Thinking classrooms: percepción del alumnado en formación inicial docente*. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 590). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/27/Posteres/Poster_44.pdf

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, Grades K–12: 14 Teaching practices for enhancing learning*. Corwin Mathematics.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 24386-24504. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Garrido-Martos, R., De la Fuente, A. y Benito, A. (2025). La pareja matemática como modelo de agrupamiento para atender el sentido sociafectivo en Educación Primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ANÁLISIS DEL LENGUAJE DE LA PROPORCIONALIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMER CURSO DE LA ESO

Language analysis of proportionality in Spanish lower Secondary school textbooks

Garzón-Guerrero, J. A. y Recarte-Castellanos, M. J.

Universidad de Granada

Este trabajo se enmarca dentro de una investigación más amplia sobre la enseñanza de la proporcionalidad, dada la importancia de este concepto en relación con la comprensión de otros objetos matemáticos como en sí mismo. En la presente contribución, de carácter exploratorio, se analiza el lenguaje empleado para abordar el concepto de proporcionalidad que se da en cuatro libros de texto de diferentes editoriales españolas (Anaya, Santillana, SM y Edebé) dentro del marco de la LOMLOE para el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

El análisis del lenguaje presente en los libros de texto resulta relevante, dado que estos materiales constituyen uno de los principales recursos pedagógicos empleados en el aula. El lenguaje empleado en dichos textos, comprendido en un sentido amplio que incluye distintas representaciones verbales, numéricas, simbólicas, tabulares o gráficas, debe ser adecuado al nivel cognitivo del alumnado y se considera un elemento esencial en la construcción del conocimiento matemático (Ortiz et al., 2017).

De los diferentes marcos teóricos, se ha optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2024). Este modelo teórico enfatiza el papel del lenguaje matemático en las prácticas personales e institucionales asociadas a la resolución de problemas. Un concepto clave dentro de este marco es el de conflicto semiótico, el cual se refiere a las discrepancias que pueden surgir cuando una misma expresión es interpretada de manera distinta por diferentes sujetos, ya sean individuos o instituciones educativas.

El estudio se llevó a cabo mediante un análisis cualitativo del lenguaje que aparece, en sus diferentes registros de representación matemática, en libros de texto de primer curso de Educación Secundaria, dentro de los contenidos relacionados con la proporcionalidad.

Los resultados evidencian una amplia variedad de expresiones verbales, algunas de las cuales incorporan términos del lenguaje cotidiano utilizados con significados distintos a los del contexto matemático, lo que puede propiciar la aparición de conflictos semióticos entre los estudiantes. Se observa un predominio del lenguaje formal, así como el uso de formatos tabulares y gráficos. Las diferencias detectadas entre los libros analizados ponen de manifiesto el papel fundamental del profesor en la selección de estos recursos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Agradecimientos

Proyecto de investigación PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 dentro del grupo FQM-126.

Referencias

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en Educación Matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Albanese, V. (2017). La estimación de la media: Análisis del lenguaje en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 377-386).

Garzón-Guerrero, J. A. y Recarte-Castellanos, M. J. (2025). Análisis del lenguaje de la proporcionalidad en libros de primer curso de la ESO. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

CÓMO SELECCIONAN DEFINICIONES MATEMÁTICAS LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

How pre-service Secondary-school teachers select mathematical definitions

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., Toscano, R. y Fernández-León, A.

Universidad de Sevilla

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que pretende describir y explicar la práctica matemática de definir de estudiantes del máster de formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria (MAES). La selección de definiciones constituye una de las actividades que caracterizan tanto la práctica matemática de definir (González-Regaña et al., 2021) como la enseñanza de las matemáticas (Ball et al., 2008). Por ello, este póster se centra en la caracterización de la selección de definiciones y, para ello, se utiliza el análisis del discurso propuesto en la teoría de la comognición (Sfard, 2008). Esta teoría ha mostrado ser adecuada para el estudio de las prácticas matemáticas y ha permitido su caracterización en contexto matemático y contexto didáctico-matemático mediante diversas herramientas teóricas.

Los participantes en esta investigación fueron 33 estudiantes del MAES. El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario que incluía varias preguntas en las que los estudiantes debían seleccionar definiciones geométricas o bien para hablar con un matemático, o bien para enseñar en Educación Secundaria, lo que nos ha permitido poner el foco tanto en el discurso matemático como en el discurso didáctico-matemático de los estudiantes (Toscano et al., 2024). A través de las propiedades discursivas de la comognición, caracterizamos cómo seleccionan definiciones en ambos contextos e identificamos similitudes y diferencias entre ellos.

Los primeros resultados muestran que existen diferencias al seleccionar definiciones según el contexto. Por ejemplo, las palabras matemáticas que aparecen en las definiciones influyen en la selección de manera diferente en cada contexto. También se han identificado rutinas al seleccionar definiciones que son similares en ambos contextos. Por ejemplo, en ambos contextos, existen estudiantes que deciden seleccionar definiciones que incluyan el mayor número de características matemáticas de los objetos definidos.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto PID2022-139079NB-I00 financiado por MICIU /AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER/UE.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

González-Regaña, A., Martín-Molina, V., Toscano, R., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2021). El discurso de estudiantes para maestro cuando describen y definen cuerpos geométricos. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(1), 81-97. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3039

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge University Press.

Toscano, R., Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., González-Regaña, A. y Martín-Molina, V. (2024). Pre-service mathematics teachers' discourse: Differences between defining in task situations involving prototypical and non-prototypical solids. *The Journal of Mathematical Behavior, 75*, Artículo 101170. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101170

Gavilán-Izquierdo, J. M., Martín-Molina, V., Toscano, R. y Fernández-León, A. (2025). Cómo seleccionan definiciones matemáticas los futuros profesores de Educación Secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (p. X). SEIEM.

TRAYECTORIAS FORMATIVAS DE LOS FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO LATINOAMERICANO

Educational backgrounds of mathematics teacher educators in the Latin American context

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J.

Universidad de Oviedo

Los Formadores de Profesores de Matemáticas (FPM) han recibido especial atención en la literatura durante las últimas décadas (Castro Superfine et al., 2024). Definir qué es un FPM y determinar cuáles son sus conocimientos son algunos de los desafíos a los que se enfrentan los investigadores en este campo. Giadas et al. (2024) señalan que el conocimiento de los FPM se ve influenciado por la formación que estos reciben. En línea con las propuestas de Avalos-Rogel y Hernández-Escobar (2021), el objetivo de esta investigación es estudiar cuáles son las trayectorias formativas de los FPM del contexto latinoamericano. En esta investigación participaron 83 FPM de formación inicial de diferentes instituciones latinoamericanas. Se utilizó un cuestionario diseñado y validado por expertos de la red MTSK que recogía información sobre la formación, la experiencia, las concepciones y la percepción de preparación de los FPM latinoamericanos. Esta investigación analiza únicamente la formación de los FPM la cual era explorada a través de un ítem de opción única que exploraba el área de conocimiento en el que los FPM habían llevado a cabo sus estudios de grado, máster y doctorado. Este ítem tomaba como valores Matemáticas (o áreas científicas afines), Educación (profesor o maestro), Educación Matemática (didáctica de las matemáticas o matemática educativa), Pedagogía (u otras áreas afines) y No aplica. Los resultados de la investigación muestran una variedad de trayectorias formativas, siendo predominantes tres de ellas, a diferencia de lo que ocurría en el contexto español (Giadas et al., 2024), y se observan trayectorias formativas previamente señaladas (Avalos-Rogel y Hernández-Escobar, 2021). Este trabajo supone un avance en la investigación sobre el conocimiento de los FPM ya que permite estudiar cómo el conocimiento está influido por el contexto.

Agradecimientos

Trabajo financiado por los proyectos PID2021-122180OB-100 de la Agencia Estatal de Investigación de España y GRUPIN-IDE/2024/000713 de la Agencia de Ciencia, Competitividad e Innovación Empresarial Asturiana SEKUENS. Pablo Giadas agradece al proyecto PAPI-22-PF-18 de la Universidad de Oviedo.

Referencias

Avalos-Rogel, A. y Hernández-Escobar, M. (2021). Determinantes del conocimiento de los formadores de profesores en educación secundaria en México. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas del V congreso iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 154-161). RED MTSK.

Castro Superfine, A., Olanoff, D., Welder, R. M. y Prasad, P. V. (2024). A review of research on mathematics teacher educator knowledge: Mapping the terrain. *Education Sciences, 14*(8), 810.

Giadas, P., Pascual-Martín, M. I, Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Contreras, L. C. (2024). Perfiles de formadores de profesores de matemáticas en el contexto universitario español. *PNA, 18*(5), 439-466. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29287

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2025). Trayectorias formativas de los formadores de profesores de matemáticas en el contexto latinoamericano. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE SOBRE LA MAGNITUD VOLUMEN EN EDUCACIÓN INFANTIL

Learning trajectory on the measurement of volume in early childhood education

Gómezescobar, A.[a] y Carrera-González, M.[b]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b]Universidad Autónoma de Madrid

El desarrollo del pensamiento matemático en la Educación Infantil requiere enfoques pedagógicos que guíen la comprensión de conceptos fundamentales, como la capacidad y el volumen. Este estudio analiza la aplicación de una propuesta didáctica basada en la trayectoria de aprendizaje de Clements y Sarama (2009), revisada posteriormente por Van Dine et al. (2017), con especial atención a la subtrayectoria packing. Para ello, se plantearon las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo incide la aplicación de esta propuesta didáctica en la comprensión del concepto de volumen en estudiantes de Educación Infantil? ¿Qué progresión se observa en los niveles de aprendizaje del volumen tras la implementación de la propuesta? ¿Qué dificultades persisten y qué tipo de apoyo adicional podría ser necesario? Se entrevistó individualmente a 18 estudiantes de último curso de Educación Infantil antes y después de la implementación de la propuesta. Durante la entrevista, se les presentaron dos cajas de distinta forma y volumen, junto con policubos para poder medirlas. Se les pidió que determinaran qué caja era más grande. Sus actuaciones permitieron categorizar al alumnado en uno de estos tres niveles de la trayectoria de aprendizaje: 2. Volume Quantity Recognizer, 3. Volume Filler y 4. Volume Quantifier. La propuesta didáctica diseñada incluye dos prácticas de medida manipulativas y contextualizadas bajo el hilo conductor "El cumpleaños de Leo". Los estudiantes fueron distribuidos en cuatro grupos aleatorios, cada uno acompañado por una docente. De forma simultánea, fueron respondiendo a las consignas planteadas en las actividades. En la primera, correspondiente al nivel 3. Volume Filler, se busca que los estudiantes seleccionen una unidad de medida adecuada para el volumen y que sitúen policubos en una caja, llenándola por completo. En la segunda actividad, incluida en el nivel 4. Volume Quantifier los estudiantes tienen que comparar el volumen de varias cajas contando los policubos que van introduciendo en ellas. Los resultados iniciales evidencian que 10 estudiantes se encuentran en el nivel 2 de la trayectoria, uno en el nivel 3 y 7 estudiantes no se expresan a través de argumentos matemáticos. Tras la implementación de la propuesta, los datos reflejan una progresión en el conocimiento del volumen, con 7 estudiantes en el nivel 2, 3 en el nivel 3, 3 en el nivel 4 y 5 aún sin argumentación matemática. La implementación de la propuesta didáctica permitió avances en la trayectoria de aprendizaje del volumen, aunque algunos estudiantes aún requieren apoyo para desarrollar argumentaciones matemáticas.

Referencias

Clements, D. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach*. Routledge.

Van Dine, D., Clements, D., Barrett, J., Sarama, J., Cullen, C. y Kara, M. (2017). Integration of results: A revised learning trajectory for volume measurement. En J. Barrett, D. Clements y J. Sarama (Eds.), *Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area and volume. Monograph Number 16* (pp. 203- 219). National Council of Teachers of Mathematics.

Gómezescobar, A. y Carrera-González, M. (2025). Trayectoria de aprendizaje sobre la magnitud volumen en Educación Infantil. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA CHILENA

History of statistics and probability in Chilean secondary education mathematics textbooks

González-Díaz, S.[a], Díaz-Levicoy, D.[a] y Salcedo, A.[b]

[a]Universidad Católica del Maule, [b]Universidad Autónoma de Chile

Esta investigación caracteriza la presencia e integración de elementos históricos vinculados a la estadística y la probabilidad en libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria chilena. Teóricamente, el análisis de los elementos históricos presentes en los libros de texto se basa en la propuesta de Erdoğan et al. (2015), según la cual este recurso didáctico se interpreta como ecosistemas donde cada contenido ocupa un lugar (hábitat) y cumple una función pedagógica (nicho). Se empleó una metodología cualitativa con diseño de estudio de casos (Yin, 2014), bajo el análisis de contenido (Mayring, 2014). Se analizaron once libros de texto de matemática de Educación Secundaria (12 a 17 años) alineados al currículo vigente, distribuidos por el Ministerio de Educación de Chile y una editorial privada. El análisis consideró el tipo de elemento histórico (notas históricas, aplicaciones históricas, notas con aplicaciones y elementos en trabajos escolares), su ubicación (introducción, desarrollo, evaluación), época histórica y nivel educativo dentro del eje de estadística y probabilidad. Los resultados evidencian una inclusión limitada de elementos históricos, predominando notas biográficas (70,8 %) con escasa articulación pedagógica al contenido estudiado. La mayoría se concentra en los temas de probabilidad (77,3 %) y se corresponden con la Edad Contemporánea. No se identificaron aplicaciones históricas ni su presencia en las evaluaciones. Asimismo, de forma emergente, se identificó una categoría denominada problemas clásicos, que incluye enunciados como el Problema de Monty Hall y el Dilema del prisionero. En consecuencia, los elementos históricos asociados a estadística y probabilidad en libros de texto analizados son escasos y carecen de una intención pedagógica claramente definida.

Referencias

Erdoğan, A., Eşmen, E. y Fındık, S. (2015). Ortaokul matematik ders kitaplarında matematik tarihinin yeri: ekolojik bir analiz. *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 42*, 239-259.

Mayring, P. (2014*). Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution* (1ra ed.). Beltz.

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (5th ed.). SAGE Publications.

González-Díaz, S., Díaz-Levicoy, D. y Salcedo, A. (2025). Historia de la estadística y la probabilidad en libros de texto de matemática de Educación Secundaria chilena. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

FORMACIÓN SOBRE NECESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO EN MATEMÁTICAS EN EL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA EN ESPAÑA

Initial Teacher Training on Special Educational Needs in Mathematics in Spain

González-López, M. J., van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y Goñi-Cervera, J.

Universidad de Cantabria

En los últimos años ha aumentado el interés por investigar la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con necesidades específicas de apoyo educativo. La actual legislación educativa promueve la inclusión y los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje. En este contexto, el profesorado de Educación Primaria debe atender diariamente a una gran heterogeneidad de estudiantes, con un aumento en las aulas ordinarias de estudiantes con diagnósticos asociados a dificultades específicas de aprendizaje (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2024). En el ámbito de la formación de profesorado, la literatura reciente fomenta la promoción de procesos educativos inclusivos (Sánchez Serrano et al., 2021), pero son muy escasos los estudios que toman en cuenta a las matemáticas para ese propósito (Scherer y Bertram, 2024). Esta brecha formativa se refleja en las percepciones del profesorado de Educación Primaria, que manifiesta inseguridad para atender a esta realidad en sus aulas (Rosli y Suib, 2020).

Este trabajo tiene el objetivo de presentar un panorama sobre la formación inicial del profesorado de Educación Primaria en España en relación con las necesidades específicas de apoyo educativo en matemáticas. Para lograr este objetivo, analizamos los planes de estudio del Grado de Magisterio en Educación Primaria en una muestra de 24 universidades públicas españolas. Examinamos el tiempo que se dedica a dicha formación, el tipo de asignatura en el que se lleva a cabo, el tipo de necesidad educativa y los contenidos que se tratan. Los resultados revelan que la mayoría de estas universidades no integran las necesidades específicas de apoyo educativo en las asignaturas de matemáticas. Cuando lo hacen, no suelen especificar estrategias o necesidades concretas. Esto sugiere una falta de enfoque inclusivo desde las áreas de conocimiento que podría afectar la capacidad de los futuros docentes para atender adecuadamente las necesidades educativas en matemáticas.

Agradecimientos

Trabajo financiado por el proyecto PID2022-136246NB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2024). *Enseñanzas no universitarias. Alumnado con necesidad específica de apoyo educativo. Curso 2022-2023*. https ://www.educacionfpydeportes.gob.es/servicios-al-ciudadano/estadisticas/no-universitaria/alumnado/apoyo/2022-2023.html

Rosli, R. y Suib, A. F. (2020). Teachers' knowledge about teaching mathematics to learning disabilities students. *International Journal of Special Education and Information Technologies, 6*(1), 37-47. https://doi.org/10.18844/jeset.v6i1.5416

Sánchez Serrano, J.M., Alba Pastor, C. y Zubilaga del Río, A. (2021). La formación para la educación inclusiva en los títulos de maestro en educación primaria de las universidades españolas. *Revista de Educación, 393*, 321-352. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2021-393-496

Scherer, P. y Bertram, J. (2024). Professionalisation for inclusive mathematics—teacher education programs and changes in pre-service teachers' beliefs and self-efficacy. *ZDM–Mathematics Education, 56*(3), 447-459. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01580-0

González-López, M. J., van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y Goñi-Cervera, J. (2025). Formación sobre necesidades específicas de apoyo educativo en matemáticas en el Grado en Educación Primaria en España. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES CON AUTISMO FRENTE A PATRONES DE REPETICIÓN

Strategies used by students with autism in response to repetitive patterns

Goñi-Cervera, J.[a], Polo-Blanco, I. [a], Chimoni, M. [b] y Pitta-Pantazi, D.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b] University of Cyprus

Distintos estudios han puesto de manifiesto la importancia de trabajar con patrones de repetición desde edades tempranas para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico (Carraher et al., 2008) y por ello es importante conocer cómo estudiantes con diferentes características se enfrentan a este tipo de tareas. En el caso de estudiantes con trastorno del espectro autista (TEA), aunque las investigaciones que involucran patrones son escasas, un estudio reciente de Polo-Blanco et al. (en prensa) muestra que el desempeño de estudiantes con TEA de entre 6 y 12 años en una tarea de patrones crecientes es similar al de sus compañeros con desarrollo típico. Sin embargo, los estudiantes con TEA mostraron una preferencia por estrategias de tipo más visual. El presente estudio se centra en los patrones de repetición, un tema que la mayoría de las investigaciones ha explorado principalmente en relación con las estrategias de estudiantes con desarrollo típico (DT) (e.g., Lüken y Sauzet, 2021). En este contexto, el presente estudio tiene como objetivo analizar las estrategias empleadas por 11 estudiantes de 6 años con TEA al completar patrones de repetición. Las tareas involucraban distintos tipos de patrones (AB y AAB) y se les pedía completar casos consecutivos posteriores (AB_ y AAB_), anteriores (_AB y _AAB), y no consecutivos posteriores (por ejemplo, posiciones 15 o 20). Las categorías de análisis, adaptadas de Lüken y Sauzet (2021), fueron: (a) Ninguna referencia: no se atiende a las características del patrón ni a su regularidad; (b) Características singulares: se emplean elementos del patrón pero sin respetar su estructura; (c) Comparación y clasificación: se comparan características individuales de los elementos, y se establecen correspondencias uno a uno (d) Foco en la secuencia: se atiende a la sucesión de los elementos del patrón alternándolos o verbalizando la secuencia, y (e) Identificación del núcleo: se reconoce y utiliza explícitamente la unidad mínima del patrón. Los resultados mostraron que tareas en las que se les pedían términos posteriores generaron más respuestas correctas frente a las de términos anteriores. Además, en las tareas de términos posteriores, la estrategia más empleada fue foco en la secuencia y en las tareas de términos anteriores se dieron en la misma medida estrategias incorrectas centradas en características singulares y foco en la secuencia. Hay que destacar que las estrategias de identificación del núcleo fueron muy poco frecuentes. Al igual que en el trabajo de Lüken y Sauzet (2021), los estudiantes muestran variabilidad en la elección de las estrategias, predominando la estrategia foco en la secuencia, y escaseando las de identificación del núcleo. Destacamos la importancia de seguir investigando en cómo resuelven tareas de patrones estudiantes con TEA para poder desarrollar intervenciones que tengan en cuenta sus fortalezas y debilidades.

Referencias

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Lüken, M. M. y Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencias. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Polo-Blanco, I., Chimoni, M., Goñi-Cervera, J. y Pitta-Pantazi, D. (en prensa). Representations and generalization in early algebra: A comparative study of autistic students and their non-autistic peers. *Educational Studies in Mathematics.*

Goñi-Cervera, J, Polo-Blanco, I., Chimoni, M. y Pitta-Pantazi, D. (2025). Estrategias utilizadas por estudiantes con autismo frente a patrones de repetición. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

SOBRE LA ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA: LAS DIFICULTADES DE PLANTEAR UN BUEN PROBLEMA

On statistics in primary education: The difficulties of posing a good problem

Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J. y Almeida-Cabrera, R.

Universidad de La Laguna

El proceso de formular un buen problema estadístico, que sea comprensible y atractivo para los estudiantes y que pueda ser resuelto a partir del análisis e interpretación de datos recolectados por los propios niños y niñas, es una tarea compleja, que es iterativa por naturaleza (Leavy y Frischmeier, 2022) y para la que los futuros docentes requieren ser formados (Guerra et al., 2023). El objetivo general del trabajo que se presenta es analizar el posible efecto de un proceso de retroalimentación en dos fases, basado en una rúbrica y preguntas orientadas, en la calidad de los problemas estadísticos formulados por estudiantes para maestra/o de Educación Primaria. La pregunta de investigación es: ¿Qué cambios se observan en la calidad de los problemas estadísticos propuestos por los futuros maestros cuando se implementa la retroalimentación propuesta?

El estudio experimental involucra a 36 estudiantes trabajando en grupos de 5 o 6 miembros, que cursan el 3er año del Grado en Maestros en Educación Primaria. El estudio consta de dos fases: primeramente, los estudiantes reciben la indicación de formular un problema estadístico para estudiantes de primaria; en una segunda fase, deben refinar sus propuestas a partir de una rúbrica completada por el profesor y unas preguntas concretas con las que el profesor trata de centrar la atención del estudiante en elementos concretos de la propuesta. La rúbrica que se propone en este trabajo considera dos componentes, el contexto y el ajuste estadístico y tres niveles de desempeño para cada componente. La definición de las componentes mencionadas se basa en recomendaciones para la preparación de profesores (Bargagliotti et al., 2020).

Todos los problemas formulados en la primera fase presentaban errores relacionados con el ajuste estadísticos. Además, 3 de los 7 incluían contextos inadecuados para primaria. Después de la retroalimentación propuesta, 5 de los 7 equipos lograron formulaciones apropiadas alcanzando el máximo nivel de desempeño en ambos componentes. Estos resultados muestran que, tanto el diseño de la rúbrica como las preguntas orientadas, pueden ser un aporte en la formación inicial docente, en el proceso de desarrollar su competencia para formular problemas estadísticos de calidad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del Proyecto PID2022-139007NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

Referencias

Leavy, A. y Frischemeier, D. (2022). Developing the statistical problem posing and problem refining skills of prospective teachers. *Statistical Education Research Journal*, 21(1), article 10. https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.226

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. (2020). *Pre K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II*. American Statistical Association and National Council of Teachers of Mathematics.

Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J., Torres-González, M. D. y Almeida-Cabrera, R. (2024). Formulación de problemas e identificación de errores de los maestros en formación en la lectura de diagramas de barras. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 593).

Guerra-Ones, V., Perdomo-Díaz, J. y Almeida-Cabrera, R. (2025). Sobre la estadística en educación primaria: las dificultades de plantear un buen problema. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

NIVEL DE ALGEBRIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA DE ESTUDIANTES DE 1º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Level of algebrization in the solution of direct proportionality problems of students of 1st year of Secondary school

Liviano-Carmona, V., Caballero-Carrasco, A., Soto-Ardila, L. M. y Gordillo-Merino, A.

Universidad de Extremadura

El razonamiento proporcional es una de las habilidades matemáticas clave que los estudiantes deben desarrollar. Además, varios autores atribuyen a este razonamiento el paso de la aritmética al álgebra, cuya comprensión constituye la base para niveles superiores y constituye uno de los componentes más importantes del pensamiento formal (Godino y Batanero, 2002).

El objetivo de este trabajo es analizar el nivel de algebrización en la resolución de problemas de proporcionalidad directa de los estudiantes de 1º de Educación Secundaria Obligatoria. Para ello se lleva a cabo una investigación no experimental *o ex post facto* a través de un estudio descriptivo en una muestra de 305 estudiantes. Como instrumento de recogida de datos se utiliza el Instrumento Evaluación del Razonamiento en Proporcionalidad Directa (IERPD). La algebrización se valora a través de los niveles propuestos por Godino et al (2014): 0 - no existe razonamiento algebraico, es decir, no se abordan ni conceptos ni propiedades de tipo estructural o funcional; 1 - se reconocen las propiedades de las operaciones, se comprende el significado del signo igual, lo que da lugar a que surja el concepto de equivalencia; 2 - se usan las propiedades de las operaciones, se utiliza el significado relacional del signo igual, ambas cosas permiten manejar la noción de equivalencia; y 3 - representa formas afianzadas de razonamiento algebraico, es decir, el uso de lenguaje simbólico-literal y la capacidad de operar de forma analítica/sintáctica con dicho lenguaje.

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes, un 62,95%, presenta un nivel de algebrización 0. Tan solo un 17,57% y un 19,48% presentan el nivel 1 y 2, respectivamente. Estos resultados indican que la mayoría de los estudiantes están por debajo del nivel esperado ya que, como indican Burgos (2020) y Wilhemi (2017), es objetivo de los primeros cursos de secundaria afianzar los niveles 1 y 2 y alcanzar el nivel 3. Por otra parte, se encuentran diferencias significativas entre los niveles de algebrización y dos variables: la tipología de problemas y las características semánticas.

Referencias

Burgos, M. (2020). *Niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desde las perspectivas institucional y personal. Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas*. [Tesis de doctorado. Universidad de Granada. Granada.

Godino, J. y Batanero, C. (2002). Proporcionalidad para maestros. *Matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en educación primaria y secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giaomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del segundo congreso internacional virtual sobre el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos*.

Liviano-Carmona, V., Caballero-Carrasco, A., Soto-Ardila, L. M. y Gordillo-Merino, A. (2025). Nivel de algebrización en la resolución de problemas de proporcionalidad directa de estudiantes de 1º de Educación Secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

FACETA COGNITIVA DE FUTUROS MAESTROS A TRAVÉS DEL MODELADO DE MAQUETAS 3D INCLUSIVAS

Pre-service teachers' cognitive facet by means of inclusive scale models' design

Lois-Prados, C.[a], Blanco, T. F.[a], Fernández-López, A.[a] y Gorgal-Romarís, A.[b]

[a]Universidade de Santiago de Compostela, [b]Consellería de Educación, Ciencia, Universidades e Formación Profesional de la Xunta de Galicia

En colaboración con organizaciones que dan soporte a personas con discapacidad visual, el proyecto Geo3DTouch aborda la necesidad de crear recursos adaptados que permitan ofrecerles una educación inclusiva y de calidad. La creación de este tipo de materiales está avalada por estudios como el de Holloway et al. (2018) en el que se recogen diferentes ventajas que encuentra el colectivo cuando se les ofrece la información mediante maquetas 3D frente a los habituales mapas 2.5D. En el marco del EOS (Godino et al., 2016), este póster recoge resultados relativos a los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) puestas en juego a través de los primeros diseños 3D realizados por futuros/as maestros/as en la línea de trabajo del proyecto enfocada hacia la creación este tipo soportes (maquetas 3D), prestando especial atención a la faceta cognitiva en relación con el sentido espacial.

La muestra se compone de 84 estudiantes que trabajan de forma colaborativa en grupos de 4 integrantes en la materia de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría de 3º curso del Grado de Maestro/a en Educación Primaria. El objetivo es que creen materiales 3D con Tinkercad y formulen actividades para desarrollar la orientación espacial. Los instrumentos son el porfolio y el propio diseño 3D, junto con la observación participante de los investigadores. El estudio presentado es de corte cualitativo y atiende al análisis de los CCDM sobre orientación y visualización, mediante las componentes de la faceta cognitiva del EOS puestas en juego en el diseño del material y en la formulación de tareas, tomando como referencia la clasificación y las observaciones proporcionadas en Gonzato et al. (2011). Los diseños se han clasificado en dos grupos: espacios exteriores (p. ej. parques o plazas) y espacios interiores (p. ej. aulas o maquetas multinivel de un centro educativo). Los resultados muestran que el conocimiento sobre la formulación de actividades guarda una estrecha relación con el tipo de diseño; mientras que el conocimiento del modelado se ha visto más condicionado por el formato de la información gráfica del alumnado para guiar sus diseños.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122326OB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033. Proyecto Geo3DTouch de la 7th Seed Funding Call 2024 de EUniWell.

Referencias

Godino, J D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Gonzato, M., Blanco, T. F. y Godino, J. D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, *77*, 99-117.

Holloway, L., Marriott, K. y Butler, M. (2018). Accessible maps for the blind: Comparing 3D printed models with tactile graphics. En R. Mandryk, M. Hancock, M. Perry y A. Cox (Eds.) *Proceedings of the 2018 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 198-210). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/3173574.3173772

Lois-Prados, C., Blanco, T.F., Fernández-López, A., Gorgal-Romarís, A. (2025). Faceta cognitiva de futuros maestros a través del modelado de maquetas 3D inclusivas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

EFECTO DEL ESPACIO EDUCATIVO EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE

Effect of the educational space in the learning process

Loureiro-G, M., Míguez-Álvarez, C. y Mociño González, I.

Universidad de Vigo

El uso de estrategias metodológicas que fomenten el aprendizaje activo, centradas en la resolución de problemas contextualizados y el uso de materiales manipulativos, es fundamental y contribuyen a desarrollar una afectividad positiva hacia las matemáticas en futuros docentes (Romero et al., 2023). Es fundamental tener en cuenta todos los recursos para poder hacer un buen uso de las metodologías activas y uno de estos recursos, poco estudiado hasta ahora, es el espacio educativo.

Tras una búsqueda exhaustiva en la revista AIEM y en las actas de la SEIEM, no se ha encontrado ningún trabajo que aborde este aspecto de forma directa. Autores como Sol (2023) han destacado su importancia, incluyendo distribución y condiciones del aula como criterio mediacional que interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje (EA). Este es uno de los seis resaltados en los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) que indican que un proceso de enseñanza-aprendizaje alcanzará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articularlos en su conjunto (Breda et al., 2017).

Por este motivo se presenta este primer trabajo que analiza la percepción del alumnado universitario sobre una de las aulas donde se estaba desarrollando su actividad docente a través de una pequeña entrevista a parte del alumnado que cursaba la materia de Matemáticas para maestros del Grado en Educación Infantil. Como objetivos destacan analizar el impacto que tienen el espacio-aula en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado, a partir de su propia percepción e identificar los elementos del espacio-aula que el alumnado considera más influyentes en su aprendizaje.

El número de participantes ha sido de 32 y el cuestionario se ha diseñado en torno a tres dominios principales: físico-espacial, personal y proceso educativo. Gran parte de las cuestiones eran relativas a aspectos concretos de esa aula, otras más genéricas del efecto del espacio en el proceso de EA. Los principales resultados han revelado que: el 87,7% considera que "La acústica del aula afecta a su proceso de enseñanza-aprendizaje" y más del 78% de los participantes opina que "Los colores presentes en el aula influyen en su estado de ánimo y concentración". Estos resultados muestran la influencia que ejerce el espacio físico del aula en el proceso de EA del alumnado, siendo los factores de ruido y colores los que más afectan la concentración y motivación de este.

Agradecimientos

Proyecto financiado por la Diputación Provincial de Ourense INOU2025-05 X508.

Referencias

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Romero-García, C., Manzanal, A. I. y Palacios, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las Matemáticas. *AIEM-Avances de investigación en Educación Matemática, 24*, 93-110. https://doi.org/10.35763/aiem24.4418

Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. (2023). Criterios de idoneidad didáctica en la argumentación práctica docente al seleccionar problemas para introducir el tema de función. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 515-522). SEIEM.

Loureiro-G, M., Míguez-Álvarez, C. y Mociño González, I. (2025). Efecto del espacio educativo en el proceso de enseñanza aprendizaje. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ENTRE LA MAGIA Y LA EMOCIÓN: SEGUIMIENTO AFECTIVO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Between magic and emotion: Tracking affective responses in the mathematics classroom

Maestre, N.[a], Palop, B.[a], Forte, A.[b] y Garrido-Martos, R.[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de València y
[c]Universidad Autónoma de Madrid

Uno de los principales desafíos en la enseñanza de las matemáticas es la presencia de emociones negativas como la ansiedad, la frustración o la desmotivación. Estas emociones condicionan tanto el rendimiento como la actitud hacia la materia. Estudios recientes, como el de Romero-García et al. (2023), muestran que afectan la autopercepción y la seguridad de los futuros docentes. Sin embargo, sigue siendo difícil conocer cómo se sienten los estudiantes en cada momento concreto de una clase y cómo varía su estado emocional durante una sesión.

Proponemos una adaptación del modelo circunflejo del afecto reformulado por Posner et al. (2005), junto con las aportaciones de Mestre Navas y Guil Bozal (2012), que destacan su utilidad para representar desplazamientos afectivos como vectores en un espacio bidimensional. Este modelo permite registrar el "viaje emocional" del alumnado a lo largo de una sesión de clase, codificando su experiencia afectiva según activación y valencia de cinco en cinco minutos. Nuestro objetivo es analizar si propuestas como la matemagia pueden inducir desplazamientos emocionales positivos, como ya se ha señalado en la revisión de Wiseman y Watt (2020), donde se recogen efectos positivos de la magia en el aula sobre la motivación y la atención.

Analizamos datos de 35 alumnos durante varias sesiones de un Curso 0 de Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid: grabaciones de audio, registros emocionales y cinco entrevistas en las que los estudiantes relatan su experiencia. Cada cambio entre registros fue representado como un vector con un ángulo que refleja la dirección del desplazamiento afectivo.

Este poster presenta los resultados del análisis de las sesiones, particularmente las centradas en la matemagia. Se muestran momentos clave, registros emocionales colectivos y narrativas estudiantiles. Se observa una clara correlación entre el "viaje emocional" del alumnado y el desarrollo de la sesión, no solo por la tarea en sí sino, en gran medida, por la gestión del aula del profesor. La matemagia, como contexto de un problema, puede generar un estado emocional favorable antes de abordar la actividad.

Referencias

Mestre Navas, J. M. y Guil Bozal, R. (2012). *La regulación de las emociones: una vía a la adaptación personal y social*. Ediciones Pirámide.

Posner, J., Russell, J. A. y Peterson, B. S. (2005). The circumplex model of affect: An integrative approach to affective neuroscience, cognitive development, and psychopathology. *Development and Psychopathology, 17*(3), 715-734. https://doi.org/10.1017/S0954579405050340

Romero-García, C., Manzanal Martínez, A. I. y Palacios Ortega, A. (2023). Impacto del proceso de formación del maestro en su afectividad hacia las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 24*, 93-110. https://doi.org/10.35763/aiem24.4418

Wiseman, R. y Watt, C. (2020). Conjuring cognition: A review of educational magic-based interventions. *PeerJ, 8*, e8747. https://doi.org/10.7717/peerj.8747

Maestre, N., Palop, B., Forte, A. y Garrido, R. (2025). Entre la magia y la emoción: Seguimiento afectivo en el aula de matemáticas. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ANSIEDAD MATEMÁTICA EN LA LITERATURA CIENTÍFICA: UN ANÁLISIS BIBLIOMÉTRICO

Math anxiety in scientific literature: A bibliometric analysis

Martín-Colomo, I., Marbán, J. M. y Espina, E.

Universidad de Valladolid

La ansiedad matemática ha recibido una creciente atención por parte de la investigación educativa desde la aparición de los primeros trabajos en la década de los 50, habiéndose trasladado también recientemente a la sociedad como consecuencia de la publicación del informe PISA 2022 (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2023) que apunta a una correlación negativa, significativa estadísticamente, con el rendimiento matemático, algo congruente con numerosos estudios previos. Junto con este tipo de relación, numerosas investigaciones previas habían ya apuntado a relaciones del mismo tipo con otros constructos tales como el autoconcepto, así como a la presencia de diferencias de género (Luttenberger et al., 2018).

Comprender desde niveles micro y macro los diferentes avances que se han producido alrededor de la ansiedad matemática tras siete décadas de investigación facilita nuevas evoluciones lo que nos lleva, en particular, a preguntarnos: ¿cómo está evolucionando la literatura científica sobre ansiedad matemática? Para dar respuesta a esta pregunta, nos hemos planteado como objetivos los correspondientes a identificar tendencias, comparar líneas de trabajo y rastrear producción e impacto de grupos de investigación en relación con la ansiedad matemática. Para alcanzar tal objetivo, hemos llevado a cabo un análisis bibliométrico de la producción científica publicada desde 1950 hasta 2024 (inclusives) en la base de datos Web of Science apoyándonos en una búsqueda booleana que diese cuenta de diferentes términos que han venido usándose para referirse a la ansiedad matemática (*math anxiety*) tales como *number anxiety* o *fear of mathematics*. Al mismo tiempo, el estudio no se compromete con ningún marco teórico a priori dado el propósito de un análisis bibliométrico como el que se plantea. La información procedente de la búsqueda se analizó con el apoyo de VOSviewer de cara a obtener mapas y redes bibliométricas, efectuándose los siguientes análisis: acoplamiento bibliográfico de países y de organizaciones, co-ocurrencia de palabras y citación de publicaciones. Los resultados obtenidos permiten apreciar un crecimiento de carácter aparentemente exponencial de la literatura publicada sobre este tema y sitúan a los países del ámbito anglosajón como los más activos en la investigación sobre ansiedad matemática. Los análisis de co-ocurrencia de palabras y de citación de publicaciones, por su parte, evidencian que los principales focos de atención están en el diseño de escalas, en el diagnóstico y en el estudio de su relación con rendimiento, género y diferentes dimensiones del dominio afectivo, quedando los aspectos de intervención o prevención en un segundo plano.

Agradecimientos

La publicación es parte de la actuación PID2022-138325OB-I00 financiada por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2023*). PISA 2022. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español*. Ministerio de Educación y Formación Profesional. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2022.html

Luttenberger, S., Wimmer, S. y Paechter, M. (2018). Spotlight on math anxiety. *Psychology Research and Behavior Management, 11*, 311-322. https://doi.org/10.2147/PRBM.S141421

Martín-Colomo, I., Marbán, J. M. y Espina, E. (2025). Ansiedad matemática en la literatura científica: un análisis bibliométrico. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA: ANÁLISIS TEMÁTICO Y DE DESCRIPTORES DE INVESTIGACIÓN

ICT in the teaching of geometry: Analysis of thematic and research descriptors

Maz-Machado, A., Rodriguez-Baiget, M. J., Rodrígez-Baige, D. y Martínez, H.

Universidad de Córdoba

Este trabajo analiza el papel de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de la geometría desde una perspectiva bibliométrica y temática. El estudio se enmarca en los planteamientos teóricos sobre la mediación tecnológica en la educación matemática (Rico, 2012), destacando la transformación de las prácticas pedagógicas mediante la incorporación de entornos digitales.

El objetivo principal fue identificar los descriptores temáticos más frecuentes en la literatura científica indexada en Scopus entre 2000 y 2024, con énfasis en artículos de ciencias sociales relacionados con la enseñanza de la geometría mediada por TIC. El diseño metodológico fue de tipo cuantitativo, con enfoque bibliométrico y análisis de contenido (Maz-Machado et al., 2022). Se analizaron 308 artículos, de los cuales se extrajeron 1145 palabras clave, agrupadas en siete categorías temáticas. Entre los descriptores más comunes se encontraron “virtual reality”, “geometry”, “ICT”, “mathematics education” y “mathematics”, lo que evidencia una tendencia investigativa centrada en el uso de tecnologías inmersivas y el fortalecimiento del pensamiento geométrico. La red de coocurrencia mostró una estructura conceptual cohesionada en torno a la educación matemática y las tecnologías emergentes. Los resultados permiten orientar futuras líneas de investigación y diseñar estrategias didácticas basadas en la integración de herramientas digitales (Badillo et al., 2021). Entre las acciones de transferencia potenciales destacan la inclusión de software educativo como GeoGebra y el uso de realidad virtual en aulas escolares, así como la necesidad de formar docentes para una implementación efectiva y equitativa de estas tecnologías (Acosta et al., 2022).

Referencias

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). Recursos manipulativos y gráficos en la comprensión de tareas con patrones: un análisis comparativo con niños de 4 a 6 años. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 119-127). SEIEM.

Badillo, E., Climent, N., Fernández, C. y González, M. T. (Eds.) (2021). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Lupiáñez, J. L. y Loría, J. R. (2019). La competencia profesional de profesores de matemáticas de educación secundaria en ejercicio en Costa Rica. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 263-284). Ediciones Universidad Salamanca.

Maz-Machado, A., Gutiérrez-Rubio, D., Madrid. M. J. y Pedrosa-Jesús, C. (2022). A look at doctoral theses in mathematics education at Andalusian universities (2010-2020) from a gender perspective. *TEM Journal, 11*(3), 1007-1012. https://doi.org/10.18421/TEM113-03

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1

Maz-Machado, A., Rodriguez-Baiget, M. J., Rodrígez-Baige, D. y Martínez, H. (2025). Las TIC en la enseñanza de la geometría: análisis temático y de descriptores de investigación. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

IDENTIFICACIÓN DEL SENTIDO ESPACIAL POR PARTE DE FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA

Identification of spatial sense by future primary school teachers

Montoro-Flores, R. y Ramírez-Uclés, R.

Universidad de Granada

El National Council of Teachers in Mathematics (NCTM), en sus propuestas curriculares, propone que la enseñanza de las matemáticas se base en el desarrollo del sentido matemático por parte de los estudiantes (NCTM, 1989). Formado a su vez por cinco sentidos: sentido algebraico, sentido numérico, sentido espacial, sentido de la medida y sentido estocástico, es una aproximación relevante en educación matemática. Prueba de ello es su papel en los planes de formación de futuro profesorado (Flores y Rico, 2015) y en los diversos currículos no universitarios nacionales.

Según Flores y Rico (2015), el sentido espacial lo forman dos dimensiones: el manejo de los conceptos geométricos y las destrezas y habilidades de visualización. La primera dimensión se divide en tres componentes: conocer las propiedades de las formas y figuras, reconocer y establecer relaciones geométricas y la ubicación y los movimientos. Por su parte, la segunda dimensión se denomina visualización, y se considera una componente transversal que conecta las tres anteriores.

Siguiendo esta definición, en este estudio se plantea cómo el futuro profesorado de primaria identifica, en tareas geométricas, las componentes del sentido espacial. Para abordar esta pregunta, se diseñaron tres tareas que resolvieron. 69 estudiantes del segundo curso del grado en Educación Primaria Posteriormente, en una segunda sesión, identificaron las componentes del sentido espacial. Para analizar las respuestas, los autores determinaron a priori qué componentes se esperaba que se identificase en cada tarea y se establecieron las categorías: “identifica y justifica”, “identifica, pero no justifica” y “no justifica”.

En términos generales, se observa una relación entre las componentes del sentido espacial y los contenidos geométricos que encuentran. Los estudiantes asocian “elementos geométricos” cuando aparecen figuras geométricas conocidas, identifican “relaciones geométricas” con los giros y simetrías y señalaron que la componente de “ubicación y movimientos” estaba presente en la posición, los cambios de referencia y a los giros.

Referencias

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). Commission on standard for school mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Autor.

Montoro-Flores, R. y Ramírez-Uclés, R. (2025). Identificación del sentido espacial por parte de futuros docentes de primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ESTUDIO DE LAS CAPACITACIONES MATEMÁTICAS DE LOS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN PANAMÁ

Study of the mathematical training of primary education teachers in Panama

Murillo, M.[a], Rodríguez-Sánchez, M. M.[b] y Fuertes-Prieto, M. A.[b]

[a] Universidad de Panamá, [b] Universidad de Salamanca

La Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como de los planes para la preparación profesional de los educadores matemáticos (Rico, 2012). Investigadores como Llinares et al. (2022) plantean que "la investigación en Didáctica de la Matemática proporciona evidencias que permiten materializar propuestas de formación de maestros y profesores de matemáticas basadas en un marco de competencias profesionales docentes", destacando la necesidad de que el docente mantenga una formación continua.

En Panamá, el Ministerio de Educación, convoca anualmente a los docentes en servicio a inscribirse en su portal educativo con el fin de cursar seminarios de capacitación de forma gratuita. Estas capacitaciones se realizan en modalidad semipresencial y con una duración de 40 horas, simultáneamente en las 16 regiones educativas en las que se divide el territorio panameño.

Con el objetivo de medir el impacto de los seminarios en la formación docente en matemáticas de maestros en servicio del nivel primario, durante los años de 2015 hasta 2020, se diseñó un cuestionario para las áreas de aritmética y geometría. Este se utilizó como pretest y postest con una muestra de 1823 y 756 docentes, respectivamente.

Los resultados muestran diferencias significativas ($p<0.05$) en ambas áreas, aunque estas fueron menores en geometría que en aritmética, existiendo contenidos en geometría en los que los maestros presentan más dificultades, como son el cálculo del perímetro y área de polígonos. Esto evidencia que se requiere, en un futuro, brindar más seminarios de geometría en los temas que no dominan y ofrecer, además, estrategias didácticas.

A partir de este estudio se pueden detectar las necesidades de formación en didáctica de las matemáticas de los docentes en servicio, siendo estas el punto de partida de un programa de mejora de la capacitación de los docentes de matemáticas que se ha diseñado y llevado a cabo en los cursos posteriores.

Referencias

Llinares, S., Breda, A., Climent, N., Fernández, C., Font, V., Lupiañez, J. L., Moreno, M., Pérez, P., Ruiz, J. F. y Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en Educación Matemática* (pp. 481-530). Universidad de Granada.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Murillo, M., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Fuertes-Prieto, M. A. (2025). Estudio de las capacitaciones matemáticas de los docentes de Educación Primaria en Panamá. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EDUCACIÓN INFANTIL: UNA MIRADA CUALITATIVA A LA VISIÓN DEL DOCENTE ANTE UNA ENSEÑANZA DESCONECTADA

Computational thinking in early childhood education: A qualitative exploration of teachers' perspectives on unplugged instruction

Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A., Del Olmo-Muñoz, J., Sotos-Serrano, Mt. y O'Connor, P.

Universidad de Castilla-La Mancha

El pensamiento computacional (PC) se ha convertido en una competencia fundamental en la educación, no solo en informática, sino como habilidad transversal para resolver problemas complejos de forma lógica y estructurada. Su incorporación al currículo escolar busca preparar al alumnado para los desafíos de la era digital. Sin embargo, en Educación Infantil (EI) su implementación presenta retos; entre ellos, la formación docente es una de las principales prioridades en la integración del PC en el aula (Izquierdo-Álvarez y Pinto-Llorente, 2025). Para enfrentar esta problemática, se han considerado distintas estrategias didácticas, destacando entre ellas las actividades desconectadas, las cuales prescinden del uso de dispositivos electrónicos (Lee y Junoh, 2019).

En este contexto, se desarrolla un programa de formación en PC desconectado para docentes de EI, compuesto por cinco talleres centrados en habilidades propias del PC más allá de la programación, como depuración, descomposición, reconocimiento de patrones y generalización. La investigación busca analizar cómo este programa impacta en las prácticas pedagógicas del profesorado desde una perspectiva cualitativa, partiendo de la hipótesis de que, tras realizar el programa, las docentes se sentirán más preparadas para diseñar y evaluar actividades relacionadas con el PC. Los objetivos específicos son: (OE1) identificar las barreras en la implementación del PC en el aula infantil; (OE2) implementar un programa basado en actividades desconectadas; (OE3) evaluar su utilidad y aplicabilidad percibida por las docentes; y (OE4) detectar cambios en sus estrategias pedagógicas tras la formación. Los resultados preliminares revelan que las docentes perciben una necesidad clara de recursos didácticos adaptados a niños de 3 a 6 años, así como formación específica para el profesorado en esta etapa. Además, se identifica un desconocimiento generalizado entre los docentes sobre lo que realmente implica el PC.

Agradecimientos

Investigación realizada al amparo de la ayuda 2022-GRIN-34039 de la Universidad de Castilla-La Mancha, cofinanciada con fondos FEDER.

Referencias

Izquierdo-Álvarez, V. y Pinto-Llorente, A. M. (2025). Exploring pre-service teachers' perceptions of the educational value and benefits of computational thinking and programming. *Sustainability, 17*(5), 2164. https://doi.org/10.3390/su17052164

Lee, J. y Junoh, J. (2019). Implementing unplugged coding activities in early childhood classrooms. *Early Childhood Education Journal, 47*(6), 709-716. https://doi.org/10.1007/s10643-019-00967-z

Leung, S. K. Y., Wu, J. y Li, J. W. (2023). Children's knowledge construction of computational thinking in a play-based classroom. *Early Child Development and Care, 194*(2), 208-229. https://doi.org/10.1080/03004430.2023.2299405

Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A., Del Olmo-Muñoz, J., Sotos-Serrano, Mt. y O'Connor, P. (2025). pensamiento Computacional en educación infantil: Una mirada cualitativa a la visión del docente ante una enseñanza desconectada. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA DE LA COMPETENCIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN 1º DE ESO

Diagnostic assessment of problem-solving competence in Grade 7

Palop, B. [a], Ramos, P. [b] y Garrido-Martos, R. [c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de Alcalá, [c]Universidad Autónoma de Madrid

El comienzo de la etapa de Educación Secundaria suele ir acompañado de evaluaciones iniciales diagnósticas para establecer el punto de partida del alumnado. Este trabajo tiene como objetivo evidenciar la necesidad de contar con instrumentos diagnósticos fiables para evaluar la competencia en resolución de problemas matemáticos en 1.º de ESO, a partir del diseño, validación y aplicación de una prueba estructurada y el análisis de las producciones del alumnado con criterios fundamentados en investigaciones previas. La prueba, estructurada en torno a los sentidos numérico, estocástico, del espacio y de la medida, los dominios cognitivos aplicar y razonar, y una componente de metacognición, busca establecer diferencias de rendimiento y autoconfianza, particularmente por género (Palop y Garrido-Martos, 2023). La validación inicial se realizó mediante un panel de expertos que evaluó la pertinencia, dificultad y duración de los ítems. De los nueve problemas propuestos, se seleccionaron ocho, descartando uno con índice de validez de contenido de 0.37, y ordenándolos según dificultad percibida. El instrumento se aplicó a 158 estudiantes durante el primer mes de curso. Las producciones fueron evaluadas con una rúbrica que priorizaba el planteamiento y la representación, siguiendo criterios de investigaciones previas (Fagnant y Vlassis, 2013; Palop y Santaengracia, 2022), y considerando estrategias similares descritas por Tinoco et al. (2021). En el análisis de varianza (ANOVA) obtuvimos, en primer lugar, que el razonamiento se vio significativamente afectado tanto por el género (p = .0257) como por la capacidad de aplicar (F = 39.55, p < .001). En cuanto a los sentidos, el rendimiento en espacio y medida estuvo influido por el género (p = .0105) y de forma destacada por el rendimiento en números (F = 38.13, p < .001). El numérico, por su parte, se relacionó con espacio y medida (F = 38.79, p < .001) y Estocástico (p = .0324), sin efecto del género. Finalmente, el sentido estocástico se vio influido por los desempeños en espacio y medida (p = .009) y números (p = .032), sin que el género tuviera un efecto significativo. Este estudio pone de relieve la necesidad de considerar los distintos sentidos matemáticos de forma equilibrada en los procesos de evaluación diagnóstica, así como de diseñar instrumentos específicos para captar la competencia de resolución de problemas desde una perspectiva amplia y competencial.

Referencias

Fagnant, A. y Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 149-168. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9476-4

Palop, B. y Garrido-Martos, R. (2023, noviembre). *Género y modelización: Análisis preliminar de un problema aritmético*. Comunicación presentada en el 1º Congreso Internacional en Investigación, Transferencia e Innovación en Educación, Aveiro, Portugal.

Palop, B. y Santaengracia, J. J. (2022). Bar-model introduction in late primary school. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. https://hal.science/CERME12/hal-03765521v1

Tinoco, D., Ramírez, M. y Rico, L. (2021). Resolución de problemas de proporcionalidad: análisis de estrategias utilizadas por estudiantes de secundaria y bachillerato. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 309-318). SEIEM.

Palop, B., Ramos, P. y Garrido-Martos, R. (2025). Evaluación diagnóstica de la competencia de resolución de problemas en 1º de ESO. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

RELACIONES ENTRE ÁMBITOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS DE TAREAS FORMATIVAS: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA

Relationships between topics and mathematical processes in formative tasks: A systematic review

Plazas, R.[a], Climent, N.[a] y Contreras, L. C.[a]

[a] Universidad de Huelva

Una tarea formativa se puede definir como la forma de organizar un entorno que tiene el objetivo de que el futuro profesor construya una idea o proceso matemático o didáctico-matemático (Watson et al., 2013). Según Grevholm et al., (2009), las tareas formativas tienen una *función*, una *forma* y un *foco.* La función son los "aprendizajes esperados de los estudiantes para maestro" (p. 1); la forma es la manera de "inspirar, desafiar y motivar a los estudiantes" (p. 1) a través de las estrategias pedagógicas; y el foco son el conjunto de contenidos matemáticos. En este trabajo nos centramos en el foco, que entendemos como los ámbitos (*tópics*) y procesos identificados por Inglis y Foster (2018) en la investigación en educación matemática en los últimos cincuenta años. El presente estudio forma parte de una revisión sistemática que busca caracterizar las tareas formativas orientadas a desarrollar conocimiento del futuro profesor de matemáticas siguiendo el protocolo PRISMA (Page et al., 2021). Se han establecido unos criterios de elegibilidad para incluir los documentos encontrados en *Scopus* y *Web of Science*. Los 28 artículos incluidos en la primera búsqueda implementan tareas en la formación inicial de Educación Infantil y Educación Primaria con el foco en el conocimiento. El objetivo es analizar los ámbitos y procesos matemáticos más abordados en las tareas formativas identificadas a través de la revisión sistemática, así como examinar sus combinaciones y caracterizar los temas dentro de cada ámbito. La pregunta de investigación es; ¿Qué ámbito, procesos matemáticos y temas se abordan con mayor frecuencia en las tareas formativas incluidas, y cómo se combinan entre ellos? Los resultados apuntan a una tendencia de tareas formativas de números y operaciones como ámbito junto con resolución y/o formulación de problemas y prueba y argumentación como procesos. Como parte de este ámbito, el tema más abordado son las fracciones. La geometría tiene una mayor relación con el razonamiento espacial. Se detecta la necesidad de abordar un mayor abanico de ámbito y procesos matemáticos en la investigación sobre tareas en la formación inicial. Se está llevando a cabo una segunda búsqueda y se pretende publicar un artículo como acción futura.

Referencias

Grevholm, B., Millman, R. y Clarke, B. (2009). Function, form and focus: The role of tasks in elementary mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds), *Tasks in primary mathematics teacher education. Mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 1-5) Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_1

Inglis, M. y Foster, C. (2018). Five decades of mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(4), 462-500. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.4.0462

Page M. J., McKenzie J. E., Bossuyt P. M., Boutron I., Hoffmann T. C., Mulrow C. D., Shamseer L., Tetzlaff J. M., Akl E. A., Brennan S. E., Chou R., Glanville J., Grimshaw J. M., Hróbjartsson A., Lalu M. M., Li T., Loder E. W., Mayo-Wilson E., McDonald S., (…) Moher D. (2021). The PRISMA 2020 statement: An updated guideline for reporting systematic reviews. *BMJ, 372*(71). https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D. y Yang, Y. (2013). Introduction. En C. Margolinas (Eds.), *Task design in mathematics education. Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22* (pp. 7-14), Oxford, Reino Unido. http://hal.archivesouvertes.fr/hal-00834054

Plazas, R., Climent, N. y Contreras, L. C. (2025). Relaciones entre ámbitos y procesos matemáticos: Una revisión sistemática. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

EL ROL DEL DOCENTE EN PLATAFORMAS VIRTUALES: UN ESTUDIO COMPARATIVO CON DESMOS Y MOODLE PARA LA ENSEÑANZA DE RACIONALES

The teacher's role in virtual environments: A comparative study with Desmos and Moodle for the teaching of rational numbers

Ponce-Serrano, B., Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A. y Del Olmo-Muñoz, J.

Universidad de Castilla-La Mancha

Los números racionales constituyen uno de los contenidos matemáticos en los que el alumnado de primaria encuentra una mayor dificultad, especialmente en lo relativo al uso de la recta numérica y al constructo parte-todo (Rojo et al., 2023). Con el fin de favorecer un aprendizaje adecuado de estos conceptos matemáticos, es fundamental diseñar una pedagogía que implique al estudiante en un trabajo activo y que ofrezca retroalimentación inmediata (Jaar, 2021). Con el auge tecnológico, el aprendizaje puede verse especialmente beneficiado mediante el uso de entornos virtuales, ya que el alumnado muestra interés en utilizarlos, y estos recursos pueden mejorar la comprensión y el rendimiento en matemáticas, ya que fomentan la colaboración en tiempo real y la interacción significativa con los contenidos, el docente y los compañeros (González y Granera, 2021). El presente estudio de corte cuasiexperimental, se desarrolló con alumnado de 5º y 6º de Educación Primaria de dos colegios. El objetivo principal del estudio es evaluar el impacto de dos entornos virtuales (*Moodle y Desmos*) para el aprendizaje de las fracciones y los números decimales a través de secuencias de aprendizaje diseñadas específicamente de acuerdo con las características de cada plataforma. En particular, se pretendía analizar la capacidad de monitorización continua que ofrece *Desmos* y en qué medida esto facilita un rol activo del docente. La duración total de la intervención fue de seis sesiones de 45 minutos, con evaluaciones pretest y postest en la primera y última sesión, y cuatro sesiones intermedias dedicadas a la implementación de las secuencias de actividades. Para el grupo control, Moodle ofrecía una retroalimentación en diferido, mientras que el grupo experimental, usando *Desmos*, recibió retroalimentación a tiempo real. Tras el postest, se llevó a cabo un grupo de discusión con el fin de obtener información cualitativa de parte del alumnado. Los resultados muestran una mejora significativa en ambos grupos en las competencias matemáticas evaluadas, sin diferencias estadísticamente significativas entre los grupos. Sin embargo, los datos cualitativos muestran cómo el alumnado del grupo experimental se encuentra notablemente más satisfecho con la facilidad de uso y el diseño de la plataforma utilizada, además de con el apoyo docente recibido. Por el contrario, el grupo control manifestó sentir falta de un acompañamiento más cercano durante la intervención.

Agradecimientos

Investigación al amparo de la ayuda 2022-GRIN-34039 de la Universidad de Castilla-La Mancha, cofinanciada con fondos FEDER.

Referencias

González, J. I. y Granera, J. (2021). Entornos virtuales de aprendizaje (EVA) para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Revista Científica de FAREM-Estelí*, 49-62. https://doi.org/10.5377/farem.v0i0.11607

Jaar, J. C. (2021). Revisión actualizada: Enseñanza de las matemáticas desde los entornos virtuales de aprendizaje. *Ciencia y Educación, 5*(2), 25-40. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7954710

Rojo, M., King, S., Gersib, J. y Bryant, D. P. (2023). Rational number interventions for students with mathematics difficulties: A meta-analysis. *Remedial and Special Education, 44*(3), 225-238. https://doi.org/10.1177/07419325221105520

Ponce-Serrano, B., Navarro-Clemente, I., González-Calero, J. A. y Del Olmo-Muñoz, J. (2025). El rol del docente en plataformas virtuales: un estudio comparativo con Desmos y Moodle para la enseñanza de racionales. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial). SEIEM.

ACTIVIDADES SOBRE GRÁFICO DE CAJA EN LOS LIBROS DE TEXTO CHILENOS Y ESPAÑOLES

Activities on box plots in Chilean and Spanish textbooks

Rodríguez-Alveal, F.[a], Aguayo-Arriagada, C. G.[b] y Díaz-Levicoy, D.[c]

[a]Universidad del Bío-Bío, [b]Universidad de Almería, [c]Universidad Católica del Maule

La variabilidad es el corazón de la estadística (Watson et al., 2003). Esta puede ser producto de una variación real o natural, la cual es inherente a los datos, por ejemplo, la estatura de las personas, o una variación inducida, que son perturbaciones de las mediciones de los factores y debido a errores de medición (Wild y Pfannkuch, 1999). En este contexto, dentro de las representaciones estadísticas presentes en el currículo escolar asociados a datos cuantitativos se encuentra el gráfico de caja que permite visualizar características de los datos como la forma, asimetría y la variabilidad, así como estimar estadígrafos tendientes a cuantificarla, como el rango y el RIC. Respecto al aprendizaje de estos estadígrafos de variabilidad, Garfield y Ben-Zvi (2008) afirman que los estudiantes presentan dificultades al interpretarlos. Sin embargo, como mencionan Rodríguez-Alveal y Maldonado-Fuentes (2023), más allá de la mención o su utilización, "es de interés atender al fenómeno de variabilidad en sí mismo como un objeto de aprendizaje; puesto que es una cualidad de los datos y está estrechamente ligada con la alfabetización y el pensamiento estadísticos" (p. 4). En coherencia con lo mencionado, el propósito de la presente investigación es analizar las actividades relacionadas con el gráfico de caja presentes en libros de texto chilenos y españoles de Educación Secundaria, y su relación con la alfabetización y pensamiento estadístico. De acuerdo con los resultados obtenidos, las actividades relacionadas con el gráfico de caja propuestas en los libros de texto chilenos y españoles están asociadas, preferentemente, al cálculo de los cuartiles y su construcción. En menor medida, se solicita interpretar la información resumida en el gráfico de caja, habilidad asociada con la alfabetización y el pensamiento estadístico. En relación con las medidas de variabilidad presentes en el gráfico de caja (rango y RIC), en las actividades analizadas en los libros de texto chilenos se solicita, esencialmente, el cálculo de ellas, es decir, se potencia la *aritmetización* de la estadística. En cambio, en los libros de texto españoles no hacen referencia al cálculo de las medidas de variabilidad antes mencionadas, aun cuando son mencionadas al introducir este tema. Al respecto, el abordaje procedimental propuesto para las medidas de variabilidad en los libros de texto analizados podría, eventualmente, generar tensiones en el estudiantado al tomar decisiones acerca de qué estadígrafo es más pertinente en presencia de distribuciones asimétricas, habilidades asociadas a la percepción de la variabilidad y el razonamiento con modelos, las que guardan relación con el pensamiento estadístico.

Referencias

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning:Connecting research and teaching practice*. Springer.

Rodríguez-Alveal, F. y Maldonado-Fuentes. A. (2023). Tipología de las preguntas sobre variabilidad en los textos escolares y su relación con la alfabetización y pensamiento estadístico. *Uniciencia*, *37*(1), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.4

Watson, J., Kelly, B., Callingham, R. y Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students´ understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(1), 1-29.

Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Rodríguez-Alveal, F., Aguayo-Arriagada, C. G. y Díaz-Levicoy, D. (2025). Actividades sobre gráfico de caja en los libros de texto chilenos y españoles. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ESTUDIO DEL TRATAMIENTO DESENCHUFADO DEL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Study of the unplugged treatment of computational thinking in the elementary school classroom

Rodríguez-Muelas, D. y Rodríguez-Sánchez, M. M.

Universidad de Salamanca

El pensamiento computacional está experimentando una creciente importancia en el ámbito académico, habiéndose incorporado al plan de estudios de la Educación Primaria. Diversos autores, como Ros-Esteve et al. (2019), examinan el desarrollo de habilidades propias de este tipo de pensamiento en los niños mediante la introducción de ciertos elementos constitutivos del Pensamiento Computacional mediante metodologías "desenchufadas".

El propósito del presente estudio es determinar la viabilidad de mejorar las aptitudes vinculadas al pensamiento computacional en estudiantes de Educación Primaria, mediante la implementación de actividades desconectadas que aborden la visión espacial, específicamente a través de la orientación topológica en el plano, y la secuenciación de elementos constitutivos de diversos procesos.

El estudio se ha realizado en distintos centros de Educación Primaria, con alumnos de edades comprendidas entre los 7 y 9 años (2º y 3º de Educación Primaria) y siguiendo la metodología utilizada por Zapata-Cáceres y Fanchamps (2021), donde se expone el cuestionario validado BCTt como herramienta para evaluar el Pensamiento Computacional. Se comienza utilizando este cuestionario como pretest para determinar las habilidades iniciales relacionadas con este ámbito. A continuación, se llevan a cabo una serie de actividades, elegidas por el equipo de investigación de entre los libros de texto de algunas editoriales ampliamente utilizadas en España, donde se trabajan habilidades tanto en el desarrollo topológico como en la capacidad de secuenciación, sin necesidad de dispositivos electrónicos. Para concluir, se administra nuevamente el cuestionario citado con el fin de evaluar la eficacia de la instrucción "desenchufada" para el desarrollo dichas habilidades.

Los resultados obtenidos, reflejan cómo los alumnos mejoran considerablemente en los aspectos anteriormente señalados.

Esta investigación, por tanto, trata de evidenciar la posibilidad del tratamiento desenchufado del pensamiento computacional, y los resultados pueden servir para establecer una metodología eficaz para trabajarlo, en las aulas de Educación Primaria, facilitando así tanto el diseño como la planificación de actividades sin necesidad de dispositivos tecnológicos.

Referencias

Zapata-Cáceres, M. y Fanchamps, N. (2021). Using the beginners computational thinking test to measure development on computational concepts among preschoolers. *5th APSCE International Computational Thinking and STEM in Education.*

Ros-Esteve, M., López-Iñesta, E. y Diago, P. D. (2019). *Introducción del pensamiento computacional mediante actividades desenchufadas en la resolución de problemas de matemáticas. En J. M. Marbán, M Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds), Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 650). SEIEM.

Rodríguez-Muelas, D. y Rodríguez-Sánchez, M. M. (2025). Estudio del tratamiento desenchufado del pensamiento computacional en el aula de Educación Primaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

¿CÓMO PERCIBE EL PROFESORADO DE SECUNDARIA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD?

How do secondary school teachers perceive the teaching of probability?

Ruiz, F.[a], Pallauta, J.[a], Concha, R.[a] y Elgueda-Ibarra, M.[b]

[a]Universidad de Los Lagos, [b]Universidad de Granada

La probabilidad tiene un importante papel en la sociedad actual, debido a su aplicabilidad en diversas áreas y en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (Batanero y Borovcnick, 2016). Su estudio se incluye en las directrices curriculares de diferentes países, con el propósito de promover la capacidad de interpretar, valorar críticamente la información, y desarrollar la alfabetización probabilística (Gal, 2005). Sin embargo, su enseñanza no es sencilla para el profesorado (Vázquez y Alsina, 2015), dado que cuentan con una escasa formación, y además los materiales curriculares, en ocasiones, presentan una visión sesgada o incompleta sobre este tema.

En este contexto, el objetivo es analizar la percepción del profesorado de secundaria sobre la probabilidad y su enseñanza. La percepción del profesorado hacia la probabilidad y su enseñanza dependerá, por ejemplo; de su formación académica o de la preferencia hacia ciertas áreas de la matemática. Se diseña una entrevista semiestructurada basada en la Escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (Estrada y Batanero, 2015), y se aplica a 8 profesores chilenos de secundaria. El análisis de las entrevistas, realizado por medio de un estudio de casos (Stake, 2007), indica un consenso entre los profesores sobre la relevancia de la probabilidad en el currículo por su aporte al desarrollo del pensamiento crítico. Sin embargo, difieren en cómo enseñarla: unos destacan su aplicabilidad y potencial para contextualizar problemas, mientras que otros la consideran muy compleja fuera del enfoque clásico.

Se concluye que los profesores discrepan en la idea que se tiene sobre el concepto de probabilidad, y de sus aplicaciones. Por esta razón, es necesario que el profesorado tenga conciencia del rol que cumple la probabilidad en diversos contextos de la vida cotidiana y profesional. Esto implica contar con el conocimiento didáctico y disciplinar necesario para abordar su enseñanza, evitando sesgos e ideas erróneas sobre su naturaleza y aplicaciones (Vera et al., 2025).

Referencias

Batanero, C. y Borovcnick, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.

Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-248). SEIEM.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Stake, R. (2007). *Investigación con estudios de caso* (4° Edición). Morata.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104

Vera, O., Batanero, C., Pallauta, J. D. y Valenzuela-Ruiz, S. (2025). Conocimiento didáctico matemático de profesores de educación primaria en formación para enseñar probabilidad. *Revista Portuguesa de Educação, 38*(1), e25013. http://doi.org/10.21814/rpe.39849

Ruiz, F., Pallauta, J. D., Concha, R. y Elgueda-Ibarra, M. (2025). ¿Cómo percibe el profesorado de secundaria la enseñanza de la probabilidad? En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS CON ALUMNOS DEL PROGRAMA DE DIVERSIDAD CURRICULAR

Analysis of interaction in the solving of realistic problems with students from the curricular diversity program

Sánchez-Barbero, B.[a], Cáceres, M. J.[a], Ramos, M.[a] y Antequera-Barroso, J. A.[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universidad de Extremadura

Las oportunidades de aprendizaje de los alumnos dependen de las tareas que se resuelven en las aulas y de la interacción que se genera en su resolución. Este trabajo se centra en los Problemas Verbales Realistas (PVR) que reproducen situaciones reales cuya resolución exige una comprensión matemática y una situacional. Existen distintos razonamientos para la resolución de PVR (R1, R2, R3, R4 y R5; más detalle en Verschaffel et al., 1994). Investigaciones previas muestran que si las tareas son problemas rutinarios existe escaso razonamiento, y aumenta cuando se trata de problemas no rutinarios o realistas (Sánchez-Barbero et al., 2020), pero se tiene poco conocimiento de lo que ocurre en aulas del Programa de Diversidad Curricular (PDC; Sánchez-Barbero et al., 2023).

Se analiza la interacción en la resolución conjunta de PVR según el razonamiento que exigen con alumnos PCD de ESO. Para ello, se seleccionaron dos grupos de matemáticas (uno ordinario, Ord, y otro PCD) de 3º ESO con un mismo profesor, que aceptó ser grabado en audio mientras resolvían 10 PVR (Verschaffel et al., 1994), clasificados según los cinco tipos de razonamientos. Transcritas las interacciones, se organizaron en ciclos y se categorizaron atendiendo a los *Procesos Cognitivos* (*Selección e Integración*) promovidos en la interacción (más detalle en Sánchez-Barbero et al., 2020).

Los resultados mostraron que ambos grupos promovieron en mayor medida procesos de *Integración* (PCD: 75.72%; Ord: 84.30%). Según el tipo de razonamiento que exige cada PVR, los alumnos Ord promueven mayor *Integración* en R1, R2 y R4 (86.54%; 87.30%; 100.00%, respectivamente), y los alumnos PCD promueven mayor *Integración* en R3, R4 y R5 (100.00%; 87.50%; 81.82%, respectivamente). Comparando ambos grupos, PCD tiene mayor porcentaje de *Integración* en R3 (PCD: 100.00%; Ord: 66.67%) y R5 (PCD: 81.82%; Ord: 73.53%), mientras que en R4 el nivel fue similar. Estos resultados parecen indicar que trabajar este tipo de razonamiento en las aulas de PCD con este tipo de problemas podría reducir la diferencia con los alumnos Ord. Esto anima a que se profundice en el nivel de participación que tienen los alumnos en esa promoción de razonamiento.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto PIC2-2023-12 financiado por la Universidad de Salamanca y respaldado por el GIRME (Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa).

Referencias

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2023). Análisis de la interacción en la resolución de problemas realistas con alumnos del Programa de Diversidad Curricular. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXVI (p. 597). SEIEM.

Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J. M., Vicente, S. y Rosales, J. (2020). Analysis of teacher-student interaction in the joint solving of non-routine problems in Primary Education Classrooms. *Sustainability, 12*(24), 10428.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school word problems. *Learning and instruction, 4*(4), 273-294.

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J., Ramos, M. y Antequera-Barroso, J. A. (2025). Análisis de la interacción en la resolución de problemas realistas con alumnos del programa de diversidad curricular. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

MOVILIZANDO CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS MAESTROS SOBRE PROPORCIONALIDAD

Mobilizing pre-service teachers' specialized knowledge of proportionality

Santos-Pérez, A., Martín-Díaz, J. P., García-Viso, P. y Climent, N.

Universidad de Huelva

El estudio se enmarca en el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), que permite caracterizar el conocimiento específico de los profesores que imparten matemáticas (Carrillo et al., 2018). Diversos estudios señalan que el razonamiento proporcional es difícil para los docentes, que a menudo usan la regla de tres sin comprender su naturaleza multiplicativa, limitando el desarrollo de un conocimiento adecuado para la enseñanza (Lamon, 2007; Weiland et al., 2021).

El objetivo principal es analizar el conocimiento especializado que movilizan los estudiantes para maestros (en adelante, EPMs) al resolver una tarea cuyo contenido principal es la proporcionalidad. La tarea fue diseñada como parte de un proyecto con la intención de mejorar la práctica docente, en base a una situación real de un aula de 5º de educación primaria. En ella los estudiantes tenían que comparar la longitud de una lengua de arena paralela a la costa con la ayuda de tres imágenes aéreas de diferentes años. Con esto, los objetivos de la tarea formativa son: identificar contenidos trabajables sobre razonamiento proporcional a partir de esas tres imágenes; discutir estrategias propias de los EPMs y de los estudiantes de primaria para calcular la diferencia en la longitud; y, reflexionar sobre la ilusión de crecimiento lineal. Dada la naturaleza cualitativa de la investigación, se lleva a cabo un estudio de caso con la participación de 22 EPMs del grado de Educación Primaria. La información se obtiene de las producciones escritas de los estudiantes a las cuestiones de la tarea.

Los resultados muestran movilización de distintos subdominios de conocimiento. Por un lado, hablamos de conocimiento del contenido, especialmente cuando se acercan al estudio fenomenológico al identificar una situación en la que se relaciona la leyenda que aparece en las imágenes con el concepto de escala. Asimismo, se evidencia conocimiento sobre procedimientos al realizar conversiones entre la escala del plano y su correspondencia en la realidad. Por otro lado, se evidencia conocimiento didáctico del contenido sobre las características de aprendizaje de las matemáticas, así como conocimiento sobre distintas formas de interacción con el contenido matemático que pudieron tener los estudiantes de 5º de primaria en el proceso de medición. Como transferencia, los resultados de este estudio se incorporarán a procesos de reflexión formativa en el seno del grupo de investigadores que diseñaron la tarea para mejorar la preparación de los futuros docentes en contenidos clave del currículo escolar como la proporcionalidad.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*, 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. *Mathematics Teaching Research Journal*, *1*(1), 629-667.

Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E. y Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 179-202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

Santos-Pérez, A., Martín-Díaz, J. P., García-Viso, P. y Climent, N. (2025). Movilizando conocimiento especializado de futuros maestros sobre proporcionalidad. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

REALIDAD VIRTUAL INMERSIVA PARA EL DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE SOBRE POLIEDROS

Virtual reality for designing a geometry lesson on polyhedra

Sorroche, P.[a], Guirado, C.[a], Romero, I. M.[b] y García, M. M.[b]

[a]IES Río Aguas (Almería), [b]Universidad de Almería

La enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial plantea importantes retos sobre la visualización y el razonamiento geométrico (Gutiérrez y Jaime, 2015). La realidad virtual inmersiva (RVI) surge como recurso que mejora la visualización, permitiendo manipulaciones imposibles en entornos tradicionales (Radianti et al., 2020). El objetivo del estudio fue diseñar, implementar y validar una situación de aprendizaje con el software de RVI Neotrie VR (Rodríguez et al., 2021) para el estudio de poliedros en 4º ESO, analizando aspectos cognitivos (estrategias de visualización y razonamiento) y socioafectivos (actitudes hacia la geometría y el trabajo cooperativo). Dentro del paradigma de la investigación de diseño (Molina, 2021), se llevó a cabo un experimento de enseñanza en una clase de diez estudiantes divididos en tres grupos según su desempeño académico: dos grupos de desempeño medio y uno bajo. Se recopilaron datos mediante observaciones directas, grabaciones de vídeo y rúbricas, pretest y postest sobre actitudes, y percepción del alumnado hacia la matemática y la RVI.

Entre los resultados preliminares, destacan una notable mejora actitudinal hacia la asignatura, con un incremento en la motivación de todo el alumnado y una clara preferencia de este por trabajar cooperativamente mediante RVI frente a métodos tradicionales. En el plano cognitivo, todos los grupos emplearon estrategias visuales, instrumentales y discursivas eficaces para: inducir la caracterización de los poliedros regulares, construirlos y descubrir propiedades como la fórmula de Euler. En las simetrías de los polígonos, dos de los grupos consiguieron realizar los planos de simetría del tetraedro, cubo, octaedro y dodecaedro. Además, los grupos avanzaron en mayor o menor medida en razonar la existencia limitada de sólidos platónicos. Las principales dificultades se vinculan a la curva inicial de aprendizaje tecnológico y a los problemas técnicos (sincronización de equipos, inestabilidad de la conectividad y bugs del software); así como a lagunas en los conocimientos previos del alumnado, especialmente en geometría tridimensional. No obstante, la RVI mostró gran potencial para mejorar la visualización espacial y el pensamiento geométrico, permitiendo superar limitaciones asociadas a la representación bidimensional de figuras tridimensionales y a la falta de manipulación en 3D. Finalmente, se contempla la transferencia mediante la validación definitiva y difusión de la situación de aprendizaje, que permita al profesorado adaptar la propuesta a otros contextos escolares.

Referencias

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53-83. https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa. En A. Maz y J. M. Muñoz-Catalán (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática desde el sur* (pp. 173-188). SEIEM.

Radianti, J., Majchrzak, T.A., Fromm, J. y Wohlgenannt, I. (2020). A systematic review of immersive virtual reality applications for higher education: Design elements, lessons learned and research agenda. *Computers & Education*, *147*, 103778. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103778

Rodríguez, J. L., Romero, I. M., y Codina, A. (2021). Teaching spatial geometry through immersive virtual reality. *Mathematics*, 9(12), 1444. https://doi.org/10.3390/math9121444

Sorroche, P., Guirado, C., Romero, I. M. y García, M. M. (2025). Realidad virtual inmersiva para el diseño de una situación de aprendizaje sobre poliedros. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

INSTRUMENTOS PARA LA EVALUACIÓN DE LA AUTOEFICACIA MATEMÁTICA DEL ALUMNADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LA LITERATURA

Tools for the evaluation of mathematical self-efficacy of primary school students: A systematic literature review

Sukunza-Pagola, M.[a], Berciano, A.[a] y Marbán, J. M.[b]

[a]Universidad del País Vasco, [b]Universidad de Valladolid

La autoeficacia es un constructo complejo que ha sido ampliamente estudiado en diferentes contextos y disciplinas, con especial atención a sus relaciones con el rendimiento académico y con otros constructos enmarcados en el dominio afectivo (Street et al., 2024). Este hecho ha conllevado consigo el diseño y validación de numerosas herramientas para medir y evaluar la autoeficacia matemática. Una buena comprensión de los fundamentos de estas, de sus marcos teóricos subyacentes y de su finalidad es fundamental (Bandura, 2006) para una correcta selección y aplicabilidad en determinados entornos educativos. Con este objetivo en mente, en este trabajo se presenta una revisión sistemática de la literatura científica sobre la evaluación de la autoeficacia matemática en Educación Primaria, con especial atención a las herramientas generadas para tal fin.

Tras ejecutar una búsqueda inicial en las bases de datos Eric, Web of Science y Scopus de todos aquellos artículos científicos de potencial interés, se aplicó el protocolo PRISMA 2020 y se obtuvieron un total de 1342 registros. Tras eliminar duplicados (330) y aplicar criterios de exclusión (atención no centrada en las matemáticas; población objeto de estudio no correspondiente a Educación Primaria; estudio no focalizado realmente en autoeficacia, ni general ni matemática; idioma diferente del español o del inglés; metaanálisis y revisiones de la literatura), se seleccionan 124 trabajos sobre los cuales llevar a cabo la revisión sistemática orientada por el objetivo de investigación descrito previamente.

Entre los principales hallazgos destaca la identificación de 43 herramientas distintas para evaluar la autoeficacia, la mayoría de ellas en un formato propio de escala. El análisis de los textos en los que se describe su diseño y, en su caso, también su validación, permite observar que solo 9 de ellas fueron elaboradas -y no solo aplicadas- específicamente para el área de matemáticas y que únicamente 3 de estas fueron diseñadas en el contexto escolar propio de la Educación Primaria. A su vez, si bien estas últimas exhiben buenas propiedades psicométricas y pueden considerarse de utilidad desde el punto de vista de la investigación, no se acompañan de aportaciones y reflexiones dirigidas a profundizar en la complejidad propia del constructo en contextos matemáticos propios de la Educación Primaria, siendo necesario continuar en la búsqueda y desarrollo de herramientas más específicas que, además de contribuir al avance científico, puedan ser de utilidad para el profesorado, en el sentido de ayudarlo a orientar acciones para mejorar sus prácticas profesionales en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a partir de la información proporcionada por la herramienta.

Referencias

Bandura, A. (2006). Guide for constructing self-efficacy scales. En F. Pajares y T. Urdan (Eds.), *Self-efficacy beliefs of adolescents* (307-337). Information Age Publishing.

Street, K. E. S., Malmberg, L. E. y Schukajlow, S. (2024). Students' mathematics self-efficacy: A scoping review. *ZDM–Mathematics Education*, *56*(2), 265-280.

Sukunza-Pagola, M., Berciano, A. y Marbán, J. M. (2025). Instrumentos para la evaluación de la autoeficacia matemática del alumnado de educación primaria: una revisión sistemática de la literatura. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

TERTULIAS MATEMÁTICAS DIALÓGICAS: ALCANCES Y DESAFÍOS

Dialogic mathematics gatherings: Scope and challenges

Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J.

Universidad de Barcelona

Investigaciones previas han evidenciado la importancia y el rol de la literatura en el aprendizaje de las matemáticas (e.g., Antequera-Barroso, 2022; Macho, 2017), pero ¿cuál es la ventaja de utilizar libros trascendentales en matemáticas y los resultados que se han obtenido de llevar a cabo estas prácticas? En esta revisión de literatura, presentamos las Tertulias Matemáticas Dialógicas (TMaD) como una actuación educativa que contempla el aprendizaje matemático a través de la lectura de obras *clásicas* de matemáticas, la cual se sustenta en los siete principios del aprendizaje dialógico formulados por Flecha (1997): diálogo igualitario, inteligencia cultural, aprendizaje instrumental, solidaridad, creación de sentido, transformación social e igualdad de diferencias (Aubert et al., 2009). Son pocas las TMaD que han sido documentadas. En este trabajo se tomaron en cuenta 17 documentos en total, que versaban sobre las TD y sobre las TMaD que implicaban mejoras en el desarrollo de competencias o habilidades matemáticas, y fueron obtenidos de revistas indexadas (WoS, Scopus, Scielo), libros y capítulos de libros académicos (SPI), y tesis doctorales. Los resultados se agrupan con base en tres criterios: cognitivo, emocional y social. Se observa que las TMaD se han llevado a cabo principalmente con adultos, algunos con mujeres adultas con estudios básicos. Entre los resultados de aspecto cognitivo, se evidencian mejoras en la comprensión de conceptos matemáticos, convirtiéndose en lectores críticos/as y haciendo un uso más consciente de las matemáticas en la vida cotidiana; también permite la construcción en conjunto de significados, los cuales surgen al compartir ideas, creencias o dudas sobre lo que se ha leído. En el ámbito emocional, la evidencia respalda que la implementación de las TMaD genera una mayor motivación y mejor actitud hacia las matemáticas entre las personas participantes y un incremento en la confianza de los participantes al enfrentarse a temas de esta índole, en el sentido de llegar a tener un mayor empoderamiento en el aprendizaje de conceptos matemáticos especializados. Con respecto al eje social, en los estudios consultados se reportan testimonios de personas que afirman el gusto por asistir y aprender de los/as demás, llegando incluso a forjar amistades y reconociendo que adquieren una mejor comprensión de los temas de matemáticas leídos y compartidos; además, constituyen una herramienta para la superación de desigualdades de diversa índole, incluidas aquellas de carácter social, cultural, de género o racial.

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 (MICINN, FEDER, UE).

Referencias

Antequera-Barroso, J. A. (2022). Érase una vez un cuento… una manera diferente de construir el conocimiento lógico-matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 592). SEIEM.

Aubert, A., García, C., y Racionero, S. (2009). El aprendizaje dialógico. *Cultura y Educación, 21*(2), 129-139. https://doi.org/10.1174/113564009788345826

Flecha, R. (1997*). Compartiendo palabras: el aprendizaje de las personas adultas a través del diálogo*. Paidós.

Macho, M. (2017). Aprendizaje de las matemáticas desde la literatura. *Voces de la Educación, 2*(2), pp. 83-93.

Ocampo, M. (2020). *Tertulias matemáticas dialógicas para el aprendizaje de las matemáticas en mujeres adultas no escolarizadas y sin titulación académica*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

Uicab-Campos, Y. y Díez-Palomar, J. (2025). Tertulias matemáticas dialógicas: Alcances y desafíos. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. X). SEIEM.

TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO E INCERTIDUMBRE EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Decision making under risk and uncertainty in Secondary school students

Vergara-Gómez, A. y Henríquez-Rivas, C.

Universidad Católica del Maule

La enseñanza de la probabilidad y de la estadística ha ido ganando relevancia por la necesidad de formar ciudadanos capaces de tomar decisiones con base en datos (Batanero, 2020). La investigación sobre el desarrollo del pensamiento probabilístico ante situaciones de incertidumbre o riesgo (e.g., Borovcnik, 2020; Vergara-Gómez, 2024) y los estudios sobre el rol de los contextos realistas en la resolución de tareas matemáticas (Cáceres-García et al., 2022), evidencian la necesidad de comprender mejor cómo los estudiantes usan heurísticas y pensamiento probabilístico ante problemas en contextos de la vida real. Estos contextos abarcan desde juegos de azar hasta problemáticas actuales. Sin embargo, en el ámbito educativo, la investigación sobre cómo influyen estos contextos en la toma de decisiones es limitada. En este trabajo se presenta el diseño y validación de contenido por jueces expertos (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008) de un cuestionario orientado a explorar cómo los estudiantes de secundaria toman decisiones bajo riesgo o incertidumbre. La construcción del cuestionario se basa en un estudio previo, cuyo propósito fue dar sustento epistemológico al estudio de procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre. Como marco teórico se utiliza la distinción entre riesgo e incertidumbre, con base en la caracterización de pensamiento probabilístico de Borovcnik (2020), y la propuesta de razonamiento heurístico de Mousavi y Gigerenzer (2014). La metodología, de carácter exploratoria, consideró 6 etapas que permitieron identificar los 6 contextos de referencia para construir los ítems. El cuestionario indaga específicamente sobre la opinión o preferencia de los estudiantes frente a situaciones contextualizadas que involucran tomar una decisión. Para sustentar el diseño del instrumento se utilizó análisis temático y revisión de literatura y, para el proceso de validación, el análisis descriptivo de datos. Los resultados muestran una alta concordancia para el 80% de los ítems. Esto lo constituye un instrumento validado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por ANID, Proyecto FONDECYT N°11240150.

Referencias

Batanero C. (2020) Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 682-686). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_12

Borovcnik, M. (2020). Risk and decision making: Fundamental aspects. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 728-740). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100006

Cáceres-García, M. J., Sánchez-Barbero, B. y Antequera-Barroso, J. A. (2024). Utilización de la información situacional en la resolución de un problema matemático realista. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (p. 567). SEIEM.

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: Una aproximación a su utilización. *Avances en Medición, 6*(1), 27-36.

Mousavi, S. y Gigerenzer, G. (2014). Risk, uncertainty, and heuristics. Journal of Business Research, 67(8), 1671-1678. https://doi.org/10.1016/j.jbusres.2014.02.013

Vergara-Gómez, A. (2024). Decision-making in situations of uncertainty as school mathematical knowledge. *Acta Scientiae, 26*(1), 125-156. http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7705

Vergara-Gómez, A. y Henríquez-Rivas, C. (2025). Toma de decisiones bajo riesgo e incertidumbre en estudiantes de secundaria. En M. Burgos, M. C. Cañadas, J. M. Marbán e I. Polo-Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVIII* (pp. inicial). SEIEM.

REPRESENTACIONES ESTADÍSTICAS EN EL CONTETO DE LA EDUCACIÓN PARA ADULTOS

Statistical representacions in adult education context

Zúñiga, A.[a], Pallauta, J.[a], Concha, R.[a] y Elgueda, M.[b]

[a]Universidad de los Lagos, [b]Universidad de Almería

La capacidad de interpretar tablas y gráficos estadísticos cobra especial relevancia en la sociedad actual en la que abundan los datos, por lo que un ciudadano informado debe ser capaz de interpretar los datos de manera crítica (OECD, 2021), y a partir de esta, comunicar ideas y tomar decisiones fundamentadas (Gal, 2007).

Las directrices curriculares incluyen representaciones, como tablas y gráficos, en los diferentes niveles educativos de la enseñanza tradicional (Pallauta et al., 2021). Sin embargo, existe escasa información sobre el tratamiento de estos temas en educación para personas jóvenes y adultas (EPJA), dado que se requiere un enfoque andragógico distinto (Knowles, 2006). Adicionalmente, en el último tiempo, en el contexto chileno se ha registrado un aumento de estudiantes adolescentes, junto con la gran heterogeneidad del aula.

El objetivo de este trabajo es analizar los recientes materiales curriculares chilenos de EPJA (bases curriculares y libros de texto), centrándose en las tablas y gráficos estadísticos en libros de secundaria. Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2013) con un enfoque cualitativo (Cohen et al., 2013) de las tareas sobre gráficos y tablas estadísticas planteadas en los dos libros de texto de secundaria en la EPJA, proporcionados por el Ministerio de Educación de Chile. Considerando el tipo de representación estadística y el nivel de lectura que promueven (Friel et al., 2001).

El análisis revela que el nivel de lectura más frecuente es leer dentro de los datos (comparaciones y cálculos simples), mientras que la representación más frecuente es el gráfico de barras. Por otro lado, se evidencia que los textos priorizan información relevante para los jóvenes, como la relacionada con internet y tecnología. Adicionalmente, la propuesta de evaluación es tradicional y sería importante incorporar la autoevaluación y la reflexión en el proceso de aprendizaje. Se sugieren también actividades que permitan a los estudiantes realizar encuestas de interés, conectar con experiencias previas y utilizar datos significativos. Todo lo anterior resulta fundamental desde un enfoque andragógico, en que los estudiantes deben comprender la razón y las ventajas de adquirir un conocimiento.

Referencias

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, L. (2013). *Research methods in education*. Routledge.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International statistical review, 70*(1), 1-25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Knowles, M. (2006). *Andragogía*. Oxford.

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Paidos.

OECD. (2021). *21st-Century Readers: Developing literacy skills in a digital world.* OECD. https://doi.org/10.1787/a83d84cb-en

Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2021). Complejidad semiótica de tablas estadísticas y su distribución en textos chilenos de educación básica. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 481 – 488). SEIEM.