INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI

Investigación en Educación Matemática XI

Edita:
© CajaCanarias

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

© Matías Camacho Machín
© Pablo Flores Martínez
© Pilar Bolea Catalán

Comité Científico:
Pablo Flores Martínez (Coordinador)
Pilar Bolea Catalán (Coordinadora)
Bernardo Gómez Alfonso
Jesús Murillo Ramón
María Teresa González Astudillo
Matías Camacho Machín

Diseño de la portada:
Víctor José Socas Guerra

Diseño e impresión:
Edición KA

Depósito Legal: TF-1563/2007
ISBN: 84-7985-261-5
ISSN: 1888-0762
Impreso en San Cristóbal de La Laguna, Tenerife. España.

ÍNDICE

Presentación..... 11

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I
CONTRASTANDO ENFOQUES DE INVESTIGACIÓN EN ÁLGEBRA

Contrastando enfoques de investigación en álgebra. *Alicia Bruno Castañeda*..... 15

Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Martín M. Socas*..... 19

La integración de pensamiento algebraico en Educación Primaria. *Marta Molina*..... 53

El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria. *Francisco Javier García*..... 71

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II
ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN LOS NIVELES NO UNIVERSITARIOS

Enseñanza de la estadística en los niveles no universitarios: algunos retos para la investigación. *Carmen Batanero*..... 93

Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la Formación de Profesores. María *Candelaria Espinel Febles*..... 99

Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de Educación Primaria en formación y en ejercicio. *Assumpta Estrada*..... 121

Desafios para o trabalho colaborativo nas aulas de estatística. *Carolina Carvalho*..... 141

COMUNICACIONES

Una metodología para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas. *Jesús Murillo* y *Guillermina Marcos*..... 157

Ansiedad matemática de los alumnos que ingresan en la Universidad de Granada. *Patricia Pérez-Tyteca, Enrique Castro, Isidoro Segovia, Encarnación Castro, Francisco Fernández y Francisco Cano*..... 171

La numerología y el álgebra chinas en la enseñanza actual de las ecuaciones lineales. *Abraham Hernández y Aurora Gallardo*..... 181

Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial. *Teresa Fernández, José A. Cajaraville y Juan D. Godino*..... 189

Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del Teorema de Bayes. *Carmen Díaz, Juan J. Ortiz y Luis Serrano*..... 199

Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Paula B. Perera Dzul, Marta E. Valdemoros Álvarez*..... 209

Inferencia estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. *Israel García Alonso y Juan Antonio García Cruz*..... 219

Un indicador de la comprensión del esquema derivada: el uso de las relaciones lógicas. *Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares*..... 229

Producción de Sentidos para los objetos algebraicos de número, variable y función al resolver problemas de variación continua. Evidencias empíricas sobre nuevos sentidos de uso del número negativo. *Guillermo Rubio, Rafael del Valle, Alonso del Castillo y Aurora Gallardo*..... 239

El mundo de los problemas de probabilidad condicional en el contexto del test de diagnóstico. *M. Pedro Huerta y Marta Carles*..... 249

Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. *Myriam Codes Valcarce, Modesto Sierra Vázquez y Mariano Raboso Mateos*..... 261

Análisis del comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas *isomorfos* de probabilidad condicional. *María Ángeles Lonjedo y M. Pedro Huerta*..... 273

Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. *María C. Cañadas, Encarnación Castro y Enrique Castro*..... 283

Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. *Sergio Pérez y Gregoria Guillén*..... 295

El análisis de clases de matemáticas en la formación inicial del maestro. Un estudio exploratorio. *Nuria Climent y José Carrillo*..... 307

Un modelo docente para la formación en geometría de maestros en Educación Infantil. *Miguel R. Wilhelmi y Eduardo Lacasta*..... 315

Mejora y evaluación de un cuestionario de creencias de matemáticas en función de nacionalidad, edad y sexo. *J. Diego-Mantecón, P. Andrews y P. Op't Eynde*..... 325

Los docentes, sentidos construidos en la escuela sobre las matemáticas. Un estudio en la Ciudad de México. *Patricia Flores, Olimpia Figueras y François Pluvinage*..... 335

Identificación de propiedades y relaciones en un ambiente de Geometría Dinámica. *Ernesto A. Sánchez Sánchez y Jesús Salinas Herrera*..... 343

Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander (Colombia). *Jorge Enrique Fiallo Leal y Ángel Gutiérrez* Rodríguez..... 355

Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. *Élgar Gualdrón Pinto y Ángel Gutiérrez Rodríguez*..... 369

Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. *Mª Jesús Salinas Portugal*..... 381

ANEXO

RÉPLICAS AL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II
DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS IX SIMPOSIO DE LA SEIEM. CÓRDOBA 2005

Los sistemas de representación y el uso de C.A.S. en el Análisis Matemático. Réplica a la ponencia "La enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático haciendo uso de C.A.S. (*Computer Algebra System*)" del Profesor Matías Camacho. *Jordi Deulofeu*..... 393

Réplica a la ponencia "Uma aproximação ontosemiótica da didáctica da derivada" do professor Vicenç Font. *António Domingos*..... 399

Réplica a la ponencia "El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros" de la Profesora Mar Moreno. *Mª Teresa González Astudillo*..... 405

PRESENTACIÓN

La consolidación del área de Didáctica de la Matemática en el ámbito universitario español, se ve enriquecida desde 1996, con la fundación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En ella se pretende dar fundamentación a una práctica investigadora que se viene desarrollando desde grupos pertenecientes a distintas universidades españolas. Se consigue así compartir los proyectos de investigación que se están llevando a cabo y unificar los criterios de calidad de las investigaciones. Su evolución se ve potenciada con la celebración de simposios anuales de manera ininterrumpida (en esta ocasión llega a su edición décimo primera) desde el celebrado en Zamora en julio de 1997. En la actualidad nos encontramos en un momento importante, en el que se reconoce ampliamente nuestra presencia investigadora en España en otros ámbitos, especialmente entre las sociedades de matemáticas. La participación de la SEIEM en el Comité Español de Matemáticas (CEMAT) se ha formalizado, al tener representantes en todas sus comisiones. Igualmente, miembros destacados de la SEIEM participan como investigadores principales en el proyecto "i-math ingenio Matemática", así como en organismos internacionales relacionados con la Educación Matemática en el mundo.

Así mismo, la periodicidad anual de celebración del Simposio y el número de trabajos que se presentan, ha permitido que en la última Asamblea de la Sociedad se haya acordado dar un primer paso hacia la creación de una revista con periodicidad anual que contenga como una parte importante la formada por los artículos arbitrados y los seminarios de investigación de los Simposios, y que pueda incluir también otros artículos de investigación arbitrados. Es por ello, que en esta publicación se cuenta tanto con ISBN como con ISSN, al objeto de que en un futuro inmediato podamos crear la revista demandada por los socios de la SEIEM.

A lo largo de estos simposios se han planteado seminarios dirigidos a cubrir las distintas sub-áreas que componen la Educación Matemática en España, así como a debatir sobre temas que nos afectan a todos los que participamos de la preocupación investigadora, tales como las metodologías de investigación, o temas esenciales actualmente, como las competencias o la incorporación del área a la nueva universidad europea. Los temas que articulan la SEIEM en grupos de investigación, nos lleva, en esta ocasión, a proponer dos seminarios que ayudan a actualizar la investigación en dos de los campos: enseñanza y aprendizaje de la estadística, y enseñanza y aprendizaje del álgebra.

La Dra. Alicia Bruno, coordina el seminario “Contrastando enfoques de investigación en álgebra” en el que se recogen aportaciones recientes sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Se presentan dos Tesis Doctorales recientemente defendidas, lo que muestra que los Simposios de la SEIEM dan ocasión a los nuevos doctores a presentar sus trabajos en amplios foros, aunque también se incluyen trabajos reconocidos, que permiten mostrar la situación actual de la investigación dentro del ámbito del Pensamiento Numérico y Algebraico.

La Dra. Carmen Batanero coordina el seminario de investigación titulado “Enseñanza de la estadística en los niveles no universitarios” que presenta el estado de la cuestión de algunos temas de investigación recientes emprendidos por miembros de la SEIEM, referidos a la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Tal como se han articulado las ponencias, se observa en todas ellas un interés creciente por el papel del profesor en la educación estadística y, por tanto, la importancia de atender a la formación adecuada de profesores para esta tarea.

En la estructura de los simposios de la SEIEM se realizan tres tipos de actividades:

- Los Seminarios de Investigación, a los que ya nos hemos referido, en los que se plantean temas genéricos coordinados por un miembro de la SEIEM, quien contacta con los especialistas invitados y facilita la coherencia, su carácter científico, interés y profundidad de la presentación y el debate.
- Las Comunicaciones, presentadas libremente por los autores, exponen trabajos de investigación en estado avanzado de desarrollo. En esta ocasión se han presentado veintinueve propuestas de comunicaciones, que han sido evaluadas por al menos dos doctores miembros de la SEIEM (arbitraje ciego). Se han aceptado ventidós, de las cuales once tienen como autores profesores latinoamericanos.
- Los Grupos de Investigación, en los que se presentan trabajos en estado menos elaborado (DEA en curso, por ejemplo) buscando las aportaciones de los asistentes, o bien se debaten temas de interés para sus miembros. Estas investigaciones tienen que ser avaladas por los directores del trabajo, y tendrán criterios de valoración uniformes, que den el rigor necesario a los presentados en cada apartado. Aparecerán publicados en formato CD y serán distribuidos en el próximo Simposio, lo que permitirá la incorporación de las sugerencias de los participantes en la reunión del Grupo de Investigación.

En esta publicación “Investigación en Educación Matemática XI” se incluyen los textos de los dos Seminarios de Investigación así como las comunicaciones aceptadas, contando en esta ocasión con un apartado adicional que recoge las réplicas a las tres ponencias presentadas en el Seminario de Investigación II (Didáctica del Análisis) del IX Simposio de la SEIEM celebrado en Córdoba en septiembre del 2005, que por diversos motivos no fueron incluidas en la publicación correspondiente (ISBN 84-7801-782-8). Esperamos que los trabajos que se recogen en esta publicación, doten del realce que merece la SEIEM, y por tanto den un nuevo impulso a la investigación en Educación Matemática de nuestro país.

Matías Camacho
Pablo Flores
Pilar Bolea

Comité Científico del XI Simposio de la SEIEM

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I

CONTRASTANDO ENFOQUES
DE INVESTIGACIÓN EN ÁLGEBRA

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN I

CONTRASTANDO ENFOQUES DE INVESTIGACIÓN EN ÁLGEBRA

Alicia Bruno Castañeda (Coordinadora)
Universidad de La Laguna, abruno@ull.es

Presentamos en este Seminario de Investigación tres ponencias dedicadas a la enseñanza del álgebra, realizadas por la Dra. Marta Molina (Universidad de Granada), por el Dr. Martín Socas (Universidad de La Laguna) y por el Dr. Francisco Javier García (Universidad de Jaén). Se trata de tres miradas diferentes hacia a un mismo campo de las matemáticas. Diferentes porque, en primer lugar, abordan intereses distintos del álgebra escolar, una de ellas se sitúa en la enseñanza primaria y las otras dos, en secundaria, pero fundamentalmente difieren en que se han realizado en marcos teóricos distintos. Utilizando palabras del Dr. Francisco Javier García su trabajo pertenece al *programa epistemológico*, mientras que los trabajos de la Dra. Marta Molina y el Dr. Martín Socas se sitúan en el *programa cognitivo*.

Las tres ponencias se estructuran de manera similar. En una primera parte, los ponentes han realizado el esfuerzo de resumir las investigaciones más importantes en su tópico de investigación, para, en una segunda parte, exponer con brevedad una investigación propia.

La ponencia de la Dra. Marta Molina (Molina, 2007) aborda resultados de su tesis doctoral, presentada en Febrero de 2007 en la que describe una propuesta de integración del álgebra en el currículo de Educación Primaria. Esta propuesta es conocida como Early-Algebra, y como se muestra en su ponencia, se diferencia de lo que se denomina pre-álgebra, aunque ambos enfoques abordan una enseñanza-aprendizaje del álgebra previa a la enseñanza formal en la educación secundaria. En la primera parte de la ponencia presenta cómo ha surgido y evolucionado la propuesta de Early-Algebra, y se observa cómo la mayoría de las investigaciones se centran en la aritmética como acceso al álgebra. En la segunda parte de la ponencia, la autora expone parte de su investigación, en la que analiza el uso de pensamiento relacional por alumnos de tercero de Educación Primaria. Se define el pensamiento relacional como la actividad intelectual de examinar las expresiones aritméticas (algebraicas) como totalidades y detectar relaciones entre ellas o entre sus términos. Desde un punto de vista cognitivo, desglosa las estrategias utilizadas por los alumnos para analizar sentencias numéricas. Las estrategias identificadas muestran la gran variedad de pensamiento de los alumnos y los mo-

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Alicia Bruno Castañeda (2007). CONTRASTANDO ENFOQUES DE INVESTIGACIÓN EN ÁLGEBRA, pp. 15-17.

mentos en que aparece el uso del pensamiento relacional. El Early-Algebra es una línea de investigación actual y muy potente que, como indica la propia autora, plantea posibilidad de realizar cambios curriculares en la Educación Primaria y, como consecuencia, en la Educación Secundaria.

Al igual que la anterior ponente, la ponencia del Dr. Francisco Javier García surge de los resultados de su tesis doctoral (García, 2005), la cual se sitúa en el programa epistemológico, dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), cuyo objeto primario de investigación es la actividad matemática escolar desde una perspectiva epistemológica e institucional. En este caso, se trata de abordar los fenómenos didácticos a partir de la modelización de su componente matemática, frente a los marcos que modelizan los aspectos cognitivos. En la primera parte de la ponencia se presenta de manera amplia, la visión del álgebra desde el ámbito de la TAD y se muestran investigaciones previas. Estos estudios ponen de manifiesto la fuerte relación, en el ámbito escolar, entre la aritmética y el álgebra, ya que esta última se presenta a los alumnos como aritmética generalizada, lo cual presenta limitaciones. Además estos estudios indican que en la Educación Secundaria hay un fuerte grado de desalgebrización y una ausencia de modelización. Desde la TAD se propone *un modelo epistemológico de referencia en el que el álgebra escolar se considerará como un instrumento de modelización de todas las organizaciones matemáticas escolares* (Bolea, Bosch, y Gascón, 1998). Se plantea si es posible diseñar un currículo en el que tenga cabida el álgebra escolar como instrumento de modelización. En una segunda parte de esta ponencia se presenta un *modelo epistemológico de referencia* de la proporcionalidad y de las relaciones funcionales y cómo se abordan la proporcionalidad en los documentos curriculares y en los libros de texto. Así mismo se presenta una propuesta de articulación del estudio de las relaciones funcionales mediante un proceso de modelización algebraica utilizando un recorrido de estudio e investigación diseñado en un entorno económico-comercial. Al igual que en la ponencia anterior, los resultados de este trabajo de investigación tendrían incidencias sobre el currículo, en este caso de la Educación Secundaria.

Por último, la ponencia del Dr. Martín Socas presenta los resultados de las investigaciones en torno al Lenguaje Algebraico realizadas por el grupo de Pensamiento Algebraico del Área de Didáctica de la Matemática de Universidad de La Laguna. La ponencia aborda el tema de las dificultades y errores en la construcción del Lenguaje Algebraico (Socas, 1997), utilizando como marco teórico de estudio el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). El enfoque ELOS trata de elaborar modelos teóricos y prácticos (Modelos de Competencia) que aporten los supuestos básicos para poder interpretar los fenómenos de estudio en Educación Matemática (Socas, 2001). En la primera parte de la ponencia se presenta una revisión de investigaciones sobre el papel que han jugado las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas, para particularizarlo en las investigaciones sobre errores en el álgebra escolar. En una segunda parte se presenta el marco teórico del trabajo, y se describen los *modelos de competencia formal* y *cognitivo* para el Lenguaje Algebraico que son la base para el posterior estudio de los errores de los alumnos. El *modelo de competencia formal* trata de explicitar el Lenguaje Algebraico y su relación con los objetos matemáticos, mientras que el *modelo de competencia cognitivo* se organiza a través de tres componentes: a) las representaciones semióticas, b) las estudios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación y c) las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra. En la última parte de la ponencia se ejemplifica el uso de este marco teórico utilizando los resultados de una prueba escrita realizado por alumnos de Educación Secundaria, la cual da lugar a una clasificación de errores

atendiendo a los supuestos orígenes de los mismos y se profundiza en ellos a través de una entrevista realizada a un alumno.

Las tres ponencias tienen un valor fundamental que es el interés por tener una incidencia directa en el currículo. Además, de la ponencia de la Dra. Marta Molina destaco el hecho de que aborde la relación entre el currículo de Primaria y Secundaria, teniendo una visión unificadora del currículo. Por otra parte las dos líneas de investigación presentadas por el Dr. Martín Socas y Dr. Francisco Javier García presentan dos marcos teóricos profundos, que puede utilizarse en investigaciones no puramente algebraicas.

BIBLIOGRAFÍA

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. Comunicación presentada en el 1er Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Osnabrueck. Alemania.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemátic. Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. ANÁLISIS DESDE EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO

Martín M. Socas
(msocas@ull.es)
Universidad de La Laguna

RESUMEN

El propósito de esta ponencia es presentar algunos resultados de investigaciones relevantes realizadas en torno a las dificultades y errores que presentan los alumnos en la construcción del Lenguaje algebraico, tomando en consideración el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) como marco teórico de análisis de las dificultades y errores de los alumnos en Álgebra. En el desarrollo de la ponencia se describirá, también algunos supuestos básicos en los que se sustenta el Enfoque Lógico Semiótico.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to present some results of relevant researches concerning the difficulties and errors that students present in the construction of the algebraic Language, taking into account the Semiotic Logical Approach as a theoretical framework of analysis for the students' difficulties and errors in Algebra. In the development of the presentation we will also describe some basic assumptions in which the Semiotic Logical Approach is based.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación SEJ2005-08499 del Plan Nacional de I+D+I del MEC y cofinanciado con fondos FEDER de la CEE.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Martín M. Socas (2007). DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. ANÁLISIS DESDE EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO, pp. 19-52.

INTRODUCCIÓN

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas es hoy un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, en el que a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aún no resueltas.

En las investigaciones en Educación Matemática se observa un creciente interés por lograr modelos que faciliten las concepciones inadecuadas ("misconceptions") y prevean e interpreten los errores de los alumnos.

La mayoría de los autores consideran que los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de la situación problemática y son consecuencia de las experiencias anteriores en Matemáticas.

En general aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en Matemáticas, ocultan probablemente serios errores operacionales, estructurales y procesuales de los objetos matemáticos que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Parece necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente de cómo lo hacemos, los errores de los alumnos. Esta información permitirá al profesorado arbitrar procedimientos y remedios efectivos para ayudar a los alumnos en la corrección de dichos errores.

Investigaciones realizadas en los últimos años han mostrado la importancia que tiene centrar la atención no sólo en las respuestas correctas de los estudiantes, sino también, en los errores que cometen.

En este análisis sobre las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, tomaremos como contenido matemático el Lenguaje algebraico y a él nos remitiremos para ilustrar de manera concreta las cuestiones que se van planteando a lo largo de la ponencia.

Muchos profesores e investigadores preocupados por las dificultades y errores que el aprendizaje del Álgebra ocasiona a los alumnos, han desarrollado diferentes investigaciones sobre el método más adecuado para realizar la transición de la Aritmética al Álgebra.

El propósito de esta ponencia es hacer una presentación, desde la perspectiva de la investigación, sobre un tema central en el aprendizaje de las Matemáticas y analizar los aspectos más relevantes sobre las dificultades y errores que presentan los alumnos en la construcción del Lenguaje algebraico desde el marco teórico que nos ofrece el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), describiendo los esquemas teóricos que se utilizan, así como las técnicas de análisis para interpretar los resultados.

Asimismo se quiere señalar que el marco teórico ELOS es un marco en construcción que desarrollan el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna que orienta la investigación hacía la elaboración de modelos de competencias, en este caso modelo de competencia formal y modelo de competencia cognitivo, para entender y actuar en los fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en este caso dificultades y errores en el aprendizaje del Lenguaje algebraico.

A efectos de la presentación, esta ponencia se organiza en varios apartados. En el primero, Identificación del problema: Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas, se analiza de manera general y desde el punto de vista de la investigación, las dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y se formulan diferentes preguntas de investigación y objetivos relativos a los trabajos realizados por el grupo de investigación de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna. En el segundo, Marco teórico, se dedica a presentar diferentes aspectos teóricos en el que se sustenta el Enfoque Lógico Semiótico, describiendo algunos supuestos básicos, así como los modelos de competencias que se utilizan en estas investigaciones. En el tercero, Diseño de la investigación, se describe brevemente el diseño de la investigación así como las dos fases de análisis. En el cuarto apar-

tado, Resultados y discusión, se presentan diferentes resultados de la primera y segunda fase de análisis relativos al Lenguaje algebraico, y se discuten, en el primer caso en relación a un grupo de alumnos de ESO, y en el segundo caso en relación con un alumno de nivel medio bajo en Álgebra. Se termina finalmente con un quinto apartado, conclusiones en el que se hacen unas breves consideraciones finales al trabajo presentado.

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA: DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En Rico (1995), se aporta una revisión sobre el estudio de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas hasta principio de los noventa, poniendo de manifiesto que ha sido un objeto de investigación constante en Educación Matemática, que se ha caracterizado por aproximaciones e intereses diferentes, condicionadas por los objetivos y formas de organización de los currículos de Matemáticas y por ciertas corrientes predominantes de la Psicología y la Pedagogía.

En Radatz (1980), se presenta un estudio de las contribuciones más significativas al análisis de los errores hasta finales de los años setenta del pasado siglo, agrupando a los autores por países y destacando los estudios en Alemania, Unión Soviética y Estados Unidos. En este último país destaca la aportación Brueckner (1935), citada en Radatz, que junto con otros investigadores orientaron los trabajos sobre cinco objetivos:

- Listar todas las técnicas potencialmente erróneas.
- Determinar la distribución de frecuencias de estas técnicas erróneas en los agrupamientos por edades.
- Analizar las dificultades especiales, en particular las relativas a la división y a las operaciones con el cero.
- Determinar la persistencia de técnicas erróneas individuales.
- Tratar de clasificar y agrupar los errores.

En la versión española de Brueckner y Bond (1984) se presenta un tratamiento y desarrollo sistemático de los objetivos anteriores. Es una corriente de investigación que ha tenido influencia en los trabajos que se han realizado en España.

Una muestra del interés por el estudio de los errores cometidos por los estudiantes, en nuestro país hasta finales de los ochenta, lo refleja el esfuerzo realizado en la mayor parte de los trabajos publicados en la Editorial Síntesis, colección Matemáticas: cultura y aprendizaje.

Podemos decir, a grandes rasgos, que los estudios sobre errores en una primera etapa consistían, prioritariamente, en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas y en hacer una análisis de los tipos de errores detectados, para proceder a una clasificación que permita examinar cómo éstos surgen a partir de la solución correcta, y, hacer inferencias sobre qué factores, especialmente del contenido matemático, pueden haber conducido al error.

En una segunda etapa, a partir, aproximadamente, de la década de los ochenta, se toma conciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ello supone indagar sobre los errores, no únicamente desde cuestionarios generales, sino, además, profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos como recurso para saber en que están pensando.

Al comenzar estas observaciones más cuidadosas del trabajo en Matemáticas de los alumnos se van obteniendo resultados, a veces inesperados. Por ejemplo en Brousseau, Davis, y

Werner (1986), se describe que: los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón consistente; los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas ("misconceptions") sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por sus profesores; llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios ignorando el método propuesto por el profesor. Esto les lleva a señalar posibles caminos en los que el error puede presentarse: los errores como consecuencia de concepciones inadecuadas, los errores como la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, los errores como consecuencia del uso de métodos propios del estudiante, en general informales, entre otros.

Otros trabajos como los de Mulhern (1989) resumen las características generales de los errores cometidos por los alumnos: sorprendentes, extremadamente persistentes, sistemáticos o por azar, ignorando el significado de los objetos matemáticos. Mostrando igualmente la variedad de métodos de investigación que se habían utilizado hasta finales de los ochenta para el estudio de los errores en Matemáticas:

1) Contar el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas (método diagnóstico de orientación psicométrica).
2) Análisis de los tipos de errores cometidos. Técnica que implica la clasificación de errores y el análisis de cómo se desvían los errores de la solución correcta para hacer inferencias sobre los factores que han originado el error.
3) Análisis de patrones de error. Técnica que permite, por un lado, revelar errores sistemáticos que sean consecuencia de concepciones inadecuadas y, por otro, al variar las tareas, los patrones de error que resultan, facilitan información sobre las estrategias utilizadas.
4) Análisis de los patrones de error que se dan en problemas construidos para provocar errores. Técnica que permite observar los patrones de error que cometen los individuos y especular sobre las posibles causas de estos errores, y se basa en el supuesto de que nuevos problemas de la misma naturaleza inducirán a errores similares.

Esta segunda etapa se caracteriza por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto (sociocultura, institucional)…, y de sus interacciones, lo que pone de manifiesto la complejidad para analizar los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis y la explicación de los mismos, como señalaba Radatz (1979).

De esta línea de trabajo sobre el análisis, clasificación y causas de los errores, hemos de señalar, varias cuestiones: en primer lugar, que algunas investigaciones ponen de manifiesto la categorización de los errores fundamentándose, exclusivamente en el conocimiento matemático; en segundo lugar, que en las investigaciones que combinan resultados empíricos con algunos supuestos sobre las estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir, que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores; en tercer lugar, que a partir de estos informes sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente, no se puede explicar su origen y en consecuencia no podemos aportar un trato sistemático a los mismos.

Como consecuencia de ello, en la actualidad parece necesario desde la Didáctica de la Matemática, avanzar en la delimitación de las causas posibles de los errores que cometen los alumnos y tener una explicación general de cada error o particular para cada alumno, de manera que podamos actuar sobre él a nivel de grupo o a nivel individual, siendo conscientes

de las dificultades debidas a las distintas variables que interaccionan en el proceso educativo y que condicionan el error al convertirse en dificultades u obstáculos en el aprendizaje.

Esta línea de trabajo en el estudio de lo errores han generado otras que están fuertemente relacionadas con la primera y que tienen que ver con el uso de las dificultades y errores en el desarrollo curricular o en la formación del profesorado de Matemáticas. En el primer caso, podemos citar la enseñanza diagnóstica (Bell, 1986), en la que se utilizan lecciones con unos cuantos problemas críticos para descubrir concepciones erróneas y así provocar discusiones conducentes a una resolución; a continuación se proponen problemas similares que sirven de retroalimentación para la corrección de los errores por el alumnado; o los trabajos de Borassi (1987) y otros autores, que parten de la idea de que la interpretación exclusiva del error como instrumento de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del error cometido. Así amplían este punto de vista, que puede resumirse en que, los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, que implican actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas. Destacando que los errores pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la naturaleza de las Matemáticas.

En la formación inicial y permanente del profesorado se sostiene, por una parte, que el profesorado debe tener un conocimiento general de las fundamentaciones teóricas y prácticas sobre las tipologías de los errores, el conocimiento de sus posibles causas, su repercusión en el desarrollo curricular, de forma que les permita hacer un diagnóstico y aportar un tratamiento para la superación de los errores; y por otra, se trata de poner en evidencia las concepciones previas del profesorado sobre los errores, para que estos clarifiquen sus concepciones sobre los errores y de paso sobre las Matemáticas y su aprendizaje (Tirosh y Graeber, 1989).

El Lenguaje algebraico no es ajeno a este proceso de estudio de las dificultades y errores. Veamos algunas referencias:

El proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983 (Booth, 1984) centró más el interés en analizar la naturaleza de los errores cometidos por los alumnos que en el tipo de cuestiones que los alumnos resuelven correctamente y, especialmente, en el caso de que tales errores sean cometidos por un amplio número de estudiantes. Del análisis de estos errores comunes, observamos que muchos de ellos podían ser atribuidos a aspectos tales como: la naturaleza y significado de los símbolos y las letras, el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y el uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos". Los tres primeros aspectos generan errores que se originan en la transición conceptual de la aritmética al álgebra, mientras que el cuarto se debe fundamentalmente a falsas generalizaciones sobre operadores o números.

Al grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, sus investigaciones le ponen de manifiesto la importancia que tiene centrar la atención, no sólo en las respuestas correctas de los alumnos, sino también en los errores que comenten. Las investigaciones acerca de los errores que cometen los estudiantes han permitido, por ejemplo, realizar clasificaciones en relación con los errores de los alumnos cuando trabajan con el lenguaje algebraico. Por ejemplo, una de estas primeras organizaciones de los errores está en (Socas et al., 1989):

1) Errores del Álgebra que están en la Aritmética: errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, errores relativos al uso de recíprocos y errores de cancelación.
2) Errores de Álgebra debidos a las características propias del Lenguaje algebraico. Son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la Aritmética (operaciones, estructuras y procesos).

En Palarea (1998) se estudian y clasifican los errores más comunes cometidos por alumnos de 12 a 14 años en el Lenguaje algebraico. En Ruano, Socas, Palarea, (2003), se analizan los errores que cometen alumnos de Educación Secundaria en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, cuando trabajan situaciones problemáticas que implican alguno de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización, se aporta, además, una clasificación y se hacen supuestos sobre sus posibles orígenes.

Las investigaciones desarrolladas en este sentido nos han llevado a profundizar más en el origen y causa de los errores y a revisar los errores desde dos puntos de vista: las dificultades inherentes a las Matemáticas y las dificultades inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas en el ámbito escolar (Socas, 1997).

Esto nos condujo a caracterizar de manera más precisa los errores en dos grupos: errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En la actualidad la propuesta de trabajo del grupo intenta ir más allá; además de realizar un análisis y clasificación de los errores que cometen alumnos de secundaria en relación con las operaciones, las estructuras y los procesos cuando trabajan en tareas de sustitución formal, generalización y modelización, se pretende determinar los orígenes de los mismos, basándose en el marco teórico propuesto por Socas (1997), para así poder arbitrar procedimientos que ayuden a los alumnos a corregir sus errores.

En resumen hemos de señalar que el propósito general del Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna es determinar en el marco de una teoría del conocimiento algebraico las dificultades y errores que tienen los alumnos de la ESO, para comprender y trabajar con competencia, objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico.

Señalamos también que los diferentes resultados de los trabajos realizados han ido conformando un enfoque propio del grupo que hemos denominado Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2001). La investigación en este marco se caracteriza entre otros aspectos por ser una investigación vía la elaboración de Modelos de Competencia, en este caso para el estudio de los errores.

El ámbito de actuación para el estudio de las dificultades y errores se sitúa en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Las investigaciones se han planteado diferentes preguntas, objetivos y supuestos. Se expresan a continuación algunas de las más significativas en el estudio de los errores.

Preguntas:

Pregunta 1: ¿Los errores cometidos por los alumnos dependen del tipo de pensamiento que utilicen: operacional, estructural o procesual?

Pregunta 2: ¿Es posible determinar el origen más frecuente de los errores que cometen los alumnos en tareas relacionadas con los aspectos operacionales, estructurales o procesuales?

Pregunta 3: ¿Los errores son más consistentes o generales cuando se dan en la estructura superficial o cuando se dan en la estructura profunda del objeto estudiado?

Objetivos:

Objetivo 1: Analizar y clasificar los errores cometidos por los alumnos en tareas relacionadas con el Lenguaje algebraico en la ESO.

Objetivo 2: Determinar el origen de los errores cometidos por los alumnos.

Supuestos:

Supuesto 1: Conjeturamos que existen errores que se cometen independientemente de los contenidos de las tareas presentadas y de las operaciones, de la estructura y del proceso desarrollado.

Supuesto 2: Conjeturamos que el origen de muchos de los errores que se cometen en el aprendizaje del Álgebra, se encuentran en problemas que han quedado sin resolver en la Aritmética, especialmente aquellos que tienen que ver con las estructuras y los procesos numéricos.

MARCO TEÓRICO

En este apartado describiremos los modelos de competencia formal y cognitivo que servirán de base para el estudio de las dificultades y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje del Lenguaje algebraico en el marco del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS).

La investigación desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) trata de elaborar modelos teóricos y prácticos (Modelos de Competencia), a partir del análisis empírico, que aporten los supuestos básicos que permitan interpretar fenómenos específicos que se dan en Educación Matemática, así como los métodos de investigación y resultados que se deben tomar como evidencias.

En Educación Matemática se identifican y separan, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente: conocimiento matemático, aprendizajes, enseñanza, procesos de enseñanza/aprendizaje,... La separación de estos campos de actividad, se observa en la mayor parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática que tienen un sesgo a lo epistemológico, a lo cognitivo o a lo pedagógico. No parece ésta una propuesta acertada ya que se encuentran estrechamente relacionados entre sí, pero aún más, no parece razonable entender los problemas o fenómenos de enseñanza/aprendizaje de la Matemática desde estos análisis parciales; el análisis lógico semiótico nos ofrece una propuesta integradora y nos define las relaciones principales a determinar en las diferentes situaciones problemáticas para entender estos fenómenos y actuar en consecuencia.

ELOS toma como punto de partida el "Microsistema Educativo", que está formado por tres elementos básicos: Profesores, Alumnos, Disciplina (triángulo didáctico) y por dos componentes: la Sociocultural y la Institución Escolar. La Didáctica de la Matemática como conocimiento profesional se sitúa tanto en el micro como en el macrosistema educativo, aunque centra su campo de actividad en el funcionamiento del microsistema y de él deriva el espacio sistémico que podemos caracterizar como Didáctico y constituye el primer Sistema Didáctico objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática.

Para el estudio del microsistema educativo necesitamos conocer: sus componentes, sus tres elementos y sus relaciones esenciales. Esto nos lleva a planificar y gestionar la investigación para el sistema didáctico fundamental. En él cabe destacar el conocimiento matemático curricular y las tres relaciones esenciales que caracterizan, respectivamente, a los modelos de competencia: formal, cognitivo y de enseñanza. En este informe de investigación utilizaremos los dos primeros.

Modelo de competencia formal en ELOS para el Lenguaje algebraico

Para establecer el modelo de competencia formal es necesario explicitar el lenguaje algebraico y su relación con el objeto matemático.

El modelo de competencia formal se caracteriza por los aspectos funcionales, fenomenológicos y conceptuales de los contenidos algebraicos curriculares implicados en la situación problemática a tratar. Tendremos, en consecuencia, que explicitar la organización lógico-for-

mal del lenguaje algebraico, es decir, los conceptos, relaciones y procedimientos que caracterizan al lenguaje algebraico, así como el conjunto de situaciones y fenómenos que pueden ser analizados mediante la organización lógico-formal de los objetos del lenguaje algebraico implicados.

El modelo de competencia formal tiene entonces como punto de partida la organización funcional, fenomenológica y conceptual de los objetos algebraicos y éstos se organizan desde la perspectiva lógico semiótica que hemos considerado (Peirce, 1987), y pasa necesariamente por la organización de los signos del Lenguaje algebraico y sus procesos de significación.

Para desarrollar los aspectos funcionales es necesario abordar el papel de los signos en el lenguaje algebraico. En Kieran y Filloy (1989) se sugiere sustituir la noción de Sistema de Signos Matemáticos por la de Sistema Matemático de Signos, con su código correspondiente. La noción de Sistema Matemático de Signos es lo suficientemente amplia que permite analizar no sólo los textos matemáticos históricos sino también las producciones de los alumnos en clase de Matemáticas. Este punto de vista supone situarse en una semiótica de las Matemáticas centrada en los sistemas de significación y en los procesos de producción de sentido antes que en el estudio de los signos.

Analizamos, ahora, las diferentes funciones del Lenguaje algebraico. Podemos decir que éstas se concretan en: "expresiva" (estado del objeto algebraico que facilita la representación semiótica y que permite la materialización o encarnación del objeto), "señalizadora" (que evoca, desencadena, estimula,...una reacción en el receptor), "descriptivas" y "argumentadoras".

La organización anterior del lenguaje matemático nos ofrece una perspectiva útil para hacer una distribución de los objetos algebraicos. Si consideramos "las situaciones problemáticas" o "fenómenos" de naturaleza didáctico matemática, podemos caracterizar a los fenómenos que tienen lugar con los objetos algebraicos en la actividad matemática mediante tres entidades primarias o básicas que tomaremos como referencia: "Expresiones semióticas", "Descripciones algebraicas" y "Argumentaciones algebraicas".

Las "expresiones semióticas", se refieren a los observables y ostensibles utilizados en la actividad matemática, tales como, términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras,... en general, todas las representaciones externas del objeto algebraico. Las expresiones semióticas asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico y constituyen las manifestaciones externas del Sistema Matemático de Signos de los diferentes agentes que intervienen en el microsistema educativo.

Las "descripciones algebraicas", se refieren, a las definiciones, propiedades, características de los objetos algebraicos, y a las relaciones de los objetos entre sí, es decir, conceptos, proposiciones, procedimientos, algoritmos, operaciones, etc.

Las "argumentaciones algebraicas" son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico.

Ahora bien desde el punto de vista de la Teoría Semiótica tenemos que suponer que una "expresión de signos matemáticos" no designa un objeto matemático del mundo real sino que transmite un contenido de la cultura matemática.

Las situaciones fenomenológicas que organiza el Lenguaje algebraico las podemos relacionar con las capacidades del pensamiento algebraico y se pueden describir de forma reducida como: "Desarrollar capacidades para dar significado a los signos del Álgebra, usarlos para mostrar cantidades y poner en relación cantidades y cantidades de cantidades, manejar lo desconocido, hacer y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular y lo particular en lo general, es decir, ser conscientes de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización y controlarlos".

Los aspectos conceptuales del Lenguaje algebraico se pueden describir al relacionar los signos con los objetos matemáticos y sus significados, esto quiere decir que debemos concretar la dualidad objeto/proceso en el lenguaje algebraico.

A efectos de caracterizar esta dualidad objeto/proceso en el modelo de competencia formal, incorporamos algunos aspectos que permiten precisar mejor la dualidad en el sistema matemático de signos asociado al Lenguaje algebraico; en este sentido, tomamos de los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), las nociones de conocimiento conceptual y procedimental. Ellos señalan:

> "Conocimiento conceptual se caracteriza claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento.
>
> Conocimiento procedimental se construye en dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las matemáticas. La otra parte consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas... En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos".

Es ciertamente una forma sencilla de explicitar a nivel conceptual la dualidad proceso/objeto, es decir la convivencia de los tipos de conocimiento en Matemáticas, el conceptual y el procedimental. Estos autores ponen de manifiesto las características diferentes de cada uno de ellos. El conocimiento conceptual indica que es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Mientras el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Establecen los autores relaciones entre ambos conocimientos de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

Es conocido que la caracterización y relación entre estos dos tipos de conocimiento es también considerada por muchos otros autores, como, por ejemplo Douady (1986) o Sfard (1991), incluso en un contexto más amplio y con mejor precisión desde la perspectiva del aprendizaje. Hiebert y Lefevre (1986), no profundizan, por ejemplo, en las representaciones externas y su relación con las representaciones internas, que es un objeto clave en la investigación que realizamos. No obstante, para la configuración del modelo de competencia

formal, son aspectos relevantes que vamos a tener en consideración al configurar el modelo de competencia cognitivo para el pensamiento algebraico, es decir, vamos a establecer relaciones entre estos conocimientos en términos de representaciones externas e internas.

El estudio de los aspectos funcional, fenomenológico y conceptual nos permite describir el modelo de competencia formal del Álgebra de la ESO que consideramos en la investigación.

Como conclusión relevante de este análisis observamos que el pensamiento algebraico se desarrolla en tres aspectos relacionados: operacional, estructural y procesual, que vamos a tomar como referentes para caracterizar la dualidad del conocimiento matemático conceptual/procedimental.

Modelo de competencia cognitivo en ELOS para el Lenguaje algebraico

El modelo de competencia cognitivo se organiza en torno a tres componentes:

1. Las representaciones semióticas.
2. Los Estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra.
3. Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra.

Describamos, brevemente, cada una de estas tres componentes.

Las representaciones semióticas

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra representación en relación con el aprendizaje, la enseñanza y el desarrollo curricular de las Matemáticas.

Por ejemplo, Goldin (1993) presenta, como resumen del grupo que trabajó sobre representación en los Congresos del PME, las diferentes interpretaciones dadas a este término y que organiza en cuatro grupos: soportes físicos externos (incluyendo entornos de ordenador), soportes lingüísticos, construcciones matemáticas formales y representaciones cognitivas internas.

Un concepto de representación comúnmente usado en Educación Matemática es el que propone Kaput (1987) "cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado, habiendo, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirán las siguientes cinco entidades: el mundo representado, el mundo representante, qué aspectos del mundo representado han sido representados, qué aspectos del mundo representante hacen la representación, y la correspondencia entre los dos mundos".

Las representaciones semióticas tienen una estrecha relación con el funcionamiento cognitivo del pensamiento como han puesto de manifiesto diferentes autores.

Para Skemp (1980), la imaginación mental de las personas puede clasificarse en dos tipos: visual y verbal, de manera que en la representación de los conceptos matemáticos se plantean dos sistemas de símbolos a utilizar denominados visuales y verbales.

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1990). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984).

Conviene destacar la importancia que las representaciones tienen para la formación adecuada de conceptos; en este sentido diversos investigadores, Hiebert (1988), Duval (1993, 1995), Castro, Rico y Romero (1997), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Duval (1993, 1995) distingue entre lo que llama objetos matemáticos y sus representaciones, y sostiene que estas últimas tienen un papel indispensable en la aprehensión del objeto o concepto matemático. Hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a significado y funcionamiento, y es esencial en la actividad matemática poder movilizar varios registros en el curso de una misma acción, o bien poder elegir un registro en vez de otro.

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993), establece que: "toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de, al menos, dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

En este trabajo consideramos la noción de Representación desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico, en este enfoque la representación es un elemento determinante en el análisis semiótico. La Semiosis debe ser entendida como un triple proceso: de generación de signos (productor de signos), de acciones del signo (signo-acción), y de inferencia. El análisis semiótico será el estudio del funcionamiento de esa semiosis. De esta manera, la designación de un objeto matemático mediante un signo es un proceso de inferencia (semiosis) por el cual la representación determina en quien la recibe una interpretación mental que consiste en remitir la representación al objeto que ésta representa.

Conviene, entonces, caracterizar lo que entendemos por representación ya que esta noción es la que nos permitirá realizar el análisis semiótico.

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) toma en consideración, como hemos señalado, la Fenomenología de Peirce (1987) y la adapta para analizar y comprender, planificar y gestionar, las situaciones problemáticas o fenómenos didácticos matemáticos en Educación Matemática.

El Signo se presenta para Peirce como una genuina relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo aparece en su propuesta relacionado con tres instancias separables analíticamente: Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta), Objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento), Fundamento del Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que lo conecta con el objeto).

La propuesta semántica de Peirce se fundamenta en el hecho de que un signo obtiene su significado por su necesaria referencia a otros signos, es decir, el significado de un signo no es otra cosa que el conjunto de signos que permiten desarrollarlo y explicitarlo.

En consecuencia adoptamos la siguiente posición en este enfoque: todo signo pertenece a un sistema de signos y en él puede ser analizado y comprendido (condición de la significación), pero no todos los signos funcionan idénticamente ni dependen de un único sistema. Es necesario caracterizar diferentes sistemas de signos y establecer en ellos una relación de diferencias y analogías.

Para analizar desde esta perspectiva la construcción y el aprendizaje del conocimiento didáctico matemático necesitamos de dos nociones primitivas. La primera se refiere a las "situaciones problemáticas" o "fenómenos didácticos matemáticos", y se describe como

cualquier circunstancia en la que se pueden realizar actividades de matematización (Freudenthal, 1991), o actividades de profesionalización matemática. La segunda es que cualquier sistema didáctico debe estar organizado en torno a la triada primaria (triada epistemológica): "Contexto", "Referente" y "Significado". Las razones que justifican esta elección están, entre otras, en que:

- Todo fenómeno didáctico matemático necesita tener en cuenta un Contexto para determinar a qué se refiere, es decir, se necesita una referencia contextual, en la que el Contexto determina la cualidad del fenómeno o situación problemática.
- El fenómeno o situación problemática remite a un conjunto de objetos, el Referente, que está constituido por cada uno de los elementos de dicho conjunto. El Referente determina la relación real del fenómeno con los objetos.
- El Significado estará formado por las descripciones asociadas a las relaciones que se dan en el conjunto de objetos a los que remite el fenómeno o la situación problemática.

Se entenderá que el significado es atribuible tanto a los objetos como a las relaciones entre los objetos en relación con la situación problemática o fenómeno.

En este sentido el modelo de competencia que describe la noción de representación en el Enfoque Lógico Semiótico viene dado por el contexto (en término general se refiere a ciertos aspectos del Microsistema Educativo); los referentes: signo, objeto y significado; y las tres relaciones esenciales que se dan entre los referentes: signo-significado, signo- objeto y objeto-significado.

La noción de representación en el enfoque Lógico Semiótico es, pues, una adaptación que deriva del concepto de semiosis en Peirce y está descrita por el modelo de competencia caracterizado por el Contexto, los tres referentes y las tres relaciones esenciales. De manera más concreta, en un contexto determinado, la representación es un Signo que:

(1) Tiene ciertos caracteres que le son propios
(2) Establece una relación diádica con el significado
(3) Establece una relación triádica con el significado a través del objeto; esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado.

La noción de representación pone en relación el objeto matemático con el signo y el significado, como hemos indicado anteriormente. Se debe tener en cuenta que la cualidad del signo es la representación y sus diferentes formas, y que además, podemos establecer relaciones entre el signo y el objeto matemático, y entre el signo y el significado. El objeto matemático debe ser entendido en su relación con el contexto y con su fenomenología, sin olvidar que el significado siempre alude a un interpretante que puede ser individual o colectivo, y que éste se hace observable y ostensible a través del signo.

Señalemos finalmente que para Vygotsky (1962), los signos causan transformaciones básicas en las funciones psicológicas que intervienen en el funcionamiento mental que permite al individuo la comprensión del objeto matemático, y distingue en los signos dos funciones básicas en la comunicación de los objetos matemáticos, la función indicativa (en la que el signo depende del contexto en el que aparece) y la función simbólica (en la que el signo se usa en situaciones descontextualizadas y abstractas, e implica la organización de los objetos en categorías y la formación de relaciones entre categorías).

En este sentido Vygotsky, para quien los procesos mentales pueden entenderse solamente

mediante la comprensión de los instrumentos y signos que actúan de mediadores, coincide con Peirce (1987), al manifestar que el lenguaje es el que marca y distingue al sujeto.

Los Estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra

Los objetos matemáticos se comunican mediante los sistemas de representación semióticos (SRS). Aceptamos que existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, no obstante se constata la preocupación entre los matemáticos y los profesores de matemáticas, para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por ello por lo que se ha favorecido los SRS más formales frente a los SRS más visuales o también caracterizados como representaciones más intuitivas.

Pero el dominio de un SRS formal es más una meta que un camino, en la que aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo que se dan, hasta producir competencia, en el uso del SRS formal. Estos estadios cognitivos han sido descritos de maneras diversas, y especialmente extraídos y analizados en el proceso de la culturización matemática, es decir, en la sociogénesis del conocimiento matemático. Optamos por la organización denominada: estadios semiótico, estructural y autónomo. El estadio semiótico es aquél en el que el alumno aprende y usa los signos nuevos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos y usados por él. El estadio estructural se caracteriza porque el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo; sin embargo aparecen en este estadio verdaderas dificultades cognitivas para el alumno, ya que determinados comportamientos de los signos no pueden ser explicados en términos del sistema antiguo, se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado. El estadio autónomo es aquél en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior. Es éste el proceso de generalización de las matemáticas y es una característica de la misma como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es por tanto el sistema nuevo, una fuente de dificultades para el aprendizaje del alumno, al encontrarse con elementos que él no controla en términos del sistema antiguo como es el caso del Lenguaje algebraico en relación con el Lenguaje aritmético al que hacemos constantemente referencia para explicitar el Lenguaje algebraico en el estadio semiótico del mismo (un estudio más detallado puede verse en Socas, 1997).

En este supuesto compartimos la tesis de las ventajas que supone el uso de diferentes sistemas de representación como fuentes de significado para el lenguaje algebraico, en especial el objeto geométrico como un registro del Álgebra que permite los procesos de generalización y transferencia del conocimiento algebraico.

Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra

Dificultades

En Socas (1997), se analiza las dificultades del aprendizaje de las Matemáticas y cómo éstas tienen orígenes distintos que se sitúan generalmente en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

En el trabajo anterior se describen cinco grandes categorías para describir la procedencia de estas dificultades, dos asociadas a la propia disciplina, complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento matemático, una tercera relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, la cuarta está asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y la quinta está asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

- Las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos básicos de las matemáticas que se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso; y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos complementarios objeto de la Matemática.
- Con referencia a las dificultades asociadas a las rupturas que se dan necesariamente en relación a los modos de pensamiento matemático, podemos indicar a modo de ejemplo, dentro del pensamiento numérico: la transición de lo natural a lo entero, de lo natural a lo decimal, de lo racional a lo irracional, o la transición del Pensamiento Numérico al Pensamiento Algebraico, etc.
- Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas. Estas dificultades tienen procedencias distintas: la institución escolar, el currículo de Matemáticas y los métodos de enseñanza.
- Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituyen una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza. Diferentes son los enfoques que podemos considerar: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre otros muchos. Conviene en este apartado señalar que abordamos cuestiones que tienen que ver con dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas y no nos referimos, en ningún caso, a alumnos con dificultades de aprendizaje y trastorno del desarrollo que estudian Matemáticas (García, 1999; González, 2003).
- Las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas, se relacionan con los sentimientos de tensión y miedo de los alumnos hacia ellas. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas.Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., genera bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos (McLeod y Adams, 1989).

Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

Errores

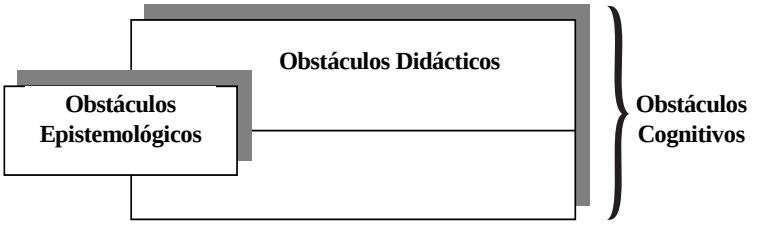
Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos, sobre todo cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo

que ya saben. Como señala Matz (1980), "los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". Así, entendemos que el error va a tener distintas procedencias, pero siempre, se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de la falta de conocimiento o de un despiste.

Tomaremos también como referencia para el estudio de los errores el marco teórico descrito en Socas (1997), en el que se consideran tres ejes, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error. De esta forma podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: Obstáculo, Ausencia de sentido y Actitudes afectivas y emocionales.

En Socas (1997) se da una revisión de la noción de obstáculo desde sus orígenes en Bachelard (1938), hasta su traslado al campo de la Didáctica de las Matemáticas, Brousseau (1983), Sierpinska (1985) y Artigue (1989)…, constructo que ha sido y es objeto de debate, ya que plantea dificultades, como predecía Brousseau (1983), que "la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso". Otra orientación la encontramos en Herscovics (1989), que se sitúa en un punto de vista esencialmente constructivista e interpreta la noción de obstáculo cognitivo en términos de la teoría piagetiana.

Sin embargo, una revisión y organización de esta noción y de sus posibles implicaciones en el análisis de errores, nos puede ayudar a tener una visión más amplia en el tema que nos ocupa. La propuesta que se formula en el citado trabajo (Socas, 1997) es una propuesta de organización posible y útil de los obstáculos en términos de:



En el que se aportan datos para justificar desde el punto de vista operativo esta organización y clasificación de los obstáculos. La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar. El análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy. Esta diferenciación se indicará de manera explícita en los ejemplos tratados.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos diferenciarlos en tres etapas distintas:

(a) Errores del álgebra que tienen su origen en la Aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que éstos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.
(b) Errores de procedimiento. Los alumnos usan inadecuadamente fórmulas o reglas de procedimiento.
(c) Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo "=" en Álgebra y la sustitución formal.

Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Una vez descritas las componentes del modelo de competencia cognitivo, este se puede representar mediante el siguiente esquema:

El desarrollo de los diferentes elementos y relaciones del modelo permitirá analizar los distintos significados que dan los alumnos al objeto algebraico y determinar el nivel de comprensión que el alumno tiene en relación al objeto.

Veamos, en primer lugar, como se describe la comprensión del alumno para completar luego el marco de la investigación en el que se analizarán las dificultades y los errores de los alumnos.

La comprensión puede ser descrita por dos vías diferentes, una, estableciendo relaciones entre el sistema de representación utilizado en la actividad y las dificultades y errores del alumno para el objeto algebraico tratado, en ese caso es el binomio procedimental/conceptual del objeto el que se utiliza para expresar la comprensión en términos de operacional, estructural y procesual. Otra, estableciendo relaciones entre los sistemas de representación, los estadios de desarrollo del objeto y las dificultades y errores. Veamos este último con más detalle, pero antes hagamos una breve reflexión sobre la comprensión en algunos autores.

Skemp (1980) que estudió la construcción de los conceptos en general y la de los matemáticos en particular, consideraba a los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales llamadas esquemas, y señala:

> "...Cada uno de estos conceptos por su naturaleza está dentro de una estructura con otros conceptos. Cada uno de éstos se deriva de otros anteriores y contribuye a la formación de nuevos conceptos, o sea forma parte de una jerarquía....Comprender algo significa asimilarlo en un esquema apropiado".

Hiebert y Carpenter (1992), transforman la idea de esquema de Skemp en la idea de red, y nos hablan de las redes formadas por las representaciones internas generadas por la manipulación de representaciones externas, bajo la siguiente caracterización de la comprensión:

> "Iniciamos definiendo la comprensión en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y las fuerzas de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes y numerosas conexiones".

En nuestra propuesta tomaremos como referencia el modelo de coordinación de registros de Duval (1993) en el que integra los aspectos teóricos desarrollados por Saussure por un lado y de Skemp por el otro.

La relación entre el significante y el significado de Saussure está integrada en el modelo de Duval en la relación que él establece entre el representante de un registro y el concepto. Bajo este supuesto teórico la "unidad" indisoluble de Saussure integrará más unidades en relación con las diferentes representaciones del objeto matemático. Las tareas de conversión entre representaciones generarán la integración de esas unidades en las estructuras mentales del individuo. Esto quiere decir que la adquisición de los conceptos matemáticos en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático.

La adaptación del modelo fenomenológico de Peirce a la propuesta de Duval supone considerar la tríada: signo-objeto-significado, como "unidad" indisoluble que integrará más unidades en relación con las diferentes representaciones del objeto matemático. Se trata en definitiva de expresar coherentemente las tres relaciones principales que se dan en ésta.

En primer lugar para establecer la relación objeto-significado consideramos los tres estadios de desarrollo del signo para el objeto cognitivo representado: semiótico (1), estructural (2) y autónomo (3). En cada uno de ellos distinguimos dos categorías de comportamiento que pasamos a describir:

Categoría 1A: El alumno tiene ideas imprecisas sobre el objeto matemático y mezcla de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

Categoría 1B: El alumno reconoce los elementos de un sistema de representación semiótico en relación con el objeto matemático.

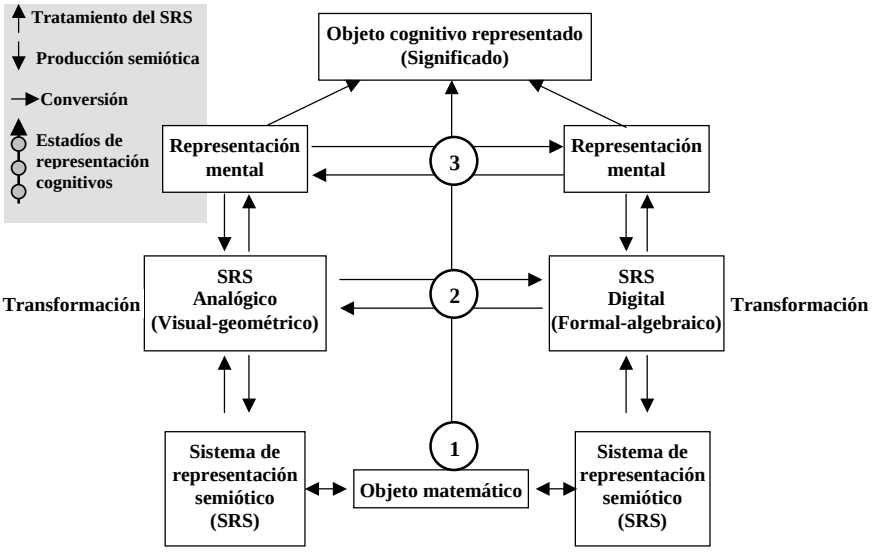
Categoría 2A: El alumno conoce un sistema de representación semiótico y realiza transformaciones en el interior del sistema de representación.

Categoría 2B: El alumno realiza correctamente actividades de conversión de un sistema de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un sistema que el alumno controla y facilita la conversión al otro.

Categoría 3A: El alumno articula dos sistemas de representación semióticos. Puede tomar cualquiera de ellos para significar correctamente el objeto matemático independientemente del otro. El alumno maneja autónomamente los dos sistemas de representación semióticos.

Categoría 3B: El alumno articula coherentemente diferentes sistemas de representación semióticos, ejerce un control de las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimiento del objeto matemático como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes del mismo.

Las otras dos relaciones signo-objeto y signo-significado quedan integradas y organizadas en la unidad que se expresa en la siguiente figura:



Para caracterizar las acciones que se realizan cuando se utilizan, por ejemplo, las representaciones formales (F), las geométricas (G) o las esquemáticas (E), establecemos:

- Reconocimiento de los elementos de un sistema de representación semiótico:

$$R_F, R_G, R_E$$

- Transformaciones internas en un sistema de representación semiótico:

$$T_F, T_G, T_E$$

- Conversiones (transformaciones externas) entre sistemas de representación semióticos:

$$C_{F\to G}, C_{G\to F}, C_{E\to F}\ldots$$

- Coordinación entre diferentes sistemas de representación semióticos:

$$C_{F\leftrightarrow G}, C_{G\leftrightarrow F}, C_{E\leftrightarrow F}\ldots$$

- Producción de representaciones semióticas en la resolución de una tarea algebraica. Distinguimos:

Producciones relacionadas con los SRS: PS_F, PS_G, PS_E

Producciones idiosincrásicas: PI_A, PI_D, PS_E...

De acuerdo con esta notación podemos organizar las demandas a los alumnos de las actividades propuestas en los cuestionarios, en los diseños de instrucción y en los protocolos de las entrevistas videograbadas. Un estudio en esta dirección se encuentra en Socas (2001).

Observemos finalmente cómo el modelo cognitivo nos facilita el estudio de los errores dentro del análisis de los significados que los estudiantes atribuyen al objeto matemático.

La valoración de la comprensión del conocimiento por los estudiantes implica, bajo este marco conceptual, analizar las actividades de los estudiantes para esclarecer las conexiones o articulaciones realizadas por los mismos durante la construcción de algún concepto dado.

El vértice de las dificultades y errores es el vértice del significado en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en la que el error puede ser estudiado desde tres perspectivas diferentes: afectividad, ausencia de sentido y obstáculo. Estos tres elementos a su vez se organizan en semiosis distintas: la afectividad en, emociones, actitudes y creencias; la ausencia de sentido en, semiótico, estructural y autónomo; y los obstáculos en, epistemológico, didáctico y cognitivo, que permiten hacer análisis más fino del error. Desde este análisis el error puede ser estudiado desde diferentes puntos de vista y es preciso diseñar actividades *ad hoc* para detectar la naturaleza del mismo.

El estudio de las dificultades y errores se puede hacer desde tres niveles diferentes que denominamos: producto, proceso y origen.

El estudio de los errores a nivel producto se realiza, en general, considerando la estructura superficial del objeto algebraico en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual.

El estudio de los errores a nivel proceso se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico en sus diferentes estadios de desarrollo. Para el estudio de los errores en la estructura profunda es necesario trabajar el objeto con al menos dos representaciones semióticas del mismo. En este caso, siguiendo la organización propuesta en el modelo de competencia cognitivo, es necesario el diseño de actividades que, proporcionen: reconocimiento o no de los elementos de un SRS, transformaciones internas en un SRS, conversiones (transformaciones externas) entre sistemas de representación semióticos, coordinación o no entre diferentes SRS y las producciones de representaciones semióticas por parte de los alumnos en la resolución de una tarea algebraica, elementos para entender qué construcción sobre un concepto dado ha realizado el estudiante, y que tipo de errores provienen de la estructura superficial o profunda del objeto. Los errores pueden ser analizados en el nivel proceso tanto en los estadios semiótico, estructural y autónomo, como de la perspectiva operacional, estructural o procesual.

El estudio de los errores a nivel origen se realiza, en general, considerando tanto la estructura superficial como profunda del objeto algebraico, en los estadios semiótico, estructural o autónomo como en los ámbitos de actuación del objeto: operacional, estructural y procesual. Su origen puede ser analizado en términos de ausencia de sentido, obstáculo y actitudes afectivas y emocionales (Socas, 1997).

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para responder a los objetivos de la investigación sobre dificultades y errores en el Lenguaje algebraico se elaboran diferentes instrumentos: diseños de instrucción, cuestionarios, protocolos entrevistas…(Palarea, 1998; Ruano y Socas, 2001; Socas, 2001).

Se utilizaron varios procedimientos para el análisis de la información. La clasificación de los errores, por ejemplo, la realizamos ayudándonos de esquemas de análisis en los que se refleja primero, el tipo de error cometido, segundo, los códigos de los alumnos, tercero, el ítem en el que han fallado y al final, el número total de errores de cada tipo. En algunas preguntas con respuestas abiertas, hemos empleado redes sistémicas para la recogida de la información utilizando los parámetros fijados por Bliss y otros (1987), con algunas modificaciones para ajustarlas a nuestro propósito. En concreto, en el lado derecho de la red, hemos incluido un recuadro con el número del alumno que ha recorrido cada itinerario (Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Fases de análisis

El procedimiento de análisis seguido, implica, en primer lugar, el análisis de cada individuo a partir del análisis de cada tarea del cuestionario y las entrevistas de un grupo reducido de alumnos. Estos análisis nos permiten un estudio global de todas las tareas escritas de los estudiantes participantes y de todas las tareas escritas y vídeograbadas de un grupo muy reducido de estudiantes. Este tipo de análisis nos permite, observar en tres direcciones, primera, en relación con el nivel de comprensión del estudiante en los aspectos operacional, estructural y procesual; segunda, facilitando una primera clasificación de los errores y permitiendo hacer ciertas conjeturas sobre el origen de los mismos; y tercera, analizar la consistencia o no del cuestionario en determinadas actividades, por ejemplo, distintas tareas, pueden situarnos a un alumno para un determinado contenido, en diferentes niveles de comprensión.

En resumen, en este primer análisis se tiene información da cada individuo y de la globalidad del grupo, a través especialmente, del contenido matemático en sus aspectos operacional, estructural y procesual y una clasificación de errores atendiendo al contenido matemático en la que se puede conjeturar ciertos orígenes.

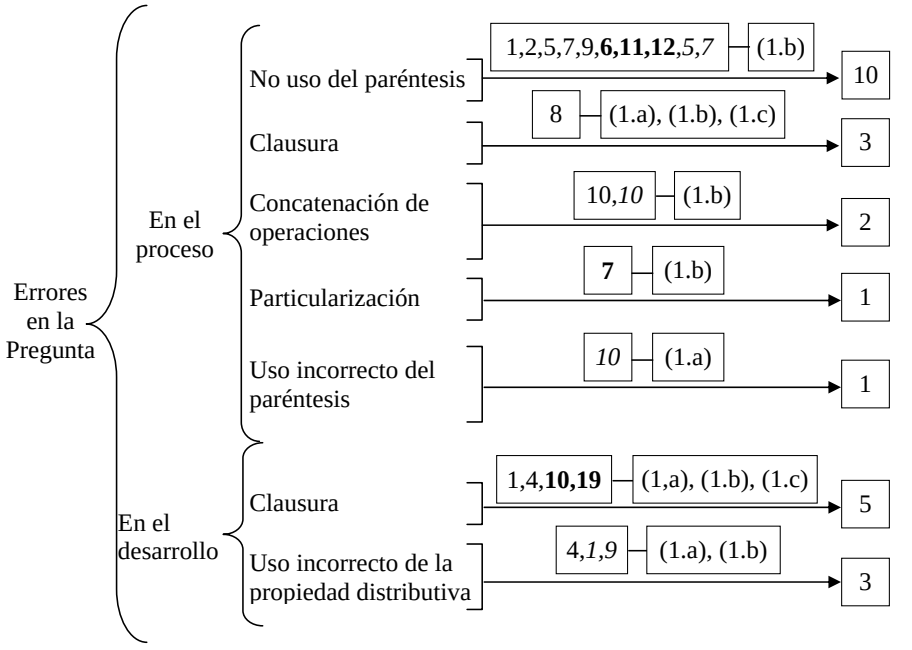
En una segunda fase se analiza a un grupo seleccionado de estudiantes y se observa cómo han resuelto todas las tareas seleccionadas del cuestionario para un determinado contenido y cómo las resuelve en situación de entrevista. Este análisis más fino de un grupo pequeño de individuos nos permite estudiar los niveles de comprensión semiótico, estructural y autónomo (Socas, 2001) y analizar el origen de los errores en términos de afectivos, ausencia de sentido u obstáculo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Mostramos en primer lugar el análisis de la fase 1 para un grupo de alumnos de Educación Secundaria que procedían de tres clases diferentes. Seleccionamos, para ello, una pregunta relacionada con un proceso de sustitución formal.

Realiza las siguientes transformaciones:
a) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?
b) Si $a = b + 3$, ¿en qué se transforma $5a + 3b$?
c) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3) \cdot (3 - a)$?

En primer lugar, se organizan los errores de esta pregunta, relativa a la sustitución formal, atendiendo a si se han producido en la sustitución (proceso) o en el desarrollo y simplificación de las expresiones, mirando la parte operacional y estructural implicada. Así, esquemáticamente, podemos organizarlos del siguiente modo:



En este esquema, los números que figuran en el interior del primer recuadro sobre la flecha representan el número asignado al alumno que ha cometido el error con distintos tipos de letra, normal, negrilla o cursiva según pertenezcan, respectivamente, a las clases 1, 2 ó 3. Unido a este rectángulo se encuentra otro en el que se indica el ítem que presenta el error y, por último, en el recuadro tras la flecha, se muestra el número total de errores cometidos de cada tipo.

Comenzamos con el análisis de los errores cometidos al realizar el proceso de sustitución formal. En general, los alumnos no parecen tener demasiados problemas al realizar las sustituciones, pues de las 120 respuestas dadas, sólo ha habido 17 incorrectas.

El mayor número de fallos se produjo en el ítem (1.b), y el error más frecuente es el de no usar paréntesis donde es necesario, o usarlo incorrectamente.

Otro tipo de error cometido está relacionado con la clausura de la operación: los alumnos no aceptan que una expresión no pueda cerrarse (no dé un número) y que quede, por ejemplo, *10·b+3*, ven la necesidad de completarla, de cerrarla y dan como resultado *13·b* (en este caso se trata de un error que se situará tanto en el proceso como en el desarrollo).

Otro tipo de error que se detecta es la concatenación, esto es, la yuxtaposición de dos o más símbolos.

La necesidad de particularizar, es también otro tipo de error que se da en el desarrollo de esta actividad, el alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en este contexto formal, no sabe cómo trabajar con letras, o éstas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder al lenguaje numérico, particularizando las expresiones.

Nos fijamos, ahora, en los errores producidos al realizar el desarrollo de las expresiones tras la sustitución formal y tomamos en consideración los aspectos operacionales y estructu-

rales. Observamos que el error más frecuente es el error estructural: la clausura. El resto de los errores está relacionado con el uso incorrecto de la propiedad distributiva, error que tiene una doble componente estructural y operacional.

El análisis de estos errores desde una perspectiva global nos sugiere diferentes conjeturas sobre el origen de los errores.

De esta manera pensamos que los errores relativos al uso del paréntesis: no usar paréntesis donde es necesario o usarlo mal, pueden tener su origen, o bien en una ausencia de sentido, o bien en un obstáculo. En el primer caso, el uso incorrecto del paréntesis es un tipo de error que se comete en Álgebra y que tiene que ver, en muchas ocasiones, con problemas de la Aritmética no superados. En el segundo caso, el origen estaría en un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñanza de los paréntesis (Socas, 2001).

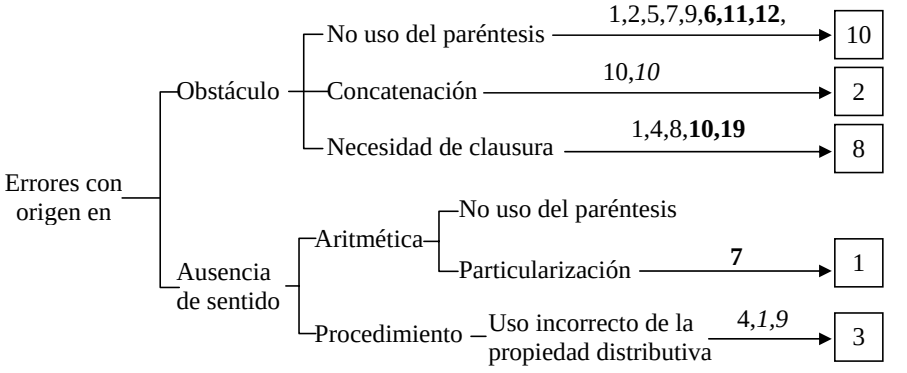
El error de clausura generalmente tiene su origen en un obstáculo cognitivo o bien en ausencia de sentido. Algunos alumnos que estudian álgebra ven las expresiones algebraicas como enunciados que a veces son incompletos, en algunos casos, el error tiene su origen en una falta de sentido de las operaciones con monomios.

En el caso de la concatenación, esto es, la yuxtaposición de dos o más símbolos, también suele tener su origen en un obstáculo cognitivo.

La necesidad de particularizar las expresiones algebraicas aparece como un error que pensamos que tiene su origen en una ausencia de sentido. El alumno no encuentra sentido al uso del lenguaje algebraico en determinados contextos, no sabe cómo trabajar con letras, ya que éstas no tienen significado para él, por lo que necesita retroceder al Lenguaje numérico, particularizando las expresiones.

Al uso incorrecto de la propiedad distributiva se le atribuye el origen a la ausencia del sentido y puede situarse en el ámbito estructural u operacional. Se trata de un error conceptual o de procedimiento en el que los alumnos usan inadecuadamente una propiedad conocida. El primero de ellos se ha producido por la extensión de la propiedad distributiva (que supone dos operaciones) de la multiplicación en relación con la adición, al caso de la multiplicación (una sola operación), así, $5\cdot(2\cdot b)+3=10+5\cdot b+3$. Es posible que este tipo de error esté motivado por la forma de enseñanza-aprendizaje de las propiedades de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Generalmente, se enseñan todas las propiedades juntas, sin hacer hincapié en cada una de ellas por separado y no se profundiza en la necesidad de la existencia de dos operaciones para que se pueda dar la distributividad, lo que puede llevar a mezclarlas. En este caso, es posible que se haya confundido la propiedad distributiva con la asociativa del producto, o bien porque se introducen propiedades como extensión de las ya conocidas, lo que también genera confusión si no se extrema el cuidado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se trataría en este caso de un error estructural. El segundo error está igualmente relacionado con la propiedad distributiva, los alumnos tratan de distribuir la multiplicación respecto a uno de los factores, en este caso el numérico. Posiblemente este tipo de error se produce por no reconocer las letras como uno de los sumandos para aplicar la propiedad distributiva, lo que implicaría un pensamiento numérico, se trataría de un error operacional/estructural.

En el esquema siguiente recogemos la clasificación de los errores cometidos por los alumnos en esta pregunta, atendiendo a los supuestos orígenes de los mismos.



Como se observa en el esquema, el grupo de investigación decidió situar únicamente al "no uso del paréntesis" en dos orígenes diferentes: obstáculo y ausencia de sentido (Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Es necesario profundizar en el análisis del origen del error a nivel individual, para ello se decidió pasar a la fase 2 del análisis y realizar entrevistas clínicas que nos darían más información acerca del proceso seguido por los alumnos al responder a las preguntas y que nos aportarían más datos sobre el origen de los errores.

En esta ocasión comentaremos los resultados de un alumno en el que detectamos el error del no uso o uso inadecuado del paréntesis, con la intención de analizar si podíamos determinar el origen del error.

Se trata de un alumno, identificado en la institución escolar, de nivel medio bajo y denominado (J) a efectos de esta experiencia didáctica.

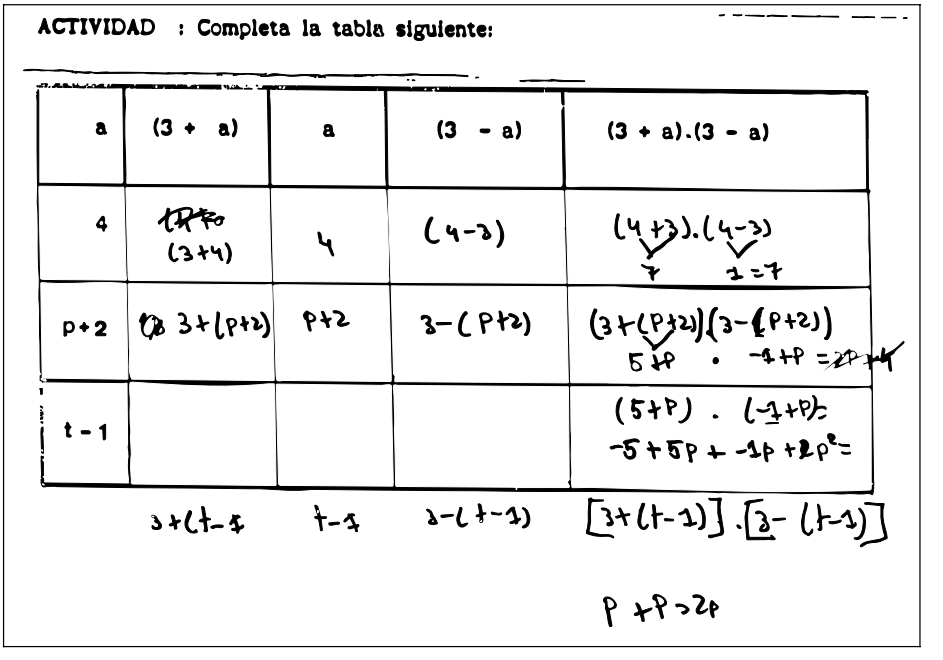
Hemos seleccionado dos cuestiones, la primera tiene que ver con el proceso de sustitución formal y la segunda con los aspectos operacionales aditivos y multiplicativos en los que intervienen o no los paréntesis.

Desde el punto de vista cognitivo: (J) es un alumno que reconoce tres sistemas de representación semióticos: R_F , R_G , R_E (formal, geométrico y esquema).

(J), es un alumno que situamos en la categoría 2B, es decir, en el nivel segundo del estadio estructural, sin embargo, no puede realizar transferencias a otro registro cuyos códigos conoce a nivel de la categoría 1B.

(J), se sitúa en 2B, al no manejar autónomamente los dos sistemas de representación semióticos (Socas, 2001).

Al alumno se le propone ahora una actividad de sustitución formal en la que tendrá que realizar cálculos con paréntesis.



Veamos parte del episodio vídeograbado del alumno resolviendo esta actividad:

…

A: (Continúa escribiendo, la actividad de la segunda fila del cuadro)

3 (y luego lo tacha)

3 + (p + 2)

p + 2

3 – (p + 2) (Duda un poco en la casilla siguiente de la derecha)

3 + (p + 2) 3 – (p + 2) (deja pequeño espacio).

E: Y esto que está aquí ¿qué es? (señalando 3 + (p + 2) – (p + 2)).

A: p + 2

E: ¿Multiplicando?

A: Sí.

E: Entonces, ¿Qué debes poner?

A: (El alumno escribe un punto entre 3 + (p + 2) y 3 – (p + 2) y entre (4 + 3) y (4 – 3) y entre (3 + a) y (3 – a) de los ejercicios anteriores).

E: Bien. Pero para que todo esto (señalando a 3 – (p + 2)) multiplique a todo esto (señalando a 3 + (p + 2)), ¿Qué debes poner?

A: ¿Para que esto (señalando a 3 – (p + 2)) multiplique a esto (señalando a 3 + (p + 2))?

E: Sí, ¿qué se suele utilizar para indicar que toda una expresión multiplica a toda otra expresión? ¿Poner paréntesis?

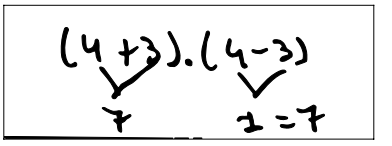
A: (El alumno va a colocar paréntesis tachando primero el paréntesis de p + 2).

E: No, fíjate ese está bien.

A: ¡Ah! ¡Ya! (El alumno coloca los paréntesis correctos (3 + (p + 2)) (3 – (p + 2)).

E: Muy bien. Ahora te voy a pedir que calcules este otro (señalando (4 + 3) y (4 – 3)). ¿Cuánto daría ese cálculo?

A: (El alumno escribe)



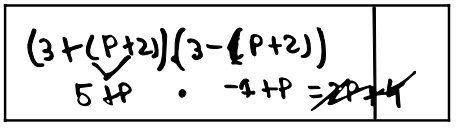
(y contesta) 7

E: Calcula el siguiente (señalando al de abajo).

A: (Escribe lentamente y dice) 2p + 4.

E: Fíjate si tienes estas dos expresiones (refiriéndose a (5 + p) y (-1 + p)) el signo de multiplicar, ¿cómo es que lo sumas? Me has dicho que es 2p + 4, pero ¿El signo de multiplicar que hace?

A: (Tacha 2p + 4).



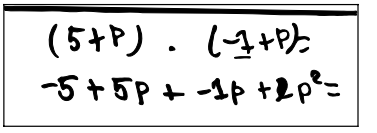
¿Lo hago aquí? (indicando a continuación de lo tachado).

E: Sí, debajo, en el espacio en blanco. Vuelve a repetirlo.

A: (Escribe) (5 + p) . (-1 + p) =

Luego 5

Luego 5+ p (Se queda pensando y escribe) 5 – p.



E: Bien, explícame lo que hiciste.

A: Multipliqué éste (señalando el 5) por éste (señalando el –1) y éste (señalando el 5) por éste (señalando el p).

E: ¿Y éste (señalando el p del primer paréntesis)?

A: ¡Ah! Sí. (El alumno añade) + -1p (y le queda) –5 + 5p + -1p.

E: Vamos a ver. ¿No te acuerdas de multiplicar? ¿Tienes dudas acerca de como hacer la multiplicación?

A: No me acuerdo.

E: Vale, no te preocupes seguro que la recordarás. Sigue, sigue...

A: (El alumno escribe) –5 + 5p + -1p + 2p =

E: ¿De dónde obtienes 2p?

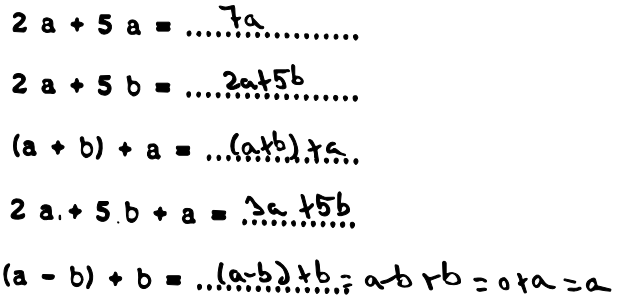
A: p por p.

…

(J) pone de manifiesto nuevamente que las dificultades para usar e interpretar los paréntesis continúan. Estas dificultades se ponen de manifiesto tanto en ambientes aditivos como multiplicativos en los aspectos estructurales y operacionales, no así en el aspecto procesual (sustitución formal). El equipo de investigación decide continuar la entrevista limitada al aspecto operacional.

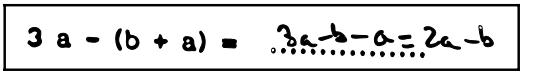
Se muestra, a continuación, parte de un episodio del comportamiento de (J) en la actividad 2 del protocolo de la segunda sesión (operaciones aditivas, con y sin paréntesis).

E: Ahora debes comenzar a realizar los ejercicios de la actividad 2 (señalando a la página del protocolo)
2a + 5a =
2a + 5b =
(a + b) +a =
2a + 5b + a =
(a – b) + b =
A: (El alumno comienza a efectuar los cálculos y da como resultado)



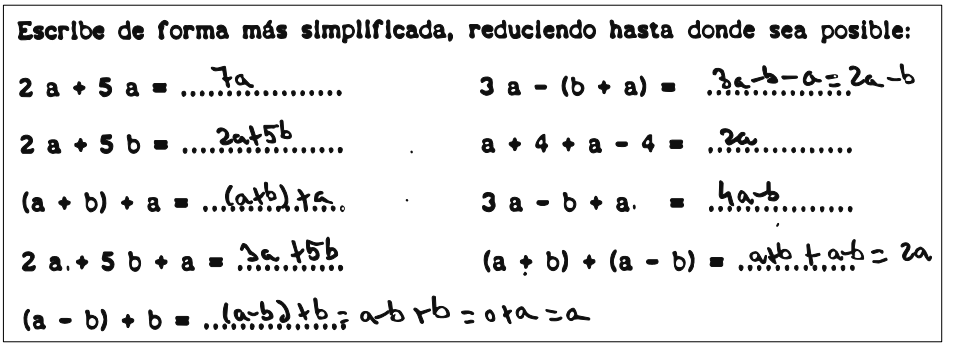
(Veamos la secuencia del proceso seguido por el alumno)
2a + 5a = 7a
2a + 5b = 2a + 5b
(a + b) +a =
(Duda y luego escribe) (a + b) + a
(Sigue efectuando)
2a + 5b + a = 3a + 5b
(a – b) + b = (a – b) + b (ahora no duda).
E: Bien. Éste (señalando (a + b) + a), ¿lo pusiste igual?
A: Sí, porque no puedo sumar a + b
E: Bien, y... ¿a + a? ¿No lo puedes hacer?
A: Sí, pero primero tendría que hacer el paréntesis, y como el paréntesis no se puede hacer ¿no?... ¿no?
E: Bien. Tú primero tendrías que hacer el paréntesis. El paréntesis en este caso no lo puedes hacer y lo dejas sin resolver. Por ejemplo, en esta actividad (señalando (a – b) + b), ¿se queda igual?
A: Sí.

E: ¿Tendrías que dejarlo igual?
A: Ja, ja.
E: (Continúa el profesor), pero un paréntesis, ¿se podría quitar, en algún caso?
A: No sé
E: Bueno, sigamos, calcula esta expresión (señalando 3a - (b + a) =)
A: Se queda igual también.
E: (El entrevistador decide facilitarle una regla para hacer los cálculos cuando intervienen paréntesis). "Si encuentras un paréntesis que tenga delante el signo menos, lo puedes quitar cambiando el signo de todo lo que está dentro", ¿De acuerdo? ¿Cómo quedaría el ejercicio anterior?
A: ¡Eh! (señalando 3a – (b + a)), contesta: 3a - b –a
E: Bien, escríbelo.
A: (El alumno escribe) 3a - b – a =
E: ¿Y eso a qué sería igual?
A: ¡Eh! 2a – b



E: Exactamente; ese tipo de paréntesis se puede quitar con esa regla y éste (señalando (a – b) + b), ¿qué signo tiene delante del paréntesis?
A: Más.
E: La nueva regla establece que se puede quitar, conservando el mismo signo que tienen las letras y los números de dentro del paréntesis.
A: ¿ a + b?
E: No, conservando el que tiene dentro del paréntesis, ¿b qué signo tiene delante?
A: Un menos.
E: Por lo tanto, ¿cómo quedaría?
A: a – b + b

El alumno termina y completa la actividad:



Al comienzo de la tercera sesión, al día siguiente, el entrevistador propone al dictado una actividad no prevista en los protocolos de la sesión 3.

E: Vamos a comenzar por esta actividad, dictando:

A: (Escribe)

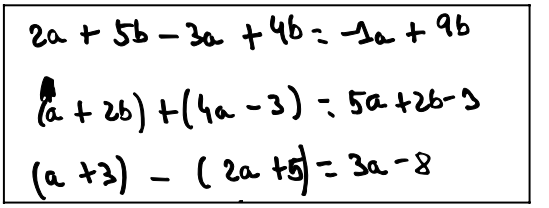
2 a + 5 b - 3 a + 4 b =

(a + 2b) + (4a - 3) =

(a + 3) – (2a + 5) =

(a + 3) . (4 + b) =

El alumno resuelve correctamente y da como respuestas a los dos primeros cálculos:



En el tercer cálculo el alumno entra de nuevo en una conflictividad que se agrava con la presencia de las expresiones multiplicativas.

…

E: Vamos ahora a calcular la tercera expresión algebraica.

A: (El alumno escribe) 3a (Duda y escribe) –8 (quedando (a + 3) – (2a + 5) = 3a – 8

E: Cuando tú ves un paréntesis, lo primero que tienes que hacer es resolver el paréntesis.

A: Sí.

E: Pero el paréntesis no lo puedes hacer (tapando –(2a + 5) de la expresión), yo creo que tú decides hacer los cálculos como si no existiera el paréntesis.

A: No sé. Lo veo muy lógico... porque si, lo único que hago es como si tuviera paréntesis, lo mismo que ahí no están, lo hago como si estuvieran. Hago el paréntesis normal.

(El entrevistador cambia la actividad y sitúa al alumno en una situación multiplicativa)

E: Si te digo, ahora que calcules (a + 3) por (4 + b)

A: (El alumno escribe lentamente)

7 · (a + b) (quedando) (a + 3) · (4 + b) = 7 · (a + b)

E: ¿Qué has hecho? ¿Cómo has encontrado el 7?

A: 4 + 3 ¡Ah!, pero es multiplicando.

E: Claro.

A: (Tacha el 7 y pone 28)

E: ¿De dónde sale el 28?

A: ¡Ah! digo ¡Ay! Es un 3... 12 (tacha el 28 y escribe 12).

…

DISCUSIÓN

En un primer momento, (J), es un alumno que identifica el paréntesis como un signo de acción que tiene prioridad en el cálculo. En las actividades aditivas en las que intervenían paréntesis y no las podía realizar las dejaba sin hacer, en algunos casos tenía tanta seguridad

que escribía o decía: “no se puede hacer” y en otras ocasiones su actitud se dirigía a dejar de lado los paréntesis y actuar como si no existieran.

En un segundo momento el entrevistador decide corregir este comportamiento y le facilita la regla de los paréntesis:

Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2 a + 5 a = ...7a..... 3 a – (b + a) = ...2a–b.....

2 a + 5 b = ...2a+5b.... a + 4 + a – 4 = ...

(a + b) + a = ...No se puede..... 3 a – b + a = ...

2 a + 5 b + a = ...3a+5b... (a + b) + (a – b) = ...

(a – b) + b = ...

E: Si encuentras un paréntesis que tenga delante el signo menos, lo puedes quitar cambiando el signo de todo lo que está dentro.

...

E: Exactamente; ese tipo de paréntesis se puede quitar con esa regla y éste (señalando (a – b) + b), ¿Qué signo tiene delante del paréntesis?

A: Más.

E: La nueva regla establece que se puede quitar, conservando el mismo signo que tienen las letras y los números de dentro del paréntesis.

El alumno termina y completa la actividad correctamente después de la información facilitada.

Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2 a + 5 a = ...7a..... 3 a – (b + a) = ...3a–b–a=2a–b

2 a + 5 b = ...2a+5b..... a + 4 + a – 4 = ...2a.....

(a + b) + a = ...(a+b)+a. 3 a – b + a. = ...4a–b.....

2 a + 5 b + a = 3a+5b (a + b) + (a – b) = ...a+b+a–b=2a

(a – b) + b = ...(a–b)+b= a–b+b=0+a=a

Al día siguiente al comienzo de la tercera sesión el entrevistador propone al alumno una actividad en la que tiene que considerar aspectos aditivos y multiplicativos con las expresiones:

2 a + 5 b - 3 a + 4 b =

(a + 2b) + (4a - 3) =

(a + 3) – (2a + 5) =

(a + 3) . (4 + b) =

Como observamos de las transcripciones el alumno resuelve los dos primeros cálculos y da respuestas correctas:

2 a + 5 b - 3 a + 4 b = -1 a +9 b

(a + 2b) + (4a - 3) = 5 a +2 b -1

Al trabajar con la tercera expresión comienzan de nuevo los problemas. El alumno escribe 3a, duda y escribe –8, dejando como definitivo (a+3) – (2a + 5) = 3a – 8.

Se observa que el alumno tiene dificultades para recuperar la regla de los paréntesis que utilizó el día anterior. Sabe que le están pidiendo que realice cálculos y opta por trabajar ignorando los paréntesis.

Cuando se le pide que calcule un producto la situación empeora; el alumno se queda sin recursos para recuperar la información que controlaba en las sesiones anteriores.

Este tipo de errores es identificado en el modelo de análisis que proponemos como un error que proviene de varias causas a la vez, es claramente un error que se origina por falta de significado por parte de (J), pero no es únicamente un problema de falta de significado. El entrevistador trata de dotar de significado procedimental a los cálculos aditivos en los que interviene el paréntesis, el alumno reacciona aparentemente con corrección, pero esta información no parece ser suficiente y lo que genera es una mayor conflictividad. (J) no sólo no recupera información para trabajar en el contexto aditivo sino que además los paréntesis que en el contexto multiplicativo no le presentaban dificultad y que controlaba en sesiones anteriores, ahora se vuelven problemáticos y (J) no encuentra enlaces cognitivos para recuperar la información como era el caso del “esquema” en situaciones multiplicativas.

En este caso además de la falta de significado (sentido) para el alumno, los errores tienen también su origen en un obstáculo didáctico, asociado al paréntesis como signo de acción que desarrolló en sus clases de Matemáticas cuando el año anterior trabajó los paréntesis en el contexto de los números enteros.

CONCLUSIONES

Este marco teórico que estamos construyendo para la investigación desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), vía la elaboración de modelos de competencia (en este caso modelo de competencia formal y modelo de competencia cognitivo) se muestra como una alternativa plausible para entender y actuar en los fenómenos y situaciones problemáticas que se dan en el microsistema educativo en relación con la construcción del conocimiento algebraico, en este ejemplo dificultades y errores.

Se debe distinguir entre la competencia del Modelo, descrita en Socas (2001), y la competencia del alumno, en este último caso entendida desde la perspectiva semiótica como la articulación coherente de diferentes registros de representación de un objeto algebraico, en los aspectos operacional, estructural y procesual. En este sentido se considera que los objetos del álgebra pueden ser representados bajo diferentes registros semióticos, aceptando que las operaciones de cambio entre ellos constituye una operación cognitiva básica, que permite analizar las dificultades, y errores conceptuales y de procedimiento, en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. Es en este desarrollo en el

que entendemos la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.

En este sentido, el modelo desarrollado permite profundizar en las dificultades y obstáculos que tienen los alumnos en el aprendizaje del lenguaje algebraico y posibilita nuevas maneras de enfocar el estudio de los errores, especialmente desde dos perspectivas:

–Los errores que tienen su origen en un obstáculo.

–Los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; a esta última, se le asigna dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

En los estudios sobre dificultades y errores (Rico, 1995; Socas, 1997), los diferentes resultados ponen de manifiesto, que los errores que cometen los alumnos no se deben al azar, sin embargo, existen dos carencias básicas en estas investigaciones: los resultados no ofrecen una perspectiva de generalidad y los resultados no determinan el origen de los errores ni a nivel general ni a nivel individual.

En el primer caso, observamos que cuando el error se mira a niveles más profundos, es decir, se considera no sólo la estructura superficial del objeto sino también la estructura profunda, esta falta de generalidad podría evitarse, ya que si se mira en los niveles de representación más profundos, en los que evoluciona un sistemas de significados que controlan las realizaciones superficiales, cuando se detectan principios erróneos, en este nivel profundo, es posible explicar no sólo un caso, sino toda una clase de errores.

En el segundo caso, vienen a colación las afirmaciones de Freudhental en el año 1981, que aún hoy son válidas:

> "Diagnóstico y remedio son términos de la medicina adoptados por los educadores que pretenden emular a los doctores en medicina. Lo que emulan es la medicina del pasado, la de los cuáqueros de la actualidad. La diagnosis médica estaba orientada a identificar lo que estaba dañado como lo hacen los llamados exámenes de diagnóstico en educación, la verdadera diagnosis indica porqué algo se dañó. La única forma de determinar esto consiste en la observación de los errores de un niño tratando de entenderlos".

Se está intentando para el estudio de lo errores construir marcos teóricos generales desde los que tratarlos sistemáticamente. Parece más acertado establecer marcos teóricos locales relativos a un contenido temático curricular y determinar no sólo una clasificación sino una explicación de su origen, al menos a nivel individual.

En este sentido, el modelo desarrollado desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) permite profundizar en las dificultades y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje del lenguaje algebraico y posibilita nuevas maneras de enfocar el estudio de los errores que cometen los alumnos. En este caso el estudio:

-Utiliza al menos dos registro de representación del objeto lo que permite estudiar la estructura superficial y profunda del mismo.

-Analiza el error en los estadios de desarrollo del signo: semiótico, estructural y autónomo.

-Toma en consideración el binomio conceptual/procedimental del objeto en su triple perspectiva: operacional, estructural y procesual.

En nuestras investigaciones hemos encontrado también que en general los errores dependen de los contenidos de las tareas presentadas y de los procesos del Lenguaje algebraico que queramos tratar, si embargo, hay algunos que se han repetido independientemente del proceso (sustitución formal, generalización y modelización) desarrollado: la clausura, la particularización, el uso incorrecto del paréntesis…, lo que le confieren un carácter de mayor generalidad, pero esto no resta importancia a la necesidad de prestar especial atención al origen individual de los mismos.

Es el caso del alumno (J) el origen del error sobre el uso incorrecto del paréntesis estaría en un obstáculo didáctico relacionado con la forma de enseñar el uso de los paréntesis en el estudio de los números enteros. Al enseñar la resolución de expresiones con operaciones combinadas de números enteros se suele seguir dos estrategias. En la primera, los cálculos se efectúan de "dentro hacia fuera", los paréntesis tienen preferencia y se resuelven en primer lugar, luego el corchete y finalmente, la llave. Esto para algunos alumnos supone que cuando se pasa a realizar operaciones en las que intervienen números y letras, los alumnos sigan el mismo procedimiento, lo que produce errores bien porque se bloquean al no poder resolver paréntesis del tipo,*-(a-2b)+b*, o bien, porque omiten el paréntesis y actúan como si no estuviera. La segunda estrategia consiste en resolver expresiones de "fuera hacia dentro", lo que probablemente evitaría para el caso del Álgebra, que se produjeran errores del tipo anterior.

Es en esta dirección del estudio de las dificultades y errores en la que debemos seguir avanzando para identificarlos en su origen y tratar de corregirlos con garantías en el ámbito que proceda.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1989). Epistémologie et Didactique. *Cahier de Didirem.* Université. París VII.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico. México: Siglo Veintiuno).

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias, 4(3),* 199-208.

Bliss, J.; Monk, M.; Ogborn, J. (1987). *Qualitative Data Analysis For Educational Research.* USA: Croom Helm.

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors.* Windsor: NFER- Nelson.

Borassi, R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics, 7,* 2-9.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2),* 165-198.

Brousseau, G.; Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, A.G.; Otte, M. (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer.

Brueckner, L. y Bond, G. (1984). *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*.Madrid: Rialp.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*. 15 (3), 361-371.

De Vega, M. (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Alianza. Madrid.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7,* 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang. Suisse.

Freudenthal, H. (1981). The Mayors problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 6-15.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer.

García, J.N. (Coord.) (1999). *Intervención psicopedagógica en los trastornos del desarrollo.* Madrid: Pirámide.

Goldin, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations. En Hirabayashi, Ichiei *(Ed.) Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1.

González, E. (Coord.) (2003). *Necesidades educativas específicas. Intervención psicoeducativa.* Madrid: CCS.

Hernández, J.; Noda, A.; Palarea, M.ª M.; Socas, M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 159-188.

Herscovics, N. (1989) Cognitive Obstacles Encounteres in the Learning of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19 (3)*, 333-335.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan y N.C.T.M.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, N.J. Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. En Janvier, C. (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencia*s, *7 (3)*, 229-240.

McLeod, D.B. y Adams, V.M. (Eds.) (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective.* New Cork: Springer-Verlag.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 3, 1,* 93-166.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En Greer, B. y Mulhern, G. (Eds.). *New Directions in Mathematics Education.* Londres: Routledge.

Paivio, A. (1978). Mental comparisons involving abstract attributes. *Memory and cognition, 6*, pp. 199-208.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Radatz, H. (1979). Errors Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 163-172.

Radatz, H. (1980). Students´ Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 1-20.

Resnick, L. B. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós y MEC. (Del inglés: *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1981).

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). "Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4º de ESO". En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*, pp. 239-265.CAMPUS. La Laguna.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 311-322.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1),* 1-36.

Sierpinska A: (1985) *La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques.* Comptes-rendus de la 37e rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M. (Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur), Leiden, 73-95.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Morata.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap.V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. ; Camacho, M.; Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1989). Preservice Elementary Teachers´ Explicit Beliefs about Multiplication and Division. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 79-96.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press (versión castellana: *Pensamiento y Lenguaje.* Buenos Aires: Fausto, 1992).

LA INTEGRACIÓN DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA[1]

Marta Molina
martamg@ugr.es
Universidad de Granada

RESUMEN

Se describe una propuesta curricular basada en la integración de modos de pensamiento algebraicos en el currículo de la Educación Primaria, la cual está siendo objeto de numerosas investigaciones en la actualidad. En este contexto, partiendo del constructo Pensamiento Relacional, se presentan resultados de un experimento de enseñanza, basado en el trabajo con sentencias numéricas, que ejemplifica el potencial de dicha propuesta y permite evidenciar la capacidad de alumnos de tercer curso de Educación Primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

ABSTRACT

We describe a curricular proposal, based on the integration of algebraic ways of thinking in the elementary curriculum, which is currently aim of numerous research studies. In this context and by using the construct Relational Thinking, we present some results from a teaching experiment based on working with number sentences. It exemplifies the potential of this proposal and allows us to evidence third grade students´ capacity to work algebraically in arithmetic.

1 La investigación que aquí se presenta ha sido desarrollada dentro del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de I + D + I, como parte de una tesis doctoral (Molina, 2007) dirigida por la Dra. Encarnación Castro y el Dr. Enrique Castro. Este trabajo se realiza dentro del proyecto "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en Educación Matemática" (SEJ2006-09056) financiado por el Plan Nacional de I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Económica Europea.

En las últimas dos décadas se han realizado, a nivel internacional, numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la Educación Primaria. Esta propuesta curricular, conocida con el nombre de Early-Algebra (EA), plantea la introducción de modos de pensamiento algebraicos, en la matemática escolar, desde los primeros cursos escolares (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000). En términos de Kaput (2000), la propuesta consiste en la "algebrización del currículo".

Se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas. Para ello, se recomienda un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2005).

Esta propuesta persigue fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial, facilitar el aprendizaje del álgebra. Se considera que diferentes modos de pensamiento algebraicos pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de la Educación Primaria y tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética. Estos modos de pensamiento pueden favorecer, en los alumnos, el desarrollo conceptual de matemáticas más profundas y complejas, desde edades muy tempranas (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 1998). En particular, se considera que unas matemáticas elementales "algebrizadas" darán poder a los alumnos, promoviendo un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentando su capacidad de expresar generalidad.

La propuesta Early-Algebra es diferente de lo que se denomina pre-álgebra. Ambos son enfoques relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza formal del álgebra. Entre sus diferencias destacamos su finalidad. La pre-álgebra persigue suavizar la abrupta transición de la aritmética al álgebra y, de este modo, mitigar las dificultades que típicamente encuentran los alumnos en el aprendizaje del álgebra, supuestamente debidas a la diferente naturaleza de ambas sub-áreas. En cambio, la EA tiene unos objetivos más amplios, como ya se ha detallado, y considera que las dificultades que manifiestan los alumnos en el aprendizaje del álgebra son debidas principalmente al modo en que las matemáticas elementales son introducidas y trabajadas. Otra diferencia radica en que la pre-álgebra no cuestiona la idea de que la enseñanza del álgebra comience en la Educación Secundaria (Carraher y Schliemann, 2007).

VISIÓN DEL ÁLGEBRA EN LA PROPUESTA EARLY-ALGEBRA

La EA va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara–Roth et al., 2003).

Esta amplia visión del álgebra no es nueva en el panorama investigador. Usiskin (1988), Bednarz, Kieran y Lee (1996) y Drijvers y Hendrikus (2003) son algunos de los autores que han prestado atención a la multidimensionalidad del álgebra. La identificación de componentes o concepciones del álgebra ha sido utilizada para proponer diferentes enfoques en la introducción y enseñanza del álgebra escolar, como la resolución de clases específicas de problemas, el estudio de estructuras algebraicas, las reglas para la transformación y resolución de ecuaciones, la generalización de leyes de los conjuntos numéricos o la introducción del concepto de variable y de función (Bednarz et al., 1996).

Los estándares del NCTM (2000) comparten esta visión multidimensional al distinguir como componentes del estándar de álgebra la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

Conexión entre la aritmética y el álgebra

La mayoría de las investigaciones realizadas en relación con la EA se centran en la aritmética como acceso clave al álgebra (Warren, 2003) como consecuencia de la intensa relación existente entre ambas. Sobre esta conexión dual, destacamos dos perspectivas compatibles con la EA.

Drijvers y Hendrikus (2003) argumentan que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, mientras que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Gómez (1995) señala que el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis.

Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005) presentan una perspectiva diferente. Según estos autores, el álgebra o el pensamiento algebraico subyace a la aritmética: "*la aritmética necesita del pensamiento algebraico"* (Mason et al., 2005, p. 59), "*la aritmética es imposible sin álgebra*" (Hewitt, 1998, p. 19). La razón de estas afirmaciones es que la aritmética consiste en el aprendizaje de métodos (generalidades) para hacer cálculos aritméticos. Dicho aprendizaje implica que los alumnos interioricen generalidades que se encuentran implícitas, relativas a la estructura de la aritmética. Desde esta perspectiva, la aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado (Hewitt, 1998). De este modo, por ejemplo, ser capaz de contar requiere trabajar algebraicamente ya que es necesario tener una forma, estructurada y organizada, de contar.

ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE LA PROPUESTA EARLY-ALGEBRA

Los trabajos en los que se describe y defiende la EA permiten identificar varias de las razones que motivaron su origen (Blanton y Kaput, 2005; Freiman y Lee, 2004; Kaput, 1998, 2000; Lins y Kaput, 2004). Por una parte, la insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales propios de esta sub-área de las matemáticas y la preocupación por hacer su estudio accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar formas más efectivas de abordar su enseñanza. Por otra, el reconocimiento, reciente, de que los niños desde muy jóvenes pueden hacer mucho más de lo que se les suponía previamente ha llevado a proponer, para las aulas de Educación Primaria, una actividad matemática que implique modos de pensamiento más elevados. Adicionalmente, ha influido la constatación de que los niños necesitan de un periodo prolongado de tiempo para desarrollar los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar.

En general, hasta principios de los 90, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra estaba centrada en lo que los alumnos no podían hacer, más que en explorar lo que eran capaces de hacer y su potencial de desarrollo. La mayoría de las investigaciones realizadas durante la década de los 80 y 90 estuvo dedicada a producir sistemas de etapas de desarrollo o a elaborar catálogos de errores cometidos por los alumnos. Estos trabajos contribuyeron, en general, a la asunción de que es mejor posponer el estudio del álgebra para los últimos cursos escolares (Lins y Kaput, 2004).

A principios de los noventa algunas investigaciones comenzaron a mostrar una perspectiva significativamente diferente: (a) al reportar cambios en la concepción de la educación algebraica y del pensamiento algebraico, (b) al sugerir que los alumnos jóvenes pueden hacer más matemáticas de las que se pensaba en un principio, en especial cuando se les provee de experiencias y enseñanza adecuada, y (c) al incorporar las nuevas tecnologías a la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Lins y Kaput, 2004). En esta época se defiende y se hace manifiesta la consideración de que los alumnos llegan al colegio con capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar generalidad, y que el desarrollo del razonamiento algebraico es, en gran parte, cuestión de explotar estas capacidades naturales de los alumnos (Mason, 1996).

En décadas anteriores, algunos estudios (Davydov, 1962; Freudenthal, 1974) abordaron la enseñanza del álgebra en los primeros cursos de la Educación Primaria siguiendo la asunción teórica propia de la Escuela Soviética de que el aprendizaje precede al desarrollo. En la década de los ochenta, Davis (1985) y Vergnaud (1988) argumentaron la necesidad de iniciar, en la Educación Primaria, una enseñanza del álgebra que prepare a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra. Esta propuesta no se refería al álgebra formal propia de los últimos cursos de Educación Secundaria, sino *"a una pensada exploración de ideas algebraicas"* (Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006, p.196). Investigaciones realizadas en los 70 y 80 habían ayudado a observar que el álgebra podía proveer a los alumnos con muchas oportunidades para la resolución de problemas y para el desarrollo de creatividad, originalidad y una comprensión profunda de las matemáticas (Davis, 1985).

En la actualidad va en aumento el número de educadores matemáticos e investigadores que consideran que el álgebra debería ser parte del currículo propio de la Educación Primaria (Carraher et al., 2006), rompiendo así con la consideración de que el álgebra está fuera del alcance de las capacidades cognitivas de los alumnos jóvenes.

La observación, en el aprendizaje del álgebra, de dificultades como la limitada interpretación del signo igual, los concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema y la no aceptación de la falta de clausura, han sido atribuidas previamente a la inherente abstracción del álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los alumnos (Schliemann et al. 2003). En cambio, otros investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Brizuela y Schliemann, 2003; Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2006; Fujii, 2003; Kaput, 2000) sugieren que las dificultades de los alumnos con el álgebra pueden ser debidas al tipo de enseñanza recibida. Estudios empíricos recientes, en línea con la EA, apoyan esta última afirmación, al menos en relación a ciertos contenidos y modos de pensamiento algebraicos, dando muestras de la capacidad de alumnos de Educación Primaria de aprender y comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos.

Concretamente se han aportado evidencias de que estos alumnos pueden elaborar y simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter et al., 2003), pensar sobre operaciones aritméticas como funciones, en vez de como cálculos con números particulares (Schliemann et al, 2003), trabajar con relaciones funcionales y usar notación algebraica para representarlas (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000), usar representaciones algebraicas, como gráficos, tablas y ecuaciones para resolver problemas (Brizuela y Schliemann, 2003), y representar y analizar problemas en los que hay involucradas cantidades desconocidas en ambos miembros de una igualdad, utilizando, en ocasiones, letras para representar dichas cantidades (Brizuela y Schliemann, 2003), por citar algunos ejemplos.

Estos estudios han analizado la factibilidad y potencialidad de la introducción temprana de algunas ideas algebraicas, mostrando, en particular, que *"cuando la enseñanza está fundamentada en las ideas matemáticas de los alumnos y en promover su curiosidad matemática, los niños tienden a exhibir maneras de pensar algebraicas en el contexto de lecciones de aritmética, geometría o medida"* (Bastable y Schifter, 2007, p. 2).

El NCTM también ha mostrado apoyo a la EA adelantando la edad en la que recomienda la introducción del álgebra en el currículo escolar y ampliando su concepción del álgebra. En la primera versión de los Estándares (NCTM, 1989) se recomendaba introducir el álgebra, como generalización de la aritmética, en los dos últimos cursos de Educación Primaria y dos primeros de Educación Secundaria. Posteriormente, en la última edición de los Estándares del NCTM, se recomienda que el desarrollo de pensamiento algebraico sea abordado desde la Educación Infantil en adelante, para ayudar a los alumnos a *"construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior"* (N.C.T.M., 2000, p. 37).

INVESTIGACIONES RECIENTES

Debido a la cada vez mayor difusión de la EA, se han realizado recientemente una gran diversidad de estudios empíricos que exploran este enfoque. Estos trabajos ponen de manifiesto dos perspectivas en línea con esta propuesta. Algunos autores consideran que se debe promover el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños. Otros, en cambio, opinan que los cambios en la forma de pensar de los niños son promovidos, de mejor modo, mediante el uso de herramientas, como notaciones o diagramas, que les permitan operar en un nivel más elevado de generalidad (Lins y Kaput, 2004).

Otros aspectos en los que se detectan discordancias entre unos autores y otros es qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas, qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico y qué enfoques pedagógicos y tipo de formación de profesores deben promoverse (Carraher y Schliemann, 2007).

Desde una u otra perspectiva, en la última década se ha explorado, entre otros aspectos, la viabilidad de esta propuesta, sus diferentes dimensiones, su interpretación y puesta en práctica por docentes, y las capacidades y modos de pensamiento algebraicos que ponen de manifiesto los alumnos de Educación Primaria (Bastable y Schifter, 2007; Blanton y Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2001; Sutherland, 2007). Estos autores, reconociendo el potencial de la EA, señalan la necesidad de:

a) explorar la puesta en práctica de esta propuesta y analizar el desarrollo de pensamiento y razonamiento algebraico por alumnos de Educación Primaria,
b) identificar qué contenidos algebraicos pueden y deben ser presentados, promovidos y enfatizados en el aula de Educación Primaria y cómo pueden ser integrados en la enseñanza y aprendizaje de otras sub-áreas de las matemáticas,
c) analizar qué herramientas (diagramas, notaciones, gráficos) pueden conducir con éxito, a los alumnos, a desarrollar modos algebraicos de pensar, así como,
d) estudiar la implicación de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores (Lins y Kaput, 2004).

Early-Algebra y aritmética

Un gran número de investigaciones realizadas en relación con la EA se centran en el contexto de la aritmética (Carraher et al., 2000, Carraher et al., 2006; Kaput, 2000; Subrama-

niam, 2004; Warren, 2004). Estos autores, siendo conscientes de que la separación del álgebra y la aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos, proponen trabajar con actividades que faciliten la transición e integración de ambas, mediante un enfoque estructural que rompa con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares y que favorezca el desarrollo de modos de pensamiento algebraicos. El objetivo es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético; enfoque que conduce a una enseñanza de la aritmética más atractiva y promueve un aprendizaje con comprensión.

Concretamente, desde el contexto de la Aritmética, se ha abordado la introducción del concepto de variable previamente a la introducción del simbolismo algebraico (Carpenter et al., 2003; Fujii, 2003), el proceso de generalización y la prueba y justificación de conjeturas (Carpenter y Franke, 2001), el estudio de relaciones funcionales (Brizuela y Lara-Roth, 2001), el desarrollo y uso de conocimiento estructural de la aritmética (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005; Warren, 2001), la comprensión del signo igual (Freiman y Lee, 2004; Koehler 2002; Molina y Ambrose, en prensa; Molina, Castro y Ambrose, 2006; Sáenz–Ludlow y Walgamuth, 1998) y el uso de simbolismo algebraico para representar funciones o propiedades (Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2001), entre otras cuestiones.

PENSAMIENTO RELACIONAL EN LA RESOLUCIÓN DE IGUALDADES Y SENTENCIAS NUMÉRICAS

Nuestro interés en la EA se concreta en el análisis del uso de pensamiento relacional por parte de los alumnos. Este tipo de pensamiento, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas (algebraicas), consiste en la actividad intelectual de examinar expresiones aritméticas (algebraicas), considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados (Molina, 2006).

Este constructo es semejante a lo que Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) denominan meta-estrategias conceptuales, en contraposición con las meta-estrategias procedimentales. Estas últimas se basan en la aplicación de ciertos procedimientos estándares aprendidos, tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el pensamiento relacional y las meta-estrategias conceptuales hacen referencia a modos flexibles de abordar una situación matemática centrando la atención en las relaciones y elementos clave que la definen para construir la estrategia de resolución, y dejando a un lado la aplicación de métodos estándares. En ambos casos el pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se persigue abordar, siendo un aspecto destacado su consideración como totalidad.

Carácter algebraico

El uso de pensamiento relacional, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, comprende (o puede comprender) varios aspectos que evidencian su carácter algebraico:

- La consideración de expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural, promoviendo un enfoque no computacional de la aritmética al alejar la atención del valor numérico de las expresiones, es decir, de la obtención del resultado de las operaciones expresadas.
- La concepción de las expresiones como totalidades, susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas y transformadas, y, por tanto, la aceptación de la falta de clausura.

- El favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional, facilitando el avance hacia la concepción de las operaciones y expresiones aritméticas como objetos, y no sólo como procesos.
- La potenciación de la exploración, identificación y descripción de patrones y relaciones sobre los números y operaciones, primeros pasos en el proceso de su generalización.
- El uso del lenguaje horizontal, tradicionalmente más propio del álgebra que de la aritmética.
- El favorecer la exploración de la igualdad como la representación de una relación estática entre dos expresiones así como la interpretación bidireccional de las igualdades y sentencias.
- La potenciación de un enfoque aplicable a la resolución de ecuaciones, en el contexto de la resolución de igualdades numéricas abiertas. En el álgebra, los alumnos deben manejar expresiones en las que aparecen operaciones que no son posible realizar (Ej. $3x+7y-4z$). Tienen, por tanto, que pensar en relaciones entre expresiones, por ejemplo, para averiguar el modo en que las ecuaciones pueden ser transformadas para resolverlas o en que las expresiones algebraicas pueden ser comparadas. A este respecto, conjeturamos que el pensamiento relacional puede ayudar a los alumnos a desarrollar métodos propios, personales y flexibles, para la resolución de ecuaciones. Algo que suele trabajarse en el aprendizaje de la aritmética pero no en el aprendizaje del álgebra.

Importancia del pensamiento relacional en el aprendizaje de la aritmética y el álgebra

En la Aritmética, el trabajo centrado en el uso y desarrollo de pensamiento relacional persigue que el alumno desarrolle su comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal y de las operaciones aritméticas, antes de que sea necesario trabajar con variables e incógnitas, y que se trabajen de manera explícita las relaciones que subyacen a la aritmética, las cuales no son habitualmente articuladas en el aula.

Las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional representan un cambio fundamental de un foco aritmético (procedimental, centrado en el cálculo de respuestas) a un foco algebraico (estructural, centrado en examinar relaciones). El uso de pensamiento relacional ayuda a minimizar el cálculo de operaciones y hace que los alumnos piensen sobre las propiedades de las operaciones, la manipulación de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación afecta a las expresiones, favoreciendo un aprendizaje significativo de la aritmética (al enfatizar su consideración como un sistema matemático organizado según ciertos principios), el desarrollo de fluidez en el cálculo y la adquisición de una buena base para el estudio formal del álgebra (Carpenter et al., 2003; Molina, 2006).

Promover el uso de pensamiento relacional en el trabajo con expresiones aritméticas facilita la integración eficaz de las relaciones y propiedades aritméticas en la actividad matemática y que el conocimiento y capacidades que los alumnos desarrollan durante la Educación Primaria estén mejor alineados con los conceptos y capacidades que son necesarios en el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2005).

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Guiados por la EA y centrados en analizar, entre otros aspectos, el uso de pensamiento relacional puesto de manifiesto por los alumnos, hemos realizado un experimento de enseñanza con un grupo de 26 alumnos de tercero de Educación Primaria. Este estudio se enmarca dentro del paradigma de la investigación de diseño. La metodología utilizada se detalla en Molina (2006). En este apartado describimos brevemente este estudio con la intención de

ejemplificar la EA y dar muestras de la capacidad de los alumnos de primaria de utilizar pensamiento algebraico en contextos aritméticos.

El contexto elegido para analizar el uso de pensamiento relacional de los alumnos ha sido la resolución de sentencias numéricas, de suma y resta, basadas en propiedades aritméticas básicas. Con el término sentencia numérica nos referirnos a expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen una proposición o enunciado declarativo. Estos enunciados puedes ser verdaderos o falsos. Por ejemplo, son sentencias las siguientes expresiones 5+7=9 y e^{Π}=1. Ocurre que toda sentencia verdadera es una igualdad (por definición las igualdades son siempre verdaderas).

Concretamente, se consideraron sentencias verdaderas y falsas basadas en las siguientes propiedades de la estructura aditiva: conmutativa de la suma (Ej., 75+23=23+75), complementaria de la suma y la resta (Ej., 100+94-94=100), composición/descomposición (Ej., 24--15=24-10-5), compensación (Ej., 53+41=54+40), magnitud (Ej.,7+3=10+3), elemento neutro de la suma (Ej., 0+325=326), elemento neutro de la resta por la derecha (Ej.,125-0=125) y elemento opuesto (Ej.,24-24=0). También se les propuso algunas sentencias basadas en la propiedad reflexiva de la igualdad (Ej., 93 = 93, 5 + 5 = 5 + 5).

El trabajo en el aula, durante seis sesiones repartidas en el periodo de un año, consistió en la discusión de las respuestas de los alumnos y la potenciación del uso de multiplicidad de estrategias, especialmente aquellas que hacen uso de pensamiento relacional. Inicialmente nuestro estudio del uso de pensamiento relacional fue observacional, siendo a partir de la tercera sesión cuando favorecimos su uso y manifestación, preguntando a los alumnos por formas de resolver las sentencias sin realizar las operaciones y mostrando especial apreciación por aquellas explicaciones que lo ponían de manifiesto. No se promovió el aprendizaje de estrategias concretas basadas en el uso de pensamiento relacional, sino la comprensión de las sentencias como totalidades, que expresan una relación entre dos expresiones, y el desarrollo del hábito de observarlas en su totalidad y buscar relaciones entre los términos y expresiones que contienen. Tratamos de ayudar a los alumnos a hacer explícito y a aplicar su conocimiento sobre las propiedades estructurales de la aritmética, que poseían de su experiencia aritmética previa.

A continuación, presentamos parte del análisis del uso de pensamiento relacional evidenciado por los alumnos, realizado a partir de la identificación de las estrategias utilizadas en la resolución de las sentencias propuestas. Este estudio se realiza de forma más completa y detallada en Molina (2006).

ESTRATEGIAS

En la tabla 1 se presenta una muestra de las explicaciones dadas por los alumnos a la resolución de algunas de las sentencias planteadas. Estas explicaciones, procedentes de extractos de las discusiones realizadas en el aula o de las hojas de trabajo de los alumnos, permiten apreciar la diversidad de estrategias puestas de manifiesto.

Sentencia	Explicación
13+11 = 12+12	**“**Doce más doce me dan veinticuatro y trece más once me dan veinticuatro”.
17-12 = 16-11	“Verdadera porque he hecho una cuenta y otra cuenta y me ha salido lo mismo” (Aparte calcula mediante el algoritmo de la resta 17 – 12 = 05 y 16 – 11 – 05 = 05).

Sentencia	Explicación
19-3 = 18-2	"Es que como dos es menor que tres… [I: Sí]... Pues es más fácil restarlo, entonces he restado dieciocho menos dos, que es más fácil, y dan dieciséis, y el otro diecinueve menos tres dan dieciséis".
257-34 = 257-30-4	"Falsa, porque en vez de restarle 34 le restan 30 y el cuatro va aparte" (Aparte realiza, mediante el algoritmo de la resta, las siguientes operaciones: 257-34=1223, 257-30=227 y 227-4=223).
122+35-35 = 122	"Verdadera, porque como si te pones vida y te la quitas y da lo mismo". (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma 122 + 35 = 157).
75+23 = 23+75	"Es verdadera setenta y cinto más veintitrés dan noventa y nueve y veintitrés más setenta y cinco es el mismo resultado".
53+41 = 54+40	"Verdadera, porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40 [y] te da lo mismo". (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma el valor numérico de ambos miembros).
51+51 = 50+52	"Es que como cincuenta y uno más cincuenta y uno son ciento dos, pero cincuenta y uno, si le quitas [uno], cincuenta, le puedes sumar a cincuenta y uno del otro, uno más, y te da cincuenta y dos".
7+7+9 = 14+9	"He sumado siete más siete, que dan catorce, y más nueve que dan veintitrés. Y después, he visto que son catorce más nueve y son veintitrés".
7+15 = 8+15	"Falsa, porque no te sale lo mismo y aparte que siete es más pequeño" (Aparte calcula mediante el algoritmo de la suma el valor numérico de ambos miembros).
11-6 = 10-5	"Porque... si once es mayor que diez y le quitas uno más que cinco, te sale igual".
125-0 = 125	"Yo he pensado que, si quitas el cero, como el cero no es nada, pues te quedan los dos ciento veinticinco. Ciento veinticinco igual a ciento veinticinco".
325+0 = 326	**"**Que es falsa. […] Porque trescientos veinticinco más cero son trescientos veinticinco, y trescientos veintiséis no es nada…".

Tabla 1: Explicaciones dadas por los alumnos sobre la veracidad o falsedad de algunas de las sentencias propuestas.

Como puede observarse en la Tabla 1, las explicaciones de los alumnos hacen referencia al cálculo de todas o algunas de las operaciones que componen los miembros de las sentencia y a la observación de relaciones numéricas entre los términos de dichos miembros. Teniendo esto en cuenta, al realizar un análisis de las estrategias utilizadas, distinguimos dos modos en los que los alumnos abordan inicialmente la resolución de las sentencias:

- proceden a realizar algún cálculo para hallar y comparar el valor numérico de ambos miembros, o bien,
- observan la sentencia, detectan alguna característica particular de ésta o relaciones entre sus elementos y utilizan cierto conocimiento aritmético relacionado para resolverla.

Según esta distinción diferenciamos entre estrategias tipo HC (hallar y comparar) y estrategias tipo DR (detectar relaciones). Por ejemplo, se identifica el uso de estrategias tipo HC en las diez primeras explicaciones recogidas en la Tabla 1. En las tres explicaciones restantes se identifica el uso de estrategias tipo DR.

Una vez hecha esta distinción, al centrar nuestra atención en el papel del cálculo y del pensamiento relacional en las estrategias evidenciadas por los alumnos, se observa que éstos no siempre siguen su intención inicial y que la riqueza de las estrategias que utilizan es mayor, distinguiéndose ocho diferentes (ver figura 1); la mayoría de ellas no son puramente meta-conceptuales ni puramente meta-procedimentales.

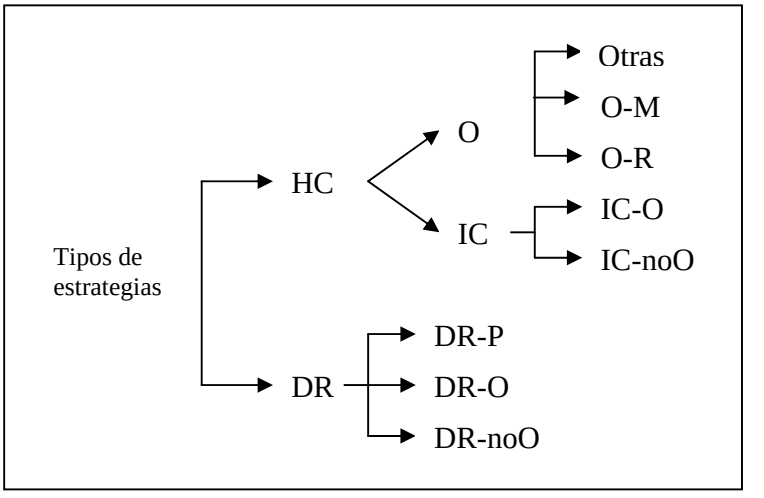


Figura 1: Esquema de las estrategias utilizadas por los alumnos

En el caso de las estrategias tipo HC, en el proceso de realización de cierto cálculo (o al escribir de forma vertical los números a operar), algunos alumnos ponen de manifiesto un cambio de estrategia, al apreciar cierta característica de la sentencia o relaciones entre sus términos, no observadas previamente. Ello les conduce a resolver la sentencia sin necesidad de concluir el cálculo iniciado. En estos casos, el inicio del proceso de cálculo sirve al alumno para tomar conciencia de la composición de la sentencia y prestar atención a sus elementos, favoreciendo la apreciación de relaciones.

Diferenciamos entre estrategias tipo HC-IC (interrupción del cálculo) y estrategias tipo HC-O (operacional), según si se produce, o no, este cambio de estrategia, el cual es apreciado a partir de la comparación de las explicaciones y las anotaciones realizadas aparte por los alumnos, o a partir de explicaciones como la dada por un alumno, durante la discusión de la sesión 3, en la sentencia 51+51=50+52 (ver tabla 1). Este alumno realiza el cálculo de uno de los miembros y, al prestar atención al otro miembro, aprecia algunas relaciones entre los términos, abandonando su estrategia inicial. Otro caso se muestra en la Figura 2 donde se observa como una alumna inicia la escritura en vertical de la operación contenida en el miembro izquierdo de la sentencia, pero no llega a realizar ningún cálculo. Su explicación, *"es verdadera porque es igual"*, sugiere que ha apreciado alguna mismidad entre los miembros de la sentencia. Se aprecia, por tanto, un cambio en su estrategia inicial.

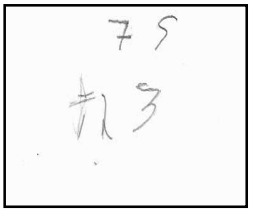


Figura 2: Anotaciones aparte sobre la resolución de la sentencia:
75 + 23 = 23 +75.

En la mayoría de los casos la relación observada por el alumno podía haber sido detectada inicialmente, antes de realizar ningún cálculo, analizando la sentencia. No obstante, la realización de los cálculos, incluso con errores (Ej., ver la resolución de la sentencia 257-34=257-30-4 en la tabla 1), parece ayudarles a tomar conciencia de la estructura y composición de la sentencia.

Dentro de las estrategias tipo HC-O, en las cuales se evidencia dependencia de la realización del cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para determinar la veracidad o falsedad de la sentencia, se destacan dos estrategias: O-M y O-R. La primera de ellas se refiere al caso en que, en el proceso de cálculo de los valores numéricos de ambos miembros, tras calcular el valor numérico de uno de ellos, el alumno detecta que las operaciones presentadas en el otro miembro coinciden con algunos de los cálculos ya realizados (sin necesidad de aplicar la propiedad conmutativa), determinando su valor numérico sin realizar más cálculos. Por ejemplo, una alumna utiliza esta estrategia en la sentencia 7+7+9=14+9 (ver tabla 1). En este caso es necesario escuchar la entonación de la explicación para apreciar que la alumna reconoce la operación contenida en el miembro derecho como una de las operaciones realizadas previamente.

La estrategia O-R consiste, además de en la obtención y comparación de los valores numéricos de ambos miembros, en la detección, a partir de la realización de dicho cálculo, de alguna característica particular de la sentencia o algunas relaciones entre sus elementos, que permiten al alumno determinar la veracidad o falsedad de la misma haciendo uso de algún conocimiento aritmético previo. Al utilizar esta estrategia algunos alumnos aportan dos justificaciones de la veracidad o falsedad de la sentencia: una, basada en la comparación de los valores numéricos de ambos miembros y, otra, haciendo uso de relaciones o alguna característica apreciada. Un ejemplo del uso de esta estrategia es evidenciado por la actuación de una alumna en la resolución de la sentencia 7+15=8+15 (ver tabla 1). Esta alumna utiliza el algoritmo para calcular el valor numérico de ambos miembros, según muestran sus anotaciones realizadas aparte y, además, justifica la falsedad de la sentencia a partir de la observación de una relación ("diferencia de magnitud") entre los términos que la componen.

Otras estrategias incluidas dentro de la tipología HC-O consisten en el cálculo de ambos valores numéricos sin apreciar ninguna relación o característica especial en la sentencia, o bien, atendiendo previamente a los términos que conforman la sentencia y las operaciones a realizar, para decidir el modo de abordar dicho cálculo (ver, en la tabla 1, la explicación dada a la sentencia 19-3=18-2). En general, en ningún caso es posible asegurar que el alumno no haya apreciado alguna relación en la resolución de una sentencia. Nuestra identificación de la estrategia utilizada está limitada por la información que el alumno manifiesta.

Las estrategias de los tipos HC-IC y DR, se subdividen en otras de tipo O o tipo no-O según si la determinación de la veracidad o falsedad de la sentencia se basa, o no, en la comparación de los valores numéricos de ambos miembros (los cuales habrán sido obtenidos de diferente forma según la estrategia utilizada). En esta distinción se observa, en la mayoría de los casos, la influencia del tipo de sentencia considerada. Las explicaciones dadas a las sentencias 11-6=10-5 y 125-0=125, recogidas en la tabla 1, ponen de manifiesto el uso de estrategias DR-noO y DR-O, respectivamente.

Dentro de las estrategias DR, destacamos un tipo de estrategia a la que hemos denominado DR-P *(predicción).* En este caso la característica o relaciones apreciadas sólo son utilizadas para determinar si la sentencia es verdadera o falsa, recurriéndose al cálculo de los valores numéricos de ambos miembros para la justificación de la respuesta.

Por último señalamos que al analizar las respuestas de los alumnos en cada una de las sentencias no siempre es posible identificar con exactitud la estrategia utilizada. En ocasiones,

una respuesta puede ser resultado de más de una de las estrategias. Esto es consecuencia, en la mayoría de los casos, de la brevedad o ambigüedad de algunas respuestas o de la pérdida de la temporalidad de las acciones expresadas por los alumnos. Es importante observar que nuestra identificación de la estrategia se basa en la producción del alumno, por tanto, en los aspectos de su estrategia que hace explícitos, no siendo posible conocer otros aspectos de su pensamiento, no explicitados, que hayan podido intervenir en la resolución de la sentencia en cuestión.

Análisis del uso de pensamiento relacional

A partir de la identificación de las diferentes estrategias, es posible analizar los modos en que el pensamiento relacional es utilizado por los alumnos para resolver las sentencias. Se observa que, aunque en alguna estrategia tipo O puede no tener lugar este tipo de pensamiento, en las demás se manifiesta de algún modo, siendo variable la sofisticación de dicho uso, así como la influencia en él del proceso de cálculo.

La forma más simple en que es puesto de manifiesto algún uso de pensamiento relacional corresponde a la comparación de los términos de la sentencia para tomar decisiones relativas a la realización del cálculo, por ejemplo, para determinar qué miembro operar primero, según la dificultad de las operaciones a realizar en cada caso. El uso de pensamiento relacional que subyace a la estrategia O-M es también básico, en tanto que se reduce a la observación de mismidad entre las operaciones a realizar y aquellas ya realizadas, no requiriéndose hacer uso de ninguna propiedad o principio aritmético. No obstante, a diferencia de otras estrategias tipo O, pone de manifiesto que parte de la atención del alumno no está centrada en la realización del cálculo, permitiéndole distinguir semejanza entre los términos que está operando.

El uso de pensamiento relacional en la estrategia O-R es más sofisticado, pues el alumno considera la sentencia como una totalidad, hace distinciones y aprecia relaciones entre sus términos. Este uso está vinculado a la realización del cálculo, el cual le ayuda a tomar conciencia de los elementos que componen la sentencia y a relacionarlos entre sí. Se constata que los alumnos que utilizan esta estrategia manifiestan cierta dependencia o tendencia a la comparación de los valores numéricos de ambos miembros para determinar y justificar la veracidad o falsedad de la sentencia.

Al igual que en la estrategia O-R, al hacer uso de las estrategias tipo IC los alumnos manifiestan un uso de pensamiento relacional vinculado a la realización del cálculo. Es posible que cierta tendencia a realizar los cálculos les influya y les condicione a no apreciar la relación o característica previamente. No obstante, en esos casos, los alumnos abandonan el cálculo iniciado, mostrando menor dependencia de éste al justificar la veracidad o falsedad de la sentencia haciendo uso de la relación o característica apreciada.

En las estrategias del tipo DR, el alumno aborda inicialmente la resolución de la sentencia en busca de relaciones o características destacadas de la misma, con disposición a utilizar pensamiento relacional, no mostrando dependencia alguna de la realización de las operaciones contenidas en la sentencia. Esto nos conduce a considerar estas estrategias como aquellas que muestran un uso más sofisticado o avanzado de pensamiento relacional.

Algunas conclusiones del experimento y cuestiones abiertas

Si bien no es posible concretar la capacidad de uso de pensamiento relacional en cada alumno, los resultados de este estudio muestran la capacidad de la mayoría de poner de manifiesto este tipo de pensamiento, el cual desarrollan a partir de su aprendizaje/experiencia aritmética, pese a que no sea directamente promovido en la enseñanza. También se observa

que las sentencias consideradas favorecen, por sí mismas, este tipo de estrategias, cuando los alumnos son conscientes de la existencia de estrategias basadas en pensamiento relacional y de su valoración por el docente.

Las estrategias identificadas describen diversidad de modos en los que el pensamiento de los alumnos fluctúa al resolver las sentencias, siendo variable la intervención del cálculo, así como el momento de dicho proceso en el que se hace uso de pensamiento relacional y el papel de éste. Se observa el papel destacado del cálculo, en algunas estrategias, para tomar conciencia de la estructura de la sentencia, así como la importancia de otros elementos como el lugar y modo en que está centrada la atención del alumno al iniciar la resolución de la sentencia, la fluctuación de dicha atención a lo largo de su resolución, la carga cognitiva de la tarea para el alumno, sus conocimientos aritméticos y su modo de concebir los números, las expresiones aritméticas y la sentencia.

A partir del trabajo realizado, se identifican algunas cuestiones, de mayor o menor especificidad, de interés a abordar en la investigación. ¿De qué modo se relacionan las estrategias identificadas en este trabajo con las que utilizan los alumnos en la resolución de igualdades abiertas basadas en propiedades aritméticas? ¿Se encuentra la dependencia o independencia de la realización del cálculo, manifestada por los alumnos al hacer uso de pensamiento relacional, basada en modos diferentes de conocimiento de las relaciones o propiedades aritméticas? ¿Cómo evolucionan las explicaciones (el lenguaje) de los alumnos conforme desarrollan su capacidad para utilizar pensamiento relacional? ¿Cuándo es apropiado dar importancia al rigor de las explicaciones de los alumnos sobre relaciones observadas? ¿Qué constituye, para los alumnos de Educación Primaria, una justificación de la veracidad de una sentencia aritmética?

¿Puede favorecerse la transferencia del uso de pensamiento relacional a otros contextos matemáticos? Y en su caso ¿de qué modo? ¿Cuál es el papel del pensamiento relacional dentro de otras sub-áreas de las matemáticas? ¿Qué capacidad de uso de pensamiento relacional manifiestan los alumnos en otros contextos matemáticos? ¿Qué contextos específicos, de otras sub-áreas, pueden ser de utilidad para promover el desarrollo, uso y manifestación de pensamiento relacional?

Adicionalmente, se identifican dos líneas de interés en las cuales profundizar: el proceso de generalización de las propiedades aritméticas, una vez los alumnos han explicitado el uso de pensamiento relacional, y el uso de este tipo de pensamiento en contextos algebraicos, en especial en el trabajo con expresiones, igualdades y ecuaciones algebraicas.

CONCLUSIONES

Existe cierto acuerdo general en la comunidad investigadora internacional en que el álgebra tiene un lugar en el currículo de la Educación Primaria, pero la investigación sobre la integración del álgebra en el currículo escolar está todavía emergiendo, se conoce aún poco y está lejos de ser consolidada (Carraher y Schliemann, 2007).

La EA abre una línea de investigación de gran riqueza, debido a la variedad de cuestiones a explorar tanto en relación con la integración del álgebra en el currículo de Educación Primaria como sobre la influencia de este cambio curricular en la enseñanza de matemáticas en la Educación Secundaria y el potencial de esta propuesta al ser considerada dentro de los planes de formación de maestros de Educación Primaria[2].

2 En Palarea (2004) se presenta una propuesta de introducción del álgebra en la formación matemática de futuros profesores de Educación Primaria (para la especialidad de Educación Física), con la intención de ayudar a los futuros maestros a ahondar en los saberes de las matemáticas que deben enseñar. El planteamiento que recoge este trabajo se centra, en gran medida, en el lenguaje algebraico.

La algebrización del currículo matemático escolar puede ayudar a enriquecer la enseñanza tradicional de las matemáticas, en todos los niveles educativos, facilitando el desarrollo de un aprendizaje con comprensión. En particular, permite organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ambas.

Nuestro experimento de enseñanza es una muestra del tipo de investigaciones que tienen cabida dentro de esta línea de investigación. Los resultados presentados evidencian parte del potencial de este cambio curricular, así como un modo factible de ponerlo en práctica, en un contexto muy concreto, utilizándose el pensamiento relacional como un constructo clave en la operativización de esta propuesta. Permite, además, mostrar la capacidad de alumnos de tercer curso de Educación Primaria para trabajar en aritmética de un modo algebraico.

El constructo pensamiento relacional nos ha permitido distinguir una gran riqueza de estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de sentencias numéricas que ilustran diversidad de grados en que el pensamiento algebraico y aritmético puede combinarse al abordar una actividad. Y, de ese modo, aporta una muestra de integración del uso de ambos modos de pensamiento, surgida naturalmente en los alumnos, a partir de promoverse en el aula la observación de las sentencias y la búsqueda de relaciones.

En otra parte de este estudio, recogida en Molina (2006), se identifican diferentes perfiles de comportamiento manifestados por los alumnos en el uso de pensamiento relacional, los cuales permiten distinguir niveles en la manifestación de este tipo de pensamiento y trazar la evolución de los alumnos a este respecto.

REFERENCIAS

Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Booth, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and others publications*, 299-307. Reston, Virginia: N.C.T.M.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2001). Additive relations and function tables. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp.110 -119). Melbourne: University of Melbourne.

Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2, 137-144. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Carpenter, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, 155-162. Melbourne: University of Melbourne.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2005). *From children's Mathematics to Thinking Mathematically: Integrating Algebraic Reasoning with the Development of Basic Number Concepts and Skills.* Documento no publicado.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston, Virginia: N.C.T.M. e IAP.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000, octubre). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2001). Can young students operate on unknowns? En M. van der Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1 (pp. 130-140). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 195-208.

Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education,* 8, 27-37.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.

Freiman, V. y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, 415-422. Bergen, Norway: Bergen University College.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics,* 5, 391-412.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America,* Vol. 1, 49-66. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma, 20,* 61-68.

Hejny, M., Jirotkova, D. y Kratochvilova J. (2006). Early conceptual thinking. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, (pp. 289-296). Prague, Czech Republic: PME Program Committee.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163,* 19-29.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2005). Middle School Students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [International Reviews on Mathematics Education], 37*(1), 68-76.

Koehler, J. (2002). *Algebraic Reasoning in the Elementary Grades: Developing an Understanding of the Equal Sign as a Relational Symbol*. Tesis de master no publicada. Wisconsin: Universidad de Wisconsin–Madison.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

Molina, M. y Ambrose, R. (en prensa). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics.*

Molina, M., Castro, E. y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA, 1*(1), 31-46.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: Autor.

Palarea, M. M. (2004). *Del lenguaje numérico al lenguaje algebraico.* La Laguna: Área de Didáctica de la Matemática, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4, 127-134. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Subramaniam, K. (2004, Julio). Naming practices that support reasoning about and with expressions. Presentado en *the 10th International Congress on Mathematical Education*, Copenhagen, Denmark.

Sutherland, R. (2007). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, Virginia: NCTM.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique*, 189-199. Paris: La Pensée Sauvage.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 399-406. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Warren, E. (2003).Young children's understanding of equals: a longitudinal study. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4, 379-387. Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 417-424. Bergen, Norwey: Bergen University College.

EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN. ARTICULACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS RELACIONES FUNCIONALES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Francisco Javier García[1]
fjgarcia@ujaen.es
Universidad de Jaén

RESUMEN

El álgebra escolar constituye un tema central de investigación dentro del ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Desde diversas investigaciones se ha estado indagando el papel que el álgebra puede jugar en la Educación Secundaria y las restricciones a las que su estudio está sujeto, partiendo de un modelo epistemológico "alternativo" del álgebra escolar como instrumento de modelización. En primer lugar, en este artículo realizaremos una revisión de los resultados más relevantes obtenidos dentro de este dominio de investigación. En segundo lugar, expondremos parte de nuestra investigación sobre el estudio de la proporcionalidad y las relaciones funcionales en la Educación Secundaria. Por último, esbozaremos las líneas de investigación en las que seguimos trabajando en la actualidad y posibles problemas abiertos.

ABSTRACT

School algebra is a central research topic within the Anthropological Theory of Didactics. The role algebra can play in Secondary Education and the constraints that affect its study have been investigated from several researches, assuming an "alternative" epistemological model of school algebra as a modelling tool. Firstly, in this paper we will carry out a review of some of the main results obtained within this research domain. Secondly, we will explain a part of our research on the study of proportionality and functional relations in Secondary School. Finally, we will outline some research trends which we are developing at this moment and possible new research questions.

1 Co-autores: Bosch, M. (Universidad Ramón Llull), Gascón, J. (Universidad Autónoma de Barcelona) y Ruiz-Higueras, L. (Universidad de Jaén).

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Francisco Javier García (2007). EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN. ARTICULACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS RELACIONES FUNCIONALES EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA, pp. 71-90.

INTRODUCCIÓN

La *evolución de la problemática didáctica* propuesta por Gascón (1998) pone de manifiesto la co-existencia de dos programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el *programa cognitivo* y el *programa epistemológico*. En ambos se construyen desarrollos teóricos que permiten abordar la "realidad" de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde diferentes perspectivas. En la medida en que las herramientas teóricas que se usan son de naturaleza diferente, también los problemas didácticos que es posible abordar y las soluciones que se proponen difieren en su naturaleza. Esta posibilidad de observar y tratar los *hechos didácticos* desde diferentes perspectivas puede y debe ser interpretada como una oportunidad para enriquecer el dominio de investigación en Didáctica de las Matemáticas. No exenta de dificultades, en particular subyace el problema general de la complementariedad y de la articulación (si es posible) entre diferentes investigaciones desarrolladas en diferentes marcos teóricos y en diferentes *programas de investigación*.

En esta ponencia nos situaremos explícitamente en el *programa epistemológico* y, dentro de éste, en la marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, en adelante). Esto supone que consideraremos como *objeto primario de investigación* la *actividad matemática escolar* desde una perspectiva epistemológica e institucional. De esta forma, los *procesos cognitivos de los alumnos* pasan a ser *objetos secundarios*, lo que no significa que sean de menor importancia. No se trata, ni mucho menos, de "reducir" los *fenómenos cognitivos* a *fenómenos epistemológicos*. Desde el *programa epistemológico* se postula que una posible vía de entrada a los *fenómenos didácticos* es a partir del cuestionamiento y modelización de su componente matemática (frente al cuestionamiento y modelización de su componente cognitiva que caracteriza a las investigaciones dentro del *programa cognitivo*) y es esa vía la que queremos explorar.

EL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR EN EL ÁMBITO DE LA TAD: ALGUNAS INVESTIGACIONES PREVIAS

El álgebra escolar constituye uno de los temas centrales de trabajo dentro de la TAD. Sucintamente, su origen se remonta a finales de la década de los ochenta en trabajos publicados por Chevallard (1989a, 1989b), continúa con los trabajos publicados en la década de los noventa por Gascón (1993, 1994-95, 1999) y Bolea, Bosch y Gascón (1998a, 1998b) y culmina en la realización de la tesis doctoral de Bolea (2003) y en los trabajos publicados relacionados con ésta, entre otros, Bolea, Bosch y Gascón (2001, 2004). Más allá, la interpretación del álgebra que emana de estas investigaciones ha dado lugar a que, en gran parte de las investigaciones desarrolladas posteriormente en el marco de la TAD, la *problemática del álgebra* ocupe un papel central, como por ejemplo en la tesis de Fonseca (2004) sobre las discontinuidades entre la matemática en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO, en adelante) y en el Bachillerato o en la tesis de García (2005) sobre la modelización matemática y el estudio de las relaciones funcionales.

Esbozaremos a continuación algunos resultados emanados de las investigaciones anteriores. El objetivo es doble: por un lado, introducir al lector en el dominio de investigación del álgebra en el marco de la TAD, por otro lado, introducir y justificar ciertos resultados sobre los que se ha construido la investigación de García (2005), sobre la proporcionalidad y las relaciones funcionales en la ESO.

La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar: el álgebra como *aritmética generalizada*

Gascón (1993, 1999, 2007) pone en evidencia que el modelo implícito dominante del álgebra en la institución ESO se corresponde con una *generalización* de la *aritmética escolar*, en el sentido de que la actividad matemática que se desarrolla en esta institución resulta, al mismo tiempo, de la prolongación y generalización de las prácticas aritméticas junto a la *oposición* de la *actividad algebraica* frente a la *actividad aritmética*.

Brevemente y sin pretender ser exhaustivos, el álgebra como generalización y ampliación de la aritmética se caracteriza por el hecho de que las nociones de álgebra se definen en *contraposición*, pero a la vez en *dependencia absoluta*, de la aritmética escolar. Esto es, las técnicas algebraicas surgen a partir de las técnicas aritméticas de resolución problemas verbales -las cuales generaliza- y, normalmente, se identifica al álgebra con el *lenguaje algebraico*, concibiéndose éste como una generalización del *lenguaje aritmético*. Surge de esta forma el interés por analizar las características del *pensamiento algebraico* entendido como la extensión de un supuesto *pensamiento aritmético*.

Sin embargo, también es posible identificar elementos que *contraponen* la *actividad algebraica* a *la aritmética*, entre los más importantes:

- *La resolución de problemas*: en "aritmética", está caracterizada por la realización de una cadena finita de problemas simples en los que cada resultado, de naturaleza numérica, es calculable e interpretable en términos del enunciado y está formulado mediante una expresión sencilla del lenguaje natural. En cambio, la resolución de "problemas algebraicos" supone la producción de relaciones algebraicas que representan un "enunciado matemático", obtenida por una transformación, o por una operación legítima entre una o varias igualdades, o por la aplicación de un teorema.
- *Los resultados obtenidos*: una medida concreta, en el caso de las *prácticas aritméticas*. Sin embargo, en las *prácticas algebraicas*, podría ser una relación entre magnitudes.
- *Los objetos con los que se trabaja*: con medidas concretas en *aritmética* frente a la manipulación de símbolos en *álgebra*, que deben ser interpretados de forma diferente, según el contexto en el que aparezcan (incógnitas, "números generalizados", parámetros, variables).
- *Significado de los símbolos y de los signos*: en la *aritmética*, los símbolos y signos tienen referentes muy concretos y un sentido muy preciso, frente a la *actividad algebraica*, en la que el significado de los signos se modifica de manera esencial.

En Bolea (2003, pp. 70-72) se demuestra, a partir de una serie de indicadores, cómo el *álgebra escolar* en la ESO es considerada en el sentido de una *aritmética generalizada*.

Esta interpretación del álgebra constituye el *modelo epistemológico de referencia*, a menudo implícito, de gran parte de las investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática[2]. También en la institución de la Educación Secundaria, Bolea (2003) demuestra, a partir del análisis de documentos curriculares, libros de texto y de una encuesta entre profesores, que se asume acríticamente este modelo epistemológico como único e incuestionable, constituyéndose así en un *modelo de referencia dominante* en esta institución.

La interpretación del álgebra escolar como *aritmética generalizada* está en el origen de

2 No entraremos aquí a clasificar las investigaciones realizadas en torno al álgebra. En Bolea (2003) se puede consultar una *reconstrucción racional* del dominio de investigación del álgebra.

muchos de los fenómenos identificados en las instituciones escolares en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Sin embargo, su influencia se extiende aún más lejos puesto que toda actividad matemática, a partir de cierto nivel de complejidad, no puede ser concebida sin la plena operatividad del instrumento algebraico.

El álgebra como instrumento de modelización

La interpretación del álgebra como *aritmética generalizada* presenta importantes limitaciones cuando se usa como referencia para describir, formular, interpretar y abordar problemas didácticos (en especial los relativos a la "ecología" o "condiciones de vida" del álgebra escolar).

Desde diversas investigaciones realizadas en el seno de la TAD (Chevallard, 1989b, Bolea, Bosch y Gascón, 1998b, Gascón, 1999, Bolea, 2003) se ha cuestionado explícitamente el modelo epistemológico del álgebra dominante en las instituciones escolares (y también en gran parte de la investigación en didáctica de las matemáticas) dando lugar a la formulación de un modelo epistemológico de referencia "alternativo" del álgebra desde el que formular y abordar nuevos problemas de investigación didáctica.

> "Para la didáctica de las matemáticas, no es suficiente con describir y caracterizar el modelo del *álgebra escolar* dominante en la institución docente. Es necesario, además, tomarlo como objeto de estudio, como un hecho empírico a explicar y, para ello, es necesario elaborar previamente un modelo del "*álgebra*" propio de la didáctica y utilizarlo como *modelo epistemológico de referencia* para reformular la noción de "estudiar álgebra" en una institución dada." (Bolea, 2003, p. 65)

Chevallard (1989), a partir del análisis de la génesis del álgebra, puso en evidencia que, ante todo, el álgebra surge como un instrumento al servicio del trabajo matemático, dando lugar a un cambio radical al permitir explicitar y manipular la estructura de los problemas matemáticos, ampliándose enormemente la posibilidad de abordar matemáticamente los problemas complejos que, antes del álgebra, se reducían al primer y segundo grado con una o dos incógnitas.

> "Aunque la aparición del álgebra se caracteriza materialmente por la proliferación de *expresiones algebraicas* y por la emergencia de una especie de "lenguaje algebraico", la nueva forma de hacer matemáticas basa su verdadera potencia en las inmensas posibilidades técnicas que surgen del juego del doble uso de las letras: como "*incógnitas*" y como "*parámetros*". Entre dichas posibilidades destacan las siguientes: resolver simultáneamente una amplia clase de problemas, justificar, interpretar y controlar el ámbito de aplicación de las técnicas prealgebraicas (sean "aritméticas", "geométricas" o "combinatorias") y, además de obtener la incógnita cuando el problema tiene solución, explicar cuáles son las condiciones de existencia de dicha solución y describir la estructura del conjunto de las soluciones." (Gascón, 1999, p. 80)

Por otro lado, el modelo epistemológico general de la actividad matemática en el que se fundamenta la TAD (y que debe ser coherente con el modelo epistemológico específico del álgebra que se construya) sitúa la *modelización matemática* en el núcleo de toda actividad matemática. Es por ello que las nociones básicas de la *modelización matemática* se incorporan a la descripción que se realiza de toda actividad matemática, quedando ésta caracterizada como la *producción de conocimientos* matemáticos *relativos a un sistema* (matemático) gracias a la utilización de un *modelo matemático* del mismo. De esta forma, frente a la división clásica entre la matemática "pura" y "aplicada", se postula que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización de sistemas, en ocasiones intra-matemáticos, en ocasiones extra-matemáticos.

Desde esta perspectiva, desde la TAD se propone un *modelo epistemológico de referencia* alternativo. En éste, el álgebra escolar se considera, inicialmente, no como una organización matemática al mismo nivel que el resto, sino como *instrumento de modelización* de todas las organizaciones matemáticas escolares (Bolea, Bosch y Gascón, 1998b). De este modo, el desarrollo del instrumento algebraico provocará la modificación de la naturaleza de las diferentes organizaciones matemáticas que se estudian en la Educación Secundaria. Como una consecuencia de su desarrollo, podrá llegar a convertirse en objeto de estudio en sí mismo, dando lugar a organizaciones matemáticas autónomas en torno al estudio de "estructuras algebraicas".

Dejando a un lado el *álgebra* como *objeto de estudio*, nos centraremos en la herramienta algebraica como instrumento de la actividad matemática. En consecuencia, no nos referiremos a organizaciones matemáticas en torno al álgebra[3] en la ESO, sino a *procesos de algebrización* de las organizaciones matemáticas que viven en ella. Este proceso dará lugar a diferentes *grados* (o *niveles*) *de algebrización* de las mismas (y, en consecuencia, de la actividad matemática y de los procesos de estudio asociados).

Bolea (2003, pp. 86-88) propone cuatro indicadores del *grado de algebrización* de una organización matemática y los utiliza para responder a la cuestión acerca del *grado de algebrización* de la matemática escolar en el ámbito de la ESO. Los resultados no hacen más que confirmar los obtenidos previamente en Gascón (1999) los cuales demuestran que, aunque, en un primer lugar, la matemática escolar presenta ciertos rasgos aparentemente algebrizantes, un análisis más profundo revela que en realidad el uso del álgebra no va más allá de una "aritmética generalizada" puesto que, entre otros fenómenos:

- Nunca se rompe la relación de dependencia unilateral entre lo "numérico" (o aritmético) y lo algebraico.
- Las "letras" juegan el papel de *incógnitas*, pero rara vez de *parámetros*.
- El conjunto de *conocimientos algebraicos* que se estudian aparece fuertemente atomizado y desintegrado.
- La manipulación de las *expresiones algebraicas* casi siempre es formal, sin referencia alguna a sistemas matemáticos o extramatemáticos de los que pudiese emanar un "sentido" de dichas manipulaciones.
- Las "demostraciones algebraicas" de fenómenos aritméticos, geométricos o combinatorios no juegan ningún papel en la actividad matemática que el contrato didáctico asigna a estas organizaciones escolares (y, de hecho, está prácticamente ausentes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y tienden a desaparecer también en el Bachillerato).
- Las fórmulas aparecen restringidas prácticamente al cálculo de áreas y volúmenes (y a algunas otras relaciones métricas en geometría), a algunos problemas estereotipados de cálculo comercial y la determinación de parámetros estadísticos, pero no aparecen como fruto de un trabajo algebraico ni actúan como modelos (por ejemplo, para determinar las condiciones de existencia de la incógnita).
- Las funciones tampoco se usan para construir ni estudiar fórmulas. Su estudio aparece en un ámbito completamente separado e independiente de lo algebraico y obedece a una problemática propia.

3 Como, por ejemplo, organizaciones matemáticas en torno a la "traducción del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico" o a la "resolución de ecuaciones de primer grado", que suelen encontrarse en la *matemática a enseñar* en la Educación Secundaria Obligatoria.

En resumen, es posible afirmar que el currículo escolar de la Educación Secundaria muestra un fuerte grado de *desalgebrización* y, en consecuencia, que la actividad matemática escolar tiene un marcado carácter *prealgebraico*.

Varias cuestiones relevantes surgen a partir de esta constatación. En particular, ¿cuáles son los factores que limitan y condicionan la actividad matemática escolar hasta tal punto que dificultan su progresiva algebrización, así como el origen de los mismos? Así mismo, y en relación clara con lo anterior, ¿cuáles son las condiciones que deberían darse para que la modelización algebraica estuviese presente en los *Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas* y, en particular, para que fuese posible el estudio escolar de organizaciones matemáticas progresivamente algebrizadas[4]? Y, más lejos aún, ¿es posible y didácticamente viable, en el actual *Sistema de Enseñanza de las Matemáticas*, diseñar un currículum de matemáticas en el que tenga cabida el álgebra escolar como instrumento de modelización?

¿Por qué la *modelización algebraica* no "vive" en la ESO?

Son múltiples las restricciones y condiciones que explican el carácter dominante del *álgebra como aritmética generalizada* y la ausencia del *álgebra como herramienta de modelización*. Gascón (2007) compendia y estructura diferentes restricciones, según el ámbito desde el que provienen, usando como herramienta metodológica los *niveles de determinación didáctica* (Chevallard, 2001). Cada nivel corresponde a un nivel de estructuración de la organización matemática y, en cada uno de ellos, se introducen restricciones particulares sobre lo que será didácticamente posible en el aula:

Civilización → Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

(a) Restricciones que provienen desde los niveles ***Civilización → Sociedad***

Por un lado la *sociedad* tiende, de manera general, a exigir del *Sistema de Enseñanza de las Matemáticas* (SEM, en adelante) que, al menos durante la educación obligatoria, todo elemento de saber que se enseña se deje traducir en términos compatibles con la *epistemología cultural corriente*. De esta forma, las únicas modelizaciones aceptables por la *cultura* son aquellas que pueden reducirse a *modelos "concretos"*. Considerados como familiares y naturalizados, acaban apareciendo como los únicos "pensables"[5].

Por otro lado Chevallard (1989b) relaciona la desalgebrización de la matemática escolar con la *peyoración cultural del álgebra*, relacionada con el *logocentrismo* imperante en la cultura occidental. Esta posición metafísica sostiene implícitamente que el "pensamiento reside en la cabeza", se expresa por la "voz" y la "palabra" y se conserva por la "escritura", considerada esta como un "producto secundario" (cuando no degradado) del "pensamiento". Desde este punto de vista, se desprecia el papel que los *formalismos científicos escritos* pueden desempeñar como *instrumentos del pensamiento científico*[6].

4 No podemos desarrollar aquí las respuestas (aún parciales) construidas desde la TAD a estas cuestiones, así como otras cuestiones problemáticas que se desprenden de lo anterior. Remitimos al lector a los trabajos ya referenciados y, en particular, a Bolea (2003) y a Bolea, Bosch y Gascón (2004).

5 El uso de *modelos "concretos"* de "ingresos/deudas", "altura/profundidad sobre el nivel del mar", "años antes/después del inicio de nuestra era", etc. para la enseñanza de los números negativos constituyen sin lugar a duda el ejemplo prototípico de esta restricción.

6 Una consecuencia visible de este hecho en los Sistemas de Enseñanza es la actitud "inerte" de la mayoría de los alumnos ante la resolución de un problema. Si se les pregunta, muchos responderán que "lo están pensado", como si la realización y manipulación de escrituras (actividad ostensiva) no formase parte de ese "proceso de pensamiento".

(b) Restricciones que provienen desde los niveles ***Escuela → Pedagogía***

En consonancia con la *interpretación psicopedagógica dominante* (Gascón et al., 2004), se tiende a eliminar algunos de los aspectos más característicos de la *disciplina matemática* (por ejemplo, el trabajo técnico *tranquilo y rutinario*, productor de saber) con el fin de evitar la *desconcertación de los alumnos* y su salida del sistema. Así, se fracciona el proceso de enseñanza de las matemática hasta hacerlo desaparecer como tal proceso, convirtiendo la matemática escolar en un conjunto *atomizado* de actividades aisladas, de "anécdotas matemáticas", aderezadas con elementos motivantes (juegos, cercanía a los intereses vitales del alumno, herramientas tecnológicas, etc.). De esta forma, se tiende a convertir la enseñanza en un mecanismo mágico del que se esperan frutos casi instantáneos, eliminándose los objetivos a largo plazo[7].

Paradójicamente, intentando proteger a los alumnos de toda *desconcertación* y de la dureza de la *disciplina matemática* se lleva a muchos de ellos a un estado de *desconcertación permanente*: la atomización excesiva de la actividad matemática escolar provoca la necesidad de un cambio constante de actividad y a la realización rutinaria de múltiples micro-tareas, siendo la mayoría de ellos incapaces de dominar técnicas amplias y flexibles que les lleven a ser realmente *competentes* desde el punto de vista matemático. En estas condiciones, es prácticamente imposible que el álgebra como herramienta de modelización pueda "vivir" y "desarrollarse" en la actual Educación Secundaria.

(c) Restricciones que provienen de los niveles específicos: ***Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión***

La Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985) puso en evidencia el conjunto de adaptaciones que sufre todo saber para poder ser enseñado en una institución didáctica. Nos referiremos aquí a cuatro *restricciones genéricas* a los efectos que tienen sobre la consideración del álgebra en el SEM:

- Restricciones que provienen de la necesidad de adecuar las actividades matemáticas escolares a la *representación institucional* del saber objeto de enseñanza (adecuación de las actividades escolares al *modelo epistemológico* del álgebra como *aritmética generalizada*).
- Restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la actividad matemática que los alumnos tienen que aprender a realizar y los conocimientos correspondientes. Frente al tipo de actividad matemática asociada con al álgebra como *aritmética generalizada*, las *técnicas de modelización* están entre aquellas técnicas menos visibles, menos "algoritmizables", menos "atomizables" y, en definitiva, más difícilmente evaluables.
- Restricciones que provienen de la necesidad de que todo *saber enseñado aparezca como definitivo e incuestionable*. El álgebra como instrumento de modelización choca frontalmente contra esta exigencia general puesto que surge y se desarrolla a partir del cuestionamiento de las técnicas y hasta de las tecnologías habituales.
- Restricciones impuestas por el *tiempo didáctico*, entre otras, la *exigencia de un aprendizaje rápido* que puede llegar a la ilusión del *aprendizaje instantáneo* y que impide plantear objetivos a largo plazo.

7 Por más que la última reforma establezca un objetivo holístico como es el del desarrollo de la *competencia matemática*, a desarrollar durante toda la escolaridad obligatoria, éste al final queda dividido en múltiples micro-objetivos cuya consecución se espera casi inmediata, fruto del trabajo en el aula.

EL FENÓMENO DE LA DESARTICULACIÓN DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Tradicionalmente, los currículos de las instituciones escolares suelen estar estructurados en tres grandes secciones de contenidos: *conceptuales*, *procedimentales* y *actitudinales*. Cada una de estas secciones se concreta en una lista, generalmente poco estructurada, de los diferentes tipos de contenidos:

- Los contenidos *conceptuales* surgen como respuesta a la cuestión: ¿qué obras matemáticas considera la *sociedad* que hay que estudiar en la escuela?
- Los *procedimentales* intentan responder a las cuestiones del tipo: ¿hasta qué punto hay que "entrar" en estas obras? ¿qué es lo que se debe poder hacer con ellas?
- Los *actitudinales*, por su parte, recogen cómo se deben considerar las matemáticas dentro del conjunto de obras de la sociedad, así como ciertos aspectos de la actividad matemática que no pueden ser descritos como tareas o procedimientos.

Además, los currículos de matemáticas están estructurados en un conjunto de *áreas* y de *sectores*. En el caso de las disposiciones legales de Andalucía (CECJA, 2002) son cinco las *áreas* (*números y medidas, álgebra, geometría, funciones y su representación gráfica, tratamiento de la información estadística y del azar*) las cuales, a su vez, se estructuran en un conjunto de *sectores*. Por ejemplo, para el *área* denominada *geometría*, se establecen como sectores, entre otros: *elementos y organización del plano*, *elementos y organización del espacio* o *traslaciones, giros y simetrías en el plano*.

Si bien es cierto que el currículo asume desde sus inicios que todos estos contenidos forman parte de una organización mayor (las *matemáticas*) no establece cuál es la forma de articular estos contenidos para proceder a su estudio en las instituciones escolares, más allá de algunas consideraciones generales y un tanto vagas. De manera general, se atribuye a la *resolución de problemas* y a la *aplicación de las matemáticas en contextos "reales"* un presunto papel articulador de los diferentes contenidos y de las diferentes *áreas* y *sectores*.

Desde el *programa epistemológico de investigación en Didáctica de las Matemáticas*, se considera que para abordar el *problema de la articulación* es necesario problematizar el modelo epistemológico de las matemáticas que se pretenden articular, en vez de considerar que éste es transparente y está establecido de una vez por todas.

En el ámbito de la TAD, y utilizando las nociones que este marco teórico proporciona, proponemos formular el problema de la articulación como un problema de investigación didáctica en los siguientes términos:

> **Problema de la articulación de la matemática escolar:** ¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el currículum de matemáticas tanto entre los temas y áreas de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas? Y, en particular, ¿qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos, incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas?

Como cualquier problema de investigación didáctica, presenta dos caras que, de hecho, son inseparables:

(a) Se trata de un *problema de ingeniería matemática*, relativo al *análisis* de las organizaciones matemáticas presentes en el currículo y a la *construcción* de organizaciones matemáticas. Respecto al *análisis*, se preguntará sobre la naturaleza de las limitaciones

e insuficiencias de estas organizaciones matemáticas para generar y dar sentido a organizaciones matemáticas más *amplias y complejas*, que superen el *nivel temático*. Respecto a la *construcción*, su objeto será analizar la manera de completar las organizaciones matemáticas escolares existentes y proponer formas de articularlas entre sí.

(b) Se trata de un *problema de ingeniería didáctica*, relativo a la construcción de organizaciones didácticas que den lugar a la reconstrucción de organizaciones matemáticas *amplias y complejas* y que permitan superar el "encierro en los temas", con el fin de articular los contenidos matemáticos de cada etapa educativa y entre diferentes etapas.

La ausencia del álgebra como herramienta de modelización tiene múltiples efectos sobre los Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas pero, entre ellas, destacaremos la influencia que tiene sobre el *fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar*. Formulado en términos contrarios, la presencia de la herramienta algebraica en la matemática escolar daría lugar a una *algebrización hipotética* de la misma. Gascón (1999) adelanta algunos efectos que esta algebrización produciría:

- Los objetivos a corto plazo (instantáneos) tendrían que ser modificados por objetivos a medio-largo plazo.
- Las actividades matemáticas aisladas y desarticuladas tendrían que dar lugar a una actividad matemática sostenida y prolongada. Para ello, sería necesario un proceso de estudio estructurado y disciplinado junto con la recuperación en la escuela de un trabajo de la técnica tranquilo, prolongado y sistemático.
- La interpretación, justificación y demostración son aspectos de la actividad matemática prácticamente ausentes en la matemática escolar, pero vitales desde la perspectiva de una actividad matemática algebrizada. En particular, las técnica algebraicas deberían emerger como instrumentos para demostrar fenómenos (aritméticos, geométricos, de medida o combinatorios) y para justificar e interpretar las correspondientes técnicas prealgebraicas.

En la investigación de García (2005) nos hemos centrado en el estudio de la *relación de proporcionalidad* y de las *relaciones funcionales* en la ESO. Estamos interesados en ahondar, por un lado, en el fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar y, por otro lado, en el papel que la *modelización algebraica* puede desempeñar como herramienta de articulación. Además, nos interesa contrastar empíricamente los efectos que una algebrización (local) provoca sobre el SEM así como identificar fenómenos y restricciones ligadas con esta posible algebrización.

LA "PROPORCIONALIDAD" Y LAS "RELACIONES FUNCIONALES" EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

En esta sección mostraremos cómo "vive" la proporcionalidad en la ESO y cómo se vincula su estudio con el del resto de relaciones funcionales. Para ello, nos basaremos en el análisis de algunos documentos curriculares y de manuales escolares. Veremos cómo el carácter prealgebraico de la actividad matemática escolar provoca la existencia amalgamada de diferentes organizaciones matemáticas (puntuales, a lo sumo locales), atomizadas y deficientemente articuladas entre sí.

Un *modelo epistemológico de referencia* de la "proporcionalidad" y de las "relaciones funcionales"

Desde el punto de vista metodológico en toda investigación en el marco del programa epistemológico es necesario que el investigador haga explícito un *modelo epistemológico* que le sirva como *referencia* (MER, en adelante) para observar los hechos empíricos. En el caso de la TAD, este modelo epistemológico estará descrito en términos de praxeologías y vínculos entre praxeologías. Todo MER debe ser considerado como provisional y modificable en función de los resultados de investigación obtenidos.

En García (2005) hemos reconstruido un posible MER en torno las relaciones funcionales, partiendo de la reconstrucción de un modelo epistemológico de referencia de la proporcionalidad entre magnitudes propuesto por Bosch (1994).

Un *modelo epistemológico de referencia* de la "proporcionalidad"

La relación de proporcionalidad entre magnitudes constituye un *tema* "clásico" en el sistema de enseñanza. Sin embargo, la importancia de la relación de proporcionalidad en la *matemática sabia* decayó considerable cuando el desarrollo del cálculo diferencial y de la herramienta algebraica hizo posible modelizar todo tipo de relaciones funcionales y, en particular, la relación de proporcionalidad (directa, inversa y compuesta).

Bosch (1994) analiza cómo los complejos de ostensivos usados para modelizar la relación de proporcionalidad han ido evolucionando a lo largo de la historia y, con ellos, cómo la actividad matemática en torno a la proporcionalidad ha ido también evolucionando, dando lugar a diferentes organizaciones matemáticas.

Brevemente, y tomando la terminología introducida por Bosch (1994), se distingue entre tres tipos de organizaciones matemáticas. Dejando de un lado el problema de cómo determinar si una relación entre magnitudes puede ser considerada o no como proporcional, distinguiremos entre:

- *Modelización clásica*[8]: en la que la relación de proporcionalidad se concibe como una relación estática entre medidas de cantidades de dos magnitudes *M y M'* y se expresa mediante la *ecuación proporcional*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\; ; \;\; a,b \in M ; \; c,d \in M'$$

  El tipo de tareas asociado corresponde a los problemas clásicos de cálculo del cuarto proporcional y los de aritmética mercantil, contextualizados en situaciones estereotipadas en las que el carácter proporcional de la relación se asume casi siempre por la naturaleza cultural del sistema modelizado. La teoría que sustenta la práctica matemática es la teoría "clásica"de las razones y de las proporciones.

- *Modelización ecuacional*: surgida como una modernización "ostensiva" de la anterior, mantiene, sin embargo, la consideración estática de la relación. La existencia de osten-

8 Bosch (1994) distingue entre la modelizaciones "clásica" y "algebroide", según la relación entre cuatro medidas concretas proporcionales esté expresada en términos de una *ecuación proporcional "clásica"* (a:b=c:d) o "*fraccionaria"* (a/b = c/d). En ambos casos, el marco teórico y la consideración de la relación es bastante similar. Bosch (1994) muestra cómo el sistema de ostensivos empleado determina y condiciona el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo. Por comodidad, hablaremos de modelización clásica cuando ésta se expresa mediante una *ecuación proporcional* en la que las razones están representadas mediante ostensivos *fraccionarios*.

sivos algebraicos permite expresar esta relación sólo entre dos medidas de cantidades de las magnitudes *M* y *M'* mediante la *ecuación*: $y = k \cdot x$ (tanto *y* como *x* son consideradas más como *incógnitas* que como *variables*). En esencia, se aborda el mismo tipo de problemas que en la modelización anterior. La aparición de la *constante de proporcionalidad* provoca una pequeña ampliación del campo de problemas y caracteriza la evolución del marco tecnológico-teórico.

— *Modelización funcional*: frente al cambio ostensivo que caracteriza preferentemente la evolución entre las dos anteriores, esta última organización matemática surge de una evolución en el nivel teórico. La relación de proporcionalidad se considera ahora como una relación funcional (dinámica) entre medidas de cantidades de las magnitudes *M* y *M'* relacionadas y, en último término, entre conjuntos numéricos. Ostensivamente, el uso de la notación funcional $f(x) = k \cdot x$ permite la emergencia de nuevas técnicas (véase Bosch, 1994, García, 2005, para una descripción más detallada).

Bolea, Bosch y Gascón (2001) analizan estas organizaciones matemáticas desde el punto de vista de su *grado de algebrización*, mostrando un proceso de algebrización creciente. En consecuencia, la unificación e integración que caracteriza a todo proceso de algebrización plantea la posibilidad de superar el aislamiento de la relación de proporcionalidad y su integración en el estudio de un conjunto de relaciones funcionales entre magnitudes.

Un *modelo epistemológico de referencia* de las "relaciones funcionales"

En García (2005) hemos construido un posible MER que parte del cuestionamiento y la caracterización de la variación de magnitudes. En esencia, partimos del hecho de que lo caracteriza a las funciones es el papel que juegan como *modelos de la variación* y no sólo como representación de un tipo particular de relación. En tal caso, las funciones pueden ser consideradas como las *primitivas* que modelizan diferentes tipos de variación entre magnitudes.

Para ello, y teniendo en cuenta las restricciones institucionales que provienen de la ESO, hemos optado por restringirnos a relaciones entre dos magnitudes *M* y *M'*, ambas discretizadas $\{a_1, a_2, ..., a_i, ...\}$ (representa el conjunto de cantidades de la magnitud *M* y $\{a'_1, a'_2, ..., a'_i, ...\}$ las cantidades correspondientes en *M'*).

Consideramos, además, que el punto de partida es un conjunto de cantidades de la primera magnitud en progresión aritmética (de diferencia) y cuestionamos el tipo de variación de las cantidades correspondientes de la segunda magnitud. De esta forma hemos introducido diferentes *tipos de variación* (o *condiciones de variación*). Esbozamos algunos a continuación (una descripción más detallada puede consultarse en García, 2005):

— *Condición de equidad*: toda progresión aritmética $\{a_i\}$ de elementos de *M* de diferencia *k* se transforma en una progresión aritmética de elementos de *M'* de diferencia *k'*.

$$\forall k \in M \ , \ \exists \ k' \in M' \ / \ \text{si} \ \Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k \Rightarrow \Delta a'_i = a'_{i+1} - a'_i = k'$$

— *Condición de linealidad*: más restrictiva que la anterior, implica que no sólo toda progresión aritmética de cantidades de *M* se transforma en una progresión aritmética de cantidades de *M'* sino que, también, toda progresión geométrica de cantidades de *M* se transforma en una progresión geométrica de cantidades de *M'* de la misma razón.

$$\forall k \in \mathbb{R} \ , \ \text{si} \ \nabla a_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} = k \ \Rightarrow \ \nabla a'_i = \frac{a'_{i+1}}{a'_i} = k$$

O bien, formulada en términos continuos: si es un *estado* del sistema (par de cantidades relacionadas entre sí), entonces también (*ka*, *ka'*) y ($k^{-1}a$, $k^{-1}a'$) son estados del sistema ($\forall k \in \mathbb{R}\cdot\{0\}$).

– *Condición de diferencias constantes de orden n:* toda progresión aritmética de diferencia *k* se transforma en una progresión con diferencias constantes de orden *n* iguales a *k'*.

$$\forall k \in M \ , \ \exists\, k' \in M' \ / \ \text{si} \ \Delta a_i = a_{i+1} - a_i = k \quad \Rightarrow \quad \Delta^n a'_i = \Delta^{n-1} a'_{i+1} - \Delta^{n-1} a'_i = k'$$

De esta forma, la *relación de proporcionalidad directa* queda reformulada como una relación entre dos magnitudes caracterizada por una variación bajo la *condición de linealidad* y aparecen otros tipos de relaciones (afines, cuadráticas, exponenciales, de proporcionalidad inversa) según sea el tipo de variación que caracteriza a la relación.

En el MER construido se propone el estudio integrado de *sistemas de variación* en los que las cantidades de magnitud son susceptibles de variar según diferentes *condiciones* (como las enunciadas anteriormente u otras posibles) y para los que se construyen, amplían e integran diferentes praxeologías (*modelos*) en torno a los distintos tipos de variación, conformando una organización matemática regional articulada en torno a la *teoría de las funciones reales de variable real*.

La "proporcionalidad" en los documentos curriculares y en los libros de texto

En García (2005) hemos usado este MER como una herramienta de análisis didáctico para caracterizar las *organizaciones matemáticas a enseñar* en la actual ESO española propuestas por algunos textos escolares en torno al estudio de la relación de proporcionalidad y su conexión con el estudio de las relaciones funcionales.

Los documentos curriculares

Centrándonos en el Decreto 148/2002 que establece el currículo de matemáticas para la ESO en Andalucía, observamos que la "proporcionalidad" (aritmética) aparece, salvo en el primer curso y en la opción B del cuarto curso, en el *sector* denominado "magnitudes" y dentro del área llamado "Números[9]" (en coherencia con el RD 3473/2000 por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la ESO en el ámbito nacional, donde la "proporcionalidad" se sitúa también en un (hipotético) sector en torno a las "magnitudes", pero sólo en el primer y en el segundo curso).

Paralelamente, en el área de "Funciones y su Representación Gráfica" se inicia el estudio "cualitativo" de dependencias funcionales a partir de enunciados, gráficas y tablas (1er ciclo de la ESO). En el 2º ciclo, se introducen las expresiones algebraicas de relaciones funcionales y la actividad matemática asociada evoluciona hacia el estudio de las propiedades de las "funciones elementales", determinadas según el criterio "tipo de expresión algebraica" (polinómicas –de 1er grado, de 2º grado-, exponenciales, hiperbólicas, etc.).

El decreto curricular establece elementos praxeológicos de la *modelización clásica* (al ubicar la proporcionalidad en el área de "Números") y a su vez de la *modelización funcional* (estudio de las funciones lineales y de *proporcionalidad inversa*). Explícitamente no nos

9 Subyace una concepción "estática" de la proporcionalidad como relación "estática" entre cuatro cantidades (o medidas de cantidades) de magnitud.

es posible identificar elementos de la *modelización ecuacional*. A priori, la ubicación en sectores "alejados" induce ya cierta desarticulación y una posible atomización entre ambas modelizaciones de la relación de proporcionalidad. Sin embargo, será necesario ahondar en el siguiente *nivel de concreción curricular* para observar el desarrollo que se hace de esta organización de la matemática escolar.

La emergencia de otros tipos de dependencias, explícita en el segundo ciclo, debería provocar el cuestionamiento de la relación de proporcionalidad y su integración en una organización matemática más amplia junto a otros tipos de variación entre magnitudes.

Los libros de texto

A partir del análisis detallado de libros publicados por dos editoriales y de la revisión de numerosos textos escolares, en García (2005) se pone de manifiesto la relativa uniformidad que existe en el tratamiento de la "proporcionalidad" y de las "relaciones funcionales".

En resumen, observamos que la *organización matemática a enseñar* separa, por un lado, el ámbito del *estudio clásico de la proporcionalidad* (que sitúa en el marco "clásico" de la proporcionalidad aritmética) y, por otro, el ámbito del estudio de las *relaciones funcionales*. En la medida en que el *estudio clásico* suele incluir *modelizaciones ecuacionales*, la "constante de proporcionalidad" aparece como único elemento de articulación entre dichos ámbitos.

En ambos ámbitos aparecen componentes praxeológicos de diferentes modelizaciones de los sistemas "lineales" y "lineales inversos" pero, en ningún caso, dichos componentes se articulan para integrar una organización matemática *local* relativamente completa (por ejemplo, cuestionando las técnicas, mostrando su limitación y por tanto la necesidad de construir nuevas modelizaciones, etc.), por lo que podemos afirmar que la organización matemática *a enseñar* propone una *amalgama de organizaciones matemáticas puntuales y relativamente aisladas* en la que se entremezclan *razones* y *proporciones* con *modelos ecuacionales* del tipo $y= kx$ (o $y=k/x$) y con el estudio de las *funciones lineales e hiperbólicas*.

Esta situación es perfectamente compatible con la ausencia del *álgebra* como instrumento de modelización y nos permite avanzar en nuestra hipótesis del carácter pre-algebraico que la actividad matemática escolar.

Paralelamente a este fenómeno de *desarticulación*, se observa que el papel de la *modelización matemática* que se propone en la organización matemática *a enseñar* es accesorio y casi superfluo. Obedece a un uso oportunista de *sistemas proporcionales* para la introducción de las funciones lineales pero, realmente, no existe cuestionamiento alguno sobre el *sistema* puesto que siempre se parte de situaciones en las que la *transparencia cultural del sistema* lleva implícito el carácter proporcional del mismo. Lo mismo ocurre cuando se introducen las *funciones exponenciales*, mediante un uso interesado de uno o dos sistemas que rápidamente desaparecen. Cuando no es fácil encontrar *sistemas culturalmente aceptables*, se observa entonces una desaparición progresiva de la modelización matemática y, consiguientemente, del estudio de sistemas (tanto intramatemáticos como extramatemáticos). La actividad matemática se desplaza entonces completamente al estudio de las propiedades "formales" (expresión algebraica, representación gráfica, cortes con los ejes, crecimiento, etc.) de diferentes tipos de funciones "numéricas".

Otra muestra clara del *papel oportunista de la modelización matemática* en la *organización matemática a enseñar* lo pone de manifiesto la ausencia casi absoluta de cuestionamiento en torno al tipo de relación funcional más pertinente para modelizar un sistema determinado, en función de las cuestiones problemáticas que se planteen en dicho sistema. En particular, nun-

ca aparece la necesidad de hacer "evolucionar" la relación funcional que modeliza un sistema para construir conocimientos cada vez más amplios (o simplemente, más conocimientos) de un mismo sistema (que también debería ser sucesivamente "reconstruido").

En lo que sigue, mostraremos, partiendo de un sistema concreto, el poder articulador de la modelización matemática cuando se pone en funcionamiento de forma explícita y sistemática, dando lugar a una actividad matemática más algebrizada, articulada, integrada y menos atomizada.

PROPUESTA DE ARTICULACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS RELACIONES FUNCIONALES MEDIANTE UN PROCESO DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICA

Toda *actividad de estudio e investigación* (AEI) parte de una cuestión generatriz *Q*, que permite hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para explicar y justificar la actividad matemática que se ha llevado a cabo (Chevallard, 1999).

Si esta cuestión generatriz *Q* es lo suficientemente fecunda, dará lugar a nuevas cuestiones problemáticas que generarán nuevos tipos de tareas cuya respuesta producirá una sucesión de organizaciones matemáticas articuladas entre sí, en un período de tiempo relativamente largo, esto es, un *recorrido de estudio e investigación*[10] (REI).

En el comienzo de la actividad en cualquier campo de las matemáticas, la cuestión fundamental que conviene plantearse es la de las *razones de ser* que han motivado la creación y desarrollo de este campo, y que motivan también su presencia en los programas de estudios. En el caso de las "funciones", si bien no es posible formular con demasiada precisión una cuestión generatriz única, es evidente que el origen de las posibles formulaciones se encuentra en el *estudio de la variación*, esto es, en el estudio de *situaciones* en las que dos o más magnitudes varían, dependiendo unas de las otras, y en torno a las que nos preguntamos cómo podemos describir y caracterizar esta variación.

Entendemos el término *sistema* en el sentido de una praxeología o al menos de un conjunto de componentes praxeológicos que englobe, como mínimo, a dos magnitudes y a algún componente tecnológico susceptible de dotar de sentido a una posible relación entre ellas. El carácter intra-matemático o extra-matemático de este componente tecnológico será el que determine el entorno en el que el sistema su ubique. Para su elección debemos tener en cuenta la restricciones que, desde los diferentes *niveles de determinación*, condicionan todo proceso de estudio a desarrollar en una institución escolar, así como el tipo de actividad matemática que pretendemos que el sistema genere.

En el REI que hemos diseñado, proponemos ubicar los sistemas en un entorno de tipo *económico-comercial* (construcción de "programas" o "planes de ahorro"), puesto que:

— Constituye un medio familiar para el alumno de la institución Enseñanza Secundaria que nos permitirá desarrollar una actividad matemática suficientemente amplia, que será descrita más adelante.

— Se trata de un ámbito de la sociedad actual que la *escuela* debería tomar más en serio si realmente asume su función de servir de instrumento para "mejorar la vida de los ciudadanos[11]".

10 Véase Chevallard (2006) para una descripción más detallada de los *Recorridos de Estudio e Investigación.*

11 Chevallard (2006) considera que la *epistemología escolar* dominante en la actualidad está caracterizada por

— Además, en coherencia con el *modelo epistemológico de referencia* esbozado anteriormente, este entorno permite dotar de sentido a la discretización de las variables.

En esta construcción del sistema, emergen dos variables fundamentales:

— V_1 → la duración del "plan de ahorro" (*PA* en adelante) y la distribución temporal de los diferentes plazos.

— V_2 → las cuotas (cantidades de dinero) que se entregarán en cada plazo (y, relacionadas con estas, la cantidad total que se tiene ahorrada en cada plazo).

Suponemos, además, que la relación entre la variable V_1 y V_2 es unívoca, es decir, que para cada "plan de ahorro" y para cada medida de una cantidad de la primera magnitud, existe sólo una cantidad de la segunda magnitud relacionada con ella. Obviamente, otras condiciones sobre la *construcción* del sistema harían que las propiedades de éste variasen de manera significativa.

Esta primera delimitación del sistema es suficiente para plantear una cuestión generatriz capaz de generar el REI y, en especial, para suscitar la necesidad de un *segundo grado* de construcción del sistema, que formará parte de la actividad matemática que debe desarrollar el alumno.

Proponemos como *cuestión generatriz* del REI la siguiente:

Q_A : ¿Qué criterios utilizar para planificar un "plan de ahorro" concreto (PA_i)?

Esta cuestión es una *cuestión crucial*, en varios sentidos:

— Su generalidad lleva implícita la necesidad de un *segundo grado de estructuración*, que ahora forma parte de la tarea en sí, y será responsabilidad de la comunidad de estudio.

— Es capaz de generar una actividad matemática a partir de un *medio matemático* relativamente limitado (*técnicas aritméticas elementales*), y que forma parte del *medio matemático* de un alumno de la institución en la que el REI se ubicará (segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria).

— La construcción y simulación de diferentes planes de ahorro, que en principio surgirán como praxeologías puntuales, permitirá la emergencia de nuevas cuestiones problemáticas en torno a ellas, que serán el verdadero motor del REI.

De esta forma, la comunidad de estudio tendrá la responsabilidad de:

1. **Elegir un primer estado**: comenzar en un instante determinado y con una cierta cantidad de dinero. Este estado inicial adquiere un carácter provisional y será revisable en cada momento y susceptible de ser modificado. De esta forma, este primer estado comienza a desempeñar el rol de un parámetro de la situación.
2. **Decidir cómo se van a ir generando los próximos estados**, esto es, el **tipo de variación** que caracterizará al sistema. No existe una única forma de realizar esta tarea, y supone la toma de decisiones sobre las variables del *sistema*.

---

eliminar las "razones de ser" de las praxeologías propuestas para ser estudiadas en la escuela. De esta forma, se produce un *fenómeno de monumentalización* de estas praxeologías, que son llevadas a la escuela como objetos ya creados, valiosos por sí mismos, a los que se *invita* al alumno a *visitar*.

3. Simular el sistema, esto es, construir un conjunto de estados lo suficientemente amplio como para permitir que se desarrolle el trabajo experimental necesario para el estudio.

Aunque la libertad aún es grande, es de esperar que emerjan planes de ahorro con distribuciones temporales uniformemente espaciadas y entrega de cuotas según una *ley recurrente de orden uno,* que darán lugar a diferentes "planes de ahorro[12]".

En una descripción general, el REI parte de la simulación de planes de ahorro, según diferentes tipos de variación (tarea $T_{\text{simulación}}$), es decir, elegir el número de cuotas y la cuantía de los parámetros iniciales y calcular las cantidades acumuladas en cada plazo hasta obtener la cantidad final ahorrada . La realización de esta primera tarea conduce a la construcción de un conjunto de técnicas aritméticas sencillas ($\tau_{\text{aritmética}}$) que, si se desea, pueden ser programadas usando una herramienta informática como Excel. De esta forma, para cada tipo de variación se construye una primera praxeología puntual:

$$PA(Eq),\ PA(Var_{Ac}^{1}),\ PA(Var_{Ac}^{2}),\ PA(Var_{Ac}^{3}) \text{ y } PA(Var_{Ac}^{4}).$$

La actividad matemática que es posible realizar con cada una de estas praxeologías puntuales es limitada. Esta limitación se hace más evidente cuando se desea, no sólo construir estados del sistema, sino controlar el sistema (en el sentido de tomar decisiones sobre sus parámetros), esto es, tomar decisiones que nos permitan prever y anticipar su comportamiento y construir sistemas "a medida", según distintas necesidades de ahorro. También muestran limitaciones para la realización de tareas relativas a la comparación entre sistemas (para una descripción más detallada de las diferentes tareas, remitimos al lector a García, 2005).

A partir de estas limitaciones se plantea la necesidad de ampliar estas OM puntuales a otras locales en las que disponer de instrumentos que permitan controlar y anticipar el comportamiento del sistema, así como comparar diferentes sistemas:

$$OM_L(Eq),\ OM_L(Var_{Ac}^{1}),\ OM_L(Var_{Ac}^{2}),\ OM_L(Var_{Ac}^{3}) \text{ y } OM_L(Var_{Ac}^{4})$$

Para ello, la comunidad de estudio tendrá que trabajar sobre cada tipo de ahorro con el fin de construir *modelos algebraicos* que permitan caracterizar los estados del sistema y relacionarlos con los parámetros iniciales. Este "juego" entre variables, incógnitas y parámetros es el que caracteriza la emergencia de una actividad matemática algebrizada. El álgebra no surge como una mera traducción de cierta *realidad aritmética,* sino como una herramienta necesaria para ampliar el conocimiento y el control que se tiene de los diferentes "planes de ahorro". De esta forma, la *razón de ser* de la herramienta algebraica surge de la propia situación y obedece a necesidades intrínsecas y no meras razones didácticas externas.

El hecho de que los diferentes tipos de variación estén formulados como recurrencias de orden 1 permite la construcción de una técnica común (τ_{rec}), cuya realización concreta depende de cada tipo de variación, pero que, de manera general, consiste en construir diferentes estados para luego relacionarlos a través de la ley de recurrencia hasta llegar a las cantidades iniciales que actúan como parámetros.

De igual forma que con los *modelos* aritméticos, tiene que ser puesto a prueba el alcance y la validez del este *modelo algebraico* para generar técnicas que permitan controlar y anticipar

12 En García (2005) hemos trabajado sobre cinco tipos de variación, definiendo cinco tipos de "planes de ahorro": equitativos (Eq), acumulativos de cuota creciente (Var_{Ac}^{1},Var_{Ac}^{2}) y acumulativos de cuota decreciente (Var_{Ac}^{3},Var_{Ac}^{4}).

el funcionamiento de cada plan de ahorro, así como comparar planes de ahorro entre sí, tanto entre aquellos sujetos al mismo tipo de variación como entre planes que evolucionan bajo condiciones diferentes.

CONCLUSIONES Y NUEVOS PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN

Hasta aquí hemos mostrado cómo el *problema del álgebra escolar* ha sido reformulado como problema de investigación en el marco de la TAD y algunas de las respuestas construidas desde diferentes investigaciones. Hemos caracterizado el *modelo epistemológico dominante del álgebra escolar* y analizado algunos de los efectos que provoca sobre el SEM (carácter pre-algebraico de la matemática escolar), hemos introducido un modelo alternativo del álgebra escolar como herramienta de modelización y hemos analizado los efectos que la *algebrización* de la actividad matemática podrían tener sobre la matemática escolar y las restricciones que dificultan su plena integración en los actuales *Sistemas de Enseñaza de las Matemáticas*.

Entre los fenómenos identificables en el *SEM*, relacionados con la ausencia de la modelización algebraica, nos hemos centrado en el de la *desarticulación y atomización de la matemática escolar*, estudiándolo en profundidad en el caso de la relación de proporcionalidad (en la ESO) y mostrando la necesidad de cuestionar los *sectores* y las *áreas* en las que tradicionalmente se "compartimenta" la matemática escolar. Hemos diseñado un proceso de estudio como propuesta de articulación de saberes previamente construidos durante la ESO (proporcionalidad y relaciones funcionales) a través del uso explícito de la modelización algebraica.

Sin embargo, la implementación experimental de este *proceso de estudio* durante los cursos escolares 2003-2004 y 2004-2005 (con alumnos de 4º de eso y de 1º de bachillerato) muestra notables dificultades: ligadas a las restricciones transpositivas generales, a las restricciones "pedagógicas" y "escolares", al contrato didáctico *generalizado* en las instituciones docentes, entre otras. En la medida en que el *proceso de estudio* diseñado supone la plena operatividad de la herramienta algebraica, su implementación supone una irrupción brusca de la *modelización algebraica* que, como no podía ser de otra forma, choca con el carácter pre-algebraico dominante en las actuales instituciones escolares.

Es por ello que surge la necesidad de investigar en qué niveles y cómo introducir y hacer evolucionar la *modelización algebraica* para que ésta llegue a alcanzar un determinado grado de desarrollo a la finalización de la Educación Secundaria (y más allá, permitiendo la articulación con la Universidad). Retomando las cuestiones formuladas en el apartado *El álgebra como instrumento de modelización*:

- ¿Cuáles son las condiciones que deberían darse para que la modelización algebraica estuviese presente en los *Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas* y, en particular, para que fuese posible el estudio escolar de organizaciones matemáticas progresivamente algebrizadas?

- ¿Es posible y didácticamente viable, en el actual *SEM*, diseñar un currículum de matemáticas en el que tenga cabida el álgebra escolar como instrumento de modelización?

En el marco del grupo Bahujama se están llevando en la actualidad diferentes investigaciones que, partiendo de los trabajos previos aquí revisados, intentan avanzar en este problema general y en las ramificaciones que surgen a partir del mismo. Entre otras:

- En Ruiz, Bosch y Gascón (2007a, 2007b), proponen tres niveles de desarrollo de la *modelización algebraica-funcional* y se analiza el papel que puede desempeñar como *herramienta de algebrización*, permitiendo la emergencia de una actividad matemática en la que tome

pleno sentido el juego entre *variables* y *parámetros* en la ESO. Se propone y experimenta un *recorrido de estudio e investigación* en el que se integra el uso de una calculadora simbólica (WIRIS). De esta forma, se pretende investigar el papel que las calculadoras simbólicas pueden desempeñar en el desarrollo del *álgebra como herramienta de modelización*.

- En Barquero, Bosch y Gascón (2007a, 2007b) se analiza cómo integrar contenidos de diferentes *áreas* en el primer curso de enseñanzas universitarias de ciencias. Se construye y experimenta un *recorrido de estudio e investigación* como proceso de modelización que, partiendo del estudio de un problema extra-matemático (dinámica de poblaciones) pretende la construcción articulada de contenidos algebraicos, de cálculo diferencial e integral de una variable y ecuaciones diferenciales.

- En Serrano, Bosch, Gascón (2007) se parte de la atomización identificada en el conjunto de *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en la Educación Secundaria (Fonseca 2004) y se aborda el problema de diseñar un proceso didáctico capaz de situar las cuestiones problemáticas del mundo de la economía y la empresa en el punto de partida del estudio, haciendo que estas cuestiones sean la fuerza generadora de los contenidos matemáticos que se enseñan, tomando la modelización matemática como instrumento de articulación.

En todas ellas, y de manera transversal, subyacen cuestiones generales relativas a la determinación de las restricciones transpositivas que operan sobre los *procesos de modelización matemática* en las instituciones escolares y se intenta avanzar en la determinación de las condiciones *ecológicas* que permitirían el pleno desarrollo de dichos procesos en los Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007a). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias. Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (en prensa). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2007b). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. Comunicación presentada en el 5º Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Lárnaca (Chipre).

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano", número 23.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998a). Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998b). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. Comunicación presentada en el 1er Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Osnabrueck (Alemania).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21/3, 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

CECJA (2002). Decreto 148/2002 por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 75 de 27/06/2002.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989b). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, nº 11. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.) *Proceedings of the IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 21-30. Barcelona: FundEmi IQS - Universitat Ramon Llull.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13/3, 295-332.

Gascón, J. (1994-95). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x*, 37, 43-63.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77 - 88.

Gascón, J. (2007). *El proceso de algebrización de las matemáticas escolares*. Escuela de Invierno de Didáctica de las Matemáticas, Buenos Aires (Argentina), pendiente de publicación.

Gascón, J., Muñoz-Lecanda, M., Sales, J. y Segura, R. (2004). Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro, Comunicación invitada en las *Xornadas sobre Educación Matemática* (Santiago de Compostela, 16-18/09/2004).

[Recuperado el 05/05/05 en http://www.agapema.com/activ/act_formacion/SANTIAGO-PONENCIA.doc]

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2007a). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (en prensa). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2007b). The functional algebraic modelling at secondary level. Comunicación presentada en el 5º Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática. Lárnaca (Chipre), 22-26 de febrero de 2007.

Serrano, L., Bosch, M. y Gascón, J. (2007): "Cómo hacer una previsión de ventas": propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas". Comunicación aceptada en el Segundo Congreso Internacional sobre la TAD. Ùzes (Francia), pendiente de publicación.

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA
EN LOS NIVELES NO UNIVERSITARIOS

SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II

ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN LOS NIVELES NO UNIVERSITARIOS: ALGUNOS RETOS PARA LA INVESTIGACIÓN

Carmen Batanero (Coordinadora)
Universidad de Granada, batanero@ugr.es

La estadística es parte del currículo de matemáticas en la educación primaria y secundaria en muchos países desde hace años, aunque en la actualidad asistimos a un aumento de interés sobre el tema. Por ejemplo, en las nuevas propuestas del MEC (2006 a) por las que se establecen las enseñanzas mínimas para la educación primaria, se incluye un bloque sobre Tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el que, para el Primer Ciclo se incluyen, entre otros contenidos, la descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos y utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos. Entre los criterios de evaluación para este ciclo se sugieren realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras, así como formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos. También en la educación secundaria obligatoria (MEC, 2006b) se da mayor énfasis a la estadística y probabilidad al separarla del bloque de las funciones y gráficas.

Se sugiere también un cambio en la metodología de enseñanza: Una estadística basada en las aplicaciones y centrada en el análisis de datos reales, indicando que los contenidos de este bloque adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Asimismo se insiste en la necesidad de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, y en fomentar la valoración del beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones. Este documento no es una excepción, sino sigue las directrices en otros países, como, por ejemplo, las del NCTM (2000) o SEP (2006). La finalidad en todos estos currículos ha de ser el desarrollo del razonamiento estadístico, que es diferente del razonamiento matemático, siendo ambos esenciales en la sociedad moderna y complementándose en reforzar el currículo global de matemáticas para los estudiantes (Scheaffer, 2006).

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Carmen Batanero (2007). ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN LOS NIVELES NO UNIVERSITARIOS: ALGUNOS RETOS PARA LA INVESTIGACIÓN, pp. 93-97.

El cambio de la enseñanza de la estadística requiere, además de otros condicionantes, una mejor preparación de los profesores, ya que, la incipiente investigación sobre el tema muestra la existencia de una variedad de dificultades y errores estadísticos en los profesores o futuros profesores que podrían transmitir a sus estudiantes (Rubin y Rosebery, 1990; Cardeñoso, 2001; Makar y Confrey, 2004; Stohl, 2005; Monteiro y Ainley, en prensa). En el mejor de los casos, los profesores de secundaria han cursado una licenciatura de matemáticas, pero, dentro de esta licenciatura la mayoría sólo estudió estadística teórica (matemática) en su formación inicial. Pocos profesores de matemática reciben una formación específica en estadística aplicada, diseño de muestreo o de experimentos, análisis de datos de aplicaciones reales o uso del software estadístico. Estos profesores también necesitan formación en el conocimiento pedagógico relacionado con la educación estadística, a la que no pueden transferirse algunos principios generales válidos para la geometría, aritmética u otras ramas de las matemáticas (Azcárate, 1995; Batanero, Godino y Roa, 2004; Lopes, 2006; Eichler, en prensa). La situación es todavía más crítica para los profesores de educación primaria, ya que pocos profesores de primaria tuvieron una formación suficiente en estadística teórica o aplicada, y un curso tradicional de iniciación a la estadística no les proporcionará el conocimiento didáctico que necesitan (Mickelson y Heaton, 2004; Franklin y Mewborn, 2006).

El esfuerzo de investigación que se ha concentrado sobre la educación del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional en la década pasada no se ha reflejado en la educación estadística. Esto es evidente en conferencias (e.g., el ICMI Study 15), revistas (e.g., *Journal of Mathematics Teacher Education*), estados de la cuestión (e.g. Llinares y Krainer, 2006) y libros, que apenas tratan el caso particular de la estadística. Por otro lado, aunque la investigación en educación estadística es hoy muy amplia, como lo muestran las siete conferencias internacionales sobre enseñanza de la estadística, iniciadas en 1982 y los dos capítulos recientes de Jones (2007) y Shaughessy (2007), las concepciones, conocimientos, actitudes, y conocimiento previo de los profesores sobre estadística apenas se ha tenido en cuenta.

En este seminario presentamos algunos avances de investigación centrados en esta problemática, cuyo interés ha sido reconocido tanto por la International Comisión on Mathematical Instruction (ICMI), como por la International Association for Statistical Education (IASE) que actualmente organizan conjuntamente el Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education (Batanero y cols., 2006).

La profesora Candelaria Espinel, aborda el tema “Construcción y razonamiento sobre gráficos estadísticos en la formación de profesores”. Hoy día las graficas estadísticas se utilizan como un poderoso lenguaje para describir y analizar numerosos aspectos de nuestro entorno económico, físico y social y la comunicación efectiva a través de graficas es una habilidad necesaria para todo ciudadano y debe formar parte de una cultura estadística (Gal, 2002). Por este motivo, la construcción e interpretación de gráficas estadísticas elementales se incluyen en los contenidos mínimos para la educación primaria desde el primer ciclo. Sin embargo la investigación previa llevada a cabo por la profesora Espinel y su equipo, a nivel exploratorio (Bruno y Espinel, 2005), y de otros autores (Monteiro y Ainley, en prensa), así como el trabajo presentado en la ponencia, muestran las dificultades que tienen los futuros profesores participantes para interpretar las graficas estadísticas que aparecen en los medios de comunicación. También sugieren carencias importantes en relación a gráficas elementales, como son los histogramas, tanto en su construcción, como en el uso de los mismos para razonar sobre distribuciones de datos.

Otro tema importante es el de las actitudes hacia la estadística, analizado por la profesora Assumpta Estrada, quien realiza una revisión de la investigación en este campo y presenta los principales resultados de su propia investigación con profesores en formación (Estrada, 2002; Estrada, Batanero y Fortuny, 2004; Estrada, Batanero, Fortuny y Díaz, 2005). Este tema puede tener importancia especial en el caso de la estadística, cuya enseñanza, como hemos indicado no llega a desarrollarse de acuerdo con las recomendaciones curriculares. La profesora Estrada sugiere un posible circulo vicioso: Al no enseñarse la estadística, los profesores tienen escasa oportunidad de lograr un desarrollo profesional adecuado en esta materia, lo que influye en sus actitudes negativas hacia la misma. Dichas actitudes, a su vez, inducen a relegar la enseñanza de la estadística, omitirla o, en el mejor de los casos, enseñarla simplemente como pretexto para la actividad matemática, centrándose en el cálculo y demostraciones formales y no en las aplicaciones a otras áreas de conocimiento o el trabajo con proyectos.

Finalmente, la profesora Carolina Carvalho aborda el tema del trabajo cooperativo en las aulas de estadística, como una forma de lograr el espíritu investigador y exploratorio sugerido para la enseñanza de la estadística en las orientaciones curriculares e investigaciones en el área. El trabajo cooperativo, sin embargo, presenta desafíos a los profesores, educadores estadísticos e investigadores, respecto a tres puntos como muestra su investigación previa (Carvalho, 2001, 2004): el aprendizaje de la estadística, el aprendizaje de la estadística a partir del trabajo cooperativo y la capacitación de los profesores para llevar a cabo la enseñanza a partir del trabajo cooperativo. Cada uno de estos puntos es abordado en la presentación, proporcionando información sobre las investigaciones relacionadas, en particular, las llevadas a cabo en Portugal.

Aunque la educación estadística, como tema de investigación, involucra sólo a una parte de los miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, la mayoría de nosotros estamos implicados en la formación de profesores, y tenemos, por tanto, responsabilidad en su preparación para abordar con éxito la enseñanza de los nuevos contenidos en los decretos de enseñanzas mínimas para la educación primaria y secundaria. Dada la relación entre nuestro trabajo como formadores de profesores y nuestra investigación sobre conocimientos y formación de los profesores (García, Sánchez, Escudero y Llinares, 2006), esperamos que las presentaciones en el seminario interesen a los participantes y sirvan para orientar el debate general, tanto sobre posibles agendas de investigación en el campo de la educación estadística, como sobre posibles cambios en la formación de profesores para capacitarlos para su enseñanza.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C., Albert, A. Ben-Zvi, D., Burrill, G., Connor, D., Engel, J., Garfield, J., Hodgon, B., Li, J., Pereira-Mendoza, L., Ottaviani, M. G., Pfannkuch, M., Polaki, V. Rossman, A. y Reading, C. (2006). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Discussion Document.* ICMI e IASE: On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*. On line: http://www.amstat.org/publications/jse/

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad.* Tesis doctoral. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Carvalho, C. (2001). *Interacções entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tesis doctoral. Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. (2004). Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. En J. A. Fernandes, M. V. Sousa, S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística. Actas do 1.º Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 85-102. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Eichler, A. (En prensa). Individual curricula: Teachers' beliefs concerning stochastics instruction. *International Electronic Journal of Mathematics Education.*

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias, 22* (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M. y Diaz, C. (2005). A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 508-517. CERME 4* San Feliu deGuixols, Gerona: ERME. CDROM.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70* (1), 1-25.

García, M., Sánchez, V., Escudero, I. y Llinares, S. (2006). The dialectic relationship between research and practice in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 109-128.

Jones, G. y Langrall, C. (2007). Research probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-956). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., y N.C.T.M.

Lopes, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil.* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

LLinares S. y Krainer K. (2006) Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 429 – 459. Rotherdam / Taipei: Sense Publichers.

Makar, K. M. y Confrey, J. (2004). Secondary teachers' reasoning about comparing two groups. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*, 327-352. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

MEC (2006 a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*. BOE. 8/12/2006.

MEC (2006 b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de Diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. BOE. 5/1/2007.

Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Monteiro, C. y Ainley, J. (En prensa). Investigating the interpretion of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education.*

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; NCTM. On line: http://standards.nctm.org/

Rubin, A. y Rosebery, A. S. (1990). Teachers' misunderstandings in statistical reasoning: Evidence from a field test of innovative materials. En A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics. Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference*, 72-89. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Scheaffer. R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil*. International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria.* Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 957-1010. Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., y NCTM.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer.

CONSTRUCCIÓN Y RAZONAMIENTO DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

María Candelaria Espinel Febles
mespinel@ull.es
Universidad de La Laguna

RESUMEN

La comunicación efectiva a través de gráficas es una habilidad necesaria para todo ciudadano y debe formar parte de una cultura estadística. Nos preguntamos si los contenidos curriculares actuales son suficientes para interpretar las gráficas estadísticas que aparecen en los medios de comunicación. En esta presentación se muestran algunos resultados de nuestras investigaciones sobre las dificultades que presentan algunos gráficos para los estudiantes futuros profesores de primaria. En primer lugar, se recogen varios errores frecuentes que se cometen en la construcción de ciertas gráficas y en segundo lugar, las dificultades que encuentran cuando razonan sobre representaciones de distribuciones de datos.

ABSTRACT

Effective communication through graphs is a necessary ability for all citizens and should be past of a statistical culture. We ask ourselves if the present curricular contents are sufficient to interpret the statistical graphs that appear in mass media. In this presentation some results of our investigations about the difficulties that some graphs present for future primary teachers are shown. We firstly present several frequent errors that are committed in the construction of certain graphs and, secondly the difficulties that students find when reasoning about representations of distributions of data.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
María Candelaria Espinel Febles (2007). CONSTRUCCIÓN Y RAZONAMIENTO DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES, pp. 99-119.

INTRODUCCIÓN

Uno de los retos de la enseñanza está en conectar con la realidad y con lo que demanda la sociedad en cada momento. Los que nos dedicamos a la enseñanza, con frecuencia tenemos la impresión que vamos por detrás de lo que la sociedad reclama. Hay que tener en cuenta que en ocasiones existe un distanciamiento importante entre la escuela y la vida cotidiana y que uno de los puentes entre ambas son los medios de comunicación. En el caso de la enseñanza de la estadística la distancia era clara, pero parece que con las distintas reformas del currículo se están dando pasos para acortar el camino.

En nuestro país, se espera que cualquier persona después de pasar por una enseñanza básica, hasta los 16 años, tenga una cultura estadística que le permita ser capaz de leer e interpretar los datos que encuentre en la prensa. Esto no siempre es así, de hecho hay gráficos y nociones elementales que utiliza la prensa que no se suelen enseñar en la escuela. Señalamos dos casos que podemos encontrar casi a diario en la prensa escrita:

- *Gráficos no cartesianos*: Hay últimamente un uso frecuente de gráficos no cartesianos, como son los círculos proporcionales colocados en un mapa, y que difiere de los clásicos sectores circulares (ver figura 1, El País, 14.5.2006).

Figura 1. Ejemplo de gráfico no cartesiano en la prensa diaria

El diseño de los círculos supone cierta dificultad, ya que se ha de elegir una escala que permita distinguir los valores más pequeños de los más grandes (Carrera y otros, 1988). En el caso de los círculos hay una proporcionalidad lineal (k) en los diámetros y cuadrática (k^2) en el área. Se trata de diseñar figuras cuyas áreas son proporcionales a las cantidades que representan. Tal técnica de construcción no se contempla en estadística, ni en geometría y tampoco en otras áreas de ciencias sociales. Por otro lado, existe un problema de percepción pues el área de la figura es proporcional al cuadrado del radio (Cleveland y McGill, 1984).

Lo que está ocurriendo es que, la disponibilidad de programas informáticos lleva a que la prensa utilice una gran variedad de gráficos que muchas veces no son los gráficos cartesianos que se enseñan en las aulas. En la figura 1, se muestra una radiografía de las tiendas "todo a cien" (fuente Ministerio de Industria, Turismo y Comercio), recurriendo a todo un abanico de gráficos, pues además de los círculos proporcionales, aparecen sectores circulares y tres clases de gráficos de barras (diagrama de rectángulos para variables cualitativas, rectángulo dividido y diagrama de barras con datos agrupados en intervalos).

- *Interpretar porcentajes*: La prensa diaria nos brinda pérdidas o ganancias expresadas en porcentajes, esto es, cambios sufridos por una variable, generalmente a través del tiempo (ver figura 2, El País, 25.6.2006).

Figura 2. Ejemplo de cambio de porcentaje dado en la prensa

En la figura 2 se muestra información sobre el crecimiento de un 7% en la retribución de los consejeros. La interpretación de este gráfico es un misterio para los alumnos de 15 años, ya que no forma parte de una fórmula rutinaria a la que estén acostumbrados. Claro que alguno lo adivina por ensayo y error. La situación es que, casi a diario, la prensa escrita muestra las perdidas o ganancias, los crecimientos o las variaciones, en forma de porcentajes que pocas personas saben interpretar y, a veces, ni calcular. Los textos escolares soslayan este tratamiento de los porcentajes, con algunas pocas excepciones como Nortes Checa (1996). Claro que, según Schield (2006), leer un "tanto por ciento" es más difícil que calcularlo.

Volviendo al tema que nos ocupa, el conocimiento de la estadística elemental y de los gráficos en la formación de los profesores de primaria, en Espinel (2000) se reflexiona sobre una posible pedagogía de los gráficos en la formación de profesores, realizando un recorrido por la fenomenología social y una reflexión epistemológica. También se incluye un análisis sobre percepción, memorización y lenguaje gráfico, desde la psicología cognitiva, para terminar con una propuesta de secuenciación del currículo en este tema.

En esta ponencia se resumen dos investigaciones sobre gráficos. La primera sobre construcción y evaluación de histogramas, desarrollada en dos fases. Y la segunda investigación, sobre representación de distribuciones de datos y razonamiento estadístico, cuyos resultados son aún provisionales.

En ambos estudios participan estudiantes para profesores de primaria de distintas especialidades de la Universidad de La Laguna (Tenerife, España). Todas las pruebas se realizan en una sesión de clase de la asignatura de Matemáticas, al finalizar el tema de estadística. En dicho tema los alumnos han trabajado sobre estadística descriptiva, aproximadamente diez horas, estudiando los gráficos estadísticos.

UNA EXPERIENCIA SOBRE ERRORES DE CONSTRUCCIÓN Y DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN DE LOS HISTOGRAMAS

En lo que sigue, describimos de forma breve la primera de las investigaciones citadas, que fue desarrollada en dos fases.

Primera Fase de la Investigación

La primera fase de la investigación partía de la hipótesis inicial de que la habilidad para representar números en la recta numérica condiciona la comprensión y la realización de gráficas estadísticas. Agrupar números que tengan varios decimales en clases, para construir un histograma, requiere un claro conocimiento del orden de los números. A partir de esta hipótesis, se diseño una prueba escrita con dos objetivos de investigación. Primero, observar cómo influye el dominio de la recta numérica en la habilidad para realizar gráficas estadísticas; y segundo, estudiar si los profesores en formación tienen dificultades para representar números decimales. Los datos para las preguntas de la prueba se tomaron de la prensa escrita, en concreto sobre el precio de los carburantes en los 25 países de la Unión Europea. La prueba constaba de seis preguntas, pero aquí sólo comentaremos la relativa a histograma y polígono de frecuencias. La prueba escrita la contestaron 39 alumnos estudiantes para profesores y los resultados se pueden encontrar en Bruno y Espinel (2005).

Pregunta 1. Con los datos de la gasolina 95 del **"El mercado de carburantes"[1],** construye una tabla con las frecuencias absolutas y relativas, en la que se agrupen los datos en intervalos de igual longitud, tomando como valor mínimo 0,600 y máximo 1,300. A continuación, construye el histograma correspondiente utilizando las frecuencias relativas.

En la pregunta 1, se pide construir la tabla de frecuencias absoluta y relativa y realizar un histograma usando las frecuencias relativas con intervalos de igual amplitud. Se les pide a los futuros profesores realizarlo con la frecuencia relativa para observar cómo representaban los números decimales en el eje vertical y poder contrastar con las preguntas de la recta numérica en las que debían representar decimales con la recta horizontal.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas a la pregunta 1

Correcto	Incorrecto			Blanco
	Tabla	Histograma	Tabla e histograma	
8	4	16	5	6

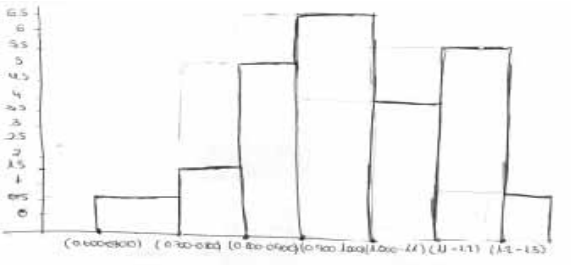
En la tabla 1 se observa que, de los 39 alumnos que participan en la experiencia, sólo 8 alumnos contestan de manera correcta esta pregunta. Entre los que responden de manera incorrecta están los que fallaron al elaborar la tabla, los que lo hacen al construir el histograma, o en ambos aspectos. Otros alumnos dejaron la pregunta en blanco. La mayoría construye el histograma con 7 intervalos y un alumno construye 4 intervalos. Solo 11 alumnos utilizan la frecuencia relativa que es la que se pedía.

En este caso, los alumnos no tuvieron dificultades para representar los números decimales en el eje vertical, sin embargo, encontramos que los alumnos tienen dificultades para colocar valores en el eje de la X, aún siendo capaces de agrupar los datos en intervalos.

Varios alumnos colocan las modalidades sin tener en cuenta que se trata de una variable agrupada en intervalos, o bien, todo el intervalo en un punto (ver figura 3), pero sin utilizar la marca de clase.

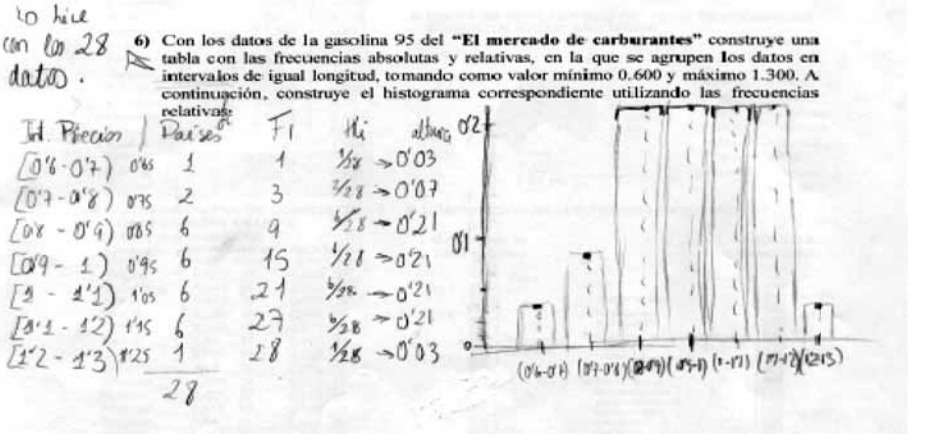
1 Se proporcionó a los alumnos una tabla de precios de los carburantes de los países de la Unión Europea tomados de la prensa (El País, 10.11.2004).

Figura 3. Respuesta incorrecta de un alumno en la construcción del histograma



Los alumnos, aún siendo concientes de que están trabajando con una variable continua, representan barras no solapadas (ver figura 4).

Figura 4. Respuesta incorrecta de un alumno en la tabla y en el histograma



En resumen, los resultados de esta primera fase del estudio ponen de manifiesto que los alumnos no mostraban dificultad en leer los datos desde la prensa, ni se encontró respuestas que evidenciasen poco dominio de la recta numérica. Sin embargo, aparecen algunos errores en las gráficas, en particular, en los histogramas, que no son atribuibles a las recta numérica. Estos resultados nos llevaron a una segunda fase del estudio en la que se diseño una prueba específica sobre histograma y polígono de frecuencias, cuyos resultados se muestran a continuación.

Segunda Fase de la Investigación

Se diseñó una segunda investigación utilizando una prueba escrita con dos cuestiones. En la pregunta 2 se pide construir un histograma y un polígono de frecuencias, a partir de una tabla de datos agrupados en intervalos, y en la pregunta 3 pide la evaluación de distintas representaciones gráficas. Se presentaron cinco gráficas construidas por alumnos (también futuros profesores de primaria): Cuatro de estas gráficas contenían errores y una gráfica era

correcta. Se pidió evaluarlas como *buena, regular* o *mala,* en función del número de errores (0, 1, 2 o más), señalando los errores observados. Las gráficas a evaluar aparecen en los resultados de la pregunta 3.

Pregunta 2. En un test de actitudes, puntuado de 0 a 60, pasado a 30 personas para ocupar un puesto en una empresa, se han obtenido los siguientes resultados:

Puntuación	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[50-60)
Frecuencia	1	2	8	15	4

Realiza un *histograma* y un *polígono de frecuencias* con los datos anteriores.

Pregunta 3. En un test de actitudes, puntuado de 0 a 50, pasado a 30 personas para ocupar un puesto en una empresa, se han obtenido los siguientes resultados:

Intervalo	[0-10)	[10-20)	[20-30)	[30-40)	[40-50)
Frecuencia	1	2	8	15	4

A continuación, te mostramos las respuestas de cinco alumnos a la pregunta de realizar un *histograma* y un *polígono de frecuencia* con los datos anteriores. Evalúa la respuesta de cada alumno. Para ello, debes:
a) señalar los errores que encuentres y b) puntuar cada representación como buena, regular o mala.

El objetivo del trabajo es evaluar cómo los futuros profesores construyen un histograma (pregunta 2), clasificar sus errores, y a continuación, contrastar si dichos errores se ven ratificados en la pregunta 3, cuando evalúan las representaciones realizadas por otros estudiantes. La pregunta 3 se plantea con el objetivo de ver si los errores de construcción son persistentes, y si la lectura reflexiva de un gráfico erróneo demuestra que los futuros profesores conocen los aspectos básicos de la construcción de un histograma.

Obsérvese que las tablas de datos de las preguntas 2 y 3 cambian de recorrido. En la pregunta 2, el recorrido es de 0 a 60 con un intervalo de frecuencia nula, y el recorrido de los datos de la pregunta 3 es de 0 a 50. Esta prueba fue contestada por 29 estudiantes futuros profesores de primaria.

Los resultados divididos en tres partes se recogen en Bruno y Espinel (2007). En este trabajo, en primer lugar, se analizan los errores de los estudiantes en la construcción del histograma, en segundo lugar, se estudian las evaluaciones realizadas a cada representación de los cinco planteadas, y, por último, en una tercera parte, se muestran algunos casos de repuestas de alumnos relevantes por sus coherencias, o bien, por sus incoherencias en las respuestas. En esta ponencia mostramos algunos resultados de dicha investigación.

En la tabla 2 se muestra el número de respuestas correctas e incorrectas de los alumnos en la construcción del histograma y del polígono de frecuencias de la pregunta 2.

Tabla 2. Repuestas correctas e incorrectas de la pregunta 2

	Polígono de frecuencias		
Histograma	Correcto	Incorrecto	Total
Correcto	1	9	10
Incorrecto	4	15	19
Total	5	24	29

Los datos indican que sólo un alumno representó correctamente los dos gráficos, 15 alumnos cometen errores en ambos gráficos, el resto de los alumnos, cometen errores en el histograma, o en el polígono de frecuencias.

Los principales errores en la construcción del histograma pueden agruparse en tres clases: construir el histograma con barras separadas (ver figura 5), etiquetar las barras (ver figura 5 y figura 6) y omitir el intervalo de frecuencia nula.

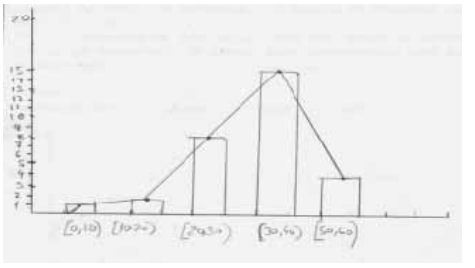


Figura 5. Histograma con barras separada

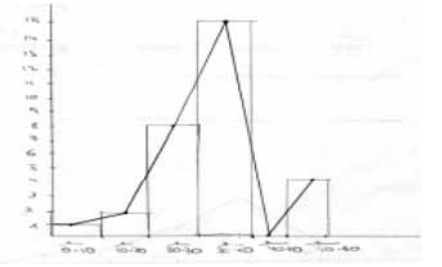
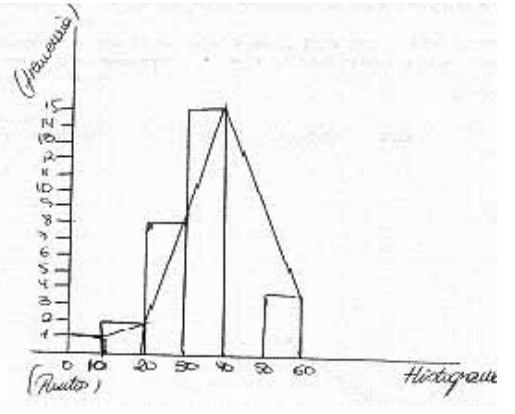


Figura 6. Incorrecta notación de los intervalos

En cuanto al polígono de frecuencias los errores más frecuentes son: no unir por las marcas de clase (figura 7), omitir el intervalo de frecuencia nula en el polígono (figura 7) y confusión entre la frecuencia y los intervalos.

Figura 7. Omisión del intervalo en blanco en el polígono



En la tabla 3, se resumen el número de alumnos que cometieron los distintos errores en la construcción de ambos gráficos.

Tabla 3. Frecuencia de alumnos que cometen errores en los gráficos

Gráfico con errores	Tipo de error	Frecuencia
Histograma	Histograma barras separadas	6
	Etiquetar las barras	9
	Omitir el intervalo nulo	4
	No unir por las marcas de clase	4
Polígono de frecuencias	Omitir intervalo de frecuencia nula	16
Ambos	Varios errores	5

En la pregunta 3, se presentó a los futuros profesores la respuesta de cinco estudiantes a una actividad en la que se pedía construir un histograma y un polígono de frecuencias, a partir de los datos de una distribución. Se les pidió que evaluaran cada representación, señalando si la creían correcta o buena, regular o mala y que señalaran los errores. El objetivo de presentar esta actividad era contrastar si los errores que cometen en la construcción de histogramas y polígonos de frecuencias se ven ratificados cuando evalúan las gráficas estadísticas elaboradas por otras personas. De las cinco representaciones presentadas, cuatro eran incorrectas y una correcta. Veamos las respuestas de los alumnos a la gráfica correcta (ver figura 8), cuya representación se espera que los alumnos la evalúen como Buena.

Figura 8. Representación correcta de las cuestión 3

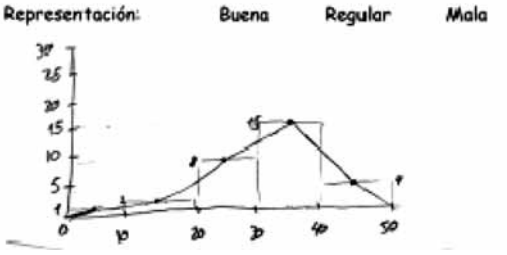


Tabla 4. Evaluación de la representación (Figura 8)

	Evaluación			
	Buena	Regular	Mala	Blanco
Nº alumnos	10	12	6	1

Los resultados se muestran en la tabla 4. Sólo hay 10 alumnos que encuentran correcto este gráfico, aunque algunos de los 12 alumnos que marcan Regular, lo justifican por la "calidad del gráfico", en el sentido de que la escala no es apropiada, lo cual es una observación adecuada y por consiguiente podemos decir que sólo 7 alumnos hacen una evaluación incorrecta.

Lo más destacado de la evaluación de esta representación es que hay 7 alumnos, de entre los que la señalan como regular o mala, que persisten en advertir que "los intervalos están mal denotados", requiriendo que las barras tuvieran una etiqueta. Especialmente preocupante es el caso de los alumnos que cometen errores en la construcción al responder a la cuestión 1, y luego ratifican esos errores en la evaluación de la representación de la cuestión 2. Es el caso del alumno que realiza la representación de la figura 6 con una incorrecta notación en el eje de abscisas, cuando hace su construcción del histograma, y le exige lo mismo a la representación de la figura 8, ya que la señala como Mala y lo justifica por "no estar representados los intervalos", es decir, necesita ver las etiquetas de las barras en forma de intervalo.

A modo de reflexión, y con cierta preocupación, encontramos que a partir de un determinado momento hay conceptos que se consideran asimilados, y ese es el argumento que se esgrime para no explicar representaciones gráficas en la enseñanza universitaria. Posiblemente, tendemos a pensar que los futuros profesores de primaria han adquirido, a lo largo de su proceso de formación, una cultura estadística y, por tanto, que son conscientes que cuando se dibuja un histograma o un polígono de frecuencias a partir de un conjunto de observaciones, se obtiene una figura representativa de la manera en que se extienden, o distribuyen las observaciones a lo largo del eje X, en otras palabras, se ve la forma de la distribución. Sin embargo, sin contradecir la afirmación anterior, encontramos errores de carácter técnico, que además son persistentes como son:

- Colocar etiquetas en las barras del histograma,
- Representar histogramas con barras separadas,
- Tazo del polígono de frecuencia incompleto o
- Falta de atención a los datos atípicos.

Y lo que es más preocupante, encontramos también errores conceptuales, como no discernir lo discreto y lo continuo en el ámbito estadístico. Otros investigadores han encontrado varios de los errores mencionados en distintos niveles educativos (Biehler, 1997; Friel y otros, 2001). En particular, Lee y Meleteu (2003) indican algunas concepciones erróneas en estudiantes de universidad que coinciden con nuestra investigación.

RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO. DIFICULTADES PARA LEER, INTERPRETAR Y RAZONAR SOBRE GRÁFICAS DE DISTRIBUCIONES

Los errores detectados en la construcción de histogramas, en la primera investigación descrita, pensamos no tienen por qué impedir que los alumnos lean e interpreten correctamente una distribución de datos. Para analizar, si los estudiantes para profesores, son capaces de leer e interpretar histogramas correctamente, utilizamos una prueba sobre razonamiento estadístico, diseñada en el proyecto ARTIST (Assessmet Resource Tools for Improving Statistical Thinking) (delMas, Garfield y Ooms, 2005) de la que se seleccionaron y adaptamos algunas cuestiones.

Las preguntas de dicha prueba están relacionadas con representaciones gráficas de distribuciones de datos y son de dos clases, unas se refieren a *cultura estadística* y otras a *razonamiento estadístico*. Estos términos, de cultura y razonamiento estadístico han sido ampliamente debatidos y hoy se consideran consensuados por distintos investigadores (delMas, 2002). La *cultura estadística* implica conocer y utilizar el lenguaje y las herramientas básicas de la estadística, tales como media, símbolos estadísticos, además de ser capaz de

razonar y de interpretar representaciones de datos. El *razonamiento estadístico* es la forma en que las personas manejan las ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística. Este razonamiento supone conectar un concepto estadístico con otro (por ejemplo, centro y dispersión) y puede combinar ideas sobre datos y azar.

La prueba original en la que nos basamos consta de 14 preguntas de respuestas múltiples. En la investigación de delMas y otros, se recogieron datos de estudiantes de la escuela superior y de "college" y universidades de USA en el año 2005. Para la investigación, que se recoge a continuación, adaptamos cinco preguntas de dicho cuestionario, dos sobre cultura estadística, dos de razonamiento y una sobre ambos aspectos.

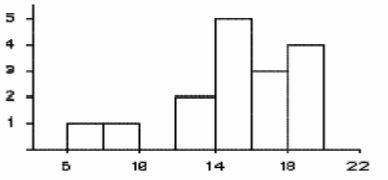
En este estudio se presentan cada una de las cinco preguntas propuestas, acompañada de la tabla de resultados de delMas y otros (2005) en los "college", para una muestra de 345 estudiantes americanos, y los resultados de la investigación en futuros profesores, para una muestra de 137 estudiantes españoles. Para cada una de las cinco preguntas hay una tabla de resultados que recoge en la primera columna las opciones que tienen los estudiantes para elegir, y está marcada la respuesta correcta con negrita. Las dos columnas siguientes de las tablas, con las etiquetas "College" y Maestros, presentan la proporción de estudiantes americanos y españoles, respectivamente, que han elegido cada una de las opciones.

Los datos de estudiantes para profesores de la Universidad de La Laguna (Tenerife) corresponden el curso 2007 y es una experiencia en la que se esta trabajando en la actualidad. Las cinco preguntas con los resultados se presentan agrupadas según evalúen la cultura estadística, razonamiento estadístico o ambos.

Cultura estadística. Leer un gráfico

En la pregunta 4 se presenta un histograma para leer la frecuencia. En los "college" sólo una cuarta parte de los estudiantes americanos contestan correctamente y hay un 40% que dejan la pregunta sin contestar. Por el contrario, muy pocos (2%) son los estudiantes para profesores que dejan esta pregunta en blanco. Parece que muchos suman sencillamente la frecuencia de las dos últimas barras (3+4 = 7) y, por tanto, eligen como respuesta correcta la opción b. Algunos alumnos eligen la respuesta c, pero sin tener constancia de si llegan a utilizar las frecuencias acumulas. El éxito, casi un 40%, entre los futuros profesores es notable y, de hecho, es la única pregunta en la que tienen mejores resultados que en los "college" (24%). DelMas y otros, consideran que los estudiantes de los "college" tienen dificultades para leer frecuencias en el histograma en esta pregunta por estar los datos agrupados en intervalos, y también por no aparecer en el eje de abscisas el valor 15 de la pregunta.

Pregunta 4. La puntación de una prueba se calcula por el número de respuestas correctas. El siguiente gráfico muestra los resultados de un grupo de alumnos en la prueba. ¿Cuántos alumnos han obtenido una puntuación por encima de 15?



Puntuaciones

Tabla 5. Frecuencias de respuestas a la Pregunta 4

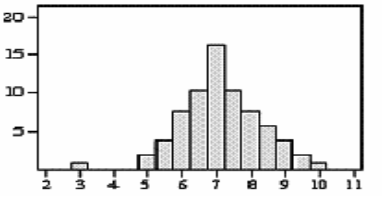
Respuesta	"College"	Maestros
a. 6	4,1	5,8
b. 7	**23,8**	**39,4**
c. 12	30,4	48,2
d. 15	1,4	4,4
Blanco	40,0	2,2

Desde nuestro punto de vista, la dificultad se encuentra en que la pregunta plantea leer una variable discreta, el número de respuestas correctas, que está representada como variable continua mediante un histograma. Los alumnos que consideran la variable como discreta, es decir, sólo consideran la posibilidad de un número de puntos enteros, eligen la opción b. Mientras que si la variable se ve como continua y agrupada en intervalos, se pueden hacer dos interpretaciones diferentes: la primera que la barra del intervalo [14,16) tiene frecuencia cero, para el caso pedido en la frase del enunciado de la pregunta "por encima de 15", lo cual es correcto. O bien, no ven, ninguna de las cuatro opciones a elegir como respuesta correcta, y recurren a las frecuencias acumuladas o al polígono de frecuencia acumuladas, e interpolan. En este caso, la respuesta es que hay 9 o 10 alumnos con más de 15 puntos, solución que no esta en las elegibles. Pensamos que quizás el alto porcentaje de blancos, 40%, en los "college" se debe a que, en esta interpretación, la respuesta correcta no está entre las elegibles. En el caso de los estudiantes para profesores, ante este dilema de no encontrar la respuesta correcta entre las cuatro presentes, muchos alumnos, casi la mitad, se inclinan por elegir la opción c, que es el número que más se aproxima a leer el histograma de una variable continua, si se hace la anterior interpretación.

Cultura estadística. Interpretar un gráfico

En la pregunta 5, se muestra un gráfico de una distribución de datos y se pide elegir la interpretación estadística más apropiada, entre una serie de frases dadas. La mayoría de los estudiantes eligen la interpretación más adecuada al histograma y que describe mejor la distribución teniendo en cuenta la forma, centro y recorrido de los datos. Tanto en los "college" (73%), como en los estudiantes para profesores (53%), fue una pregunta con un alto grado de éxito. Es posible que este buen resultado esté influenciado porque en la respuesta d, opción que se considera correcta, aparece el contexto del enunciado. Es llamativo que para los estudiantes americanos la segunda más elegida es la opción b, mientras que para los españoles es la opción a (25%). Que aproximadamente una cuarta parte de los estudiantes para profesores interpreten este gráfico como una "fotografía" es uno de los errores frecuentes ya detectados en los estudios sobre graficas de funciones (Shell Centre for Mathematical Educatión, 1993).

Pregunta 5. El siguiente gráfico muestra el número de horas que durmió ayer por la noche un grupo de estudiantes de universidad.



De las afirmaciones que se recogen a continuación selecciona la que da una mejor descripción estadística de los datos[2].

Tabla 6. Opciones y frecuencias de respuestas en la pregunta 5

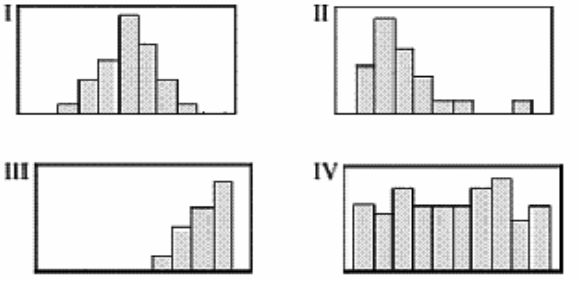
Respuesta	"College"	Maestros
a. Las barras van de 3 a 10, aumentando en altura hasta 7, después disminuyen hasta 10. La barra más alta está en 7. Hay un vacío entre tres y cinco.	4,5	24,8
b. La distribución es normal, con media alrededor de 7 y una desviación típica cerca de 1.	19,5	12,4
c. La mayoría de los estudiantes parece que duermen suficiente en la noche, pero algunos estudiantes duermen más y otros menos. Sin embargo, un estudiante deber haber permanecido despierto hasta muy tarde y ha dormido muy pocas horas.	3,1	8,8
d. La distribución de horas de sueño es simétrica y tiene forma de campana, con un valor atípico en 3. La media de horas de sueño es 7 y el recorrido es 7.	**72,9**	**53,3**
Blanco		0,7

Razonamiento estadístico. Emparejar un gráfico con una descripción

En este caso (Pregunta 6) se describen tres contextos que los estudiantes han de emparejar con alguna de las cuatro gráficas mostradas. Esta pregunta es la de mayor dificultad de las planteadas en la prueba. Puede que esta complejidad la determinen los contextos y también el hecho de que en las graficas no aparezcan escalas o valores para asociar a los contextos. De los contextos, la primera descripción (A), que alude a los puntos de un cuestionario, es la que resulta más fácil para ambos colectivos. La descripción (B) en el cuestionario original expresa: "último dígito de una muestra de los números de teléfono de una guía". En el caso de los estudiantes para profesores, se cambió el enunciado por el último dígito de los números de lotería, ya que este contexto de lotería parece más sencillo.

2 Se presenta a los estudiantes las opciones incluidas en la tabla 10.

Pregunta 6. Asocia cada histograma con la descripción que consideres apropiada.



Descripción A. Puntos de un cuestionario en el que las preguntas eran fáciles.
Descripción B. El último digito del número ganador de la lotería durante un año.
Descripción C. El peso medio de un adulto sano recogido todos los meses a lo largo de dos años.

Aún así (Tabla 7), pocos alumnos asocian la descripción (B) con la distribución uniforme (IV), y no se dan cuenta que ésta presenta diez barras, asociada a los dígitos posibles. Al contrario, parece que el hecho de que aparezca en el enunciado de la pregunta la frase "último dígito", lleva a emparejar con la distribución (II) que muestra un valor atípico, algo sin sentido. La descripción (C), sobre el peso medio de un adulto, tampoco se asocia con una curva normal y parece que la poca variabilidad del peso de un adulto es lo que les lleva a elegir la distribución uniforme (IV). En definitiva, esta pregunta muestra unos resultados muy bajos en los futuros profesores, para las tres descripciones, algo que también ocurre en los "college", aunque en menor medida.

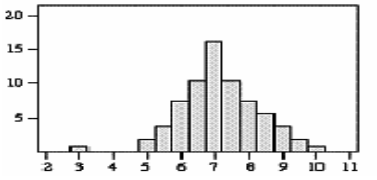
Tabla 7. Frecuencias de respuestas en la pregunta 6

	Descripción asociada					
Gráfico	A		B		C	
	"College"	Maestros	"College"	Maestros	"College"	Maestros
I	5,4	19,0	26,1	16,8	**24,7**	**10,2**
II	7,2	6,6	21,8	39,4	8,3	2,9
III	**69,4**	**35,0**	7,2	21,2	7,3	5,8
IV	18,1	32,1	**44,8**	**5,1**	59,7	62,1
Blanco		7,3		17,5		19,0

Razonamiento estadístico. Emparejar gráficos distintos construidos con los mismos datos

En esta pregunta los alumnos han de razonar para elegir el gráfico de cajas correcto para emparejar con el histograma. Dos de las opciones muestran gráficos de cajas parecidos, con un valor atípico que también está en el histograma. Así que los alumnos tienen que fijarse en el límite inferior y en la asimetría para discernir la elección correcta.

Pregunta 7. El siguiente gráfico muestra el número de horas que durmió ayer por la noche un grupo de estudiantes de universidad.



¿Cuál de los siguientes gráficos de caja representa los mismos datos que el histograma?

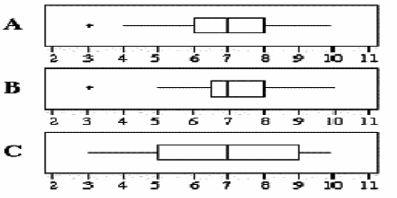


Tabla 8. Frecuencias de respuestas en la pregunta 7

Respuesta	"College"	Maestros
A	30	24,1
B	55,8	45,3
C	14,2	29,2
Blanco		1,4

El resultado (Tabla 8) es relativamente bueno, eligen la respuesta correcta, en los "college" casi un 56%, y en el caso de los estudiantes para profesores un 45%. Hay que señalar que los estudiantes para profesores no han trabajado en su formación previa a la universidad el grafico de cajas, mientras que los histogramas es un gráfico conocido.

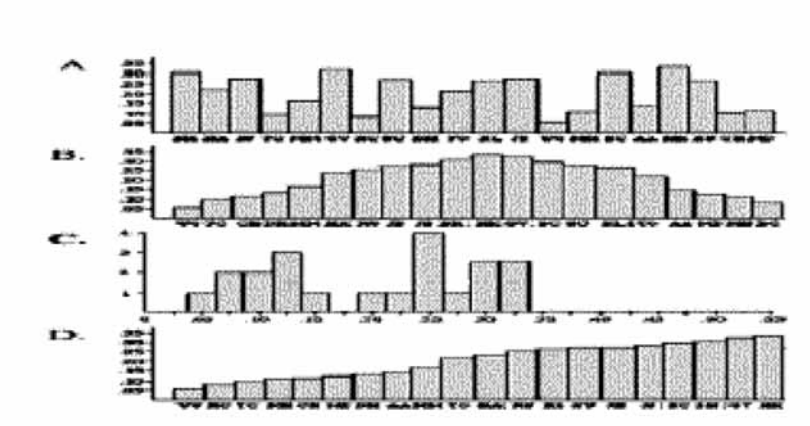
Cultura y razonamiento estadístico

En esta última pregunta (Pregunta 8), se pide a los estudiantes que elijan el gráfico que mejor caracterice la distribución de los datos. Y se aclara que sea el mejor gráfico para mostrar la forma, centro y recorrido de unos datos.

Pregunta 8. Un entrenador de baloncesto quiere tener una idea de cómo funcionó su equipo durante la pasada temporada. Para ello, registró la proporción entre los aciertos de cada jugador y el número de tiros a canasta. Los datos aparecen en la siguiente tabla:

Jugador	Proporción de aciertos	Jugador	Proporción de aciertos	Jugador	Proporción de aciertos
BH	0,305	SU	0,270	BC	0,301
HA	0,229	FH	0,136	AA	0,143
JS	0,281	TO	0,218	HK	0,341
TC	0,097	RL	0,267	RS	0,261
MM	0,167	JB	0,270	CR	0,115
GV	0,333	WG	0,054	MD	0,125
RC	0,085	MH	0,108		

¿Cual de los siguientes gráficos describe mejor la distribución de los datos, si lo que le interesa al entrenador es la media y la amplitud de la proporción de aciertos?



Esta pregunta resultó sorprendentemente, muy difícil; responden correctamente, en los "college" un 21% y en de los estudiantes para profesores sólo un 16%. Los alumnos tienden a elegir un gráfico de barras, tomando como modalidades los nombres de los jugadores, en lugar de un histograma que represente la distribución de puntos de los deportistas. Tanto los estudiantes para profesores, un 38%, como en los "college", un 56%, se muestra una tendencia a elegir la forma de la distribución normal, que es lo único que justifica el alto porcentaje de elección de la opción B.

Tabla 9. Frecuencias de respuestas en la pregunta 8

Respuesta	"College"	Maestros
A	11,8	21,9
B	55,9	37,9
C	**20,9**	**16,1**
D	11,3	21,2
Blanco		2,9

Para resumir, la tabla 10 permite comparar los resultados de los alumnos de "college" con los estudiantes para profesores, en el conjunto de preguntas. Se observa que los estudiantes de ambos colectivos tienen dificultades para razonar sobre gráficos. Especialmente difícil resulta asociar un texto con la forma de una distribución, como se pide en la pregunta 6. Queremos señalar el carácter no convencional de esta pregunta para los futuros profesores, ya que están acostumbrados a mostrar el gráfico de la distribución de datos en un sistema cartesiano.

Tabla 10. Comparación de frecuencia de resultados correctos en las dos muestras

		% Correcto	
Contenido		«College»	Maestros
Cultura	Pregunta 4	23,8	39,4
Cultura	Pregunta 5	72,9	53,3
Razonamiento	Pregunta 6 A	69,4	35,0
Razonamiento	Pregunta 6 B	44,8	5,1
Razonamiento	Pregunta 6 C	24,7	10,2
Razonamiento	Pregunta 7	55,8	45,3
Cultura y Razonamiento	Pregunta 8	20,9	16,1

Las respuestas del cuestionario original con 14 preguntas, según delMas y otros (2005), indican que la mayoría de los estudiantes son capaces de interpretar los histogramas y también emparejar gráficos que corresponden a los mismos datos. Tienen dificultades para leer histogramas cuando las barras comprenden varios valores y el final de los puntos no se encuentra marcado en cada barra. Y tienden a interpretar los histogramas como gráficos de barras.

En el caso del cuestionario adaptado que responden los estudiantes para profesores, se puede observar que se comparten varias de las conclusiones anteriores. Si bien, la confusión entre gráfico de barras e histograma, que ya se había señalado en el primer estudio, parece que no impide traducir los datos del histograma a otro gráfico que esté construido con los mismos datos. Sin embargo, les resulta muy difícil razonar sobre la forma de las distribuciones a partir de una descripción.

REFLEXIONES

De las dos investigaciones presentadas se puede deducir que hay dificultades en los futuros profesores para las construcciones de gráficas que son esenciales en estadística. Así en el primer estudio, se encontraron errores como mostrar un histograma con barras separadas

o mal etiquetados de los intervalos en el eje de abscisas. Del segundo estudio, se observa que no todos los estudiantes leen e interpretan los histogramas correctamente, si bien una amplia mayoría asocian la información proporcionada por la gráfica con un texto y también son capaces de emparejar con gráficos diferentes que representen los mismos datos. Sin embargo, hay un amplio fracaso en reconocer patrones de comportamiento de variables, que se acentúa por la dificultad de no disponer de valores en los ejes o alguna otra referencia, como una escala.

Para el desarrollo profesional, el profesor necesita conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento pedagógico del contendido (Estrada y otros, 2004; Shulman, 1986; Margolinas y otros, 2005). En el caso de los gráficos se observa como, aún después de un proceso de formación, el futuro profesor encuentra dificultades. Pensamos pues que, en su formación como profesional, hay que hacerle reconocer la importancia de sus dificultades. A continuación, señalamos, de forma somera, los errores y dificultades que son suficientemente conocidos, unos desde la perspectiva de la experiencia y otros por resultados de distintas investigaciones.

Las razones por las que el *histograma*[1] se confunde con el diagrama de barras son varias. Los diagramas de barras se vienen trabajando desde la escuela y se convierte en un gráfico familiar. El histograma se presenta, con frecuencia, como "un caso particular" de diagrama de barras o rectángulos (ver //descartes.cnice.mecd.es/Estadística/unideimensional-ibarrios/graficos-est.htm). El histograma es un gráfico difícil, por varias razones. La primera razón porque oculta los datos, y la segunda, porque la forma de un histograma puede ser muy distinta para los mismos datos, simplemente variando el número de clases, por lo que la elección del número de clases debe hacerse con cuidado. Es preciso tener habilidades para agrupar números, e implica dominar el orden en los números decimales. Aparte de la dificultad de representar áreas, está el efecto de la variación del tamaño de las clases.

Consideramos que es necesario trabajar más con el polígono de frecuencias. Es importante pasar a la curva de densidad mediante el ordenador, dar oportunidad de observar la forma de distintas distribuciones y reconocer los patrones de comportamiento de distintas variables (Bakker, 2004). Hay que incentivar la predicción de comportamiento que presentan distintas variables (Gravemijer y Bakker, 2006).

En el gráfica de *tallo y hojas*, al quedar representado cada uno de los valores, sin la pérdida que significa agruparlos, supone una ventaja. En realidad, es una combinación de tabla con gráfico de barras (Tufle, 1997). Sin embargo, a veces, los alumnos tienen dificultades para su construcción cuando los datos tienen un solo dígito. Las variables que muestran cantidades con dos o tres dígitos no presentan problemas de construcción, si acaso saltarse en el tallo los valores que no se presentan, por lo que se pierde la comprensión de la idea de "valor atípico".

El *gráfico de caja* vincula los conceptos de mediana, cuartiles, valor mínimo y máximo que los alumnos manejan individualmente, pero no en forma global. Permite fraccionar los datos, y se ven la mediana y los cuartiles, lo cual es una ayuda para evitar que se confunda, el valor de la mediana (Me) con la posición de la mitad de los datos (N/2) (Cobo y Batanero, 2000). El principal problema en este gráfico está en elegir la escala apropiada (Bakker y otros, 2004). Las gráficas de caja son muy útiles para hacer comparaciones por grupos, mostrando cajas paralelas. Pero tienen como desventaja que oculta la forma de la distribución. Distribuciones bimodales pueden mostrar el mismo gráfico de caja que una distribución de una sola moda (Cohen y Cohen, 2006).

1 "Histograma" etimológicamente significa "levantar un gráfico" o "gráfico levantado".

Creemos que es necesario mostrar las distintas formas de representar la información, incentivando el uso de distintos gráficos que representen los mismos datos (Carrión y Espinel, 2005a, 2005b, 2006). Encontramos que los libros de texto de primaria y secundaria enseñan la construcción de gráficos, pero trabajan muy poco lo que es valorar e interpretar gráficos y, aún menos, el paso de una representación a otra (Carrión y Espinel, 2007).

Desde nuestra modesta contribución, estamos trabajando en la comprensión de los gráficos estadísticos en la formación de los profesores dentro del Proyecto SEJ2006-10290/EDU (MEC). En nuestra investigación tratamos de compaginar algunos puntos de los distintos modelos de pensamiento estadístico (Pfannkuch y Wild, 2002). En concreto, del modelo propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) nos interesa especialmente la transnumeración, como indicativo de la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Del modelo matricial por niveles, que trabajan Jones y otros (2000), y de los cuatro procesos (describir, organizar, representar y analizar datos) nos centramos principalmente en representar datos.

Hay muchas tareas pendientes en la investigación estadística, como ya se apunta en el documento de discusión del Estudio de ICMI /IASE "Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor" (Batanero y cols., 2006; traducción española publicada en *Unión*, 6, 2006). Sin llegar a esos grandes retos, anoto algunas pequeñas tareas, que se podrían iniciar para cambiar la situación de las gráficas en la enseñanza.

Una primera tarea es buscar una forma de secuencias el aprendizaje de los distintos gráficos; describir cuáles son los más adecuados de acuerdo a la edad de los estudiantes y el tipo de preguntas que se debe formular, para que permitan una mejor comprensión. Parece aceptable comenzar en la escuela por pictogramas donde el niño se identifica (Socas y otros, 1996). Pero por qué aparecen tan pronto en el currículo los gráficos de sectores, siendo de difícil construcción y, sabiendo que hay una dificultad de percepción gráfica de los ángulos.

Otra tarea es conseguir que en los textos de primaria y secundaria obligatoria se unifique el vocabulario. Los distintos nombres de los gráficos, a veces, se deben a la traducción que cada autor ha creído conveniente. El caso de "stem and leaf" llevo a todo un popurrí de traducciones, tales como tallo-hoja, tronco y hojas e incluso, árbol. Y lo que es más importante, que en los distintos documentos escolares, no aparezcan errores, como, por ejemplo, citar a los gráficos de barras como histogramas. O bien que cuando aparecen errores, el profesor esté formado para poderlos detectar.

El desarrollo y prestigio que han adquirido los gráficos estadísticos en la publicaciones científicas (Cleveland, 1987; Wilkinson, 2006) y su auge en los medios de comunicación, principalmente prensa escrita, aconseja dedicar mas tiempo y esfuerzo en la formación del profesorado en este tema.

Nota: Parte de esta investigación ha sido realizada en el marco del Proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa del Plan Nacional de I+D+I)

REFERENCIAS

Bakker, A. (2004). Reasoning about shape as a pattern in variabilidaty. *Statistics Education Research Journal*, 3 (2), 64-84. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Bakker, A., Biehler, R. y Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots? *IASE*, 163-173. En G. Burrill & M. Camden (Eds.), Curricular Development in Statistics Education. Proceedings of the: International Association for Statistical Education (IASE) Roundtable. On Line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt04/4.2_Bakker_etal.pdf.

Batanero, C., Albert, A. Ben-Zvi, D., Burrill, G., Connor, D., Engel, J., Garfield, J., Hodgon, B., Li, J., Pereira-Mendoza, L., Ottaviani, M. G., Pfannkuch, M., Polaki, V. Rossman, A. y Reading, C. (2006). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Discussion Document.* ICMI e IASE: On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Biehler, R. (1997). Students´difficulties in practising computer supported data análisis- Some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies´, in Garfiel & Burril (Eds), *Research on the Role of Technolgy in Teacninf an Learnin statistics* Voorburg: International Statistcal Institute. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 57-85.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2007). Construcción y evaluación de histogramas en la formación de profesores. (En proceso de revisión).

Carrera, C., del Castro, C., Gutiérrez, J., Méndez, R. y Pérez, M. C. (1988). *Trabajos prácticos de geografía humana*. Madrid: Síntesis.

Carrión, J. C. y Espinel, M. C. (2005a). Aptitudes and difficulties of 10 to 12 years old students when translating information between different types of statistical representations. Proceedings of the *55* th *Session of the International Statistical Institute*. Sydney. Australia. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2005b). Comprensión gráfica e implicaciones en la enseñanza. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 183-196.

Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2006). Una investigación sobre la traducción e interpretación de gráficas y tablas estadística por estudiantes de educación primaria. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase

Carrión, J.C. y Espinel, M.C. (2007) (En prensa). Análisis del tratamiento del proceso didáctico de las gráficas estadística en los libros de texto en la educación primaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 8.

Cohen D. J. y Cohen, J. (2006). Statistical computing and graphics. The sectioned density plot. *American Statistical Association,* 60, 2, 167-174.

Cleveland, W. y McGill, R. (1984). Graphical perception: Theory, experimentation, and application to the development of graphical methods. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 386, 531-554.

Cleveland, W. (Ed.) (1987). Research in statistical graphics. *Journal of the American Statistical Association*, 8, 398, 419-47.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaría obligatoria: ¿un concepto sencillo? *UNO*, 23, 85-96.

delMas, R.C. (2002). Statistical literacy, reasoning, and learning. *Journal of Statistics Education [On line]*, 10 (3).

delMas, R., Garfield, J. y Ooms, A. (2005). Using assessment items to study students´ difficulty reading and interpreting graphical representations of distributions. *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. University of Auckland*. On line: https://app.gen.umn.edu/artist/articles/SRTL4_ARTIST.pdf.

Espinel, M. C. (2000). Gráficas estadísticas: perspectiva desde la educación matemática. *El Guinigüada*, 8/9, 445-464.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacía la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22, 2, 263-274.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32, 2, 124-158.

Gravemeijer, K. y Bakker, A. (2006). Design research and design heuristrics in statistics education. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: http://www. stat.auckland. ac.nz/~iase.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Wares, A. y Perry, B.. (2000). A framework for characterizing children´s statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 269-307.

Margolinas, C. Coulange, L. Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 59, 205-234.

Nortes Checa, A. (1996). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Madrid: Santillana.

Lee, C.; Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education.* On line*:* http://www. statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf

Pfannkuch, M. y Wild, C. (1999). Statistical thinking: How can we develop it? On line: www. stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/3235.pdf.

Schield, M. (2006). Statistical literay survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Shell Centre for Mathematical Eduaction (1993). *El Lenguaje de las funciones y las gráficas*. Bilbao: Universidad del País Vasco.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Socas, M., Noda, A., Espinel, M.C. y González, M. D. (1996). *Lectura e interpretación de gráficas cartesianas y estadísticas*. Cuadernos de Aula. Gobierno de Canarias.

Tufle, E. R. (1997). *The visual display of quantitative information*. Cheshire, CT: Graphics Press.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67, 3, 223-295.

Wilkinson, L. (2006). Presentation graphics. *International Encyclopedia of the Social & Beavioral Sciences.*

ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA: UN ESTUDIO CON PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN Y EN EJERCICIO

Assumpta Estrada
aestrada@matematica.udl.es
Universitat de Lleida

RESUMEN

Las actitudes de los profesores pueden tener especial importancia en el caso de la Estadística, cuya enseñanza no llega a desarrollarse de acuerdo con las recomendaciones curriculares. El objetivo de esta ponencia es presentar las investigaciones sobre actitudes hacia la Estadística analizando sus componentes, las variables que las afectan, así como los diferentes instrumentos de evaluación. Describimos también los resultados de nuestra investigación sobre actitudes de futuros profesores de educación primaria que indican una relación entre los componentes competencia cognitiva y afectivo y una relación inversa entre la dificultad percibida y valor dado a la materia, así como la incidencia de la formación previa en estas actitudes.

ABSTRACT

Teachers' attitudes could be an important issue with regards statistics, as its teaching does not follow the curricular recommendations. The aim of this study is to summarise the research related to attitudes towards statistics by analysing its components, variables and assessment tools. We also present a descriptive summary of the results of this study on primary teachers' attitudes on the one hand a direct relation between the components of both cognitive and affective competences and on the other hand an indirect relation between perceived difficulty and subject-matter value, as well as the incidence of previous training on these attitudes.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Assumpta Estrada (2007). ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA: UN ESTUDIO CON PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN Y EN EJERCICIO, pp. 121-140.

INTRODUCCIÓN

La Estadística se ha incorporado de forma generalizada al currículum de la enseñanza obligatoria y de las diferentes especialidades universitarias por razones fundamentalmente socioculturales y educativas, impulsando la investigación y el desarrollo curricular en este campo específico (Hawkins, Jolliffe y Glickman, 1991; Estrada, 2002; Franklin y cols., 2005).

A pesar de su utilidad reconocida y de figurar en los programas oficiales, la Estadística es una materia frecuentemente olvidada en la educación primaria y secundaria, no sólo en España, sino a nivel internacional. La misma situación se reproduce en las Facultades de Ciencias de la Educación encargadas de formar al profesorado. Para algunos autores (Heaton, 2002; Gattuso y Pannone, 2002; Mendonça, Coutinho y Almouloud, 2006), esto es debido, en parte, a la escasa preparación estadística con la que el profesor termina sus estudios, lo que hace que cuente con pocos recursos a la hora de dar sus clases y, tienda a omitir el tema; acortarlo o, en el mejor de los casos, a presentarlo con una metodología inadecuada. Este hecho ha sido reconocido por la International Association for Statistical Education (IASE) y la International Comission on Mathematical Instruction (ICMI), que están organizando conjuntamente un estudio sobre esta problemática (Batanero y cols., 2006).

Asistimos, por tanto, a un círculo vicioso, en el que los profesores, faltos de formación, van generando actitudes negativas hacia la materia, infravalorando su utilidad, percibiéndola como un contenido difícil que no pueden llegar a dominar, incluso comparten concepciones erróneas y dificultades con sus alumnos (Watson, 2001; Makar y Confrey, 2004; Stohl, 2005), dudando de su capacidad para enseñar la materia y asumiendo que este tema no debe incluirse en la formación básica de sus alumnos. Estos sentimientos de rechazo les llevan inconscientemente a posponer su autoformación estadística, a prescindir del uso de un instrumento que podría mejorar muchos aspectos de su actuación profesional y, en lo posible, a omitir su enseñanza.

Preocupada por esta problemática, he centrado mi investigación en el estudio de las actitudes hacia la Estadística de profesores en formación y en ejercicio. En esta ponencia aportaremos, en primer lugar, información sobre la conceptualización del constructo de actitudes hacia la Estadística y sus componentes e instrumentos de medida. En segundo lugar, haremos una revisión bibliográfica de las investigaciones previas sobre actitudes hacia la Estadística, centrándonos específicamente en nuestros propios estudios sobre los profesores de Educación Primaria (Estrada; 1999, 2002, 2002a; Estrada, Batanero y Fortuny, 2004; y Estrada, Batanero, Fortuny y Díaz, 2005).

LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA Y SUS COMPONENTES

Los trabajos de McLeod (1988, 1989, 1992, 1994) han contribuido en gran medida a reconocer la importancia de las cuestiones afectivas hacia las Matemáticas. En ellos, las actitudes aparecen como un fenómeno de difícil definición, debido a que no constituyen una entidad observable, sino que son construcciones teóricas que se infieren de ciertos comportamientos externos, frecuentemente verbales.

Así, dependiendo del investigador, encontramos diversas definiciones. Para Auzmendi (1992, p. 17), las actitudes son "*aspectos no directamente observables sino inferidos, compuestos tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirigen*". Gómez Chacón (2000) entiende la actitud como: "*una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento*"(p. 23). Por otro lado, Gal y Garfield (1997) las consideran como "*una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio*" (p. 40).

Las actitudes hacia una materia de estudio son bastante estables, de diversa intensidad, y se expresan positiva o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto) y, en ocasiones, pueden representar sentimientos vinculados externamente a la materia (profesor, actividad, libro, etc.). Surgen en edades muy tempranas, si bien tienden a ser favorables en un principio (Callahan, 1971), tienen una evolución negativa (Suydam, 1984) que, según Aiken (1974), persiste con el paso del tiempo. Según los estudios encontrados sobre formación de actitudes hacia las Matemáticas o la Estadística, su origen proviene de:

- Las experiencias previas en contextos escolares, en el caso de la Estadística, estas pueden estar basadas en aplicaciones rutinarias de fórmulas sin metodología ni aplicaciones reales adecuadas. En el caso de los profesores en formación, las imágenes procedentes de sus experiencias como alumnos, ayudan en algunos aspectos de su formación, pero también actúan como filtros a través de los cuales son examinadas las nuevas informaciones (Calderhead y Robson, 1991).
- Las nociones de Estadística obtenidas a partir de la vida cotidiana fuera del aula, en la prensa o en los medios de comunicación que, según Gal y Ginsburg (1994), suelen estar asociadas a números y, a veces, son conceptualmente erróneas.
- Su vinculación con las Matemáticas. Al considerar que la Estadística es parte de las Matemáticas, se transfieren las actitudes de una materia a otra. Así, se observa en algunos casos un bloqueo total delante de situaciones problemáticas que han de ser tratadas estadísticamente, en alumnos que infravaloran sus capacidades matemáticas (Brandstreat, 1996).

Los componentes de las actitudes

Si bien en un principio se consideraba la actitud como un constructo unidimensional, progresivamente se introducen los estudios multidimensionales, en los que las actitudes hacia una materia se estructuran en componentes. Así, para Wise (1985) existen solamente dos dominios diferenciados susceptibles de medición: las actitudes hacia el curso de Estadística básica que están realizando los alumnos (*componente curso*) y las actitudes de los alumnos hacia el uso de la Estadística en su campo de estudio correspondiente (*componente campo*).

Más adelante, los trabajos de Auzmendi (1992), Gil Flores (1999) y Gómez Chacón (2000) diferencian tres factores básicos en las actitudes, llamados también *componentes pedagógicos*:

- *Componente cognitivo*: se refiere a las expresiones de pensamiento, concepciones y creencias, acerca del objeto actitudinal, en este caso, la Estadística.
- *Componente afectivo o emocional*: recogería todas aquellas emociones y sentimientos que despierta la Estadística, y por ello son reacciones subjetivas de acercamiento/huida, o de placer/dolor.
- *Componente conductual o tendencial*: son expresiones de acción o intención conductista/conductual y representan la tendencia a resolverse en la acción de una manera determinada.

Finalmente, en Schau y cols. (1995) se estructuran en cuatro dimensiones o componentes:

- *Afectivo*: sentimientos positivos o negativos hacia la Estadística.
- *Competencia cognitiva*: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos y habilidades intelectuales en Estadística.
- *Valor*: utilidad, relevancia y valor percibido de la Estadística en la vida personal y profesional.
- *Dificultad*: se refiere a la percibida de la Estadística como asignatura. Aunque un estudiante pueda reconocer el valor de una materia, sentir interés hacia la misma (*componente*

afectivo) y pensar que tiene suficientes conocimientos y habilidades (*componente cognitivo*), puede llevarlo a considerar la materia como fácil o difícil.

Estas propuestas han servido de base para la elaboración de distintos cuestionarios de actitudes hacia la Estadística que se describen a continuación.

INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN DE ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA

Como hemos dicho anteriormente, las actitudes ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo. En este sentido, para Manassero y Vázquez (2001) la evaluación de las actitudes no ha de estar centrada solo en "el qué" (simple conocimiento) como en "el para qué". En esta línea, nuestro análisis de los instrumentos de evaluación de las actitudes hacia la Estadística está orientada a poder seleccionar el que mejor se adapte al contexto en el que se pretende posteriormente realizar la investigación, o para planificar y decidir las acciones educativas siguientes más adecuadas para la formación de nuestros alumnos.

En la revisión realizada, todos los instrumentos para medir las actitudes hacia la Estadística son cuestionarios compuestos de ítems con formato de respuesta tipo Likert y con características específicas distintas referidas a aspectos diferentes del constructo. Un análisis detallado de las evidencias de fiabilidad y validez de estos cuestionarios aparece en Carmona (2004).

Inventario de actitudes hacia la Estadística de Roberts (SAS)

La primera escala de actitudes hacia la Estadística que aparece utilizada por diferentes autores es el SAS -*Statistics Attitude Survey*- de Roberts y Bilderback (1980), elaborado para suplir las necesidades de medir las actitudes de los estudiantes por parte de los profesores de Estadística.

Para la elaboración de esta escala los autores revisan y adaptan varios de los ítems que componen el cuestionario propuesto por Dutton (1954) para medir las actitudes hacia la aritmética. Parte de 50 ítems tipo Likert con cinco posibilidades de elección que reduce después de una prueba inicial a 34 por baja correlación con la puntuación total de la escala. Los autores lo consideran como un cuestionario unidimensional.

Para Wise (1985) el SAS cubre una importante necesidad de medida del constructo, pero muchos de sus ítems son del todo inapropiados para alumnos que acaban de comenzar la asignatura de Estadística y además parecen medir más el rendimiento de los estudiantes que sus actitudes hacia la Estadística.

La escala de actitudes hacia la Estadística (ATS) de Wise

En vista de las dificultades planteadas por el SAS, Wise (1985) aborda la construcción de una escala alternativa: el ATS –*Attitudes Toward Statistics Scale*- con ítems netamente actitudinales, que tiene como finalidad medir el cambio actitudinal en estudiantes de Estadística básica. Se clasifican dos dominios diferenciados susceptibles de medición en el ATS: actitudes hacia el curso que están realizando y actitudes de los alumnos hacia el uso de la Estadística en su campo de estudio.

La construcción de la prueba comienza con la elaboración de 40 ítems tipo Likert con cinco posibilidades de elección que se sometieron a validación por "panel de jueces" y correlación ítem-total, con lo que se reduce a 29 sentencias con valores de coeficiente alfa y fiabilidad test-retest elevados.

La escala multidimensional de Auzmendi

A pesar de que las escalas antes descritas ATS y SAS son pruebas fiabilizadas y validadas ampliamente, los estudios realizados con ellas se hicieron en muestras de estudiantes con unas características socioeducativas muy diferentes a las nuestras, razón fundamental que anima a Auzmendi (1992) a crear un nuevo instrumento de medida que se adecue a nuestra realidad social y que contemple la consideración multidimensional de las actitudes hacia las Matemáticas y hacia la Estadística, recogiendo los factores más significativos.

Respecto a la selección de las dimensiones de la escala se realiza según el criterio de mayor frecuencia de aparición del factor, en una serie de escalas, curiosamente de actitudes hacia las Matemáticas. Los factores escogidos son cinco (utilidad, ansiedad, confianza, agrado y motivación) y se redactan los ítems de la escala adaptando las afirmaciones de los instrumentos de mediada analizados, a cada factor.

Después de un estudio piloto, se seleccionan 40 sentencias (8 por factor) que se someten a un análisis factorial con lo que la prueba definitiva resultante consta de 25 ítems que se reparten en los 5 factores básicos que han servido de guía para la elaboración del instrumento de medida con una consistencia interna y validez elevada.

El cuestionario de actitudes hacia la Estadística (SATS)

Según Schau y cols. (1995), los instrumentos de medida de las actitudes hacia la Estadística, hasta ahora descritos, si quieren utilizarse de una manera óptima en docencia y en investigación, deberían tener una serie de características clave:

- Incluir los componentes más importantes de las actitudes.
- Ser aplicables con los menores cambios posibles durante todo el curso y en diferentes cursos de Estadística.
- Ser cortos, para aplicarlos en poco tiempo y con ítems que midan tanto actitudes positivas como negativas.
- Habrían de explicar el desarrollo y validación de la experiencia incluyendo las orientaciones a los alumnos para una aplicación correcta.
- Finalmente el análisis de resultados debería utilizar técnicas que conformen el factor dominante (CFA).

Contemplando todas estas características, diseñaron el cuestionario de actitudes hacia la Estadística SATS –*Survey of Attitudes Toward Statistics*- utilizando una variación de la técnica denominada de grupo nominal (NGT), Moore (1987). Los 28 ítems resultantes después de la validación por análisis factorial confirmatorio se estructuran en cuatro componentes: afectivo, competencia cognitiva, valor y dificultad, ya explicados en el apartado anterior.

Presentan dos formularios, un formulario "pre" para alumnos que no han realizado un curso de Estadística y un formulario "post" que se administrará durante o al finalizar el curso.

Otros instrumentos de medida

Hasta ahora hemos descrito las escalas de medición de actitudes hacia la Estadística más destacadas y utilizadas en nuestro país, pero en la última década se han desarrollado otros instrumentos de medida con menor impacto, según nuestra revisión y que pasamos a comentar brevemente.

Así podemos citar la *Statistics Attitude Scale* de McCall, Belli y Madjidi (1990), cuestionario compuesto por 20 ítems, que ha sido posteriormente usado en Glencross y Cherian

(1992) y Cherian y Glencross (1997) con poblaciones sudafricanas. El *Student's Attitudes Toward Statistics* (STATS) desarrollado por Sutarso (1992) con 24 ítems en la línea del SAS y el ATS, por su aplicación no deja de ser un estudio piloto. El mismo año Pretorius y Norman (1992) revisan las escalas existentes de medidas de actitudes hacia las Matemáticas, cambian la palabra "Matemática" por "Estadística" en todos los ítems, obteniendo un instrumento que, a nuestro entender, no refleja aspectos únicos y característicos de la Estadística.

El *Attitude Toward Statistics* de Miller, Behrens, Green y Newman (1993), instrumento compuesto de 25 ítems que pretenden medir los constructos de valor de la Estadística, orientación a objetivos y habilidad percibida en relación a la Estadística (Carmona 2004). La *Escala de actitudes hacia la Estadística* de Cazorla y cols. (EAE**)** (1999**),** construida a partir de la escala de actitudes en relación con las Matemáticas de Aiken y Dreger (1961), traducida y adaptada a Brasil por Brito (1999), es unidimensional, de tipo Likert con 20 ítems que se complementan con otras informaciones personales, de autopercepción y de definición de la Estadística que utilizaran en trabajos posteriores.

La *Escala de actitudes hacia la Estadística* de Velandrino y Parodi (1999), también de tipo Likert, fue desarrollada directamente en español y según una estructura de tres dimensiones: utilidad, conceptualizacion y disposición y capacidad para la formación estadística (Carmona, 2004).

Finalmente, encontramos también cuestionarios de actitudes hacia la Estadística formando parte del desarrollo de determinados proyectos, así Garfield (1998) utiliza 10 ítems dentro de la evaluación del proyecto *Chance*, que se conoce como SCAS (*Starc-Chance Abbreviate Scale*) y que está relacionado con diferentes campos; y el *Quantitative Attitudes Questionnaire* de Chang (1996), cuestionario diseñado para medir actitudes hacia la metodología cuantitativa y que contempla también la Estadística

INVESTIGACIONES SOBRE ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA

El análisis de las actitudes hacia la Estadística tiene ya una cierta tradición (Carmona, 2004) y, sobre todo en las dos últimas décadas, se han elaborado un número importante de trabajos. Un análisis detallado de estas investigaciones previas aparece en Estrada (2002), complementado posteriormente por Carmona (2004) con el estudio de las evidencias basadas en la relación de las actitudes con diferentes variables externas.

En la tabla 1 presentamos resumidamente algunas características de los estudios más relevantes y podemos observar cómo las investigaciones realizadas se han orientado fundamentalmente hacia la construcción de un instrumento de medida, explicados en el apartado anterior y entre los que destacamos el SAS de Roberts y Bilderback (1980), el ATS de Wise (1985) y el SATS de Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995), por ser los cuestionarios más utilizados. Otros trabajos analizan de la influencia de diversas variables tales como el género (Harvey, Plake y Wise, 1985; Anastasiadou, 2005), el rendimiento académico (Harvey, Plake y Wise, 1985; Roberts y Reese 1987; Nasser, 2004), la experiencia formativa en Matemáticas y Estadística (Elmore y Vasu, 1980, 1986; Auzmendi, 1992; Mastracci 2000), el tipo de bachillerato o el área de estudios (Silva y cols., 1999; Gil Flores, 1999; Cuesta y cols. 2001).

En la literatura sobre educación estadística también encontramos como trabajo destacado la revisión de Cashin y Elmore (2000) completada por Carmona (2004) con una recopilación de la mayoría de las investigaciones sobre actitudes y ansiedad hacia la Estadística y centradas fundamentalmente en las evidencias de fiabilidad y validez de los instrumentos de evaluación.

Tabla 1. Características de los estudios más relevantes de actitudes hacia la Estadística

Estudio	Finalidad	Escala	Sujetos	Variables analizadas
Roberts y Bilderback, (1980)	Creación de una escala	SAS	Estudiantes universitarios	Relación con el rendimiento
Elmore y Vasu (1980, 1986)	Relación con rendimiento	SAS	Estudiantes universitarios	Ansiedad, experiencia matemática previa, expectativas del curso, edad, área académica, años de estudio
Wise (1985)	Creación de una escala	ATS	Estudiantes de Magisterio	Dimensiones (campo y curso)
Roberts y Reese (1987)	Relación con el rendimiento	SAS	Estudiantes universitarios	Notas de Estadística
Harvey, Plake y Wise (1985)	Relación con el rendimiento	ATS	Estudiantes universitarios	Género, habilidad matemática y de razonamiento lógico, ansiedad
Auzmendi (1992)	Creación de una escala, relación con el logro, análisis de componentes	EAE	Estudiantes universitarios	Conocimiento matemático previo, motivación, género, expectativas de éxito, evaluación del curso y del profesor, actitudes y sus componentes
Schau y cols. (1995)	Creación de una escala, análisis de actitudes y sus componentes	SATS	Estudiantes Universitarios	Componentes (afectivo, competencia cognitiva, valor y dificultad)
Onwuegbuzie (1998)	Análisis de ansiedad, actitudes y sus componentes	ATS	Estudiantes universitarios profesores	Ansiedad, años de estudio de Estadística, componentes
Silva y cols. (1999)	Creación de una escala, evaluación de actitudes	EAE	Estudiantes universitarios	Género, concepciones previas, rendimiento en el curso, área de estudio, autopercepción
Gil Flores (1999)	Evaluación de actitudes	ATS	Estudiantes de Pedagogía	Género, tipo de bachillerato, componentes
Mastracci (2000)	Evaluación de actitudes	SATS	Estudiantes universitarios	Tipo de bachillerato, años de estudio de Estadística, calificaciones, componentes
Nasser (2004)	Evaluación de actitudes	SATS	Futuros profesores	Relación con rendimiento, ansiedad y la aptitud matemática
Anastasiadou (2005)	Evaluación de actitudes	SATS	Curso preuniversit.	Género, componentes

ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN Y EN EJERCICIO

En nuestra revisión observamos que en general las investigaciones realizadas se han dirigido a estudiantes universitarios y no a los profesores, posiblemente, porque la Estadística no es una materia obligatoria en su formación. Sólo los trabajos de Onwuegbuzie, (1998, 2003), los de Watson y cols.. (2003) y Nasser (1999,2004) dedican su atención a este colectivo estudiando sus actitudes juntamente con otras variables.

Así Onwuegbuzie utiliza un modelo multivariado para la predicción del rendimiento en asignaturas de Estadística. Se dedica fundamentalmente al estudio de la ansiedad y de las actitudes de los profesores, medidas estas últimas a través del ATS. Entre sus conclusiones destacamos por un lado, las correlaciones significativas entre el número de asignaturas de Estadística cursadas con anterioridad y las puntuaciones en ATS-Campo y ATS-Asignatura (Onwuegbuzie, 1998). Por otro lado, al aplicar el modelo, comprueba que las actitudes y la ansiedad hacia la Estadística influyen en los resultados de los cursos por lo que animan a los formadores de profesores a crear entornos de aprendizaje adecuados (cognitivos y afectivos) en sus clases para que sus alumnos puedan explorar diferentes metodologías, adquieran seguridad en sus propias capacidades para aprender y enseñar Estadística y, sobre todo, valoren el importante papel que tiene esta materia en la sociedad actual (Onwuegbuzie, 2003).

Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty, (2003) aplicaron conjuntamente el SATS y el cuestionario de ansiedad denominado STARS a una muestra de 200 graduados universitarios matriculados en Facultades de Educación. La correlación entre las puntuaciones totales del SATS y del STARS fue de -0,89. Además es uno de los pocos estudios en los que se complementan las preguntas habituales -formato de respuesta tipo Likert- con preguntas abiertas de cuyas respuestas infieren las motivaciones y causas de las actitudes de sus alumnos.

El trabajo de Huedo y cols.(2003) en nuestro país presenta la planificación y primeros resultados de una investigación con profesores en formación de la Universidad de Murcia. Se analizan los conocimientos y actitudes hacia la Estadistica y hacia las Matemáticas contrastando los resultados con estudios previos.

Finalmente, Nasser y sus colaboradores han realizado en la última década varios estudios en los que también analizan la relación entre las actitudes o la ansiedad y el rendimiento; (Nasser. 1999; Wisenbaker, Nasser y Scott, 1999) y en Nasser (2004) es donde trata de construir un modelo estadístico para predecir las actitudes de futuros profesores en función de diferentes variables. Para ello analiza la posible relación entre las actitudes y la ansiedad hacia las Matemáticas y la Estadística, la aptitud matemática, la motivación y los resultados en Estadística de 167 profesores en formación de lengua árabe matriculados a cursos de introducción a la Estadística en Israel. En sus conclusiones se confirma la influencia de la aptitud matemática en los resultados en Estadística como la más robusta y también indican que la aptitud matemática, la motivación, las actitudes hacia las Matemáticas y la Estadística, y la ansiedad hacia las Matemáticas, explican el 36% de la varianza del rendimiento en Estadística.

En lo que sigue, resumimos nuestra propia investigación, orientada al estudio de las actitudes y conocimientos estadísticos de los profesores y cuyo objetivo final es fundamentar la acción didáctica que permita incidir en las actitudes de los profesores e indirectamente en la mejora de la enseñanza de la Estadística en la Educación Primaria.

El trabajo se ha llevado a cabo durante un periodo dilatado de tiempo, y ha tenido distintas fases y enfoques diferentes. En una primera fase nos centramos solamente en el estudio de las actitudes hacia la Estadística, comparando los profesores en formación y en ejercicio, siempre en el nivel de la Enseñanza Primaria (Estrada, 1999). En aquel momento, no disponíamos de un instrumento de medición de actitudes que se adaptara completamente a los fines de nuestro trabajo, puesto que tratábamos de evaluar componentes diferenciados, más allá de los llamados puramente pedagógicos. Por ello, diseñamos un instrumento propio, que fue también utilizado para realizar un primer estudio exploratorio, con una muestra reducida de profesores en formación y en ejercicio, que nos permitiera decidir si se continuaba con el mismo colectivo, si se analizaban las mismas variables personales y escolares y si el instrumento era adecuado. Este estudio y sus conclusiones se describen en Estrada y cols.(2004).

Contrariamente a nuestra hipótesis inicial, no encontramos unas diferencias acusadas en las actitudes de profesores en formación y profesores en ejercicio, por lo que decidimos continuar el trabajo centrándonos exclusivamente en evaluar la actitud hacia la Estadística de los profesores en formación, sobre los que recae principalmente nuestra acción formativa. También decidimos utilizar para el nuevo estudio el instrumento construido por Schau y cols. (1995), S.A.T.S. , después de analizar las diferentes escalas de evaluación existentes en la literatura internacional, revisión que se detalla en Estrada (2002a).

Asimismo, puesto que la lectura y el análisis de la bibliografía que hicimos durante la primera fase del estudio nos indicaba la estrecha relación existente entre las actitudes y los conocimientos hacia la Estadística, decidimos completar el estudio, con una evaluación exploratoria de los conocimientos estadísticos de los profesores en formación sobre aquellos conceptos elementales que han de explicar a sus alumnos. Con este fin utilizamos parte del cuestionario *Statistics Reasoning Assessment* (Garfield, 1998, 2003), más concretamente, los ítems referidos a interpretación de gráficos, promedios, asociación, comparación de muestras y muestreo, es decir, los relacionados con el contenido estadístico del currículo de primaria.

La principal variable dependiente de este estudio fue la actitud hacia la Estadística de profesores en formación, operacionalizada a partir de la puntuación total en la escala S.A.T.S. Asimismo, fueron variables dependientes los componentes de las actitudes, a saber: competencia cognitiva, afectiva, valor y dificultad, respectivamente operacionalizados a partir de las puntuaciones en los diferentes componentes que conforman la escala elegida; y los conocimientos estadísticos elementales, medidos a partir de las respuestas al cuestionario. Como variables explicativas de la actitud se analizaron el género, la especialidad (dentro de los estudios de Magisterio) y el número de cursos previos realizados sobre Estadística.

La muestra estuvo formada por 367 profesores en formación de la Universitat de Lleida, repartidos entre las especialidades que se imparten en el centro de Lleida (Educación Física, Musical. Infantil, Primaria, Especial y Lenguas Extranjeras). El 77% de la muestra son mujeres, entre 19 y 20 años de edad, con estudios previos de Estadística escasos, ya que la mayoría sólo la estudió como parte de un curso de Matemáticas en Bachillerato o en COU, y muy raramente en la enseñanza obligatoria.

La tercera fase tiene por objetivo estudiar la dimensionalidad del dominio de las actitudes hacia la Estadística de los profesores en formación según la estructura teórica de cuatro factores o componentes propuesta por sus autores.

Este estudio y sus conclusiones se describen en Estrada y cols. (2005).

Finalmente en un intento de aproximación más cualitativo a nuestro análisis de actitudes hacia la Estadística, utilizamos, en una muestra de 121 alumnos de la misma población, una versión abierta del SATS en la que se pedía a los alumnos razonar o justificar las respuestas a los ítems con puntuaciones por debajo de la posición de indiferencia. El análisis de sus respuestas así como un resumen de los resultados lo presentamos a continuación.

PRINCIPALES RESULTADOS

Resultados globales del estudio con futuros profesores

Como hemos indicado, el estudio sobre futuros profesores se realizó con la escala SATS en una muestra de 367 estudiantes. Las actitudes de los futuros profesores resultaron neutras con una ligera tendencia a la positividad, como podemos deducir de los resúmenes estadísticos presentados en la tabla 2, donde observamos que las medias obtenidas en la puntuación total y para las diferentes componentes presentan puntuaciones superiores a los valores teóricos, con desviaciones típicas, en general pequeñas, lo que asegura un buen grado de acuerdo en la respuesta. Al comparar la puntuación tipificada de la medias con el valor teórico, la competencia cognitiva aparece como el factor más valorado, a gran distancia de los otros tres componentes, que presentan puntuaciones inferiores y poco diferenciadas entre sí. Es decir, los profesores consideran tener bastante capacidad para aprender la materia, a pesar de que el valor que le conceden no es excesivo, no les gusta demasiado y no la ven demasiado fácil.

Tabla 2. Resúmenes estadísticos de los componentes y puntuación total

Componente	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica	Máximo posible	Media teórica	Puntuación tipificada (media)
Afectivo	6	29	18,67	4,17	30	15	0,88
C. cognitiva	9	30	20,47	3,57	30	15	1,53
Valor	14	43	29,60	5,03	45	25	0,91
Dificultad	11	28	20,33	3,32	35	17.5	0,85
Puntuación total	48	123	88,76	13,33	140	70	1,4

En la tabla 3 presentamos los resultados referentes a cada uno de los 28 ítems de la escala, y frecuencia de cada una de las categorías (1 = muy en desacuerdo, 2 = en desacuerdo, 3 = indiferente, 4 = de acuerdo, 5 = muy de acuerdo) para el total de la muestra. Presentamos también las medias y desviaciones típicas de las puntuaciones obtenidas con el criterio anterior. Hacemos notar que los ítems que tienen un enunciado desfavorable a la actitud que tratamos de medir (por ejemplo, el ítem 2) fueron puntuados en forma inversa al calcular su media, de forma que todas las medias sean directamente comparables (una media alta indica siempre una actitud positiva). De esta manera, la puntuación total (suma de las puntuaciones de los 28 ítems) representará la actitud de cada encuestado respecto a la Estadística, que será tanto más favorable cuanto más elevada sea la puntuación.

Los puntos mejor valorados: piensan que pueden aprender (ítem 23) y que la Estadística es útil (ítem 5). Corresponden a los componentes competencia cognitiva y valor, respectivamente y los peores corresponden a aspectos relacionados con la dificultad que implica el aprendizaje de la disciplina (ítems 22 y 17).

Tabla 3. Resultados en los ítems para el total de la muestra

Enunciado del ítem	1	2	3	4	5	$\bar{x}$	s
1. Me gusta la Estadística.	37	61	145	105	10	2,97	1,00
2. Me siento inseguro cuando hago problemas de Estadística.	29	111	119	84	17	2,86	1,02
3. No entiendo mucho la Estadística debido a mi manera de pensar.	10	51	131	127	42	3,39	0,96
4. Las fórmulas estadísticas son fáciles de entender.	25	107	108	115	11	2,95	1,00
5. La Estadística no sirve para nada.	2	24	78	164	96	3,90	0,89
6. La Estadística es una asignatura complicada.	23	123	109	84	20	2,87	1,02
7. La Estadística es un requisito en mi formación como profesional.	35	106	136	80	9	2,79	0,97
8. Mis habilidades estadísticas me facilitarán el acceso al mundo laboral.	35	121	139	62	9	2,70	0,94
9. No tengo ni idea de qué va la Estadística.	13	38	49	203	63	3,72	0,98
10. La Estadística no es útil para el profesional de “a pie”.	7	32	137	154	29	3,46	0,84
11. Me siento frustrado al hacer pruebas de Estadística.	12	53	142	132	27	3,30	0,92
12. Los conceptos estadísticos no se aplican fuera del trabajo.	9	38	78	189	50	3,64	0,93
13. Utilizo la Estadística en la vida cotidiana.	55	85	120	97	9	2,78	1,07
14. En las clases de Estadística estoy en tensión.	8	50	160	106	37	3,32	0,91
15. Disfruto en clase de Estadística.	39	76	173	64	11	2,81	0,95
16. Las conclusiones estadísticas raramente se dan en la vida.	2	48	102	168	44	3,56	0,89
17. La mayoría de la gente aprende Estadística rápidamente.	32	139	152	33	8	2,58	0,86
18. Aprender Estadística requiere mucha disciplina.	10	55	160	117	22	3,24	0,88
19. En mi profesión no usaré Estadística.	8	39	118	154	43	3,51	0,92
20. Cometo muchos errores matemáticos cuando hago Estadística.	19	80	131	122	13	3,08	0,95
21. Me da miedo la Estadística.	14	59	101	131	59	3,45	1,06
22. La Estadística implica mucho cálculo.	32	164	100	59	4	2,55	0,91
23. Puedo aprender Estadística.	3	15	40	221	86	4,02	0,76
24. Entiendo las formulas estadísticas.	10	67	142	137	7	3,18	0,85
25. La Estadística no es importante en mi vida.	6	62	154	115	28	3,27	0,89
26. La Estadística es muy técnica.	19	108	156	76	5	2,84	0,86
27. Me resulta difícil comprender los conceptos estadísticos.	16	88	125	126	9	3,07	0,93
28. La mayoría de la gente debe cambiar su manera de pensar para hacer Estadística.	5	46	168	114	30	3,33	0,85

Variables que influyen en las actitudes

Los resultados del análisis de covarianza indican que sólo el número de años de estudio tuvo un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación media en la escala de actitudes. No aparece influencia de género, especialidad o interacción, ni en la puntuación total ni en ítems aislados. Sin embargo aparece una ligera diferencia de puntuaciones medias entre hombres y mujeres que coincide con el trabajo de Cazorla y cols.(1998), quienes obtienen actitudes más negativa en el caso de las mujeres.

En cuanto a los años de estudio, se apreció un cambio notable de actitud favorable a medida que aumenta la instrucción en la materia, lo que corrobora nuestro objetivo de incidencia en los planes de estudio de las facultades de Educación y las escuelas de Magisterio. Respecto al estudio por componentes, hallamos un efecto estadísticamente significativo referente al número de años de estudio en relación a tres de los componentes (utilidad, afectivo y valor), aunque no se aprecia una mejora en la dificultad percibida del tema.

Finalmente por lo que respecta a los conocimientos estadísticos y su relación con las actitudes, las puntuaciones de la actitud y sus componentes presentaron correlaciones estadísticamente significativas y positivas con los conocimientos estadísticos elementales, aunque de intensidad moderada. Ello se explica porque, por un lado, se trata de constructos (conocimientos y actitudes) multidimensionales que no se pueden reflejar en un solo ítem, componente o cuestionario; y por otro, porque otras variables (años de estudio, especialidad) han mostrado su influencia sobre ambos constructos. En todo caso, la confirmación de esta hipótesis nos sugiere que la mejora de los conocimientos de los profesores en formación es un modo de incidir positivamente en sus actitudes.

Justificación de actitudes negativas y positivas

En la Tabla 3 podemos observar que los ítems 2, 4, 6, 7, 8, 13, 15, 17, 22 y 26 presentan puntuaciones inferiores a 3, por lo cual estos ítems son los que representan las actitudes más negativas en la muestra, aunque no en todos los estudiantes, pues algunos les dieron una valoración alta. Para tratar de averiguar las razones que diferencian a los alumnos que presentan actitudes más positivas o más negativas en estos ítems, pasamos el SATS con respuesta abierta para estos 10 ítems a una nueva muestra de 121 profesores en formación, pidiendo a los estudiantes a continuación del enunciado que justificasen su respuesta. Seguidamente se analizaron las justificaciones de los estudiantes con altas (4-5) y bajas (1-2) puntuaciones en estos ítems, que se eligieron precisamente por ser los que peores actitudes expresaban (mientras que en el resto la mayoría de los futuros profesores expresan actitudes neutras o positivas). Explicamos a continuación las razones positivas y negativas que aportaron intentando agruparlas por tipo de respuesta.

Los alumnos que puntuaron positivamente los ítems citados, justificaban sus valoraciones positivas argumentando que la Estadística no requiere unas Matemáticas complicadas (*"bastante lógicas y sencillas*," no *son de las mas complicadas", "es la parte más sencilla*"), tuvieron buena experiencia de enseñanza ("*cuando te lo explican bien", "fue un temario ameno*", "*era divertido hacer gráficos*"), ser un tema novedoso ("*porque me gustan los temas diferentes"),* han podido aplicarla a contextos significativos ("*porque una vez ya aplicado es fácil volverlo a hacer*"), les parece necesario para un maestro ("*parte útil y cotidiana", "lo has de saber para enseñarlo a los niños", "sirve para hacer la valoración general del progreso de los alumnos", "para conocer las caracteristicas de los alumnos", "para ver el rendimiento de los alumnos")* o les parece positivo como formación ("*es fundamental en cualquier formación", "sí, porque sacas valores para tomar decisiones").*

Como podemos observar, las razones positivas que se presentan están vinculadas al componente dificultad, al tipo de enseñanza que han recibido y sobre todo, al componente valor, tanto en lo que hace referencia a su futuro profesional como maestro o de carácter más general.

De las puntuaciones negativas destacamos las razones siguientes: lo habían olvidado (*"lo hice en 3º de ESO y no me acuerdo", "no la estudie suficiente", "hace años que no hago"),* no

lo estudiaron (*"asignatura que no había hecho nunca ", "me la explicaron por encima", "pocas nociones estadísticas")*, es una forma diferente de razonamiento (*"no es mecánico","todos los problemas son diferentes", "has de tener lógica")*, enseñanza muy formalizada (*"tienen símbolos demasiad raros")*, les parece que no se da suficiente valor a la Estadística en la sociedad (*"se valoran otras habilidades en el trabajo", "no te cuenta cuando buscas trabajo*", *"nadie te pregunta si sabes", "no se puntúa")*, no conocen sus aplicaciones (*"no encuentro situaciones donde utilizarla", "no la utilizo porque no se donde hacerlo")*, o no se les motivó el interés: (*"sencillo pero aburrido","no acabo de ver para qué")* .

Como podemos observar, estos argumentos, en gran parte, están vinculados al componente cognitivo y pone de manifiesto por un lado las lagunas formativas de los profesores en formación en el sentido de que o no lo aprendieron o se les olvidó y por otro lado, el tipo de enseñanza recibida, con poca motivación, muy formalizada y sin aplicaciones en el mundo real, del resto de componentes sólo aparece el valor con razones que argumentan la necesidad de potenciar su importancia en la sociedad como herramienta multidisciplinar.

Si comparamos las razones positivas y las negativas vemos que el principal argumento tanto de actitudes positivas como negativas es el tipo de enseñanza (o la falta de ella) recibida y el valor formativo percibido, lo que sugiere la necesidad no sólo de reforzar la enseñanza de estos profesores, sino de mejorar la metodología de enseñanza y concienciarlos de las aplicaciones de la Estadística. Resulta curioso que el componente afectivo no aparece en ninguna de las expresiones a pesar de que los ítems 2 y 15 recogen este tipo de expresiones vinculadas al dominio afectivo, dominio que aparece fuertemente relacionado al cognitivo en los alumnos con actitudes negativas en los trabajos de Anastasiadou (2005) al realizar el análisis implicativo de Gras. Es por tanto lógico que tampoco aparezca como causa de las actitudes negativas o positivas la dificultad percibida de la materia.

Estudio componencial

Al analizar las correlaciones entre los componentes y la puntuación total (tabla 4), podemos comprobar que el componente afectivo es el que presenta un coeficiente de correlación más elevado, el 0,88 respecto a la puntuación total, lo que corrobora la teoría de la importancia del dominio afectivo en las actitudes, argumentado ya en los trabajos de McLeod (1992, 1994).

Tabla 4. Correlaciones (Pearson) entre componentes

Componente	P. total	Afectiva	Cognitiva	Dificultad	Valor
P. total	1,00	0,88	0,87	0,75	0,77
Afectivo		1,00	0,78	0,47	0,64
C.Cognitivo			1,00	0,45	0,63
Dificultad				1,00	0,33
Valor					1,000

A escasa distancia, nos encontramos con la competencia cognitiva, que con un valor de 0,87, nos induce a potenciar una educación estadística adecuada como elemento esencial en la formación de actitudes de los profesores en formación. Por lo que se refiere a los otros dos componentes, valor y dificultad, aunque también queda patente su influencia, ésta es algo menor que la ejercida por los anteriores. Asimismo destacamos la escasa correlación de la dificultad con el resto de los componentes.

Estos resultados son confirmados con el análisis factorial, en el que retuvimos los cinco factores que se presentan rotados en la tabla 5 (extracción por componentes principales, rotación varimax). El primer factor fue dominante y explicó el 27% de la varianza total. Al analizar los componentes obtenidos (tabla 5) observamos que, para los profesores en formación, el componente valor de la Estadística aparece en una posición claramente destacada (todos los ítems puntúan en el segundo factor e incluso en el 5 y prácticamente ningún otro). El resto de los factores no se destaca independiente, sino aparecen mezclados entre sí, lo que indica la relación de los afectos, dificultad percibida y capacidad cognitiva.

Tabla 5. Correlaciones de los ítems con los componentes rotados

Enunciado (resumido)	Componente	Ítem	Factor				
			1	2	3	4	5
Me siento seguro	A	2	0,76				
Entiendo	C	3	0,72				
No me siento frustrado	A	11	0,58		0,35		
Tengo ideas	C	9	0,57	0,32			
No cometo errores	C	20	0,51		0,35	0,41	
No me da miedo	A	21	0,50		0,43		
Conceptos fáciles	C	27	0,50		0,39		
Sencilla	D	6	0,45		0,42	0,37	
No estoy en tensión	A	14	0,42		0,31		
Se aplica	V	12		0,71			
Útil	V	10		0,71			
Se usa	V	16		0,71			
Usaré	V	19		0,68			
Sirve	V	5		0,46			
Importante	V	25	0,37	0,44			0,34
Utilizo	V	13		0,36			
Entiendo	C	24			0,74		
Fórmulas fáciles	C	4	0,39		0,65		
Puedo aprender	C	23			0,64		
Me gusta	A	1	0,46		0,53		
Disfruto	A	15	0,37		0,49	0,35	
La mayoría aprende	D	17			0,30		
Cálculo	D	22				0,77	
Técnica	D	26				0,71	
Cambia la forma de pensar	D	28					-0,72
Facilita acceso al trabajo	V	8		0,44			0,55
Requisito en la formación	V	7		0,37	0,39		0,55
Requiere disciplina	D	18				0,33	-0,45

Estos resultados se confirmaron con el análisis clúster y también confirman el estudio de Mastracci (2000) en cambio contradicen las investigaciones de Schau y cols. (1995) y Dauphinee y cols.(1997) en las que los cuatro factores se configuran independientemente en el análisis factorial.

En resumen, en nuestro trabajo los componentes competencia cognitiva y afectivo aparecen ligados y se observa una relación inversa entre la dificultad y el valor, único componente cuyos ítems aparecen claramente agrupados al realizar el análisis clúster.

CONCLUSIONES

Pensamos que nuestro trabajo supone una aportación importante al conocimiento de las actitudes de los profesores de Educación Primaria hacia la Estadística, tanto para el caso de profesores en formación como en ejercicio, que no habían sido estudiadas por otros investigadores. Nuestro trabajo sugiere que los resultados sobre componentes y variables que afectan a las actitudes y que han sido descritos en relación a otros colectivos no se extrapolan fácilmente al caso de los profesores de Educación Primaria, abriendo una línea de investigación para confirmar y explicar las diferencias encontradas. La metodología de análisis de datos, los instrumentos de evaluación analizados y el estado de la cuestión presentado, en particular el referente al tema de las actitudes, son también contribuciones que pueden ser utilizadas en otras investigaciones sobre formación del profesorado, actitudes hacia la Estadística o hacia otros temas matemáticos.

Nuestros resultados sugieren que la actitud de los futuros profesores respecto a la Estadística presenta una ligera tendencia positiva, globalmente y en sus distintos componentes, destacando la puntuación total, así como el componente cognitivo, que sería el más valorado por los profesores en formación. El efecto mostrado de los conocimientos sobre las actitudes sugiere que la mejor preparación de los profesores es un requisito imprescindible si queremos mejorar sus actitudes. Simultáneamente, se conseguiría superar los errores y dificultades que hemos observado en la evaluación de los conocimientos estadísticos de estos futuros profesores.

No se confirma el modelo teórico de cuatro dimensiones, en contradicción con las investigaciones realizadas por los autores del cuestionario en las que los cuatro factores se configuran independientemente. Una aportación importante de la investigación realizada es que únicamente el componente de valor se diferencia de los otros componentes teóricos, que aparecen fuertemente relacionados, ello sugiere que, para la muestra de nuestro estudio (profesores en formación) el valor de la Estadística aparece claramente destacado e independiente de sus sentimientos, dificultad percibida o capacidad cognitiva.

Por supuesto estos componentes están separados desde el punto de vista teórico, pero si en la práctica existe una fuerte interrelación entre los mismos, la actuación sobre uno de ellos influye en los demás. La consecuencia práctica es que, por un lado, se precisan instrumentos más finos de medición para separar estos tres componentes entre sí, así como complementar nuestro estudio con técnicas de tipo cualitativo, tales como entrevistas. Por otro, si conseguimos disminuir la dificultad percibida o mejorar la propia apreciación de la capacidad cognitiva respecto a la Estadística, habremos conseguido mejorar la afectividad hacia la materia por parte de los profesores en formación.

Puesto que el estudio componencial indica que el valor concedido a la materia está inversamente relacionado a la dificultad percibida, es importante que la enseñanza no añada dificultad innecesaria al tema, dado que estamos hablando específicamente de conocimientos estadísticos elementales, que no requiere el conocimiento de unas Matemáticas avanzadas. Nuestra recomendación es seguir la sugerencia de Ball (2000) de llevar a cabo simultánea-

mente la enseñanza de los contenidos matemáticos y didácticos de los profesores, mostrándoles aplicaciones y una metodología que puedan utilizar con sus futuros alumnos.

En la actualidad estamos trabajando con la versión abierta de SATS en profesores en ejercicio, intentando contrastar la hipótesis de que, al igual que con las actitudes hacia la Estadística, las justificaciones aportadas en los distintos ítems no difieren significativamente entre profesores en formación y en ejercicio debido a las lagunas formativas y a la escasa práctica docente.

Para terminar sólo añadir que a pesar de que últimamente los trabajos sobre actitudes hacia la Estadística han ido aumentando, queda camino por recorrer y es preciso fomentar la investigación en temas actitudinales pues aunque sabemos que la medida de las actitudes es una tarea difícil, pues conlleva conocer lo que realmente una persona siente y valora, la medición y evaluación de actitudes es un capítulo central, tanto para la investigación científica como para la práctica educativa. Una conclusión importante que aparece en el estudio es la necesidad de potenciar una mayor formación de los futuros profesores en Estadística y de planificar una acción educativa que permita incidir directamente en las actitudes e indirectamente en la mejora de la enseñanza de esta materia en la Educación Primaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aiken, L. R. Jr. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, 5, 67-71.

Aiken, L.R., y Dreger, R.M. (1961). The effect of attitudes in performance in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 52 (1), 19-24.

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME* On line, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero. Bilbao.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Batanero, C., Albert, A., Ben-Zvi, D. Burrill, Connor, D., G., Engel, J. Garfield, J., Hodgson, B., Li, J., Pereira-Mendoza, L. Polaki, V., Reading, C., y Rossman, A. (2006). Discussion Document: Joint ICMI /IASE Study: *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education.* On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Brito, M. R. F. (1999). Adaptaçao e validaçao de uma escala de attitudes em relaçao à matemática. *Zetetiké*, 6 (9), 109-162.

Bradstreat, T. E. (1996). Teaching introductory statistics course so that nonstaticians experience statistical reeasoning. *The American Statician*, 50, 69-78.

Calderhead, J. y Robson, M. (1991). Images of teaching. *Teaching & Teacher education*, 7, 1-8.

Callahan, W. J. (1971). Adolescent attitudes toward mathematics. *Mathematics Teacher*, 64, 751-755.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3 (1), 5-28. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(1)_marquez.pdf

Cashin, S.E. y Elmore, P.B. (2000). The Students Attitude Toward Statistics scale: A construct validity study. Comunicación presentada al *Annual Meeting of the Mid-Western Educational Research Association*, Chicago.

Cazorla, I. M., Silva, C. B. da, Vendramini,C. y Brito, M. R. F.(1998). Adaptaçao e validaçao de uma escala de attitudes em relaçao à Estatística. En: Actas de la *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* (pp. 45-58). PRESTA. Florianópolis.

Chang, L. (1996). Quantitative Attitudes Questionnaire: Instrument development and validation. *Educational and Psychological Measurement*, 56 (6), 1037-1042.

Cherian, V.I. y Glencross, M.J. (1997). Sex, socio-economic status, and attitude toward applied statistics among postgraduate education students. *Psychological Reports, 80*, 1385-1386.

Cuesta, M., Rifá, H., y Herrero, F.J. (2001). Un estudio exploratorio, en estudiantes de psicología, de una escala de actitudes hacia la estadística. *Póster presentado en el VII Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud*, Madrid.

Dauphinee, T. L., Schau, C. y Stevens, J. J. (1997). Survey of Attitudes Toward Statistics: Factor structure and factorial invariance for women and men. *Structural Equation Modelling*, 4 (2), 129-141.

Dutton, W. (1954). Measuring attitudes toward arithmetic. *The Elementary School Journal*, 55, 24-31.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1980). Relationship between selection variables an statistics achievement. *Journal of Educational Psychology*, 72, 457-467.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1986). A model of statistics achievement using spatial ability feminist attitudes and mathematics. Related variables as prediction. *Educational and Psychological Measurement*, 46, 215-222.

Estrada, A. (1999). *Análisis de actitudes hacia la Estadística.* Memoria de Tercer Ciclo. Departament de Didáctica de les Matemátiques i les Ciencies Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. (2002a). Actitudes hacia la Estadística e instrumentos de evaluación*.* En: *Actas de las Jornades Europees d'Estadística (pp. 369-384). Instituto Balear de Estadística. Palma de Mallorca*, On line, http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/estadística.doc

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias*, 22 (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M. y Diaz, C. (2005).A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. En M.Bosch (ed.). *Proceedings the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 508-517). CERME 4* Sant Feliu de Guíxols, Girona: ERME. ISBN: 84-611-3282-3. CDROM.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education.* GAISE report. American Statistical Association. On line: http://www.amstat.org/education/gaise/

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press, Voorburg.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assesment framework. *Journal of Statistics Education,* 2 (2). On line, http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

Garfield, J. B. (1998). The statistical reasoning assessment: Development and validation of a research tool. In L. Pereira- Mendoza (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 781-786). Singapore: International Statistical Institute.

Garfield, J. B. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2 (1), 22-38. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ2(1).

Gattuso, L. y Pannone, M. (2002). Teacher's training in a statistic teaching experimentation. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 685-692). Cape Town: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

Glencross, M.J. y Cherian, V.J. (1992). Attitudes toward applied statistics of postgraduate education students in Transkei. *Psychological Reports,* 70, 67-75.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea. Madrid.

Harvey, A.L., Plake, B.S., y Wise, S.L. (1985,). The validity of six beliefs about factors related to statistics achievement. Comunicación presentada en el *Annual Meeting of the American Educational Research Association,* Chicago.

Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1991). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.

Heaton, R. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 35-59.

Huedo, T., López, J.A., Martínez, R. y Nortes, A. (2003, abril). Contenidos y actitudes en estadística: Un estudio en maestros en formación. *Proceedings of 27 Spanish National Conference of Statistics and Operational Research. Universit of Lleida. CD ROM*.

Makar, K. M. y Confrey, J. (2004). Secondary teachers' reasoning about comparing two groups. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 327-352). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Manassero, M..A. y Vazquez, A. (2001).Instrumentos y métodos para la evaluación de actitudes relacionadas con la ciencia , la tecnología y la sociedad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(1), 15-27.

McCall, C.H., Belli, G., y Madjidi, F. (1990). The complexities of teaching graduate students in educational administration introductory statistical concepts. Comunicación presentada a la *III International Conference on Teaching Statistics*, Dunedin.

Mastracci, M. (2000). *Gli aspecti emotive nell'evolution dell'apprendimento della statistica e della sua valutazione. Un caso di studio sugli studenti di SSA.* Tesis de Laurea. Universidad La Sapienza de Roma.

Mc Leod, D. B. (1988). Affective issues in Mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 134-140.

Mc Leod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: new vewof affect in mathematics education. En: D. B. Mc Leod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlag.

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En: D.A. Grows (ed.). *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Macmillam N.C.T.M. New York.

Mc Leod, D. B. (1994). Reseach on affect and mathematics learning in JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 637-647.

Miller, R.B., Behrens, J.T., Green, B.A. y Newman, D. (1993). Goals and perceived ability: Impact on student valuing, self-regulation and persistence. *Contemporary Educational Psychology*, 18, 2-14.

Mendonça, T., Coutinho, C. y Almouloud, S. (2006). Mathematics education and statistics education: meeting points and perspectives. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. CD ROM. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Moore, C. M. (1987) *Group techniques for idea building*. Newbury Park, CA: Sage.

Nasser, F. (1999). *Prediction of college students achievement in Introductory Statistics Course*. Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). On line: www.amstat.org/publications/jse/v12n1/nasser.html.

Onwuegbuzie, A.J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. *Psychological Reports, 83*, 1008-1010.

Onwuegbuzie, A.J. (2003). Modeling statistics achievement among graduate students. *Educational and Psychological Measurement*, 63(6), 1020-1038.

Pretorius, T. B. y Norman, A. M. (1992). Psycometric data on the Statistics Anxiety Scale for a sample of South African students. *Educational and Psychological Measurement*, 52, 933-937.

Roberts, D.M. y Bilderback, E.W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.

Roberts, D.M. y Reese, C.M. (1987). A comparison of two scales measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 47, 759-764.

Silva, C.B., Cazorla, I.M., y Brito, M.R.F. (1999). *Concepçôes e atitudes em relaçao à estatística*. Comunicación presentada a la Conferência Internacional *Experiências e Expectativas do Ensino da Estatística: Desafios para o Século XXI*, Florianópolis.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55 (5), 868-875.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.

Sutarso, T. (1992). Some variables in relation to students' anxiety in learning statistics. Trabajo presentado en *Annual Meeting of the Mid –South Educational Research Assocciation.* Knoxville, TN.

Suydam, M. N. (1984). Research report: Attitudes toward mathematics. *Arithmetic Teacher*, 32, 12.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.

Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). *An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program*. Comunicación presentada al AERA Annual Meeting, San Diego.

Velandrino, A.P., y Parodi, L.H. (1999). *La Escala de Actitudes hacia la Estadística (EAE): Desarrollo y propiedades psicométricas*. Comunicación presentada a la Conferência Internacional *Experiências e Expectativas do Ensino da Estatística: Desafios para o Século XXI*, Florianópolis.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.

Wisenbaker, J., Nasser, F., y Scott, J.S. (1999, agosto). *A cross-cultural comparison of path models relating attitudes about and achievement in Introductory Statistics Courses*. Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

DESAFIOS PARA O TRABALHO COLABORATIVO NAS AULAS DE ESTATÍSTICA

Carolina Carvalho
cfcarvalho@fc.ul.pt
Departamento de Educação
Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (Portugal)

RESUMO

Hoje encontramos estatística nos currículos de matemática da maioria dos países. Em Portugal, a estatística é ensinada nas aulas de matemática por um professor de matemática até ao ensino universitário. As orientações curriculares para o ensino da Estatística referem a necessidade de os alunos colocarem questões, recolherem, organizarem e representarem dados através de uma investigação. Uma forma de o fazer é implementando estratégias de trabalho colaborativo na sala de aula. Esta forma de trabalho cria oportunidades de enriquecer o poder estatístico dos alunos pois discutem e explicam ideias, expõem, avaliam e refutam argumentos e resoluções. Nesta comunicação procura-se reflectir sobre as vantagens do trabalho colaborativo nas aulas de estatística, incluindo a nossa própria investigação sobre o tema.

ABSTRACT

Today we can find statistics in maths curriculum in a lot of countries. In Portugal, statistics is teached in a math class by a math teacher until the university classes. Curriculum orientations for statistics teaching shows the necessity of students to ask questions, gather, organise and represent data through an investigation. One way to do it is through classroom colaborative work. This kind of work improve students statistics knowlegde as a result of the discussions and clarifications of their ideas and resolutions. In this presentation we will try to reflect about benefits of colaborative work in satatistics classes, including our investigation.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Carolina Carvalho (2007). DESAFIOS PARA O TRABALHO COLABORATIVO NAS AULAS DE ESTATÍSTICA, pp. 141-154.

INTRODUÇÃO

A maioria dos países está hoje prisioneiro da informação numérica e os últimos 20 anos evidenciam bem as potencialidades da estatística e das probabilidades no desenvolvimento de investigações em diferentes áreas de conhecimento. As decisões políticas, sociais, económicas e científicas são, frequentemente, tomadas com base em dados. Os *media* recorrem também a dados para sustentarem os seus argumentos e, por vezes, acontece que os mesmos dados geram diferentes conclusões. Ser crítico a esta realidade obriga a desenvolver um raciocínio estatístico que sustente a selecção entre o que é relevante para formar uma opinião crítica ou de senso comum. Possuir conhecimentos de estatística é essencial aos cidadãos das sociedades actuais para ser crítico em relação à informação disponível, para compreender como esta informação pode ser gerada, para comunicar com base nessa informação e, inclusivamente, para tomar decisões pessoais ou sociais.

A literacia estatística passa assim a fazer parte da agenda política de muitos desses países. Para Gal (2000), a literacia estatística é mesmo um dos objectivos dos planos curriculares quando pensamos na formação de profissionais dos mais diversos domínios. Contudo, desenvolver uma literacia estatística pressupõe uma educação estatística para todos os cidadãos, traduzindo-se estas preocupações nas orientações curriculares e na forma como deve ser trabalhada com os alunos de diferentes níveis de escolaridade na sala de aula.

Num trabalho recente de Ponte et. al. (2006) onde se confrontam os programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico de cinco países europeus, nomeadamente, Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal verifica-se que no fim da escolaridade obrigatória os alunos destes diferentes países passaram por um currículo semelhante no que se refere à estatística e às probabilidades. De comum a todos eles destaca-se a reduzida representatividade do tópico de estatística e probabilidades dentro do currículo de matemática e a semelhança entre eles no que respeita aos temas abordados, embora com pequenas diferenças.

No caso da estatística o programa português e o programa francês formalizam bastante a organização e representação de dados e o programa espanhol destaca o conceito de amostra e a elaboração de inquéritos. As medidas de tendência central são abordadas em todos estes países, embora com algumas diferenças. Em Espanha e Portugal fala-se de média, mediana e moda, mas na Irlanda a mediana não é falada aos alunos e o mesmo acontece com a moda na Suécia. Em França a referência a estas três medidas é pouco explícita, encontrando-se apenas a média ponderada. Neste país e em Espanha acrescentam-se ainda o estudo das medidas de dispersão (desvio-padrão). No caso francês, as características posicionais de uma amostra estatística são ainda estudadas pelos alunos durante a escolaridade obrigatória. Portugal, a par da Suécia, parecem ser os países que mais enfatizam a interpretação da informação e a Espanha aquele onde explícita as aplicações da estatística às situações do dia-a-dia e à ciência.

Em relação às probabilidades, verifica-se que durante a escolaridade obrigatória, de acordo com Ponte et. al. (2006), as probabilidades não fazem parte do currículo irlandês e francês. Nos restantes três países o tema é abordado, começando por introduzir a noção de probabilidade de um acontecimento e uma terminologia básica para o seu estudo. O cálculo da probabilidade de um acontecimento está incluindo.

Nos cinco países europeus estudados por Ponte et. al. (2006) verifica-se que existe um certo consenso no que respeita aos tópicos estudados na unidade curricular de estatística nas aulas de matemática e no que respeita à sua distribuição dentro do currículo de matemática. A reduzida expressão da estatística dentro do currículo de matemática leva-nos a pensar que o professor de matemática quando ensina estatística nas suas aulas tem de enfrentar vários

desafios. Pensámos em três por serem aqueles onde temos trabalhado mais nos últimos anos, concretamente, aprender estatística nas aulas de matemática, aprender estatística colaborativamente nas aulas de matemática e aprender a ensinar estatística colaborativamente. Os objectivos desta comunicação prendem-se com a procura de clarificar e/ou ajudar a compreender estes desafios.

APRENDER ESTATÍSTICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

O movimento responsável pela introdução da estatística e das probabilidades nas escolas portuguesas surge nos anos 60 com Sebastião e Silva. Cerca de quarenta anos mais tarde, concretamente em 2000, Branco escrevia que *apesar da sua inclusão no currículo estas matérias, muitas vezes colocadas no final dos programas, nem sempre eram apresentadas aos alunos, por falta de tempo ou por falta de convicção do seu real interesse* (p. 16). Uma opinião semelhante é partilhada por Ponte e Fonseca (2000) quando escrevem que *em Portugal, a Estatística parece ser ainda um tema marginal do currículo, facilmente relegável para segundo plano* (p. 179). Compreende-se então que em Portugal no que *se refere à Estatística e às Probabilidades, e apesar de se tratar de uma área bastante importante, a identificação dos conhecimentos, capacidades, dificuldades e estratégias de raciocínio dos alunos está essencialmente por fazer* (Ponte, Matos & Abrantes, 1998, p. 171).

Pelo parágrafo anterior fica claro o quanto é necessário continuar a trabalhar com os professores de matemática sobre formas de aprender e ensinar estatística. Uma análise cuidada da literatura sobre a aprendizagem da Estatística permite concluir que este não é um tema isento de dificuldades como uma revisão mais superficial poderia sugerir (Batanero, Godino, Vallecillos, Green & Holmes, 1994). Frequentemente, alunos em diferentes graus de ensino revelam conhecimentos que não vão além dos computacionais e ainda manifestam pouco sucesso quando lhes é pedido para interpretarem os resultados obtidos após aplicarem um algoritmo. Igualmente, quando lhes é solicitado para interpretarem gráficos estatísticos, os resultados que apresentam evidenciam que esta também não é uma tarefa trivial para muitos deles.

As razões apontadas para esta situação têm um consenso entre os investigadores: os pobres desempenhos dos alunos são o resultado de uma deficiente e superficial compreensão dos conceitos abordados, fruto de um ensino que, na maioria das vezes, está mais preocupado em dar a conhecer a panóplia de métodos e instrumentos existentes do que a desenvolver actividades onde estes surjam naturalmente.

A aparente simplicidade computacional, associada a uma desvalorização sistemática do contexto da situação problema que se está a trabalhar origina a ilusão, tanto para professores como para alunos, de que um conjunto de conhecimentos foi apropriado (Carvalho, 2004). Na realidade, somente permitiu a aquisição de um conhecimento instrumental traduzido no domínio de regras isoladas e de algoritmos aprendidos através da repetição e da rotina em vez de um conhecimento relacional e significativo, ou seja, um conhecimento que se vai mobilizando sempre que novas situações o exijam.

Em 2001 Carvalho realizou um estudo de natureza *quasi-experimental* cujo objectivo principal era aprofundar, em contexto de sala de aula, como o trabalho a pares gera progressos nos desempenhos académicos e cognitivos dos alunos. O estudo, realizado ao longo de dois anos lectivos consecutivos, envolveu um total de 533 alunos do 7º ano de escolaridade com idades compreendidas entre os 11 e os 15 anos. Os alunos tiveram de realizar uma tarefa classificada pela autora como habitual uma vez que seguia de perto o que os professores dos

alunos utilizavam nas suas aulas de matemática quando trabalhavam a unidade de estatística. Concretamente, valorizava-se a construção de tabelas e gráficos cujo objectivo era trabalhar os algoritmos da média e da mediana. Deixava-se por tratar, ou por vezes abordava-se apenas superficialmente, os aspectos relativos ao planeamento das investigações estatísticas. Uma visão tradicional onde se ensina estatística como se se tratasse de um tópico de matemática com ênfase nos cálculos, formulas e procedimentos era, e ainda hoje continua a ser (Ribeiro, 2006), a forma como muitos alunos em Portugal aprendem estatística na escolaridade obrigatória.

A situação descrita no parágrafo anterior ajuda a compreender o Quadro 1 sobre as dificuldades dos alunos portugueses quando resolvem tarefas de estatística na sala de aula de matemática.

Quadro 1: Erros mais frequentes dos alunos portugueses em conteúdos de estatística (Carvalho, 2001; 2004)

• **Frequência Absoluta:**
Confundir o conceito de frequência absoluta com o de frequência relativa
• **Frequência Relativa:**
No denominador da fracção colocar o valor da frequência absoluta
Confundir o conceito de frequência relativa com o de frequência absoluta
• **Moda:**
Aparecer como o maior valor da frequência absoluta
• **Mediana:**
Ordenar os dados sem atender às frequências absolutas
Ordenar as frequências absolutas e calcular a posição do valor central
Calcular a posição do valor central escolhendo mal o algoritmo
• **Média Aritmética:**
Adicionar as frequências absolutas e dividir pelo número de parcelas
Adicionar os valores que a variável toma e dividir pelo número de parcelas
• **Gráfico Circular:**
Estabelecer a proporção para encontrar o valor do ângulo
Orientar o transferidor para marcar o sector circular
Legendar o gráfico
Interpretar os dados presentes no gráfico
• **Gráfico de Barras:**
Decidir em qual dos eixos colocar a variável
Construir a escala
Legendar o gráfico
Interpretar os dados presentes no gráfico

Muitas das dificuldades encontradas nos alunos portugueses são comuns a outros alunos (Cobo, 2003). Para esta autora importa que os alunos adquiram capacidade de expressão simbólica e gráfica, sem esquecer de argumentação se queremos que sejam cidadãos estatisticamente competentes, ou seja, temos de modificar a forma como ensinamos e aprendemos estatística nas aulas de matemática com os professores de matemática. Este é mais um outro desafio.

APRENDER ESTATÍSTICA COLABORATIVAMENTE NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Num número significativo de países as orientações curriculares chamam a atenção para a necessidade dos alunos trabalharem colaborativamente nas aulas de matemática, e em particular, quando estudam conteúdos de estatística. Porém, a ênfase nesta forma de ensinar e de aprender estatística levanta desafios aos professores, aos educadores estatísticos e matemáticos, bem como a todos os outros que investigam neste domínio.

Gal e Garfield (1997, 1999) apontam mesmo como um dos principais objectivos para os alunos atingirem o raciocínio estatístico a importância de desenvolver capacidades de comunicar estatisticamente. A necessidade de falar e escrever é essencial para que os alunos consigam ter atitudes críticas e reflexivas acerca de conteúdos estatísticos presentes nas mais variadas situações, devendo-se incentivar a utilização de terminologia estatística de uma forma crítica, com base na construção de argumentos. Só assim é possível chegar ao desenvolvimento de atitudes positivas sobre o estudo dos conteúdos estatísticos e a uma construção poderosa dos conceitos quando são compreendidos em contextos diferentes dos utilizados na sala de aula de matemática, por exemplo, quando se lê uma notícia num jornal.

Num trabalho recente Graham (2006) propõe, antes de se iniciar o estudo de conteúdos de estatística com os alunos, que se explore diferentes argumentos enraizados de senso comum onde as atitudes negativas sobre a estatística estão bem presentes e embora não haja uma resposta mais adequada do que outra esta discussão permite despertar os alunos para as *grandes ideias* da estatística.

Quando dois ou mais alunos discutem entre si, em pares ou em pequenos grupos, a resolução de uma tarefa que têm de resolver na sala de aula verificamos que cada um ao possuir diferentes saberes e competências, fruto das suas vivências e experiências pessoais, vai ter de negociar significados, representações da tarefa e conhecimentos necessários à sua resolução com todos os colegas com quem está a trabalhar. Uma outra voz é assim necessária para existir uma perspectiva individual alternativa em cada um e toda a interacção acontece no seio de uma tarefa.

Mas, para além dos contributos individuais que cada um dos alunos pode dar, a interacção social estabelece-se num determinado contexto, ele próprio gerador de expectativas, de interpretações para a situação e espaço para a negociação de estratégias de resolução para a tarefa. Assim, podemos afirmar que o contexto não é neutro em relação ao desempenho que podemos observar nos alunos enquanto estão a trabalhar uns com os outros nem, tão pouco, pode ser limitado ao espaço físico onde a interacção acontece já que se modifica à medida que a própria interacção social se vai desenrolando.

Uma nova definição de contexto, mais dinâmica, torna-se necessária uma vez que este é (re) criado pelo próprio desenvolvimento da interacção à medida que os parceiros envolvidos na situação vão fazendo interpretações do que está a acontecer, fruto das vivências pessoais de cada um e dos conhecimentos que individualmente possuem e precisam mobilizar naquele momento.

O parceiro com quem interagimos, enquanto realizamos uma determinada actividade, tem um papel determinante no funcionamento interpsicológico do par. Quando dois alunos se empenham activamente numa argumentação com o objectivo de resolver uma tarefa na sala de aula estão presentes diferentes argumentos e pontos de vista, ou seja, o traço cognitivo do argumento. A posição do aluno que ouve o seu parceiro não é a de um espectador passivo. Pelo contrário, ele está bastante activo pois a sua recepção-compreensão do que ouve faz com que o seu parceiro oriente os seus argumentos em função desta sua reacção compreensiva que

antecipa, por exemplo, através de oscilações, hesitações, dúvidas, comentários, soluções de compromisso (Orvig & Grossen, 2004).

Contudo, além deste traço cognitivo, o aluno tem igualmente de conseguir gerir o traço social da interacção, fundamental num contexto colaborativo, expresso no comportamento do outro e nas interpretações que faz acerca desse mesmo comportamento, havendo por isso a necessidade de gerir uma relação interpessoal ao mesmo tempo que se negoceiam abordagens e estratégias de resolução diferentes. É pelo facto dos dois parceiros terem de justificar o seu ponto de vista, argumentar acerca das suas resoluções para as justificar ao seu par e negociar significados de conceitos que faz com que num contexto de trabalho colaborativo nenhum dos elementos imponha o seu ponto de vista, ao contrário do que acontece, por exemplo, numa situação hierárquica.

Além disso, como a situação colaborativa em que participam é reveladora da diversidade existente entre ambos, cada um dos elementos tem de se confrontar com as diferenças entre as suas respostas e as respostas do outro, o que implica também aprender a gerir aspectos relacionais.

Trabalhar colaborativamente não significa apenas que os alunos produzam diferentes respostas, é necessário que se empenhem entre si de um modo interactivo e dinâmico, isto é, é preciso que os dois (re) construam argumentos, estratégias e significados. Consequentemente, a aprendizagem passa a ser concebida como estando mediada por indivíduos activamente envolvidos a participar em tarefas e não como uma mera transmissão de conhecimentos. Aprender necessita de interpretação para relacionar a nova informação com conhecimentos anteriores e com as vivências pessoais. A heterogeneidade fundamental para que ocorram interpretações divergentes, atendendo às diferenças individuais dos alunos, facilmente acontece na sala de aula e mais do que procurar aproximar todos os alunos, anulando as suas diferenças, há que aceitar o desafio de as catalisar e considerá-las um recurso do grupo.

Quando pensamos em muitas salas de aula constatamos que os alunos ainda estão pouco habituados a interagir entre si, aceitando uma reciprocidade nos estatutos sociais dos pares e nas suas capacidades e conhecimentos, ou seja, uma estrutura horizontal (Carvalho, 2001). A experiência passada dos alunos, onde o mais frequente é uma hierarquia vertical com o professor acontrolar a maiorias das interacções na sala de aula, pode dificultar o seu empenhamento na procura de uma resolução comum, isto é, aceitar colaborar activamente com um ou mais parceiros com o objectivo de resolver uma tarefa.

Nas escolas portuguesas o mais frequente ainda é as interacções verticais, em que o professor interage com os alunos mantendo sempre uma liderança na condução do processo interactivo e, muitas vezes, da resolução das tarefas que propôs aos alunos. Por exemplo, quando escolhe o aluno que fala, quando decide a ordem das intervenções, quando faz perguntas e pede esclarecimentos, quando comunica com olhares, gestos ou sorri, quando deixa cair uma intervenção de um aluno ou quando o encoraja a desenvolver os seus pontos de vista.

Porém, o interesse dos professores por práticas educativas que privilegiem as interacções sociais, como chamam a atenção Perret-Clermont e Nicolet (1988), é condicionado pela compreensão que têm dos processos subjacentes aos fenómenos de transmissão e apropriação dos conhecimentos, ou seja, aceitar a aprendizagem como uma construção, como partilha de saberes e competências, isto é, a natureza interactiva da aprendizagem.

Nos finais dos anos 80 Gilly, Fraisse e Roux (1988) observaram que quando os alunos estão a trabalhar em colaboração para resolver uma tarefa, frequentemente, assistimos a alguns momentos de silêncio que podem traduzir uma procura individual de uma solução. Durante estes momentos os alunos estão a mobilizar um conjunto de competências e conhecimentos

que consideram necessárias para atacar a tarefa. Depois, um deles pode iniciar uma sequência interactiva desencadeada pela sua proposta de estratégia de resolução que, por sua vez, irá originar uma reacção no colega. Esta sequência interactiva, que tanto pode durar alguns minutos como breves segundos, termina quando se chega (a) a um impasse, (b) a uma resolução já proposta por um dos elementos ou (c) a uma nova solução co-elaborada em conjunto.

O desenvolvimento do estudo de diferentes sequências interactivas permitiu aos três autores referidos falarem de quatro tipos de co-elaboração presentes quando dois alunos trabalham em conjunto na procura de uma solução para uma tarefa proposta. Quando analisamos diferentes protocolos com transcrições de interacções sociais os dois primeiros, co-elaboração por consentimento e co-elaboração por co-construção, são, segundo estes autores, os que geram mais progressos nos desempenhos dos alunos.

Os quatro tipos de co-elaboração considerados por Gilly, Fraisse e Roux (1988) são os seguintes:

1. Co-elaboração por consentimento

Um aluno A elabora ou esboça uma solução e propõe-a ao colega B com quem está a trabalhar. Este, sem oposição nem desacordo, escuta e dá *feedback* positivo, que tanto pode ser verbal como gestual. O aluno B, que não tem uma atitude passiva, uma vez que vai seguindo tudo aquilo que o colega vai dizendo e fazendo, parece construir em paralelo uma resposta semelhante ao aluno A. A adesão à resposta do colega não é falsa, sendo pelo contrário, um acordo cognitivo na forma de uma co-elaboração por consentimento onde o aceitar dos argumentos do colega funciona como um reforço positivo que controla a resposta proposta por um, mas aceite pelos dois.

É difícil saber se o aluno B age assim porque não tem nada melhor a propor ou se, apesar de ter alguma estratégia de resolução diferente, deixa que seja o A a tomar a iniciativa de expressão tanto mais que, ao longo de toda a interacção, os papéis podem ir sendo invertidos.

O extrato da interacção social entre dois alunos do 7º ano de escolaridade que a seguir se apresenta, e as três seguintes, fazem parte de uma investigação mais ampla realizada por Carvalho (2001). Neste estudo os alunos trabalhavam em pares, tarefas não-habituais de Estatística. Designamos por tarefas não-habituais aquelas que correspondem a actividades que os professores afirmam utilizar raramente na sua prática lectiva, quando leccionam estatística. Em geral, trata-se de actividades que, na literatura, aparecem designadas como “problemas” ou como “actividades de investigação”.

Os alunos tinham de discutir o conceito de média partindo de uma distribuição assimétrica presente nos salários dos trabalhadores de uma empresa. Objectivo da investigadora era estudar como os alunos a resolviam uma vez que não lhes era explicitamente indicado o que deveriam fazer.

(...)
B- Eles não ganham todos o mesmo.
C- Pois não. Devem ter diferentes funções.
B- Este é o que ganha mais. Deve ser o chefe.
C- O chefe ganha mais e isto aqui fica...
B- desequilibrado...e depois parece que todos...
C- e depois parece que todos ganham o mesmo quando for para saber a média.
(...)

2. Co-elaboração por co-construção

Neste tipo de co-elaboração assistimos a uma verdadeira co-construção de uma solução, sem que haja uma manifestação observável de desacordos ou contradições entre os dois alunos que estão a trabalhar colaborativamente com o objectivo de resolver uma tarefa.

O aluno *A* começa uma frase ou ideia, *B* continua-a. Então o aluno *A* retoma novamente a sua ideia inicial quando *B* termina, e assim sucessivamente, co-elaborando uma solução a dois. Não é fácil saber se cada um dos alunos chegaria à mesma solução se estivesse a trabalhar isoladamente, o que se verifica é que cada um aproveita a ideia do colega para o seu raciocínio. Cada um dos alunos reforça o que o colega vai dizendo quando utiliza a sua ideia.

Contudo, a aparente harmonia não exclui a possibilidade das intervenções de um aluno perturbarem o outro, ou desencadearem uma ideia impossível sem esta dinâmica. Este tipo de co-elaboração tem um efeito duplo para cada um dos sujeitos: abre um campo de possibilidades de resoluções ao mesmo tempo que desencadeia perturbações nas resoluções inicialmente encontradas. Vejamos um exemplo com outros alunos durante a resolução da mesma tarefa:

(...)

M- Temos que somar os salários...

G- e depois temos de dividir por cinco. Vai parecer que ganham todos o mesmo, o que não é verdade porque o chefe...

M- ganha muito mais que os outros.

G- Principalmente do que o empregado que ganha o salário mais baixo.

M- Os salários são muito diferentes e fazem a média ser errada.

G- A média não é errada. Isto está bem.

M- Eu acho que parece que eles ganham mais.

G- Mas a média está bem, somámos os cinco salários e depois dividimos por cinco.

M- Pois eu sei, mas está aqui alguma coisa. Será que estes são os salários de todos os empregados?

G- Pode ser ou então que tenham escolhido só alguns?

M- Podemos é pensar...

G e M – que foram mal escolhidos. [Em simultâneo].

3. Co-elaboração por confronto com desacordo

O aluno *A propõe* uma ideia que não é aceite por *B*, que por sua vez exprime o seu desacordo mas sem argumentar ou propor algo novo. Então, o aluno *B* pode retirar-se para um trabalho individual ou procurar justificar o seu ponto de vista repetindo a sua ideia inicial ou exprimindo-a de uma outra maneira.

(...)

P- Temos que somar tudo.

R- Mas o que vais fazer?

P- Eu cá vou fazer assim. Vou meter números e dividir por cinco.

R- Sabes a média e depois?

P- Então diz lá a tua ideia?

R- Não tenho, mas acho que não devemos fazer só a média.

P- Eu cá acho que devemos fazer assim. E até termos uma ideia melhor fica assim.

(...)

4. Co-elaboração por confrontos contraditórios

O aluno *A* emite uma ideia e o aluno *B* reage discordando e argumentando com outra. Verifica-se uma oposição de respostas e não somente um desacordo. Seguidamente, assiste-se a um confronto que pode ter dois desfechos: uma situação de impasse, cada aluno fica com a sua posição inicial, entrando numa fase de trabalho individual; ou os dois procuram chegar a um acordo com base na ideia inicial de um ou de outro, provando experimentalmente cada uma das hipóteses de resolução ou, então, elaborando uma nova ideia.

(...)

M- O que estás a escrever?

G- Que os salários são todos iguais quando se faz a média.

M- Mas os salários não são todos iguais...

G- Com a média ficam todos iguais.

M- Mas a média não é para ficarem todos iguais.

G- Pois não. Tens os salários diferentes e depois de fazeres a média ficam todos iguais.

M- Não sei explicar, mas assim não está bem... [Levanta-se e vai falar com outro aluno da turma].

(...)

As várias formas de interacção observadas e geradas em torno de uma mesma tarefa mostram bem como a tarefa, as instruções de trabalho e o papel do professor durante as discussões entre os elementos do grupo quanto circula na sala de aula não são elementos neutros. Este facto leva até à seguinte pergunta: quais as tarefas onde os alunos revelam melhores desempenhos?

Quebrar com a tradição de que o diálogo na sala de aula é na maior parte das vezes conduzido pelo professor, limitado muitas vezes a um conjunto de perguntas fechadas que esperam respostas concretas e imediatas obriga a pensar que as propostas feitas aos alunos não podem continuar a ser resolver exercícios rotineiros de aplicação de matéria dada onde o treino está fortemente presente. É o facto de permitirem romper muitos aspectos do contrato didáctico tradicional existente na sala de aula, que torna as tarefas facilitadoras de dinâmicas interactivas responsáveis por situações onde se desenvolvem capacidades de argumentar e comunicar e, mais tarde, quando o aluno realiza sozinho as tarefas consegue utilizar as competências adquiridas ao longo do processo interactivo como, por exemplo, o questionar-se acerca das suas próprias estratégias ou acerca do processo que o levou até elas. Aspectos fundamentais para detectar respostas incorrectas ou para encontrar alternativas às resoluções descobertas.

Porém, se as propostas de trabalho apresentadas pelo professor são cruciais, o modo como as trabalha com os alunos não é menos importante, não basta oferecer aos alunos experiências interessantes, a mesma tarefa apresentada por dois professores diferentes pode levar a resultados muito distintos. As interacções entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos são essenciais no processo de aprendizagem e um indicador do ambiente de aprendizagem que se vive numa sala de aula.

Tudo o que dissemos anteriormente suscita uma pergunta frequente na cabeça de muitos professores quando pensa nos seus alunos e na forma como lhes vai propor uma tarefa ou como os vai juntar para a fazerem. Como distribuir os alunos para conseguir que beneficiem com o facto de estarem a trabalhar dois a dois na sala de aula?

Pelo que acabámos de referir esta pergunta não tem uma resposta imediata. Vejamos porquê. Quando sentamos dois alunos ao lado um do outro vão ter diversas oportunidades de trocarem informações, de interagirem, de descobrirem o que cada um pensa e sabe acerca da

tarefa que têm para resolver E isso será positivo. No entanto, para isso acontecer, o contrato didáctico implementado na sala de aula deverá possibilitar aos alunos essa troca, deverá possibilitar que se envolvam, discutam entre si sem medos de errarem ou de serem criticados, e por fim terminem a tarefa com o sentimento de satisfação pelo que realizaram, mesmo sabendo que podem existir outras formas de o fazer. Senão, pode acontecer que apesar de estarem os dois sentados lado-a-lado aproveitem pouco com a situação, manifestando mesmo desempenhos pobres e pouco elaborados. O que nem sequer deveria constituir uma grande surpresa, visto que nalgumas escolas, nomeadamente em Portugal, os alunos se encontrarem frequentemente numa mesa na sala de aula com um colega, sem que isso promova os seus desempenhos escolares.

No contrato didáctico que o professor estabelece com os alunos deve procurar-se explicitar que os alunos têm de colaborar, de discutir entre si até encontrarem uma resolução com que todos os alunos envolvidos concordem só assim é possível esperar por desempenhos mais ricos comparativamente a alunos onde isto não acontece. Mas como promover situações na sala de aula onde os alunos trabalhem colaborativamente? Este será o último desafio que nos propomos discutir.

APRENDER A ENSINAR ESTATÍSTICA COLABORATIVAMENTE

Em Portugal o relatório Matemática 2001 da Associação de Professores de Matemática, procurou-se *elaborar um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática* (Abrantes, et al., 1998, p.1), podendo-se ler no documento, no que diz respeito à prática profissional, que os professores realizam com pouca frequência trabalho colaborativo entre si. No entanto, "a realização de trabalho colaborativo é uma condição essencial para a melhoria da prática profissional. É através das trocas de ideias e materiais entre professores com afinidades no plano dos seus interesses e perspectivas, ou com problemas e necessidades comuns, que surgem as ideias para a introdução de novas actividades, novos processos ou novos objectivos de trabalho. (p. 57)".

Recomendando-se ainda no referido documento que *devem ser incentivadas as práticas colaborativas ao nível da sala de aula, em todos os níveis de ensino, devendo caminhar-se para situações em que mais do que um professor desenvolvam em simultâneo trabalho na mesma turma* (Abrantes, et al., 1998, p. 58).

Nesta forma de trabalho, a relação entre cada interveniente é bastante próxima, facilitando a partilha de êxitos e de dificuldades sentidas, fazendo com que cada um aprenda com as contribuições dos outros. A solidariedade, a cooperação, a reciprocidade comunicativa, a confiança mútua e a responsabilidade interdependente são valores presentes nas práticas de colaboração referidas por Santos (2000).

Os professores de matemática ao terem de leccionar a unidade de estatística confrontam-se com uma situação paradoxal. Por um lado pretende-se que abordem esta unidade, tal como é sugerido na literatura, através de situações exploratórias e de actividades decorrentes de pequenos projectos, no entanto, a formação inicial (Antunes & Carvalho, 2005) e mesmo durante formação em exercício (Ribeiro, 2006) encontramos poucas oportunidades para promover condições para este tipo de prática inovadora.

Consequentemente, compreende-se que sejam várias as vozes a recomendar que *na formação de professores, devem ser reforçadas componentes que evidenciem a importância de temas como a Geometria e Estatística na aprendizagem dos alunos, destacando o seu papel*

formativo como instrumento na interpretação e intervenção sobre a realidade (Abrantes, et al., 1998, p. 31), Mas para isso, *o professor deve ser o instigador das questões a analisar tornando-se o elemento chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula. Cabe-lhe a responsabilidade de propor e organizar tarefas a realizar e de coordenar o desenvolvimento da actividade do aluno* (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 28).

Num documento internacional recente (ICMI/IASE Study, 2006) pode ler-se que para modificar a forma tradicional de como se tem ensinado e aprendido estatística nas aulas de matemática no ensino obrigatório passa por convencer os professores de matemática de que a estatística é útil aos seus alunos (Gattuso, 2006), de promover uma melhor formação, inicial e contínua, dos professores de matemática em estatística (Gattuso & Pannine, 2002) e ainda de enriquecer o seu conhecimento didáctico em relação à estatística (Franklin & Mewborn, 2006). Contudo, como também se pode ler no documento referido, as concepções dos professores sobre a estatística, de como se ensina e aprende estatística também não podem ser desprezadas.

As concepções de cada professor acerca da estatística e o seu conhecimento estatístico são determinantes para o desenrolar do trabalho com os alunos. Concretamente, no caso do professor de matemática que se sente desconfortável com a estatística pode ter uma tendência de reduzir ou omitir estes momentos, ou seja, as discussões geradas acerca das decisões estatísticas necessárias para desenvolver um estudo estatístico podem ser empobrecidas. Trabalhar colaborativamente com outros professores pode ajudar a (re) construir novas concepções acerca da estatística e de como a trabalhar com os alunos nas aulas de matemática.

Desenvolver juntamente com os alunos um estudo estatístico onde a questão não está bem definida no início, obriga a que cada um dos elementos presentes tenha um papel fundamental na sua definição. Em muitos casos, o professor precisa de partilhar com outros professores como iniciar e desenvolver este estudo. Contudo, esta situação não é igualmente problemática para todos os professores, no sentido de desencadear uma variedade rica de conjecturas e argumentações. Qualquer um (aluno ou professor) dá significado às coisas a partir daquilo que sabe, de toda a sua experiência anterior e não necessariamente a partir do significado que outros lhe atribuem. Por isso, os primeiros momentos de partilha para realizar uma tarefa ou iniciar um estudo estatístico precisam de tempo, atendendo à variedade e riqueza de decisões necessárias para resolver uma tarefa ou decidir o que se vai investigar e qual a melhor forma de o fazer e porquê.

REFLEXÕES FINAIS

As reflexões apresentadas, tendo por base diferentes investigações enunciadas, permitem mostrar que face a uma determinada tarefa cada sujeito, seja ele um aluno ou um professor, mobiliza um conjunto heterogéneo de conhecimentos, capacidades, atitudes e valores que submete a uma constante negociação. É por isso pertinente a afirmação de Vergnaud (1990) *um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos se nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através das situações e dos problemas que o sujeito tem de resolver que o conceito adquire significado* (p. 135). Face a um problema, que pode ser um exemplo de uma determinada classe de problemas, o aluno necessita de representações simbólicas de objectos matemáticos abstractos (números e operações) que o ajudem a resolvê-lo, mas que ao mesmo tempo lhe possibilitem alargar as suas soluções a problemas diferentes dos da situação inicial.

Esta preocupação por comunicar uma solução, avaliar a sua veracidade, generalizá-la a outros contextos, é a prática matemática mais comum e é o embrião de um conceito mate-

mático. Primeiro, surge como uma ferramenta para resolver um problema prático; depois, como um objecto de estudo em si mesmo. À medida que um conceito evolui e é aplicado a novas situações, outras propriedades começam a emergir. O conceito torna-se, então, mais complexo, podendo mesmo dar origem a outros. Durante este processo de desenvolvimento de um determinado conceito não podemos negligenciar o facto de que o aluno está socialmente situado uma vez que muita desta actividade cognitiva acontece em interacção com outros, recorre a ferramentas e esquemas sociais que lhe permitem negociar um determinado significado para o conceito em causa.

Um aluno conhece e compreende um conceito estatístico quando o significado pessoal do aluno e o significado institucional estão de acordo um com o outro. Caso contrário, o professor considera que o aluno revela dificuldades acerca do conceito em causa. Contudo, a estas dificuldades sentidas pelo aluno não deve ser estranha a forma como se organizam as práticas educativas na sala de aula já que muitas delas terão aí algumas das suas causas (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Carvalho, 2001).

Para terminar uma última ideia sobre as potencialidades do professor ao trabalhar com os alunos em projectos durante as aulas de estatística: é que ao fazê-lo pode ele próprio desenvolver uma atitude investigativa em relação à sua própria prática. Ao envolver-se pessoalmente em situações do interesse dos alunos, e talvez suas também, cria condições para investigar a sua prática profissional e os problemas dela decorrente, como por exemplo, o conhecimento estatístico e didáctico, a avaliação dos alunos e a relação da escola com a comunidade. No entanto, a condução desta atitude do professor exige uma acção reflexiva e partilhada com outros, sendo por isso necessário que faça parte das equipas de investigação. Quando se pensa na criação de novas orientações curriculares ou metodológicas *ter professores envolvidos em projectos de investigação pode ser uma das formas de alterar o mal-estar que se vive nalgumas salas de aula de Matemática, em relação à Estatística* (Carvalho, 2001, p. 45). Sem dúvida que esta pode ser uma forma ideal de mudar muitas das práticas que hoje se vivem na sala de aula de muitos alunos e um desafio para todos aqueles que se preocupam com a educação estatística.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. et al. (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Antunes, S. & Carvalho, C. (2005). O trabalho colaborativo num grupo de estágio de Matemática do 2º ciclo: Um exemplo na unidade de estatística. In Actas do *V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM) (CD ROM, 13 pp.), Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 17-22 de Julho.

Batanero, C., Godino, J. D., Vellecillos, A., Green, D. R. & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Educational Science and Techonology*, *25*(4), 527-547.

Branco, J. (2000). Estatística no Secundário: o Ensino e seus Problemas. In C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 11-30). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística - Associação de Professores de Matemática

- Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. (2001). Interacções entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade. Lisboa: Universidade de Lisboa [Tese de doutoramento - documento policopiado].

Carvalho, C. (2004). Um olhar da psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística. Actas do 1.º Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 85-102). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundária. Granada: Universidade de Granada [Tese de doutoramento - documento policopiado].

Franklin, C. Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsability. In: G. Burrill (Ed.), *NTCM 2006Yearbook: Thinking and reasoning with data and change* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Gal, I. (2000). Statistical literay: Conceptual and instructional issues. In: D. Coben, J. O'Donoghue & G. FitzSimons (eds.), Perspectives on Adults Learning Mathematics: Research and Practice (pp.135-150). London: Klumer.

Gal, I. & Garfield, J. (1997). Assessment and statistics education: current challenges and directions. *International Statistical Review*, *67*(1), 1-12.

Garfield, J. & Gal, I. (1999). Teaching and Assessing Statistical Reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 207-219). Reston: NCTM.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics. Is it possible to create fruitful links? In: A. Rossman & B. Chance (Eds), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* CD-ROM. Salvador (Brasil): Internacional Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Gattuso, L. & Pannone, M. (2002). Teacher's training in a statistical teaching experimentation. In: B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching* Statistics (pp. 685-692). Cape Town: Internacional Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Gilly, M., Fraisse, J. & Roux, J.-P. (1988). Résolution de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans: dynamiques interactives et socio-cognitives. In A.-N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître: Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif* (pp. 73-92). Fribourg: Del Val.

Graham, A. (2006). *Developing thinking in statistics*. London: Paul Chapman Publishing.

Orvig, A. & Grossen, M. (2004). Analyse de discours produit dans des focus groups et representations sociales: Un point de vue dialogique. *Bulletin de Psychology*, *57*(3), 263-272.

Ponte, J. P., Boavida, A., Canavarro, P., Oliveira, H., Guimarães, H., Guimarães, F., Brocardo, J., Santos, L., Serrazina, L. & Saraiva, M. (2006). Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal. Lisboa: Centro de Investigação em Educação.

Ponte, J. P. & Fonseca, H. (2000). A Estatística no currículo do Ensino Básico e Secundário. In C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística*

(pp. 179-194). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística - Associação de Professores de Matemática - Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ribeiro, S. A. (2006). O Ensino da Estatística no 7.º ano de escolaridade: Caracterização e dificuldades sentidas pelos professores. Braga: Universidade do Minho [Dissertação de mestrado- documento policopiado].

Santos, L. (2000). A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. Lisboa: APM.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didatique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

COMUNICACIONES

UNA METODOLOGÍA PARA POTENCIAR Y ANALIZAR LAS COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y COMUNICATIVAS

Jesús Murillo y Guillermina Marcos
Departamento de Matemáticas y Ciencias
Universidad de La Rioja

RESUMEN

Establecemos una metodología de trabajo que potencia la competencia geométrica y comunicativa en matemáticas cuando los alumnos desarrollan trabajo colaborativo en un entorno interactivo de aprendizaje. Diseñamos los correspondientes instrumentos de análisis e ilustramos su utilización.

Palabras clave: Aprendizaje de la Geometría, Cabri, atención a la diversidad, TIC, entorno interactivo, competencias matemáticas, educación secundaria, competencia comunicativa.

ABSTRACT

We establish a methodology of work which encourages the geometric and communicative competence in mathematics when students carry out working group in an interactive learning environment. We work out the corresponding tools of analysis and we illustrate their use.

Key words: *learning of geometry, Cabri, diversity, TIC, interactive environment, mathematic competence, secondary education, communicative competence.*

0. INTRODUCCIÓN

La situación actual en la que nos encontramos inmersos, la sociedad del conocimiento, supone nuevos métodos de trabajo y de enseñanza, de manera que se facilite una formación integral del estudiante y la adquisición de las competencias necesarias y determinadas por el currículo de matemáticas correspondiente. "*La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran en el medio y largo plazo"* (Rico, 2006)".

En este nuevo escenario, se genera en el proceso educativo, una forma de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos colaborativos utilizando nuevas herramientas que enriquecen el proceso formativo individual a través de una *construcción social* del conocimiento. Establecemos una metodología de trabajo y de análisis que permite potenciar y estudiar la competencia comunicativa en matemáticas y la competencia geométrica, en un entorno interactivo de aprendizaje soportado por medios informáticos y por TIC, en el que el trabajo se organiza de modo colaborativo.

Los cambios que planteamos en la estructura y el funcionamiento de las enseñanzas, deben ser entendidos como instrumentos necesarios para una mejora de la calidad de la enseñanza y como una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento.

La importancia de desarrollar la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas (Godino 2001, Nesher 2000, Niss 1999, Duval 2001), como en las orientaciones curriculares de muchos países, en particular en el RD 1631/2006, que establece los contenidos mínimos para la ESO.

1. EL APRENDIZAJE COMO ACTIVIDAD SOCIAL: EL MODELO DE TRABAJO COLABORATIVO

Siguiendo la línea del constructivismo social, consideramos que si bien el aprendizaje es en principio una actividad individual y personal, ésta no se produce sin las interacciones con los demás. Para que se produzca aprendizaje matemático, se debe favorecer la contextualización y funcionalización de un conocimiento matemático general y formal que ha sido construido en épocas con características sociales, económicas y culturales diferentes a las vividas por los alumnos; en un proceso de construcción histórica en el que el conocimiento se ha ido despersonalizando y descontextualizando, pasando a ser parte de la Ciencia Matemática y, por lo tanto, de la cultura.

Dichas contextualización y funcionalización se propician a través de situaciones que permitan a los alumnos participar activamente de la comprensión del conocimiento; situaciones en las que juega un papel preponderante la interacción social.

El saber se contempla como una construcción social. El conocimiento matemático que se enseña en la institución escolar es exterior y anterior al aprendiz, pero sólo se producirá el aprendizaje en la medida que éste sea capaz de interiorizarlo y dotarlo de significado personal. Aquí radica la importancia de los medios y de los procesos que se pongan en juego para poner a los alumnos en contacto con el saber, posibilitando la deconstrucción del saber existente y su posterior reconstrucción por el sujeto que lo aprehende, y es precisamente aquí, en el proceso de apropiación, donde las interacciones sociales juegan un papel fundamental; puesto que la apropiación colectiva puede preceder a la apropiación individual y los conflictos sociocognitivos pueden acelerar ciertas adquisiciones.

En el trabajo colaborativo (Johnson & Jonson, 1999; Sapon-Shevin & al, 2001), la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y

precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Estos cambios en la estructura y el funcionamiento de la enseñanza, permiten no sólo una mejora en la calidad de la enseñanza sino también una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento, a través de formas de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos educativos utilizando estas herramientas, que enriquecen el proceso individual a través de una *construcción social* del conocimiento (Ernest, 1998).

En el diseño e implementación del entorno de aprendizaje, hemos planteado una metodología de trabajo en la que el alumno participa formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en el desarrollo de competencias. La función del profesor es intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, emplearemos el concepto de *"andamiaje"*; acuñado por Bruner y colaboradores (1975) y retomado por Vygotsky (1978/79).

El diseño y control de los entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

2. METODOLOGÍA

2.1. Metodología de trabajo con los alumnos:

Las clases se desarrollan en un aula de Informática, los ordenadores cuentan con programa Cabri, y acceso a Internet.

Diferenciamos tres fases o etapas que denominamos: *"etapa presencial"*, *"etapa correo electrónico"* y *"etapa foro electrónico"*, que aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la primera, *"etapa presencial"*, se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente, mediante la resolución de problemas geométricos de diversa índole (en cuanto a la complejidad y en cuanto a las temáticas geométricas abordadas). Las actividades, se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un *"profesor presencial"* que acompaña a los alumnos en el aula.

En la segunda, *"etapa correo electrónico"*, se incorpora a las clases, una nueva figura, la del *"profesor virtual"*, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente.

En la tercera, *"etapa foro electrónico"*, la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor.

En estas dos últimas etapas, los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto; lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse. Esta modalidad de comunicación alumno- profesor y alumno- alumno, incluye tanto las actividades como sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales.

En el texto de las actividades propuestas, se establece un sistema de *"ayudas progresivas y diversificaciones"* -atender a la diversidad no consiste en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso sino en plantear un entorno que permita, estratégicamente, que cada alumno

desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial, optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno-. Aparece así la idea de *"itinerario de resolución"*.

"Todos los alumnos, independientemente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas. La igualdad no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contrario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener logros." (NCTM, 2000).

En el sistema diseñado, todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; pero dicho enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor.

Las *"ayudas progresivas"* son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

A través de las *"diversificaciones"* de la actividad inicial, el profesor propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente por el alumno. Una diversificación puede consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente y la cantidad, tipo y momento en que se aportan, dependen de cada alumno.

Con este sistema de *"ayudas progresivas y diversificaciones"*, cada alumno, sigue su propio *itinerario de resolución*; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, cada alumno desarrolla al máximo sus potencialidades respecto a ella. Existe un recorrido mínimo realizado por todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también damos una respuesta a la atención a la diversidad, de manera tal que se permite a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

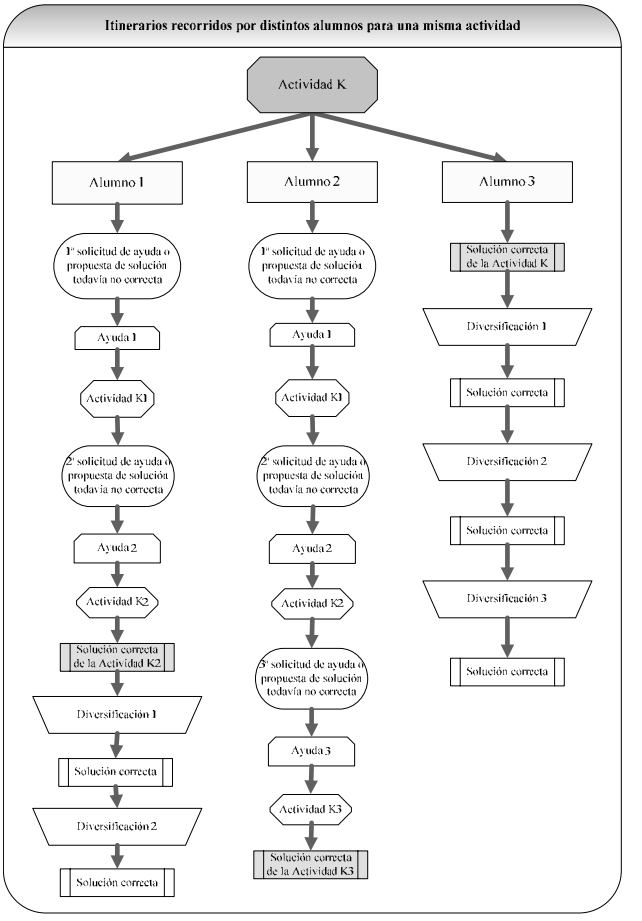
Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar.

Llamamos *"itinerario de resolución"* a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de "*problemas abiertos*", como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convir-

tiéndose en *"problema de aplicación"* o en *"ejercicio algorítmico"* para distintos alumnos (Alsina & al, 1997).

El siguiente esquema, ejemplifica algunos de los distintos itinerarios posibles recorridos por diferentes alumnos en el proceso de resolución de una actividad dada:



Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió la actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de problema resuelto; en el caso del ejemplo el "Alumno 1" ha resuelto un "problema de aplicación", el "Alumno 2" ha resuelto un "ejercicio algorítmico" y el "Alumno 3" un "problema abierto".

Resulta claro entonces que el análisis del itinerario de resolución recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha resultado cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

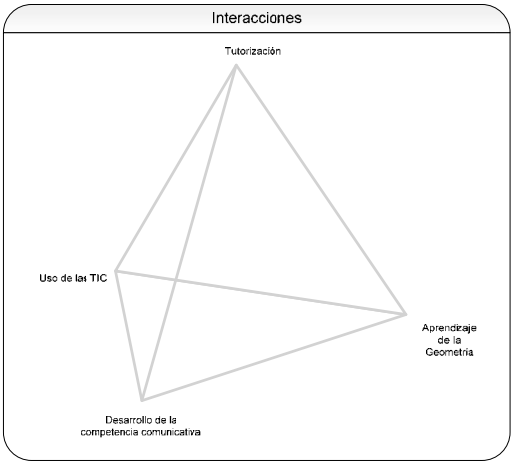
2.1.1. Criterios utilizados para la organización de las secuencias de actividades

Las actividades, cumplen ciertas condiciones, para adaptarse a cada una de las tres etapas del proceso y sus correspondientes modalidades comunicativas y para responder al sistema de ayudas progresivas y diversificaciones que hemos propuesto para atender a la diversidad de manera que cada alumno pueda recorrer el *"itinerario de resolución"* más conveniente. Además, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan, la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica: Las actividades que forman parte de cada una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respeta criterios de complejidad creciente y resulta acorde a los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar, pero entre unas y otras, se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva. La razón de esta "*decisión didáctica"* radica en el hecho sabido de que los alumnos *"aprenden"* durante su escolaridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; y de la misma manera a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución. Queremos evitar que casi antes de leer una serie de problemas, o con la resolución del primero de ellos, los alumnos puedan realizar afirmaciones del tipo *"estos se hacen con mediatriz", "estos son de Pitágoras"*; porque consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también, con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares. Por tal razón, tanto al organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje como el análisis correspondiente del mismo, se han tenido en cuenta estas consideraciones.

2.2. Metodología para la investigación:

2.2.1. Análisis de los aprendizajes de los alumnos

Los beneficios producidos en los alumnos a lo largo del taller, los recogemos en un sistema de tres dimensiones: beneficios relativos al aprendizaje de la Geometría (AG), relativos al uso de las TIC y relativos al desarrollo de la capacidad de interacción y comunicación (CC).



El gráfico anterior representa este sistema mediante un tetraedro en cuyos vértices se encuentran cada uno de las dimensiones mencionadas y en el cual se incorpora un cuarto polo que identifica la tutorización (T). Las aristas de este tetraedro representan las interacciones entre los cuatro polos.

Estas dimensiones no se comportan como polos aislados sino como vértices en permanente interacción con los demás, dando lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las mejoras en cada dimensión se nutren de los progresos de las otras pero a la vez realimentan dicho progreso. En esta comunicación presentamos los aspectos relativos al Aprendizaje de la Geometría.

En base a estas primeras hipótesis, nos hemos propuesto construir instrumentos que nos permitan analizar los progresos de los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa (CC) y al aprendizaje de la Geometría (AG). Pretendemos por un lado analizar los perfiles correspondientes a cada tipo de aprendizaje, pero también establecer correlaciones, si es que existen, entre ellos.

2.2.2. Instrumento para evaluar el Aprendizaje en Geometría (AG)

Hemos tomado como punto de partida, la noción de competencia y una categorización general establecidas por el Proyecto PISA (pensar y razonar, argumentar,…) con sus respectivos indicadores

La categorización anterior funciona como referencia para confeccionar un instrumento aplicable al proceso concreto llevado a cabo en los alumnos en el Taller, para cuyo diseño hemos considerado unas componentes más concretas y a su vez hemos decidido aplicarlas a la evolución en relación a unos determinados conceptos, relaciones y destrezas geométricos.

Para analizar, por ejemplo si el alumno*"¿Es capaz de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de una actividad planteada?*, revisamos el análisis del proceso de resolución de problemas realizado por diferentes autores.

Así, encontramos, entre otras, las siguientes propuestas para las fases de resolución de problemas:

POLYA (1982)	**MASON, BURTON Y STACEY (1988)**	**BRANDSFORD Y STEIN (1993)**
Comprender el problema estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida. **Idear un plan de actuación** que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta. **Llevar a cabo el plan** ideado previamente. **Mirar atrás** para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.	**Abordaje:** Comprender el problema Concebir un plan **Ataque:** Llevar a cabo el plan **Revisión:** Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan	**I**dentificación del problema **D**efinición y representación del problema. **E**xploración de posibles estrategias. **A**ctuación, fundada en una estrategia. **L**ogros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.

Los distintos modelos resultan más o menos adecuados según el tipo de estudio que se esté realizando, las edades de los alumnos, los contenidos matemáticos con los que están trabajando, el tipo de problemas, el entorno en el que se resuelven, las interacciones producidas, etc. Teniendo en cuenta estas variables en el caso concreto de nuestra investigación, identificamos en el proceso de resolución de problemas los siguientes componentes e indicadores:

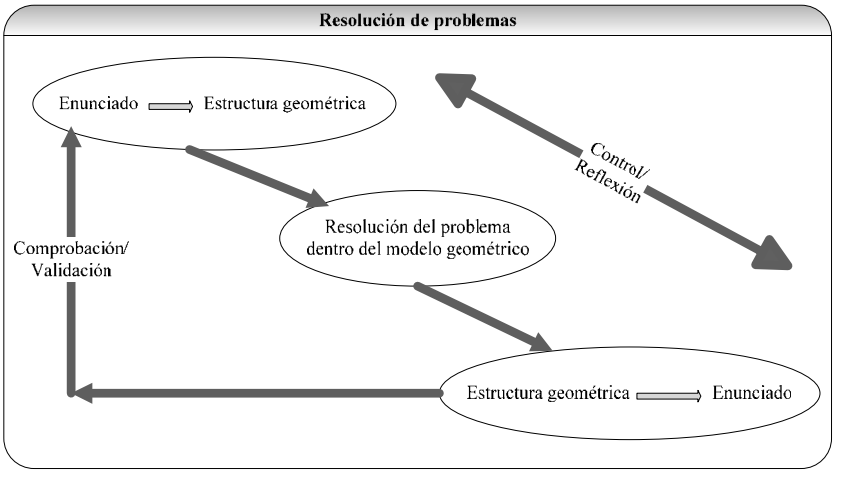
Componente:	**Indicador:**
Transformación 1: modelización del problema	*Fase 1: ¿Es capaz de convertir un enunciado real en un enunciado matemático?(cuando sea necesario)* *Fase 2: ¿Es capaz de traducir el enunciado matemático a una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
Transferencia: resolución del problema dentro del modelo	*¿Es capaz de aplicar y adaptar las estrategias necesarias (producción de variaciones, visualización, medición, construcción, cálculo, ...) para resolver el problema?* *¿Es capaz de identificar, seleccionar y aplicar los conceptos y relaciones construidos anteriormente para resolver el problema?*
Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución	*¿Es capaz de controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él?*
Transformación 2: codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	*¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de sus resultados dando una solución al problema propuesto?*

Las anteriores capacidades son las componentes fundamentales del proceso de resolución de problemas geométricos, entendido desde la noción de competencia, que llevan a cabo nuestros alumnos al resolver problemas a lo largo del Taller. Dichas capacidades no deben entenderse como componentes aisladas y de sucesión cronológica y lineal (por esa razón, preferimos llamarlas componentes en vez de fases o etapas); dado que los procesos de metacognición hacen posibles las interacciones entre ellas y de esta forma el proceso se hace dinámico y personal en el caso de cada actividad y cada alumno.

Asimismo, entendemos que cada componente incluye ciertas capacidades tales como:

Componente:	**Capacidades:**
Transformación 1: modelización del problema	• Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes en el contexto. • Plantear interrogantes. • Representar el problema de una manera diferente. • Comprender la relación entre el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y el formal. • Encontrar regularidades, relaciones y patrones. • Reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos. • Traducir el problema a un modelo matemático. • Utilizar herramientas y recursos adecuados.
Transferencia: resolución del problema dentro del modelo	• Usar diferentes representaciones. • Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones. • Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos. • Argumentar. • Generalizar.
Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución	• Autoreflexionar sobre el proceso y tomar decisiones sobre el mismo. • Conocer las propias limitaciones. • Solicitar ayuda en el momento adecuado y de manera clara y precisa. • Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema. • Determinar cuando finalizar el trabajo sobre el modelo.
Transformación 2: codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	• Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos • Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados. • Comunicar el proceso y la solución. • Criticar el modelo y sus límites.

Esquematizamos este proceso de la siguiente manera:



La característica de nuestras actividades que se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno, hace que cada uno siga su propio *"itinerario de resolución"*. El análisis del *"itinerario de resolución"* recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría y evaluación de la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

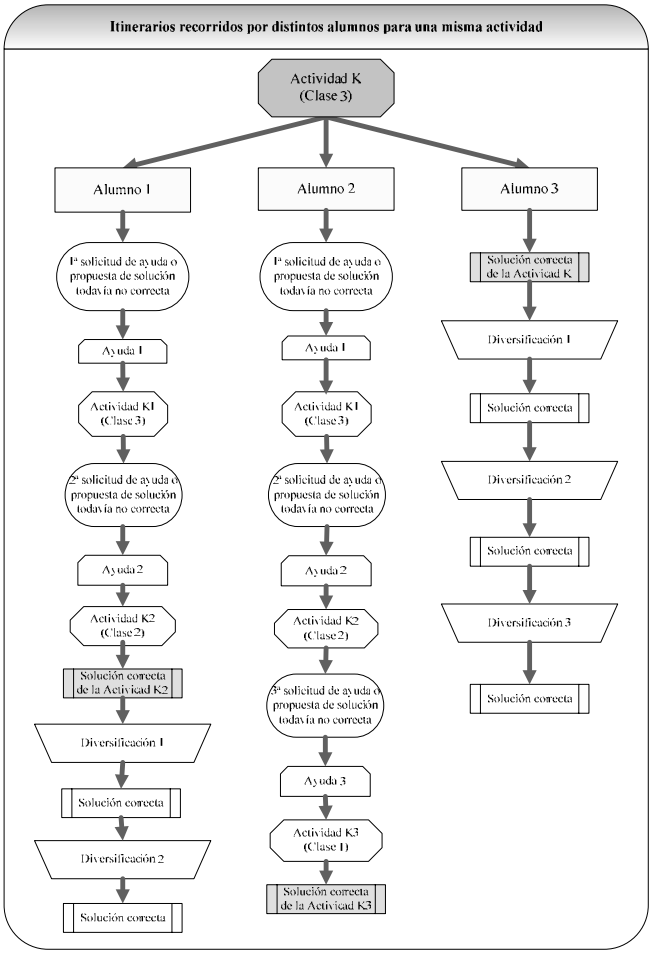
En el informe Pisa (Rico, 2006), se señala: *"Los ítems que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias.* ***Primera clase:*** *Reproducción y procedimientos rutinarios.* ***Segunda clase:*** *Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados.* ***Tercera clase:*** *Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales."*

En nuestro caso, estos niveles no se dan necesariamente en actividades distintas, porque cada actividad "se adapta" al nivel de competencia del alumno en cada momento. Así resulta que una misma actividad puede resultar de primera, segunda o tercera clase según el itinerario que el alumno haya realizado para resolverla; es decir, según la cantidad y tipo de ayudas que haya requerido y la cantidad y tipo de diversificaciones en las que haya podido avanzar:

- Las actividades de *Primera clase (Clase 1)* consisten en *ejercicios algorítmicos*: su resolución requiere de la aplicación de algoritmos, es decir de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos, para obtener un resultado buscado. Involucran por tanto, tareas de *reproducción* y procedimientos rutinarios.
- Las actividades de *Segunda clase (Clase 2)* consisten en *problemas de aplicación*: su resolución implica la aplicación de algoritmos y procedimientos pero requieren además, usar simbólicamente el problema y manipular los símbolos aplicando varios algoritmos; el resolutor debe tomar decisiones, pero las mismas pueden considerarse mínimas frente al grado con que las toma al resolver un problema abierto. Para resolverlas es necesario entonces, realizar las *conexiones* y la integración de conceptos y procedimientos.
- Las actividades de *Tercera clase (Clase 3)* consisten en *problemas de enunciado abierto*: sus enunciados no contienen instrucciones para su resolución, ni tienen explícitamente

una única respuesta ya que ésta dependerá de las decisiones que tome el resolutor. Su resolución involucra tareas de *reflexión*, en las que serán fundamentales el razonamiento, la argumentación, la intuición y la generalización.

Así, por ejemplo, para una misma actividad K (inicialmente de *Clase 3*), podemos tener para distintos alumnos diferentes itinerarios de resolución:



- El “Alumno 1”, ha necesitado una sola ayuda para resolver la actividad y fue capaz de resolver dos diversificaciones; decimos que resolvió la Actividad K1 y no la Actividad K porque consideramos que al añadir la Ayuda 1 ya no estamos frente a la actividad K sino a una menos compleja que llamamos “Actividad K1”.
- El “Alumno 2”, ha requerido tres ayudas para logra resolver correctamente una actividad que ya no es la Actividad K sino la Actividad K3, bastante menos compleja que las Actividades Ki (i<3).

• El “Alumno 3” ha sido capaz de resolver la Actividad K a partir de su enunciado original; y pudo avanzar hasta resolver tres diversificaciones correctamente.

Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió la actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de actividad resuelta; en el caso del ejemplo probablemente el *“Alumno 1”* haya resuelto un *“problema de aplicación”, el “Alumno 2”* haya resuelto un *“ejercicio algorítmico*” y el *“Alumno 3”* un *“problema abierto”*.

A partir de las todas las consideraciones anteriores, establecemos el correspondiente instrumento de análisis:

Indicador: *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*
Indicador: *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
Indicador: *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
Indicador: *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
Indicador: *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
Indicador: *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto?*
Indicador: *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?).*
Valoración/ ponderación: *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

En base al análisis de cada uno de los indicadores (en los 6 primeros se considera “con ayuda” o “sin ayuda”), se establece un nivel general para el alumno, que representa el estado general del mismo en relación al Aprendizaje de la Geometría:

- **Nivel Uno (N1):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Primera clase (Reproducción y procedimientos rutinarios).* Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente *“ejercicios algorítmicos”*.

- **Nivel Dos (N2):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Segunda clase (Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados).* Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver *"problemas de aplicación"*.
- **Nivel Tres (N3):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Tercera clase (Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales).* Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver *"problemas abiertos"*

Nota: Dado que el espacio es limitado, no hemos incluir en esta comunicación ejemplos ni de actividades ni de las resoluciones propuestas por los alumnos; aunque sí hemos esquematizado los correspondientes itinerarios de resolución. Se presentarán ejemplos en la presentación de la comunicación.

REFERENCIAS

Alsina, C. , Fortuny, J. M., & al. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis (pp.71-77).

Bruner, J. (1975). *Early Social Interaction and Language Acquisition*. London: Academic Press.

Canale, M. (1995). De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje. En Llobera, M. (ed.), *Competencia comunicativa* (pp. 63-82), Madrid: Edelsa.

Duval, R. (2001). La Geometría desde un punto de vista cognitivo, PMME- UNISON.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY.

Godino; J. (2001), Comparación de herramientas teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas, http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.

Grice, P. (1991). Las intenciones y el significado del hablante. *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos.

Johnson, D. & Johnson, R. (1991). *Learning together and alone. Cooperative, competitive and individualisytic learning*. Needham Heights: Allyn and Bacon.

Johnson, D. & Johnson, R. & Holubec, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Barcelona: Paidós.

Llobera, M. (1995). *Competencia comunicativa.* Madrid: Edelsa.

MEC (2006). *Decreto de contenidos mínimos para la ESO.* RD 1631/2006. BOE Nº 5 del 5/1/2007 (pp. 677-773).

Murillo, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO.* Tesis doctoral. UAB.

NCTM (2000). *Principles and Standard for school mathematics*. Traducción de la Sociedad Andaluza de EM Thales (2003), (pp. 11-15)

Nesher, P. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. España: Graó

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. En Uddanneise, 9.

OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.

Rico, L. (2003). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. *Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM*, U. da Coruña, (pp. 89-102).

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), *La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA* (pp. 21-40). Madrid: Editor.

Rico, L. (2006). "Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría". En II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: *En torno a la geometría de Miguel de Guzmán*. (pp. 9-12).

Sapon-Shevin, M y otros (2001). *Cooperative learning and inclusion* (Online), recuperable en: www.clcrc.com/pages/overviewpaper.html.

Sfard, A., Nesher, P. & al. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the Learning of Mathematics, 18(1)*, (pp. 41-51).

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind and society*. Massachusetts: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1979). *Los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo Grupo Editor.

ANSIEDAD MATEMÁTICA DE LOS ALUMNOS QUE INGRESAN EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

Patricia Pérez-Tyteca, Enrique Castro, Isidoro Segovia, Encarnación Castro y Francisco Fernández
Departamento de Didáctica de la Matemática

Francisco Cano
Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación
Universidad de Granada

RESUMEN

Las respuestas afectivas juegan un papel esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En la "ansiedad matemática" se han centrado gran número de investigaciones. Frecuentemente estas investigaciones han sido relacionadas con las diferencias de género entre la población estudiantil o con la elección de cursos de matemáticas y carreras universitarias en función del nivel de matemáticas que presenten. En este trabajo, utilizando la escala de ansiedad matemática de Fennema-Sherman, analizamos los niveles de ansiedad que presentan los alumnos que acceden a la Universidad de Granada cuando se enfrentan a tareas matemáticas. Este estudio lo hemos realizado tanto de manera global como clasificando a los sujetos por género y por ramas de conocimiento de sus titulaciones.

Palabras clave: Ansiedad, matemáticas, diferencias de género, ramas de conocimiento, estudiantes universitarios.

ABSTRACT

Affective answers play an essential role in the process of teaching-learning mathematics. Within this field, one of the construct that arouses more interest is the math anxiety. This construct have been frequently related to gender differences between the students population as well as the students´ election of mathematics courses and university degrees depending on the level of mathematics that they present. For this reason, we have analyzed, using the Fennema-Sherman Mathematics Anxiety Scale, the math anxiety levels of the students who enter the University of Granada. We have done this study in a global way and classifying the subjects by gender and by the fields of knowledge of their degrees.

Key words: *Anxiety, mathematics, gender differences, fields of knowledge, university students.*

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Patricia Pérez-Tyteca, Enrique Castro, Isidoro Segovia, Encarnación Castro, Francisco Fernández y Francisco Cano (2007). ANSIEDAD MATEMÁTICA DE LOS ALUMNOS QUE INGRESAN EN LA UNIVERSIDAD DE GRANADA , pp. 171-180.

INTRODUCCIÓN

La investigación en educación matemática se ha centrado prioritariamente en el dominio cognitivo; por el contrario, el ámbito afectivo ha estado tradicionalmente relegado a un segundo plano. Sin embargo, existe conciencia de la influencia de los aspectos afectivos en la educación y éstos empiezan a cobrar importancia en la medida en que los educadores se dan cuenta de la influencia que éste tiene sobre el aprendizaje escolar (Hernández, 1996). De esta preocupación por los aspectos afectivos son muestra los trabajos realizados en el ámbito nacional (Estrada, 2002; Gómez-Chacón, 1997; Hernández, Palarea y Socas, 2001).

La ansiedad es un factor afectivo presente en los estudiantes, sobre todo en situaciones evaluativas o al enfrentarse a asignaturas especialmente difíciles para ellos, como pueden ser las matemáticas. Así, son numerosas las investigaciones que se han centrado en el estudio de la ansiedad hacia esta materia, denominada en la literatura *"ansiedad matemática"* (Hembree, 1990; Jackson & Leffingwell 1999; Ma, 1999; Perry 2004; Wigfield & Meece, 1988).

De modo general, la ansiedad matemática se caracteriza por *"la ausencia de confort que alguien podría experimentar cuando se le exige rendir en matemáticas"* (Wood, 1988, 11).

En este trabajo compartimos esta caracterización y añadimos que además la ansiedad matemática se manifiesta mediante una serie de "síntomas", como son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental.

Esta serie de "síntomas" se encuentran recogidos en la literatura. Así, Richardson y Suinn, (1972) definen la ansiedad matemática como:

"El sentimiento de tensión y ansiedad que interfieren en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas" (p. 551).

Tobias y Weissbrod (1980), afirman que:

"La ansiedad matemática describe el pánico, indefensión, parálisis, y desorganización mental que surge cuando a un sujeto se le exige resolver un problema matemático" (p. 65).

Y Fennema y Sherman (1976), consideran que la ansiedad matemática consiste en "*una serie de sentimientos de ansiedad, terror, nerviosismo y síntomas físicos asociados que surgen al hacer matemáticas*" (p. 4).

Este constructo ha sido analizado en distintos niveles educativos y entre ellos en el nivel universitario. En el conjunto de estudiantes universitarios, junto a los problemas de técnicas de estudio o problemas emocionales, la ansiedad, sobre todo en situaciones evaluativas es de los más habitual (Valero, 1999).

Las diferencias de género en ansiedad matemática se han estudiado abarcando la totalidad de grados académicos. Así, Wigfield & Meece (1988) estudian la ansiedad matemática en alumnos de educación primaria y secundaria, concluyendo que las niñas muestran más síntomas físicos (nervios, tensión, incomodidad) que los niños.

En Fennema & Sherman (1976b) se trabaja con alumnos de secundaria, que muestran diferencias, siendo las alumnas más ansiosas que los alumnos. La revisión de la literatura realizada por Fennema (1979) llega a la misma conclusión.

Un efecto indirecto de la ansiedad matemática es el evitar tomar cursos relacionados con las matemáticas (Fennema & Sherman, 1976; Ho et al., 2000; Ma, 1999; Richardson & Suinn, 1972; Tobias & Weissbrod, 1980), lo que condiciona posteriormente el tipo de carrera universitaria que se puede tomar. Así, en trabajos como el de Hackett (1985) se concluye que la ansiedad matemática es predictiva del comportamiento de los estudiantes en temas relacionados con la asignatura de matemáticas. De este modo, alumnos capacitados para las

matemáticas deciden evitarlas reduciendo sus opciones de elección de carrera universitaria, obligándoles a estudiar titulaciones alejadas del campo de las ciencias. Especialmente este fenómeno se produce en las mujeres (Hembree, 1990), ya que son ellas las más afectadas por la ansiedad hacia las matemáticas. Este hecho ha despertado gran interés, convirtiendo el estudio de las diferencias de género en foco de atención de gran cantidad de trabajos sobre ansiedad matemática.

Jackson & Leffingwell (1999) observan que, aunque muchos de los sujetos de su estudio desarrollan su ansiedad matemática en grados anteriores al universitario, el 27% de ellos experimentan su primera situación de estrés en matemáticas en el primer año de universidad.

Por su parte, Perry (2004) define diferentes tipos de ansiedad matemática en alumnos universitarios: ansiedad matemática moderada y variante; ansiedad matemática que acompaña al alumno desde tiempo atrás y que comenzó como consecuencia de la actuación de algún profesor y la causada por el modo mecánico y falto de comprensión de aprender las nociones matemáticas.

También se han realizado investigaciones con alumnos con talento de los niveles elemental y medio[1]. Leedy, LaLonde & Runk (2003) concluyen que también en este caso, los chicos son menos ansiosos que las chicas ante las matemáticas.

Dentro del conjunto de investigaciones con estudiantes universitarios, revisiones de la literatura como la realizada por Gardner (1997) muestra que también las estudiantes universitarias sufren más ansiedad matemática que sus compañeros. Un ejemplo de esto lo encontramos en Valero (1999), donde se administra a los estudiantes de Psicología de la Universidad de Málaga un cuestionario de ansiedad, obteniendo las mujeres puntuaciones más altas que los hombres.

Por otro lado, aunque revisiones como la de Hunt (1985, citado en Ma, 1999) concluyen que existen diferencias significativas entre hombres y mujeres, presentando estas últimas mayor ansiedad hacia las matemáticas; otras como la de Hyde, Fennema, Ryan, Frost & Hopp (1990) afirman que no siempre se producen dichas diferencias, pero cuando lo hacen, sin duda son las mujeres las perjudicadas.

Perina (2002) cuestiona estas afirmaciones al apuntar que aunque las mujeres, por norma general, en el momento de responder a los instrumentos de medida informan de más experiencias de ansiedad matemática que los hombres, esto puede ser debido, no tanto a que sean más ansiosas, sino a que sean más propensas a admitirlo. En la misma dirección, Reyes (1984) indica que las mujeres son más dadas a informar sobre su ansiedad en general.

Teniendo en cuenta todos estos antecedentes, el objetivo de nuestro trabajo es estudiar la ansiedad matemática que presentan los alumnos recién ingresados en la Universidad de Granada y si existen diferencias entre las diferentes ramas de conocimiento y entre hombres y mujeres.

METODOLOGÍA

Variables

Las variables utilizadas en esta investigación son: *género*, *bloques de titulaciones* y *ansiedad*.

La variable *género* tiene dos niveles: hombre, mujer. La variable *bloque de titulaciones* tiene cuatro niveles que atienden a las diferentes ramas de conocimiento a las que pertenecen las titulaciones de la muestra: Ciencias de la Salud, Ciencias Experimentales, Ciencias So-

1 Correspondientes a primaria y secundaria en el currículo español actual.

ciales y Enseñanzas Técnicas. La variable *ansiedad* está definida como puntuación total en el cuestionario de ansiedad. Esta variable identifica el nivel de ansiedad hacia las matemáticas de los sujetos siendo la ansiedad mayor cuanto mayor valor registre esta variable.

Muestra

Los sujetos que han participado en este estudio son alumnos de primer curso de 23 de las titulaciones de la Universidad de Granada que poseen asignaturas de matemáticas en el mismo, ya sean obligatorias (5) o troncales (18). Concretamente, la muestra está formada por 885 alumnos que se distribuyen en cuatro de las cinco ramas de conocimiento consideradas dentro del ámbito universitario: 50 pertenecientes a Ciencias de la Salud, 149 a Ciencias Experimentales, 339 a Enseñanzas Técnicas y 347 a Ciencias Sociales.

Instrumento

El instrumento que hemos utilizado en esta investigación es la Escala de Ansiedad Matemática de Fennema-Sherman (1976), por ser la que más se adecua a nuestra definición de ansiedad matemática. Esta escala ha sido validada tanto en el momento de su creación como a lo largo de sus más de 30 años de aplicación. Lo mismo ocurre con la fiabilidad de la escala, ya que se comprobó en el momento de su construcción y también ha sido comprobada con los datos de la presente investigación, siendo el índice de fiabilidad obtenido igual a 0.75, que consideramos aceptable.

El instrumento administrado es un cuestionario tipo Likert, formado por un total de 12 ítems, cada uno de los cuales tiene 5 posibilidades de respuesta, que van de "totalmente en desacuerdo" a "totalmente de acuerdo", incluyendo una respuesta central o neutra correspondiente a "ni de acuerdo ni en desacuerdo". Aunque somos conscientes del riesgo de incluir una respuesta central que pueda tomarse como "elección de no compromiso" y por tanto acumular un número desproporcionado de respuestas, el hecho de que los ítems se hayan formulado tanto en forma positiva como en negativa y el haber incluido un "ítem trampa" con el fin de detectar respuestas sin criterio, ha minimizado este posible peligro, como así lo confirma el recuento de las respuestas obtenidas en cada ítem, al no presentarse el valor central con más frecuencia que los demás. Así pues, la codificación de las 5 posibles respuestas va del 1 al 5 pudiendo, de esta forma, variar la puntuación obtenida en el cuestionario desde 12 a 60 puntos. Esta puntuación es la que hemos tomado como representante del nivel de ansiedad hacia las matemáticas que poseen los alumnos.

Procedimiento

La aplicación del cuestionario se realizó a principios del segundo cuatrimestre del curso, acudiendo a las aulas donde los alumnos recibían asignaturas de matemáticas, sin previo aviso y con el consentimiento del profesor encargado. Se les proporcionó tiempo suficiente para que contestaran todos los ítems del cuestionario, después de darles las instrucciones y pedirles la máxima sinceridad. Al menos uno de los investigadores estuvo presente en cada momento para resolver las dudas que pudieran surgir.

Codificación y tipo de análisis

Para cada sujeto hemos recogido tres datos correspondientes al género, bloque de titulaciones y ansiedad, creando una matriz de datos que se ha analizado con el SPSS 11.5. El género se ha codificado con 1 para los hombres y 2 para las mujeres, los bloques de titulaciones

con valores de 1 a 4 y la ansiedad con valores de 12 a 60. Hemos refinado la matriz de datos resultante desechando a los sujetos que tienen casillas vacías (datos *missing*).

El análisis realizado a los datos es no paramétrico, al no cumplir éstos los supuestos de normalidad y homogeneidad de varianzas necesarios para la correcta aplicación de análisis paramétricos. Para la variable dependiente que representa a la ansiedad hemos realizado un análisis estadístico descriptivo de los datos y un contraste de hipótesis para ver si hay diferencias significativas entre las medias de grupos de población. Concretamente hemos contrastado si hay diferencias significativas según el género y según las ramas de conocimiento (bloques de titulaciones).

RESULTADOS

En la tabla 1 observamos que la media de la suma de las puntuaciones de los 12 ítems que forman la subescala de ansiedad matemática es 31.52 con una muestra válida de 856 alumnos, existiendo sujetos que registran la mínima puntuación posible (12) pero ninguno que alcance la máxima (60).

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de ansiedad matemática

	N	**Media**	**Desviación típica**	**Mínimo**	**Máximo**
Ansiedad	856	31.5187	9.18642	12.00	59.00

El valor de la media es ligeramente inferior- concretamente en 4.5 puntos- al que se obtendría contestando a cada ítem con indiferencia (36) y que hemos llamado *"valor neutro"*. Con el fin de aportar más información sobre la relevancia de esta diferencia, hemos realizado un contraste mediante la prueba T al 95% para una muestra, que nos ha confirmado que la diferencia entre el valor de la media de la muestra y el valor neutro es significativa (p=0.00). Así pues, vemos que los sujetos de la muestra presentan una ansiedad al hacer matemáticas significativamente menor que la que denominamos "neutra".

Estudio por género

Hemos analizado la ansiedad matemática de los alumnos según su género, tratando de ver si varía o no de uno a otro sexo, y si podemos concluir que dentro de la muestra empleada los hombres y las mujeres difieren en su nivel de ansiedad al enfrentarse a tareas matemáticas.

Para ello hemos realizado un contraste de hipótesis mediante la prueba de Mann-Withney con un nivel de confianza de 0.05. Los resultados de esta prueba indican que, efectivamente, existen estas diferencias de género al ser la significación asintótica p=0.00.

Con el fin de indagar en cómo se presentan estas diferencias, se han analizado los estadísticos descriptivos de la variable ansiedad clasificando a los sujetos según su género (tabla 2).

Tabla 2. Estadísticos descriptivos de ansiedad por género

	N	**Media**	**Desviación típica**	**Error típico**	**Mínimo**	**Máximo**
Hombres	397	29.4408	8.94510	.44894	12.00	57.00
Mujeres	457	33.3217	9.04032	.42289	14.00	59.00
Total	854	31.5176	9.19715	.31472	12.00	59.00

Se observa en la tabla que los hombres presentan menor ansiedad que las mujeres, siendo la diferencia entre ambas puntuaciones de aproximadamente 4 puntos y estando el valor de la media en el caso de los hombres por encima del obtenido para el conjunto de la muestra, no ocurriendo así en el caso de las mujeres.

Estudio por bloques de titulaciones

Para el estudio de la ansiedad de los alumnos hacia las matemáticas por titulaciones, las hemos agrupado en cuatro bloques que corresponden a las cuatro ramas de conocimiento dentro de las que se encuentran clasificadas las diferentes titulaciones.

Hemos realizado un contraste de hipótesis mediante la prueba de Kruskal-Wallis con nivel de confianza de 0.05, con el fin de comprobar si difieren significativamente las cuatro ramas de conocimiento en cuanto a la ansiedad. Los resultados de dicha prueba indican que existen diferencias significativas (p=0.00).

Tabla 3. Estadísticos descriptivos de ansiedad por bloques de titulaciones

Puntuación Ansiedad	**Media**	**Máximo**	**Mínimo**	**Desv. típ.**
Ciencias de la Salud	36.02	59.00	19.00	9.00
Ciencias Experimentales	32.06	56.00	12.00	9.87
Enseñanzas Técnicas	29.58	57.00	12.00	8.20
Ciencias Sociales	32.57	58.00	12.00	9.44

Los estadísticos descriptivos (tabla 3) y el gráfico de medias (figura 1) muestran que las Enseñanzas Técnicas son las que registran valores más bajos y las únicas que lo hacen por debajo del valor medio del conjunto de la muestra. Le siguen por este orden, Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales y por último Ciencias de la Salud.

Una vez comprobado que existen diferencias significativas entre las cuatro ramas de conocimiento y cuáles son las puntuaciones medias de cada una cabe preguntarse cuáles son los pares que difieren entre sí. Para ello se ha realizado un análisis mediante comparaciones múltiples a un nivel de confianza de 0.01. Los resultados (tabla 4) muestran que difieren significativamente el bloque de Enseñanzas Técnicas y el de Ciencias de la Salud y también lo hacen las Enseñanzas Técnicas y las Ciencias Sociales.

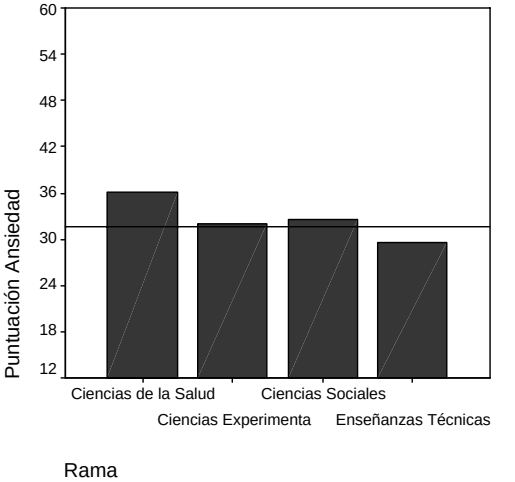


Figura 1. Ansiedad por ramas de conocimiento

Tabla 4. Comparaciones múltiples entre ramas de conocimiento

Rama de Conocimiento (I)	Rama de Conocimiento (J)	Diferencia entre medias (I-J)	Significación
Enseñanzas Técnicas	Ciencias de la Salud	-6.4369(*)	.000
	Ciencias Experimentales	-2.4707	.052
	Ciencias Sociales	-2.9900(*)	.000

* La diferencia de medias es significativa al nivel .01.

Estudio del nivel de ansiedad según el género en los bloques

Una vez analizadas las diferencias existentes en cuanto a la ansiedad hacia las matemáticas de los sujetos por género y por área de conocimiento, nos surge la necesidad de estudiar de manera más detallada las diferencias de género que se hallan con relación a la ansiedad dentro de cada área de conocimiento. En la tabla 5 se recogen los estadísticos descriptivos de la muestra, clasificándola por áreas de conocimiento y en cada una de ellas agrupando a los sujetos por sexos. La figura 2 muestra la situación gráficamente.

Tabla 5. Estadísticos descriptivos de la ansiedad por género y bloques de titulaciones

Género	Hombres				Mujeres			
Bloques de titulaciones	Media	Máximo	Mínimo	Desv.típ	Media	Máximo	Mínimo	Desv. típ.
Ciencias de la Salud	30.25	45.00	21.00	9.04	37.24	59.00	19.00	8.63
Ciencias Experimentales	28.02	47.00	12.00	8.47	35.11	56.00	18.00	9.87
Enseñanzas Técnicas	28.94	57.00	12.00	8.47	30.86	52.00	17.00	7.50
Ciencias Sociales	31.22	55.00	12.00	9.93	33.22	58.00	14.00	9.17

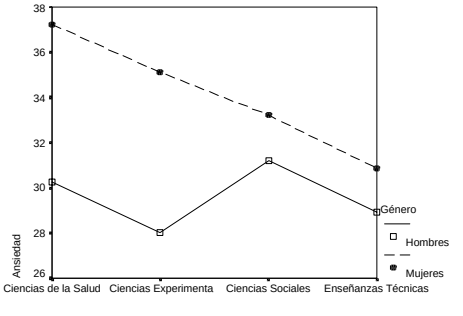


Figura 2. Ansiedad por ramas de conocimiento

En el gráfico observamos que la línea correspondiente a las mujeres está por encima de la correspondiente a los hombres, ya que presentan valores medios de ansiedad superiores a los hombres dentro de cada uno de los bloques. El bloque de Ciencias de la Salud registra el valor más alto en el caso de las mujeres y el de Ciencias Sociales en el caso de los hombres. En el caso de las mujeres es el bloque de Enseñanzas Técnicas el que registra el valor más bajo y en el caso de los hombres es el de Ciencias Experimentales. La

pendiente de la línea nos hace sospechar que existirán diferencias significativas entre pares de bloques de titulaciones. En el caso de los hombres parece que las diferencias no son tan acusadas. Mediante un contraste por comparaciones múltiples con un nivel de confianza de 0.01, tomando a los hombres y a las mujeres por separado hemos comprobado estos supuestos, obteniendo como resultado que en el caso de los hombres no existen diferencias significativas entre bloques de titulaciones en cuanto a su ansiedad al hacer matemáticas. En el caso de las mujeres sí existen diferencias siendo significativas entre los bloques de Enseñanzas Técnicas y Ciencias de la Salud (p=0.002), es decir, el que presenta mayor y menor media respectivamente.

CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos en el análisis de los datos hemos extraído las siguientes conclusiones:

- Los sujetos de la muestra presentan un nivel de ansiedad hacia las matemáticas que denota un matiz positivo, al estar significativamente por debajo del considerado "valor neutro".
- Existen diferencias significativas entre hombres y mujeres en su ansiedad ante las matemáticas. Los hombres sufren menos ansiedad al enfrentarse a tareas matemáticas
- Existen diferencias significativas entre ramas de conocimiento en cuanto a la ansiedad de los alumnos hacia las matemáticas, presentándose entre Enseñanzas Técnicas y Ciencias de la Salud y entre Enseñanzas Técnicas y Ciencias Sociales.
- Los bloques se ordenan de menor a mayor valor para la variable “ansiedad matemática” de la siguiente manera: Enseñanzas Técnicas (único bloque con un nivel de la variable por debajo de la media), Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales y Ciencias de la Salud.
- El nivel de ansiedad es mayor para las mujeres que para los hombres en cada uno de los bloques siendo más abultadas las diferencias entre sexos en Ciencias de la Salud y Ciencias Experimentales.
- Tomando solamente a los hombres, no existen diferencias significativas entre bloques de titulaciones en cuanto a la ansiedad.
- En el caso de las mujeres existen diferencias significativas entre los bloques de Ciencias de la Salud y Enseñanzas Técnicas.
- La existencia de diferencias significativas entre bloques de titulaciones al tomar la totalidad de la muestra viene determinada por las diferencias existentes entre mujeres y no entre hombres.

REFERENCIAS

Estrada, M. A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis Doctoral: Universitat Autònoma de Barcelona.

Fennema, E. (1979). Women and girls in mathematics-equity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 389-401.

Fennema, E. & Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology, 6*(31). (Ms. No. 1225).

Gairín, J. (1987). *Las actitudes en educación*. Barcelona: PPU.

Gardner M. C. (1997). *Changing math anxiety and attitudes with the use of graphics calculators: Differences by gender and age of student.* Comunicación presentada en el Midwest Research-to-Practice Conference in Adult, Continuing and Community Education.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas.* Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense.

Hackett, G. (1985). Role of mathematics self-efficacy in the choice of math-related majors of college women an men: A path analysis. *Journal of Counseling Psychology, 32*(1), 47-56.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 33-46.

Hernández, J. (1996). *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos.* Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

Hernández, J., Palarea, M. & Socas, M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. En M. Socas, M. Camacho & A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, pp. 115-125. Universidad de La Laguna: Área de Didáctica de la Matemática, Departamento de Análisis Matemático.

Ho, H., Senturk, D., Lam, A. G., Zimmer, J. M., Hong, S., Okamoto, Y., Chiu, S., Nakazawa, Y. & Wang, C. (2000). The affective and cognitive dimensions of math anxiety: A cross-national study. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 362-379.

Hyde, J. S., Fennema, E., Ryan, M., Frost, L. Al & Hopp, C. (1990). Gender comparisons of mathematics attitudes and affect: A meta-analysis. *Psychology of Women Quarterly, 14*(3), 299-324.

Jackson, C. D. & Leffingwell, R. J. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students form kindergarten through college. *The Mathematics Teacher, 92*(7), 583-586.

Leedy, M. G., LaLonde, D. & Runk, K. (2003). Gender equity in mathematics: Beliefs of students, parents and teachers. *School Science and Mathematics, 103*(6), 285-292.

Ma, X. (1999). A meta-analysis of the relationship between anxiety toward mathematics and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 520-540.

Perina, K. (2002). The sum of all fears. *Psychology Today, 35*(6), 19.

Perry, A. B. (2004). Decreasing math anxiety in college students. College Student Journal, 38(2), 321-324.

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The Elementary School Journal, 84*(5), 558-581.

Richardson, F. C. & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551-554.

Tobias, S. & Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review, 50*(1), 63-70.

Valero, L. (1999). Evaluación de ansiedad ante exámenes: Datos de aplicación y fiabilidad de un cuestionario CAEX. *Anales de Psicología, 15*(2), 223-231.

Wigfield, A. & Meece, J. L. (1988). Math anxiety in elementary and secondary school students. *Journal of Educational Psychology, 80,* 210-216.

Wood, E. F. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us?. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 8-13.

LA NUMEROLOGÍA Y EL ÁLGEBRA CHINAS EN LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS ECUACIONES LINEALES

Abraham Hernández y Aurora Gallardo
CINVESTAV, México

RESUMEN

Vía el análisis histórico–crítico, se reflexiona sobre la génesis de los números negativos y el cero, así como sobre las primeras aplicaciones de un método de resolución de ecuaciones surgido en el álgebra de la antigua China. En este estudio, el método Fang Cheng, al ser enseñado a alumnos del presente, posibilita la adición de números signados, el reconocimiento de la sustracción en todos los casos, aunque persiste el rechazo hacia las soluciones negativa y nula de ecuaciones.

ABSTRACT

An historical-critical analysis leads to reflections upon the genesis of negative numbers and zero, as well as upon the first applications of a method for solving equations that arose from the algebra of ancient China. When the Fang Cheng method was shown to students in this study, it made possible addition of signed numbers, recognition of subtraction in all cases, albeit the negative and nil equation solutions continued to be rejected.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Abraham Hernández y Aurora Gallardo (2007). LA NUMEROLOGÍA Y EL ÁLGEBRA CHINAS EN LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS ECUACIONES LINEALES , pp. 181-188.

El presente trabajo exhibe un episodio histórico y su contraparte empírica pertenecientes a un proyecto de investigación en curso[1]. Este proyecto se aboca en su conjunto, al estudio de la negatividad y el cero en sujetos que se encuentran en la transición de la aritmética al álgebra. Retomamos el término "negatividad" de Lizcano (1993) quien hace referencia a los antecedentes históricos de los números negativos, aclarando que estos no pueden considerase aun, como enteros. En este proyecto extendemos esta negatividad histórica a los significados y sentidos que los estudiantes manifiestan al utilizar los números negativos en la resolución de expresiones numéricas, ecuaciones y problemas de enunciado verbal. El proyecto plantea las interrogantes siguientes:

1. ¿Cómo contribuye el cero a la extensión del sistema numérico de los naturales a los enteros?
2. ¿Conciben los estudiantes a los negativos y al cero como números?
3. ¿Entienden la suma, la sustracción, la multiplicación y la división de enteros?
4. ¿El realizar un análisis histórico–crítico sobre el cero y la negatividad, puede contribuir a comprender las dificultades que se presentan hoy día con los estudiantes?
5. ¿Qué cambios cognitivos provoca en los alumnos la enseñanza de los enteros vía entornos tecnológicos?

En los trabajos de Gallardo (2002), Gallardo y Hernández (2005, 2006 y 2007), hemos avanzado en dar respuesta parcial a las tres primeras interrogantes. Nuestra investigación se encuentra ubicada en este momento, en responder a la pregunta 4. Recurrimos al análisis histórico-crítico que caracterizamos por movimientos recurrentes entre el estudio de textos clásicos de la historia de las matemáticas y el trabajo empírico realizado con sujetos del presente. El análisis histórico facilita, por ejemplo, el diseño de secuencias de enseñanza que reflejan el progreso obtenido de la investigación histórica que puede ponerse a prueba en situaciones actuales, en las que conviven estudiantes y profesores. Acto seguido se vuelve a la historia de las ideas, una vez que la búsqueda se ha enriquecido con los resultados del análisis empírico (Filloy y Rojano, 1984). En particular, el análisis de textos históricos permitió a Gallardo (2002) identificar interrelaciones entre el nivel de aceptación de los negativos con los lenguajes y métodos utilizados en la resolución de problemas del pasado. Este hecho le sugirió a la autora categorías de análisis en el ámbito didáctico.

UN EPISODIO HISTÓRICO

El episodio aquí presentado exhibe un método general de resolución de ecuaciones descrito en un antiguo texto chino titulado: *Jiuzhang suanshu*, o *(Nueve capítulos sobre el arte matemático)* (Lin Yan and Du Shirán (1987). Este libro se escribió aproximadamente en el año 200 a. C., siendo un compendio de las matemáticas en China. Es importante señalar que empleaban ábacos para calcular, lo que significa que se usaba un sistema numérico posicional decimal.

En el capítulo octavo del *Jiuzhang suanshu* se plantean problemas de compra y venta de mercancías. Al utilizar el método general para resolver este tipo de problemas, podían obtener resultados opuestos a los que designaban con los nombres *zheng* y *fu*. Para los números *zheng* usaron palillos de cálculo rojos, mientras que los números *fu* se representaban por

1 Estudio teórico financiado por CONACYT. Proyecto de investigación: 44 632. "Procesos de abstracción y patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias en entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico experimental con alumnos de 10 a 16 años de edad."

palillos negros. De manera alternativa, un número *zheng* podía cambiarse en uno *fu* cuando se colocaba un palillo inclinado sobre él. En el cálculo en el tablero, donde están implicados palillos tanto rojos como negros, tenían un método para manipular números en las columnas de la izquierda y de la derecha.

En el método *fang cheng*, o cálculo por tabulación para la resolución de ecuaciones lineales, se contemplan sistemas de 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4 y 5 x 5. Este método consiste en ir obteniendo lugares vacíos en el tablero, para lo cual se procede a multiplicar todos los números de una columna por un cierto número y a efectuar, a continuación, "sustracciones sucesivas" entre esta columna y la precedente, hasta lograr vaciar un espacio. La forma de obtener "ceros" con la manipulación de los palillos rojos y negros en adiciones y sustracciones de números signados, se corresponde con el método de solución de ecuaciones lineales, donde se plasman todas las acciones realizadas, hasta dejar sola a la incógnita con su valor correspondiente, por ejemplo, en términos actuales:

$$\begin{aligned} x + 5 &= 8 \\ x + 5 - 5 &= 8 - 5 \\ x + 0 &= 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El método fang cheng contiene en su esencia la dualidad del cero, que caracterizamos por "el cero nulo", es decir, el neutro y "el cero total" formado por una infinidad de parejas de opuestos. En el episodio aquí presentado, este método es utilizado en el estudio empírico. Es importante señalar que los números negativos conviene enseñarlos de la forma en que se originaron, dado que, como afirma Cid (2003), el número negativo es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no se introdujo por una necesidad de modelizar el mundo físico o social. La aparición de los números negativos en la escuela es "el primer paso de la matemática práctica a la matemática formal" y, por consiguiente, el tratamiento didáctico debe ser consecuente con su génesis.

El Estudio empírico

Se trabajó con 40 estudiantes de 12 a 14 años de edad del segundo grado de secundaria. Se les aplicó un cuestionario que permitió elegir a tres alumnos de alto, de medio y de bajo desempeño escolar para realizar entrevistas clínicas individuales. Estos alumnos ya habían estudiado el álgebra básica y se les mostró la numerología china, es decir, la representación de los números signados vía el uso de palillos rojos y negros. Supongamos que A > B > 0, entonces las reglas de adición y sustracción pueden representarse en simbología moderna como:

Sustracción: $\pm A - (\pm B) = \pm(A - B)$

$$\pm A - (\mp B) = \pm(A + B)$$

$$0 - (\pm A) = \mp A$$

Adición: $\pm A + (\pm B) = \pm(A + B)$

$\pm A + (\mp B) = \pm(A - B)$

$0 + (\pm A) = \pm A$

El cuestionario y la entrevista constaron de operaciones de adición y sustracción en lenguaje aritmético – algebraico, así como de la resolución de ecuaciones lineales.

En este artículo intentamos responder una pregunta específica perteneciente al análisis histórico–crítico planteado en la cuarta interrogante del proyecto:

¿Qué acontece cuando se enseña a los estudiantes la numerología china únicamente para operar adiciones y sustracciones y se les enfrenta a la resolución de ecuaciones lineales?

A continuación, reportamos seis de los ejercicios de una entrevista video–grabada con la estudiante de bajo desempeño. Esta estudiante fue elegida por tratarse de un sujeto extremo que proporcionó una versión amplificada de las dificultades que la población estudiantil manifestó en su conjunto. Se denota por C a la alumna y por E al entrevistador.

Resolver: (–5) – (+9) – (–8) – (–4) =

C: Supongo que tengo 5 palillos rojos, es como si tuviera negativo cinco y le tengo que quitar positivo nueve… primero voy a encontrar el resultado de negativo cinco menos positivo nueve (escribe): (– 5) – (+9) =…no tengo para quitar positivo nueve, le tengo que agregar nueve ceros…sería (escribe): – 5 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1…ahora sí puedo quitar los positivos nueve (cancela los unos que son positivos)… quedan… negativo catorce (escribe): (– 5) – (+9) = – 14 … de estos (–14) tengo que quitar negativo 8, y sí tengo para quitarle…me queda negativo 6, ésta es como si fuera una resta: catorce menos 8 es seis, pero de los negativos (escribe): (–14) – (– 8) = – 6 …de aquí… le tengo que quitar negativo 4, también tengo para quitarle…(escribe):(–6) – (–4) = –2… el resultado es dos negativo (escribe): – 2.

Observaciones:

Ante la expresión (– 5) – (+9) – (–8) – (–4) =, C recurre a los palillos, descomponiendo los números en sus correspondientes unidades con el propósito de formar ceros y poder sustraer. De hecho, desarticula la expresión original en tres sustracciones:

(–5) – (+9) =

(–14) – (–8) =

(–6) – (–4) =

Esta descomposición se debe a que C, ha aprendido a operar por pares, es decir, en forma binaria. El hecho de que el sustraendo sea un número mayor que el minuendo, no la conflictua. Afirma: "…no tengo para quitar positivo nueve, le tengo que agregar nueve ceros…".

Después de algunos ejercicios resueltos C, ya no explicita en sus intervenciones la semántica de los palillos, sino se refiere únicamente a números signados: "positivo seis, negativo siete". Logra, entonces, la transferencia de la numerología china el ámbito aritmético. Esta situación se observa en el ejercicio siguiente:

Resolver: (+13) + (– 7) + (+9) + (–6) + (–9) =

C: Supongamos que tengo trece que son de los positivos… luego tengo que aumentar negativo siete (escribe): (+13) + (– 7) = +6

E: ¿Cómo encontraste ese seis?

C: …Son positivo trece [(+13) + (– 7) = +6] …como le tengo que aumentar negativo siete, estos [(–7)] se pueden juntar con siete de los positivos de éste [(+13)] para que de cero… como resultado va a quedar positivo seis, a éste le aumento positivo nueve, es como si tuviéramos una suma (escribe): +6 + (+9) = +15… tengo seis y nueve… son positivo 15…, ahora le voy a aumentar negativo seis, es igual que al principio, de los quince, seis que son positivos, se juntan con el negativo seis y se hacen ceros…quedan (escribe): +15 + (–6) = +9…ahora…tengo (escribe): (+9) + (–9) =, positivo nueve más negativo nueve… el resultado es cero.

Observaciones: Para llevar a cabo la adición de los dos primeros términos de la expresión, la estudiante descompone el +13 como: + 7 + 6, lo que le permite "hacer un cero" que se encontraba implícito. El proceso fue el siguiente:

(+13) + (– 7) = (+7) + (+ 6) + (– 7) = (+7) + (– 7) + 6 = 0 + 6 = 6

Ella tiene presente todo el tiempo, la dualidad del cero, tanto en adiciones como en sustracciones de números signados.

A continuación presentamos lo que sucedió en el ámbito algebraico:

Resolver: 6 – x = 12

C: (Escribe): 6 – 6 – x = 12 – 6

x = 6… el resultado es seis.

E: ¿Por qué?

C: Supongamos que tengo 6 de los que son positivos… como se tiene que convertir en cero, le agrego 6 de los negativos, para que sea seis menos seis igual a cero y quede la letra sola.

E: Pero… ¿ya te fijaste que tiene la equis?

C: Sí, por eso no sale… tendría que ser seis, más seis para que dé los doce, pero no sale…¡ya sé! (escribe): 6 + x = 12

6 – 6 + x = 12 – 6

x = 6 …el resultado es seis.

E: Pero le cambiaste el signo a la primera expresión.

C: Por que así es más fácil… de la otra forma no me la sé.

E: Inténtalo con 6 – x = 12.

C: Sería seis menos seis…no, no la sé resolver.

Observaciones: Cuando C se enfrenta a resolver 6 – x = 12, advierte que "no sale" y modifica la ecuación. Escribe: 6 + x = 12

6 – 6 + x = 12 – 6

x = 6

A pesar de que C ha transferido en forma espontánea la numerología de los palillos al álgebra, ha surgido un evitamiento de la negatividad al transformar: 6 – x = 12 en 6 + x = 12. Argumenta

que restar es más difícil que sumar. Cuando el entrevistador le pide que intente resolver la ecuación original, aparece un segundo evitamiento: "no la sé resolver".

Resolver: 6 – 5x = 26 – 3x

C: Primero le agrego seis de los negativos para que este seis se convierta en cero… (escribe): $6 – 6 – 5x = 26 – 3x – 6$

$– 5x = 26 – 3x – 6$

$– 5x = 20 – 3x$ …la voy a hacer de otra forma…

E: ¿Cómo de otra forma?

C: Voy a hacer que éste [– 5x] se haga cero… (escribe): $– 5x + 5x = 20 – 3x + 5x$

$= 20 + 2x$…ya..

$– 20 = 20 – 20 + 2x$

$– 20 = 2x$

$– 20/2 = x$

$– 10 = x$ … la volteo para que esté igual que las otras… $x = – 10$ … el resultado es negativo diez…

E: ¿Por qué no le pusiste nada aquí?[= 20 + 2x]

C: Aquí tenía cinco equis menos cinco equis… no queda nada…no le puedo poner cero porque la letra no vale cero…si le pongo cero terminaría y no puede terminar…porque del otro lado hay más números y letras…pero luego le agregué veinte de los negativos de los dos lados, para encontrar el valor de la letra.

E: ¿Estás segura?

C: ¡Sí!, porque… el diez es de los negativos…me cuesta más trabajo…y así, casi no la sé hacer.

E: Entonces, ¿cómo demostrarías que está bien?

C: Supongamos que aquí [6 – 5x = 26 – 3x]…puedo quitarle las equis…por ejemplo le agrego tres equis a los dos lados…para que de un lado quede sólo el número sería (escribe): 6 – 2x = 26… no, no puedo.

Observaciones: En este ejercicio C recurre al mismo procedimiento que en la ecuación $6 – x = 12$, esto es: "voy hacer que éste [– 5x] se haga cero" y llega a la solución: $x = – 10$. Anteriormente, durante su desempeño en la entrevista, había podido comprobar valores positivos obtenidos como solución, al sustituirlos en las ecuaciones correspondientes. En este caso que la solución es negativa, afirma: "no, no puedo". Nuevamente se presenta un síntoma de evitamiento ante la negatividad. Además, es muy relevante el segundo paso del proceso de resolución, donde deja vacío el primer miembro de la ecuación:__= 20 + 2x, afirmando que: "no queda nada… no le puedo poner cero, porque la letra no vale cero… si le pongo cero, terminaría y no puede terminar ahí". En esta reflexión, C muestra dificultad para igualar a cero una expresión algebraica, creyendo que este hecho interrumpe el proceso de solución.

Resolver: 7x – 4 = 3x + 8

C: (Escribe) $7x – 4 = 3x + 8$

$7x – 4 + 4 = 3x + 8 + 4$

$7x = 3x + 12$*…¡Ya me acordé!, tengo que quitar las equis… agarro éste (3x), que es más chiquito…*

7x – 3x = 3x – 3x + 12
4x = 12
x = 12/4
x = 3… el resultado es tres porque aquí [7x – 4 = 3x + 8] sería… 21 menos 4 es igual a 17, igual a… 9 más 8… diecisiete igual a diecisiete…está bien.

E: Pero, ¿por qué no elegiste el otro número (7x)?

C: Yo no sé con negativos.

Observaciones:

En 7x – 4 = 3x + 8, sigue utilizando el mismo procedimiento heredado del método Fang Cheng. Aclara que logrará hacer un cero "agarrando 3x que es más chiquito". Se refiere a que: 3x < 7x. Cuando el entrevistador le pregunta: "¿Por qué no elegiste a 7x?, Contesta: "Yo no sé con negativos". Ella está evitando llegar a la sustracción: 3x – 7x, pues en este momento, solamente está centrada en el lenguaje algebraico y ha olvidado la numerología de los palillos.

Resolver: 3x + 14 = 14

C: (Escribe): 3x + 14 – 14 = 14 – 14
3x = 0

↓ $x = \frac{0}{3}$ *… equis igual a cero, . . . y sí, porque acá… [3x + 14 = 14]. . . sería cero… me queda catorce igual a catorce… x = 0… se me hace raro que la letra sea cero…*

E: ¿Por qué se te hace raro?

C: ¿Cómo vamos a tener un número que le sumamos otro número y de todas maneras es cero?… se me hace raro.

Observaciones: En 3x + 14 = 4, C presenta un comportamiento ambivalente ante la solución nula. Acepta que x = 0, pues verifica este valor en la ecuación, pero al mismo tiempo afirma que: "se me hace raro, porque hay otros números". Se manifiesta la dificultad para llevar a cabo operaciones con el cero. En suma, podemos afirmar que en el álgebra, campo más complejo que el ámbito numérico, la presencia de la incógnita aunada a la negatividad y el cero, complica aún más la comprensión de las situaciones planteadas.

CONCLUSIONES

En síntesis, de los diálogos de la entrevista con la estudiante, podemos afirmar lo siguiente: C dio sentido al "cero nulo" y al "cero total". Así mismo, la formación de ceros la condujo a la aceptación de números signados, verbalizados por C como "los positivos y los negativos" y la consiguiente distinción de estos de la operación de sustracción, simbolizada con el mismo signo menos. Con respecto a la adición, la alumna descubrió "el cero implícito" en una expresión donde el minuendo es mayor que el sustraendo, ya que este último está contenido en el primero y da lugar a la formación de un cero no explícito. Esta situación le permitió sumar números signados en el caso descrito. C pudo transferir las reglas de operación aprendidas del método Fang Cheng al lenguaje aritmético-algebraico en forma espontánea.

El método Fang Cheng posibilitó el reconocimiento por parte de C, de la sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo. Resulta muy relevante la aceptación de la sustracción de números signados, pues esta operación es inhibida cuando se utiliza la regla de los signos (–)(–) = (+), artificio muy difundido en los estudiantes de secundaria. Además, con el uso de este método, C fue capaz de convertir una ecuación con dos ocurrencias de la incógnita: 6 – 5x = 26 – 3x en una ecuación con una sola ocurrencia de la x. Sin embargo al arribar a: – 5x + 5x = 20 – 3x + 5x, no pudo igualar – 5x + 5x a cero, "a la nada" como ella verbalizó. En un contexto algebraico más complejo que el aritmético, el simbolizar "una nada" de naturaleza algebraica resultó muy extraño para C. La presencia del cero, los negativos, otros números y la incógnita todos juntos en una misma expresión, se convirtió en una dificultad extrema para ella. Estos hechos y las causas del evitamiento de las soluciones negativa y nula necesitan de una mayor indagación en los ámbitos histórico y didáctico. En el texto Chino "Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático" ninguno de los problemas planteados conducen a soluciones negativa o nula (Li Yan and Du Shirán, 1987).

REFERENCIAS

Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión.* Pre- Publicaciones del Seminario Matemático "García de Galdeano". Universidad de Zaragoza, España.

Filloy, E y Rojano, T. (1984). *La aparición del lenguaje aritmético y algebraico.* L'Educazione Matematica, V (3), 278 – 306.

Gallardo (2002). *The extension of the natural number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra.* Educational Estudies in Mathematics. 49: 171-192, 2002. Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A. and Hernández, A. (2005). *The Duality of Zero in the Transition from Arithmetic to Algebra.* Helen L. Chick and Jill L. Vincet (eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Melbourne, Australia, University of Melbourne, V.3 pp. 17–24.

Gallardo, A. and Hernández, A. (2006). *The Zero and Negativity Among Secondary School Students.* Proceedings of the XXX PME, Charles University, Prague, Czech Republic. Vol. 3, pp. 153 – 160.

Gallardo, A. and Hernández, A. (2007). *Zero and Negativity on the number line.* Proceedings of the XXXI PME, Seoul Nacional University, Seoul Korea. (Aceptado)

Lin Yan and Du Shirán (1987). *Chinese Mathematics A Concise History.* Claredon Press. Oxford University Press, New York.

Lizcano, E. (1993). Imaginario Colectivo y creación Matemática. Editorial Gedisa. Barcelona.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS EN TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

Teresa Fernández,
José A. Cajaraville
Universidad de Santiago de Compostela

Juan D. Godino
Universidad de Granada

RESUMEN

En el marco de una investigación sobre evaluación y desarrollo de capacidades de visualización y razonamiento espacial con estudiantes de magisterio, en este trabajo presentamos el análisis a priori de una de las tareas incluidas en el cuestionario de evaluación utilizado. Aplicando herramientas conceptuales del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático identificamos las redes de objetos intervinientes y emergentes en la realización de la tarea, lo que permite formular algunas conjeturas sobre conflictos semióticos potenciales que pueden encontrar los sujetos. Algunas de estas conjeturas son comprobadas analizando las configuraciones cognitivas manifestadas por un estudiante en la realización de la tarea. Se concluye resaltando las posibilidades analíticas ofrecidas por las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico respecto de las nociones cognitivas usadas en las investigaciones sobre visualización y razonamiento espacial.

ABSTRACT

This work was carried out within a framework of research into the evaluation and development of spatial reasoning and visualization capacities in student teachers. We present an initial study of the tasks included in the assessment questionnaire used. When applying conceptual tools of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge, we identify networks of intervening and emerging objects in carrying out the task, which allows us to formulate conjectures on potential semiotic conflicts that the subjects may encounter. Some of these conjectures may be checked by analysing the cognitive configurations manifested by the student when doing the task. To conclude, we highlight the analytical possibilities given by the theoretical tools of the ontosemiotic approach regarding cognitive notions used in research into spatial reasoning and visualization.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Teresa Fernández, José A. Cajaraville y Juan D. Godino (2007). CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS Y COGNITIVAS EN TAREAS DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL , pp. 189-197.

1. INTRODUCCIÓN

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996; Presmeg, 2006). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

En estos estudios los autores se apoyan básicamente en la dualidad representación interna (*imagen visual*) y externa para describir los conocimientos y habilidades matemáticas de los sujetos enfrentados a tareas matemáticas de visualización y razonamiento espacial. Entendemos que estas nociones pueden ser insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial, y de modo más general las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar, al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringida a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones internas o mentales[1].

En este trabajo vamos a explorar la variedad de objetos y conocimientos que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización y razonamiento espacial usando las herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años, y que describen como "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007[2]).

Consideramos que esta aproximación teórica puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales), y las institucionales (sociales o culturales). Además la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intra-matemáticos), lenguaje y sistema conceptual socialmente compartido. El EOS puede aportar un punto de vista complementario para abordar cuestiones tales como:

- ¿Qué diversidad de conocimientos se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento espacial?
- ¿Por qué ciertas tareas que requieren visualización y razonamiento espacial presentan una dificultad elevada para determinados estudiantes?

En esta comunicación tratamos de avanzar algunas respuestas parciales a estas cuestiones usando datos experimentales de un proyecto de investigación en curso, completando el análisis realizado en trabajos previos (Fernández, 2005). Por limitaciones de espacio no podemos describir las nociones teóricas del marco teórico; remitimos al lector a las referencias correspondientes.

La visualización y el razonamiento espacial serán interpretadas como unas prácticas matemáticas específicas, operativas y discursivas, que se ponen en juego ante determinados tipos de tareas. En tales sistemas de prácticas intervienen y emergen unos objetos matemáticos específicos (lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que caracterizan este campo de actividad; las redes formadas por tales objetos y las relaciones entre los mismos constituyen "configuraciones" mediante las cuales se describen los sistemas de prácticas. Este trabajo tiene una orientación básicamente teórica y metodológica. Por una parte se trata de plantear

1 El trabajo de Gorgorió (1998) centra la atención en identificar estrategias cognitivas, tanto visuales como no visuales, en tareas espaciales que requieren rotaciones de los cuerpos o figuras.

2 Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/

el problema de las limitaciones de los análisis cognitivos de tareas de razonamiento espacial, los cuales pueden ser complementados con herramientas epistemológicas como las propuestas por el EOS. Desde el punto de vista metodológico se introducen dos niveles de análisis del proceso de solución de un problema, en cada uno de los cuales se aplican categorías específicas que amplían la visión básicamente conceptualista de los estudios cognitivos y curriculares.

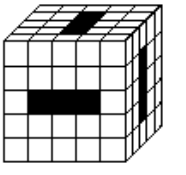
2. CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA ASOCIADA A UNA TAREA DE VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL

En esta sección vamos a realizar, a título de ejemplo, el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por un sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales. Esta tarea ha sido usada en nuestra investigación sobre razonamiento espacial con estudiantes de magisterio (Fernández, 2005)[3]. El análisis se realiza a dos niveles distintos y complementarios. En el primero se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico. A continuación aplicamos los atributos contextuales (nivel pragmático).

2.1. Enunciado de la tarea: volumen de un cubo perforado

5. Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



2.2. Solución experta

1) La forma de proceder será calcular el volumen total del cubo grande y restarle el volumen ocupado por los tres túneles.

2) Tomando el cubo pequeño como unidad, el volumen del cubo grande es 125 unidades (5 x 5 x 5 = 125)

3) El volumen de cada túnel (ortoedro) es 15 unidades (3 x 5 x 1 =15).

4) Sin embargo existen intersecciones entre los tres cubos, por lo que si restamos a 125 el volumen de los tres túneles, descontamos varias veces algunos cubos pequeños. Es necesario visualizar cuáles son esas intersecciones.

5) El primer túnel considerado requiere restar 15 unidades; el segundo 15 menos 3 que ya habían sido restados con el primer túnel, o sea, 15 – 3 =12.

6) El tercer túnel requiere restar 15 menos 3 que ya habían sido restados del primer túnel y otros 3 del segundo. Pero con este cálculo restamos dos veces el cubo intersección de los tres; luego para el tercer túnel hay que restar 15 – 3 – 3 + 1 = 10

7) Por tanto, el volumen de los tres túneles será, 15 + 12 + 10 = 37, y el volumen del cubo con los túneles será, 125 – 37 = 88.

3 Trabajo realizado en el marco de los proyectos MCYT – FEDER: SEJ2004-00789 y SEJ2004-07346 Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Madrid.

2.3. Objetos y relaciones primarias

En la tabla 1 resumimos los objetos y relaciones primarias que intervienen en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

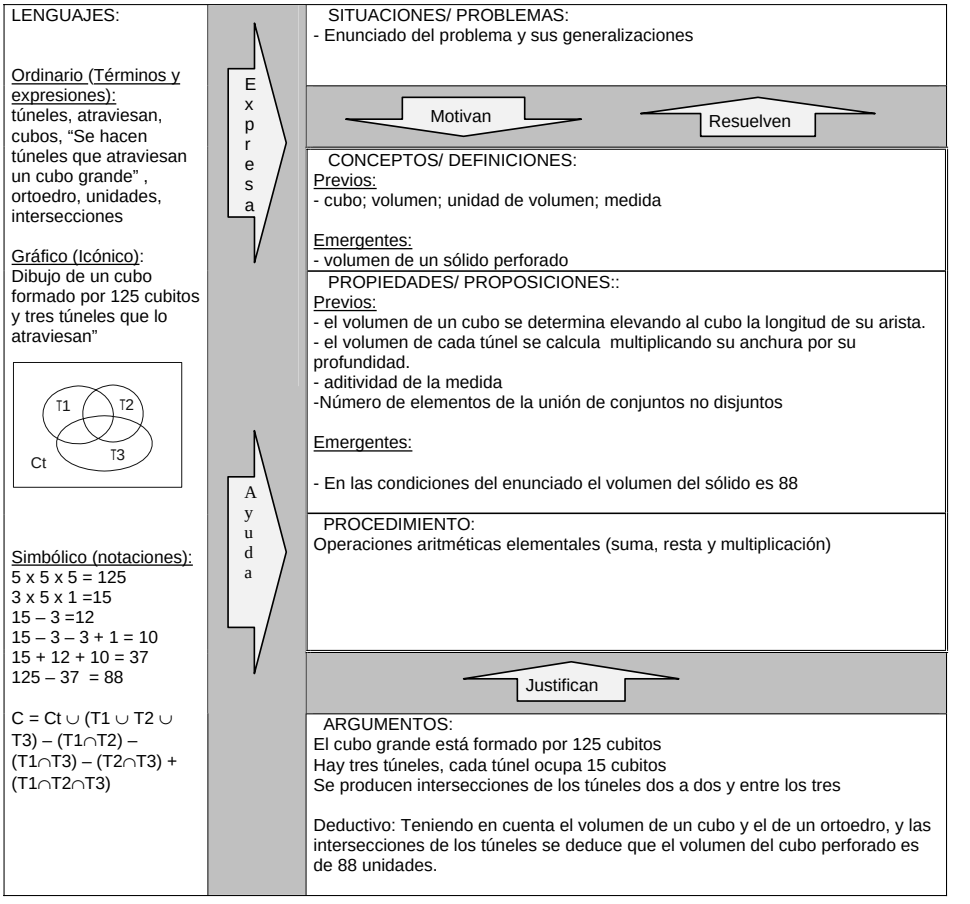


Tabla 1: Objetos y relaciones primarias en el problema del cubo perforado

2.4. Objetos y relaciones secundarias

Realizamos a continuación un segundo nivel de análisis de la solución del problema aplicando los atributos contextuales.

Extensivo – Intensivo (particular – general):

La tarea se puede generalizar de diversas maneras. Se puede suponer que el cubo tiene una arista de longitud L unidades, dejando los túneles de igual ancho, o cambiándolos a una longitud de A unidades. Se puede pedir encontrar una fórmula general en función de L, conectando esta tarea geométrica con el álgebra. También podemos considerar túneles de anchura variable y no iguales entre sí. Podemos conjeturar que estas generalizaciones serán

conflictivas con los estudiantes de magisterio dados los conocimientos algebraicos que se ponen en juego.

Ostensivo – no ostensivo:

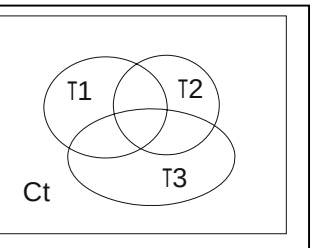
El enunciado de la tarea pone en juego un icono del cuerpo geométrico cuyo volumen se pide calcular. El cubo perforado es una entidad mental (si se considera desde el punto de vista de un sujeto individual) e ideal (si se considera desde el punto de vista institucional matemático); en ambos casos es una entidad no ostensiva. La regla general que da la solución es una propiedad característica de ese cuerpo que, en sí misma, no es ostensiva, aunque se expresa de manera ostensiva con la escritura simbólica, 125 – 15 – 12 – 10 = 88. El carácter no ostensivo de los túneles puede ser un factor explicativo de la dificultad de esta tarea. La explicación verbal o gráfica (ostensiva) del número de unidades a restar por las intersecciones comunes no visibles es previsiblemente difícil para los estudiantes a los que se plantea el problema.

Unitario – sistémico:

Las nociones de cubo, ortoedro (túneles), y las fórmulas de cálculo de los volúmenes tienen un carácter unitario; son nociones previas que deben estar disponibles para el sujeto. En cambio el cubo perforado debe ser descompuesto en partes (forman un sistema). Si simbolizamos por Ct (cubo tunelado), C (cubo), T1, T2, T3 los tres túneles, el nuevo objeto emergente de esta situación se puede expresar con la siguiente operación conjuntista:

$$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$$

Expresión – contenido (significante – significado)

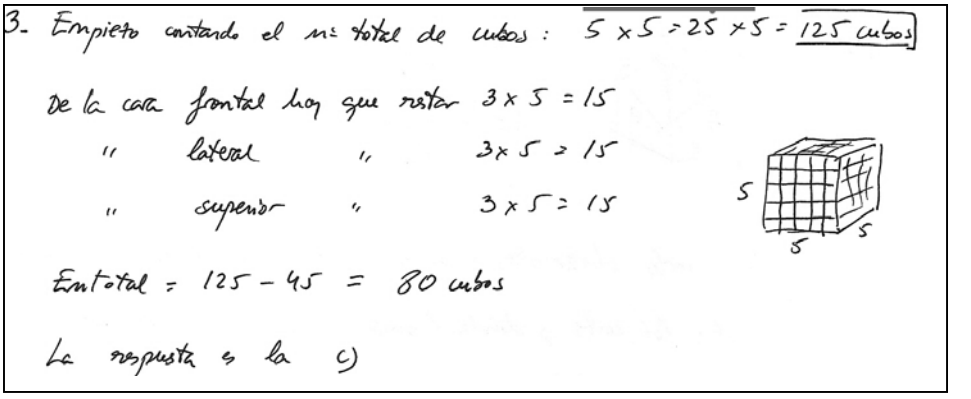
El uso de representaciones conjuntistas y algebraicas puede ayudar a *visualizar* el problema y a generalizarlo. $C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$ La representación conjuntista refiere metafóricamente a los conjuntos de puntos interiores al cubo y a los túneles, así como a las operaciones realizadas.	

La expresión del problema mediante un dibujo en perspectiva, sin señalar las intersecciones interiores ni las salidas ocultas de los túneles es otro factor de dificultad potencial: ¿atraviesan los túneles completamente al cubo?

3.CONFIGURACIÓN COGNITIVA: ESTUDIO DE UN CASO

Se trata de un estudiante de primer curso de magisterio. Este ítem fue incluido en el examen final de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica, que incluye un bloque temático sobre Geometría.

3.1. Solución de un estudiante a la tarea del cubo perforado



3.2. Objetos y relaciones primarias

En la tabla 2 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego SS en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

LENGUAJES: Ordinario (Términos y expresiones): Contar; número total de cubos, cara lateral, cara frontal, cara superior, túnel Gráfico (Icónico): Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos Simbólico (notaciones): Números y operaciones aritméticas 5x5=25x5 = 125 3x5 = 15 125 – 45= 80 c)	Expresa Ayuda	SITUACIONES/ PROBLEMAS: Problema del cubo perforado Motivan — Resuelven CONCEPTOS/ DEFINICIONES: Previos: - cubo; volumen, unidad de medida de volumen Emergentes: - Volumen de un sólido perforado PROPIEDADES/ PROPOSICIONES: Previos: Propiedad asociativa de la multiplicación El volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad. Aditividad de la medida Conservación del volumen Emergentes: - En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 80 PROCEDIMIENTO: Operaciones aritméticas elementales Cálculo mental (15+15+15=45) Justifican ARGUMENTOS: El lado del cubo grande está formado por 5 cubitos. El número total de cubos es 125 El número de cubos de cada túnel es 15 El número de cubos de los tres túneles es 45 El número de cubos que queda es el total menos la suma de los tres túneles Quedan 80 cubos Deductivo (informal): El argumento es incorrecto al no tener en cuenta las condiciones del problema (intersecciones de los túneles)

Tabla 2: Configuración cognitiva de SS sobre el problema del cubo perforado

3.3. Objetos y relaciones secundarias

Extensivo – Intensivo (particular – general):

La solución dada corresponde al caso en que los túneles no tuvieran intersecciones comunes, lo que podría ocurrir, pero no en el caso propuesto. No se perciben intentos de generalización en la respuesta de este estudiante, aunque tampoco se requieren.

El proceso seguido es deductivo (informal) sobre el caso particular, en este caso calculando el volumen del cubo y descontando los ortoedros sin tener en cuenta sus intersecciones. Por tanto, toda generalización que hipotéticamente pudiera hacer a un cubo de lado L y un túnel de arista A no le llevaría a una respuesta correcta.

El estudiante recuerda las reglas generales (definiciones) del volumen del cubo y los ortoedros y las aplica correctamente al caso particular dado. La fórmula general para calcular el número total de cubos dados por la fórmula conjuntista que se propone en la configuración epistémica no forma parte de los conocimientos previos de los estudiantes.

Ostensivo – no ostensivo:

El estudiante utiliza un dibujo para señalar las dimensiones del cubo, no consiguiendo representar los túneles ni visualizar (lo que resulta esencial) las intersecciones. Su representación no ostensiva (mental) de la situación no tiene en cuenta que hay que descontar los cubos comunes a los tres túneles.

Las intersecciones de los túneles no son directamente visibles; es un caso de un objeto empírico no ostensivo. Hay intersecciones comunes dos a dos y entre los tres; la medida del tamaño de las intersecciones tiene que hacerse de manera indirecta, mediante razonamientos que expresen las relaciones entre las posiciones en que se hacen los túneles y sus dimensiones respectivas. Una justificación ostensiva (con lenguaje ordinario) de este tipo ciertamente es compleja. También se puede hacer una descripción ostensiva de las intersecciones mediante secciones planas del cuerpo realizadas en distintas posiciones, procedimiento que hemos encontrado en algunos estudiantes.

Unitario – sistémico:

El estudiante reconoce el cubo y el ortoedro como entidades unitarias a las cuales es capaz de atribuir un volumen, y hallar su medida. También sabe lo que es medir y la noción de unidad de medida. Pero el objeto “cubo perforado” es un sistema que hay que descomponer en sus elementos. No es suficiente con imaginar mentalmente (visualizar) que hay unas intersecciones comunes; hay que cuantificar (medir) el tamaño de un objeto no ostensivo, para lo cual hay que descomponerlo, “verlo” como un sistema formado de partes relacionadas de manera específica. Esta descomposición se puede apoyar mediante las secciones planas o reconociendo las circunstancias de aplicación de un teorema algebraico conjuntista.

Expresión – contenido (significante – significado)

La solución de la tarea requiere expresar las intersecciones de los túneles (objetos empíricos que aquí no son visibles) mediante un lenguaje (gráfico, secciones planas), conjuntista (solución experta), o con lenguaje ordinario. Esto permitirá determinar las medidas de tales intersecciones.

En el enunciado de la tarea la expresión “que atraviesan un cubo” tiene que ser interpretada por el lector con el apoyo parcial del dibujo, donde no se han representado “las salidas”

de los túneles por las caras opuestas. Algunos sujetos a los que se ha propuesto esta tarea han pedido aclaración sobre si los túneles perforaban todo el cuerpo.

Personal-institucional

Esta tarea ha resultado difícil para este estudiante. La información que tenemos sobre el marco institucional en que realiza sus estudios nos permite afirmar que esta tarea es "atípica" entre las que habitualmente se proponen en las clases de geometría recibidas. Tampoco se han propuesto actividades que requieran hacer secciones planas de sólidos, o intersecciones entre conjuntos, por lo que estos procedimientos no forman parte de su práctica matemática habitual. En cuanto al uso, a nivel operatorio y no discursivo, del significado de medida y unidad de medida se puede decir que la tarea no lo requiere explícitamente. Es posible que el estudio de la aritmética no se haya conectado de manera explícita con el tema de magnitudes, de manera que el significado personal puede tener limitaciones sobre la noción de volumen y unidad de medida del volumen.

4. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos aplicado dos niveles de análisis a una tarea geométrica, tanto a la solución experta (epistémica o institucional de referencia) como a la solución personal de un estudiante. En el primer nivel, que podemos designar como semántico, se identifican y articulan las entidades primarias (tipo de situación-problema, lenguajes utilizados, procedimientos, definiciones, proposiciones y argumentaciones) y un segundo nivel, de tipo pragmático, donde ponemos en juego los atributos o dualidades contextuales (extensivo – intensivo; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; personal – institucional).

La combinación de estos dos niveles de análisis aporta una herramienta potente para el estudio de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas y su secuenciación en los procesos de instrucción matemática. La tradicional distinción curricular entre conocimientos conceptuales y procedimentales queda ampliada con la introducción explícita de las entidades proposicionales y argumentativas, así como con los elementos lingüísticos y situacionales. Todas estas entidades quedan articuladas mediante la noción de configuración (epistémica y cognitiva) en la que se tiene en cuenta los diferentes roles o relaciones entre las mismas.

Desde el punto de vista cognitivo, la tradicional distinción entre representaciones internas (imágenes conceptuales, concepciones, etc.) y representaciones externas (gráficos, notaciones, símbolos, modelos concretos, etc.) se amplía con las dualidades contextuales. Lo interno y externo es sustituido por dos dualidades: ostensivo – no ostensivo y personal – institucional. Esto quiere decir que el pensamiento no queda constreñido al ámbito de lo mental, sino que las instituciones también "piensan" (faceta no ostensiva de los objetos institucionales); de este modo los conceptos tienen una realidad mental (subjetiva) y también una realidad institucional (objetividad relativa). Tales entidades están apoyadas, de manera constitutiva, en las entidades lingüísticas, que vienen a ser su faceta ostensiva. La introducción de la dualidad extensivo – intensivo, aplicada a la formulación de una tarea, nos lleva a pensar en sus potenciales generalizaciones y a explorar sus posibilidades generativas de nuevos conocimientos y conexiones matemáticas. El carácter sistémico y recursivo del conocimiento matemático puede ser descrito mediante la dualidad contextual que el EOS designa como *unitario – sistémico*, así mismo aplicable a los distintos tipos de entidades primarias.

Remitimos al lector a otros trabajos realizados en el marco del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) donde se describen con más detalle otras aplicaciones de las herramientas teóricas introducidas.

REFERENCIAS

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11* (1), 7-16.

Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 161- 2004). Reston, VA: NCTM, Macmillan.

Fernández, T (2005). Incidencia de los conocimientos geométricos en la mejora de la percepción espacial. En B. Gómez, M. J. González, M. Moreno, P. Bolea, P. Flores y M. Camacho (Eds.), *Actas del IX Simposio de la SEIEM*. Santander: Servicio de Publicaciones de Cantabria. Universidad de Cantabria.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems, *Educational Studies in Mathematics 35*, 207-231.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Hershkowithz, R., Parzysz, B. y Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. En, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 161-201). Dordrech: Kluwer.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

UN ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

Carmen Díaz
carmen.diaz@dpsi.uhu.es
Universidad de Huelva

Juan J. Ortiz y Luis Serrano
jortiz@ugr.es, lserrano@ugr.es
Universidad de Granada

RESUMEN

Realizamos un análisis teórico de los pasos necesarios en la aplicación del teorema de Bayes y presentamos un estudio empírico de errores en los citados pasos en una muestra de 414 estudiantes de Psicología, después de la enseñanza del tema. Concluimos con algunas recomendaciones para la enseñanza.

ABSTRACT

We present a theoretical analysis of the steps needed to apply the Bayes' theorem. Then, we present an empirical study of difficulties and errors in these steps in a sample of 414 psychology students, after instructions. We conclude with some recommendations for teaching.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Carmen Díaz, Juan J. Ortiz y Luis Serrano (2007). UN ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES EN LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES , pp. 199-208.

INTRODUCCIÓN

El cálculo de probabilidades a posteriori mediante el teorema de Bayes tiene aplicaciones, tanto en estadística, como en la vida real, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Sin embargo, hay una tendencia a suprimir la enseñanza del teorema de Bayes en la educación secundaria y universitaria, debido a la influencia de las primeras investigaciones en psicología (Tversky y Kahneman, 1972a y b; Bar-Hillel, 1997; Teigen, Brun y Frydenlund, 1999) que sugirieron la dificultad del razonamiento relacionado (ver revisión en Koehler, 1996).

En este trabajo llevamos a cabo un análisis a priori de los pasos involucrados en la aplicación del teorema de Bayes y un estudio empírico en una muestra de 414 estudiantes de primer año de psicología que habían estudiado el teorema. La finalidad es guiar a los profesores en la enseñanza de estrategias adecuadas.

ANTECEDENTES

La aplicación del teorema de Bayes fue investigada por Tversky y Kahneman (1982), en su trabajo sobre la heurística de representatividad. Una regla fundamental en estadística es que la verosimilitud de que una evidencia se deba a una supuesta causa depende de la probabilidad a priori de la causa, pero esta regla se olvida. Los autores denominan *falacia de las tasa base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori de una supuesta causa en la valoración de una evidencia.

Trabajos posteriores (e.g. Totohasina, 1992; Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998) indican que el análisis realizado desde la psicología es incompleto, pues hay otros factores que afectan la capacidad de aplicar el teorema de Bayes. Según Totohasina (1992), la estrategia más frecuente al resolver un problema que involucra este teorema es cambiar el espacio muestral de referencia y a continuación aplicar la regla de Laplace. En su estudio con 67 estudiantes de secundaria sólo el 25% dio una respuesta correcta antes de una instrucción explícita sobre el teorema. El autor realiza también un experimento de enseñanza con 65 alumnos, en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad condicional inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada. Aproximadamente la mitad llegan a obtener la probabilidad total; pero solo 9 alumnos llegan a la solución completa (probabilidad a posteriori).

Para explicar estas dificultades Totohashina analiza los procedimientos y representación usados. Indica que la representación en tabla de doble entrada dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de los problemas, porque queda más visible la intersección de los sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. El diagrama en árbol es el recurso más efectivo para determinar la probabilidad a posteriori cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo) (Gras y Totohasina, 1995). La dificultad también está influida por la confusión del papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional o falacia de la condicional transpuesta (Falk, 1986; Lonjedo y Huerta, 2004, 2005; Batanero y Sánchez, 2005).

La investigación reciente sugiere que la aplicación del teorema de Bayes es más sencilla cuando la información se da en frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995). El cálculo de la probabilidad a posteriori es más natural cuando los datos se

dan en este formato, porque el sujeto sólo ha de tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad.

EL ESTUDIO

Nuestra hipótesis es que la aplicación del teorema de Bayes involucra un proceso complejo, en que los estudiantes deben recordar y aplicar varios conceptos y procedimientos probabilísticos, que a veces se olvidan causando errores. Esta hipótesis se generó en el estudio de Díaz y de la Fuente (2007), quienes no encuentran diferencia de dificultad en la aplicación del teorema en problemas matemáticamente equivalentes, cuando los datos son dados en frecuencias absolutas o en probabilidades/frecuencias relativas. Por otro lado, el formato de frecuencias absolutas es difícil de usar en caso de múltiples sucesos o múltiples experimentos, mientras que el formato probabilístico tiene una aplicación general. Es por eso que nos parece importante identificar las dificultades de los estudiantes para diseñar procesos educativos que las tengan en cuenta y permitan, a la vez, trabajar con formato probabilístico.

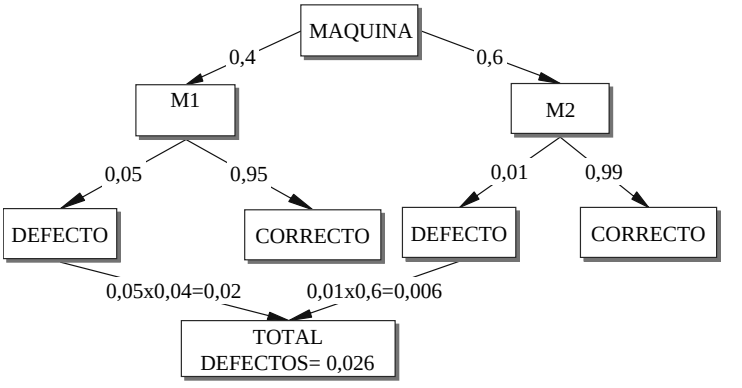
La muestra participante estuvo formada por 414 estudiantes de primer curso de psicología (entre 18 y 20 años) de las Universidades de Granada y Murcia (6 grupos), que seguían una asignatura de análisis de datos (12 créditos). La probabilidad condicional se enseñó al final del primer cuatrimestre, finalizada la estadística descriptiva y la probabilidad simple. Se dedicó una semana al tema (3 horas teóricas y 2 prácticas), incluyendo el teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Los estudiantes recibieron instrucción sobre el uso de diagramas de árbol y tablas de doble entrada y se les advirtió sobre la existencia de sesgos como la falacia de las tasas base o la confusión de una probabilidad condicional y su transpuesta. Se mostraron aplicaciones del teorema de Bayes al diagnóstico psicológico y médico, alarmas, pruebas de evaluación, predicción, y accidentes, entre otros en experimentos compuestos de dos o tres experimentos simples, con un pequeño número de sucesos en el espacio muestral.

Un mes después de la enseñanza, se dio a los estudiantes la tarea que reproducimos a continuación, que fue resuelta en forma individual, pidiéndoles que describiesen con detalle los razonamientos seguidos en la resolución y dando libertad respecto al procedimiento.

Tarea. *Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?*

Un diagrama en árbol como la Figura 1, incrementa las respuestas correctas (Martignon y Waisner, 2002), debido a la estrecha relación entre esta representación y la forma en que procesamos la información al aplicar el teorema de Bayes. En primer lugar dividimos la población (producción de las máquinas en ejemplo) en función de las probabilidades a priori (40 y 60 por ciento) obteniendo una división en dos grupos (piezas producidas respectivamente por M1 y M2). Cada división en el primer nivel del árbol produce otra división binaria (piezas con o sin defectos). Seguidamente incluimos la información dada por las verosimilitudes y llegamos al tercer nivel del árbol que produce cuatro sucesos intersección, cuyas probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las probabilidades de las ramas que llevan a ellos.

Figura 1. Representación mediante árbol de la tarea



A partir de aquí, sumamos las probabilidades de los sucesos que correspondan a la condición nueva (productos defectuosos) que se identifican fácilmente y obtenemos la cuarta rama con la probabilidad total de piezas defectuosas. Entonces el problema se resuelve simplemente aplicando la fórmula de la probabilidad condicional, como cociente entre las probabilidades conjuntas (que corresponden a la intersección de piezas defectuosas producidas por M1) y totales (probabilidad de defectos en la población), esto es *P(M1/D)=P(M1ÇD)/P(D)*=0,02/0,026=0,76.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las repuestas escritas de los estudiantes fueron analizadas con detalle, comparándola con el proceso descrito con un análisis cualitativo y descriptivo. Con un proceso inductivo se clasificaron las respuestas semejantes, llegando a una categorización de las mismas, de acuerdo a si se completa o no los pasos que se describen a continuación. Además, se estudiaron los posibles errores en cada paso, utilizando tantas variables como posibles errores y analizando para cada una su presencia o ausencia en la respuesta de cada alumno.

a) Identificar los datos del problema.

El primer paso para resolver la tarea (Figura 2) es identificar todos los datos, lo que requiere diferenciar entre probabilidad a priori *P(M1)*, *P(M2)* y verosimilitud *P(D/M1)*, *P(D/M2);* diferenciar una probabilidad condicional *P(D/M1)* y su inversa *P(M1/D)* y determinar las probabilidades de sucesos contrarios *P(C/M1)*. El estudiante debe discriminar todos estos conceptos, realizar correctamente las sucesivas particiones del espacio muestral (Figura 1) e identificar todos estos datos en el enunciado del problema. Algunos estudiantes no se llegan a deducirlos o producen errores en su identificación, en la partición del espacio muestral (por ejemplo, no considerar la subdivisión de una de las partes) o bien hacen una restricción incorrecta del mismo (consideran sólo los productos fabricados por la máquina M1).

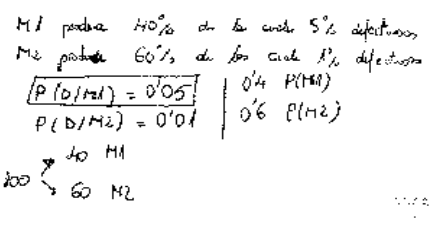


Figura 2. Identificación de los datos.

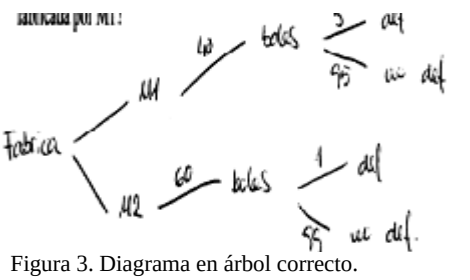


Figura 3. Diagrama en árbol correcto.

b) Construir una representación adecuada.

El segundo paso es construir un diagrama de árbol adecuado (pocos estudiantes usaron una tabla) para representar el experimento y partición secuencial de la población (figura 3). Esta representación potencialmente debe servir al estudiante para reconocer que el conjunto de sucesos favorables (productos defectuosos) viene de dos subpoblaciones, la de los producidos por la máquina M1 y M2. En algunos casos los diagramas en árbol son incompletos o se consideran dos poblaciones separadas.

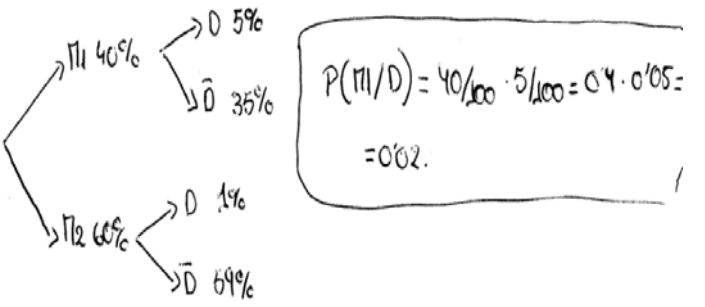


Figura 4. Identificar la probabilidad condicional

c) Identificar la probabilidad condicional que se piden

Para continuar, los estudiantes deben identificar qué probabilidad se pide en el problema, que es una probabilidad condicional inversa (probabilidad a posteriori). No es un sencillo, pues algunos estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad (fenómeno denominado falacia del eje de tiempos por Falk (1986) y concepción cronologista de la probabilidad condicional por Gras y Totohasina (1995)). Los estudiantes pueden confundir en la probabilidad condicional con su inversa, con una probabilidad simple o con una probabilidad conjunta (errores frecuentes en la investigación de Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987 y Ojeda, 1995). El estudiante de la figura 4 llega a este paso, utilizando una notación adecuada para la probabilidad condicional pedida.

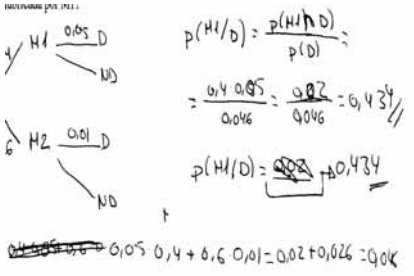


Figura 5. Calcular la probabilidad total

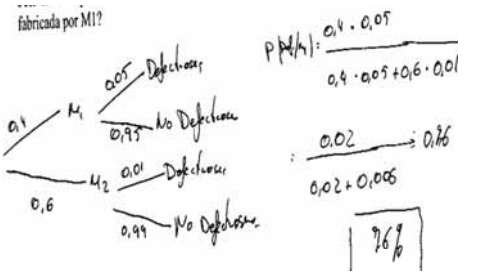


Figura 6. Alcanzar la solución final

d) Calcular el denominador de la fórmula de Bayes.

Después de identificar el problema como el cálculo de una probabilidad condicional, el estudiante debe calcular el numerador y denominador de la fórmula de Bayes. El denominador debe ser calculado con la regla de la probabilidad total (figura 5), esto es, multiplicando las probabilidades de cada rama del árbol y sumando cada una de esas probabilidades conjuntas. El alumno debe entender que se trata de sucesos dependientes, para aplicar correctamente la regla del producto en este caso. Algunos estudiantes comente errores al calcular la probabilidad total, ya que las probabilidades a priori en la población no son tenidas en cuenta, es decir, suman las proporciones de defectos en las máquinas M1 y M2 sin ponderar por la proporción de productos fabricados por cada máquina.

e) Calcular la probabilidad inversa (teorema de Bayes).

Finalmente, el estudiante debe sintetizar todos los pasos anteriores y calcular el numerador (probabilidad conjunta) y denominador (probabilidad total) para obtener la probabilidad inversa o a posteriori, es decir, aplicar el teorema de Bayes (figura 6). También en la fórmula de Bayes se producen errores, sustituyendo los productos por sumas o invirtiendo el numerador y denominador. En otros casos, el estudiante simplemente no la recuerda o no la desarrolla.

En la tabla 1 presentamos el porcentaje de estudiantes que han llegado a completar cada uno de los pasos descritos, donde el alumno que llega a completar correctamente hasta un paso completa también correctamente todos los anteriores. Un porcentaje alto de alumnos (casi la mitad) llega a completar satisfactoriamente todos los pasos, lo que indica que el uso de diagrama en árbol y hacer hincapié en la enseñanza sobre los posibles sesgos en el proceso de solución lleva a un aprendizaje razonable. Si se añaden los que llegan al menos a la probabilidad total se obtiene más de la mitad de los estudiantes

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas después de la instrucción (n=414)

	Frecuencia	Porcentaje
1. En blanco, no identifica los datos o diagrama árbol incorrecto	57	13,8
2. Identifica los datos y realiza el diagrama de árbol, pero no continúa	50	12,1
3. Datos y diagrama correcto e identifica la probabilidad condicional inversa a calcular	78	18,8
4. Calcula correctamente la probabilidad total	42	10,1
5. Solución completa correcta	187	45,2

Para completar el estudio, se realizó un análisis de los errores (tabla 2) en el proceso en los 227 alumnos que no llegaron a la solución final, tratando de explicar la dificultad de los problemas, donde un alumno puede presentar más de un error. Por ello la suma de errores es mayor que el tamaño de la muestra. Los porcentajes se calculan respecto a 227 (alumnos que hacen algún error).

La falacia de las tasas base (olvido de las probabilidades a priori) no se presentó de forma generalizada, al menos explícitamente. Fue mayor el número de alumnos que no consiguen identificar correctamente todos los datos o la pregunta. También hay errores en la partición incorrecta del espacio muestral, o la restricción del mismo (tomando sólo los objetos fabricados por la máquina M1); la confusión entre una probabilidad condicional y otra conjunta y entre una probabilidad condicional y su inversa y en menor medida de una probabilidad simple con la condicional y conjunta.

Tabla 2. Tipos de errores en el proceso de resolución (n=227)

	Frecuencia	Porcentaje
Blanco o no identifica los datos	49	21,6
Diagrama en árbol incorrecto	8	3,5
No identifica la pregunta	27	11,9
Restricción incorrecta del espacio muestral	22	9,7
Confunde probabilidad condicional y conjunta	77	33,9
Confunde probabilidad simple y condicional	7	3,1
Confunde una probabilidad condicional con su inversa	14	6,2
Falacia de las tasas base	22	9,7
Error en la formula de Bayes	40	17,6
Confunde un suceso y su complementario	10	4,4
Error partición del espacio muestral	21	9,3
Fallos razonamiento proporcional y operación fracciones	26	11,5
Probabilidad mayor que 1	4	1,8
Total errores	321	

Llama la atención el número de errores en la fórmula de Bayes, que algunos alumnos no recuerdan, invirtiendo denominador y numerador, omitiendo algún término o cambiando las probabilidades que intervienen por otras, lo que de nuevo sugiere la confusión de probabilidad simple, condicional y conjunta señalada por varios autores citados con anterioridad.

Observamos también fallos en el razonamiento proporcional, por lo que algunos estudiantes no eran capaces de operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción. Por ejemplo, al obtener el 5 por ciento del cuarenta por ciento, algunos alumnos restan las fracciones, en lugar de multiplicarlas; multiplican incorrectamente las fracciones o aplican inadecuadamente una regla de tres. Finalmente algunos alumnos operan conjuntamente probabilidades y porcentajes o cambian el numerador y denominador en la fórmula, obteniendo como consecuencia, valores mayores que la unidad para la probabilidad de un suceso, sin ser conscientes del error que esto supone.

CONCLUSIONES

En este estudio se confirman los resultados obtenidos en Díaz y de la Fuente (2007) en un estudio exploratorio con un grupo reducido de estudiantes. Como en aquél estudio, los errores no se limitan a falacia de las tasas base (Tversky y Kahneman, 1982), o a la dificultad de operar con probabilidades y fracciones. En nuestro caso la mayor frecuencia de error se da en la confusión de probabilidad condicional y conjunta.

Los errores se producen en los diferentes pasos del proceso de resolución, comenzando por la identificación correcta de los sucesos y sus probabilidades, y la correcta partición y subpartición del espacio muestral. A muchos estudiantes les fue difícil diferenciar entre probabilidades simples, compuestas y condicionales, o confundieron una probabilidad condicional *P(A/B)* con su inversa *P(B/A)*, dificultades ya señaladas en las investigaciones previas sobre probabilidad condicional. El olvido de la fórmula de Bayes también ocasionó un número importante de errores, pero su número es pequeño, en comparación con los causados por identificación de datos y errores en los conceptos que intervienen.

El teorema de Bayes se presenta, en consecuencia, como un objeto complejo, cuya comprensión involucra toda una serie de conceptos y propiedades previas como los de probabilidad simple compuesta y condicional, partición y complementario, axioma de la unión y regla del producto. La solución de la dificultad de los problemas de Bayes pasa por un mayor esfuerzo en la enseñanza de la probabilidad.

En consecuencia aportamos argumentos para continuar su enseñanza a los universitarios, pues además de su utilidad en la toma de decisiones, diagnóstico y evaluación es la base de la inferencia estadística. Por ello estamos de acuerdo con Rossman y Short (1995) que sugieren este tema puede enseñarse dentro del espirito de la reforma de la educación estadística, presentando a los estudiantes una variedad de aplicaciones en problemas reales, proponiendo situaciones interactivas y usando la tecnología para facilitar el aprendizaje.

Agradecimientos. Este trabajo está realizado con el proyecto SEJ2004-00789/EDUC, MEC, Madrid, España y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

Bar – Hillel, M. (1987). The base rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty.* (pp 39 – 61) Amsterdam: North Holland.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Dordrecht: Kluwer.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability?, En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning,* (pp. 260-289), Dordrecht: Kluwer.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Diaz, C. y de la Fuente (2007). Dificultades en la resolución de problemas bayesianos: un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática.*

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probability. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education,* vol. 7, (pp. 175 – 184), Paris: UNESCO.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright & P. Ayton (Eds.). *Subjective probability* (pp. 129 – 161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review, 102,* 684 – 704.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Koehler, J. J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behavior and Brain Sciences, 19,* 1-54.

Lonjedo, M. A. y Huerta, P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, E., y De la Torre, E. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp 229-238). Universidade da Coruña.

Lonjedo, M, A. y Huerta, P. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. En M. Bosch (Ed.). *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Sant Feliu de Guissols : ERME. CD ROM. ISBN 84-611-3282-3

Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. CD ROM.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* 5, 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes.* 40, 255 – 269.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1), 7-26.

Rossman, A. y Short, T. (1995). Conditional probability and education reform: Are they compatible? *Journal of Statistics Education,* 3(2), [On line], http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html.

Teigen, K. H., Brun, W. y Frydenlund, R. (1999). Judgments of risk and probability: the role of frequentist information. *Journal of Behavioral Decision Making, 12(2),* 123.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de concetpions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A, y Kahneman, D. (1982a). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153-160).. New York: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Paula B. Perera Dzul y Marta E. Valdemoros Álvarez
CINVESTAV, México

RESUMEN

En este reporte presentamos un estudio doctoral en el cual se desarrolló una enseñanza experimental que realizamos con un grupo de cuarto grado de primaria (con niños de 9 años de edad) de una escuela pública. El programa de enseñanza estuvo integrado por tareas vinculadas a la vida real de los niños. Dichas actividades fueron diseñadas para promover soluciones que favorecieran en el estudiante el desarrollo de ciertos significados (medida, cociente intuitivo y los rudimentos de operador multiplicativo) propiciando con ello la construcción de la noción de fracción. Asimismo, fueron aplicados dos cuestionarios, uno anterior y otro posterior al programa de enseñanza. Además, se efectuaron entrevistas individuales a tres niños que fueron previamente seleccionados para el estudio de casos, con el propósito de percibir de una manera más profunda los procesos que se manifestasen en cada uno de ellos, como resultado de la enseñanza impartida.

ABSTRACT

In this report we present a doctoral study in which an experimental teaching was developed in a fourth grade (which children were 9 years old) of an elementary public school. This teaching program was composed by several tasks related to the children's daily life. Those activities were designed to promote solutions that can support the construction of the notion of fraction and other meanings (measure, intuitive quotient and the rudiments of the multiplicative operator) in the student. Furthermore, one questionnaire was applied before and another after the teaching program. In addition, in order to have a deeper perception of the process evolved in each child as a result of this teaching strategy, three children were selected for individual interviews for the study of cases.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Paula B. Perera Dzul y Marta E. Valdemoros Álvarez (2007). PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA, pp. 209-218.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Investigadores como Kieren (1983, 1984, 1985, 1988, 1992, 1993), Freudenthal (1983), Figueras (1988, 1996), Valdemoros (1993, 1997, 2001), Pitkethly y Hunting (1996), Perera, P. y Valdemoros, M. (2002) entre otros, admiten que las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que presentan dificultades para su enseñanza y aprendizaje, principalmente, en los niveles básicos de educación. Uno de los factores que posiblemente inciden en este proceso es la didáctica tradicional empleada en la enseñanza (Freudenthal, 1983), la cual sería uno de los factores determinantes del ulterior aprendizaje del niño. Estando concientes de los escollos que deben superar los niños en la construcción de estos números, nos preguntamos:

¿Qué estrategias y situaciones de enseñanza debe implementar el maestro para facilitar un firme conocimiento de los números fraccionarios en los niños de cuarto grado de educación primaria?

Delimitamos nuestro problema de investigación en términos de cómo influye en el niño una enseñanza matemática realista y lúdica, desarrollada con un enfoque constructivista, en la adquisición de los significados de la fracción vinculados a medida, cociente intuitivo y el rudimento de operador multiplicativo. La selección de los mencionados contenidos semánticos se fundamenta en que la noción de medida y cociente están incluidos en el programa oficial de cuarto grado, en la República Mexicana, no así el de operador multiplicativo (contemplado en el programa de quinto grado, conjuntamente con el de razón), pese a esto último, decidimos explorar las ideas embrionarias de operador multiplicativo en nuestra investigación, por estimarlo accesible para los estudiantes del presente estudio, no así el significado de razón, por considerarlo demasiado complejo para que sea introducido en este grado. Procuramos con ello aportar una aproximación al aula en la que los problemas aritméticos a resolver se encuentran íntimamente relacionados entre sí, de manera que promuevan un aprendizaje sólido y bien integrado, en los alumnos.

A nivel del aprendizaje, prestamos especial atención a la comprensión de los significados de fracción que desarrollan los niños y a la correspondiente integración de los mismos. Con respecto al carácter realista de la enseñanza, estamos señalando nuestros acuerdos con el enfoque teórico sustentado por Streefland, en torno a la Matemática Realista, el cual documentamos en el marco teórico. En cuanto al aspecto lúdico de la enseñanza que aquí promovemos, nos referimos tanto al uso de juegos como al establecimiento de un ambiente de interacción entre los estudiantes que propicie actividades colectivas en las que prevalezcan las actitudes de recreación que acompañan al juego.

Hipótesis

Un programa de enseñanza constructivista, realista y lúdico favorecerá en el niño la consolidación de las nociones relativas a la fracción.

Objetivo General

Establecer si una enseñanza matemática realista y lúdica, realizada con un enfoque constructivista, propiciará en el niño de cuarto grado de educación primaria la elaboración de la noción de fracción y los significados de medida, cociente intuitivo y la idea embrionaria de operador multiplicativo.

MARCO TEÓRICO

Freudenthal (1983) basándose en su propuesta fenomenológica didáctica, critica la enseñanza impartida a través del desarrollo de conceptos, pues esta manera de instruir acentúa el aspecto formal de las definiciones. Asimismo, señala que esta forma de enseñar fragmenta las relaciones con otros contenidos matemáticos y no se fundamenta en la experiencia del estudiante, propiciando que los conceptos queden aislados en la mente del alumno, lo que impide que los aplique en la resolución de problemas asociados a la vida cotidiana. Este último aspecto se toma en cuenta en la presente investigación para diseñar problemas claramente vinculados a las experiencias vitales de los niños, en marcado contraste con las que son prácticas habituales a nivel escolar, en las que suelen prevalecer las mecanizaciones y las tareas estereotipadas.

Freudenthal (1983) da sugerencias amplias para la enseñanza de fracciones. Al referirse a la relación parte-todo, indica que enfocar dichos números con ese único significado es bastante limitado, tanto fenomenológica como matemáticamente, ya que este tipo de acercamiento sólo produce fracciones propias. Asimismo, este autor exhibe ejemplos didácticos para la enseñanza de las fracciones, sugiriendo tomar en cuenta las magnitudes de área y longitud como medios para visualizar las relaciones de equivalencia. Además, recomienda el uso de otros materiales como la balanza y el reloj para percibir las equivalencias en los pesos y tiempos respectivamente. El modelo que propone para el operador-razón es la amplificación o reducción de una figura. Estas aportaciones han respaldado la estructuración de varias tareas involucradas en los cuestionarios y la enseñanza que integra nuestro estudio.

Desde su enfoque particular, Goffree (2000) menciona el marco de una educación matemática realista, brindando numerosos fundamentos didácticos a la enseñanza, dentro de los cuales están: a) Diseñar situaciones problemáticas concretas para que el niño pueda dar sus propios significados. b) Crear un modelo de una situación real, permitiendo al alumno investigar la situación, induciéndolo a que use el modelo para solucionar otros problemas. c) Tomar en cuenta cualquier conflicto cognitivo que el niño haya pensado por sí mismo, para incluir la reflexión en la clase. d) Propiciar en el aula la interacción entre los niños de manera natural. e) Basar la enseñanza de las matemáticas en problemas del mundo real, como fuente de ideas y situaciones para poder aplicarlas. Hemos adoptado tales líneas de trabajo en nuestro programa de enseñanza y en su posterior aplicación, en el desarrollo de la presente investigación.

Streefland (1991), a través del diseño de un curso enriquece la enseñanza de las fracciones. Su objetivo es proporcionar una didáctica al manejo constructivo y productivo de materiales concretos eficaces. Las actividades del curso se centran en situaciones de la vida real. Emplea algunos acontecimientos que se desarrollan en espacios reales.

Streefland (1993) menciona que el maestro puede guiar a la luz los conocimientos que tienen los estudiantes sobre cierto contenido matemático, propiciando confrontaciones entre los alumnos en situaciones relevantes. Asimismo, Streefland (1991, 1993) señala que la enseñanza debe apegarse a la *realidad* para que dicho conocimiento tenga un significado para el niño. De nuestra parte, hemos adoptado el enfoque realista de este investigador en nuestro plan didáctico de intervención.

Otro investigador que ha realizado estudios acerca de la construcción de los números fraccionarios es Thomas Kieren. Su finalidad es establecer cuál es la génesis de dichos números, a la par que reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón) que sirven de base a la ulterior instauración de los conceptos relativos a la fracción.

Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro citados anteriormente (Kieren, 1983).

En cuanto a las definiciones que dicho investigador da a esos constructos intuitivos y con respecto a ellos, la relación parte-todo, Kieren (1980) la considera como un todo (continuo o discreto) subdividido en partes iguales, indicando como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. La fracción como medida es reconocida por Kieren (1980) como la asignación de un número a una región o a una magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad. La fracción como cociente la refiere como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes (Kieren, 1980, 1983, 1988, 1992). El papel de la fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura a/b veces más grande o a/b veces menor (Kieren, 1980). La fracción como razón es considerada por Kieren (1980) como la comparación numérica entre dos magnitudes. Hemos tratado en nuestro programa de enseñanza los significados de la fracción vinculados a medida, cociente intuitivo y operador multiplicativo propuestos por este investigador.

Kieren (1993) presenta un modelo recursivo para la comprensión de las matemáticas. Este modelo de comprensión es un proceso dinámico, en forma de espiral que conlleva envolverse en sí mismo para crecer y extenderse. Dicho modelo está integrado por ocho niveles incrustados de conocimiento o acciones eficientes, los cuales son: ***hacer primitivo, hacer imagen, tener imagen, notar propiedad, formalizar, observar, estructurar e inventar.*** Consideramos apropiado destacar que en este estudio doctoral se tomaron en cuenta los tres primeros niveles que corresponden al pensamiento más intuitivo y elemental del sujeto, es decir; la partición como "actividad primitiva", "hacer imagen" como los problemas de reparto que se anticipan en el uso de diferentes particiones y fracciones para representar la misma cantidad, "tener imagen" como fracciones equivalentes generadas a través de una fracción dada.

MÉTODO

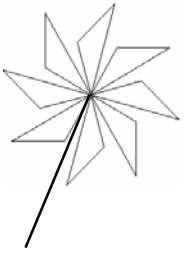
La enseñanza de las fracciones en la escuela mexicana se inicia oficialmente en tercer grado de primaria. Este estudio doctoral se llevó a cabo con un grupo de cuarto grado porque es en ese nivel donde se empieza a profundizar el trabajo con las fracciones, haciendo más complejo su uso a través de la resolución de problemas. Esta investigación doctoral es de carácter cualitativo, dado que se realizó el análisis de los avances de un grupo de niños de 9 años de edad dentro de su ambiente natural (aula), para conocer cuáles son los efectos que se producen en su pensamiento durante el desarrollo de un programa de enseñanza, en el cual elaboró experiencias de su propia vida. Además, se realizó el estudio de tres casos para percibir de una manera más profunda los procesos y fenómenos que se manifestaron en cada uno. En este reporte no presentamos ningún caso porque el análisis de cualquiera de ellos requeriría una comunicación de mayor extensión que la presente.

La investigación se inició con un cuestionario exploratorio aplicado a 30 estudiantes, con el propósito de obtener información sobre los conocimientos con que cuentan los niños acerca de las fracciones. Asimismo, el examen permitió seleccionar a tres alumnos para el estudio de casos. También facilitó la organización de la enseñanza. El examen inicial estuvo conformado por 13 tareas organizadas en tres bloques. En el primer bloque se presentan tareas relacionadas con el significado de medida. En el segundo bloque se incluyen situaciones

de reparto y el tercero, contiene actividades relacionadas con el significado de operador multiplicativo. Enseguida presentamos una actividad de dicho cuestionario, en el cuadro 1.

El segundo instrumento de esta investigación doctoral fue el programa de enseñanza desplegado con un enfoque constructivista, con el fundamento de que los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en que construyen significados apropiados en torno a los contenidos a estudiar (Solé y Coll, 1999). De acuerdo con lo anterior, el programa de enseñanza tuvo como propósito crear un ambiente favorable que posibilitara al niño el desarrollo adecuado de las actividades planteadas en las sesiones de trabajo y, además, le permitiera establecer los diferentes tipos de relaciones que le ayudaran a construir los significados de la fracción vinculados a la medida, cociente intuitivo y operador multiplicativo.

Rocío coloreó un cuarto de este rehilete de color rojo, un medio de color azul y un octavo de color amarillo.



¿Qué fracción del rehilete no coloreó Rocío? _____

Cuadro 1. El problema ilustra una de las actividades del bloque vinculado con el significado de medida (de acuerdo con Kieren, 1980), del cuestionario inicial.

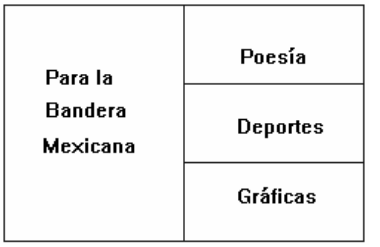
Las actividades que integran el programa de enseñanza están relacionadas con situaciones de la vida real. Dichas tareas fueron diseñadas tomando como eje el currículum vigente de matemáticas de cuarto grado de primaria (1993) y los objetivos de nuestra investigación. La enseñanza experimental se realizó en un período de tres meses, se implementó en 18 sesiones, con una duración de una hora cada una, aplicándose dos veces por semana. Las actividades que se desarrollaron en las sesiones de trabajo fueron: a) Recortar e identificar del todo (continuo) la fracción representada por diversas figuras. b) Medir distancias para obtener partes fraccionarias de un todo. c) Reconocer la parte fraccionaria que se genera al cubrir figuras con un todo continuo, y escribir la fracción correspondiente a las partes indicadas de un todo continuo o discreto en las situaciones planteadas. d) Distinguir las partes fraccionarias de un todo continuo o discreto en las situaciones problemáticas que se desarrollan en una fiesta de cumpleaños. e) Solucionar situaciones de reparto de artículos adquiridos en un mercado. d) Completar la reducción de figuras relacionadas con la clase de educación física.

Dichas tareas fueron reunidas en torno a diversos “escenarios”, los que representaron distintos espacios o ámbitos de aplicación de las fracciones. Cada “escenario” supuso una modalidad particular de desarrollo de los mencionados números, en un terreno real determinado (a manera de ejemplo de esto, mencionamos el “escenario” de la fiesta escolar, o bien,

el "escenario" del festejo familiar). Enseguida presentamos una de las tareas del programa de enseñanza, en el cuadro 2. Esto es marcadamente diferente de las actividades didácticas contempladas en el libro de texto oficial, en donde los contenidos curriculares comunes no se encuentran secuenciados, sino son presentados de manera discontinua.

En dichas actividades, los niños trabajaron organizados en equipos, con la finalidad de fomentar el intercambio de ideas, la coordinación de puntos de vista y el trabajo colaborativo. Al término de cada actividad se realizaron confrontaciones grupales, donde los alumnos explicaban a sus compañeros las estrategias que habían desarrollado para resolver la tarea. Si un estudiante presentaba una estrategia incorrecta en la solución del problema, los demás niños intervenían, haciéndole ver el error cometido en su proceso de solución.

El maestro dividió el tablero del periódico mural de esta manera:



Escribe qué fracción del periódico mural se le asignó a cada sección:

Para la Bandera Mexicana _____.

Deportes _____.

Gráficas y poesía juntas _____.

Explica a tus compañeros cómo resolviste la actividad.

Cuadro 2. Actividad del programa de enseñanza del escenario: El periódico mural "La voz del niño".

Después de la realización del programa de enseñanza, se aplicó el *cuestionario final* al grupo que participó en el estudio de campo. El propósito fue valorar los avances que se alcanzaron durante las sesiones de trabajo. Las 13 tareas que conforman este cuestionario son análogas a las planteadas en el examen inicial y a las desarrolladas en las sesiones de enseñanza.

Para validar este estudio doctoral se realizó la triangulación de los métodos de esta investigación. En dicho análisis se confrontaron y compararon los datos recopilados en los cuestionarios (inicial y final), las observaciones del responsable de la investigación y de otro observador en las sesiones de enseñanza, así como las observaciones y los datos obtenidos en las entrevistas del estudio de casos.

RESULTADOS

* En el análisis de las tareas que corresponden al significado de fracción como *medida* del *cuestionario inicial*, observamos que los alumnos no tuvieron dificultad para calcular las veces que cabe ½ de determinada magnitud en una longitud dada. Sin embargo, los niños tuvieron conflictos para nombrar la parte fraccionaria que se generó al partir un todo continuo en dos partes iguales. Asimismo, no pudieron determinar qué parte de un todo continuo re-

presentan las fracciones ½, ¾, 1 ¼. Podemos afirmar que los conocimientos con que cuenta el escolar de este grupo con respecto a dichas fracciones, limitó sus habilidades para desarrollar estrategias apropiadas de partición. Además, la mayoría de los alumnos tuvieron problemas para representar en un todo discreto las fracciones un medio, un cuarto y un octavo. También evidenciaron el desconocimiento de un vocabulario apropiado para nombrar la parte fraccionaria obtenida en la partición de un todo continuo o discreto, lo cual indica que el conocimiento con que cuenta el niño en relación a este contenido matemático es reducido.

Con relación a las actividades vinculadas al significado de *cociente intuitivo* (reparto) de fracción, la mayoría de los niños tuvieron dificultad para resolver la distribución de un todo discreto entre un determinado número de personas. La tendencia de los alumnos en estas tareas fue la de partir en medios. De igual forma, los estudiantes manifestaron conflictos para establecer la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes. Un alumno consideró al todo continuo como indivisible. A este respecto, podemos decir que la poca experiencia con que cuentan los miembros de este grupo con respecto a la distribución de todos continuos fue determinante en las estrategias que desarrollaron en las situaciones de reparto.

En cuanto a las tareas vinculadas al significado de *operador multiplicativo* de la fracción, casi todo el grupo tuvo problemas para agrandar al doble los lados de una figura dada o para disminuirlos a la mitad. La mayoría de los niños, para resolver estas actividades, repitieron tan sólo la posición de los lados de la figura, ignorando las magnitudes que tenían que ampliar o disminuir. Algunos niños, para reducir los lados de la figura a la mitad, únicamente lo hicieron en una dimensión (ancho o largo).

*Al inicio del *programa de enseñanza*, los niños tuvieron dificultadas para integrarse en un trabajo colectivo, ya que estaban acostumbrados a la producción individual; posteriormente, la problemática fue superada y pudieron avanzar en equipo, de tal manera que esta forma de resolver las actividades no únicamente favoreció en el niño el intercambio de ideas, la justificación de sus respuestas, el argumentar sus propias decisiones, sino además, propició la elaboración de respuestas correctas y la manifestación de anticipaciones con relación a la equivalencia de fracciones y la proporcionalidad entre dos figuras. En el cuadro 3 mostramos la actividad que favoreció en una alumna la anticipación de una relación proporcional.

A lo señalado en el cuadro 3, agregamos que Mayra dibujó en la cuadrícula una cancha de 6 cuadros de largo por 3 cuadros de ancho. A continuación reproducimos los comentarios de Mayra, parcialmente.

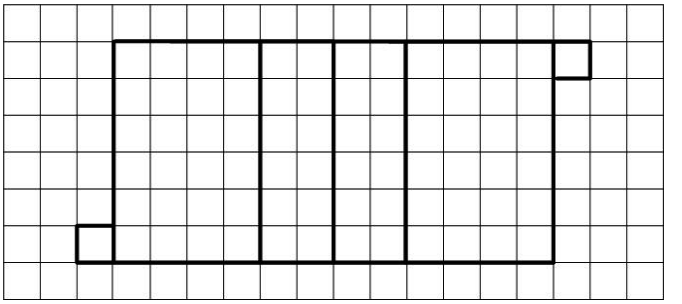
Mayra: La canchita cabe 4 veces en la cancha grande, dice señalando a una y otra cancha. *Porque de largo tiene 6 cuadritos y de ancho tiene 3, entonces 6* x *3 = 18*, señala la canchita, después, divide la cancha en cuatro partes iguales…

Mayra: Cada parte tiene 18 cuadritos, expresa apuntando un cuarto de la cancha. *Que es lo que le toca a la canchita*, señala la canchita…

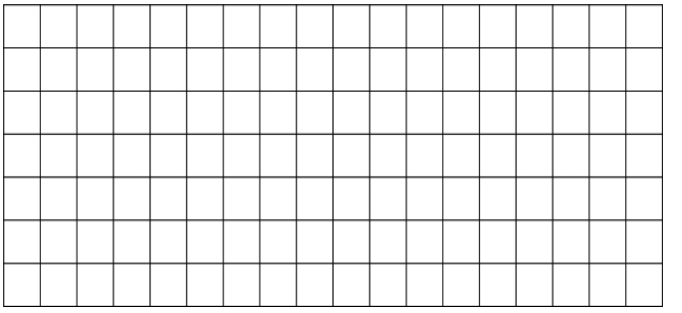
Mayra: Entonces, la canchita cabe 4 veces en la cancha grande…

Al resolver los problemas vinculados con el significado medida, los alumnos identificaron y escribieron las fracciones representadas en un todo. Asimismo, los niños lograron producir fracciones equivalentes dada una fracción. A través de los problemas de reparto, los estudiantes lograron manifestar expresiones simbólicas de fracción para nombrar la parte del todo repartido. Además, dichas tareas propiciaron en los pupilos la anticipación de la suma de fracciones con igual denominador. En cuanto a las actividades de operador multiplicativo, favoreció en los alumnos el reconocimiento de las dimensiones de las figuras (ancho y largo) como fundamental para realizar sus producciones.

Por último, el maestro de educación física presentó este dibujo de la cancha de voleibol.



En la cuadrícula de abajo, dibuja la cancha de voleibol reduciendo cada uno de sus lados a un medio.



Cuadro 3. Tarea del escenario "La clase de educación física".

* Con respecto a las actividades relacionadas con el *significado de la fracción como medida en el cuestionario final,* observamos que la mayoría de los niños no tuvieron dificultades para realizar particiones en dos, tres, cuatro y seis partes iguales de todos continuos. De igual manera, percibimos que un gran número de los alumnos lograron efectuar particiones en sextos y novenos en un todo continuo. Además, utilizaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar la parte fraccionaria que obtuvieron como resultado en la estrategia desarrollada.

En las tareas que corresponden al significado de cociente intuitivo de la fracción, notamos que la mayoría de los niños no presentaron problemas para resolver las tareas vinculadas con situaciones de reparto. Asimismo, efectuaron procedimientos apropiados al repartir todos continuos o discretos entre un número determinado de personas. De igual forma, establecieron la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes.

En relación con el significado de operador multiplicativo de la fracción, nos percatamos que la mayoría de los niños no tuvieron dificultades para disminuir a la mitad los lados de una figura. Sin embargo, percibimos que medio grupo no logró reducir los lados de una figura a un tercio y tampoco pudieron disminuir los lados a la mitad, cuando la figura estaba formada por líneas inclinadas.

CONCLUSIONES

En este programa de enseñanza se promovió el desarrollo intelectual de los niños, habilitándolos a que ellos mismos construyeran sus propios conocimientos, sobre las bases de sus experiencias cotidianas. Durante el proceso de enseñanza, los alumnos efectuaron diversas actividades que les permitieron realizar exitosamente repartos equitativos y exhaustivos de todos continuos y discretos. Además, los alumnos manifestaron expresiones simbólicas de la fracción para nombrar las partes de un todo continuo o discreto.

De acuerdo a lo planteado por Kieren (1992, 1993), observamos en el desarrollo del programa de enseñanza que la partición fue la actividad rudimentaria que los niños produjeron para resolver las tareas planteadas, así como las situaciones de reparto propiciaron en los alumnos la anticipación de tener una imagen mental de la acciones de la partición del todo. Asimismo, la percepción de patrones que los estudiantes construyeron en las situaciones de reparto, los ejemplificaron con diferentes fracciones para mostrar la misma cantidad.

De acuerdo a lo mencionado por Streefland (1993) podemos afirmar que los conocimientos previos que tienen los niños favorecieron la construcción de la noción de fracción en las sesiones de enseñanza. Además, las confrontaciones grupales propiciaron en los estudiantes la creación de un ambiente de confianza y respeto mutuo; en donde cada uno tuvo la oportunidad de expresar sus estrategias de resolución con libertad, así como el de aceptar sus equivocaciones. Con todo lo expresado anteriormente consideramos que lo planteado en la hipótesis de nuestra investigación se cumplió.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales.* Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En: F. Hitt (Ed.), *Didáctica. Investigaciones en Matemática Educativa* (173-196). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical Structures.* Holland: D. Reidel Publishing Company. 28-33, 133-177.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una «educación matemática realista» *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 9 (151-167). Barcelona: Graó.

Kieren, T. (1980). The rational Number Constructs. Its Elements and Mechanisms. En: T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (125-149) Columbus, OH: ERIC/ SMEAC.

Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, 506-508.

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education.* (187-194).

Kieren, T. Nelson. D. y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical. Behavior*, 4. 25 – 36.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* 2 (162-181). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. (1992). Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction. En: G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, 6, (323-369). New Jersey: Lawrence Erlbaun Associates, Publishers.

Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En: T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers An Integration of Research*, 3 (49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaun Associates, Publishers.

Perera, P. y Valdemoros, M. (2002) Manipulative help in verbal sharing out continuous and discrete wholes problems solving. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4. 49-56.*

Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30 (1), 5-38.

Solé, I. y Coll, C. (1999). Los profesores y la concepción constructivista. *El constructivismo en el aula*, (7-23). Barcelona: Graó.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education.* Tesis doctoral publicada por la Kluwer Academic Publishers. (46-134).

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course a theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics*, 25. (109-135).

Valdemoros, M. (1993). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él.* Tesis Doctoral. México: Cinvestav-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones: Estudio de caso. *Educación Matemática* 9, 3, (5-17). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de la unidad. Estudio de casos. *Educación Matemática* 13, 1 (51-67). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

INFERENCIA ESTADÍSTICA Y LENGUAJE: UN ESTUDIO EN BACHILLERATO

Israel García Alonso y Juan Antonio García Cruz
Universidad de La Laguna

RESUMEN

En este trabajo analizamos varios términos relacionados con la Inferencia Estadística que aparecen en distintos libros de texto de secundaria. Comparamos el significado que dichos términos tienen con el que se les asigna en los libros de texto. Comprobamos cómo, en ocasiones, los textos dan definiciones de los términos, más cercanas al contexto cotidiano que al matemático. Clasificamos distintos términos según su significado y lo comparamos con el significado estadistico dado por los diferentes textos.

ABSTRACT

This paper analyzes several terms related to Statistical Inference and how they appears in Secondary School Textbooks. We compare its definition to the one that the textbook gives. Sometimes these definitions are quite different sometimes not. We will categorize this terms differentiating the context we are working on, and then contrast this definitions to the one that appears in the school textbooks analyzed.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Israel García Alonso y Juan Antonio García Cruz (2007). INFERENCIA ESTADÍSTICA Y LENGUAJE: UN ESTUDIO EN BACHILLERATO, pp. 219-228.

MARCO TEÓRICO

En los últimos años abunda la información derivada de la investigación sobre las dificultades y obstáculos que los alumnos encuentran cuando se enfrentan con la inferencia estadística. En el ámbito universitario Vallecillos & Batanero (1997) señalaron dificultades en el aprendizaje de la inferencia estadística, especialmente respecto de los conceptos de nivel de significación, parámetro, y estadístico entre otros, así como sobre la lógica global del contraste de hipótesis. En el ámbito de la Educación Secundaria, Moreno & Vallecillos (2002), realizaron un estudio con alumnos de 15 y 16 años, y mostraron que los estudiantes poseen concepciones erróneas que hacen que realicen inferencias incorrectas. Entre otras, señalan la concepción que aparece en los estudiantes con más frecuencia es la descrita por Kahnemann et al. (1982), denominada *heurística de la representatividad*, que se caracteriza por la creencia de que las muestras pequeñas deben reproducir las características esenciales de la población de la cual han sido extraídas. Por otro lado, el Contraste de Hipótesis parece ser una herramienta de especial dificultad para los estudiantes. En Vallecillos (1999) se indica que los estudiantes muestran diferentes concepciones de lo que demuestra el test de hipótesis. García Alonso & García Cruz (2003), realizaron un estudio sobre una muestra (n=50) de estudiantes presentados a la Prueba de Acceso a la Universidad. En dicho estudio concluyen que muchos alumnos (86%) no son capaces de realizar completamente los problemas tipo de Inferencia Estadística propuestos, a pesar de que tales problemas no se diferencian de los que están habituados a resolver en la práctica diaria de la clase.

Todas las investigaciones anteriores coinciden en que desde el punto de vista lógico-matemático existe una dificultad inherente a este tema, pero en nuestro trabajo nos interesaremos principalmente por el uso del lenguaje y los posibles obstáculos que a partir de él se pudieran producir en los estudiantes.

En la construcción del conocimiento matemático un vehículo importante es el lenguaje, y durante el bachillerato las matemáticas presentan un nivel de abstracción mayor y una mayor tecnificación, razón por la cual necesitan cada vez más de términos específicos. Es este el caso de la Inferencia Estadística. Shuard & Rothery (1984), indican que en el aula de matemáticas trabajamos con dos tipos de contexto: contexto cotidiano y contexto matemático. Entendemos por contexto cotidiano a aquel en el que realizamos la comunicación habitual, mientras que el contexto matemático es aquel propio de las matemáticas. Según esto, los autores clasifican los términos que aparecen en una clase de la siguiente forma: (1) términos con el mismo significado en ambos contextos; (2) términos con distinto significado en ambos contextos, y (3) términos propios del contexto matemático. Los estudiantes no deberían tener dificultad con la categoría (1), mientras que la categoría (3) necesariamente debe ser definida pues son términos que los estudiantes no conocen ni tienen en su vocabulario. La categoría (2) puede dar lugar a más dificultades para los estudiantes. Un recurso importante para el aprendizaje y la enseñanza es el libro de texto. Pepin et al. (2001) nos señalan que existen cuatro grandes áreas sobre las que podemos realizar el análisis del contenido y la estructura de los libros de texto: la intención matemática, la intención pedagógica, el contexto sociológico y la cultura tradicional representada.

En este trabajo, el análisis que presentamos de los libros de texto será “a priori”. Por lo tanto, extraemos los términos relacionados con la Inferencia Estadística y analizamos el contexto en el que se proponen, y los clasificaremos según las categorías dadas por Shuard & Rothery (1984).

Nos planteamos las siguientes cuestiones: ¿Cómo se presentan los términos de inferencia estadística en los libros de texto de bachillerato? ¿Existe discrepancia en el significado matemático y cotidiano de los términos usados? ¿Son apropiadas las definiciones con las que se introducen?

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Los objetivos del trabajo son:

1. Analizar si el significado de los términos de Inferencia Estadística es el mismo en los contextos cotidiano y matemático.
2. Comparar estos significados con los presentados en los libros de texto de bachillerato.

Para llevar esto a cabo, se pasó un cuestionario a un grupo de 37 profesores de matemáticas de 2º de bachillerato, aprovechando una sesión de coordinación trimestral. En dicha encuesta se les pedía que indicaran el texto que utilizan.

Además, nos parece muy significativo que una parte importante del profesorado encuestado (unos 30 profesores) utiliza el libro de texto para refrescar y/o recordar los conceptos estadísticos que van a trabajar con los estudiantes, lo que indica la importancia del libro de texto como elemento formador del propio profesorado.

Del cuestionario extrajimos los cuatro libros de texto más utilizadas por el profesorado y sobre los que hemos realizado esta investigación, cuyos textos son:

Texto 1 (E1): Anaya; Texto 2 (E2): SM; Texto 3 (E3): Santillana; Texto 4 (E4): Edelvives.

Seguidamente, seleccionamos todos los términos relacionados con Inferencia Estadística que aparecen en cada uno de los textos escogidos. Posteriormente se analizó el significado de cada término, tanto en el contexto cotidiano como en el matemático. Como representante del contexto cotidiano hemos elegido el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, y como referente del contexto matemático hemos tomado dos manuales universitarios: ME = Mendenhall (1982) y MO = Moore (2005).

Contexto cotidiano: El español es una lengua que se encuentra normativizada por la Real Academia de la Lengua, la cual se encarga de recoger todos aquellos términos y nuevas acepciones de los mismos que la lengua va adquiriendo con el tiempo. Es su diccionario un recurso fundamental cuando queremos estudiar los términos tal y como los recoge el lenguaje cotidiano. Y además, con respecto a los tecnicismos el diccionario añade que *"incorpora aquellas voces procedentes de los distintos campos del saber y de las actividades profesionales cuyo empleo actual (...) ha desbordado su ámbito de origen y se ha extendido al uso, frecuente u ocasional, de la lengua común y culta"*. Con lo cual nos da idea de cómo determinados tecnicismos han sido adoptados por el lenguaje habitual, y de si lo han hecho correctamente o por el contrario incorporan errores conceptuales desde el punto de vista matemático.

Contexto matemático: El contexto matemático lo determinan los manuales universitarios, entendiendo que son estos los encargados de transmitir las definiciones de los términos y conceptos técnicos. En nuestro caso hemos adoptado dos manuales: Mendenhall (1982) y Moore (2005).

Una vez conocemos el significado de los términos en el contexto cotidiano y matemático, analizamos en qué categoría de las descritas por Shuard & Rothery (1984) se sitúa. Para ello, si ocurre que las definiciones del Diccionario y de los manuales universitarios son equivalentes o muy cercanas, situamos el término dentro de la categoría de "*términos con el mismo significado en ambos contextos"*(1). Si no está definido en el Diccionario y sólo aparece la definición en los manuales universitarios, diremos que dicho término tiene "*significado propio en el contexto matemático"*(3). Y cualquier término que no presente la misma definición en el Diccionario y en los manuales universitarios será catalogado como "*término con distinto significado en ambos contextos"*(2). El último paso de la investigación consistió en analizar qué ocurre con estos mismos términos en los textos seleccionados.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En total analizamos 27 términos relativos a la Inferencia Estadística, para abreviar los enumeramos más adelante cada uno en su categoría correspondiente. Una vez realizamos el estudio de cada uno de los términos, tal y como indicamos en el apartado anterior, y los clasificamos por categorías, obtuvimos los resultados que pasamos a señalar a continuación.

Categoría 1 Mismo significado en ambos contextos	Categoría 2 Distinto significado en ambos contextos	Categoría 3 Significado propio en el contexto matemático
Estadística **Población** **Individuo** **Tamaño de la muestra**	**Media** **Muestra** **Estimación** **Inferir** **Distribución** **Probabilidad** **Representativo** **Riesgo** **Significativo**	**Parámetro** **Estadístico** **Muestreo aleatorio** **Media muestral** **Media poblacional** **Nivel de confianza** **Desviación típica** **Estadística inductiva** **Estadística hipotético-deductiva** **Error máximo admisible** **Normal** **Sesgado** **Eficiente** **Proporción muestral** **Contraste de Hipótesis** **Hipótesis Nula** **Hipótesis Alternativa** **Nivel de Significación** **Error de Tipo I** **Error de Tipo II**

Gráficamente, la distribución de los términos es la que aparece en la siguiente figura.

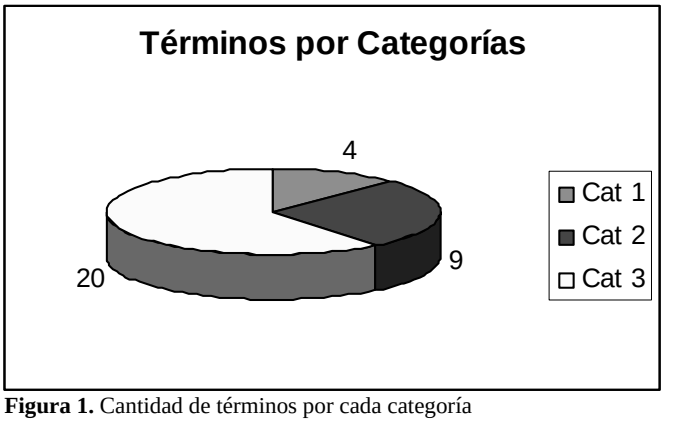


Figura 1. Cantidad de términos por cada categoría

Categoría 1: Mismo significado en ambos contextos

Término: **POBLACIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Acción y efecto de poblar 2. Conjunto de los individuos o cosas sometido a una evaluación estadística mediante muestreo.	**ME**.- Conjunto de todas las mediciones de interés para quien obtiene la muestra. **MO**.- Un grupo entero de individuos sobre el que queremos información se llama población.
TEXTOS	
T1.- *"Población o universo es el conjunto de todos los individuos objeto de nuestro estudio".* **T2.-** *"es el conjunto de todos los elementos que poseen una determinada característica. En general supondremos que la población es muy grande."* **T3.-** *"cuando una investigación estadística va referida a un conjunto, colección o colectivo de elementos, este colectivo se llama población."* **T4.-** *"el conjunto homogéneo de personas, animales o cosas sobre el que se va a realizar un estudio".*	

Se trata de un término que presenta en su segunda acepción en el Diccionario una definición equivalente a la dada por los manuales universitarios, en cuanto hace referencia al conjunto total de individuos u objetos.

Si comparamos estas definiciones con las dadas en los diferentes textos, cabe destacar la definición dada en T4, donde se pide que el conjunto sea homogéneo. Se trata de un requisito que no es necesario, y podría inducir a errores conceptuales posteriores. Puesto que pudiera ser que la finalidad del estudio estadístico fuera determinar cierta característica homogénea en la población.

Categoría 2: Distintos significados en ambos contextos:
Destacamos los siguientes términos de esta categoría:

Término: **MUESTRA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Porción de un producto o mercancía que sirve para conocer la calidad del género. 2. Parte o porción extraída de un conjunto por métodos que permiten considerarla como representativa de él.	**ME**.- Una muestra es un subconjunto de mediciones seleccionadas de la población de interés. **MO**.- Una muestra es la parte de la población que realmente examinamos con el objetivo de obtener información.
TEXTOS	
T1.- *"un subconjunto extraído de la población. Su estudio sirve para inferir características de toda la población". "Sin embargo, si la muestra está mal elegida (no es representativa)…"* **T2.-** *"un subconjunto de la población".* Para que *"un estudio sea fiable habrá que cuidar mucho la elección de la muestra, con el fin de que sea realmente representativa de la población".* **T3.-** *"parte de la población, debidamente elegida, que se somete a la observación científica en representación de la misma, con el propósito de obtener resultados válidos para toda la población".* Y que para que *"una muestra se considere válida debe cumplir que (…) sea representativa"* **T4.-** *"Subconjunto de la población".* Se debe "h*acer una buena selección*".	

Observamos que las definiciones dadas por los manuales universitarios son equivalentes entre sí, mientras que la dada por el diccionario agrega la idea de que el subconjunto debe ser representativo del total. Este requisito no aparece en los manuales universitarios, pero sí lo recogen los libros de texto.

¿Qué se entiende por algo **representativo**? El Diccionario define este término como:

> *1. Hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene.*
> *2. Ser imagen o símbolo de algo, o imitarlo perfectamente.*

Según esta definición, cuando se dice que una muestra es representativa se está indicando que la muestra debe "imitar perfectamente" o "ser imagen" de la población. Encontramos que se está fomentando de esta manera la concepción errónea descrita por Kahneman et al. (1982) denominada *heurística de la representatividad*, donde el estudiante espera que pequeñas muestras hereden todas las propiedades de la población. Sabemos que no es el parecido con la población lo que valida una muestra, sino su método de selección.

Pero además, es un hecho destacable que el Diccionario recoja la definición de muestra indicando que sea representativa. Esto nos demuestra que en el contexto cotidiano se ha adoptado una definición errónea de este tecnicismo, y que pudiera generar un obstáculo en el aprendizaje. Constatamos que algunos libros de texto fomentan esta concepción errónea.

Otro ejemplo de este tipo de categoría es el siguiente:

Término:	**INFERIR**
Diccionario	Manuales Universitarios
Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa.	**ME.-** El objetivo de la estadística es hacer inferencias (predicciones, decisiones) acerca de una población. **MO.-**La inferencia estadística proporciona métodos que permiten sacar conclusiones de una población a partir de los datos de una muestra.

En los textos no se da una definición explícita del término.

Inferir es otro término de uso extendido en el contexto cotidiano. Pero, observamos que el Diccionario hace una equivalencia entre inferir y deducir. En matemáticas son términos opuestos y con significados distintos. Por tanto, observamos que hay diferencia entre el significado del término en el contexto cotidiano y en el contexto matemático, lo que puede llevar a generar obstáculos en el aprendizaje.

Por otro lado, creemos que es algo muy relevante que ninguno de los libros de texto más utilizados realice una descripción o introducción al concepto de inferir, teniendo en cuenta que es un concepto central y que además es, obviamente, el objetivo fundamental de la Inferencia Estadística.

Término:	**SIGNIFICATIVO**
Diccionario	Manuales Universitarios
a. Que da a entender o conocer con precisión algo. b. Que tiene importancia por representar o significar algo.	**MO.-** "Significativo" en estadística no quiere decir "importante". Quiere decir que "es muy poco probable que ocurra sólo por azar".
TEXTOS	
No lo define ninguna de los libros de texto	

Este término se utiliza mucho en estadística y tiene una definición diferente según el contexto de trabajo. Pues, mientras para el contexto cotidiano se trata de algo importante, en el contexto matemático se halla ligado a la probabilidad y tiene un significado diferente, es poco probable que ocurra y por tanto, si algo es significativo no suele ocurrir sólo por azar.

En este sentido tendríamos que hablar del *nivel de significación*, como un término ligado al término significativo. Pues el nivel de significación consiste en cuantificar y decidir cuándo consideramos que un resultado estadístico es significativo y por tanto no se ha producido por azar. Esa cuantificación es la que nos va a permitir decidir, posteriormente, que los resultados del muestreo realizado se escapan a los límites previstos para el azar y que son producto de otras circunstancias, por lo que podemos desechar la hipótesis nula a favor de la alternativa. Y de ahí viene el término nivel de significación.

Ni los manuales universitarios ni los libros de texto profundizan en el significado de estos términos y los clarifican para que el estudiante pueda comprender este nuevo significado del término dentro del contexto matemático.

Categoría 3: Significado propio en el contexto matemático

Como es de esperar, esta es la categoría en la que más términos clasificamos. Entre otros aparecen:

<table>
<tr><td>Término:</td><td>ESTADÍSTICO</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>1. Perteneciente o relativo a la estadística.
2. Persona que profesa la estadística.</td><td>ME. Valor calculado a partir de los datos de una muestra.
MO. Un estadístico es un número que se puede calcular a partir de los datos de la muestra sin utilizar ningún parámetro desconocido. En la práctica, solemos utilizar un estadístico para estimar el parámetro desconocido.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- No lo define.
T2.- “un valor numérico que describe una característica de la muestra”.
T3.- “[valores o medidas] que caracterizan a una muestra”.
T4.- No lo define.</td></tr>
</table>

En el diccionario no encontramos ninguna definición de este término, tal y como se trabaja en estadística. Es por ello que este término lo situamos como un término específico del contexto matemático.

Es significativo que, no todos los libros de texto lo definan, y, aunque lo hagan, no lo utilizan posteriormente y hablan de parámetros poblacionales en vez de estadísticos, siendo un concepto tan importante, pues es el valor a partir del cual realizamos la inferencia estadística.

Término:	**HIPÓTESIS ALTERNATIVA**
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** También denominada Hipótesis de Investigación. Se trata de la hipótesis que el científico desea "probar" (es decir, apoyar o demostrar). Para lograr esto, el científico somete a prueba a la opuesta de la hipótesis de investigación (la hipótesis nula) **MO.-** La afirmación en relación con la población sobre la cual queremos hallar evidencia a favor es la **hipótesis alternativa, Ha.**
TEXTOS	
T1.- La hipótesis contraria se designa por H_1 y se llama **hipótesis alternativa.** **T2.-** Cualquier otra hipótesis que difiera de la formulada y que nos sitúe frente a Ho, de forma que si se rechaza Ho se acepta H_1, y si se acepta Ho se rechaza H_1. **T3.-** La complementaria de la hipótesis nula es la **hipótesis alternativa H_1**, debiendo ser las dos hipótesis mutuamente excluyentes y complementarias, de modo que el verdadero valor del parámetro esté incluido en la hipótesis nula o en la hipótesis alternativa. **T4.-** Es cualquier otra hipótesis que nos sitúe frente a Ho y que aceptaremos si, como consecuencia del contraste, rechazamos Ho.	

Tenemos que destacar un hecho fundamental que se recoge en los manuales universitarios y no así en los libros de texto: la hipótesis alternativa es la hipótesis que tratamos de probar que es cierta. Es la hipótesis que nos ha hecho sospechar que las cosas no son como pensábamos y por tanto, es la que justifica que nos planteemos el contraste de hipótesis. Esto no se recoge en los libros de texto, sino que se da como única característica apreciable que sea complementaria a la hipótesis nula.

CONCLUSIONES

A lo largo del trabajo hemos seleccionado los términos específicos relacionados con la Inferencia Estadística y los hemos clasificado según tres categorías atendiendo a su significado en dos tipos de contexto (cotidiano y matemático), y según presente su significado en cada contexto.

La primera categoría son los *términos con el mismo significado en ambos contextos,* y que por tanto no deberían presentar dificultad a los estudiantes, por aparecer de manera habitual en el lenguaje cotidiano. En este caso, la mayoría de los textos analizados han dado la definición correcta de los términos. Aunque hay algunas que en ocasiones añaden términos en la definición modificando sensiblemente su significado.

La segunda categoría son los *términos con distinto significado en ambos contextos,* que aparecen tanto en un contexto cotidiano como en el contexto matemático, pero, en este último contexto modifican su significado, y en ocasiones pasa desapercibido para estudiantes y profesores. Este hecho puede provocar que el estudiante aprenda este concepto matemático con errores. Apreciamos que la mayoría de textos analizados utilizan las definiciones dadas en el contexto cotidiano, en vez de usar la definición del contexto matemático. Esto es algo que entendemos grave, puesto que el libro de texto, como herramienta de trabajo en el aula tiene que ayudar a salvar los posibles obstáculos que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se produzcan y presentar al estudiante los conceptos matemáticos correctos.

La tercera categoría son los *términos propios del contexto matemático* que por tanto el estudiante desconoce y deben ser introducidos por primera vez en el libro de texto. Encontramos que muchos de los textos no los definen, ya sea porque entienden que los conocen los estudiantes o por creer que de esta forma puedan simplificar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En otros casos, hemos observado que algunos textos introducen términos propios de la Inferencia Estadística que luego no vuelven a utilizar, o que utilizan el concepto con otro término. Esto, entendemos que puede provocar confusión o al menos nos indica que el libro de texto es inconsistente, por no continuar utilizando aquellos términos que define.

Hemos constatado que existen libros de texto que no hacen un esfuerzo en dar la definición de los términos que les corresponde en el contexto matemático. En otras ocasiones, el libro de texto adorna la definición, o simplemente da una definición errónea. Estas diferencias en las definiciones no son fácilmente localizables, y los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para identificar el error. Además, el profesorado admite que utiliza el libro de texto como instrumento de formación en estos conceptos relativos a la Inferencia Estadística, con lo que la única definición que conoce de los términos es la que aparece en estos libros de texto. Esto hace que el docente no tenga criterio para decidir qué términos están bien definidos y cuáles no, dejando toda la responsabilidad sobre los términos relativos a la Inferencia Estadística a los libros de texto. Con este estudio también hemos podido constatar que, efectivamente, el lenguaje que se utiliza en este nivel educativo está compuesto, en gran medida, por términos específicos matemáticos. Debemos ser conscientes de que estos estudiantes se están preparando para comenzar el estudio de una matemática superior, por lo que los conceptos, y por tanto, los términos son fundamentales y deben estar bien definidos. Particularmente, el tema de Contraste de Hipótesis necesita muchos términos propios del lenguaje matemático para poder construir el Contraste. Son muchos conceptos nuevos que el estudiante debe comprender correctamente para así entender el razonamiento y el procedimiento necesario para resolver correctamente un Contraste de Hipótesis.

En conclusión, en el análisis de los libros de textos, sobre aquellos términos relativos a la Inferencia Estadística, hemos encontrado que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos, y que en ocasiones, la definición que de estos términos aparece en los libros de texto no se corresponde con la propia del contexto matemático, sino más bien del contexto cotidiano. Y por otro lado, el libro de texto no es sólo un instrumento de apoyo al estudiante sino que además es un recurso no sólo didáctico para el docente. Muchos de los docentes aprenden los contenidos en los libros de texto.

REFERENCIAS

R.A.E (2001): *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Real Academia Española.

García-Alonso, I. & García-Cruz, J.A. (2003): Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P.A.U. *Actas de las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, 733-738.

Kahnemann, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982): *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.

Mendenhall, W. (1982): *Introducción a la probabilidad y la estadística*. Wadsworth Int.

Moore, D. (2005): *Estadística aplicada básica.* Barcelona: Antoni Bosch Editor.

Moreno, A. J. & Vallecillos, A. (2002): Exploración heurística y concepciones iniciales sobre el razonamiento inferencial en estudiantes de secundaria. *Educación Matemática.* 14(1), 62-84.

N.C.T.M. (2000): *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Pepin, B; B. Grevholm & Straesser. (2006). DG07: The mathematics textbook- A Critical Artefact? In Novotná et al. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Charles University in Prague, Faculty of Education, Vol 1, p. 193.

Shuard, H. & Rothery, A (Eds) (1984): *Children reading mathematics.* London: Murray.

Vallecillos, A. & Batanero, C. (1997): Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(1), 29-48.

Vallecillos, A. (1999): Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. *Proceedings of the 52nd Session of the International Statistical Institute.* Vol. 2 Tome LVIII, 201-204. The Netherlands: International Statistical Institute.

Libros de texto de Bachillerato analizados

Colera, J., Oliveira, M.J. & García, R. (2001). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Editorial Anaya.

Nortes, A., Jiménez, P., Lozano, F., Miñano, A. & Ródenas, J. (2003). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: Editorial Santillana.

Paz Fernández, J., Cámara Meseguer, M. T. & Monteagudo Martínez, M. F. (1998). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Editorial Edelvives.

Vizmanos, J.R., Anzola, M. (2003). *Algoritmo: matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 2*. Editorial SM.

UN INDICADOR DE LA COMPRENSIÓN DEL ESQUEMA DERIVADA: EL USO DE LAS RELACIONES LÓGICAS

Gloria Sánchez-Matamoros
IES Andrés Benítez, Jerez de la Frontera. Cádiz

Mercedes García
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Sevilla

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
Universidad de Alicante

RESUMEN

Desde distintos planteamientos las investigaciones han proporcionado información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes. Sin embargo, falta más información sistemática sobre indicadores que ayuden a describir el desarrollo de la comprensión de dicho concepto. En este trabajo, desde la teoría piagetiana del desarrollo de un esquema a través de los niveles intra, inter, trans, caracterizamos una evidencia empírica de cómo el uso que se hace de las "relaciones lógicas" entre diferentes elementos matemáticos del concepto derivada por parte de los estudiantes cuando resuelven un problema, aporta información para explicar el fenómeno de paso de un nivel de desarrollo del esquema derivada al siguiente.

ABSTRACT

The researches have provided us information about the characteristics of the students' understanding of derivative concept. Nevertheless, there is not enough systematic information about indicators that help us to describe its development. The perspective provided by the work of Piaget & Garcia related to the development of a scheme through several levels (intra, inter and trans), we provide empirical evidence of the students' use of the logical relationships among different mathematical elements of the derivative concept when they solve a problem as an indicator of the development of understanding. This use allows us to go deep about the stages in the development of derivative scheme.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García y Salvador Llinares (2007). UN INDICADOR DE LA COMPRENSIÓN DEL ESQUEMA DERIVADA: EL USO DE LAS RELACIONES LÓGICAS, pp. 229-238.

INTRODUCCIÓN

El análisis de la comprensión del concepto de derivada ha sido abordado por diferentes investigadores desde distintos planteamientos (Asiala et al., 1997; Aspinwall et al., 1997; Azcarate, 1990; Badillo, 2003; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Orton, 1983; Sánchez-Matamoros, 2004; Zandieh, 2000). Las investigaciones muestran la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas por los estudiantes y los significados formales presentados por los libros de texto (Ferini-Mundy y Graham, 1994); la influencia de los contextos (Azcárate (1990); la influencia de los modos de representación gráfico y analítico en la construcción de los significados por parte de los estudiantes (Ferrini-Mundy y Graham, 1994) y la importancia de la relación entre la noción de derivada en un punto (f '(a)) y la función derivada (f '(x)) (Badillo, 2003). Además, se han identificado dificultades referidas a la comprensión de la diferenciación y a la gráfica asociada al rango de cambio (Orton, 1983).

Las dificultades de los estudiantes en relacionar el modo gráfico y el modo analítico también se ponen de manifiesto cuando, en contextos eminentemente gráficos, los estudiantes solicitan la expresión analítica de la función para resolver determinadas cuestiones (Asiala et al., 1997). En este contexto, la enseñanza apoyada en las traslaciones entre distintos modos de representación parece que puede ayudar a la superación de estas dificultades (Font, 1999). Finalmente, el comportamiento de los estudiantes ante aspectos característicos de las funciones, como la existencia de puntos cúspides, tangentes verticales, cambios en las condiciones de continuidad, características de la comprensión de la segunda derivada pueden ser consideradas indicadores de la comprensión de los estudiantes (Baker et al., 2000).

Estas investigaciones nos han proporcionado información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes, y han empezado a proporcionar indicadores de cómo se desarrolla dicha comprensión. Sin embargo, falta más información sistemática sobre indicadores que ayuden a describir el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada.

MARCO TEÓRICO

Una manera de caracterizar la construcción de la comprensión de un concepto matemático es a través de la metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a partir de un proceso que generalmente es realizado paso a paso (Sfard, 1992; Tall et al., 2000). En particular, la aproximación al desarrollo de un esquema propuesto por Piaget y Garcia (1983, 1989) y la particularización a través de la teoría APOS (Dubinsky, 1991) permite abordar la cuestión de caracterizar la comprensión del concepto de derivada. Desde esta perspectiva un esquema puede considerarse

"la estructura o la organización de acciones, tales como se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas" (Piaget y Inherler, 1978, pp. 20).

Un esquema se desarrolla pasando por tres niveles: INTRA – INTER – TRANS, que se suceden según un orden fijo mediante un mecanismo denominado "abstracción reflexiva" (Piaget & García (1983/1989 pp. 10). Desde esta perspectiva Dubinsky (1991) señala que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a situaciones - problemas percibidas a través de la (re-)construcción de (nuevos) esquemas con los cuales tratar con esas situaciones y describe la noción de esquema como la totalidad del conocimiento que está conectado (consciente o inconscientemente) con un tópico matemático particular (Asiala

et al 1996). Baker et al. (2000) señalan que la teoría del desarrollo de un esquema puede explicar por qué los estudiantes tienen dificultades con diferentes partes de un tema, y pueden tener incluso problemas diferentes con la misma situación en distintos casos. En su estudio definen un "esquema desarrollado" como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos. Una persona demuestra la coherencia del esquema al discernir cuando la noción es aplicable o no.

Globalmente consideradas, las caracterizaciones del desarrollo de un esquema realizadas a través de los niveles Intra, Inter, Trans, se apoyan en definir el desarrollo mediante el tipo de relaciones – "coordinación de operaciones" en términos piagetianos – que los estudiantes son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto cuando resuelven un problema (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000 Sánchez-Matamoros et al., 2006). Desde este punto de vista queda por resolver cómo podemos ser capaces de dar una respuesta operativa a la cuestión de caracterizar el paso de un nivel a otro. Lo que si sabemos a partir de las investigaciones previas sobre el desarrollo de los esquemas es que un indicador de dicho desarrollo es el "tipo de relaciones" que los estudiantes son capaces de establecer entre los "elementos matemáticos" del concepto, comprendidos de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto) cuando resuelven problemas. El objetivo de la investigación realizada fue caracterizar el uso que los estudiantes hacen de las relaciones lógicas entre diferentes elementos matemáticos del concepto cuando resuelven un problema considerado como un indicador del paso de un nivel de desarrollo al siguiente.

METODOLOGÍA

Participantes

Los participantes fueron 150 estudiantes. 50 de 1º de Bachillerato (Ciencias de la Naturaleza), 50 de 2º de Bachillerato (Tecnológico) y 50 de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas. Estos estudiantes no tenían ninguna característica especial y participaron en la investigación de manera voluntaria.

Los alumnos de 1º curso de Bachillerato se les había introducido por primera vez el concepto de derivada. Los estudiantes de 2º curso de Bachillerato era el segundo año que tenían un contacto con la idea de derivada y empezaban a trabajar con la idea de segunda derivada (f '') y las interpretaciones vinculando expresiones analíticas y gráficas. Los estudiantes de primer año de la Licenciatura de Matemáticas habían cursado la asignatura "Elementos de Análisis Matemáticos" por lo que podíamos considerarlos en un nivel avanzado de conocimiento del concepto de derivada de función real de variable real.

Instrumentos de recogida de datos

Se utilizaron dos tipos de instrumentos para recoger los datos: tres cuestionarios diseñados específicamente para cada uno de los grupos de estudiantes, y un guión de entrevista diseñada teniendo en cuenta el cuestionario, y que se realizaba apoyándonos en las respuestas producidas por los estudiantes al cuestionario. La entrevista tenía como objetivo obtener una información más detallada de las resoluciones a los problemas realizadas. El diseño de los instrumentos siguió dos etapas:

Etapa 1: análisis de la noción de Derivada desde la perspectiva de los elementos matemáticos y relaciones lógicas (transformaciones y coordinaciones en el sentido piagetiano) que pueden darse entre ellos para la resolución de problemas según es presentado, usado y justificado en algunos libros de texto (Editoriales Editex, Oxford, S.M., Anaya, Santillana), y en algunos textos de Análisis Matemático que son referencia en la introducción al Análisis en el primer año en la Licenciatura de Matemáticas (Spivak, Apóstol, Demidovich).

El segundo aspecto considerado en el análisis de la noción de derivada fue la idea de "coordinación entre las operaciones", entendidas como relaciones lógicas establecidas entre los elementos matemáticos que se puedan poner de manifiesto en la resolución de los problemas. Un estudiante cuando tiene que resolver un problema puede establecer relaciones lógicas entre los elementos para inferir nueva información. Algunas de las relaciones que se ponen de manifiesto durante la resolución de un problema son

- **Conjunción lógica ($A \wedge B$) ("y lógica")**
- **Contrarrecíproco $[(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$**
- **Equivalencia lógica $[(A \leftrightarrow B), A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A]$**

Por ejemplo, la conjunción lógica es la relación que se produce cuando el estudiante relaciona a través de la **"y lógica"** dos elementos matemáticos para hacer inferencias.

Sea f continua en (a ,b) y derivable en (a ,c) y (c, b)
A) si f ''>0 en (a, c) y (c, b)→ f convexa en (a, c) y (c, b)
B) f es creciente en (a, c) y f es decreciente en (c, a)

Considerando conjuntamente esta información (A y B) a través de la **"y lógica"**, se infiere que x = c es punto anguloso. La información sobre el crecimiento de f en el intervalo (a, c) y el decrecimiento de f en (c, b) puede venir de haber considerado previamente

f '>0 en (a, c) → f es creciente en (a, c), y
f '<0 en (c, b) → f es decreciente en (c, b).

Sin embargo, aquí lo que se subraya es que cuando se tiene información de un determinado tipo (como en este caso: *f convexa en (a, c) y (c,b), y f es creciente en (a, c) y f es decreciente en (c, a)*) se vinculan los significados, y permite tomar una decisión sobre la naturaleza del punto x =c (en este caso x =c es punto anguloso).

Para identificar las relaciones lógicas que hipotéticamente podrían establecerse entre los elementos matemáticos en la resolución de los problemas, se resolvieron un conjunto de problemas de diversas maneras, y analizamos las diferentes resoluciones considerando los elementos matemáticos usados y las relaciones establecidas. Con este procedimiento adaptamos algunos problemas y seleccionamos otros para producir un grupo de problemas desde el cual diseñar los cuestionarios.

Etapa 2: diseño y selección de los problemas.

Diseñamos y/o adaptamos 12 problemas considerando las relaciones lógicas que se podían establecer y los aspectos de los elementos matemáticos (analíticos y gráficos, puntuales (x=a) y globales (en un intervalo (a, b))) necesarios en su resolución. En la selección de los problemas para los cuestionarios, la idea fue que la "demanda del problema propuesto" al resolutor en cada curso fuera tal que pudiéramos caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de derivada y obtener información que pudiera explicar los mecanismos de cambio de nivel. Por ello tuvimos en cuenta el currí-

culo de los diferentes cursos (1º, 2º Bachillerato y 1º Licenciatura de Matemáticas) y los resultados de las investigaciones previas sobre la comprensión del concepto de derivada. Con los problemas inicialmente elegidos se realizaron algunas entrevistas piloto con estudiantes de Bachillerato, lo que permitió modificar algunas expresiones del texto escrito y del guión de entrevista.

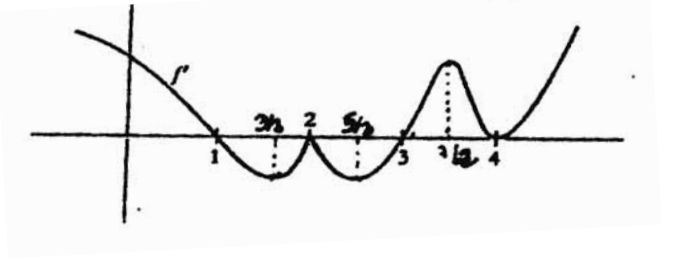
Procedimiento y análisis

Los cuestionarios fueron contestados por los estudiantes en su horario de clase de Matemáticas. En días posteriores a la realización de los cuestionarios se realizaron las entrevistas centradas en la forma en la que se habían resuelto los problemas. Previamente a la realización de las entrevistas, se examinaron las respuestas dadas por los estudiantes, para descartar los cuestionarios entregados en blanco, y para adecuar las preguntas de las entrevistas a las respuestas producidas, con el objetivo de intentar en lo posible que los estudiantes explicitaran lo que estaban pensando al resolver los problemas. Una vez realizadas las entrevistas se procedió al análisis de los cuestionarios y las entrevistas de forma conjunta.

El análisis se centraba en identificar los elementos matemáticos y las relaciones que los estudiantes establecían durante la resolución de los problemas. Los resultados que se presentan en esta comunicación proceden de la información reunida con el análisis conjunto de las entrevistas y los cuestionarios correspondientes.

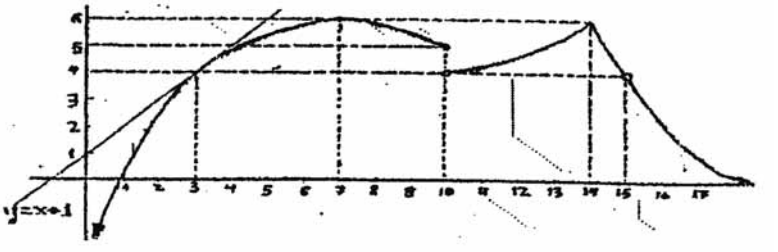
TAREA 1

La figura muestra la gráfica de la derivada de f ', esboza las posibles gráficas de f.



TAREA 3

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas



a) Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.
b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

Cuadro1: Tareas 1 y 3 del cuestionario de la Licenciatura de Matemáticas.

RESULTADOS

La manera en la que los estudiantes manejaban las diferentes relaciones lógicas que se pueden establecer entre los elementos matemáticos cuando se resuelve un problema se considera un indicador del nivel de comprensión y de la manera en la que los estudiantes podían empezar a realizar una proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, o la manera en la que se podía estar realizando una reorganización y reconstrucción del conocimiento para formar nuevas estructuras. Para caracterizar este tipo de indicador mostraremos el uso que hacen de las relaciones lógicas entre elementos matemáticos dos estudiantes de 1º de Licenciatura de Matemáticas, Sara y Mario, a través de las tareas 1 y 3 (cuadro 1).

En la tarea 1 Sara usa la **"y lógica"** entre elementos matemáticos analíticos puntual y global:

- sea f derivable en (a, b), si f '>0 en (a, b) →f crece en (a, b) y si f '<0 en (a, b)→ f decrece en (a, b)

- f ' (a)=0 →f tiene un máximo, un mínimo o un P.I. en x =a

permitiéndole decidir que en x = 1 había un máximo de f:

Sara: donde la derivada es cero hay máximos o mínimos o puntos de inflexión

E: escribes en x = 1 máximo, x = 2 *punto de Inflexión, x =* 3 *mínimo y x =* 4 *punto de inflexión,* ¿por *qué x =* 2 *y x =* 4 *son puntos de inflexión?*

Sara: por ser f '= 0 *en esos puntos, la recta tangente en ese punto es paralela al eje de las x*

(Sara usa un elemento matemático gráfico puntual correspondiente a la interpretación geométrica de la derivada)

E: ¿cómo has diferenciado los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión?, *porque en todos es f '=0*

Sara: si, eso es que no me acuerdo, viendo el signo de la derivada

E: Por ejemplo en x = 1

Sara: desde menos infinito hasta 1, *la función es creciente y a partir de* 1 *es decreciente, hay un máximo*

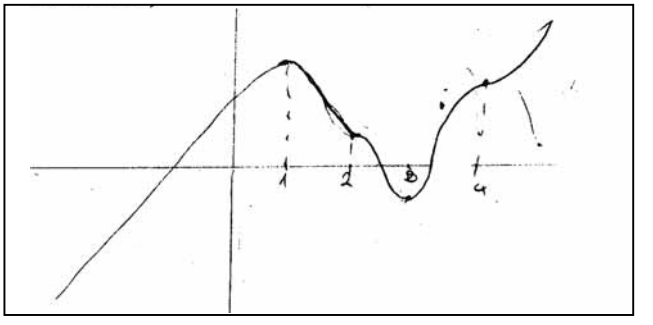
E: ¿ en x = 2 *P.I?*

Sara: porque f '= 0

E: en los puntos x = 1.5, *x =* 2.5, *x =* 3.5, *¿qué sucede en f?*

Sara: en la función habría un cambio de concavidad, se ve por f '', estudiando el signo

Sara esboza un gráfico correcto de f:



(Sara, Tarea 1)

En la tarea 1 Sara ha usado de forma correcta el elemento matemático analítico global:

- si f '>0 en (a, b) → f crece en (a, b), y si f '<0 en (a, b) → f decrece en (a, b)

Sin embargo, en la resolución del apartado B) de la tarea 3 podía haber hecho uso del elemento matemático global:

- sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) → f '>0 en (a, b), y si f decrece en (a, b) → f '<0 en (a, b)

implicación contraria a la del elemento utilizado en la tarea 1. Haber hecho uso de él sería una evidencia del uso de la equivalencia lógica. No tenemos evidencia de por qué no lo hizo ya que en la entrevista tan sólo comentó:

E: ¿y el apartado B), la gráfica de la derivada?

Sara: me puse con otra cosa y no...

E: el hecho de que en el enunciado se comente que la función está formada por ramas de parábolas, ¿ te dice algo de f '?

Sara: serían rectas la derivada, o algo así

E: ¿serías capaz de esbozarla?

Sara: no sé, no me lo he planteado.

(Sara, Tarea 3)

Esto nos llevó a tener en cuenta que el uso de algunas relaciones lógicas entre los elementos matemáticos presentan más dificultades que otra, pues mientras que Sara había utilizado la relación **"y lógica"** entre elementos matemáticos en varias ocasiones, sin embargo no había sucedido lo mismo con la relación **equivalencia lógica** entre otros elementos matemáticos cuando era pertinente su uso y hubiera ayudado en la resolución del problema. El uso de estas relaciones lógicas en esta situación hubiera mostrado una proyección del conocimiento que hubiera indicado una reconstrucción del conocimiento en un plano superior.

Veamos como a Mario no le sucedía lo mismo que a Sara. Así, en la Tarea 1, utiliza la idea de la **derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter local y global**, y la utiliza reconstruyendo su significado, pues indica que **el signo de f ' proporciona información sobre el crecimiento de f:**

"*si f '>0, f crece porque f 'es la pendiente de la recta tangente a f, entonces si la pendiente es positiva, f es creciente*".

Además, el cambio de creciente a decreciente le permite identificar los puntos x=1 (x=3) como máximo (mínimo) relativos, haciendo uso de la relación **"y lógica"** entre los mismos elementos que habíamos visto anteriormente con Sara:

- sea f derivable en (a, b), si f '>0 en (a, b) →f crece en (a, b) y si f '<0 en (a, b)→ f decrece en (a, b)

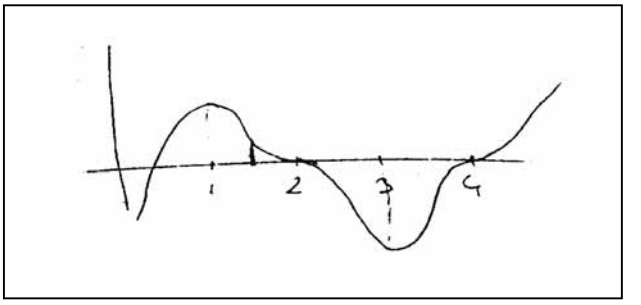
- f ' (a)=0 →f tiene un máximo, un mínimo o un P.I. en x =a

Cuando se le pregunta a Mario por el comportamiento, en x =1.5, x =2.5 y x =3.5 contesta: *"dependería de la inclinación de la tangente, de la pendiente de la recta tangente, que es la derivada,... cambia la inclinación con más o menos velocidad"*.

Y en x =2 y x=4, comenta:

"en x=2, f '=0,..., entonces ha cambiado la variación de la tangente. En x =4 lo mismo".

Por la forma de resolver la tarea podemos inferir que Mario usa la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a f con carácter global y usa la relación **"y lógica"** entre los elementos matemáticos necesarios para la resolución de la tarea, lo que le permite esbozar un gráfico correcto de f:



(Mario, Tarea 1)

En la Tarea 3, Mario usa el elemento matemático: si **f derivable en x =a → f continua en x=a**, en la forma de la relación lógica de **contrarrecíproco** (si f no es continua en x=a → f no es derivable en x =a) para expresar que como f no es continua en x =10, entonces no existe la derivada en x =10.

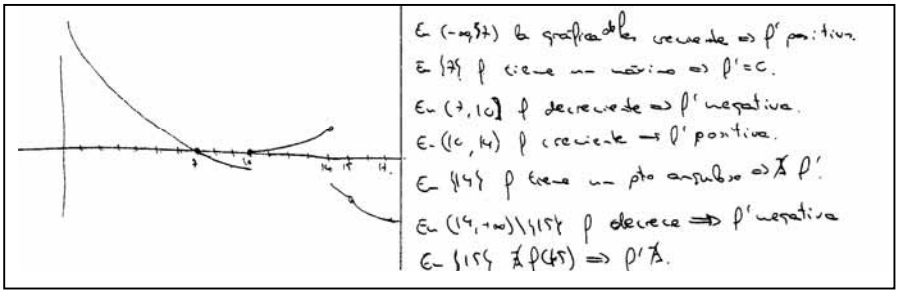
Además, en la segunda parte de la tarea 3 Mario esboza un gráfico de la primera derivada, f ', correcto, excepto en su forma, pero al preguntarle en la entrevista comenta que f ' estaría formado por trozos de rectas. Para el esbozo de la gráfica establece las siguientes relaciones

sea f derivable en (a, b), si f crece en (a, b) → f '>0 en (a,b), y si f decrece en (a, b) → f '<0 en (a, b)

(**implicación contraria** a la utilizada en la tarea 1 del mismo elemento). Este uso de las relaciones directas y contrarrecíprocas muestra aspectos de la manera en la que Mario realiza una proyección del conocimiento existente en un plano superior. Es decir, la naturaleza de las relaciones lógicas establecidas entre elementos matemáticos durante la resolución del problema es un indicador de una reorganización y reconstrucción del conocimiento y por tanto del mecanismo de traslación entre diferentes niveles de desarrollo.

No tenemos evidencia de que este hecho que se pone de manifiesto en la resolución de la tarea por parte de Mario, haciendo uso de la doble implicación (equivalencia lógica) en las tareas 1 y 3, se ponga de manifiesto en la resolución de las mismas tareas por Sara. Ya comentamos anteriormente que no tenemos evidencia de por qué Sara no lo hizo.

La información obtenida por la utilización de varios elementos matemáticos en diversos puntos en la primera parte de la tarea 3 (como puede observarse en la justificación de la respuesta que aparece en la tarea 3) ha hecho que Mario realice un esbozo correcto de f '.



(Mario, segunda parte de la Tarea 3)

Del análisis realizado de la manera en la que Sara y Mario han resuelto las dos tareas podemos inferir que existen manifestaciones de diferentes maneras de comprender el esquema de derivada. Mientras que Sara sólo es capaz de hacer uso de la relación de **"y lógica"** entre los elementos matemáticos que conoce (lo que la imposibilita para ser capaz de resolver la tarea 3), Mario hace uso de una mayor variedad de relaciones lógicas (**"y lógica"**, contrarrecíproco y equivalencia lógica) entre los elementos matemáticos que conoce usando lo que se conoce de manera diferente.

CONCLUSIÓN

Los resultados obtenidos permiten pensar que la relación **equivalencia lógica** entre elementos matemáticos presenta dificultades en algunos niveles del desarrollo del esquema de derivada por lo que el uso de las relaciones lógicas indica posibles mecanismos de traslación de un nivel al siguiente. El análisis centrado en identificar la manera en la que los estudiantes relacionaban la información que poseían cuando intentaban resolver los problemas nos ha proporcionado dos tipos de información. Por una parte nos permitió describir la comprensión del concepto de derivada que tenía cada estudiante. Por otra parte, proporcionó información sobre la forma en la que parecía que se desarrollaba la comprensión del esquema de derivada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala M., Brown A., Devries D.J., Dubinsky E., Mathews D. & Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II CBMS Issues in Mathematics Education,* Vol. 6 pp. 1- 32.

Asiala M., Cottrill J., Dubinsky E. & Schwingendorf K. (1997). The Development of Students` Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4) pp. 399-431.

Aspinwall L., Shaw K.L. & Presmeg N.C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 301-317.

Azcárate C. (1990). La velocidad: introducción al concepto de derivada. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas de Colombia. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker B., Cooley L. & Trigueros M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), pp. 557-578.

Clark J.M., Cordero F., Cottrill J., Czarnocha B., DeVries D.J., St. John D., Tolias G. & Vidakovic D. (1997). Constructing a Schema : The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), pp. 345-364.

Dubinsky E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. L.P. Steffe, (Ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences,* New York: Springer – Verlag, pp. 160-202.

Font V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a las derivadas*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Ferrini-Mundy J. & Graham K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates, and integrals. In Dubinsky y Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate Mathematics Learning* , pp. 31-45.

Meel D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la compresnsión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (3), pp. 221-271.

Orton A. (1983). Students´ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics* Vol 14, pp. 235-250.

Piaget J. & García R. (1983, 1989). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia (Madrid): Siglo veintiuno editores, s.a.

Piaget J., e Inhelder B. (1978). *Psicología del niño*. Madrid, 8ª edición: Ediciones Morata.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto).* Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Sánchez–Matamoros García G., García Blanco M. & Llinares Ciscar S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), pp. 85-98.

Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Washington, DC: MAA, Notes 25.

Tall D., Thomas M., Davis G., Gray E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the Encapsulation of a Process?. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.

Zandieth M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivate. In Dubinsky E., Shoenfeld A. H., Kaput J. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 8 pp. 103-127.

PRODUCCIÓN DE SENTIDOS PARA LOS OBJETOS ALGEBRAICOS DE NÚMERO, VARIABLE Y FUNCIÓN AL RESOLVER PROBLEMAS DE VARIACIÓN CONTINUA. EVIDENCIAS EMPÍRICAS SOBRE NUEVOS SENTIDOS DE USO DEL NÚMERO NEGATIVO

Guillermo Rubio, Rafael del Valle y Alonso del Castillo
Universidad Nacional Autónoma de México. CCH Sur

Aurora Gallardo
CINVESTAV. México

RESUMEN

Este artículo trata sobre los distintos sentidos de uso que dan estudiantes de bachillerato a objetos algebraicos tales como número, variable y función. Se observó que el empleo de cantidades numéricas propicia el análisis de problemas de variación continua, provocando el desprendimiento del uso de incógnitas y el tránsito hacia la construcción del significado de variable. Además, la entrevista clínica mostró que al resolverse este tipo de problemas se produjeron sentidos de uso para los números negativos, uno de ellos hasta ahora no reportado.

ABSTRACT

This article deals with the different senses of use that high school students give to algebraic objects, such as number, variable and function. We observed that usage of numerical numbers fosters an ongoing analysis of variation problems, enabling subjects to detach themselves from the use of unknowns and to be on their way toward building the meaning of variable. Moreover during the clinical interviews, we found that upon solving this type of problem, senses of use were produced for negative numbers, one of them until now been unreported.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Guillermo Rubio, Rafael del Valle, Alonso del Castillo y Aurora Gallardo (2007). PRODUCCIÓN DE SENTIDOS PARA LOS OBJETOS ALGEBRAICOS DE NÚMERO, VARIABLE Y FUNCIÓN AL RESOLVER PROBLEMAS DE VARIACIÓN CONTINUA. EVIDENCIAS EMPÍRICAS SOBRE NUEVOS SENTIDOS DE USO DEL NÚMERO NEGATIVO, pp. 239-247.

La investigación que se reporta es parte de un proyecto de gran aliento sobre la producción de sentidos de uso de los objetos algebraicos de número, incógnita, variable, ecuación y función, con alumnos de bachillerato, al enfrentar problemas verbales que se modelan mediante una ecuación o una función, con el objeto de coadyuvar en el desarrollo de la competencia en el uso de algunos estratos del sistema algebraico de signos. Los estudiantes participantes en el montaje experimental recibieron una enseñanza previa en el aula, durante 14 semanas, sobre la resolución de problemas que se representan con ecuaciones, a través de una implementación didáctica que emplea: a) un acercamiento numérico que propicia el progreso en la capacidad analítica y en el pensamiento algebraico (ver p.e. Rubio, 2002; Rubio & Del Valle, 2004) y, b) un método para resolver familias de ecuaciones.

EL ESTUDIO

La investigación tomó como hilo conductor el marco teórico- metodológico de los modelos teóricos locales [ver p.e. Filloy y cols. 1999]. El montaje experimental consistió de un estudio clínico de casos con la finalidad de observar la producción de sentidos de uso para los objetos algebraicos de número, variable y función al resolver problemas de variación continua. Se hicieron entrevistas videograbadas a cuatro estudiantes, seleccionados y estratificados mediante dos cuestionarios sobre ecuaciones y funciones lineales. Para el análisis e interpretación de las producciones, verbales o escritas, que hacen los alumnos a través de los diálogos durante las entrevistas, se utilizan los trabajos de Filloy y cols., 1999, Puig, 1997, 2006; Gallardo, 2002 y Rubio, Del Valle, Del Castillo, 2006, adoptándose la jerga semiótica de "producción de sentidos de uso" para hablar de las evidencias que los estudiantes generan al enfrentar los problemas que se les plantean en una situación de enseñanza, como las que se presentan en las entrevistas.

Del análisis de las entrevistas realizadas por el profesor-investigador, se encontró que los alumnos logran establecer la relación entre dos variables debido a que ellos tienen una noción intuitiva de la *rapidez de cambio* (Blanton-Kaput, 2004 dan cuenta de un pensamiento covariacional en niños muy pequeños), mostrándose que ésta es necesaria para construir el significado de variable y la relación funcional lineal entre variables. Se observó que emplear cantidades numéricas para desencadenar el análisis de los problemas provoca el rompimiento con el uso de incógnitas y ecuaciones, así como el tránsito hacia la construcción del significado de variable y función. También se observó que se logra la construcción del significado de la representación algebraica de una función, en algunos casos, al dotar de sentido a las relaciones numéricas entre las variables, y en otros, después de haber organizado tales relaciones en una tabla.

Además, la comunicación aquí presentada, da cuenta de los sentidos de uso de los negativos que una de las estudiantes produce al enfrentar uno de los problemas de variación continua utilizados en la entrevista, con el objeto de mostrar como se extiende el dominio numérico de los naturales a los enteros. En los segmentos de la entrevista que mostraremos se pueden ver sentidos de uso de los negativos reportados en otros trabajos, así como uno nuevo encontrado durante el análisis de la misma. A continuación se describen brevemente:

1. Sustraendo, donde la noción de número está subordinada a la magnitud (en a-b, a>b). Esta categoría se amplió en este estudio al caso en que a<b.
2. Número relativo, donde la idea de cantidades opuestas en relación a una cualidad surge en el dominio discreto y la idea de simetría aparece en el domino continuo.

3. Número aislado, como el resultado de una operación o como la solución a un problema o ecuación.
4. "Número ordenado", se produce cuando se quiere saber si un número negativo es mayor o menor que cualquier otro número entero.

Varias de estas concepciones como la del número relativo ya han surgido en otros trabajos (Bell, 1982; Bruno y Martinón, 1996; González J.L. 1998) por mencionar sólo algunos. En este Estudio estas concepciones aparecen cohesionadas como sentidos de uso que adquirirán finalmente el significado de número entero si la interpretación del alumno es afortunada, consiguiéndose así la anhelada extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros.

Se reportan ahora los diferentes sentidos de uso de número, variable y función del *"problema de las verduras"* que dice:

"Una bolsa de verduras se saca del congelador de un refrigerador con una temperatura de 18°C bajo cero, y se mete a calentar en un horno de microondas cuyo reloj marca 0 segundos; si el horno provoca que la temperatura de la bolsa de las verduras aumente a un ritmo de 2°C cada segundo hasta llegar a una temperatura de 21° C: a) determina algunos instantes de tiempo en los que la bolsa de verduras esté a una temperatura mayor de 5 ºC bajo cero pero menor que 1ºC bajo cero; b) ¿si cambia el tiempo qué le pasa a la temperatura de la bolsa de verduras?; c) escribe una expresión algebraica que relacione la temperatura de la bolsa con el tiempo".

Lee el problema y escribe –18ºC (emplea un número relativo) para representar la temperatura "bajo cero" e identifica la rapidez con que cambia la temperatura respecto al tiempo (2ºC/seg) anotando:

2
×13
26ºC

E: Acuérdate…tus significados, es la única manera en que te puedo orientar…

Ella no considera el valor inicial, se centra en el incremento que produce la rapidez de cambio de la variable independiente y no en el valor final de la variable dependiente.

A: …es la temperatura final…o sea la temperatura de la bolsa…

E: ¿Segura…?

A: ¡No!…26 menos 18

Resta 18º C a los 26ºC que había obtenido:

2
×13
_26ºC
18
8ºC Temperatura final de la bolsa

Nótese que transforma el sentido de uso de número relativo: –18ºC en sustraendo, al hacer la resta de 26 menos 18.

Una vez que relaciona las variables, trata de responder a lo que se pide en el problema: "*…determina algunos instantes de tiempo en los que la bolsa de verduras esté a una temperatura mayor de 5 ºC bajo cero pero menor que 1ºC bajo cero…"*.

2	2
×10	×5
_20ºC	_10 ºC
18	18
2ºC	–8 ºC ,

Se observa que obtiene un número negativo aislado (–8ºC) resultado de la operación 10–18 = –8. Esta sustracción muestra que ha extendido el sentido de uso de sustraendo para el caso a–b donde a<b.

La alumna lee en voz alta lo que se pide en el problema:

E: ¿Le entiendes?

A: No mucho

E: ¿Qué no entiendes?

A: Que sea mayor que 5º bajo cero y menor que un 1º bajo cero

E: Ve tu dato…¿qué tienes entre tus constantes?

A: Menos 18ºC

E: ¿Cuándo es más frío?...¿cuándo tienes 18ºC bajo cero ó cuando tienes 15ºC bajo cero u 8ºC bajo cero?

A: ¿Cuándo es más frío?

E: ¿O cuando es más caliente…?

A: Cuando tengo 8º ó 15º (Con esta respuesta se ve que la alumna empieza a percatarse de cualidades opuestas, es decir, de números relativos).

E: ¿Porqué no organizas eso en una tabla…y ves que le va pasando a tu bolsa..?

A: ¿Es temperatura y tiempo, no?...las variables…

Escribe la siguiente tabla:

Tiempo	Temperatura
13 seg	8ºC
10 seg	2ºC
5 seg	-8ºC

E: ¿Qué observas en la tabla?

A: Pues va de un tiempo mayor a uno menor

E: ¿Y así va el tiempo, o cómo va?

A: …va de menor a mayor…

E: ¡Eso!

Borra la tabla anterior y escribe de nuevo los valores de tiempo en secuencia creciente:

Tiempo	Temperatura
5 seg	-8ºC
10 seg	2ºC
13seg	8ºC

A: …pero…dice…mayor que 5 grados bajo cero …pero todavía no lo cumple…

E: ¿Qué pasó?

Ella realiza cálculos:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 4 \\ \hline 8^{o}C \\ 18 \\ \hline -10\ ^{o}C \end{array}$$

E: ¿Qué temperatura es más caliente?.

La alumna escribe el último cálculo en la tabla respetando la secuencia creciente del tiempo:

Tiempo	Temperatura
4s	–10ºC
5s	–8ºC
10s	2ºC
13s	8ºC

E: La… (temperatura)…qué te piden está… entre 4 y 5 (segundos)?

A: Es que podría ser entre 5 y 10…

E: ¡Claro!

Efectúa las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 7 \\ \hline 14^{o}C \\ 18 \\ \hline -4^{o}C \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times 8 \\ \hline 16\ ^{o}C \\ 18 \\ \hline -2\ ^{o}C \end{array}$$

Donde ella verifica que en 7 y 8 segundos la temperatura de la bolsa está dentro del rango que da solución al problema.

E: ¿ te ayudó la tabla o no te ayudó la tabla?

A: Sí…

Se puede observar que logró producir un sentido de uso de orden para los enteros negativos, una vez que organiza, en una de las columnas de la tabla, a los valores de la variable independiente “tiempo” en una secuencia ordenada creciente, y en la otra, a los valores de la variable dependiente “temperatura”, algunos de los cuales corresponden a temperaturas bajo cero. Esto implica que da un uso del negativo como *número relativo*.

E: …a ver si tu puedes ponerme ahora una ecuación en dos variables…

Ella escribe la siguiente tabla:

x	**y**
Tiempo	Temperatura
4s	–10ºC
5s	–8ºC
10s	2ºC
13s	8ºC

La alumna fija su atención en la siguiente operación, que es una de las operaciones numéricas realizadas previamente, y asocia las literales que acaba de introducir con sus respectivos valores numéricos:

$$\begin{array}{l} 2 \\ \times 13 \rightarrow x \\ _\ 26^{o}C \rightarrow 2x \\ \quad 18 \\ 2x-18 \rightarrow \quad 8^{o}C \text{ Temperatura de la bolsa} \end{array}$$

Escribe:

$$y=2x-18$$

Se puede observar que la alumna logra dar significado a cada uno de los elementos y operaciones que conforman la ecuación, en donde al número negativo le da un sentido de uso de sustraendo.

Con el propósito de dar evidencias sobre los procesos de generalización vinculados con la variación de los parámetros "m" y "b", de la relación funcional y=mx+b, se le presenta por segunda ocasión el problema de la bolsa de verduras. Ella asigna un valor a la variable "tiempo" de 10seg. y lo multiplica por la rapidez de cambio (2ºC/seg), para obtener el aumento de temperatura correspondiente a dicho tiempo, y al resultado (20ºC) le resta los 18ºC, es decir, identifica al "–18ºC" como el sustraendo de una operación binaria, esto es, no le da aún un sentido de uso como número relativo. Para que pueda producir este último sentido de uso, el entrevistador realiza la siguiente secuencia de enseñanza:

E: ¿será restarle?... ¿qué le pasa a la temperatura de la bolsa de verduras…se está restando?...¿qué temperatura tienes en el instante que pones tu cronómetro?

A: …menos 18º ….18º bajo cero…centígrados…

E: ¿qué va a pasar…cuando…la sacas…del congelador?

A: …¿cuándo la sacas del congelador?...

E: …sí…las verduras están a –18ºC cuando las sacas… ¿qué les va pasando conforme va transcurriendo el tiempo?...

A:…se va calentando…

E: ¿entonces porqué dices que le restas?

A: …porque…yo supuse que se le restaba la cantidad que tenía…

E: ¿porqué?

A: …no sé…

E: Supongamos que no está a…menos 18 grados centígrados…supongamos que está a 3ºCº…¿también le restarías?...

A: ¿ en 3 ó en –3..?

E: … en tres.

A: No…. le sumaría

E: ¿Y porqué a –18 …le restas?

A: No sé…a lo mejor pensé que…como tenía –18…pues se restaba…

E: Pero…¿porqué? …¿no se está calentando?...a ver en –18…está ahorita…se calienta…sube la temperatura…¿cierto, o no…?

A: Sí

E: Si está a 3ºC… se calienta…y sube la temperatura en 20ºC…¿en ese caso le sumarías o le restarías…?

A: …le sumaría…porque el 3 grados ya lo tiene…y con el tiempo toma el 20. Entonces…si…va recorriendo y pasa…. el 20 …y 3 que ya tenía…le sumo…

E: ¿ Hay alguna diferencia…en la operación que ahora harías… con el –18 ºC?

A: …supongo que tendría que hacer lo mismo…¿o sea …sumar,..no?

La alumna escribe:

20 ºC
+ 18 ºC

E: … ¿pero quién está sumando….18ºC…?

A: …no…a menos 18 le estoy sumando 20…

E: …¿y adónde está lo de menos 18?...

Al decir el entrevistador esto, la alumna borra la suma anterior, y escribe:

–18
+20
–2

E: ¿estás segura? ¿–18 + 20 …es –2?

A: …No

Ella escribe entonces 2 en lugar de –2:

–18
+ 20
2ºC

Nótese que logra dar sentido de uso de número relativo al operar con el –18 para obtener la temperatura de la bolsa de verduras (–18+20 = 2ºC). Así ha podido pasar de un uso del signo menos como substraendo que empleaba para obtener la temperatura de la bolsa de verduras (20ºC–18ºC = 2ºC) a un uso en donde opera con el número relativo.

Cuando ella produce este sentido de uso, hace operaciones similares (7.5×2=15ºC y -8ºC + 15ºC = -3º) utilizando otros instantes de tiempo para determinar valores de la temperatura de la bolsa de verduras que cumplan con la condición especificada en el enunciado del problema. Finalmente representa la relación funcional entre la temperatura de la bolsa y el tiempo en una tabla:

Tiempo	Temperatura
0	-18ºC
6	-6ºC
6.5	-5ºC
7	-4ºC
7.5	-3ºC
8	-2ºC
10	2ºC

Se le pide ahora que obtenga la representación algebraica de la relación funcional entre temperatura y tiempo lo que realiza usando como referencia las operaciones numéricas para obtener los valores de temperatura de la tabla, corroborándose, posteriormente, el uso de la función lineal y=mx+b, cuando se le plantean problemas isomorfos. Veamos:

E: ¿podrías ponerme la expresión algebraica que determina…la relación entre temperatura y tiempo?

Anota "x" e "y", arriba de las columnas de la tabla, tiempo y temperatura, y escribe la función:

y= –18+2x

E: ¡muy bien!…ahí el 2 fue constante y el –18 fue el valor que me dijiste que tenía cuando el tiempo es cero…Ahora, supongamos que se calienta más rápido…si por ejemplo, la bolsa de verduras ahora se calienta a 4ºC por segundo,…¿cómo quedaría la expresión?

Escribe: y=4x–18

E: ¡exactamente!...ahora, supongamos una bolsa de verduras…que se mete a un congelador más potente…o sea…que se va a enfriar con una rapidez de 3ºC por segundo….¿cómo representarías eso?

A: …(no responde)

E: …Ahí se está calentando a 2ºC por segundo (E señala a la ecuación y=2x–18)…se está calentando a 4ºC (E señala a la ecuación y=4x–18)…pero ahora se va a enfriar…¿cómo podrías representar eso?

A: …sería… "y" igual a –3… "x" …(escribe y=–3x)

E: ¡Perfecto!...¿qué más? ….

A: …¿entonces se sumaría....no?

E: …¿qué en el instante cero está a –18?

La alumna agrega –18 al –3x que había escrito quedando la ecuación en dos variables:

y = –3x–18

E: ¿Y qué pasaría si se enfría con una mayor rapidez…por ejemplo a 5ºC cada segundo?

Escribe en forma inmediata:

y = –5x–18

E: Quiero que me encuentres una expresión …cuando se calienta a una rapidez de 2ºC cada segundo…pero su temperatura inicial es de 10ºC bajo cero.

La alumna anota sin ningún problema:

y = 2x–10

E: Si tu escribes la ecuación y=mx+b…¿podrías decirme cuánto vale la "m" y cuánto la "b"… en todos los casos particulares que hiciste?

La alumna puede relacionar los parámetros "m" y "b" con los valores numéricos que le corresponden en cada caso, tanto para números negativos ("parámetro negativo") como para los positivos, pudiéndose decir que ha iniciado la construcción del sentido de uso de una literal como parámetro. Estos nuevos sentidos de uso son indicios de que ha logrado una ampliación del dominio numérico de los enteros.

REFLEXIONES FINALES

En el estudio se observó que emplear cantidades numéricas para desencadenar el análisis de problemas verbales de variación continua, provoca el rompimiento con el uso de incógnitas y ecuaciones, así como el tránsito hacia la construcción del significado de variable y función.

La construcción del significado de la representación algebraica de una función se logró establecer, en algunos casos, al dotar de sentido a las relaciones numéricas entre las variables, y en otros, después de haber organizado tales relaciones en una tabla.

El hecho de plantear problemas de variación continua cuya solución requiere que se ob-

tenga un conjunto de valores, propicia la producción de sentidos de uso para la variable y la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros. A través del proceso de resolución del problema se consolidaron los sentidos de uso del negativo como número: a) aislado, b) relativo, y c) ordenado. Además, se amplía el sentido de uso del negativo como sustraendo en a-b con a>b, al caso en que a<b y se observó el tránsito del negativo como sustraendo a número relativo.

Una vez que el alumno produce sentidos de uso para una literal como variable, está en condiciones de poder dar significado a los parámetros "m" y "b" de la función lineal expresada como y=mx+b. Aparece por primera vez en este estudio un nuevo sentido de uso para la rapidez de cambio m<0 y para las condiciones iniciales del problema b<0, esto es, el "parámetro negativo".

REFERENCIAS

Bell, (1982). Looking at children and directed numbers, Mathematics Teaching, 100, 66-72.

Bruno, A. y Martiñon, A. (1996). Números negativos: sumar = restar. Uno, 10, 123-133.

Blanton, M. & Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students'capacity for Functional Thinking. *Proceedings of the PME 28th Conference*. V-2 pp.135-142). Bergen, Norway

Filloy, E. y cols. (1999). "Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa". Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. Serie Investigación en Matemática Educativa. Edit. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. México.

González Marí, J.L. (1998). Números Naturales Relativos. Editorial Comares, Granada. España.

Puig, L. (1997). Notes on Semiotics and Mathematics Education. Presentado en el grupo de semiótica de las matemáticas en 21st Conference of PME, Finland.

Puig, L., (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Actas del X Simposio de la SEIEM. Instituto de Estudios Aragoneses (Diputación de Huesca). Universidad de Zaragoza. pp 107-126.

Gallardo, A. (2002). "The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra". Educational Studies in Matehmatics 49: 171-192. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Nederlands.

Rubio, G. (2002). "Solution of word problems through a numerical approach. Evidences on the detachment of the arithmetical use of the unknown and the construction of its algebraic sense by pre-university students". *Proceedings of the 26th PME Conference*, Norwich, Great Britain, Vol 4. pp. 145-152.

Rubio, G. & Del Valle, R. (2004). "The competent use of the analytical method in the solution of algebraic word problems. A didactical model based on a numerical approach with junior high students". *Proceedings of 28th PME Conference*. Bergen, Norway.

Rubio G., Del Valle, R & Del Castillo, A. (2006). Construction of meanings to the mathematical objects of variable and function through problems. *In proceedings of 28th annual meeting of PME-NA*. Merída. Yucatán,

EL MUNDO DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL EN EL CONTEXTO DEL TEST DE DIAGNÓSTICO

M. Pedro Huerta
Universitat de València

Marta Carles
IES Cheste, Valencia

RESUMEN

En este trabajo mostramos un mundo particular de problemas de probabilidad condicional en un contexto que llamamos Test de Diagnóstico. Mostramos los fenómenos que están implicados y de los cuáles los sucesos y las probabilidades son sus medios de organización. Se reflexiona finalmente sobre la enseñanza de la probabilidad condicional si ésta se pone en contexto.

ABSTRACT

In this piece of work we show conditional probability problems in a context we call Diagnostic Test. We analyze these problems into the context showing those phenomena that are involved and their means of organization. Finally, we reflect on teaching conditional probability in context.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
M. Pedro Huerta y Marta Carles (2007). EL MUNDO DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL EN EL CONTEXTO DEL TEST DE DIAGNÓSTICO, pp. 249-260.

INTRODUCCIÓN

Permítasenos que comencemos esta introducción con una anécdota que nos sirve para adelantar la problemática de investigación en la que nos hemos situado y que este trabajo no es más que avance del mismo.

En una popular serie de televisión, el personaje principal, un médico muy particular cuyos diagnósticos están basados en el más puro razonamiento aristotélico y en un uso muy preciso de la inferencia bayesiana, debe diagnosticar una enfermedad en un paciente con cierta relevancia pública. Dispone del paciente una serie de síntomas que le permiten aventurar un diagnóstico, SIDA, diagnóstico que se ve apoyado con un resultado positivo del test del VIH que confirma su sospecha inicial. Iniciado un tratamiento basado en este diagnóstico, el paciente no mejora lo que hace que el médico en cuestión sospeche de lo acertado de su diagnóstico inicial y suspenda la medicación. Tomada la decisión, ordena la repetición del test del VIH resultando esta vez negativo. Preguntado cómo sabía que el paciente no tenía SIDA si la sintomatología encajaba y el test era positivo, el médico en cuestión contestó que había habido un *falso positivo* y que eso ocurría 1 de cada 5000 casos. La reacción negativa del paciente al tratamiento y la existencia de falsos positivos le hicieron refutar su diagnóstico inicial.

Lo anterior no es más que un ejemplo de cómo la probabilidad condicional está en uso en contextos no matemáticos. Es, tal vez, un ejemplo trivial pero se nos antoja paradigmático. Situados en el contexto de la acción, no tenemos demasiadas dudas de que "el gran público" entendió lo que había ocurrido y, tal vez, sirvió para admirar un poco más, si cabe, al personaje en cuestión. Ahora bien, tenemos dudas razonables de que el gran público entendiera con precisión el significado concreto de *falso positivo* y su medida y aun menos, ahora con casi toda seguridad, su relación con la probabilidad condicional. Nos aventuramos a decir que ni para aquellos que en su día estudiaron la probabilidad condicional en las escuelas. El asunto entonces es que, entre este gran público, está también el alumnado de secundaria y el universitario, a quienes les asignamos las mismas dudas que al gran público.

ANTECEDENTES

Tradicionalmente, la investigación llevada a cabo en probabilidad condicional e inferencia bayesiana tiene un fuerte sesgo hacia el estudio de los aspectos cognitivos implicados en el comportamiento de los estudiantes ante tareas de resolución de problemas de probabilidad condicional y el uso e interpretación de la probabilidad condicional en situaciones variadas. De una parte, se han determinado dificultades, errores e interpretaciones equivocadas en los estudiantes (por ejemplo, Tvershy y Kahneman, 1982; Maury, 1984; Gras y Totohasina, 1995; Ojeda,1996; Díaz y De la Fuente, en prensa), de otra, se ha constatado que dichos errores e interpretaciones equivocadas pueden paliarse si se presta más atención a aspectos semánticos en los enunciados de los problemas (Evans, Handley, Perham, Over & Thompson, 2000; Girotto & González, 2001; Hoffrage, Gigerenzer, Graus & Martignon, 2002; Lonjedo y Huerta, 2005), sugiriéndose diferentes maneras de enseñar que faciliten la comprensión de la probabilidad condicional. Pero poca atención se ha prestado a los problemas de probabilidad condicional ubicados en el mundo de la resolución de problemas, a la manera de los problemas aritmético-algebraicos, por ejemplo, a las particularidades y peculiaridades que dichos problemas tienen y que pueden tener influencias sobre aquellos aspectos cognitivos de los resolutores antes mencionados. En general, los investigadores de corte cognitivo estudian el comportamiento de los estudiantes resolviendo un problema o conjunto de problemas,

generalmente de enunciado verbal, del que se conoce poco como problema, es decir, su estructura de datos (sucesos y probabilidades), contexto en el que se presenta, lecturas posibles, etc.… relacionando esto con el éxito o no éxito de los resolutores de dichos problemas.

La investigación sobre problemas de probabilidad, en la que el objeto de estudio son los problemas, la iniciamos hace algún tiempo (Huerta, 2002) centrándola, más recientemente, en los problemas de probabilidad condicional (Lonjedo y Huerta, 2004; Lonjedo y Huerta, 2005; Cerdán y Huerta, en prensa). En este último, se estudian una familia particular de problemas de probabilidad condicional, a los que nosotros hemos llamado problemas ternarios de probabilidad condicional, cuyo análisis se hace desde los sistemas de representación necesarios para obtener una solución del problema a partir de una estructura particular de datos y una lectura matemática de los mismos. En todo caso, y dependiendo de esa estructura particular, los problemas pueden clasificarse en problemas con resolución aritmética o resolución algebraica.

Los problemas ternarios de probabilidad condicional pueden ser traducidos a un metalenguaje, los grafos trinomiales (Fridman, 1990), en el que mediante un método propio de la resolución de problemas, el método de análisis y síntesis, es posible el estudio del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional representados en un grafo trinomial y determinar en él si el problema tiene resolución aritmética o algebraica. La palabra mundo puede ser controvertida pues no solo da cuenta del mundo matemático, como estructura de relaciones entre probabilidades, sino del mundo no matemático en el que las relaciones entre probabilidades son interpretadas y usadas en contextos variados. En este trabajo mostraremos parte de ese mundo, al introducir en él un contexto en el que la red de relaciones entre probabilidades tiene sus propios significados.

PROBLEMAS TERNARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

En Lonjedo y Huerta (2004) ya definimos problemas de probabilidad condicional y en Cerdán y Huerta (en prensa) hemos acotado ese mundo de problemas, y hemos calificado de ternarios a los problemas de probabilidad condicional que, leídos matemáticamente, cumplen las siguientes condiciones:

1. En el enunciado del problema hay, al menos, una probabilidad condicional implicada, ya sea como probabilidad conocida o como probabilidad preguntada, o las dos.
2. Al menos se conocen tres probabilidades, no directamente relacionadas.
3. Todas las probabilidades, tanto conocidas como desconocidas, están relacionadas mediante relaciones ternarias de los tipos: complementariedad, $p(A)+p(noA)$[1]$=1$, aditiva $p(A\cap B)+p(A\cap noB) = p(A)$ y multiplicativa $p(A|B) \times p(B) = p(A\cap B)$.
4. La pregunta del problema se hace sobre una probabilidad desconocida que está relacionada con las probabilidades conocidas por al menos una de las relaciones ternarias.

La red de relaciones posibles entre las probabilidades en un problema ternario de probabilidad condicional está representada en el grafo trinomial de la figura (Figura 1):

1 Los signos para el complemento de un suceso A son variados. Aquí hemos usado dos, noA y ~A.

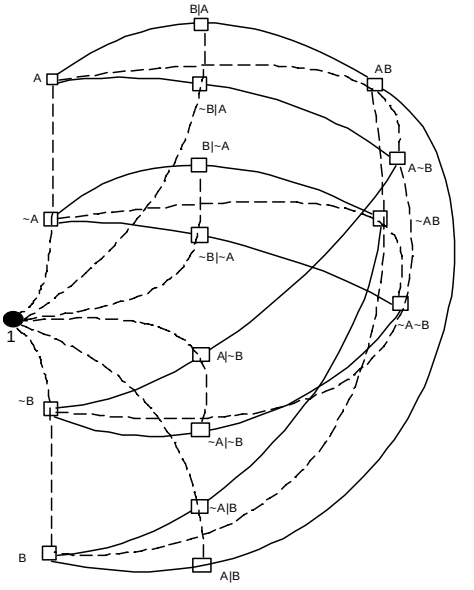


Figura 1. Grafo trinomial del mundo de los problemas ternarios de probabilidad condicional (Cerdan y Huerta, en prensa).

En este grafo, las relaciones aditivas se representan con trazo discontinuo mientras que las relaciones multiplicativas están representadas por trazo continuo[2]. En los vértices del grafo se usan, con cierta licencia, dos tipos de signos: uno representando a sucesos[3] a la manera usual, y otro a las probabilidades de esos sucesos mediante cuadrados claros[4]. Representando en este grafo las probabilidades conocidas en el enunciado de un problema es posible aplicar el método de análisis y síntesis que permite un estudio completo del problema.

MÉTODO DE ANÁLISIS

Problemas como los que relacionamos en el Anexo de este trabajo son habituales en la enseñanza de la probabilidad en estudios superiores en áreas tan dispares como Salud, Ingeniería, Ciencias Básicas, etc. Son problemas que suelen platearse como aplicación de la probabilidad condicional, después de que se haya llevado a cabo una enseñanza formal. Forman parte, también, de instrumentos de investigación del comportamiento de los estudiantes

2 Esto, que no deja de ser una licencia, puede ser cambiado por: relación aditiva, arista vertical en la medida de lo posible, relación multiplicativa arista horizontal

3 Una licencia es llamar a A| B suceso, a sabiendas que, matemáticamente no lo es.

4 El vértice oscuro, representado por un círculo, quiere representar tanto al espacio muestral (Ω) como a su probabilidad (1).

o del razonamiento implicado en abordar la tarea de su resolución. Los podemos encontrar en textos tan dispares como Isaac (1995) o en Engel (1990). Implican, necesariamente, tanto a la definición de esa probabilidad como a la introducción y, a veces demostración, de los teoremas de la Probabilidad Total y de Bayes. Son casi omnipresentes en los textos de enseñanza de casi cualquier nivel educativo, también en la enseñanza secundaria no obligatoria. Son problemas típicamente bayesianos. También son problemas ternarios de probabilidad condicional. Pero, en ningún caso, son tratados, estudiados, abordados como familias de problemas cuya resolución puede proporcionar a los estudiantes significados de la probabilidad condicional.

Con el fin de precisar la terminología que usaremos para el análisis de estos problemas, llamaremos contexto a una situación particular en la que los problemas de probabilidad estén formulados. Identificado un contexto, como aquel en el que un concepto matemático, como el de probabilidad condicional, sufre en él un recorte semántico adquiriendo entonces un significado específico o propio en ese contexto (Puig y Cerdán, 1988). Un contexto es, por ejemplo, el que llamamos *Test de Diagnóstico*, contexto en el que se formulan, no sólo los problemas que citamos en el anexo y que tienen por objeto diagnosticar enfermedades mediante pruebas médicas, sino todos aquellos que esencialmente tratan de diagnosticar el buen estado de productos fabricados mediante controles de calidad que no son completamente fiables y que hay por tanto riesgos[5] que asumir con cierta probabilidad.

Hablamos también de dos tipos de fenómenos que están presentes en el enunciado de dichos problemas. De aquéllos que pueden interpretarse como sucesos y de aquéllos que pueden interpretarse como probabilidades. En concreto, y restringiéndonos a los problemas del Anexo, expresiones del tipo “estar enfermo”, “estar enfermo y tener un diagnóstico negativo”, e incluso, aunque no tengamos un conjunto de referencia (Freudenthal, 1983, p.42) para ellos y por tanto no poder ser organizados exactamente por medio de sucesos, como los otros, expresiones del tipo “tener un diagnóstico negativo, estando enfermo”. Los conjuntos de referencia para “estar enfermo” o “estar enfermo y tener diagnóstico” están descritos mediante números que pueden usarse con un sentido probabilístico. Dichos números son frecuencias, porcentajes o probabilidades que refieren a expresiones con significado en el contexto: *Falso positivo*, *Falso negativo*, *sensitividad*, *especificidad*, etc.

UN EJEMPLO DE ANÁLISIS CONTEXTUAL DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Los problemas que listamos en el Anexo pueden analizarse con la ayuda de las tablas 1 y 2, fruto de un análisis fenomenológico realizado en el contexto *Test de Diagnóstico*, y del grafo trinomial de la Figura 2 resultado de aplicar el método de análisis y síntesis a cualquiera de ellos usando el grafo de la Figura 1.

En la primera (Tabla 1) se muestran los conjuntos de referencia para los fenómenos de los que son medios de organización en este contexto, en lo que es pertinente al área de salud. Organizan también otros fenómenos, en áreas diferentes, como la economía o la industria, en lo que vendremos en llamar Control de Calidad. Así que esta tabla es, por el momento, incompleta. Completarla forma parte de nuestra investigación.

5 Obviamente, los riesgos asumidos en el área de salud no pueden asumirse de igual manera que los puramente económicos con los controles de calidad. Pero esto es otra cuestión, el análisis de riesgos.

Pre-test o pre-prueba				**Post-test**			
E	noE	+	-	E∩+	NoE∩+	E∩-	NoE∩-
Estar enfermo, infectado, Padecer una enfermedad determinada	No estar enfermo, infectado, No padecer una enfermedad determinada.	Dar positivo en un test de diagnóstico, independientemente de si se padece o no la enfermedad	Dar negativo en un test de diagnóstico, independientemente de si se padece o no la enfermedad	Estar enfermo, infectado y Dar positivo en un test de diagnóstico. Padecer una enfermedad determinada y Dar positivo en un test de diagnóstico	No estar enfermo, infectado y Dar positivo en un test de diagnóstico. No padecer una enfermedad determinada y Dar positivo en un test de diagnóstico	Estar enfermo, infectado y Dar negativo en un test de diagnóstico. Padecer una enfermedad determinada y Dar negativo en un test de diagnóstico	No estar enfermo, infectado y Dar negativo en un test de diagnóstico. No padecer una enfermedad determinada y Dar negativo en un test de diagnóstico

Tabla 1. Conjuntos de referencia en el contexto Test de Diagnóstico, en Salud.

En la Tabla 2, los fenómenos pueden ser organizados con sentido probabilístico mediante probabilidades absolutas, de los conjuntos de referencia anteriores, ahora sucesos, y otras con probabilidades condicionales.

Fenómenos	**Términos específicos**	**Medios de Organización**	**Formato de los datos en los problemas**
Errores producidos por el test *"ÍNDICES DE ERROR"*	CFP o Coeficiente Falso Positivo	P(+|no E)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
	CFN o Coeficiente Falso Negativo	P(-|E)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
Éxito producido por el test *"INDICES DE VALIDEZ*[6]*"*	Sensibilidad o Sn	P(+|E)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
	Especificidad o Sp	P(-|no E)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
Errores producidos en el diagnóstico de una enfermedad *"ERRORES DE DIAGNÓSTICO"*	Falso negativo	P(E|-)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
	Falso positivo	P(no E|+)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
Éxito producido en el diagnóstico de la enfermedad. *"VALORES PREDICTIVOS"*	VPP o Valor Predictivo del Positivo	P(E|+)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
	VPN o Valor Predictivo del Negativo	P(no E|-)	Necesariamente en porcentajes y probabilidades
Prevalencia de la enfermedad	Padecer la enfermedad/infección	P(E)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales (Hoffrage y otros, 2002)
Probabilidad de no estar enfermo	No Padecer la enfermedad/ infección	P(no E)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales

6 *Validez* es el grado con el que un test mide lo que se supone que debe medir.¿Con qué frecuencia el resultado del test es confirmado por procedimientos diagnósticos? La sensibilidad y la especificidad de un test son medidas de su validez.

Fenómenos	Términos específicos	Medios de Organización	Formato de los datos en los problemas
Resultado del test de diagnóstico	Dar positivo en el test	P(+)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales
	Dar negativo en el test	P(-)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales
Probabilidad de estar enfermo y obtener positivo en el test	No hemos encontrado	P(E∩+)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales
Probabilidad de no estar enfermo y dar positivo en el test	No hemos encontrado	P(noE∩+)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales
Probabilidad de estar enfermo y dar negativo en el test	No hemos encontrado	P(E∩-)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales
Probabilidad de no estar enfermo y dar negativo en el test	No hemos encontrado	P(noE∩-)	Razonablemente en números naturales, frecuencias absolutas o frecuencias naturales

Tabla 2. Resultados del análisis fenomenológico en el contexto Test de Diagnóstico, en Salud.

La diferencia entre la Tabla 2 y una tabla similar para un test de calidad se encuentra en los fenómenos y en los términos específicos, pero no en los medios de organización ni en la expresión de los datos de los problemas considerados en el contexto.

La idea de considerar medios de organización como una entrada en la Tabla 2 está basada en el juego de pares fenómenos-medios de organización descrito por Puig (1997) en todo análisis fenomenológico. Ello supone, de una parte, conjuntos de referencia para "padecer la enfermedad", "no padecer la enfermedad", "dar positivo en el test", "dar negativo en el test", designados respectivamente por "E", "noE", "+" y "-", conjuntos que refieren a personas que cumplen "padecer la enfermedad" o "dar positivo en el test", por ejemplo. Conjuntos que en sí mismos tienen poca importancia a menos que se les tome como conjuntos de Borel y con ellos puedan considerarse complementos, uniones e intersecciones (Freudenthal, 1983, p. 43). De otra parte, supone juicios sobre esos conjuntos de referencia, es decir, expresiones del tipo "la probabilidad de E es…", expresada por p(E).

El mundo restringido de problemas de probabilidad condicional, en el contexto Test de Diagnóstico para el entorno de Salud, puede verse en la Figura 2.

El grafo tiene una disposición tal que permite hacer análisis tanto globales como locales. Las "probabilidades condicionadas" sensitividad, especificidad y coeficientes falso positivo y falso negativo, actúan sobre la prevalencia o no prevalencia de una enfermedad en una población con el fin de actualizarlas con posterioridad al sometimiento de la población a pruebas diagnósticas mediante un test. Hablamos de actualizar una probabilidad absoluta p(E) por medio de probabilidades condicionadas $p(E|+)$ y $p(E|-)$ dando lugar tanto a los valores predictivos, del positivo y del negativo, como a los falsos positivo y negativo.

Estas actualizaciones se encuentran inmersas en una red de relaciones como, por ejemplo, las relaciones siguientes:

$$Falsonegativo = \frac{prevalenciaE \times CFP}{prevalencia(-)}$$

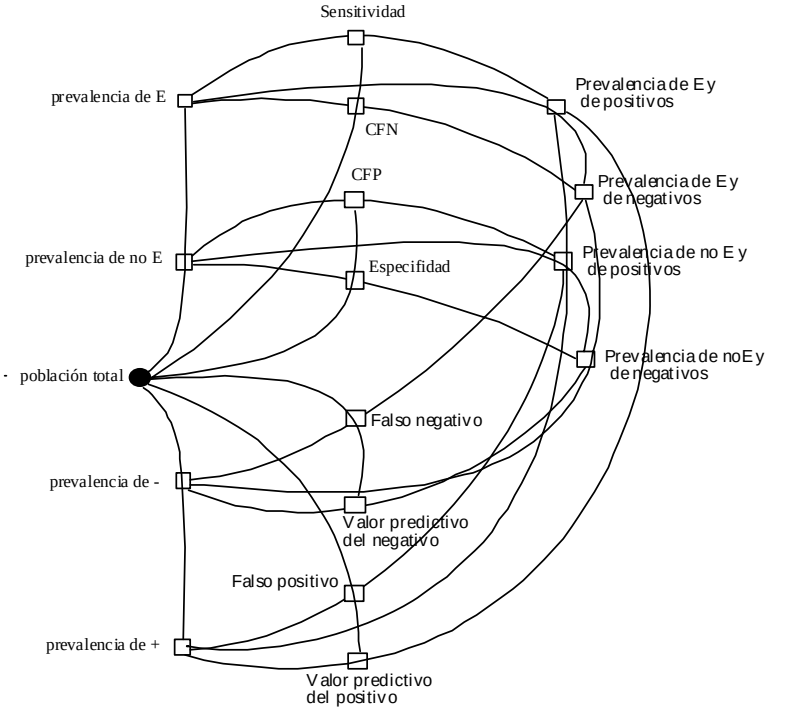


Figura 2. Grafo de los problemas ternarios de probabilidad condicional en el contexto Test de Diagnóstico en el entorno de Salud.

$$VPP = \frac{prevalenciaE \times sensitividad}{prevalencia(+)}$$

Como,

$$prevalencia(-) = 1 - prevalencia(+)$$
$$CFP = 1 - especificidad$$

las actualizaciones se expresan ahora:

$$Falsonegativo = \frac{prevalenciaE \times (1 - especificidad)}{1 - prevalencia(+)}$$

y, análogamente:

$$VPP = \frac{prevalenciaE \times sensitividad}{prevalencia(+)}$$

Para hablar sobre las actualizaciones de la prevalencia de una enfermedad en una población, sometida a un test diagnóstico, sería pues necesario tener en cuenta la prevalencia de esa enfermedad antes del test y la especificidad y sensitividad del test de diagnóstico. A dichas actualizaciones se les ha llamado Falso Negativo y Valor Predictivo del Positivo, términos que indican porcentaje o probabilidad de padecer una enfermedad post-test.

Todos los problemas que figuran en el Anexo pueden ser leídos al estilo como se lee el problema 4, problema que analizaremos con posterioridad. Así, en el problema 1, "uno de cada 100 ciudadanos padece tuberculosis" puede leerse, "la prevalencia de la tuberculosis en una ciudad es de 1 de cada 100 ciudadanos". Una lectura matemática de esto mismo supone escoger un conjunto de referencia para los ciudadanos que padecen tuberculosis, pongamos que es T. Sin un sentido probabilístico previo, nada puede afirmarse sobre T, es decir, para determinar el cardinal de T se requeriría conocer el tamaño de la población o, como mal menor, suponerlo. Con sentido probabilístico, por el contrario, algo puede afirmarse, puede asegurarse que p(T)=0,01.

La sensitividad del test, en el problema 1, se expresa por "cuando una persona es tuberculosa, el test da positivo en el 97% de los casos" y el coeficiente falso positivo por "cuando no es tuberculosa, solo el 0,01% de los casos da resultado positivo". Es decir, la sensitividad es 97% y el CFP del 0,01%. Las lecturas matemáticas correspondientes solo pueden hacerse con un sentido probabilístico pues no es conocido el tamaño de la población en la que están los T. Las probabilidades de "positivo" han de actualizarse por el conocimiento previo de T y de noT, resultando que la sensitividad se lea $p(+|\ T)=0,97$ y el CFP se lea $p(+|\ noT)= 0,0001$. La pregunta del problema 1 solicita el Valor Predictivo del Positivo (VPP) del test en la forma "si el test resultó positivo, cuál es la probabilidad de que el ciudadano sea tuberculoso", es decir, ahora una actualización de la prevalencia de T con la información adicional del conocimiento del resultado del test, $p(T|\ +)$.

La lectura matemática que hemos hecho del problema 1 permite describirlo con el vector (1,0,2) que indica que en el texto del problema se conocen una marginal y dos condicionales. Como se dice en (Cerdán y Huerta, en prensa) este problema tiene resolución aritmética. Poniendo las probabilidades conocidas en el grafo de la Figura 2 obtenemos, fruto del análisis y síntesis:

$$VPP = \frac{prevalenciaT \times sensitividad}{prevalenciaT \times sensitividad + (1 - prevalenciaT) \times CFP}$$

siendo que el VPP es la razón entre dos cantidades, las que indican, respectivamente, la prevalencia de tuberculosos y positivos en relación con el total de positivos.

Cuya lectura matemática es la bien conocida Fórmula de Bayes:

$$p(T/+) = \frac{p(T) \times p(+/T)}{p(T) \times p(+/T) + \left[(1 - p(T)\right] \times p(+/noT)}$$

El Problema 2, estructuralmente representado por el vector (1,0,2), por tanto con resolución aritmética, pregunta por los Valores Predictivos del Positivo (VPP) y del negativo (VPN) en el test. El problema 3, con la misma estructura de datos, pregunta por el Valor Predictivo del Negativo (VPN). Pero, diferente de ellos es el problema 4 que, para una estructura de datos (0,0,3), pregunta por la prevalencia de una enfermedad pre-test. Todos los problemas con esta estructura de datos requieren, necesariamente, de resolución algebraica. Supongamos que es *x* la prevalencia buscada. Incorporada como probabilidad conocida al grafo de la figura 2, junto con las probabilidades conocidas del enunciado, otra vez fruto del análisis y síntesis obtenemos el conjunto de ecuaciones que resuelve el problema:

$$1.-\frac{(1-x)\times(1-especificidad)}{falsopositivo}\times(1-\ falsopositivo)=sensitividad\times x$$

$$2.-(1-x)\times(1-especificidad)\times(1-\ falsopositivo)=\ falsopositivo\times sensitividad\times x$$

$$3.-\frac{(1-x)\times(1-especificidad)}{falsopositivo}=\frac{sensitividad\times x}{1-\ falsopositivo}$$

Las ecuaciones anteriores son equivalentes desde un punto de vista algebraico, *x* tiene el mismo valor en las tres, pero desde el punto de vista de lo que se pone en relación para establecer las igualdades, es decir, contextualmente, no lo son.

CONCLUSIÓN

Lo que hemos mostrado aquí ha sido un mundo particular de problemas de probabilidad condicional en un contexto particular, al que le hemos llamado test de diagnóstico. Ese mundo existe y comparte un doble uso, profesional y docente. El término *prevalencia*, que mi diccionario de Word me señala como incorrecto, está definido por el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua (RAE, versión electrónica) en una de sus acepciones, como: *En epidemiología, proporción de personas que sufren una enfermedad con respecto al total de la población en estudio*. Tal vez debería haberse expresado por una razón, pero, si se dice con sentido probabilístico, la prevalencia debería definirse como la probabilidad de que una persona escogida, entre una población en estudio, padezca una determinada enfermedad. Aunque, seguramente, el Diccionario no tenga ninguna intención de mostrar ese sentido probabilístico. Eso dependerá de en qué sentido se usará la prevalencia. Si se hace para producir enseñanza de la probabilidad, entonces se le debe dar ese sentido probabilístico, de manera que el fenómeno descrito por la prevalencia de una enfermedad pueda ser organizado por medio de una probabilidad. Lo mismo podemos decir de los fenómenos descritos por la sensitividad de un test o por un falso positivo, por ejemplo, aunque esta vez organizados por medio de probabilidades condicionadas. El asunto es si enseñamos probabilidad condicional atendiendo primero a los fenómenos y buscamos después los medios de organización o invertimos el proceso. Nuestra posición y concretamente la propuesta que defendemos en este trabajo es la primera. El mundo de problemas que hemos presentado y de la manera en la que lo hemos presentado puede ser tomado como una sugerencia para diseñar una enseñanza en ese sentido.

REFERENCIAS

Cerdán, F.; Huerta, M. P. (en prensa). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*.

Díaz, C; De la Fuente, I. (en prensa). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de Psicología. *Educación Matemática*.

Engel, A. (1990) *Les certitudes du hasard*. (Lyon. ALEAS Editeur).

Evans, J., Handley, S.J., Perham, N., Over, D. E. & Thompson, V. A. (2000). Ferquency versus probability formats in statistical word problems. *Cognition,* 77, pp. 197-213.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. (Dordrecht. Reidel).

Fridman, L.M. (1990). Los grafos Trinomiales como Metalenguaje de los Problemas, en matemáticas. *Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de la Sonora*, 17-18, pp.51-59.

Girotto, V. & González, M. (2001). Solving probabilistic and statistical problems: a matter of information structure and question form. *Cognition 78*, pp. 247-276.

Gras, R.; & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), pp. 49-95.

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Graus, S. & Martignon, L. (2002). Representation facilities reasoning: what natural frequencies are and what they are not, *Cognition 84*, pp. 343-352.

Huerta, M. P. (2002). El problema de la cueva. Elementos para un análisis didáctico de los problemas de probabilidad. Enseñanza de las Ciencias, vol. 20, n. 1, marzo, pp. 75-86.

Isaac, R. (1995). *The Pleasures of Probability*. (New York . Springer-Verlag).

Lonjedo, Mª A.; Huerta, M. P., (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos, en E. Castro y E. de la Torre (eds.), 2004, *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la SEIEM*, pp. 229-238. Universidade da Coruña

Lonjedo, Mª A.; Huerta, M. P., (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en un problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema, en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), 2005, *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la SEIEM*. Universidad de Córdoba.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des arguments utilises par les élèves de classe de seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 5, nº2, pp. 187-214.

Ojeda, A.M. (1996). Representaciones, contextos y la idea probabilidad condicional, en F. Hitt(ed.), 1996, *Investigaciones en Matemática Educativa*, pp. 291-310. (México.. Grupo Editorial Iberoamérica).

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico., En Rico, L. (Coordinador), 1997, *La Educación Matemática en la Educación Secundaria. Cuadernos de Formación del profesorado*, 12, ICE Universidad de Barcelona, pp.61-94 (Barcelona. Horsori).

Puig, L., Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos escolares*. (Madrid. Síntesis).

Tversky, A.; Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman; P. Slovic & A. Tversky (eds.), *Judgments under uncertainty: Heuristics and biases*, pp. 153-160. (New York. Cambridge University Press).

ANEXO

Problema 1: "En una ciudad se sabe que hay un caso de tuberculosis por cada 100 habitantes. A un individuo se le pasó un test que, cuando el individuo es tuberculoso, da positivo en un 97% de los casos. Cuando el individuo no es tuberculoso, sólo hay un 0,01% de positivos. El test ha dado positivo en nuestro caso. ¿Cual es la probabilidad de que el individuo sea tuberculoso?"

Problema 2: "Una prueba diagnóstica para la diabetes tiene un CFP de 4% y un CFN del 5%. Si la prevalencia de la diabetes en la población donde se usa es del 7% ¿cuál es la probabilidad de que sea diabético un individuo en el que la prueba dé positiva? y ¿de que no lo sea uno en el que dé negativo?"

Problema 3: "Una prueba diagnóstica para el cáncer uterino tiene un coeficiente falso-positivo de 0,05 y falso-negativo de 0,10. Una mujer con una probabilidad pre-prueba de padecer la enfermedad de 0,15 tiene un resultado negativo con la misma. Calcular la probabilidad de que no esté enferma."

Problema 4: "El test de la tuberculina permite detectar la tuberculosis. La sensibilidad y la especificidad de dicho test es muy alta, 0.97 y 0.98, respectivamente. Si en una determinada población se registra una proporción muy alta, concretamente 0.9, de falsos positivos, calcula la prevalencia de la enfermedad."

INNOVACIÓN EN LA RECOGIDA DE DATOS PARA UNA INVESTIGACIÓN DE CARÁCTER CUALITATIVO. UN EJEMPLO CON ALUMNOS UNIVERSITARIOS EN UN ENTORNO COMPUTACIONAL

Myriam Codes Valcarce y Mariano Raboso Mateos
Facultad de Informática. Universidad Pontificia de Salamanca

Modesto Sierra Vázquez
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.
Universidad de Salamanca

RESUMEN

La introducción de una herramienta software que captura la pantalla del ordenador en el proceso de recogida de datos, nos aporta un tipo de información que nos permite conocer algunos aspectos de la utilización que hacen los estudiantes de una herramienta de cálculo simbólico como Maple y nos facilita el proceso de análisis al respaldar la triangulación de los datos obtenidos mediante grabaciones de video.

ABSTRACT

Introducing video capturing software tools along data acquisition process, provides interesting information about student activity, specifically when working with a symbolic tool as Maple. The graphical knowledge of the detailed operation, makes the data analysis easier by the triangulation of the data obtained from the digital video recorded.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Myriam Codes Valcarce, Modesto Sierra Vázquez y Mariano Raboso Mateos (2007). INNOVACIÓN EN LA RECOGIDA DE DATOS PARA UNA INVESTIGACIÓN DE CARÁCTER CUALITATIVO. UN EJEMPLO CON ALUMNOS UNIVERSITARIOS EN UN ENTORNO COMPUTACIONAL, pp. 261-271.

INTRODUCCIÓN

Las grabaciones de video se han convertido en un arma poderosa para la obtención de datos en investigaciones de carácter cualitativo. Desde que se introdujo el uso de grabaciones de video en investigaciones educativas en los años sesenta, los medios técnicos han evolucionado a una velocidad vertiginosa hasta llegar a la presente era digital. Actualmente, con la tecnología de que disponemos, podemos enriquecer la información que recogemos en el aula cuando grabamos a los estudiantes mientras realizan diversas tareas en un entorno computacional, gracias a una herramienta software de fácil manejo y coste gratuito que graba la pantalla del ordenador en un archivo digital. El empleo de este software, Cam Studio, o de otros similares, es novedoso en la obtención de datos en investigaciones en didáctica de la matemática. Este tipo de programas, nos abre una puerta para explorar, y también explotar, nuevas fuentes de información. Todo esto, sin olvidar el cuidado y la atención necesarios en el proceso de obtención de datos mediante grabaciones.

En cuanto a las grabaciones de video, Lesh y Lehrer (2000) advierten que se han de tener en cuenta cuatro aspectos cuando se obtienen datos mediante este tipo de grabaciones. En primer lugar, las consideraciones teóricas marcarán los tipos de eventos y de relaciones que forman el centro de interés de la investigación. Todos los demás aspectos que se han de valorar en las grabaciones, vienen determinados por la perspectiva teórica desde la que se analizarán los datos. En las consideraciones prácticas, el propósito de las grabaciones determinará el cómo y dónde se llevan a cabo las grabaciones. Las consideraciones físicas atienden a las necesidades materiales para las grabaciones: el número de cámaras que se necesitarán, a dónde enfocarán, la necesidad de utilizar micrófonos, etc. Por último, las consideraciones temporales responden a cuestiones como el período de tiempo durante el que se grabará, cómo se definirán las unidades de análisis o cuál es intervalo temporal con más relevancia.

Dentro de las investigaciones en didáctica, las grabaciones de video se utilizan con distintos propósitos. Sherin (2003) utiliza las grabaciones de video en formación de maestros. Además, nos ofrece un repaso histórico sobre las aplicaciones que se han dado a las grabaciones en video desde que se introdujeron en los años sesenta en la formación de maestros: microteaching, análisis de interacciones, ejemplificar con la práctica de un experto, estudio de casos y programas hypermedia. También en formación de maestros, se ha desarrollado el 'videopaper' como "herramienta alternativa para la producción, utilización y difusión de investigación educativa. (…) El videopaper es un documento multimedia que integra y sincroniza diferentes formas de representación, tales como texto, video e imágenes, en un solo documento integrado no lineal" (Lazarus, 2006). Es algo así como la versión moderna del portafolio. En el caso español, Llinares, Blanco y otros utilizan las grabaciones de video tanto en la obtención de datos en investigaciones sobre didáctica de la matemática, como en la práctica docente en la formación de maestros, empleándolo como recurso didáctico en el aula.

Por otro lado, Hall (2000) considera que "uno de los problemas que surgen cuando en una investigación los datos provienen de grabaciones de video, es que en los informes de investigación se suprimen los procesos de recogida y selección de grabaciones de video como datos".

En este trabajo expondremos los instrumentos digitales que hemos empleado en la recogida de datos mediante grabaciones de audio y video y la pantalla del ordenador, para utilizar esos datos en una investigación de carácter cualitativo. Prestaremos especial atención a los beneficios que nos ha reportado el manejo de los datos en soporte digital y el tipo de infor-

mación que nos aporta el uso de las nuevas tecnologías informáticas.

Objetivos de la investigación y de las grabaciones

Lesh y Lehrer (2000) destacan la necesidad de hacer explícito el marco teórico desde el que se analizarán los datos que se obtengan de las grabaciones, así como el propósito y la función de las mismas. El propósito de las grabaciones es fundamental para su planificación, mientras que el marco teórico es imprescindible en el análisis ya que, como señalan Lesh y Lehrer, "cada vez que la información se filtra, selecciona, simplifica o se organiza, se está sometiendo a una interpretación".

El objetivo de la investigación para la cual hemos obtenido los datos es el de describir cómo los estudiantes desarrollan el concepto matemático de convergencia de serie numérica. Bajo el paradigma de investigación APOS desarrollado por el grupo RUMEC (Asiala y otros, 1996) hemos planteado una descomposición genética del concepto de convergencia de serie numérica, (Codes, 2004) y hemos caracterizado los niveles de desarrollo de dicho concepto en base a las acciones que el alumno lleva a cabo con y entre los elementos del modelo, a_n y $\sum_{k=0}^{n} a_k$, (Codes, 2006).

Para obtener datos sobre los que apoyar nuestra investigación, grabamos durante el curso académico 2005-2006 a parejas y tríos de estudiantes de primer curso de la Escuela de Informática de la Universidad Pontificia de Salamanca. El propósito de las grabaciones fue reunir información acerca de las relaciones que establecían los participantes entre los elementos del modelo teórico, mientras trabajaban en clase resolviendo diversas tareas. Para esto, hemos realizado dos tipos de grabaciones que se detallan en el siguiente apartado, las grabaciones de audio y video que recogen las intervenciones de los estudiantes mientras trabajan en clase, y las grabaciones en las que se recogen las capturas de la pantalla del ordenador con el que los estudiantes resolvían las tareas de clase utilizando el software de cálculo simbólico Maple. Estas últimas grabaciones, nos aportan información de dos tipos: acerca del uso que dan los estudiantes a la herramienta informática, y acerca de las iteraciones entre los elementos del modelo teórico que llevan a cabo los estudiantes durante su trabajo en el aula. Esta última, la conseguimos a partir de las instrucciones que ejecutan los estudiantes con Maple para resolver diversas tareas y de las conclusiones a las que llegan tras obtener un resultado con Maple.

INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Uno de los logros que hemos conseguido en nuestra investigación es el de disponer de toda la información en formato digital. Las ventajas que nos ofrece el soporte digital las aprovechamos tanto en el proceso de obtención de datos como en su manipulación, análisis y almacenamiento.

Los estudiantes resolvían casi todas las tares en un aula de ordenadores donde disponían del software de cálculo simbólico Maple. De esta herramienta se espera que favorezca la visualización y la interpretación de las representaciones gráficas y geométricas, y a la vez que proporcione las condiciones necesarias para que el estudiante maneje distintos registros: analítico, geométrico y gráfico. Además, contribuye a la experimentación y libera al alumno de tediosos cálculos y de los errores asociados a ellos.

Para obtener las grabaciones de video hemos utilizado una cámara web que, además de no requerir baterías ni cintas, confiere a los datos un carácter de inmutabilidad que no se consigue con las grabaciones analógicas. La misma cámara web puede recoger también el audio, aunque nosotros hemos utilizado un micrófono externo para optimizar la calidad del sonido.

Además, hemos grabado un archivo digital con la captura de la pantalla del ordenador en el que trabajan los estudiantes; esto nos permite que en la fase de análisis podamos visualizar al mismo tiempo el archivo de audio-video y el que contiene las interacciones de los participantes con el ordenador. Con esto, además de completar la información que la cámara no graba, obtenemos una información más rica acerca de cómo trabajan los estudiantes en un entorno computacional.

Huelga decir las ventajas que ofrece el formato digital en la manipulación y el almacenamiento de los datos. El único inconveniente que encontramos en la utilización de este soporte, es la necesidad de disponer de un ordenador y de suficiente espacio de memoria. Sin embargo, este inconveniente no es tal si tenemos en cuenta que las herramientas informáticas se han convertido en un medio indispensable de trabajo y que cada vez más se están imponiendo en las aulas en todos los niveles educativos.

Los datos que hemos obtenido no provienen sólo de las grabaciones digitales, aunque esto no concierne a este trabajo. Disponemos también de los apuntes de clase de los participantes y de las hojas donde resolvían las tareas, de los apuntes de la profesora-investigadora y de las notas que la profesora tomó sobre la marcha de las clases.

La herramienta CamStudio

El software gratuito CamStudio ha sido la herramienta que nos ha permitido disponer de un archivo con la captura de la pantalla. Con ello, hemos podido seguir paso a paso cada movimiento que han realizado los estudiantes con el ratón, los errores de sintaxis que han corregido y no se aprecian en el fichero final, la destreza con la que manejan la herramienta y otras cuestiones relativas al uso de esta herramienta informática. El tipo de información que aporta esta herramienta es muy variado:

- Para la triangulación: al visualizar simultáneamente el video con los participantes y el video con el trabajo en el ordenador se complementan ambas informaciones.
- Para conocer algunos aspectos de la herramienta, tales como las prestaciones que ofrece a los estudiantes o la sencillez o dificultad de su manejo.
- Para conocer cómo el estudiante maneja la herramienta: el tipo de búsquedas que realiza, el uso que hace del “copy-paste” o los errores sintácticos que comete, entre otros.
- Para conocer cómo actúa la herramienta informática en el desarrollo conceptual del estudiante, lo que le aporta y lo que le obstaculiza.

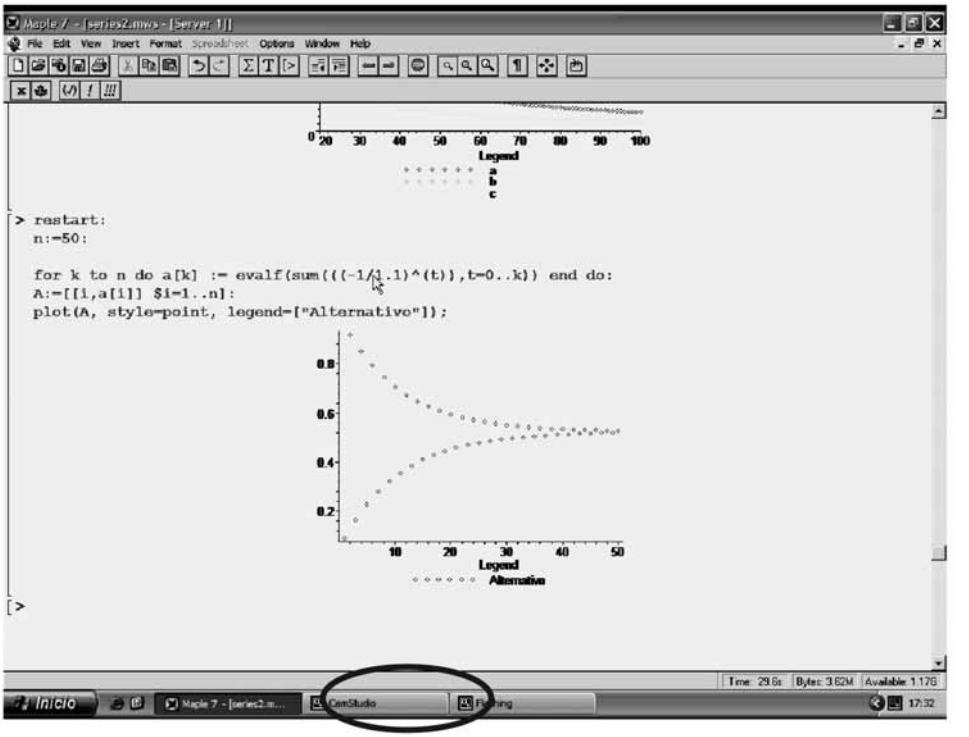
A continuación mostramos un fragmento de la transcripción que lo ejemplifica.

EJEMPLO

Los participantes del estudio para el que se realizaron las grabaciones de video tuvieron el primer contacto con las sumas infinitas a través de una actividad en la que, a partir de un cuadrado de lado la unidad, se generan nuevos rectángulos de área la mitad del rectángulo anterior. Previamente, los estudiantes habían trabajado en clase la convergencia de integrales impropias y de sucesiones cuyos términos generales no estaban expresados en forma de suma parcial, es decir, como $a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Por tanto, se enfrentan a esta actividad antes de que

se les haya explicado qué se entiende por serie y cuál es el significado de una suma infinita. Apoyándose en la utilización del software de cálculo simbólico Maple, los estudiantes han de experimentar sumando series geométricas con distintos valores para la razón. Posteriormente, se les pide que conjeturen acerca de los valores que ha tener la razón para que la serie geométrica sea finita.

En la imagen se muestra la captura de un instante de la pantalla del ordenador en la que uno de los grupos participantes, el grupo S1, está probando con distintos valores de r para conjeturar cuándo converge la serie geométrica : $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$



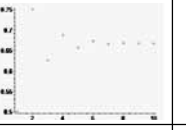
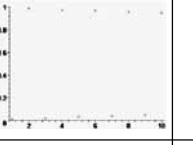
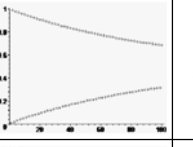
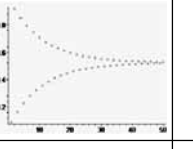
La agilidad que les proporciona Maple en el cálculo, les permite en muy poco tiempo obtener las sumas de muchas series. Con estas experiencias, el grupo S1 consigue contestar correctamente cuando se les pide a los alumnos que conjeturen para qué valores de la razón la serie geométrica converge, y también formula correctamente la suma de la serie geométrica cuando la razón es positiva y menor que uno. Esto lo llevan a cabo durante algo más de diez minutos, entre el minuto 25:04 y 35:41 de grabación, en los que los integrantes del grupo S1 obtiene veintisiete representaciones gráficas con las que concluyen la conjetura.

A continuación mostramos un fragmento de la transcripción de algo más de tres minutos, desde el minuto 25:34 hasta el 29:14, junto con las gráficas que van obteniendo por pantalla y que forma parte de la información que ellos manejan. Las gráficas que se muestran las obtuvieron representando n términos de la sucesión $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r^k}$

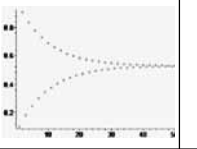
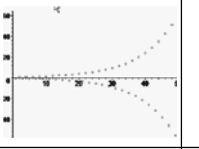
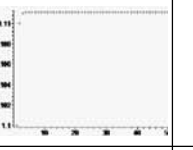
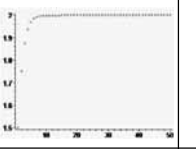
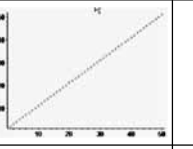
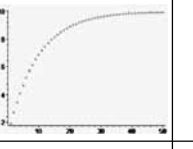
para distintos valores de r. En unos casos n es 10, 50 o 100, según se aprecia en las gráficas. Los valores de la razón están indicados en la columna de la derecha. En la primera columna numeramos las intervenciones para referirnos a ellas más tarde; en la segunda columna la inicial del participante; en la tercera la transcripción; en la cuarta, la gráfica que han obtenido ejecutando Maple y que observan por pantalla cuando hacen el comentario. En las filas donde no incluimos una gráfica, los participantes siguen manteniendo en la pantalla la última gráfica que han obtenido.

La profesora facilitó a los estudiantes, como material de clase, una guía acerca del manejo básico de Maple en la que se incluían las instrucciones necesarias para realizar estas gráficas.

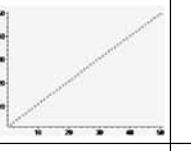
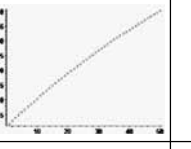
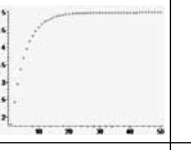
Transcripción de tres minutos de conversación del grupo S1 en la que concluyen que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge para valores de r entre menos uno y uno.

T	P	Transcripción	gráfica	razón
1	JM	Vale, y se va haciendo a cero y pico, vale. Y si ahí pones un tres, ¿qué? ¿Qué haces?		$-\frac{1}{2}$
2	D	Sólo por ver. Mira, ya empieza ahí a juntarse un poquito. Si pongo un cien aquí.		$-\frac{1}{1.01}$
3	JM	Se lo piensa. Ah, dices si…		
4	D	Si es menor que… o sea si es…si está entre menos uno y cero, ¿no?		
5	JM	Se aburre el ordenador. Ah sí. Tiende a… converge. Y si es. Pero menos uno entre…		$-\frac{1}{1.01}$
6	D	Vamos a poner cincuenta.		$-\frac{1}{1.1}$
7	JM	Ya, converge. Y si es mayor que uno, o sea, entre menos uno y?		
8	D	Y cero, ¿no?		
9	JM	Y cero. Sí, eso es. Sí, entre menos uno y cero. Entonces cambia, cambia eso y pones menos uno con nueve. Y si es.		

Transcripción de tres minutos de conversación del grupo S1 en la que concluyen que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge para valores de r entre menos uno y uno.

T	P	Transcripción	gráfica	razón
10	D	Menos cero con nueve está entre menos uno y cero.		$-\frac{1}{0.9}$
11	JM	Claro, por eso te decía, por verlo mejor.		
12	D	Sí, si.		
13	JM	¿Y si le pones menos uno con uno? A ver qué te sale.		
14	D	Menos uno con uno ya lo…		
15	JM	Ya diverge, eso es. Pero y para los positivos?		–1.1
16	D	¿Mm?		
17	JM	También. Pero te lo hace…		0.1
18		A ver. Sigue subiendo. No, pero estás dando valores positivos.		0.5
19	D	Sí.		
20	JM	Vamos a ver…		
21	D	Para los positivos también converge, entonces.		
22	JM	Sí, hasta uno. A ver, prueba hasta uno. Cero… va, uno con uno, por ejemplo. No, uno sí te va a…		1
23	D	Cero con nueve, a ver.		
24	JM	Cero con nueve		0.9
25	D	Y en uno ya se hace…		

Transcripción de tres minutos de conversación del grupo S1 en la que concluyen que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge para valores de r entre menos uno y uno.

T	P	Transcripción	gráfica	razón
26	JM	En uno ya se hace…		
27	D	Cero con nueve, nueve, ya…		
28	JM	Ah, bueno porque ya lo toma… pero va		0.999
29	D	Sí, sí, sí. Va.		
30	JM	O sea va entre uno y menos uno. Pon cero con ocho, que se va a ver mejor.		0.99
31	D	Entre uno y menos uno, entonces…, excluyéndolos, vamos.		0.8
32	JM	Claro, excluyéndolos.		
33	D	¿Para qué valores es finito?, pues eso.		
34	JM	¿Por qué? Porque… Pero no encuentro una razón… Porque lo que va sumando…		
35	D	Es menor a la unidad.		
36	JM	Va siendo, es menor a lo que ya has sumado.		
37	D	(asiente)		
38	JM	A lo que has, a la última suma. A la suma anterior.		
39	D	Sí, sí, sí, sí.		
40	JM	Entonces llega un momento que eso va tendiendo a cero, y entonces… Eso es, claro.		
41	D	¿Eh? Bueno. ¿Cuánto va esto? (mira la hora de la grabación) Veintiocho treinta.		
42	JM	Entonces es…		
43	D	Es finito para valores estrictamente…		
44	JM	Uno		
45	D	…mayores que menos uno…		
46	JM	Menos uno, uno. Claro. Desde menos uno a uno.		
47	D	…y menores que uno.		

COMENTARIOS

A continuación, haremos una primera reflexión acerca del tipo de información que nos ha ofrecido el haber obtenido la captura de la pantalla de lo que realizan los participantes con Maple durante toda la sesión de clase, y el poder sincronizar la visualización de esta grabación con la grabación de video. Teniendo en cuenta que la siguiente reflexión se basa en el estudio de un solo grupo de participantes, y que aún no hemos concluido la fase de análisis de todos los datos, los resultados que adelantamos son parciales, y están pendientes de confirmar o ampliar cuando finalicemos la investigación.

Los participantes del grupo S1 han utilizado Maple, principalmente, para obtener representaciones gráficas, reutilizando instrucciones en las que sólo tienen que modificar la expresión general de la sucesión cuyos términos están sumando. Hacen, por tanto, un continuo "copy-paste" que tiene ventajas pero también inconvenientes. La principal ventaja consiste en el ahorro de tiempo al escribir las instrucciones y la despreocupación de tener que memorizar la sintaxis y los parámetros de las instrucciones del software. Un inconveniente que hemos observado, es que en alguna ocasión se han visto forzados a seguir una estructura de pensamiento menos intuitiva por empeñarse en reutilizar una instrucción que en otro ejercicio les resultó útil.

También hemos observado que estudian la convergencia de una serie a partir de la existencia del límite de la sucesión de las sumas parciales, observando en la gráfica la presencia de una asíntota horizontal. Aquí están utilizando un concepto de sucesión como función (McDonald, 2000) y un concepto de serie como límite de una sucesión, lo cual indica un nivel avanzado en el desarrollo del concepto de convergencia de serie numérica. Entre las líneas 2 y 5 de la transcripción se aprecia muy bien el impacto de la visualización de la asíntota horizontal, cuando dibujan más términos de la sucesión para distinguirla mejor. También en la línea 30 comprobamos la influencia de las representaciones gráficas.

En la línea 15 apreciamos un uso del lenguaje incorrecto que, cuando tengamos el análisis más avanzado, nos podrá indicar si se trata de un obstáculo didáctico o de un simple despiste.

CONCLUSIONES

En el proceso de recogida de datos mediante grabaciones de video y en su posterior análisis, hemos comprobado las muchas ventajas, aunque también los inconvenientes, que ya han experimentado otros investigadores. (DuFon, 2002), (Gibson, 2005), (Goldin, 2000), (Lesh, 2000), (Powell, 2003), (Sherin, 2003).

Además de obtener los datos en formato digital, por haber utilizado cámaras web en las grabaciones, hemos innovado el proceso de recogida de datos capturando la pantalla del ordenador en el que los estudiantes trabajan con un software de cálculo simbólico durante toda la sesión de trabajo. Esto nos ha reportado más beneficios que inconvenientes, ya que la única objeción que tiene es la necesitad de trabajar con un ordenador, lo cual es imprescindible cuando se propone un software de cálculo simbólico. A cambio, obtenemos numerosos beneficios que se manifiestan en la fase de análisis cuando la captura de la pantalla nos aporta, por un lado, información novedosa sobre cómo trabajan los estudiantes con la herramienta de cálculo simbólico, y por otro lado, información que complementa los datos que obtenemos de las grabaciones de audio y video.

En cuanto a la primera, al disponer de todos los movimientos que se visualizan en la pantalla, conocemos cómo y para qué utilizan la herramienta de cálculo simbólico (uso del "copy-paste", obtención de representaciones gráficas, etc.).

En cuanto a la información complementaria, nos ayuda a inferir conexiones entre los elementos del modelo teórico a través de dos registros, la elección de las instrucciones que los estudiantes ejecutan en Maple y cómo interpretan los resultados que obtienen a través de la pantalla.

La mayor aportación que hemos obtenido utilizando esta herramienta en la recogida de datos, ha sido la posibilidad que nos ha ofrecido en la fase de análisis de seguir paso a paso cada ejecución que han realizado los estudiantes, ya que así hemos podido comprobar la información que obtuvieron por pantalla y que les ha ayudado en la construcción del concepto de serie numérica.

REFERENCIAS

Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.J. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En Kaput, J., Schoenfeld, A.H., Dubinsky, E. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education II, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education.* 6, 1-32.

Codes, M.; Sierra, M. (2004). Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto. En E. de la Torre (ed.). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones en los grupos de investigación. VIII Simposio de la SEIEM*. Universidade da Coruña (edición en CD).

Codes, M.; Sierra, M. (2006). Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. (Pendiente de publicación).

DuFon, M.A. (2002). Video recording in ethnographic SLA research: some issues of validity in data collection. *Language Learning and Technology*. 6(1). 40-59.

Gibson, B.E. (2005). Co-producing video diaries: the presence of de "absent" research. *International Journal of Qualitative Methods*, 4(3), Article 2. Extraído en febrero de 2007 desde http://www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/4_4/pdf/gibson.pdf.

Goldin, G.A. (2000). A scientific perspective on structured task-based interviews in mathematics education research. En Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* 517-545.

Hall, R. (2000). Videorecording as theory. En Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.). *Handbookesearch of Research Design in Mathematics and Science Education.* 647-664.

Lazarus, E. (2006). Using "videopapers" for professional learning and assessment in initial teacher education. Extraído en febrero de 2007 desde http://www.ituniv.se/program/ikt/ttit06/PowerPoint/Elisabeth_Lazarus_061116.ppt

Lesh, R.; Lehrer, R. (2000). Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. En Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* 665-708.

McDonald, MA.; Mathews, DM.; Strobel, KH. (2000). Understanding sequences: a tale of two objects, en Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed Dubinsky (Ed). *Research in collegiate mathematics education. IV. Conference Board of the Mathematical Sciencies (CBMS), Issues in Mathematics Education*. 8. 77-102.

Powell, A.; Francisco, J.; Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behaviour*. 22, 405-435.

Sherin, M. G. (2003). New perspectives on the role of video in teacher education. *Advances in Research on Teaching*. 10, 1-27.

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *ISOMORFOS* DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Mª Ángeles Lonjedo
IES Montserrat

M. Pedro Huerta
Universitat de València

RESUMEN

En este trabajo completamos un estudio anterior con el que iniciamos una investigación más amplia que trata de estudiar la influencia que tiene, en los procesos de resolución, el formato de presentación de los datos en el enunciado de un problema de probabilidad condicional. No sólo centramos la investigación en la influencia que tienen los datos numéricos sino que, también, la centramos en la posible influencia de la expresión que refiere a una probabilidad condicional con el comportamiento de los estudiantes. Así, mostraremos un esquema de análisis para el estudio de estos comportamientos, particularizándolo para tres problemas estructuralmente isomorfos.

ABSTRACT

This work follows a prior study in which we investigated about the influence on students' behavior of the data in text of word conditional probability problems. Here we will show a schema for the analysis of students' behavior, and in particular when they are solving three structurally isomorphic problems.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Mª Ángeles Lonjedo y M. Pedro Huerta (2007). ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *ISOMORFOS* DE PROBABILIDAD CONDICIONAL, pp. 273-282.

INTRODUCCIÓN

Algunos trabajos que preceden a éste ya adelantan que el formato de presentación de los datos en un problema de probabilidad es un factor que influye en el éxito de los estudiantes. Así, por ejemplo, Sedlmeier (2002) y nosotros mismos, Huerta y Lonjedo (2006), informamos que diferentes formatos de presentación de los datos en un problema de probabilidad condicional conducen a comportamientos diferentes de los estudiantes en la resolución de esos problemas, y que siendo el formato de presentación de datos las frecuencias en lugar de probabilidades, los estudiantes actúan mejor con las primeras que con las segundas.

En otro trabajo anterior, Huerta y Lonjedo (2006) ya hemos determinado que si los datos están expresados en términos de porcentajes entonces los estudiantes resuelven los problemas usando principalmente un razonamiento que podríamos calificar como aritmético para distinguirlo del razonamiento probabilístico usado, mayoritariamente, cuando los datos están expresados en términos de probabilidades. Los formatos de presentación de los datos que entonces contraponíamos eran los porcentajes y las probabilidades. Aquí, sin embargo, vamos a contraponer tres formatos de presentación de datos en un problema en el que el contexto es el mismo y la estructura de datos y de relaciones entre los datos es isomorfa, por lo que es el mismo problema pero expresado en tres formatos de datos diferentes: sólo probabilidades, sólo porcentajes y combinando frecuencias con porcentajes.

Así pues, lo que pretendemos mostrar en este trabajo es como el comportamiento de los estudiantes varía en función de cómo están expresados los datos en el texto del problema, mejorando el porcentaje de éxito si estos se expresan combinando frecuencias y porcentajes. Además, si la condicionalidad en los datos se expresa en una forma determinada, el porcentaje de estudiantes que malinterpreta la probabilidad condicional disminuye.

LOS PROBLEMAS OBJETO DE ESTUDIO

Los problemas que vamos a usar para mostrar la influencia que tiene el formato de presentación de los datos en el comportamiento de los estudiantes en su resolución, pertenecen a una investigación más amplia en la que forman parte de un conjunto de problemas ternarios de probabilidad condicional Cerdán y Huerta (en prensa) que tienen que resolver. Estos tres problemas entran en la escena de la investigación en tiempos diferentes, dos de ellos son de una primera fase de la investigación y el tercero de una segunda fase. Los problemas numerados como en la investigación de la que proceden son los siguientes (Tabla 1):

PROBLEMA P7 Datos numéricos en porcentajes.	*Un 60% de los estudiantes de un instituto aprueban Filosofía y un 70% aprueban Matemáticas. Además, un 80% de los estudiantes que aprobaron Matemáticas también aprobaron Filosofía. Si Juan aprobó Filosofía, ¿cuál es la probabilidad de que también aprobara matemáticas?(Grupo Erema, 2002)*
PROBLEMA P15 Datos numéricos en probabilidades.	*En un instituto, la probabilidad de aprobar Filosofía es 0.6 y la de aprobar Matemáticas es 0.7. Además, escogido un estudiante al azar entre los que aprobaron Matemáticas la probabilidad de que aprobara también filosofía es 0.8. Si Juan aprobó Filosofía, ¿cuál es la probabilidad de que aprobara también Matemáticas?*
PROBLEMA P1 Data numéricos en frecuencias.	*En una clase de 100 alumnos, 60 aprobaron Filosofía y 70 aprobaron Matemáticas. De los que aprobaron Matemáticas, un 80% aprobaron también Filosofía. De los que aprobaron Filosofía, ¿qué porcentaje aprobaron también Matemáticas?*

Tabla 1. Tres formatos de datos para el "mismo problema".

Una misma lectura matemática, a la vez y simultánea, de los tres problemas es posible realizarla con solo traducirlos del lenguaje natural, en el que se expresan los enunciados, al lenguaje simbólico de las probabilidades, para lo cual todas las cantidades (conocidas y desconocidas) son leídas con sentido probabilístico:

Sea F el conjunto de referencia para las expresiones: *estudiantes de un instituto aprueban Filosofía* (P7), *aprobar Filosofía* (P15), …(estudiantes que) *aprobaron Filosofía* (P1). Sea ahora M el conjunto de referencia para expresiones similares a las que contiene F, sólo cambiando Filosofía por Matemáticas. Consideremos F y M como sucesos. Sean p(F) y p(M) las probabilidades de los sucesos F y M definidos anteriormente. Una lectura de los datos numéricos de cada problema con sentido probabilístico nos proporcionan las siguientes probabilidades: p(F) =60/100=0.6 (P7 y P15), leyendo igual la razón 60 de 100 en P1; análogamente P(M)=70/100=0.7 (P7 y P15 y la razón 70 de 100).

Sea p(F| M)=0.8 la forma en la que leemos el dato sobre la probabilidad condicional en cada uno de los problemas: *un 80% de los estudiantes que aprobaron Matemáticas también aprobaron Filosofía* (P7), *escogido un estudiante al azar entre los que aprobaron Matemáticas la probabilidad de que aprobara también Filosofía es 0.8* (P15) y *De los que aprobaron Matemáticas, un 80% aprobaron también Filosofía* (P1). Finalmente, sea p(M| F) la forma en la que leemos las preguntas de los tres problemas. En los problemas P7 y P15 introduciendo la condición con el condicional *Si*. En P1, manteniendo la misma estructura gramatical que el dato sobre la probabilidad condicional, *De los que…*

Así que hay una misma lectura posible de los tres problemas en el lenguaje simbólico: Dados p(F), p(M) y p(F| M) halla p(M| F). Los tres problemas son así isomorfos.

La isomorfía, sujeta al criterio que hemos considerado aquí, sólo es estructural, tanto para los datos (sucesos y probabilidades) como para las relaciones entre los datos que conducen a la solución de los problemas. Cualquier otra lectura que se haga de esos problemas, incluso desde los propios problemas, los hace no isomorfos, diferentes, aunque el contexto en el que se establecen es el mismo para los tres. Números, cantidades relativas, expresiones de sucesos y probabilidades son también diferentes. Entonces, desde este punto de vista, solo las resoluciones que traduzcan los tres problemas en problemas isomorfos serán, en principio, idénticas, es decir, será posible reconocer comportamientos idénticos en sus resoluciones. Cualquier otra lectura producirá, razonablemente, comportamientos diferenciados.

LOS ESTUDIANTES OBSERVADOS

Los tres problemas de los que hablamos aquí forman parte de una batería de problemas que fueron administrados a estudiantes de diferentes niveles educativos y, por tanto, con diferentes competencias matemáticas en probabilidad: estudiantes de la ESO (13-14 años), del Bachillerato (16-18 años) y de 2º Curso en la Licenciatura de Matemáticas. La distribución del número de alumnos en cada uno de los niveles mencionados puede verse en la tabla siguiente (Tabla 2). Los estudiantes de la ESO no habían recibido formación en probabilidad condicional.

Nivel escolar	P7	P15	P1
Secundaria Obligatoria	11	5	31
Bachillerato	52	26	39
Facultad de Matemáticas	4	2	10
Total	67	33	80

Tabla 2: Número de alumnos que abordaron cada uno de los problemas propuestos.

Lo que queríamos observar era comportamientos distintos en la resolución de los problemas. Así que la muestra tenía que ser longitudinal, estudiantes capaces de realizar lecturas matemáticas de los problemas, un poco menos capaces de ello y sin ninguna capacidad pues no habían recibido enseñanza en ese sentido. También esperábamos que en todos los casos un estudiante de la Licenciatura de Matemáticas hiciera una misma lectura de los tres problemas, siempre la misma, y sin que influyera en él el formato de los datos los usara con un sentido probabilístico. Del resto de la muestra no esperábamos actuaciones semejantes e incluso dudábamos que estudiantes de la ESO alcanzaran resultados con éxito.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Con los problemas P7 y P15 habíamos comprobado experimentalmente, de lo que informamos en un trabajo anterior (Huerta y Lonjedo, 2006), que en general el porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente ambos problemas fue muy bajo y que éstos eran exclusivamente estudiantes de la Facultad de Matemáticas. Consideramos entonces un nuevo problema, el problema P1, que, desde un punto de vista estructural, fuese isomorfo con los otros dos pero, en cambio, mantuviera diferencias de formato con los dos considerados inicialmente y comprobar si estas diferencias proporcionaban un porcentaje mayor de éxitos en las resoluciones de los problemas. Así, la experiencia con los problemas P7 y P15 nos permitió reconsiderar las oraciones que en el texto del problema hacían referencia a las probabilidades condicionales y expresarlas manteniendo la misma estructura gramatical con el fin de limitar en los estudiantes tantas incomprensiones no deseadas como fuera posible. Así, las cantidades que como datos contiene el problema P1 son frecuencias absolutas, aunque referidas a una muestra de 100, excepto, naturalmente, para expresar la probabilidad condicional. Además, en P1, hemos intentado minimizar dificultades de tipo semántico observadas en las resoluciones de los problemas P7 y P15, al considerar en el texto del problema una expresión de la probabilidad condicional que favoreciera su comprensión e interpretación en el sentido deseado. Así, entre el catálogo de expresiones posibles de la condicionalidad se escogió la forma gramatical “de los que verifica A, un % cumplen también con B”, tanto en el dato numérico como en la pregunta del problema.

Con estos tres problemas adelantamos resultados de una investigación más amplia, de la que daremos cuenta en un futuro, en la que se trata de investigar procesos de resolución de una familia particular de problemas de probabilidad condicional. Lo que pretendemos mostrar en este trabajo es el comportamiento de los estudiantes en función de cómo están expresados los datos en el texto del problema y si la condicionalidad en los datos expresan en una forma determinada favorece la comprensión del dato que refiere a una probabilidad condicional.

EL ESQUEMA DE ANÁLISIS DE LAS RESOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES

De los estudiantes disponemos sus producciones escritas. Con el fin de analizarlas, diseñamos un esquema de análisis que usamos para todos los problemas de las pruebas más generales y, en particular, para los tres considerados aquí. En este esquema distinguimos, inicialmente, dos descriptores generales que llamamos:

(1) Proceso de resolución con éxito
(2) Proceso de resolución sin éxito

descriptores que hacen referencia a aquellas resoluciones de los estudiantes que conducían a los resultados correctos o no, respectivamente, del problema. Como las resoluciones y sus resultados dependen del razonamiento usado, distinguimos además los siguientes descriptores:

1.- Procesos de resolución con éxito

1.1. Procesos de resolución del problema que incluye un razonamiento exclusivamente aritmético. Es decir, en sus resoluciones los estudiantes razonan exclusivamente con las cantidades mencionadas en el texto del problema, sin hacer referencia alguna ni a sucesos ni a las probabilidades de dichos sucesos, al menos en una forma explícita.

1.2. Procesos de resolución del problema que incluye un tipo de razonamiento que es principalmente aritmético. Los estudiantes razonan con las cantidades mencionadas en el problema pero reconocen sucesos a los que les asocian, de una forma explícita, frecuencias o porcentajes. Este reconocimiento se parece más a una lectura del problema que a un intento de resolverlo con sentido probabilístico

1.3 Procesos de resolución que incluyen un tipo de razonamiento que es básicamente probabilístico. En sus resoluciones, los estudiantes piensan aritméticamente sobre las cantidades en el texto del problema. Esas cantidades, en cambio, no se usan explícitamente como probabilidades. Sin embargo, los estudiantes reconocen sucesos, a los que se les asignan probabilidades, pero no usan de una manera explícita las relaciones entre sucesos y probabilidades para obtener la solución del problema.

1.4. Procesos de resolución que incluyen un tipo de razonamiento que calificamos como exclusivamente probabilístico. Los estudiantes reconocen sucesos, a los que les asignan probabilidades, y usan de una manera explícita las relaciones entre sucesos y sus probabilidades con el fin de obtener la solución del problema.

2.-Proceso de resolución sin éxito.

El descriptor general que permite incluir resoluciones de estudiantes que no obtienen el resultado correcto del problema, lo hemos desglosado en descriptores más específicos que pretenden dar cuenta de las dificultades de los resolutores. Estas dificultades pueden ser de órdenes diferentes: de orden semántico y semiótico, comprensiones erróneas y errores. Estos son:

2.1. Dificultades. Objeto de estudio, los problemas

Las dificultades de los estudiantes en la resolución del problema las analizamos en relación con las variables semánticas y semióticas de las que hemos hecho referencia más de una vez. Estas variables implican a las estructuras gramaticales que expresan la condicionalidad y su medida en términos de datos numéricos. Las dificultades provocan errores en las resoluciones de los estudiantes, errores que relacionamos con estas variables. Los descriptores de los errores identificados son los siguientes:

2.2 Errores: Objeto de estudio, los estudiantes resolviendo los problemas. Errores relacionados con las dificultades antes identificadas.

2.2.1 Errores como consecuencia de las dificultades de orden semántico.

Estos errores son debidos a interpretaciones no deseadas de los datos que contiene el enunciado de los problemas en procesos de traducción desde el lenguaje natural al lenguaje simbólico. A veces, los procesos de resolución de los problemas son coherentes con las interpretaciones de los estudiantes. Esos errores podrían aparecer al principio del proceso de resolución del problema, ya sea en el reconocimiento de los sucesos y en la asignación de las probabilidades a los sucesos.

Así, como interpretaciones erróneas dadas por los estudiantes, surgidas de estas dificultades de orden semántico, tenemos:

2.2.1.1. Interpretaciones erróneas de la probabilidad condicional en los datos del problema:
2.2.1.1.1. Interpretación de la condicionalidad como un suceso intersección (como en Ojeda, 1995).
2.2.1.1.2. Interpretación de la condicionalidad como una probabilidad absoluta. Es decir, los estudiantes en lugar de usar el dato $p(A|B)$ usan $p(A)$.
2.2.1.2. Interpretaciones erróneas de la probabilidad condicional cuando es una pregunta del problema.
2.2.1.2.1 Interpretación de la condicionalidad como un suceso intersección. Los estudiantes responden a la pregunta sobre la probabilidad condicional por medio de una probabilidad de la intersección.
2.2.1.2.2. Interpretación de la condicionalidad en la pregunta como una condicionalidad en los datos. Los estudiantes interpretan $p(A|B)$ con $p(B|A)$, siendo la primera probabilidad un dato en el enunciado del problema y la segunda la pregunta del problema.

No todas las respuestas de los estudiantes encajan en este esquema de análisis, por lo que, como es práctica habitual, se incluye un tercer descriptor (3) definido como Otros que recoge respuestas en blanco, o que no es posible reconocer en las resoluciones ningún tipo de registro escrito que sugiera alguno o algunos de los comportamientos descritos por los descriptores ya establecidos.

ALGUNOS RESULTADOS

El porcentaje de estudiantes que resolvieron con éxito los problemas P7 y P15 fue del 6% de todos los que lo intentaron. Todos ellos fueron estudiantes de la Facultad de Matemáticas. Sin embargo, el porcentaje de estudiantes que tuvieron éxito resolviendo el problema P1 fue de alrededor del 36%, habiendo ahora resoluciones de los tres niveles educativos observados.

Cuatro de los estudiantes de la Facultad de Matemáticas resolvieron el problema P7 con éxito. Tres de ellos usaron un razonamiento que lo hemos clasificado como exclusivamente probabilístico, tal y como era razonable esperar, mientras que un cuarto alumno lo resolvió como puede verse en la Figura 1. Este razonamiento lo calificamos como principalmente probabilístico, ya que si bien se reconocen sucesos y operaciones entre sucesos, solo el sentido probabilístico de los datos aparece al final de la resolución, cuando la respuesta se expresa en términos de probabilidades.

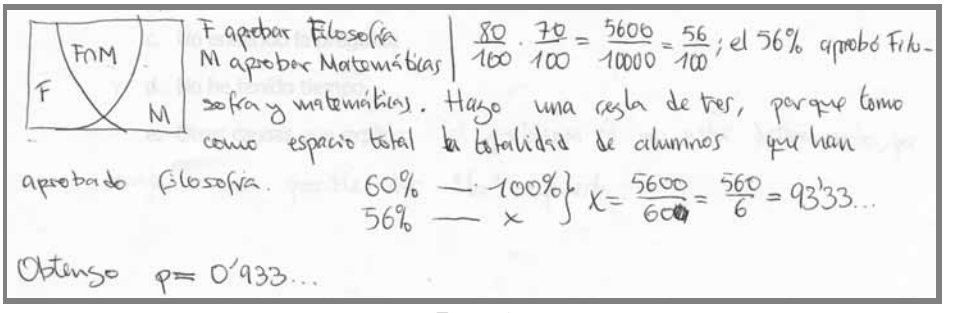


Figura 1

Los dos estudiantes que resolvieron con éxito P15 fueron de la Facultad de Matemáticas. La Figura 2 muestra la actuación de uno de ellos. Este razonamiento lo hemos calificado como exclusivamente probabilístico.

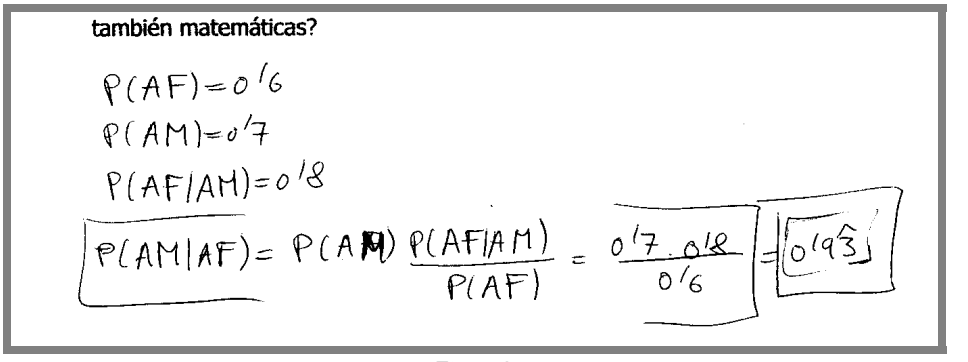


Figura 2

El porcentaje de estudiantes que resolvieron con éxito el problema P1 aumentó considerablemente en comparación con los porcentajes de sus problemas “isomorfos”. De éstos, el razonamiento usado fue principalmente aritmético en, aproximadamente, el 65% de los casos frente a solo 10% que lo resolvió haciendo una lectura matemática del mismo usando un razonamiento exclusivamente probabilístico. La tabla siguiente (Tabla 3) muestra los porcentajes comparados del análisis de las resoluciones para los tres problemas y los descriptores del esquema de análisis.

Descriptores	Problema P7 Datos en porcentajes	Problema P15 Datos en probabilidades	Problema P1 Datos en frecuencias
1. Procesos de resolución con éxito	5.97	6.06	36.25
1.1 Razonamiento exclusivamente aritmético	0	0	24.13
1.2 Razonamiento principalmente aritmético	0	0	65.52
1.3 Razonamiento básicamente probabilístico	25	0	0
1.4 Razonamiento exclusivamente probabilístico	75	100	10.34
2. Proceso de resolución sin éxito	58.21	27.27	42.50
2.2.1.1.1. Interpretación de la condicionalidad en los datos como un suceso intersección	33.33	44.44	2.94
2.2.1.1.2. Interpretación de la condicionalidad como una probabilidad absoluta	0	11.11	0
2.2.1.2.1. Interpretación de la condicionalidad en la pregunta como un suceso intersección	56.41	44.44	17.65
2.2.1.2.2. Interpretación de la condicionalidad en la pregunta como la condicionalidad en los datos.	7.69	0	5.88
3. Otras	35.82	66.67	21.25

Tabla 3: Porcentajes comparados para los tres problemas y los descriptores.

El porcentaje de interpretaciones no deseadas de la condicionalidad disminuye drásticamente en el caso del problema P1. De los estudiantes que no resuelven el problema P1 con éxito, un porcentaje poco apreciable de ellos se debe a una mala interpretación del dato condicional como un suceso intersección, mientras que en el caso de sus problemas isomorfos estos porcentajes son mucho más significativos, lo mismo que trasladar esta interpretación no deseada del dato a la pregunta, apreciándose un porcentaje mayor en el caso del problema P7 que en el problema P1. La Figura 3 muestra la actuación de un estudiante de Bachillerato en P7 que da cuenta de esta interpretación.

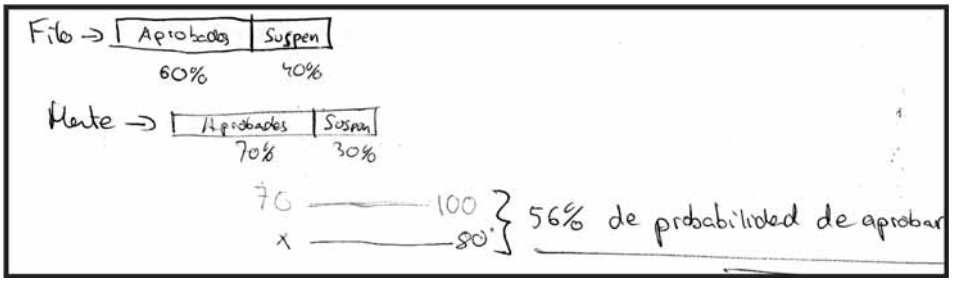


Figura 3

Las tablas 4, 5 y 6 muestran estos datos en frecuencias absolutas y distribuidos según los niveles educativos de los estudiantes, para más detalles.

P7	1	1.1	1.2	1.3	1.4	2	2.2.1.1.1	2.2.1.2.1	2.2.1.2.2	3
MUESTRA	4	0	0	1	3	39	13	22	3	24
4º ESO	0	0	0	0	0	7	5	2	0	4
Bachiller	0	0	0	0	0	32	8	20	3	20
EFM	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 4

P15	1	1.4	2	2.2.1.1.1	2.2.1.1.2	2.2.1.2.1	2.2.1.2.2	3
MUESTRA	2	2	9	4	1	2	0	22
4º ESO	0	0	3	2	1	0	0	2
Bachiller	0	0	6	2	0	2	0	20
EFM	2	2	0	0	0	0	0	0

Tabla 5

P1	1	1.1	1.2	1.3	1.4	2	2.2.1.1.1	2.2.1.1.2	2.2.1.2.1	2.2.1.2.2	3
MUESTRA	29	8	18	0	3	34	1	0	6	2	17
4º ESO	13	7	6	0	0	10	0	0	5	0	8
Bachiller	8	0	8	0	0	23	1	0	1	2	8
EFM	8	1	4	0	3	1	0	0	0	0	1

Tabla 6

DISCUSIÓN

Hemos visto, aunque brevemente, como la presentación de los datos en los problemas de probabilidad condicional tienen cierta influencia en el éxito de los resolutores y en los procesos de razonamiento implicados. Este incremento en el porcentaje de éxitos, en relación con el escaso tenido en sus problemas "isomorfos", se debe, según nuestro parecer, a un doble factor: la modificación de expresiones o términos que provocan ambigüedad en la condicionalidad y el formato de presentación de los datos. Así, por ejemplo, eliminar las palabras "y" o "también" del texto del problema puede hacer que los estudiantes no confundan una probabilidad condicional con una probabilidad de la intersección. Por otra parte, la estructura gramatical: DE LOS QUE.., relacionada con un porcentaje en el problema P1, mejora la comprensión del dato sobre la probabilidad condicional respecto de las otras formulaciones en los problemas "isomorfos".

Cuando los datos están expresados en frecuencias absolutas y la probabilidad condicional en porcentajes, hemos visto como el porcentaje de alumnos que tienen éxito crece y que incluso estudiantes con niveles educativos más bajos, como los estudiantes de la ESO, son capaces de resolverlos. Gigerenzer (1994) ya aseguró que para resolver problemas de probabilidad nuestras mentes están mejor equipadas si todos los datos están expresados en términos de frecuencias absolutas. Más tarde introdujo la noción de frecuencias naturales (Hoffrage, Gigerenzer, Krauss & Martignon, 2002) con la que refuerza aún más la afirmación

anterior. Estamos de acuerdo con lo anterior, pero hemos de añadir que si los problemas de los que hablamos son problemas de probabilidad condicional, el formato que más favorece la comprensión del dato que se refiere a ella es el porcentaje, ya que de este modo es posible diferenciarlo de las frecuencias absolutas, o naturales, mientras se realiza su lectura e interpretación.

CONCLUSIÓN

El hecho de que, además de lo dicho hasta ahora, la mayoría de los estudiantes que tuvieron éxito con los problemas usaran principalmente un razonamiento aritmético en sus resoluciones, aunque mostraron reconocer sucesos y sus frecuencias y porcentajes pero no lo usaran en un sentido probabilístico en ellas, nos permite hacer algunas sugerencias para la organización de la enseñanza de la probabilidad condicional.

Como otros autores, por ejemplo Martignon y Wassner (2002), proponemos que el proceso de enseñanza de la probabilidad condicional comience con problemas cuya estructura y formato de datos sea como la del problema P1 y en contextos variados, como un paso previo para abordar problemas como los P7 y finalizar con problemas como P15. La razón es que así introducimos a los estudiantes a la probabilidad condicional mediante razones y proporciones, es decir, razonando de una manera exclusivamente aritmética, siguiendo con un el uso de los porcentajes con un cierto sentido probabilístico y finalizando con el uso de las probabilidades. Esto debería tomar el tiempo que fuera necesario desde los niveles educativos más bajos hasta los más altos, con el fin de mejorar las competencias de nuestros estudiantes en probabilidad en todos los niveles educativos.

REFERENCIAS

Cerdán, F.; Huerta, M. P. (en prensa), Problemas Ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomials. *Educación Matemática*.

Gigerenzer, G. (1994): Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa), *Subjective probability*, En G. Wright y P.Ayton (Eds.) pp. 129-161, Wiley

Grupo Erema: Martín M.A., Rey J.M., Reyes M., (2002) *Estadística y Probabilidad, Bachillerato*, Cuaderno 4, (Madrid: Bruño)

Hoffrage, Gigerenzer, Krauss & Martignon, (2002) Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not, *Cognition* 84, 343-352

Huerta, M.P; Lonjedo, M. A. (2006) The Nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem solving behavior. In M. Bosch (ed) (2006), *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Four Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (edición en CD), pp. 528-538. (Sant Feliu de Guíxols, España).

Martignon, L., Wassner, Ch., (2002), *Teaching Decision Making and Statistical Thinking with Natural Frequencies*, in http://www.stat.auckland.ac.nz/publications/1/10_52_ma.pdf.

Ojeda Salazar, A.M. (1995), Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional, *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº5, julio 1995, pp. 37-44.

Sedlmeier, P., (2002), Improving Statistical Reasoning by Using the Right Representational Format, in http://www.stat.auckland.ac.nz/publications/1/3f3_sedl.pdf.

PATRONES, GENERALIZACIÓN Y ESTRATEGIAS INDUCTIVAS DE ESTUDIANTES DE 3º Y 4º DE LA ESO EN EL PROBLEMA DE LAS BALDOSAS

María C. Cañadas
Universidad de Zaragoza

Encarnación Castro y Enrique Castro
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo describimos los patrones y la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 3º y 4º de la ESO en la resolución del "problema de las baldosas". Prestamos especial atención a los tipos de patrones identificados, a la forma en que los estudiantes expresan la generalización y, mediante la descripción de las estrategias inductivas, presentamos algunas características de la generalización referentes a los elementos y a los sistemas de representación utilizados.

ABSTRACT

This paper concerns the patterns and the generalization developed by 359 2nd and 3rd Secondary students in the "tiles problem". We pay special attention to the kinds of patterns identified, to the written ways in which students express generalization and, using inductive strategies, we present some characteristics of the generalization relating to the elements and the representations used.

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto del plan nacional de I+D+I *Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática*, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER, con referencia SEJ2006-09056.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
María C. Cañadas, Encarnación Castro y Enrique Castro (2007). PATRONES, GENERALIZACIÓN Y ESTRATEGIAS INDUCTIVAS DE ESTUDIANTES DE 3º Y 4º DE LA ESO EN EL PROBLEMA DE LAS BALDOSAS, pp. 283-294.

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo general es describir y caracterizar el razonamiento inductivo que emplean estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para ello hemos construido, como instrumento de recogida de información, una prueba escrita conformada por seis problemas, en los que aparecen patrones cuya generalización se puede expresar mediante progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2.

Presentamos parte de los resultados obtenidos del análisis de datos de las producciones de los estudiantes en uno de los seis problemas propuestos, el problema de las baldosas. Nos centramos en los resultados que se centran en la identificación de patrones y en la generalización expresada por los estudiantes.

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Consideramos que el razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información de la que aportan los datos iniciales con los que se inicia el proceso. Este tipo de razonamiento da lugar al conocimiento científico a través del descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares (Neubert y Binko, 1992). Según esta concepción, defendida desde los matemáticos clásicos como Hermite (véase Polya, 1962-65), Poincaré (1902) o Pólya, 1945, 1962-1965, 1966), hasta asociaciones como la National Council of Teachers of Mathematics (2003), la inducción es un medio potente para la adquisición de conocimiento, para realizar descubrimientos matemáticos y para poner a los alumnos en una situación semejante a la de un matemático en su quehacer científico.

Pasos del Razonamiento Inductivo

Pólya identifica unos *pasos*[1] en el proceso de razonamiento inductivo, los cuáles permiten la sistematización del trabajo relacionado con el mismo. El proceso se iniciaría con casos particulares, pasaría por la formulación de una conjetura, y se llegaría a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares. Consideramos estos pasos como una aproximación a un *modelo ideal* del razonamiento inductivo. Con base en este modelo, Cañadas y Castro (2007) proponen siete pasos para la descripción de este razonamiento:

1. Trabajo con casos particulares.
2. Organización de casos particulares.
3. Identificación de un patrón.
4. Formulación de conjetura.
5. Justificación de conjetura (basada en casos particulares).
6. Generalización.
7. Demostración.

En este trabajo nos centramos en dos de estos pasos: *identificación de un patrón* y *generalización*.

Patrones y Generalización

La importancia de los patrones en el estudio del proceso de generalización que llevan a cabo estudiantes ha sido puesta de manifiesto en diversas investigaciones como las de Fou-Lai y Kai-Lin (2004), Mason (1996) o Stacey (1989).

1 Damos el nombre de *pasos* a los diferentes elementos individuales que se pueden diferenciar en todo el proceso de razonamiento inductivo

Los problemas relacionados con la búsqueda de patrones y las secuencias numéricas han sido planteados, en ocasiones, en contextos pictóricos para probar con un formato alternativo a las listas de números (Castro, 1995; García, 1998). Considerando que la componente visual puede jugar un papel crucial en el desarrollo del razonamiento, otras investigaciones como las de Orton, Orton y Roper (1999) y Radford (2000) muestran que el sistema de representación gráfico es una opción potente cuando se trata de identificar estrategias utilizadas por los estudiantes en tareas relacionadas con la generalización lineal. Sin embargo, la generalización no siempre encuentra un aliado en la visualización, como ponen de manifiesto Orton y Orton (1994).

Inducción como Estrategia de Resolución de Problemas

Las estrategias se pueden considerar como los métodos que conducen a la solución de problemas de cualquier tipo. Uno de los heurísticos que Pólya considera en la resolución de problemas es la inducción, que trata de proporcionar regularidad y coherencia a los datos obtenidos a través de la observación (Pólya, 1945; 1966).

Desde la Educación Matemática, las estrategias se definen como las *formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados* (Rico, 1997a, p. 31).

Estrategias Inductivas

Para la descripción de las estrategias, partimos de las progresiones aritméticas como contenido matemático involucrado en el problema. La descripción del contenido matemático[2], nos lleva a considerar los términos k-ésimos de la progresión (casos particulares) y el término general de la misma, como elementos implicados en el proceso inductivo; los sistemas de representación en los que se pueden expresar éstos; así como las posibles transformaciones que los estudiantes pueden realizar (Cañadas, 2006). En este contexto, las *estrategias inductivas* son un tipo de estrategias que se pueden describir en problemas donde la inducción se puede utilizar como heurístico en el sentido que considera Pólya (1966). Estas estrategias tienen en cuenta las características específicas del contenido matemático concreto al que estamos haciendo referencia, así como el proceso inductivo que puede permitir la resolución del problema propuesto. Seguimos el procedimiento[3] descrito por Cañadas y Castro (2006), para identificar las estrategias inductivas que emplean los estudiantes.

Nuestro interés se centra en analizar el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas, mediante el análisis de sus producciones escritas (representaciones externas). En la Figura 1 recogemos algunas ideas que permiten ubicar este interés, las principales conexiones establecidas y el modo en que abordamos el trabajo en el contexto de la resolución de problemas.

2 Hacemos esta descripción con base en la estructura conceptual y los sistemas de representación, dos de los organizadores del currículo de matemáticas que considera Rico (1997b) y que Gómez (2007) utiliza en el análisis de contenido.

3 Este procedimiento tiene en cuenta los elementos de las progresiones que los estudiantes utilizan en la resolución del problema y las transformaciones entre los sistemas de representación que llevan a cabo.

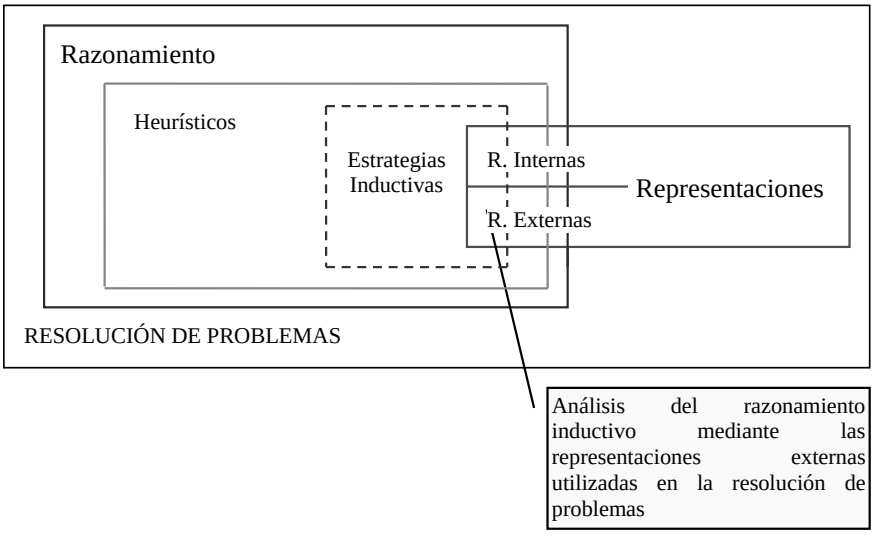


Figura 1. Inducción y resolución de problemas

METODOLOGÍA

En la investigación participaron 359 estudiantes de 3º y 4º de la ESO, seleccionados intencionalmente, de cuatro centros públicos de Cúllar-Vega, Granada, Madrid y Teruel.

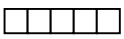
La prueba se aplica en el centro educativo y aula habituales de los alumnos, en una de sus horas de matemáticas. Los alumnos debían trabajar individualmente en los problemas que constituyen la prueba, sin interacción alguna.

En este trabajo presentamos los patrones identificados por los estudiantes, y un análisis cuantitativo con "Respuesta" (R), "Pasos de Razonamiento Inductivo" (Pasos) y "Estrategias Inductivas" (EI) como variables dependientes. Son variables cualitativas nominales. Respuesta es una variable dicotómica, a la que asignamos "1" si los estudiantes responden y "0" si no lo hacen. Pasos es una variable multidimensional cuyos valores son los pasos del modelo teórico de razonamiento inductivo. Cada uno de esos pasos es una variable dicotómica, con los valores "1" y "0", según si realizan o no el paso. Los valores de EI son todas las estrategias inductivas identificadas para el problema. A cada estudiante le corresponde una única estrategia inductiva.

Problema de las Baldosas

El enunciado del problema de las baldosas presentado a los estudiantes es:

Imagina que tienes unas baldosas cuadradas blancas y otras baldosas cuadradas grises. Las baldosas blancas y las baldosas grises son del mismo tamaño. Hacemos una fila con las baldosas blancas:



Rodeamos las baldosas blancas con baldosas grises, tal y como muestra el dibujo:

- ¿Cuántas baldosas grises necesitarías si tuvieras 1320 baldosas blancas y quisieras rodearlas de la forma que lo hemos hecho en el dibujo?

- Justifica tu respuesta.

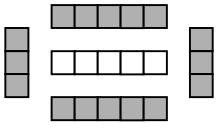
ANÁLISIS DE DATOS

Realizamos un análisis de frecuencias de las variables dependientes y un análisis de (in)dependencia de Patrones y Generalización como valores de la variable Pasos.

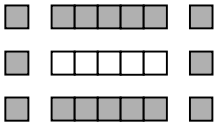
PATRONES

El análisis de datos indica que el 40,7% de los estudiantes que respondieron al problema, llegan a identificar un patrón (ver Tabla 1). La mayoría de estos alumnos, descomponen el número de baldosas grises (16) que necesitan en función del número de baldosas blancas (5). Presentamos el desarrollo numérico de 16 que han utilizado estos estudiantes y la representación gráfica correspondiente, así como la respuesta adecuada (expresada entre paréntesis) a la que pueden llevar los respectivos patrones:

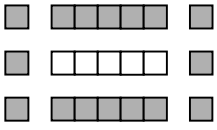
1) 5 x 2 + 6... (1320 x 2 + 6 = 2646)



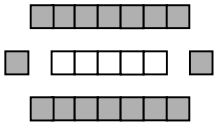
2) 5 + 5 + 1 + 1 + 4... (1320 + 1320 + 1 + 1 + 4 = 2646)



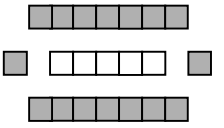
3) 5 x 2 + 2 + 4... (1320 x 2 + 2 + 4 = 2646)



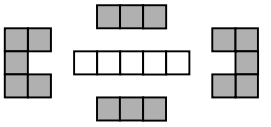
4) 7 + 7 + 1 + 1... (1322 + 1322 + 1 + 1 = 2646)



5) 7 x 2 + 2... (1322 x 2 + 2 = 2646)



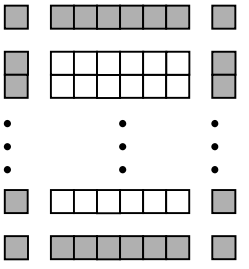
6) 3 x 2 + 10... (1318 x 2 + 10 = 2646)



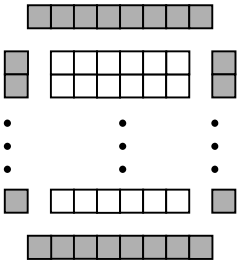
Estos seis patrones son equivalentes y expresan el número de baldosas grises en función del número de baldosas que se pongan en fila. Cada una de estas formas de descomponer el número 16 refleja un modo de visualizar un patrón a partir de la representación gráfica del enunciado. La representación gráfica de los patrones 2 y 3; y 4 y 5 son iguales respectivamente, aunque sus expresiones desarrolladas numéricamente sean diferentes.

Se han identificado otros dos patrones en los que el número de baldosas grises está escrito en función del número de filas de baldosas blancas que se formen, teniendo en cuenta que en cada fila de baldosas blancas debe haber cinco:

7) 264 + 264 + 5 + 5 + 4 (542)



8) 264 + 264 + 7 + 7 (542)



Los estudiantes han expresado otros patrones sólo numéricamente, a partir de los números presentes en el caso particular que se muestra en el enunciado y lo extrapolan para el caso de las 1320 baldosas:

9) 1320 x 2
10) 1320 x 5
11) 1320 x 16
12) 1320 + 3
13) 1323 + 3
14) 1326 + 10

GENERALIZACIÓN

La generalización, según el marco teórico presentado, puede ser un paso que empleen los estudiantes en la tarea de extrapolación propuesta.

Como se deduce de la Tabla 1, el 19,5% de los estudiantes que responden al problema de las baldosas, llegan a expresar la generalización (verbal o algebraicamente).

Tabla 1. Generalización-Patrón

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón	0	Frecuencia absoluta	182	0	182
		% de Patrón	100,0%	,0%	100,0%
		% de Generalización	73,7%	,0%	59,3%
		% del total	59,3%	,0%	59,3%
	1	Frecuencia absoluta	65	60	125
		% de Patrón	52,0%	48,0%	100,0%
		% de Generalización	26,3%	100,0%	40,7%
		% del total	21,2%	19,5%	40,7%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Patrón	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste de chi-cuadrado de independencia estadística (0,000) a un nivel de significación del 95%, indica que la generalización depende de la identificación de un patrón. Además, tal y como indica la Gamma asociada (1,000), se trata de una dependencia significativa en el sentido de que los alumnos que no han identificado un patrón, no llegan a expresar la generalización.

En la Tabla 2, se observa que el 85% de los alumnos que generalizan, han detectado un patrón adecuado para el problema de las baldosas (uno de los ocho primeros patrones descritos anteriormente). El 15% restante de los estudiantes que generalizan, lo consiguen después de haber identificado un patrón no adecuado al problema.

Tabla 2. Generalización-Patrón Adecuado

			Generalización		
			0	1	Total
Patrón Adecuado	0	Frecuencia absoluta	199	9	208
		% de Patrón Adecuado	95,7%	4,3%	100,0%
		% de Generalización	80,6%	15,0%	67,8%
		% del total	64,8%	2,9%	67,8%
	1	Frecuencia absoluta	48	51	99
		% de Patrón Adecuado	48,5%	51,5%	100,0%
		% de Generalización	19,4%	85,0%	32,2%
		% del total	15,6%	16,6%	32,2%
Total		Frecuencia absoluta	247	60	307
		% de Patrón Adecuado	80,5%	19,5%	100,0%
		% de Generalización	100,0%	100,0%	100,0%
		% del total	80,5%	19,5%	100,0%

El p-valor asociado al contraste de Chi-cuadrado de independencia estadística (0,000), con un nivel de significación del 95%, indica que la expresión de la generalización depende de la identificación de un patrón adecuado. Dado que la Gamma asociada es 0,918, podemos concluir que existe una fuerte dependencia de la generalización con respecto a la identificación de un patrón adecuado en este problema.

EXPRESIÓN DE LA GENERALIZACIÓN

Únicamente 3 estudiantes expresan la generalización de forma algebraica. Teniendo en cuenta que la generalización se puede expresar verbal o algebraicamente, podemos concluir que el 95% de los estudiantes que generalizan, lo hacen verbalmente (57 de 60).

ESTRATEGIAS INDUCTIVAS

Cada estrategia inductiva queda determinada por una secuencia de transformaciones cuyo significado se puede descifrar según las tablas del Anexo A. Para el problema de las baldosas, tenemos en cuenta que el trabajo comienza con el término k-ésimo expresado gráficamente. Según las producciones de los estudiantes que generalizan, recogemos las estrategias inductivas que emplean en la resolución del problema de las baldosas en la Tabla 3.

Tabla 3. Estrategias inductivas

Estrategias Inductivas	Frecuencia	% de Generalizan	Elementos
T1-TSN-C1-TSA	1	1,7	Términos k-ésimos y Término general
T1-C4	9	15	
T1-TSN-C4	36	60	
TSG-C1-C1B-T5	1	1,7	
TSG-T1-C4	1	1,7	
TSG-T1-TSN-C4	7	11,7	
TSG-C4-C4B-TSN	2	3,3	
T6-C3-C3B-TSN	1	1,7	
C5-C4B-TSN	2	3,3	
Total Generalizan	60	100	
Responden al problema	307		

En cuanto al trabajo previo que realizan los 60 alumnos que expresan la generalización, hay 2 que generalizan directamente a partir del enunciado (C5-C4B-TSN).

De la Tabla 3 se puede deducir que el 90% de los alumnos que generalizan han trabajado previamente con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (T1 antes de C1 o C4) (54 de 60), el 5% ha trabajado previamente en el sistema de representación gráfico únicamente (TSG-C1-C1B-T5, TSG-C4-C4B-TSN) y el 5% restante ha hecho alguna transformación antes de generalizar, empleando únicamente el sistema de representación verbal antes de la generalización o han combinado varios sistemas de representación para los casos particulares con los que trabajan.

Destacamos el 13,4% de los alumnos que generalizan y que han combinado los sistemas de representación gráfico y numérico antes de expresar la generalización verbal (aparece TSG-T1 antes de C4).

USO DE LA GENERALIZACIÓN

Los tres alumnos que generalizan algebraicamente, muestran dos usos diferentes de la generalización: dos de ellos utilizan la expresión del término general para calcular el número de baldosas grises necesarias (emplean las estrategias inductivas TSG-C1-C1B-T5 y T6-C3-C3B); y un tercer estudiante llega a una expresión algebraica para el término general como última transformación en la resolución del problema.

De los 57 alumnos que generalizan verbalmente, cuatro la utilizan para calcular el término k-ésimo de la progresión que pregunta el problema. Esos alumnos son los que siguen las estrategias TSG-C4-C4B-TSN y C5-C4B-TSN.

CONCLUSIONES

Pese a la presencia del sistema de representación gráfico en el enunciado, la mayor parte de los alumnos que generalizan trabajan previamente en el sistema de representación numérico. Esto puede deberse a la mayor familiaridad de los estudiantes con las representaciones numéricas.

Las respuestas de los estudiantes han puesto de manifiesto la relevancia de la identificación de patrones en el proceso de generalización en el problema de las baldosas. La genera-

lización depende, tanto de la detección de un patrón, como de la identificación de un patrón adecuado.

La mayoría de los patrones que identifican los estudiantes, son patrones adecuados al problema planteado (ver Tabla 2). Este dato, junto con la amplia variedad de patrones válidos detectados a partir de la representación gráfica que aparece en el problema, hace que podamos considerar la visualización (que llevan a cabo los estudiantes sobre el dibujo del enunciado) como un factor a tener en cuenta en las propuestas de trabajo que se planteen en la Educación Secundaria.

La predominancia de la generalización verbal hace cobrar importancia a otras formas de expresar la generalización diferentes a la algebraica. A la luz de los resultados, cabe pensar que la generalización verbal es una forma más accesible para estos estudiantes que la algebraica.

Se ha puesto de manifiesto que la generalización, ya sea verbal o algebraica, se utiliza sólo ocasionalmente para calcular el caso particular por el que pregunta el problema.

REFERENCIAS

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuale*s. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Fou-Lai, L. y Kai-Lin, Y. (2004). Differentiation of students' reasoning on linear and quadratic geometric number pattern. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 457-464). Bergen: Bergen University College.

García, J. A. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal*. Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Autor y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. National Education Association: Washington D.C.

Orton, J. y Orton, A. (1994). Students´ perception and use of pattern and generalization´. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 407-414). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Orton, J., Orton, A. y Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 121-136). London: Cassell.

Poincaré, H. (1902). *La ciencia y la hipótesis.* Madrid: Espasa-Calpe. [Traducción al castellano de Besio, A. B. y Banti, J. (1963).]

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* (Princeton University Press: Princeton, NJ) [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965)].

Pólya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery*. 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 237-268.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Horsori.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

ANEXO A

Tabla A.1. Transformaciones entre representaciones de un término k-ésimo

Elemento		Término k-ésimo		
	S. Representación	Numérico.	Gráfico	Verbal
Término k-ésimo	Numérico	TSN	T3	T5
	Gráfico	T1	TSG	T6
	Verbal	T2	T4	TSV

Tabla A.2. Transformaciones entre representaciones del término general

Elemento		Término General	
	S. Representación	Algebraico	Verbal
Término general	Algebraico	TSA	T8
	Verbal	T7	TSV

Tabla A.3. Cambios del sistema de representación entre diferentes elementos

Elemento		Término General			
	S. Representación	Algebraico		Verbal	
Término k-ésimo	Numérico	C1	C1B	C4	C4B
	Gráfico	C2	C2B	C5	C5B
	Verbal	C3	C3B	C6	C6B

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA Y SU ENSEÑANZA

Sergio Pérez y Gregoria Guillén
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València

RESUMEN

En este informe presentamos resultados referidos a la geometría y su enseñanza en la Educación Secundaria Obligatoria, obtenidos en un estudio exploratorio al administrar una encuesta a 19 profesores, elaborada utilizando datos teóricos y experimentales. Las respuestas de estos profesores han informado sobre diferentes visiones de geometría; sobre si se considera o no que esta materia gusta a los profesores y/o a los estudiantes, que facilita la interdisciplinaridad y que los compañeros le dan importancia en sus clases. Las respuestas aportan también información sobre los bloques de contenidos del currículum y contenidos geométricos que se priorizan en la enseñanza en un curso dado y razones que explican por qué se enseña o no toda la geometría del currículum. Se tratan también cuestiones sobre su enseñanza (introducción, recursos utilizados) y la formación y aprendizaje de los estudiantes (conocimientos previos, dificultades y errores).

ABSTRACT

In this study we are reporting results about the geometry and its teaching in Compulsory Secondary School. These results have been obtained from a survey given to 19 teachers. The questionnaire was designed taking into account theoretical and experimental data. The teachers' answers have given us information about different visions of geometry: if it's considered or not that teachers and/or students like this subject, that the subject facilitates cross-curricular study and that colleagues give importance to the subject. The teachers' answers also give information about curriculum contents blocks and geometric contents that are prioritized in education in a given course and reasons that explain why the whole geometry of the curriculum is taught or not. Questions about geometry education (introduction, resources used) and the formation and learning of the students (previous knowledge, difficulties and errors) are also treated.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Sergio Pérez y Gregoria Guillén (2007). ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA Y SU ENSEÑANZA, pp. 295-305.

PRESENTACION

En 1995 el ICMI centró su tema de estudio en las “Perspectivas sobre la enseñanza de la Geometría para el siglo XXI”, apostando en sus conclusiones por un renovado interés sobre el rol de la geometría en la enseñanza de las matemáticas (Mammana, 1995). Ahora bien, como se ha hecho notar en diferentes investigaciones relativas a la enseñanza de la geometría o la medida (por ejemplo, Barrantes y Blanco, 2004; Guillén y Figueras, 2005; Sáiz, 2002), el gran reto sigue siendo que la geometría vuelva a “todas” las clases. Se siente la necesidad de realizar investigaciones que permitan incidir en la mejora de la enseñanza de la geometría en los niveles escolares.

En los últimos años han aumentado las investigaciones en Educación Matemática que han centrado su atención en el estudio sistemático de las creencias y concepciones de los profesores acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, destacando la influencia que tienen éstas sobre el modo de actuar de los individuos (Andrews & Hatch, 2000; Carrillo, 1998; Gil y Rico, 2003; Flores, 1995; Llinares, 1996; Magro y Luengo, 2004; Ponte & Chapman, 2006). En estos estudios se han apuntado diferentes situaciones relacionadas con la práctica educativa en las que es útil conocerlas, contemplando las referidas a la materia considerada y a otros aspectos curriculares (Ponte, 1999). Conocer creencias y concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje permitirá tener alguna visión sobre cómo los profesores entienden y llevan a cabo su trabajo en las aulas (Benken & Brown, 2002). Es importante también considerarlas en tareas de diseño curricular, en periodos de reformas curriculares y cuando se diseñan modelos de enseñanza que favorezcan una formación inicial o permanente del profesorado. Como señalan Cooney et al. (1998, p. 331) ¨un análisis de estructuras de creencias, atendiendo a la intensidad con las que se mantienen las creencias y la naturaleza de la evidencia que aportan puede proporcionar un forum por el cual nuestros programas de educación para profesores podrán mejorar la manera de dirigir las materias de la reforma¨.

El trabajo que presentamos aquí se relaciona con creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Forma parte de un estudio exploratorio más amplio (Pérez, 2006) en el que se ha utilizado una encuesta como técnica de obtención de datos. Continuamos una investigación sobre la enseñanza de la geometría en Primaria desarrollada en dos fases. Sobre el trabajo desarrollado en la primera fase se han publicado varias comunicaciones (por ejemplo, Guillén y Figueras, 2004, 2005; Guillén et al. 2006). Como se indica en Guillén et al. (2006, p. 221), la administración de un cuestionario a maestros en ejercicio ha permitido ¨una reflexión sobre cada uno de los contenidos geométricos que imparten o impartirían los maestros que participaron en el estudio, y sobre aquellos que no se consideran, y pensar sobre las razones de por qué se hace. También ha permitido tomar contacto con las creencias y deficiencias que se tienen para impartir estos contenidos. Esta reflexión se ha revelado como muy efectiva para incentivar la formación geométrica de los maestros que participaron en el estudio¨. En la segunda fase se ha obtenido como resultado una página Web inicial que permite incidir en la formación de los profesores sobre la geometría de los sólidos, en sus concepciones y creencias e indirectamente en la mejora de la enseñanza de la geometría de los sólidos (Guillen, 2006).

Nuestro estudio exploratorio continúa la investigación realizada con maestros de primaria en la fase 1. Tomando como ámbito de estudio profesores de secundaria nos hemos propuesto obtener información sobre: 1. La importancia dada por algunos profesores de la ESO a: i)

la Geometría con respecto a los otros ejes temáticos del currículum de la ESO: Aritmética y Álgebra, Análisis, Estadística y Probabilidad; ii) diferentes contenidos geométricos: descripción, clasificación,…de formas; cálculo de áreas y perímetros; semejanza; movimientos en el plano; trigonometría; geometría analítica plana; iii) la geometría con respecto a la medición. 2. Las razones de los profesores para explicar: i) por qué imparten o no geometría; ii) por qué no imparten todos los contenidos geométricos y/o de medición del currículum en el curso que ellos enseñan; iii) por qué no enseñarían un contenido geométrico determinado en una situación ideal en la que dispusieran de tiempo suficiente para impartir los contenidos del currículum; iv) por qué enseñan determinados contenidos del currículum relativos a geometría y/o medición. 3. Los contenidos geométricos: i) que los profesores dicen impartir o que impartirían en una situación ideal, ii) que conllevan dificultades para ellos, iii) a los que ellos les asignan mayor importancia, iv) que conllevan dificultades para los estudiantes, v) a los que se les asocian determinados errores. 4. La manera de introducir e impartir la geometría en las clases. En este informe presentamos resultados relativos a las temáticas 1, 2, 3iv y 3v y 4.

REVISION BIBLIOGRAFICA. MARCO DE REFERENCIA

En Guillén y Figueras (2004, 2005) se explica brevemente el marco de referencia de nuestro estudio. Ahora sólo vamos a precisarlo al adaptar el realizado en Primaria a Secundaria.

Compartimos con Gil y Rico (2003) que las *Creencias* "son las verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo (Pajares, 1992). Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones (justificándolas)". "*Concepciones:* los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaliza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas (Ponte, 1994). Tanto las concepciones como las creencias tienen un componente cognitivo, la distinción entre ambas reside en que las primeras son mantenidas con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar s validez, y las segundas, no (Thompson, 1992)". Estos autores también plasman nuestra idea de que los errores de los estudiantes pueden servir tanto para diagnosticar el conocimiento y corrección de deficiencias como para valorar y reconsiderar la planificación o programación; y también como factor o condición para el aprendizaje. De ahí que hemos considerado como una de las temáticas de nuestro estudio la referente a dificultades y errores.

METODOLOGÍA

El estudio se ha desarrollado en tres etapas. En la primera se hizo una revisión y análisis de trabajos relacionados con el tema (por ejemplo, Andrews & Hatch, 2000; Barrantes y Blanco, 2004; Flores, 1995; Gil y Rico, 2003; Guillén y Figueras, 2004, 2005; Llinares, 1996; Magro et al. 2004; Ponte y Chapman, 2006; Thompson, 1992) y diseñamos una encuesta experimental a partir de la descrita en Guillén y Figueras (2004), considerando además datos procedentes de este análisis teórico. En la segunda etapa desarrollamos un estudio previo con 7 profesores que permitió reelaborar la encuesta, precisar las hipótesis de nuestro trabajo y delimitar categorías de respuestas para cada ítem. Los cuadros I, II y III del anexo muestran algunas cuestiones de la encuesta elaborada. En la tercera etapa se ha realizado el estudio en el que a partir de la encuesta elaborada obtuvimos los resultados que presentamos en este informe.

Los 19 profesores que han participado en el estudio son profesores de Secundaria con los que pudimos contactar fácilmente y quisieron colaborar para que realizáramos el trabajo. Se les repartió la encuesta y se les dejó una semana para responderla.

Trabajando conjuntamente los autores de este trabajo, realizamos un primer nivel de análisis de las respuestas dadas por los profesores a las preguntas del cuestionario, utilizando las "plantillas" que para cada ítem habíamos diseñado en el estudio previo. Para las respuestas de algunos ítems elaboramos categorías de respuestas al centrar la atención en aquellos aspectos que reflejan grupos de formas de comunicar las respuestas a la pregunta correspondiente. Los elementos básicos para el análisis fueron "Extractos de respuestas de los profesores a la encuesta" que caracterizamos como Barrantes y Blanco (2004, p. 245) definen las unidades de análisis: constituyen producciones que son fragmentos de texto de unidad variable, dependiendo de la extensión con que se hablaba de la cuestión o discusión planteada. Estos extractos se delimitaron teniendo como referencia las plantillas y categorías que se construyeron para cada ítem. Además del análisis cualitativo hemos realizado un análisis cuantitativo sobre las frecuencias en las que aparecen los enunciados o las categorías que hemos establecido.

RESULTADOS

Dada la brevedad de este informe sólo indicaremos algunos resultados obtenidos en el estudio y apenas indicamos ejemplos de respuestas representativas.

1. Sobre creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones

La palabra geometría sugiere cuerpos geométricos y figuras planas. Las visiones de la geometría que han reflejado los profesores participantes las hemos nombrado como: i) curricular, ii) interdisciplinar, iii) dimensional y iv) etimológica.

Las respuestas de estos profesores expresan que la geometría les gusta, como muestra la tabla I. Para explicar la respuesta se indican características de la materia, que llevan a que se sienta atractiva; o se hace referencia, bien a que conecta con el entorno, bien a que se puede aplicar para hallar algunas magnitudes o en otras áreas de la ESO. Se ha considerado una ciencia muy interdisciplinar; las áreas con las que más se ha relacionado han sido la Física, la Plástica y la Tecnología**.** Los profesores que han expresado que no les gusta la geometría hacen referencia a la dificultad que conlleva la enseñanza o el aprendizaje de la misma.

19 profesores	Sí	No	
Sobre si les gusta la geometría/ Nº de profesores	14	3	Regular: 2
Sobre si a los alumnos les gusta la geometría/ Nº de profesores	8	9	No lo sabe: 2
Sobre si los alumnos tienen suficiente preparación en geometría cuando entran en la ESO / Nº de profesores	3	12	No lo sabe: 2; Depende: 2
Sobre los contenidos que deberían haberse tratado principalmente en primaria/ Nº de profesores	Figuras planas: 18	Magnitudes: 10	Figuras espaciales: 6
Sobre si a los compañeros le dan importancia a la geometría/ Nº de profesores	6	11	Depende: 2
Sobre por dónde se ha de iniciar el estudio de la geometría en la ESO/Primaria / Nº de profesores	Figuras planas: 13	Sólidos: 6	

Tabla I

Ahora bien, no hay uniformidad de opinión entre los profesores encuestados respecto de si a los alumnos les gusta la geometría o no es así (véase la tabla I). Se considera que su enseñanza se reduce principalmente a una aplicación de fórmulas o que se enseña de forma algebraica. Se expresa también que no se estudia lo suficiente en las aulas y que puede gustar porque "tiene bastante aplicación a la vida real" y "se pueden ver las formas". Sus respuestas han apuntado que para que a los alumnos les guste la geometría, en la enseñanza de la misma se tendría que "utilizar contextos cotidianos para que se vea su aplicación", "presentar su enseñanza de una forma práctica y tangible", "usar recursos para suavizar los problemas de imaginación espacial" y "evitar que el estudio de las magnitudes sea una simple aplicación de fórmulas".

Gran parte de profesores implicados consideran que los alumnos no traen suficiente preparación en geometría cuando entran a la ESO. Las razones que apuntan hacen referencia a la enseñanza y aprendizaje previos. Los contenidos que se han señalado como aquellos que se deberían haber tratado en Primaria se refieren especialmente a las figuras planas y a la medición (véase la tabla I).

Centrando la atención en la enseñanza de la geometría de la ESO, la tabla I muestra que un número considerable de profesores encuestados expresa que no se le da importancia en las clases**.** Las razones que aportan llevan a concluir que el que se le de más o menos importancia a una materia en la ESO depende de la planificación que se haga en los libros de texto, del nivel que el profesor constata en sus alumnos o que se cree que éstos deberían tener, de la preparación que considere que tiene él mismo así como de la facilidad que tenga para ampliar esta formación.

La tabla I muestra también que tanto en Primaria como en la ESO se comienza el estudio de la geometría por las figuras planas. Para ambos niveles educativos se ha explicado esta opción haciendo referencia a las características de los sólidos, a los libros de texto y a la enseñanza o aprendizaje de los sólidos. Al responder para la ESO se introduce una nueva aproximación al estudio a partir de los elementos fundamentales "punto, recta, etc.". Cabe señalar que profesores que han apuntado que en la ESO se comience con el espacio alegan que en Primaria ya se han estudiado las figuras planas.

2. Sobre los contenidos de la ESO que se priorizan en la enseñanza

Según las respuestas de los profesores participantes, en caso de falta de tiempo el bloque que en un principio se quedaría sin impartir sería el de probabilidad; le sigue estadística y geometría (véase la tabla II). Se confirma que la aritmética y álgebra es el bloque que se prioriza más, dándole también mucha importancia al análisis. Al observar los 3 bloques que estos profesores eliminan, se concluye que probabilidad–estadística–geometría (12) es la terna que se elimina mayoritariamente. A distancia le sigue la terna probabilidad– estadística- análisis (seleccionada por 3 profesores).

En relación con los contenidos que se priorizan en un curso dado, las respuestas al ítem 11 (véase el cuadro II del anexo) concluyen que los profesores implicados destacan para cada curso la mayoría de contenidos propuestos en el currículum de la ESO para el curso correspondiente. Ahora bien, para 3º ESO, se da poca importancia a contenidos que sí se proponen (relativos a la descripción de formas y movimientos) y se contempla el tema de semejanza que no se señala en el currículum para ese curso.

Bloques	Lugar/Frecuencia			
	1º	2º	3º	Total
Geometría	1	5	7	13
Probabilidad	11	5	2	18
Estadística	4	7	5	16
Análisis	2	-	2	4
Aritmética y álgebra	-	1	-	1

Tabla II: Número de profesores que eliminaría en primer, segundo y tercer lugar cada uno de los bloques.

A partir de las respuestas a la pregunta 15 se constata de nuevo que los profesores encuestados priorizan los contenidos de medición (seleccionados por el 63%) al de los procesos matemáticos de describir, clasificar,… (seleccionados por el 16%). Sólo el 5% los ha considerado igual de importantes y el 5% indica que depende del ciclo. El 11% restante no responde. Los que priorizan la medición hacen referencia a características de la materia, a la dificultad que conlleva su enseñanza o aprendizaje, al material que se tiene disponible, al dominio que tienen los estudiantes o el propio profesor, y también se remite a los diferentes niveles curriculares y a otras materias de la ESO (tecnología o dibujo). Se considera que el estudio de los procesos matemáticos corresponde al primer ciclo de la ESO y que la medición se relaciona más con otros contenidos o conceptos que los procesos geométricos. Los que priorizan los procesos matemáticos expresan que su enseñanza es previa o más importante que la de la medición porque ésta está basada en aplicación de fórmulas.

Nuestro estudio ha confirmado las hipótesis previas: No se imparte toda la geometría que se propone en el currículum porque los profesores al tratar otros contenidos se quedan sin tiempo (opción elegida por 17 profesores). Otra razón que ha reflejado tener bastante peso ha sido ¨No se le da prioridad en el orden de los temas en los libros de texto¨ (elegida por 7 profesores). El resto de las opciones del ítem 13 del cuadro III del anexo sólo se han seleccionado por 1 ó 2 profesores.

3. El profesor en clase: Algunas pinceladas sobre la enseñanza y el aprendizaje

Referido a la introducción del estudio de la geometría, los datos obtenidos muestran que sólo algunos profesores encuestados la relacionan con el entorno cotidiano cuando la introducen en la ESO (5 profesores no han respondido la cuestión correspondiente). Se ha relacionado con objetos conocidos (5 profesores), con situaciones de la vida real (4 profesores) o con fotografías (3 profesores), pero apenas se ha explicado la respuesta. Y sólo otros dos profesores han indicado respectivamente que usan libros, revistas y periódicos o que introducen la geometría comparando figuras.

Al considerar los recursos que se utilizan para impartir su enseñanza en la ESO, los datos de nuestro estudio (véase la tabla III) concluyen que los profesores de la muestra la basan fundamentalmente en los libros de texto, las actividades de refuerzo y ampliación, los cuadernos de ejercicios y los instrumentos de dibujo. La construcción se señala para el primer ciclo y trabajar con láminas y fotografías para el segundo. Los materiales asociados con el estudio de la capacidad sólo se han asignado a 3º.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1º	8	5	8	6	5	5	4		4	6	
2º	9	6	10	6	3	3	3		3	7	
3º	15	7	15	6			3	3		8	4
4º	15	8	15	3						8	3

Tabla III: Materiales que se utilizan cuando se imparte geometría

A-Libros de texto. B-Cuadernos de ejercicios. C-Actividades de refuerzo y ampliación. D-Juego de cuerpos geométricos de madera, plástico, papel, etc. E-Construcciones mediante plegados. F-Recortables de desarrollo plano para construir cuerpos de forma manipulativa. G-Juego de piezas encajables o de varillas y nudos, para la construcción de poliedros. H-Envases de diferente material y forma para medir volúmenes y capacidades. I-Tangram, rompecabezas geométrico formado por varias piezas que, unidas, pueden formar. J-Instrumentos de dibujos. K-Láminas y fotografías:

En relación con las dificultades y errores que los profesores encuestados han indicado como los detectados usualmente en los diferentes cursos de la ESO pueden destacarse los que se refieren a aspectos conceptuales, de cálculo o de resolución de problemas. La tabla IV muestra los cursos de la ESO a los que se les asocia dificultades relativas a habilidades (columna A y B), a los procesos de describir figuras planas y sólidas o clasificar figuras planas (columnas C,D,E), o a contenidos de medición (columnas F a J). Puede notarse que la resolución de problemas es una dificultad que se señala para todos los cursos de la ESO, expresado de esta manera general (columna L) y/o de una manera más precisa (columnas K, O, P). Se han indicado dificultades conceptuales (véase las columnas F, H, I) o de cálculo (véase las columnas G, J) y en algunos casos, para apuntar dificultades conceptuales, se ha precisado el error que conlleva la dificultad correspondiente (véase la columnas H e I).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1º			9			8	7	7			10	12				
2º	7				6	7	7	8				12				
3º		8		8	6				7	10		10				
4º													7	10	6	6

Tabla IV:Dificultades detectadas en los alumnos.

A- Dibujar figuras. B- Visualizar espacialmente las figuras. C- Conocer y describir las propiedades de las figuras planas D- Conocer y describir las figuras en el espacio. E- Clasificar las figuras planas. F- Utilizar las unidades adecuadas para cada magnitud. G- Cambiar unidades. H-. Confundir perímetro-área. I- Confundir área-volumen. J-. Aplicar fórmulas. K- Aplicar el teorema de Pitágoras. L-. Resolver problemas. M- Aprenderse las fórmulas de la geometría analítica. N- Entender las razones trigonométricas. O-Estudiar las posiciones relativas de dos rectas. P- Pasar de una ecuación de la recta a otra.

Cabe señalar que las respuestas sobre dificultades y errores constatan que en el primer ciclo de la ESO apenas se presta atención a la geometría de los sólidos y que en ambos ciclos se presta mucha atención a los problemas de operar (calcular).

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo corroboran los resultados obtenidos en otros estudios desarrollados en Primaria (por ejemplo, Barrantes y Blanco, 2004; Guillén y Figueras, 2005)

o Secundaria (por ejemplo, Gil y Rico, 2003). La geometría es una materia que no disgusta a los profesores pues consideran que conecta con el entorno cotidiano, con mucha utilidad práctica, que se relaciona con otras áreas del currículum y que con su estudio se desarrollan capacidades para el alumno. Estas razones están en concordancia con las expresadas en Gil y Rico (2003) en relación con por qué los alumnos estudian matemáticas; esto es, su carácter formativo, su utilidad social y aplicación a otras áreas del currículum.

Ahora bien, en los cursos de la ESO, al igual que en Primaria, no se enseña toda la geometría que se propone en el currículum pues como han indicado algunos profesores encuestados se queda por impartir por falta de tiempo. Los contenidos de medición se priorizan frente a los relativos a los procesos matemáticos de describir, clasificar,... y la enseñanza de la geometría plana se antepone a la enseñanza de la geometría sólida. Se ratifica para Secundaria lo expuesto en Guillén y otras (2004) para Primaria. Cabe destacar que la enseñanza de la geometría en la ESO se basa fundamentalmente en los libros de texto, actividades de refuerzo y ampliación, los cuadernos de ejercicios y los instrumentos de dibujo. Para explicar las respuestas, los profesores que han colaborado en el estudio han hecho referencia en repetidas ocasiones a las características de la materia y a la dificultad que conlleva la enseñanza o aprendizaje de la misma. ¿De qué manera se puede incidir en los profesores para paliar las dificultades que pueden enfrentar al enseñar determinados contenidos geométricos teniendo en cuenta las sugerencias que se dan en los currículos de estos niveles educativos para la enseñanza de los mismos?

Los datos obtenidos en este estudio exploratorio confirman la pertinencia de la técnica de encuesta para obtener información sobre las problemáticas consideradas en los objetivos. Ahora bien, cabe subrayar que los resultados obtenidos no pueden extenderse a otro ámbito de estudio. Este estudio exploratorio ha permitido además detectar carencias o defectos en el instrumento utilizado para recopilar los datos y en la metodología usada en el análisis de los mismos. Se apunta la conveniencia de continuar con nuevas investigaciones en las que se valide el cuestionario y se mejore la metodología del análisis de los datos experimentales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrews, P. & Hatch, G. (2000). A comparison of hungarian and english teachers' conceptions of mathematics and its teaching, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43 (1), pags. 31-64.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativa y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar, *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 22 (2), pags. 241-250.

Benken, B. M & Brown, N. (2002). *Preparing prospective elementary teachers to foster conceptually based mathematical understandings: a study investigating change in prospective teachers' conceptions related to mathematics teaching and learning*, en http://www.eric.ed.gov/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED471764.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza.* (Tesis Doctoral). Huelva: Universidad de Huelva.

Cooney, TJ., Shealey, B.E. and Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29 (3), pags. 306-333.

Flores, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matematicas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza*. (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 21 (1), pags. 27-47.

Guillén, G. (2006). *Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas*, en http://linux.ajusco.upn.mx/~transpatricio/gregoria/GregoriaWebSite, Web elaborada en el marco del Proyecto de investigación Figueras, O; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y

Sáiz, M. (2001-2006). *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemática*, co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México (con clave G37301-S).

Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta, en Castro, E.; De la Torre, E. (eds.) (2004). *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M).* A Coruña: Universidade da Coruña, pp. 219-228.

Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso taller como técnica para la obtención de datos, en Maz, A.; Gómez, B.; Torralbo, M. (eds.) (2004). *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M).* Córdoba: Universidad de Córdoba, pp. 227-234.

Guillén, G.; Figueras, O.; Corberán, R.M. (2006). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio, en Aymerich, J.V. y Vives, S.M. . (eds.) (2006). *Matemáticas para el siglo XXI.* Castellón: Universitat Jaume I, pags. 215- 224.

Llinares, S. (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria, en Jiménez, J.; Llinares, S. Y Sánchez, V. (Eds.). *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Mathema, pags. 13-36.

Magro, M.H. y Luengo, R. (2004). Concepções dos alunos do Ensino Secundário acerca da matemática e sua aprendizagem, en Luengo, R. (ed.). *Líneas de Investigación en Educación Matemática*. (vol. I). Badajoz: Servicio de publicaciones de FESPM, pags. 59-82.

Mammana, C. (1995). *ICMI Study. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. Catania: University of Catania.

Pajares, M. (1992). Teachers´ Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct, *Review of Educational Research*, 62(3), pags. 307-332.

Pérez, S. (2006). *Algunos resultados sobre la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Estudio exploratorio.* (Trabajo de investigación del Programa de Doctorado). Valencia: Universitat de Valencia.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics Teacher' Professional Knowledge, en Ponte, J. y Matos, J. (eds) (1994). *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisboa: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Ponte, J. P. (1999). Teachers' beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education, in Krainer, K. & Goffree, F. (eds.). *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education*. Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik, pags. 43-50.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice, en Gutiérrez, A. y Boero, P. (eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers, pags. 461-494.

Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de Primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza.* (Tesis Doctoral). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research, in Grouws, D.A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, pags. 127-147.

ANEXO

1.- ¿Qué le viene a la cabeza cuando escucha la palabra geometría?
2.- ¿Le gusta la geometría? ¿Le resulta interesante? Explique sus respuestas.
3.- ¿Cree usted que la geometría tiene relación con el entorno cotidiano? ¿Qué aplicaciones destacaría de la geometría en la vida real?
4 4.- ¿Cree usted que la geometría se relaciona con las otras áreas de la Educación Secundaria Obligatoria? Si su respuesta es afirmativa, ¿qué relaciones destacaría?
5.- ¿Cree usted que a sus alumnos le gusta la geometría? ¿Piensa que les resulta interesante? Explique sus respuestas.
6.- ¿Cree usted que los alumnos traen la suficiente preparación en geometría cuando entran en la ESO?
7.- Indique brevemente aquellos contenidos geométricos que usted considera que se deberían haber tratado en primaria, que los considera imprescindibles para abordar con éxito la geometría en la ESO.
8.- ¿Cree usted que el profesorado de la ESO en sus clases le da importancia al estudio de la geometría?
9.- ¿Cómo iniciaría usted el estudio de la geometría en sus clases, a partir de los sólidos o con el estudio de las figuras planas? ¿Y en la enseñanza primaria? Explique sus respuestas.

Cuadro I

10.- El currículum escolar de matemáticas en la ESO está dividido en los siguientes bloques: Aritmética y álgebra, Geometría, Análisis, Estadística y Probabilidad. Si tuviera limitaciones de tiempo para impartirlos todos, señale con un 1 el bloque que eliminaría en primer lugar, con un 2 el que eliminaría en segundo lugar, y finalmente con un 3 el que eliminaría en tercer lugar.

Aritmética y álgebra Geometría Análisis Estadística Probabilidad

11.- La tabla siguiente muestra contenidos geométricos de currículum de la ESO que usted ha podido impartir o no en un curso dado. Cuando un contenido lo priorice en un curso determinado, indíquelo con un 1 en la casilla correspondiente; si lo considera importante pero no lo prioriza, expréselo con un 2; y si considera que lo puede dejar de estudiar en el curso correspondiente indíquelo con un 3.

CURSOS / CONTENIDOS	1º	2º	3º	4º
11.1 - Construcción, descripción, clasificación y propiedades características de las formas de 3, 2 y 1 dimensiones.				
11.2 - Cálculo de perímetros, áreas y volúmenes.				
11.3 - Semejanza				
11.4 - Traslaciones, giros y simetrías en el plano.				
11.5 - Trigonometría.				
11.6 - Geometría analítica plana				

Cuadro II

12.- ¿Enseña toda la geometría que se propone en el currículum? Marque con una cruz.

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
SI				
NO				

13.- Si en algún curso/s su respuesta al ítem anterior ha sido NO, marque con una cruz la razón o razones por lo que en general no lo hace.

13.1- Porque no me gusta la geometría: ☐
13.2- Porque no la domino: ☐
13.3- Porque no hay materiales apropiados: ☐
13.4- Porque no la considero importante: ☐
13.5- Porque al tratar otros contenidos me quedo sin tiempo: ☐
13.6- Porque no es adecuada para secundaria: ☐
13.7- Porque los conceptos geométricos son difíciles: ☐
13.8- Porque no se le da prioridad en el orden de los temas en los libros de texto: ☐
13.9- Otras razones. Indique cuales:…….

Cuadro III

EL ANÁLISIS DE CLASES DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL MAESTRO. UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Nuria Climent (climent@uhu.es) y José Carrillo (carrillo@uhu.es)
Universidad de Huelva

RESUMEN

Este trabajo es parte de una investigación sobre el desarrollo profesional del maestro respecto de la enseñanza de la matemática, uno de cuyos focos es las relaciones entre la formación inicial y la permanente. Aquí nos ocupamos del uso de vídeos de sesiones de matemáticas en la formación inicial del maestro de Primaria. Desarrollamos un estudio exploratorio con 5 estudiantes, analizando sus comentarios en el análisis de un vídeo sobre la enseñanza del concepto de fracción en 4º de Primaria. Nos centramos en qué medida superan un análisis general y se adentran en especificidades de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos. Lo asociamos a la potencialidad de la actividad para generar conocimiento didáctico del contenido y desarrollar habilidades para afrontar la práctica como fuente de aprendizaje.

ABSTRACT

This paper is immersed in a research work about mathematics primary teacher's development, one of its foci being the relationships between pre- and in-service training. Here we deal with the use of video recorded mathematical lessons in primary teachers' initial education. We develop an exploratory study with 5 students, and analyse their comments on the analysis of a video on the teaching of the concept of fraction in grade 4. We focus on how they go beyond a general analysis and deal with issues that are specific to the teaching and learning of mathematical contents.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Nuria Climent y José Carrillo (2007). EL ANÁLISIS DE CLASES DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL MAESTRO. UN ESTUDIO EXPLORATORIO, pp. 307-314.

LA FORMACIÓN INICIAL DESDE UNA PERSPECTIVA DE DESARROLLO PROFESIONAL Y EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA

Nuestro referente en la mejora del profesor respecto de la enseñanza de la matemática es su mayor flexibilidad, autonomía y capacidad de adaptación al contexto (Cooney y Shealy, 1997). Esto pasa necesariamente por una mejor comprensión de la propia práctica (Krainer, 2001). Desde esta perspectiva, el desarrollo profesional del profesor está ligado principalmente a su progreso respecto de su capacidad para analizar lo que ocurre en su práctica y adecuar su actuación a dicho análisis (Climent, 2005).

La consideración conjunta de la formación inicial y permanente (Carrillo, Coriat y Oliveira, 1999) permite centrar la atención en el inicio del estudiante para maestro (EPM) en modos de aprendizaje que potencien su desarrollo continuo, enfocando la formación inicial desde una perspectiva profesional que contempla qué necesita saber el profesor para enseñar matemáticas y para su mejora continua en tal tarea. Para ello su práctica debe convertirse en campo de indagación (Jaworski, 1998), algo que desde la formación inicial podemos fomentar, potenciando que problematicen la práctica, la perciban como vía de desarrollo, y empiecen a adquirir modos y herramientas para analizarla.

Además de tener que recurrir a prácticas externas (casos, Contreras, 1999, transcripciones de sesiones, Climent y Carrillo, 2002, vídeos reales o entornos interactivos incluyéndolos, Goffree y Oonk, 2001), es difícil que los EPM profundicen en su análisis (Llinares y Krainer, 2006), se fijen en cuestiones específicas de la enseñanza y aprendizaje de los contenidos y, por tanto, perciban que tiene interés el análisis continuado de la práctica.

Para el caso de profesores de matemáticas en procesos de investigación-acción, Jaworski (1999) destacaba la dificultad de acercar la matemática a su centro de interés. Una aportación importante del área de Didáctica de la Matemática en la formación inicial (Climent y Carrillo, 2002) es la construcción de conocimiento didáctico del contenido matemático a partir de una reflexión profunda sobre el propio contenido y su enseñanza (Marks, 1991).

Llinares y Krainer (2006) sintetizan algunas ventajas del uso de situaciones de enseñanza en formación de profesores y su potencial formativo: permite relacionar teoría y práctica, potencia la reflexión personal crítica, y hace conscientes a los estudiantes para maestro de modos alternativos de pensamiento y de la importancia de hacer elecciones informadas, ayudándoles a reconocer la legitimidad de perspectivas competidoras. Señalan además que algunos de los trabajos analizados sugieren que el EPM puede pasar de describir meramente episodios de enseñanza, a hacer un análisis y explicación con cierto detalle y profundidad.

En el marco reseñado, el estudio exploratorio que nos ocupa pretende indagar sobre en qué se fijan los EPM cuando analizan una sesión real de matemáticas, en un contexto que pudiera ser trasladable al aula de formación. En concreto, hasta qué punto se plantean cuestiones específicas del conocimiento didáctico del contenido.

LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO Y LA SESIÓN ANALIZADA

Los EPM seleccionados pertenecen a 3º de Maestro, especialidad de Primaria, de la UHU, en el que los autores impartimos la única asignatura troncal de Didáctica de la Matemática. La experiencia de visionado y análisis conjunto del vídeo se desarrolla a finales de curso. Se trata de cinco alumnas escogidas por su responsabilidad y preocupación hacia la enseñanza

de la matemática, su capacidad de comunicación y por representar distintas actitudes, capacidades y conocimiento[1]. De este modo pretendemos indagar en qué aspectos de la matemática y su enseñanza-aprendizaje se fijan EPM con distintas características cuando analizan sesiones reales de matemáticas, y hasta qué punto profundizan en cuestiones específicas de la enseñanza de los contenidos matemáticos.

La sesión elegida es la primera de fracciones en una clase de 4º de Primaria de un CEIP de Huelva. La maestra, Ana, es experta e implicada en su formación. El grupo está compuesto por 15 alumnos y se observa un clima de confianza, respeto y trabajo entre ellos y con la maestra. En el vídeo podemos observar generalmente a la maestra y a la totalidad de los alumnos, centrándose en ésta y en las interacciones con los alumnos y entre ellos, no apreciándose el trabajo de los pequeños grupos.

Dividimos la sesión en 8 episodios[2]. En la introducción Ana presenta la actividad al gran grupo, da indicaciones y reparte a cada alumno figuras en papel. En el segundo, concreción de la tarea, la maestra escribe en la pizarra la orden y los alumnos la copian. El tercero corresponde al trabajo de los alumnos en grupos y su seguimiento por Ana. La puesta en común del trabajo de los grupos comprende el resto de la clase, dividida en dos partes por el recreo. Antes del recreo, en el episodio 4º, un primer grupo expone en la pizarra sus soluciones para dividir en mitades las figuras, y en el 5º intervienen otros grupos discutiendo sus soluciones a partir de las del primer grupo. Los episodios de después del recreo no serán objeto de análisis en esta comunicación (Breve descripción de los 5 primeros episodios en Anexo).

RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

La recogida de datos se hace fuera del aula de formación inicial, con las cinco EPM y uno de los formadores. Comenzamos explicando algunas características del contexto de la sesión y su división en episodios. Se pide a los alumnos un análisis individual escrito (protocolo de análisis), diferenciado en dos columnas ("Observaciones" –lo descriptivo- y "Comentarios" –lo analítico), al objeto de que se fijen más en los detalles y trasciendan la pura descripción. Vemos el vídeo por episodios, parando para que anoten. Al finalizar el visionado y su análisis individual, hacemos una puesta en común. El formador actúa de moderador (sin dar opiniones). Toda la sesión es grabada en audio y transcrita.

Efectuamos un análisis del contenido de cada protocolo, extrayendo unidades de información que sintetizan las ideas centrales del mismo sobre cada episodio. Vertemos esta información en una tabla cuyas columnas corresponden a los datos de cada alumna y las filas a cada episodio, que nos permite analizar horizontalmente sobre lo que reflexionan las EPM en cada episodio.

RESULTADOS: *LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONTENIDO MATEMÁTICO EN EL CENTRO DE ATENCIÓN*

Nos centraremos en algunas de las reflexiones de las EPM que muestran cómo consideran la situación de enseñanza-aprendizaje analizada.

1 Sintéticamente, en los dos extremos, Teresa muestra alto nivel de competencia y conocimiento en la materia y gusto por ella, Laura presenta dificultades hacia su comprensión y muestra un temor constante a que pudiera resultar a los alumnos de Primaria tan complicada como ha sido siempre para ella, Las otras tres EPM muestran un nivel medio de competencia, con diferencias entre ellas, y actitudes positivas a su enseñanza y variado nivel de agrado hacia la propia materia, entre los extremos señalados.

2 Entendemos un episodio como un fragmento de la lección en el que la intención didáctica o relativa a la gestión del profesor es constante (Andrews, Carrillo y Climent, 2005).

Distintas representaciones de una fracción

La mayoría de las EPM destacan el interés de que salgan variadas representaciones de fracciones, algunas no estándar (Marta: *el papel les facilita mucho, el que puedan manipularlo, llegando a ver mitades que no son convencionales* [M11[3]]).

Como variables diferenciadoras (de las representaciones que consideran convencionales) se fijan en que:

- la posición no les supone un elemento distintivo (*los alumnos son capaces de ver que el cuadrado 1.6 y 2 es el mismo, aunque esté cambiado de forma* [M9]),
- las partes en que se divide la unidad no tienen por qué ser continuas (*son ellos los que llegan a la conclusión de que las partes no han de estar "juntas"* [M12, refiriéndose a la discusión de 3.1]) y, relacionado con esto,
- el número de partes que se observan en la figura no tiene por qué coincidir con el denominador.

Algunas EPM consideran estas últimas particiones un obstáculo para la comprensión del concepto de fracción (*esto puede confundir…se debe hablar de dos mitades iguales... y no mezclar las mitades entre sí*, C15) o representaciones erróneas (*asemejan suma de partes, pero se dan cuenta de que para ser mitades sólo puede haber dos partes. Incluso lo dan por válido*, T19). Marta (M12 anterior) e Inma parecen verlas como una ampliación adecuada de las representaciones habituales (*ha sido bueno utilizar el papel para darnos cuenta de que se podían hacer más mitades de las que creíamos*, I13).

Carmen valora también las representaciones que se desechan (*se pueden ver como contraejemplos*, C12).

La tarea respecto de la introducción del concepto de fracción

a) El material y las figuras propuestas: mientras que Laura sólo constata el hecho de que se usa papel y tres tipos de figuras (rectángulo, cuadrado y círculo), Teresa e Inma hacen algunas valoraciones sobre la conveniencia de su elección (*son figuras conocidas*, T5, *son las cotidianas para representar fracciones*, T10). Valoran el uso del papel porque sirve para poder doblarlo o recortarlo y comprobar manipulativamente algunas de las particiones hechas (unidad I13 antes mencionada) y potencia que surjan mitades menos convencionales (M11 anterior). Para Carmen, *este tipo de recursos son necesarios en el aula porque es la única forma de que el alumno aprenda de verdad (y no memorísticamente, sino comprendiendo)* (C22). Marta declara que los alumnos *van a llegar a conceptos por medio de la manipulación del papel* (M19).
b) Cómo se presenta la tarea a los alumnos: Laura, en sus comentarios sobre el primer episodio, apunta que *haría primero un ejemplo de la actividad* (L4) ya que observa que *los niños no han entendido lo que ha explicado la maestra* (L3). En la discusión posterior al visionado, otras EPM objetan que de ese modo podrían actuar por imitación y no dar otro tipo de particiones. Para Carmen, pedir *por mitades y cuartos a la vez puede llevar al alumnado a bloquearse* (C6).
c) Los contenidos que se señalan en relación con el concepto de fracción: Teresa destaca el concepto de parte y unidad, el de numerador (T11 anterior), denominador (respecto de la discusión sobre las figuras 3.i, *algo muy importante es que con un comentario de un*

3 Cada unidad se codifica con la inicial del nombre y un número.

alumno se introduce el concepto de denominador y de igualdad entre las partes, T22), necesidad de igualdad entre las partes y número de partes en que se divide la figura.

CONCLUSIONES

Los resultados seleccionados ejemplifican la posibilidad de que los EPM, al analizar un vídeo, centren su atención en aspectos del contenido y profundicen al respecto. En especial, en el protocolo de Teresa podemos encontrar un análisis fuertemente ligado al concepto de fracción. De algún modo, ha desglosado dicho concepto y tiene presente algunos subconceptos (Blanco y Contreras, 2002) (unidad, partición de la unidad y partes resultantes, numerador y denominador) y características relevantes (igualdad de las partes y número de ellas) (Llinares y Sánchez, 1988). Su valoración global de la tarea (*es una actividad bastante buena para comenzar (mitades y cuartos)*, T12) contrasta con la de Laura que, en general, presenta el polo opuesto respecto de escasas consideraciones sobre el contenido (*es una actividad bastante entretenida e ilustrativa para los niños*, L7).

En la formación inicial esta actividad permitiría aflorar aspectos ligados al conocimiento didáctico del contenido y su discusión en un contexto que le da sentido y significado (formulando problemas prácticos profesionales -Azcárate, 1999- a partir de la experiencia profesional de otros).

¿Podemos inferir de lo obtenido que la actividad pueda propiciar la adquisición de hábitos de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la materia? Al menos, les permite ver, al realizarse en grupo, que hay otro análisis posible, no sólo el general, y que existen herramientas (conocimientos sobre los propios contenidos y su enseñanza y aprendizaje) que posibilitan dicha especificación. Implicarse en dicho análisis y disponer cada vez de un mejor conocimiento para sacar más partido del análisis son elementos recursivos. No se adquirirán hábitos si se realiza como actividad aislada, pero creemos que ha mostrado potencial como para pensar que su inclusión en la formación inicial puede servir para trabajar con los EPM el desarrollo de dichos hábitos.

Casi no hemos abordado aquí la fase de discusión del análisis de cada estudiante con sus compañeras. De las diferencias entre sus apreciaciones es fácil imaginar el interés de las discusiones que pueden entablarse en el aula de formación (implicando concepciones y conocimiento profesionalizado del contenido). Estas discusiones, además, tienen para ellos el interés añadido de que las diferencias de interpretaciones vienen de sus iguales.

La consideración del análisis de vídeos de clases como actividad dentro del aula de formación inicial de maestro plantea otros interrogantes, como cuál debe ser el papel del formador. Goffree y Oonk (2001) abogan por que en ocasiones el formador actúe de experto, ejemplificando cómo mantener una conversación reflexiva sobre la situación (al estilo de Schön). De este modo, el formador muestra cómo se puede aprender de la práctica y abordar su análisis, qué perspectivas parecen útiles, qué cuestiones surgen que necesitan más reflexión y que muchas de las respuestas son sólo conjeturas y están abiertas a la discusión. Además, entre líneas, muestra sus propias visiones sobre la matemática, su enseñanza, y otras cuestiones profesionales (p. 118).

Finalmente, queremos destacar nuestra satisfacción por poder hacer uso en la formación inicial del trabajo derivado de nuestra investigación sobre desarrollo profesional y práctica del profesor. La actividad de análisis de vídeo se muestra potente respecto del desarrollo de los profesores implicados (tanto en formación permanente como inicial).

REFERENCIAS

Andrews, P., Carrillo, J. y Climent, N. (2005). Proyecto "METE" (mathematics education traditions of Europe): el foco matemático. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds) *Investigación en Educación Matemática*. IX Simposio de la SEIEM. Córdoba: Publicaciones de la Universidad de Córdoba. (p. 131-137)

Azcárate, P. (1999). Los ámbitos de investigación profesional (A.I.P.) como organizadores del currículum del profesor. *Actas del PROFMAT 99*, Conferencia 24, 121-134. Portimao: Portugal.

Blanco, L. y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de maestros de Primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. En L. Blanco y L.C. Contreras (Eds) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Cáceres: Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones.

Carrillo, J., Coriat, M. y Oliveira, H. (1999). Teacher education and investigations into teacher's knowledge. In K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (eds.) European Research in mathematics education I.III. On Research in Mathematics Teacher Education. Osnabrück: University of Osnabrück. Chapter 3. Pp. 99-145.

Climent, N. (2005). El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso. Michigan: Proquest Michigan University (www.proquest.co.uk).

Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Una propuesta para la formación inicial de maestros. Ejemplificación: Los triángulos, una situación de Primaria. Revista EMA, vol.7, nº2, 171-205.

Contreras, L.C. (1999). El método de casos en la formación de maestros. Una aproximación desde la Educación Matemática. En J. Carrillo y N. Climent (Eds) *Modelos de formación de maestros en matemáticas*, 149-162. Huelva: Universidad de Huelva.

Cooney, T.J. y Shealy, B.E. (1997). On understanding the Structure of Teachers'Beliefs and Their Relationship to Change. En E. Fennema y B.S. Nelson (Eds) *Mathematics Teachers in Transition*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Goffree, F. y Oonk, W. (2001). Digitizing Real Teaching Practice for Teacher Education Programmes: The MILE Approach. En F.L. Lin y T.J. Cooney (Eds) *Making Sense of Mathematics Teacher Education*. Dordrecht: Kluwer Academia Publishers, pp. 111-145.

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(1), 3-31.

Jaworski, B. (1999). Teacher education through teachers' investigation into their own practice. En K. Krainer, F. Goffree y P. Berger (Eds) *On Research in Teacher Education. From a Study in Teaching Practices to Issues in Teacher Education.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik. Osnabrück, Alemania.

Krainer, K. (2001). Investigations into practice as a powerful means of promoting (student) teachers' professional growth. En J. Novotná (Ed) *European Research in Mathematics Education II*, vol.1, 269-280.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. Pp. 429-459.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis

Marks, R. (1991). When should teachers learn pedagogical content knowledge? Comunicación presentado en la *AERA*. Chicago.

ANEXO: DESCRIPCIÓN DE LA PRIMERA PARTE DE LA SESIÓN

1º episodio

Ana anuncia a los niños que van a trabajar en grupo, "como les gusta".

"Va a dar a cada niño un rectángulo, un círculo y un cuadrado (mostrándolos recortados en papel). De lo que se trata es de conseguir doblarlos para lograr distintas formas de hacer mitades y después cuartos. Hay que hacerlo de todas las formas posibles".

Ana les dice que cuando un alumno encuentra una forma, se la enseña a los de su grupo, éstos le imitan (lo doblan igual) y todos lo dibujan en sus cuadernos. De este modo, les deben quedar dibujadas todas las formas que ha encontrado el grupo. Señala que deben ser mitades, para lo que una parte tiene que ser igual a la otra.

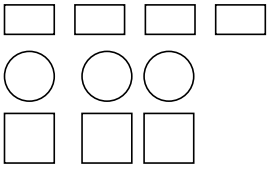
Luego tendrán que ponerle un número a cada una de esas partes que han diferenciado. Ante la duda planteada por un niño, dice que si no encuentra un número lo puede expresar de otro modo, aunque no sea con números.

Los alumnos se colocan en grupos de 3 o 4 niños y Ana reparte las figuras de papel.

2º episodio

Les pide que copien primero la orden que va a escribir en la pizarra. Anota la orden que sigue en la pizarra y los niños la copian en sus cuadernos:

Dobla tu papel por la mitad de distintas formas. Dibuja ahora los resultados.



¿Cuántos trozos has hecho en cada caso?

Los niños se ponen a trabajar y Ana va pasando por los grupos (3º episodio).

4º episodio

Termina el trabajo en grupos. Muchos niños solicitan intervenir. Ana invita a salir a las tres niñas que componen un grupo y les pide que dibujen sus soluciones de mitades en la pizarra. Les pide a los demás que estén pendientes para ver si realmente han hecho mitades y si ellos tienen otro modo distinto de hacerlas. Dibujan sus soluciones (1.1.-1.6 de figuras al final del 5º episodio).

5º episodio

La maestra pide formas distintas e invita a participar a los que levantan la mano.

a) Un grupo dice tener una partición distinta de los cuadrados (2). Aunque algunos niños dicen que es la misma que 1.6., deciden considerarlo como otra forma distinta.

b) Un grupo de niñas añade las propuestas de particiones de mitades: 3.1, 3.2 y 3.3.

Otros niños señalan que son "tercios" porque hay tres partes.

Ana: *Porque son tres partes. Y siempre que hagamos tres partes... ¿son tercios?... Y entonces... siempre que hagamos dos partes son mitades...?* [Jose dice que sí]. *Sí. O sea, que si yo*

cojo el mismo cuadrado [se va a la pizarra y hace el dibujo:]. *Y lo parto por aquí son dos trozos... son mitades...* [David dice que tienen que ser iguales y Jose lo repite]. *¡Ah! Entonces, repito, te vuelvo a preguntar: ¿éstos son tercios?* [Jose dice que no]. *¿Por qué no?* ["Porque no son iguales", dice Jose]. *¡Porque no son iguales!. Es cierto que son tres partes, eso sí es cierto, pero ¿son tercios?* [Jose dice que no]. *¡No!. Para que sean tercios...* [mirando a Jose para que complete. Éste responde que tienen que ser iguales]. *Y tienen que ser iguales. Ellas os dicen que lo que han hecho aquí son mitades. Ahora vosotros tenéis que ver por qué sí o por qué no.*

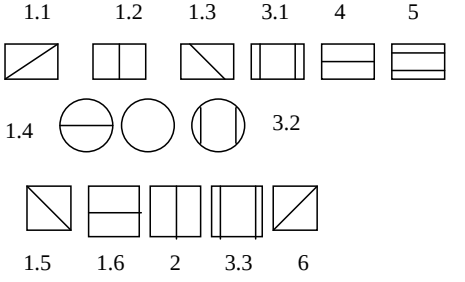
Algunos dicen que sí lo es porque el centro es lo mismo que las dos partes extremas unidas (refiriéndose al rectángulo, 3.1). Otros dicen que el centro es mayor. Ana les pide a los que dicen que sí, que le demuestren a los otros que es así. Una de las niñas del grupo que dio esa solución muestra cómo doblando las dos partes extremas por las líneas de división, se recubre exactamente la parte central. Todos se convencen entonces de la igualdad.

Ana pregunta si algún grupo tiene más particiones y salen varios niños a la pizarra, añadiendo los dibujos 4, 5 y 6.

c) Ana les llama la atención sobre el dibujo 1.3. *Yo quisiera que todo el mundo se fijara que estas líneas van de aquí a aquí, no van de esquina a esquina.* Les cuestiona si es o no la mitad. Vuelve a haber discrepancias por lo que les pide a los que dicen que sí que convenzan a los otros. Una niña del grupo que dio la solución explica: "así no da la mitad [doblado, porque no coinciden] pero así sí" [cuando lo abre, señalando las dos partes]. Algunos siguen sin convencerse, por lo que Ana recorta ambas mitades y las superpone, alegando que ésa es la única manera en que cree que va a ser posible verlo. Les pregunta a los niños por qué en este caso han tenido que cortarlo para ver que coinciden. Algunos niños señalan que "aquí están al revés". Ana les recuerda entonces una actividad que hicieron en la clase de expresión plástica en la que dibujaban figuras simétricas respecto de un eje vertical (sin hacer alusión al concepto de simetría, sólo indicado cómo estaban situados los dibujos).

d) Pasan entonces a ver cuántos trozos han hecho en cada caso. En el caso de tres trozos Ana les fuerza a que concreten más, de modo que concluyen que en los otros casos tienen "dos partes iguales" y en éstos "tres partes, dos trozos iguales y uno que es el doble de uno de los dos"..

Al final de esta primera parte de la sesión, quedan en la pizarra los dibujos hechos por los grupos que han intervenido:



UN MODELO DOCENTE PARA LA FORMACIÓN EN GEOMETRÍA DE MAESTROS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Miguel R. Wilhelmi (miguelr.wilhelmi@unavarra.es)
Eduardo Lacasta (elacasta@unavarra.es)
Universidad Pública de Navarra

RESUMEN

Los estudiantes de Maestro en Educación Infantil manifiestan un modelo epistemológico de las matemáticas que identifica "saber matemáticas" con la resolución de problemas mediante algoritmos y fórmulas. En este trabajo se muestra una experiencia cuyo objetivo es la deconstrucción de este modelo para la construcción posterior de un modelo docente que sitúe a las matemáticas en una perspectiva global de formación en EI.

ABSTRACT

The students for kindergarden teacher have an epistemic model of mathematics according to which "to know mathematics" consists in solving problems by means of mathematical algorithms and formulas. In this paper, we show an empirical research whose objective is the de-construction of this model, for later construction of a teacher model which places mathematics in a global perspective of kindergarden education.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Miguel R. Wilhelmi y Eduardo Lacasta (2007). UN MODELO DOCENTE PARA LA FORMACIÓN EN GEOMETRÍA DE MAESTROS EN EDUCACIÓN INFANTIL, pp. 315-324.

MODELOS EPISTEMOLÓGICOS Y DOCENTES

La formación en didáctica de las matemáticas del profesorado es compleja. Y aún lo es más en la especialidad de Educación Infantil (EI), en la que los conocimientos lógico-matemáticos implicados son muy elementales, lo que dificulta al maestro refugiarse en una formación predominantemente matemática: es obligada la referencia a principios didácticos. Kirova y Bhargava (2002) muestran cómo el desarrollo profesional de una maestra está condicionado por "la necesidad de un fuerte sistema conceptual que tome en consideración las características del desarrollo de los niños y que indique los ambientes que fomentan sus capacidades matemáticas naturales". Según Briand et al. (2004) los "ambientes" no son otra cosa que situaciones de enseñanza en las cuales el conocimiento matemático se utiliza como instrumento en la realización de una tarea.

Asimismo, el *principio de globalización de la enseñanza* en EI, según el cual el currículo debe ser orientado no tanto a la consecución de contenidos conceptuales o de procedimiento específicos de un área, sino al desarrollo integral y armónico de los niños, y a procurar los aprendizajes que contribuyen y hacen posible dicho desarrollo (MEC, 2007), tiene una especial incidencia y su traslación mecánica a la formación dificulta el trabajo específico en matemáticas.

En la formación de maestros en EI no es suficiente trabajar detenidamente sobre los principios teóricos y los contenidos de los diseños curriculares y sobre sus aplicaciones finales al aula (materiales y fichas escolares). Además de las preguntas a las que el currículo debe dar respuesta ("¿qué, cuándo, cómo enseñar? y ¿qué, cómo y cuándo evaluar?"), debemos estudiar las posibles respuestas a otros interrogantes, no todos incluidos en los anteriores, como por ejemplo: ¿Cómo aprenden matemáticas los alumnos y qué transformaciones experimentan los saberes matemáticos en la enseñanza? ¿Qué papel juega la experiencia? O, en la EI: ¿Qué relación hay entre la actividad numérica y las actividades puramente lógicas? ¿Cómo abordar los problemas espaciales? ¿Qué geometría enseñar y qué materiales se dispone para ello?, etc.

Responder a estas cuestiones supone, por un lado, revisar de manera crítica el *modelo epistemológico* de las matemáticas dominante en la institución "EI", esto es, la manera compartida de interpretar y describir el saber matemático y la actividad matemática en dicha institución y, por otro lado, relacionar dicho modelo con el *modelo docente* o forma de organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para EI. Es nuclear la identificación y descripción de procesos de construcción y comunicación de conocimientos y saberes basados en situaciones, que permitan valorar las prácticas docentes que contemplan la reproducción de fichas como la forma privilegiada de gestión del conocimiento en EI. En este sentido, diversos autores (Thomas, Mulligan y Goldin, 2002; Briand, Loubet, Salin, 2004; De Castro y Escorial, 2007; etc.) aportan datos empíricos y sustento teórico para el análisis de situaciones de enseñanza "no convencionales" (esto es, no estructuradas en forma de ficha).

HACIA UN "NUEVO" MODELO EPISTEMOLÓGICO

Para las estudiantes[1] de EI prevalece la siguiente máxima: "puesto que hacer matemáticas consiste en resolver problemas por algoritmos y fórmulas y estos no pueden ser explicados a los niños, entonces la enseñanza de las matemáticas en la EI debe reducirse a una colección mínima de tareas sencillas". Este *modelo epistemológico centrado en técnicas aisladas y terminadas de resolución de problemas* (ME-T), heredado en esencia de la experiencia personal como alumnas, queda descrito por un método estereotipado de producción de respuestas a cuestiones matemáticas, que restringe el tipo de tareas pertinentes en la EI.

1 La casi totalidad de estudiantes de Maestro en la especialidad de Educación Infantil son mujeres, por ello utilizaremos el género femenino de manera generalizada en todo el artículo.

El profesor universitario se ve obligado entonces a *deconstruir*[2] este ME, como paso previo a la enseñanza de conocimientos matemáticos, didácticos y técnicos específicos, que las futuras maestras necesitarán para el diseño e implemetación de procesos de desarrollo de competencias matemáticas en los niños de EI. La cuestión profesional que se plantea es: ¿cómo realizar esta deconstrucción de manera que se establezcan las bases para el aprendizaje posterior de los conocimientos pretendidos?

Esta deconstrucción se apoya necesariamente en:

- Un *afrontamiento psicológico* (Epstein, 1994)[3], que sirva de mediador entre el rechazo y estrés que provocan las matemáticas en muchas de las estudiantes y sus consecuencias en la resolución de problemas.
- El análisis crítico del modelo docente (MD) predominante en la EI, que implica plantear cuestiones tales como: "cómo responder con la ayuda de conocimientos anteriores, cómo comprender y construir un conocimiento nuevo, cómo aplicar conocimientos previos y reconocer cuestiones, etc." (Brousseau, 1998, 65).

En toda situación de enseñanza es preciso tomar en consideración el uso informal e intuitivo de nociones y procesos matemáticos en los niños de 3 a 5 años (Baroody, 2000), esto es, sus *estrategias de base, conocimientos implícitos, conceptos y teoremas en acto* (Brousseau, 1998), *a*sí como las estrategias sociales (Vygotsky, 1978).

En este trabajo mostramos una experiencia que busca la deconstrucción del ME-T de las matemáticas de las estudiantes de maestro en EI y la determinación de un ME basado en la modelización del saber mediante situaciones (Brousseau, 1998).

Los modelos epistemológico (ME) y docente (MD) hacen referencia a dos ámbitos distintos, sin embargo, el ME tiene una clara incidencia sobre el MD. Albertín y Zufiaurre (2005) sostienen la tesis según la cual los elementos implícitos del currículum (Apple, 1986) para la formación del profesorado son de vital importancia en su práctica docente por lo que es relevante analizar cómo y qué modelos de actuación adquieren los maestros. La descripción y elaboración de situaciones tiene sentido en la formación como principio de análisis de las prácticas instituciones y como medio de actuación en las instituciones.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Contexto educativo

La experiencia tiene lugar con 49 estudiantes (46 mujeres y 3 varones) de Maestro en EI, en el marco de una asignatura de didáctica de la matemática de tercer curso de 30 horas (3 créditos) de duración.

Objetivo

En coherencia con la cuestión profesional planteada, el objetivo principal del proceso instruccional es la deconstrucción del ME-T para la geometría[4], predominante entre las es-

2 *Deconstruir*: Deshacer analíticamente los elementos que constituyen una estructura conceptual (RAE, 2001).

3 La teoría cognitiva-empírica de Epstein (1994) se apoya en los presupuestos clásicos de Lazarus y Folkman (1986), que determinan como tipos de afrontamiento el *procesamiento automático* (rápido, relativamente inflexible, con exigencias mínimas de atención y puede activarse sin intención ni conciencia) y el *procesamiento controlado* (deliberado, altamente flexible y adaptable con el propósito de afrontar las demandas).

4 Como material didáctico de referencia para la elaboración de situaciones de enseñanza de la geometría se ha utilizado Martínez y Rivaya (1989).

tudiantes de EI, para sustituirlo por un ME más flexible, desvinculado de conocimientos técnicos complejos y adaptado a la futura función docente de las estudiantes. Nuestra concepción constructivista del aprendizaje, en clara consonancia con la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1998), debe estar precedida por un modelo epistemológico de las matemáticas donde la actividad matemática esté generada por los modelos implícitos que los niños tengan sobre los objetos matemáticos "a enseñar".

El objetivo señalado se ha concretado en la elaboración de situaciones de enseñanza modelizadas mediante "esquemas" (ver anexo) que explicitan el papel de la maestra en el aula, la actividad de los niños y la función de las matemáticas como instrumento en la resolución de problemas.

Descripción del proceso instruccional

En la tabla 1 se muestra una descripción del proceso instruccional con indicación del tiempo dedicado a cada actividad.

Actividad	**Descripción**	**Horas**
Sesiones teóricas	Introducción de conocimientos matemáticos, didácticos y técnicos para la geometría a través del análisis de situaciones	8
Trabajo en grupo	Realización de *esquemas* de situaciones para la enseñanza de la geometría en EI	16
Sesiones con ordenador	Uso y análisis de las aplicaciones matemáticas del recurso educativo "Fantasmín" (http://ares.cnice.mec.es/infantil/)	4
Trabajo individual	Análisis teórico de situaciones de enseñanza y elaboración de una propuesta de enseñanza (según el *esquema*)	2

Tabla 1. Descripción del proceso instruccional

Además, las estudiantes han debido realizar un trabajo grupal, fuera de las clases presenciales, para completar los *esquemas* de situaciones. Los *esquemas* han sido remitidos a través de la plataforma *e-learning* BLS-WebCT, lo que nos ha permitido un registro informático de los mismos.

RESULTADOS

Esquemas o trabajos grupales

En la tabla 2 se puede ver la distribución de calificaciones obtenidas por las estudiantes ($n = 49$) en la descripción de seis situaciones según el esquema del anexo.

Calificación	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**
3 (muy bien)	10	25	23	14	36	42
2 (bien)	32	10	25	34	3	6
1 (presentado)	6	13	0	0	6	0
0 (no presentado)	1	1	1	1	4	1
Media	2,05	2,21	2,43	2,25	2,45	2,82

Tabla 2. Distribución de calificaciones de las estudiantes ($n = 49$) en los *esquemas*

Trabajos individuales

Los trabajos individuales muestran tres comportamientos tipo.

1. *Proposición de una situación de enseñanza pertinente*. Se propone una situación donde el conocimiento matemático juega un papel acorde a la EI. Por ejemplo, una situación para la introducción del área mediante la comparación de tamaños y el recuento de *gomets* (unidad de medida).
2. *Malentendido fundamental de un conocimiento matemático*. Un conocimiento matemático es comprendido de manera "común". Por ejemplo, la noción de traslación es comprendida según un sentido "psicológico" (traslación de conocimientos) o según un sentido "sensorial" (reconocimiento de figuras en la realidad).
3. *Modelo epistemológico técnico* (ME-T). Se plantea una situación fundamentada en la introducción o desarrollo de una noción o proceso matemático sin tener en cuenta el nivel educativo. Por ejemplo, proponer la enseñanza de relaciones entre triángulos ¡apoyándose en el teorema de Pitágoras!…

En la Tabla 3 se puede ver la distribución de respuestas a los trabajos individuales según estos 3 criterios y uno adicional, a saber, "proposición de una situación de enseñanza pertinente, pero con claras deficiencias de diseño que la hacen inviable". Asimismo, se indica el número de estudiantes que no presentan los trabajos.

Criterio	**Trabajo 1**	**Trabajo 2**
Proposición pertinente	11 (22,45%)	34 (69,39%)
Proposición pertinente, con deficiencias de diseño	12 (24,49%)	5 (10,21%)
Malentendido fundamental	10 (20,41%)	5 (10,21%)
Modelo epistemológico técnico (ME-T)	12 (24,49%)	4 (8,17%)
No presentado	4 (8,17%)	1 (2,05%)

Tabla 3. Distribución de respuestas a los trabajos individuales

Encuesta de opinión anónima

La encuesta está constituida por 21 preguntas de opinión distribuidas de la siguiente manera: 18 cuestiones objetivas con una escala numérica de valoración (*escala Likert*) y 3 cuestiones abiertas. Las 18 preguntas del cuestionario de opinión con escala Likert son conforme a los criterios esenciales enunciados por Dalenius (Biemer y Lyberg, 2003, 2–4). La escala considerada ha sido: 1, nada de acuerdo; 2, poco de acuerdo; 3, medianamente de acuerdo; 4, bastante de acuerdo; 5, totalmente de acuerdo.

El cuestionario es propuesto a todo el grupo una vez terminado el proceso instruccional. La tasa de respuesta (70%) supera el mínimo exigible, asegurando la calidad con relación al aspecto particular de la *no-respuesta* (Sánchez, 2000).

En la tabla 4 aparecen únicamente las cuestiones relacionadas con la influencia de la enseñanza en el ME de las estudiantes sobre la geometría y sus descriptores: frecuencia, tanto por ciento (%), mediana o valor escalar (ve) y coeficiente de ambigüedad (CA).

	Valoración (%)						
Cuestiones	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**VE**	**CA**
Los objetivos propuestos han sido interesantes	2 (5.9)	4 (11.8)	12 (35.3)	14 (41.2)	2 (5.9)	3.42	1.33
Considero que el curso es importante para la práctica docente	2 (5.9)	4 (11.8)	10 (29.4)	12 (35.3)	6 (17.7)	3.58	1.54
El curso me ha aportado ideas nuevas sobre las matemáticas	2 (5.9)	6 (17.6)	6 (17.6)	12 (35.3)	8 (23.5)	3.75	1.87
Me hubiera gustado poder avanzar más, que el curso hubiera sido más largo	4 (11.8)	6 (17.6)	2 (5.9)	12 (35.3)	10 (29.4)	3.92	2.40

Tabla 4. Descriptores de las cuestiones de opinión

La valoración de las respuestas objetivas (tabla 4) queda refrendada por las respuestas dadas por las estudiantes a la pregunta abierta "¿qué es lo que más te ha interesado, agradado, impactado, etc. del curso?". Dos grandes tipos de respuestas:

- *Relación de las matemáticas con la práctica docente*: "me ha interesado la realización de diferentes situaciones matemáticas para la enseñanza de diferentes aspectos matemáticos a los niños", "es la primera materia en la que he visto cómo trabajar e incorporar la teoría del aprendizaje significativo", "he conocido otra forma de enseñar matemáticas a niños de EI", etc.
- *Modelo epistemológico de las matemáticas*: "al hacer los esquemas hemos podido analizar fases del proceso de aprendizaje de las matemáticas que hasta ahora no éramos conscientes", "la metodología utilizada me ha impresionado; creo que es una buena forma para aprender las matemáticas", "he conocido otro punto de vista sobre la forma de trabajar las matemáticas", etc.

BREVE DISCUSIÓN

El modelo docente de maestra en EI competente en matemáticas ha sido el resultado de una actividad estructurada en términos de situaciones de enseñanza. Las sesiones teóricas y el trabajo en grupo dirigido por el profesor han posibilitado la aceptación de la posibilidad de enseñar matemáticas "no convencionales" (mediante fichas estereotipadas) en las aulas de EI. La evolución de los aprendizajes matemáticos, didácticos y técnicos ha sido gradual (tablas 2 y 3) y, en líneas generales, satisfactorio según los criterios de enseñanza pretendidos y el diseño de evaluación (tabla 5).

En la tabla 2 se observa que la S4 ha supuesto un cambio de tendencia en el comportamiento medio de la clase. El hecho de que el número de trabajos con calificación 3 ("muy bien") y la media de calificaciones descienda de S3 a S4 quedan explicados por:

1. *Los conocimientos matemáticos involucrados*. El objetivo del S4 era la introducción, mediante gomas elásticas, de las figuras geométricas. El análisis clínico de las respuestas y la discusión en clase posterior reveló la necesidad de incidir en la enseñanza de co-

nocimientos geométricos de base (punto, línea, superficie; líneas y superficies cerradas; regiones y fronteras, etc.).

2. *El sistema de calificación seguido*, paulatinamente más exigente según el proceso instruccional iba avanzando. En la tabla 5 se da el número de apartados incorrectos admitidos para la obtención de una determinada calificación en los diversos *esquemas*.

Calificación	**S1**	**S2**	**S3**	**S4**	**S5**	**S6**
3 (muy bien)	0–8	0–7	0–6	0–4	0–3	0–2
2 (bien)	9–11	8–10	7–9	5–7	4–6	3–4
1 (presentado)	12 o más	11 o más	10 o más	8 o más	7 o más	5 o más

Tabla 5. Apartados incorrectos y asignación de calificaciones

Las opiniones dadas por las estudiantes permiten afirmar que se ha producido un desplazamiento en la "empatía matemática". El afrontamiento psicológico ha modificado la disposición de las estudiantes hacia la enseñanza de las matemáticas; con otras palabras, la sentencia "la enseñanza de las matemáticas siempre ha quedado fuera de mi 'zona cómoda'" (Kirova y Bhargava, 2002) ha perdido en general su vigencia.

La tabla 3 permite la comparación de los trabajos 1 y 2, puesto que han sido corregidos según un esquema de calificación previamente elaborado, que cuantifica los errores o ausencias de información y, por lo tanto, lo que debe entenderse por "deficiencia en el diseño". Por ello se puede afirmar que hay una clara evolución en la competencia matemática y didáctica de las estudiantes. A pesar de ello, en la mayoría de las estudiantes se observan en ciertos aspectos de los esquemas presentados tres comportamientos no deseados: 1) deficiencias en el diseño de las situaciones de enseñanza, 2) necesidad de una mejor formación matemática y 3) resistencia a abandonar el ME-T. Los dos primeros comportamientos eran previsibles, no así el tercero. La resistencia a abandonar el ME-T se identifica no sólo en las respuestas dadas a los trabajos individuales, sino al gran número de intervenciones que el profesor ha debido realizar a lo largo del proceso instruccional.

La tabla 4 muestra que las estudiantes valoran mayoritariamente de forma positiva el curso con relación al aprendizaje de la geometría y a la importancia del curso en su práctica docente. El coeficiente de ambigüedad (CA) es en todos los casos inferior a 2, excepto en el último ítem, que debe considerarse ambiguo y, por lo tanto, no discriminante.

La valoración del proceso instruccional hecha por las estudiantes apoya la conclusión avanzada Kirova y Bhargava (2002) según la cual las maestras valoran muy positivamente la capacidad de "examinar de manera sistemática sus propias técnicas y tomar decisiones informadas acerca de cumplir con las necesidades individuales de los niños en cuanto al aprendizaje de la matemática". La elaboración sistemática de *esquemas* ha posibilitado la diferenciación de objetivos (de la maestra, de los niños y de la situación) y, por lo tanto, la previsión de comportamientos y dificultades de los alumnos y de intervenciones eficaces de la maestra.

A MODO DE CONCLUSIÓN

La formación matemática y didáctica de las futuras maestras en EI debe partir del ME que éstas tienen de la matemática, puesto que este modelo restringe el tipo de tareas que se plantean realizar en su futura actividad docente. La experiencia personal (afectiva y psicológica) debe ser afrontada, antes de la determinación de un modelo docente en EI. Este modelo se constituye en torno al ME como instrumento integrador en una perspectiva de desarrollo

global del niño en los distintos aspectos (físicos, motores, emocionales, afectivos, sociales y cognitivos). Esta función integradora de las matemáticas puede manifestarse en situaciones de enseñanza de comunicación entre niños.

Reconocimiento. Agradecemos los comentarios y sugerencias hechos por los revisores, que han contribuido a mejorar la claridad y la difusión de nuestro trabajo.

REFERENCIAS

Albertín A. M., Zufiaurre B. (2005). *La formación del profesorado de Educación Infantil. Una trayectoria desde la LGE hasta la LOE*. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Apple M. W (1986). *Ideología y currículo*. Madrid: Akal.

Baroody A. J. (2000). Does mathematics instruction for three to five year-olds really make sense? *Young Children 55(4)*, 61–67.

Biemer P. P., Lyberg L. E. (2003). *Introduction to Survey Quality*. Hoboken, NJ: Wiley.

Briand J., Loubet M., Salin M-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle (Cédérom PC)*. Paris: Hatier.

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

De Castro C.; Escorial B. (2007). Estudio exploratorio sobre resolución de problemas aritméticos verbales con niños de 5 años. *Indivisa*, en prensa.

Epstein S. (1994). Cognitive - Experiential self-theory. In L. Pervin (Eds.), *Handbook of personality theory and research* (pp. 165–192). New York: Guilford Press.

Kirova A., Bhargava A. (2002). Learning to Guide Preschool Children's Mathematical Understanding: A Teacher's Professional Growth. *Early Childhood Research & Practice 4(1)*. [Disponible en (31-03-07): http://ecrp.uiuc.edu/].

Lazarus R.S., Folkman S. (1986). *Estrés y procesos cognitivos*. Barcelona: Mtez. Roca.

Martínez A., Rivaya F. J. (1989). *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría elemental*. Madrid: Síntesis.

MEC (2007). REAL DECRETO 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil, *BOE 4, de jueves 4 enero de 2007*. Madrid: Autor.

RAE (2001). *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Autor.

Sánchez J. J. (2000). *La bondad de la encuesta: el caso de la no respuesta*. Madrid: Alianza Editorial.

Thomas N. D.; Mulligan J. T.; Goldin G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of mathematical behavior*, 21, 117–133.

Vygotsky L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Boston: Harvard University Press.

ANEXO

ESQUEMA: TÍTULO

1. PRESENTACIÓN

Descripción breve de la situación, sin abordar explícitamente el problema del alumno y del profesor.

1.1. Objetivo. De la situación

1.2. Vocabulario. Utilizado por el profesor para dar la consigna y gestionar la situación

1.3. Variables didácticas. Variable de la situación que puede ser controlada por el profesor y que su modificación hace que los alumnos cambien de estrategia o modo de resolución, es decir, necesitarán nuevos conocimientos.

1.4. Interés pedagógico. Sociabilización, motricidad fina, etc.

1.5. Interés didáctico. Con relación al saber matemático.

1.6. Duración prevista (que tendrá que tener en cuenta los procesos cognitivos individuales)

1.7. Distribución en el año escolar (con indicación, si es el caso, de secuencia con otras situaciones)

1.8. Material (necesario para la realización del proceso de enseñanza - aprendizaje)

2. DESARROLLO

Descripción pormenorizada de la situación según las tareas y responsabilidades de profesor y alumnos.

2.1. Disposición de la clase (gran grupo, talleres; ubicación con relación a la maestra, etc.)

2.2. Consigna. Descripción de la situación que se da a los alumnos (entre comillas indicaciones de posibles intervenciones de la maestra en la situación). Se busca que todos entiendan la dinámica del juego. Se repite si es necesario, tanto por grupos como por parejas concretas o de cualquier otra forma en la que se distribuya la clase.

2.3. Proceso. Descripción de las funciones y responsabilidades de profesor y alumno según las "fases en que es estructurada la situación"

2.3.1. Fase de naturalización-familiarización (con los materiales, sensitiva generalmente).

2.3.2. Fase de acción. Juego según las estrategias de los niños (independientemente de que estas sean buenas o no, adaptadas al problema o no, ciertas o no, etc.) en función de la consigna dada.

2.3.3. Fase de formulación (explícita de conocimientos contrastables).

2.3.4. Fase de validación. Contrate (validación o refutación) de lo formulado explícitamente

2.3.5. Fase de institucionalización. Momento por el cual el profesor "hace la clase". Se asegura que la clase aprende un conjunto de saberes (conocimientos culturales). Resume, sistematiza lo hecho en la clase. Separa lo importante de lo accesorio, etc. Propone situaciones de ampliación o refuerzo y valora los aprendizajes y la situación propuesta.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

3.1. Objetivos del maestro. Identificado muchas veces con el "objetivo de enseñanza".

3.2. Objetivos para los alumnos. Identificado generalmente con "buscar la mejor forma de tener éxito en la situación"

3.3. Dificultades: necesidades de aprendizaje. Errores, disfunciones, complicaciones, etc.

que pueden plantearse con relación a la tarea que deben realizar y a la reflexión sobre la misma.

3.4. Conocimientos matemáticos (nociones, procesos y significados)

3.4.1. Nociones matemáticas involucradas

3.4.2. Procesos. Mecanismos, técnicas de resolución, algoritmos, procesos, etc. relacionados con los objetos matemáticos involucrados. De forma general, hablaremos de proceso cuando se pongan en relación dos o más objetos.

3.4.3. Significados. Sentidos atribuidos a objetos matemáticos.

3.5. Contratos

3.5.1. Pedagógico. Reglas o normas que hacen referencia a la relación profesor-alumno, independientemente del conocimiento que se esté enseñando o aprendiendo.

3.5.2. Didáctico. Reglas o normas que hacen referencia a la relación profesor-alumno-saber, esto es, es específica de los conocimientos que se estén enseñando o aprendiendo.

3.6. Cuestión crucial. Aspecto muy particular de la situación formulado en forma de pregunta-respuesta.

4. CONTEXTUALIZACIÓN. Justificación de la situación mediante un texto *oficial* (RD de mínimos, Temario oficial, Decreto de las CCAA, etc.) o una *propuesta de enseñanza* (libro de texto, programación escolar, libro especialista, colecciones de fichas, etc.)

4.1. Referencia bibliográfica (que con preferencia tengan relación con cuestiones didácticas antes que pedagógicas)

4.2. Texto original y comentarios

1.1.1. Texto original. Texto original ("copiado textualmente") de la referencia.

4.2.2. Comentario (en qué sentido la situación incide en lo dicho en el texto trascrito).

MEJORA Y EVALUACIÓN DE UN CUESTIONARIO DE CREENCIAS DE MATEMÁTICAS EN FUNCIÓN DE NACIONALIDAD, EDAD Y SEXO

J. Diego-Mantecón, P. Andrews
Universidad de Cambridge, Reino Unido

P. Op't Eynde
Universidad de Lovaina, Bélgica

RESUMEN

Este artículo describe la adaptación al contexto educativo español e inglés del cuestionario de creencias de matemáticas (Mathematics-Related Beliefs Questionnaire MRBQ), desarrollado en la Universidad de Lovaina (Op't Eynde y De Corte, 2003). El instrumento original, evaluado con estudiantes flamencos, dio como resultado cuatro escalas de las que sólo dos resultaron fiables. En este trabajo mostramos cómo el cuestionario ha sido mejorado, obteniendo cuatro escalas y diez subescalas fiables, con estudiantes de secundaria. Los resultados muestran la eficacia del instrumento ya revisado para evaluar sistemas de creencias entre estudiantes de diferente nacionalidad, edad y sexo.

ABSTRACT

This paper describes the adaptation to the Spanish and English educational context of the mathematics-related beliefs questionnaire (MRBQ) developed at the University of Leuven (Op't Eynde and De Corte, 2003). The original instrument, tested with Flemish students, yielded four scales, achieving satisfactory levels of reliability for two of the scales. We show here how the MRBQ was refined to yield four reliable scales, and ten subscales, with a sample of secondary students. The results show the effectiveness of the revised instrument for testing beliefs systems among students of different nationalities, ages and gender.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
J. Diego-Mantecón, P. Andrews y P. Op't Eynde (2007). MEJORA Y EVALUACIÓN DE UN CUESTIONARIO DE CREENCIAS DE MATEMÁTICAS EN FUNCIÓN DE NACIONALIDAD, EDAD Y SEXO, pp. 325-333.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos una adaptación del cuestionario de creencias de matemáticas, desarrollado en la Universidad de Lovaina (Op't Eynde y De Corte, 2003). El estudio original pretendía desarrollar, a partir de un fundamento teórico válido, un instrumento integral que evaluara los sistemas de creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. El MRBQ ha demostrado su capacidad para detectar creencias entre estudiantes de diferente sexo y distintas escuelas de secundaria. No obstante, sólo dos de las cuatro escalas generadas por el análisis factorial alcanzaron un nivel de fiabilidad aceptable, no realizándose tampoco intento alguno para identificar posibles subescalas. Además, el MRBQ ha sido desarrollado en Flandes y evaluado sobre alumnos flamencos, sin que exista ningún indicio de que pueda ser transferible a otros contextos. En este artículo adaptamos y mejoramos el MRBQ al contexto educativo español e inglés, con el objetivo de evaluar su sensibilidad frente a variables como nacionalidad, edad y sexo.

MARCO TEÓRICO

Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) reconocen que las creencias son tan necesarias como las funciones psicológicas de cognición y metacognición para lograr un aprendizaje efectivo. De hecho, influyen fuertemente en cómo los alumnos aprenden matemáticas, pudiendo incluso obstaculizar su aprendizaje (Pehkonen y Törner, 1999). A pesar de su importancia, no existe una definición consensuada. Pajares (1992) sugiere que se debe a la dificultad de distinguir entre 'creencias' y 'conocimiento'. Abelson (1979) señala que las creencias son no-consensuales y en consecuencia discutibles, mientras que el conocimiento, generalmente, puede ser verificado. Es decir, las creencias son construcciones individuales, mientras que el conocimiento es una construcción esencialmente social (Op't Eynde, De Corte y Verschaffel, 2002). Furinghetti y Pehkonen (2002) hablan de conocimiento objetivo y subjetivo como medios de distinción entre el conocimiento formalizado y colectivamente aceptado, representado por las matemáticas, y el conocimiento individualmente construido y experiencial del individuo. En este trabajo, consideramos las creencias, en general, como "subjetivas, basadas en la experiencia, y a menudo conocimiento implícito" (Pehkonen y Pietilä, 2003: 2).

Por otro lado sí hay consenso respecto a su funcionamiento; un individuo recibe continuamente percepciones de su entorno y compara sus creencias con nuevas experiencias u otras creencias (Green, 1971). Esta continua evaluación y cambio significa que cada nueva creencia se incorpora automáticamente en una existente estructura o sistema de creencias (Pajares, 1992; Green, 1971). A pesar de esto, tradicionalmente las creencias han sido estudiadas separadamente; por ejemplo, algunos investigadores han limitado su estudio a las creencias epistemológicas (Schommer, 1994), sobre la motivación del alumno (Mason, 2003), sobre el entorno de la clase (Cobb y Yackel, 1998), etc. Considerando lo anterior, el equipo de Lovaina elaboró el MRBQ, con el objetivo de categorizar los diferentes tipos de creencias así como sus relaciones (Op't Eynde y De Corte, 2003). En una minuciosa revisión de la literatura identificaron tres categorías principales que informaron la elaboración de su cuestionario: creencias sobre (1) 'educación matemática', (2) 'uno mismo como estudiante de matemáticas' y (3) 'el entorno de la clase'. Cada una de ellas está relacionada entre sí y constituida por subcategorías. La primera categoría se divide en: creencias sobre 'la naturaleza de las matemáticas', 'el aprendizaje y la resolución de problemas', y 'la enseñanza'. La segunda abarca cinco subcategorías: 'orientación intrínseca' y 'extrínseca' del estudiante,

'autoeficacia', 'autorregulación' y 'valor de las tareas matemáticas'. Finalmente, la tercera categoría se centra en 'cómo los estudiantes perciben lo motivado que está su profesor', 'el modo en que interactúa con ellos' e 'imparte su clase'.

Es bien reconocido que el contexto socio-cultural, la edad y el sexo de los estudiantes son factores que determinan las creencias, sin embargo, el modo en que influyen no está bien determinado (Diego-Mantecón, 2006). Gran parte de los estudios comparativos no han considerado la influencia mutua de estos tres factores, y más importante, no se han centrado en los aspectos estructurales de las creencias sino en la comparación de ítems. Por ejemplo, Pehkonen y Tompa (1994), comparando las creencias de estudiantes finlandeses y húngaros, utilizaron el análisis factorial para reducir una gran cantidad de ítems a proporciones 'compactas', pero omitieron las implicaciones estructurales, centrando su atención en la comparación de las puntuaciones de cada ítem. Pehkonen (1995) comparó las creencias entre estudiantes de diferentes nacionalidades, analizando las respuestas a una serie de ítems individuales que habían sido agrupados a criterio del investigador. Métodos similares fueron usados por Mason (2003) y Leder (2001) para comparar creencias con relación a la edad y sexo, respectivamente. Nuestro propósito es por lo tanto, mejorar el cuestionario de Op't Eynde y De Corte (2003), incrementando la fiabilidad de sus escalas y analizando posibles subescalas, con el objetivo de determinar el grado en que el instrumento podría evaluar conjuntamente sistemas de creencias en distintas culturas educativas, edades y sexos.

MÉTODO

El instrumento original constaba de 40 ítems. En un intento de complementar y mejorar la escala original se añadieron 33 más, obtenidos de varias fuentes como las escalas de Kloosterman y Stage (1992) y Pintrich y De Groot (1990). Todos los ítems fueron sometidos a examen por colegas de Inglaterra y España, para establecer su equivalencia conceptual y lingüística (Osborn, 2004). Además, fueron estratégicamente combinados y divididos en grupos de cinco para facilitar su respuesta. Empleamos una escala Likert de seis puntos para seguir el enfoque del equipo de Lovaina y porque consideramos que forzar una decisión podría mejorar los datos resultantes. Tras varias pruebas piloto, el cuestionario se distribuyó, durante la primavera de 2006, a estudiantes de 12 y 15 años en un instituto de Cambridge (Inglaterra) y en tres de Santander (España).

RESULTADOS

Para llevar a cabo nuestro objetivo de determinar el grado en que los datos reflejan constructos psicológicos, adoptamos varios procedimientos analíticos. Primeramente, realizamos un análisis de fiabilidad sobre la totalidad de respuestas (625: 220 de Inglaterra y 405 de España), dando como resultado un satisfactorio alfa de Cronbach ($\alpha = .934$). Puesto que la exclusión de ítems no mejoraba la fiabilidad, sometimos los 73 ítems al 'método de componentes principales'. Aunque el test de Cattel Scree sugería la extracción de cinco factores, una solución de cuatro se mostraba abiertamente consistente. El porcentaje de varianza de los cuatro factores representó el 38.9 %, que a pesar de no ser alto, resulta favorable comparado con el 38.3 % original. Con el fin de aumentar la interpretabilidad de dichos factores estos fueron rotados. Concretamente se usó una rotación ortogonal porque partimos de la presunción de que no existe relación entre ellos (Bryman y Cramer, 2001). La relación de cada ítem con su factor se expresa como "correlación". Siguiendo el estudio original han sido aceptados

sólo ítems con un coeficiente de correlación mayor que 0.4, en consecuencia trece ítems fueron desechados del análisis. Para determinar la existencia de posibles subfactores se realizó un segundo análisis en cada factor. A continuación, presentamos la descripción de cada uno de ellos. Por razones de espacio sólo incluimos los ítems y los coeficientes de correlación de los factores 1 y 2. Para una mejor comprensión, los coeficientes no se exponen por orden de los factores sino de los subfactores.

Factor 1

La Tabla 1 muestra los ítems y coeficientes del primer factor y sus subfactores. Con leves variaciones cada uno de estos ítems se halla también en el primer factor del análisis original. Nuestra interpretación es que muchos de los ítems aluden a una disposición positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, así como al aprendizaje en sí mismo. En concreto, algunos ítems, con palabras como *disfrutar, valorar y agradable,* parecen apuntar al dominio afectivo mientras que otros, con palabras como e*ntender, examinar o explicar*, señalan al dominio cognitivo. Op't Eynde y De Corte (2003) determinaron que este factor hace referencia a las creencias del alumno sobre el **rol de su profesor**, opinión que compartimos. El alfa de Cronbach de esta escala ($\alpha = .921$) es idéntico al del estudio original.

El segundo análisis dio como resultado dos subfactores con niveles de fiabilidad satisfactorios. Los ítems clave del primero (1.1) se refieren al modo en que el profesor se ocupa del aprendizaje pleno de sus alumnos ($\alpha = .924$) y los del segundo (1.2) aluden al interés del profesor en sus alumnos ($\alpha = .734$). El factor 1 está por lo tanto, dividido en dos subfactores y no en tres, como recoge el estudio original. No obstante, Op't Eynde y De Corte (2003) no realizaron un segundo análisis para confirmarlo, asumiendo que las tres subcategorías descritas en su marco teórico estaban representadas por los ítems en este factor.

Tabla 1: coeficientes de correlación del factor 1 y sus subfactores

	1	1.1	1.2
Mi profesor quiere que disfrutemos aprendiendo cosas nuevas	.812	.839	
Mi profesor entiende nuestros problemas y dificultades con las matemáticas	.788	.771	
Mi profesor trata de que las clases de matemáticas sean interesantes	.772	.770	
Mi profesor valora que nos esforcemos aunque nuestros resultados no sean buenos	.756	.744	
Mi profesor siempre nos muestra, paso a paso, cómo resolver un problema, antes de darnos más ejercicios	.730	.737	
Mi profesor escucha atentamente cuando decimos algo	.769	.730	
Mi profesor es agradable con nosotros	.785	.708	.418
Mi profesor nos da siempre tiempo para examinar los problemas nuevos y probar diferentes estrategias para solucionarlos	.660	.698	
Mi profesor quiere que entendamos el contenido de la asignatura	.665	.694	
Mi profesor nos explica por qué las matemáticas son importantes	.594	.665	

Trabajamos mucho en grupo en las clases de matemáticas	.401	.532		
Mi profesor cree que los errores son aceptables si aprendemos de ellos	.505	.532		
Mi profesor está demasiado centrado en el contenido de la asignatura como para prestarnos atención	-.553		-.845	
A mi profesor no le preocupa cómo nos sentimos en clase (si entendemos las cosas o no, si estamos aburridos, etc.)	-.523		-.828	
Alpha	.921	.924	.734	

Factor 2

El factor 2 alude a la percepción de los alumnos sobre su capacidad para tener éxito en matemáticas. Aún existiendo elementos de carácter cognitivo reflejados en palabras como *entender,* la mayoría de los ítems apuntan a un dominio afectivo en general y a la autoeficacia en particular. A pesar del solapamiento con el segundo factor del análisis original, para nosotros no se refiere tanto a la importancia de las matemáticas sino a la **competencia** personal. De hecho expresiones como *creo, me gusta, puedo, prefiero* y *estoy segur*o versan sobre la autoeficacia del alumno. El coeficiente alfa de este factor (α = .915) resulta favorable comparado con el coeficiente original (α = .89).

Tabla 2: coeficientes de correlación del factor 2 y sus subfactores

	2	2.1	2.2	2.3
Creo que es interesante lo que aprendo en clase de matemáticas	.601	.850		
Me gusta lo que aprendo en esta clase	.594	.836		
Me interesan mucho las matemáticas	.655	.807		
Me gusta hacer cosas de matemáticas	.678	.757		
Prefiero tareas que supongan un reto para así aprender cosas nuevas	.522	.683		
Espero hacerlo bien en las tareas y los exámenes de matemáticas	.583	.605		
Prefiero las matemáticas en las que tengo que esforzarme para encontrar la solución	.565	.596		
He descubierto que si tengo paciencia puedo hacer problemas difíciles de matemáticas	.462	.534		
Estoy seguro de poder aprender como resolver el problema más difícil de matemáticas	.556	.534		
No tengo que esforzarme demasiado para entender las matemáticas	.634		.835	
Comparado con otros compañeros creo que soy bueno en matemáticas	.692		.638	.416
Creo que lo voy hacer bien en matemáticas este curso	.647	.432	.581	
Entiendo todo lo que hemos hecho en matemáticas este año	.701	.475	.572	

Normalmente puedo hacer problemas de matemáticas que me llevan mucho tiempo resolver	.501		.476	
Puedo comprender incluso el tema más difícil que me enseñen en matemáticas	.678	.443	.452	
Haciéndolo lo mejor que puedo en matemáticas intento mostrarle a mi profesor que soy mejor que otros compañeros	.411			.852
Me esfuerzo mucho en matemáticas para demostrarles al profesor y al resto de mis compañeros lo bueno que soy	.404			.769
Alpha	.915	.917	.812	.667

La Tabla 2 muestra los tres subfactores del factor 2. Los ítems del primero parecen remitir a la percepción del alumno sobre el disfrute de aquellas matemáticas que suponen un reto. El segundo, que no se encuentra desvinculado del primero, está relacionado con una competencia absoluta (intrínseca) del alumno en matemáticas, mientras que el tercer subfactor alude a una competencia relativa (extrínseca). El primer y segundo subfactor muestran una alta fiabilidad (α = .917 y α = .812 respectivamente), y el tercero una fiabilidad moderada (α = .667). El estudio original proponía sólo dos subfactores, 'valor de las tareas' y 'autoeficacia', pero como en el factor 1 no fueron confirmados.

Factor 3

La mayoría de los ítems del tercer factor apuntan a la **relevancia** de las matemáticas (ej. saber matemáticas me ayudará a ganarme la vida), aunque varios se refieren a cuestiones del aprendizaje (ej. creo que es importante aprender distintas maneras de resolver un mismo problema). Esto se puede interpretar en términos de la significación de las matemáticas en el mundo real, las matemáticas como asignatura intrínsecamente valiosa o de utilidad para otro tipo de ocupaciones. La estructura subyacente de este factor se parece mucho a la del segundo factor, *significación de las matemáticas*, identificada en el estudio original. En nuestra opinión, ninguno de los factores que surgieron en nuestro análisis refleja la dimensión de matemáticas como una 'actividad social' que sustentaba el tercer factor en el análisis original. El coeficiente alfa obtenido (α = .875) mejora el coeficiente original (α = .65).

Analizando la solución de los tres subfactores observamos lo siguiente: el primer subfactor (α = .821) parece aludir a una percepción personal de las matemáticas como relevantes, mientras que el segundo (α = .814) apunta a una relevancia global o colectiva (ej. las matemáticas nos permiten entender el mundo en que vivimos). El tercer subfactor (α = .741) está ligado a la percepción de las diferentes estrategias en el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas.

Factor 4

El último factor, orientado negativamente, hace referencia a las matemáticas como una asignatura cerrada, mecánica y a menudo difícil. En ciertos aspectos, hay reminiscencias de las matemáticas como un dominio de excelencia al igual que había surgido en el análisis original. Sin embargo, el factor aquí identificado parece poseer una cualidad afectiva que hace alusión a las matemáticas como una asignatura **difícil**. El coeficiente de fiabilidad de esta última escala (α = .764) resulta más favorable en comparación con el original (α = .69).

En este factor, la solución de dos subfactores con $\alpha = .741$ y $\alpha = .615$ se presenta como la más consistente. El primero aparece relacionado con el acceso personal a las matemáticas. Enfatiza la idea de que éstas están sólo al alcance de los alumnos más dotados (ej. sólo los estudiantes muy inteligentes pueden entender las matemáticas), lo que puede llevar a la interpretación de las matemáticas como un conocimiento inaccesible. El segundo, apunta a las matemáticas como un cuerpo fijo de conocimiento que exige poca pero buena memoria (ej. aprender matemáticas consiste básicamente en memorizar). Es decir, las matemáticas como conocimiento memorístico.

Evaluación de los factores

De acuerdo con nuestro objetivo de determinar el grado en que el cuestionario revisado sería sensible a las diferencias en nacionalidad, edad, y sexo, se calcularon las puntuaciones de los factores – la media de todos los ítems en cada factor – por cada estudiante. Se sometieron posteriormente a una variedad de análisis comparativos, utilizando entre otros t-test. Recordamos que en una escala de seis puntos, donde 1 es positivo y 6 negativo, la puntuación 3.5 corresponde a la neutralidad.

Tabla 3: media, desviación estándar y probabilidades asociadas para nacionalidad, edad y sexo en cada factor.

	Rol del Profesor		Competencia		Relevancia		Asignatura Difícil	
Nacional.	E	I	E	I	E	I	E	I
M	2.44	2.84	2.84	3.54	2.04	2.43	4.34	4.07
SD	0.99	0.98	0.83	0.90	0.65	0.82	0.71	0.63
p	0.000		0.000		0.000		0.000	
Edad	15	12	15	12	15	12	15	12
M	2.94	2.30	3.38	2.86	2.47	1.96	4.19	4.28
SD	1.08	0.85	0.92	0.85	0.75	0.65	0.66	0.72
p	0.000		0.000		0.000		0.105	
Sexo	F	M	F	M	F	M	F	M
M	2.59	2.57	3.30	2.90	2.22	2.14	4.31	4.18
SD	0.99	1.02	0.94	0.86	0.75	0.72	0.66	0.73
p	0.884		0.000		0.165		0.020	

Respecto a la nacionalidad, la Tabla 3 muestra que los estudiantes españoles son significativamente más positivos que los ingleses en las tres escalas orientadas positivamente y significativamente más negativos en la escala orientada negativamente ($p<0.0005$). Por ejemplo, en creencias sobre la competencia personal los estudiantes españoles son claramente positivos (M=2.84), mientras los ingleses tienden a la neutralidad (M=3.54), rondando casi en lo negativo.

Con referencia a la edad, en tres de los cuatro factores los estudiantes de 12 años, independientemente de la nacionalidad, son de forma significativa ($p<0.0005$) medio punto más positivos que los estudiantes de 15 años. El único factor que no muestra ninguna diferencia significativa es el de las matemáticas como asignatura difícil donde la creencia de los estudiantes de ambas edades tendió a rechazar esta noción.

Finalmente, con relación al sexo, las cifras muestran que las chicas, independientemente de su edad o nacionalidad son significativamente ($p<0.0005$) menos positivas que los chicos en el factor de la competencia personal, aunque más negativas en el factor de las matemáticas como asignatura difícil. Es decir, las chicas creen menos en su competencia personal pero consideran las matemáticas una asignatura más fácil. Otros análisis, que por razones de espacio no hemos divulgado aquí, indicaron interesantes efectos combinados entre las tres variables mencionadas.

CONCLUSIONES

Op't Eynde y De Corte (2003) describieron el MRBQ como un instrumento integral para la evaluación de sistemas de creencias. Este trabajo muestra que el instrumento original era susceptible de un ulterior desarrollo que ha derivado en una solución de cuatro sistemas de creencias fiables (y diez subsistemas) para estudiantes españoles e ingleses de 12 y 15 años. Estos resultados sugieren que dichos sistemas podrían ser además mantenidos por otros estudiantes europeos, aunque serán necesarios más estudios para su verificación, y para la identificación de una estructura más precisa. Dada la reducida y localizada muestra del estudio no es posible generalizar, sin embargo, las diferencias significativas en creencias sustentan la conclusión de que el instrumento es sensible al contexto socio-cultural, edad y sexo. De hecho, en nuestros análisis, los niveles de probabilidad fueron lo suficientemente bajos como para que los errores de interpretación sean altamente improbables, proporcionando una prueba adicional de que el mejorado MRBQ puede ser una potente herramienta en la investigación comparativa de sistemas de creencias.

BIBLIOGRAFÍA

Abelson, R. (1979). Differences between belief systems and knowledge systems. *Cognitive Science*, 3 (4), 355-366.

Bryman, A. & Cramer, D. (2001). *Quantitative Data Analysis with SPSS Release 10 for Windows: A Guide for Social Scientists*. London, UK: Routledge.

Cobb, P. & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). New York: Cambridge University Press.

Diego Mantecón, J.M. (2006). *A comparison of secondary English and Spanish Students' conceptions about Mathematics*. Faculty of Education, Cambridge University.

Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of belief. En G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39-57). Dordrecht: Kluwer.

Green, T. (1971). *The Activities of Teaching.* London: McGraw Hill.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding It Up: Helping children learn mathematics.* Washington DC: National Research Council.

Kloosterman, P. & Stage F., (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, 92, 109-115.

Leder, G.C. (2001). Pathways in mathematics towards equity: a 25 year journey. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *25 Conferencia del Grupo Internacional para la Psicología de Educación Matemática*, Vol. 1 (pp.41-54). Utrecht, Netherlands.

Mason L., (2003). High school students' beliefs about maths, mathematical problem solving and their achievement in maths: a cross-sectional study. *Educational Psychology*, 23 (1), 73-85.

Op't Eynde, P. & De Corte, E. (2003, abril). *Students' mathematics-related belief systems: design and analysis of a questionnaire.* Simposio, "La relación entre las creencias epistemológicas de los estudiantes, cognición y aprendizaje", Encuentro Anual de la Asociación Americana para la Investigación Educativa. Chicago.

Op't Eynde, P., De Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. En G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Osborn, M. (2004). New methodologies for comparative research? Establishing "constants" and "contexts" in educational experience. *Oxford Review of Education*, 30 (2), 265 - 285.

Pajares, M.F. (1992). Teachers beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62 (3), 307-332.

Pehkonen, E. (1995). *Pupils' View of Mathematics: Initial report for an international comparison project*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 152.

Pehkonen, E. & Pietilä, A. (2003, febrero-marzo). *On relationships between beliefs and knowledge in mathematics education.* Tercera Conferencia de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (CERME). Bellaria, Italy.

Pehkonen, E. & Tompa, K. (1994). Pupils' conceptions about mathematics teaching in Finland and Hungary. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25 (2), 229 – 238.

Pehkonen, E. & Törner, G. (1999, noviembre). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics.* Workshop in Oberwolfach, (pp. 3-10).

Pintrich, P. & De Groot, V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology,* 82 (1), 33-40.

Schommer, M. (1994). Synthesizing epistemological belief research: Tentative understandings and provocative confusions. *Educational Psychology Review*, 6, 293-319.

LOS DOCENTES, SENTIDOS CONSTRUIDOS EN LA ESCUELA SOBRE LAS MATEMÁTICAS UN ESTUDIO EN LA CIUDAD DE MÉXICO

Patricia Flores
Universidad Pedagógica Nacional

Olimpia Figueras y François Pluvinage
CINVESTAV, México

RESUMEN

Las ideas y expectativas de 337 maestros de educación primaria de escuelas públicas acerca de contenidos matemáticos importantes en ese nivel escolar y el desempeño de sus estudiantes es el objeto de estudio de una investigación realizada en la Ciudad de México. Aun cuando los docentes laboran en diferentes zonas del Distrito Federal, sus opiniones revelan que comparten objetivos y sentidos; por ello, pueden identificarse como parte de una comunidad profesional. Además, se puso de manifiesto que los profesores adaptan objetivos que asocian a su práctica según la situación escolar que viven. Entre los distintos grupos caracterizados por formas de pensar se encontraron fuertes contrastes que revelan cómo se asume la complejidad de las prácticas relacionadas con los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas.

ABSTRACT

Ideas and expectations of 337 primary teachers from public schools at Mexico City related to mathematical contents and students' performance in mathematics were studied. Results show that although teachers are selected from different zones of the Federal District they share objectives and meanings, so they can be identifyed as part of a profesional communnity. Strong contrasts were found between teachers grouped by their ways of thinking which reveal the complexity of their practices linked to teaching and learning of mathematics.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Patricia Flores, Olimpia Figueras y François Pluvinage (2007). LOS DOCENTES, SENTIDOS CONSTRUIDOS EN LA ESCUELA SOBRE LAS MATEMÁTICAS UN ESTUDIO EN LA CIUDAD DE MÉXICO, pp. 335-342.

1. LA INVESTIGACIÓN COMO PROCESO DE ACERCAMIENTO A LA REALIDAD

Uno de los objetivos centrales del currículum nacional de matemáticas en la escuela primaria es que los estudiantes puedan resolver problemas y tomar decisiones en diferentes situaciones del entorno en el que viven (SEP, 1993). Sin embrago, las evaluaciones nacionales e internacionales realizadas en los últimos seis años en el país, muestran que se está lejos de lograr la formación básica de los estudiantes (ver por ejs. SEP, 2001; OCDE, 2003 y TIMSS, 2000).

Las autoridades educativas han impulsado acciones para mejorar la calidad de la educación. Entre otras se pueden mencionar: cursos y materiales para docentes; textos para alumnos; uso de diversos recursos tecnológicos y programas de estímulos para docentes e instituciones (ver por ejs. SEP, 2005). Uno podría preguntarse, ¿por qué todas esas acciones no se reflejan en los resultados?

En México son pocos los estudios del sistema educativo sobre los efectos que tienen en el desempeño de los alumnos en matemáticas, medidas como las mencionadas. Pese a que en el país se han llevado a cabo procesos locales de evaluación de la educación primaria y secundaria, es hasta el 2002, con la creación del Instituto Nacional de Evaluación Educativa que se inicia a nivel nacional la operación de un sistema de evaluación de la educación básica con el propósito de coadyuvar al mejoramiento del sistema educativo (INEE, 2002).

Diferentes estudios muestran que las creencias de los docentes sobre las matemáticas y su finalidad en la educación obligatoria influyen tanto en su labor docente, como en el aprendizaje de los estudiantes en el aula (Llinares, 1992 y 1996; Thompson, 1999 y ver antología editada por Gilian, Pehkonen y Tomer, 2005). El conocimiento profesional del profesor de matemáticas y los significados que algunos conceptos adquieren en las interacciones en el aula son objetos de estudio de esos investigadores. Otros estudiosos (Hyde, Fennema y Lamon, 1990 y Ramos, 1994) se centran en las creencias de los docentes sobre el aprendizaje de las matemáticas y el trato a los alumnos según sus diferencias (de género, étnicas, socioeconómicas o de desempeño).

1.1 Objetivos

A diferencia de los estudios referidos, la investigación realizada en México y sobre la que versa este documento, se enfocó en la concepción de profesores de la escuela primaria acerca del rendimiento escolar en matemáticas y en identificar a qué atribuyen el desempeño de sus alumnos. Dicha indagación se llevó a cabo en 4 estados de la República Mexicana y en la Ciudad de México (1) y tuvo dos objetivos centrales:

1. Identificar los factores que inciden en el rendimiento escolar en matemáticas y que los docentes atribuyen a los estudiantes.
2. Caracterizar los contenidos del currículum de educación básica que los docentes consideran relevantes para la formación matemática en la escuela primaria.

1.2 Encuesta para recopilar información

Para lograr los objetivos se decidió hacer una encuesta de opinión a grupos de maestros de primaria en el país. Con el objeto de controlar la toma de datos se acordó hacer un cuestionario de papel y lápiz lo que permitió su aplicación a alrededor de 1200 docentes. Ramos (1994) y Sánchez (1994) encontraron que los maestros seleccionan factores externos a su labor educativa como decisivos en los procesos de aprendizaje de sus alumnos. De acuerdo con

estos resultados y para circunscribir al docente a la escuela, se plantearon preguntas sobre las características de los estudiantes con buen y bajo desempeño en matemáticas; indirectamente se obtendría información relacionada con los objetivos centrales del estudio.

El diseño del cuestionario se hizo por etapas:

1. Elaboración de preguntas y validación interna. Se hicieron preguntas abiertas sobre la formación básica en matemáticas en la escuela y el desempeño; entre otras se pueden mencionar: ¿Cuáles serían las características de los buenos estudiantes en matemáticas? y Describa a un alumno que enfrente dificultades para aprender matemáticas.
2. Entrevista individual a docentes del Estado de México. Las respuestas de estos docentes posibilitaron la identificación de cinco componentes para la elaboración del cuestionario: dominio de contenidos matemáticos básicos; actitudes; hábitos; gusto o rechazo por las matemáticas, y características de alumnos con buen y bajo desempeño en matemáticas.
3. Construcción del cuestionario. Para cada uno de los componentes se diseñaron bloques de preguntas. Por la dificultad del procesamiento de las respuestas a preguntas abiertas se decidió plantear la gradación de aspectos vinculados a formas de proceder de los alumnos. En algunos casos se gradúan niveles de importancia y en otros grados de ocurrencia.
4. Estudio piloto y elaboración de la versión final del cuestionario. El instrumento quedó estructurado por medio de 12 bloques de preguntas.

Este artículo versa sobre el componente referido a las características del buen alumno y de aquel con bajo desempeño en matemáticas, al cual le correspondieron 4 bloques de preguntas en el cuestionario.

1.2.1 Bloques de preguntas del cuestionario

Para obtener información sobre la ideas que los profesores tienen acerca de un estudiante con buen desempeño en matemáticas se diseñaron dos bloques de preguntas; el primero de 19 interrogantes. La Figura 1 contiene una parte de los interrogantes de este bloque y en ella se ilustran su estructura y la escala de gradación de importancia utilizada.

Responda las preguntas eligiendo solamente una opción				
Para ser un buen alumno de matemáticas, ¿qué tan importante cree que sea...	NI	PI	I	MI
razonar para organizar y jerarquizar la información; como datos numéricos y no numéricos, relaciones entre cantidades, figuras geométricas y cosas por el estilo?				
comprender lo que se hace con los números, como por ejemplo, al hacer operaciones, al estimar o aproximar, o bien al descomponerlos o representarlos gráficamente?				
tener inquietud por conocer cosas nuevas sobre las matemáticas y hacerse preguntas acerca de temas vistos en clase o encontrados fuera de la escuela?				
expresar de forma clara sus ideas ya sea de forma verbal o escrita para comunicárselas a sus compañeros, a su maestro, o bien para usar las notas personalmente?				
crear estrategias propias?				
MI = Muy importante I = Importante PI = Poco Importante NI = No Importante				

Figura 1. Parte del bloque de preguntas para caracterizar a un buen alumno en matemáticas

El segundo bloque, aparecía en el cuestionario escrito a continuación del anterior y se solicitaba al docente elegir de entre los 19 aspectos sobre los que versan las preguntas, cinco que caracterizaran mejor a un buen estudiante en matemáticas y además se les pidió que ordenaran de menor a mayor importancia los aspectos elegidos.

Dos bloques de preguntas se diseñaron para recolectar información sobre comportamientos que podrían caracterizar a un alumno con bajo desempeño en matemáticas. El primero, también estaba conformado por 19 interrogantes. En este bloque el docente debía graduar la ocurrencia de una manera de actuar. En la Figura 2 se muestran ejemplos de la estructura de esas preguntas y la escala de frecuencias.

Como en el caso anterior, en la pregunta que aparece en el cuestionario inmediatamente después de este bloque, se pide al docente elegir de entre los 19 comportamientos sobre los que versan los interrogantes, cinco que mejor caractericen a un estudiante con bajo desempeño en matemáticas y que los ordene en orden de importancia.

Responda las preguntas eligiendo solamente una opción			
Un estudiante con bajo rendimiento escolar o que se encuentra en riesgo de reprobación...	CMF	AV	N
trata de atinarle al resultado, intenta adivinar la operación que debe usar, o las unidades que acompañan a los números en lugar de razonar.			
confunde datos relevantes con información superflua			
se conforma con llegar a un resultado, o con proponer sólo una forma de resolver un problema, o bien con pensar en un solo ejemplo particular.			
requiere material concreto para resolver problemas.			
deja incompletas sus respuestas.			
CMF = Con mucha frecuencia AV = A veces N = Nunca			

Figura 2. Parte del bloque de preguntas para caracterizar a un estudiante con bajo desempeño en matemáticas

EL ESTUDIO EN LA CIUDAD DE MÉXICO

En la sección anterior se expusieron características generales de la investigación realizada en las cinco entidades federativas. En esta sección se describe el estudio que se llevó a cabo en la Ciudad de México.

2.1 Selección de la muestra

En la ciudad hay 2260 escuelas primarias públicas, en ellas laboran alrededor de 13 560 profesores. Para seleccionar una muestra representativa se emplearon los datos correspondientes a habilidad matemática asignados a las escuelas como resultado de la evaluación llevada a cabo anualmente en la Ciudad de México, al término de la educación primaria, usando el Instrumento de Diagnóstico para Alumnos de Nuevo Ingreso a Secundaria (variable IDANIS). Los resultados de la evaluación de 2001, permitieron tipificar a las escuelas y ubicar a los profesores que participaron en el estudio.

Para lograr una aplicación confiable de la encuesta tomando en cuenta el número de personas que integraron el equipo de investigación, se consideró una muestra de 35 escuelas con lo que se aseguraría la participación de aproximadamente 300 maestros en el estudio.

Los resultados de la variable IDANIS se ubicaron, en 2001, en el intervalo con extremos 12.50 y 88.33 puntos; mismo que se dividió en ocho partes iguales. Para determinar el número de escuelas en cada uno de los estratos se procedió por afijación proporcional y se utilizó el muestreo aleatorio simple para definir las escuelas primarias participantes. En consecuencia la muestra la formaron todos aquellos profesores que tenían a su cargo un grupo de primaria en esas escuelas.

Con este criterio que sirvió en un primer momento para definir la muestra, la mayoría de las escuelas se concentró en estratos cuya puntuación era menor o igual a la media obtenida ese año y en otros sólo había una escuela. Por ello se decidió reagruparlas en 4 grupos cuya caracterización quedó determinada de la siguiente manera:

E--, agrupó escuelas cuya puntuación está muy alejada del promedio;

E- está formado por escuelas que obtuvieron puntuaciones más cercanas al promedio pero menores que él;

E= quedó configurado con escuelas cuya calificación es muy cercana al promedio, y

E+, lo constituyen las escuelas cuyas puntuaciones fueron mayores al promedio.

2.2 Análisis de los datos

Varios tipos de análisis se hicieron con los datos, entre ellos se puede mencionar el realizado empleando índices denominados: de Importancia, de Prioridad y de Frecuencia. Todos ellos se construyeron a través de promedios ponderados (su construcción puede consultarse con más detalle en Figueras, Flores y Pluvinage, 2004).

Como puede verse en la Figura 1, a las preguntas de ese bloque se responde asignando un nivel de importancia de entre los cuatro niveles que comprende la escala al aspecto considerado en el interrogante. Por ello, era natural a cada una de las preguntas asignarle un valor numérico que depende tanto de la frecuencia absoluta de la elección del nivel de importancia de los docentes, como del grado de importancia.

De manera análoga se construyeron los índices de prioridad y frecuencia, éste último fue usado en el análisis del bloque de preguntas que corresponde a la Figura 2. En relación con aquellas preguntas en las cuales el docente debía elegir 5 aspectos y ordenarlos de mayor a menor importancia, era natural hablar de prioridades y en consecuencia se construyó el Índice de prioridad

En las siguientes secciones se exponen resultados de este análisis, los cuales están organizados de manera global y por medio de los 4 estratos para cada parte del componente de la encuesta relacionado con características del desempeño en matemáticas de los estudiantes.

¿QUÉ ESPERAN LOS DOCENTES DE UN BUEN ALUMNO DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA?

3.1 Resultados Globales. Los docentes de la Ciudad de México que participaron en el estudio señalan que es muy importante que un alumno con buen desempeño escolar en matemáticas sea *activo, participe, exprese sus ideas claramente, tenga inquietud sobre temas*

nuevos en matemáticas, aplique sus conocimientos para razonar, organizar y jerarquizar la información y con ello cree estrategias propias. Ellos consideraron importante aspectos relacionados con el desarrollo de habilidades para aprender y utilizar las matemáticas: *representar, explorar, resolver un problema de diferentes maneras, argumentar, estimar, comprender la realización de operaciones y analizar las relaciones entre datos.* Estas elecciones revelan que conciben al buen estudiante como aquel que va más allá de lo que se espera en el currículum nacional.

3.2 Resultados por estratos. Los resultados de mayor contraste se dieron entre los docentes de los estratos E-- y E+. Los del primer grupo eligieron prioritariamente aspectos vinculados con el *desarrollo* de habilidades específicas encaminadas a *lograr* buenos resultados; mientras que los del segundo grupo los docentes seleccionaron de manera prioritaria aspectos *sobre* el *dominio* de destrezas específicas con el fin de *asegurar* buenos resultados.

Los docentes del estrato E-- muestran en sus elecciones preocupación por lograr que sus sus alumnos desarrollen habilidades matemáticas, apliquen lo aprendido y demuestren la comprensión de las herramientas matemáticas, lo cual puede relacionarse con pensamientos acordes con el enfoque de las matemáticas propuesto en el Plan de estudios de la educación básica mexicana.

Los docentes del estrato E+ basan su elección en el interés de que los estudiantes lleguen a dominar las formas de aplicación y eviten errores; eligen la repetición y memorización de fórmulas y procedimientos, aspectos que pueden relacionarse con una concepción tradicional de la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto hay variaciones entre los aspectos que consideran menos importantes. Los docentes del grupo E-- seleccionaron aquellos que se alejan del enfoque de enseñanza propuesto oficialmente, mientras que los docentes del grupo E+ seleccionaron como menos importantes aspectos relacionados con iniciativas del alumno que puedan rebasar lo que se propone como una actividad escolar.

Las preocupaciones de los docentes de E-- y E+ son resultado de la situación escolar en que desarrollan su labor. Para los docentes que trabajan con alumnos con algunas dificultades en matemáticas, lo importante es que tengan iniciativa de probar de diversas maneras los conocimientos y que vivan experiencias que les permitan aplicar los conocimientos matemáticos en diferentes contextos. Mientras que para los maestros del estrato E+, en tanto que los alumnos tienen una mejor situación de aprendizaje, lo importante es que perfeccionen sus procedimientos y habilidades para asegurar la correcta aplicación de los conocimientos matemáticos.

¿QUÉ IMAGEN TIENEN LOS DOCENTES DE UN ALUMNO CON BAJO RENDIMIENTO ESCOLAR EN MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA?

4.1 Resultados Globales. La percepción que los docentes tienen acerca de los alumnos con bajo rendimiento permite identificar interacciones posibles entre el docente, las matemáticas y los estudiantes.

Los resultados en este sentido dan cuenta de que los maestros piensan que el alumno con dificultades: *Trata de atinarle al resultado, tiene dificultades para distinguir la información y la pregunta, con frecuencia comete errores, le falta creatividad, se conforma con un resultado, confunde información relevante con la que no lo es, carece de imaginación espacial*

(2), *requiere material concreto para trabajar*, *sus respuestas son incompletas* y *aplica mal las fórmulas y conocimientos aún habiéndolos estudiado*.

Los docentes aceptan que el alumno con bajo rendimiento escolar *A veces sabe los conocimientos de los grados anteriores*; esta respuesta denota que no descalifican totalmente el trabajo escolar anterior pero admiten que hay faltas y huecos en la formación matemática de los alumnos.

Reconocen que puede *resolver problemas de aritmética*, lo que implica que, en alguna medida, representa información, y usa algunos de sus conocimientos.

Todos identifican que *Con mucha frecuencia* trata de *atinarle al resultado en lugar de razonar*. Este proceder es evidente en el trabajo diario y generalmente puede asociarse con "la ley del menor esfuerzo" y no con dificultades en la comprensión.

4.2 Resultados por estratos. Las diferencias de las opiniones entre los grupos de maestros se expresan en la generalidad o especificidad de habilidades matemáticas que consideran necesarias para el estudiante y el contraste se aprecia en el peso que otorgan a las consecuencias de las dificultades sobre las causas.

Los docentes del grupo E-- han percibido que *A veces* el alumno demuestra *falta de imaginación espacial* lo cual dificulta su actuación satisfactoria para la solución de algunos problemas en el área de geometría.

Los maestros del estrato E- identificaron que el alumno *A veces* confunde *fórmulas, figuras geométricas, operaciones, etc*., lo cual trae como consecuencia dificultades para resolver problemas lo que limita sus posibilidades de participar con seguridad.

Los docentes de los grupos E-- y E= refieren que *A veces* el alumno *olvida nombres y propiedades de los objetos matemáticos, los signos y las operaciones*, que constituyen habilidades específicas importantes en la realización de algunas tareas.

Lo anterior devela áreas de oportunidad que los docentes de los distintos grupos de maestros identifican en su situación escolar y esto puede interpretarse como una visión moderada de sus estudiantes. No obstante, aspectos como: tratar de atinarle al resultado, conformarse con una sola respuesta, no concluir las actividades, no completar sus respuestas, son rasgos considerados como los que mejor caracterizan al estudiante con bajo desempeño en matemáticas. Es decir, los docentes conceden mayor relevancia a las formas de ser de los estudiantes que a las dificultades enfrentadas en la construcción de los conocimientos matemáticos que causan esos comportamientos.

Estos significados sobre el desempeño de los alumnos pueden ser un obstáculo para la identificación de las dificultades de los estudiantes y para las propuestas de intervención necesarias, dando lugar a un círculo vicioso entre la exigencia de tareas que rebasan las posibilidades del alumno y la afirmación constante de su imagen negativa.

DISCUSIÓN

Entre los hallazgos encontrados se encuentra que para los docentes encuestados los resultados tanto del buen estudiante de matemáticas como de aquel con un desempeño bajo en matemáticas son independientes de su labor docente y atribuibles a las características y actuación de los propios estudiantes.

También se observa que los docentes se guían más por las estrategias que los estudiantes con bajo rendimiento escolar en matemáticas ponen en juego para permanecer como miembros activos de un grupo que en las dificultades reales con las matemáticas.

Ambos planteamientos pueden constituirse en hipótesis para explicar el poco eco que tienen los esfuerzos para mejorar la formación matemática de los estudiantes.

Notas

(1) La investigación forma parte del proyecto: Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas; cofinanciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (clave G37301-S).

(2) La imaginación espacial es considerada como habilidad básica a desarrollar vinculada con los contenidos de geometría (SEP, 1993).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alarcón Ham, Jessica et al. (2003). Indicadores del Sistema Educativo Nacional. Panorama Educativo de México. México: INEE.

Backhof Escudero, Eduardo y Guillermo Solano Flores (2003). Tercer estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias Naturales (TIMSS): Resultados de México en 1995 y 2000. Informe Técnico. México: INEE.

Fennema, E. y G.C. Leder (1990). Mathematics and Gender, EE.UU.: Columbia University.

Gilian, C.; Erkki, Pehkonen y Günter, Torner. (2002). Beliefs: A Hidden Variable Mathematics Education? Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2002). *¿Qué es el INEE?* Recuperado el día 4 de noviembre de 2003 en http://www.inee.edu.mx/.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2005) La Calidad de la Educación Básica en México. Informe Anual *2005*. México: INEE.

Llinares, S. (1992). *Mapas cognitivos y creencias epistemológicas de los profesores*. En Marcelo, G. La investigación sobre la formación del profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos. Argentina: Cincel.

Llinares, S. (1999). Intentando *comprender la práctica del profesor de matemáticas.* En: *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália*, Actas da Escola de Verão. Portugal: Sección de Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación, págs.109-132.

Martínez Rizo, Felipe. (2005). Sobre la difusión de resultados por escuela. Cuaderno No. 15. México: INEE.

Ramos, A. (1994). El pensamiento de los profesores sobre las nociones básicas de la matemática escolar. Tesis de Maestría. México: CINVESTAV.

Sánchez M. (1994). ¿Qué piensan los maestros de tercer grado de preescolar, primero y segundo grados de primaria acerca de los primeros conocimientos aritméticos? Tesis de Maestría en Tecnología Educativa. México. ILCE.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (1993). *Plan y programas de estudio. Educación Básica Primaria.* México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2001). Informe de Actividades de 2001. México: SEP.

Thompson, A. G. (1992). *Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research.* En D. A. Grouws (Ed): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. EE.UU: Macmillan.

IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES Y RELACIONES EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Jesús Salinas Herrera
Jes54@servidor.unam.mx
UNAM, México

Ernesto A. Sánchez Sánchez
esanchez@cinvestav.mx
CINVESTAV, México

RESUMEN

En este trabajo se reportan los resultados de un estudio acerca de la manera en que alumnos de bachillerato perciben el comportamiento de una figura en un ambiente de geometría dinámica. Se utilizan actividades de cajas negras en Cabri-Géomètre para responder a las preguntas: ¿Se pueden distinguir en las percepciones de los estudiantes diferencias entre propiedades y relaciones? ¿Estas diferencias indican niveles de comprensión de las construcciones por los estudiantes?

ABSTRACT

This study presents the results of an investigation, conducted within high school students, to identify the way they perceive they behavior of a figure in a dynamic geometrical environment. Activities using black boxes in Cabri-Géomètre were employed to answer the following questions: Is it possible to distinguish the differences between properties and relation in students' perceptions? Do these differences indicate different levels of comprehension in students' constructions?

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Jesús Salinas Herrera y Ernesto A. Sánchez Sánchez (2007). IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES Y RELACIONES EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA, pp. 343-353.

Diversos estudios plantean la necesidad de investigar la percepción de los estudiantes acerca del comportamiento dinámico de una figura en un ambiente de geometría dinámica (Laborde, 1994; Hazzan & Goldenberg, 1997; Goldenberg & Cuoco, 1998; Talmon & Yerushalmy, 2004; Salinas & Sánchez, 2006). La técnica de *cajas negras* es un instrumento potente en este tipo de investigaciones (Laborde, 1994; Laborde & Caponni, 1994).

La característica central de estas actividades es la de permitir explorar el comportamiento dinámico de una figura y la construcción de otra similar, la cual debe reproducir íntegramente dicho comportamiento. Cada una de las figuras dadas es construida previamente y esta relacionada con algún objeto geométrico. De esta manera, para la realización de esta tarea, se espera que los alumnos puedan identificar los elementos dependientes e independientes; describir la dinámica general del diagrama cuando utilizan la herramienta de "arrastre"; reconocer la propiedad geométrica que se mantiene invariante bajo el arrastre e identificar las relaciones que hay entre los elementos independientes y dependientes.

Las actividades de *cajas negras* en Cabri-Géomètre han mostrado eficacia en el estudio de la evolución de los alumnos de una mera percepción visual de los dibujos a una comprensión de las figuras con base en las propiedades de las que están compuestas. Los "primitivos" del software son los recursos que permiten la construcción de las figuras y han sido divididos en primitivos de diseño puro y primitivos basados en relaciones geométricas (Laborde, 1994, p. 388). Estas nociones permiten un tratamiento y control para distinguir entre *dibujo* y *figura*, respectivamente. Sin embargo, Laborde no considera en su análisis una diferencia entre propiedades y relaciones. Tener en cuenta esta diferencia puede ser relevante cognitivamente ya que su emergencia representó un hito en el desarrollo de la lógica simbólica. La nueva lógica amplía a la lógica clásica con el campo de las relaciones y las funciones proposicionales. "Una lógica de relaciones es necesaria para una lógica de la matemática porque existe una gran cantidad de relaciones que juegan un importante papel en matemáticas. Las relaciones constituyen parte del material de la matemática". (Nidditch 1995, p. 61).

En consecuencia, en este trabajo se considera la diferencia entre *propiedades y relaciones*. Con este objetivo se formulan las siguientes preguntas: ¿Se pueden distinguir en las percepciones de los estudiantes diferencias entre propiedades y relaciones? ¿Estas diferencias indican niveles de comprensión de las construcciones por los estudiantes? Para responderlas se diseñó un estudio cuyas características se describen a continuación.

METODOLOGÍA

Participantes. Un grupo de 42 alumnos de tercer semestre de bachillerato con edades de 15 y 16 años. Los estudiantes poseen cierta familiaridad con el uso de la regla y el compás y se les dio una instrucción inicial en el uso del Cabri-Géomètre. Uno de los autores fue el profesor de la asignatura en la cual se llevaron a cabo las observaciones. Se reportan datos referidos a una muestra de 8 parejas de estudiantes.[1]

Procedimientos. La tarea a realizar fue resolver cinco problemas con cajas negras (Laborde & Caponni, 1994), es decir, reproducir una figura en Cabri y su comportamiento dinámico, las cuales fueron previamente construidas. Al término de esta tarea se administró un cuestionario de cuatro preguntas. Las respuestas se elaboraron por parejas de alumnos. Todos

1 Esta muestra es tomada considerando alumnos con distinto desenvolvimiento desde la fase de construcciones con la regla y el compás, y que se desempeñaron con una asistencia regular y una actitud de cierto interés en las actividades.

los alumnos resolvieron los tres primeros problemas. Algunas parejas resolvieron además el problema 4 o el 5 y, sólo dos parejas resolvieron los 5 problemas.

Instrumento. Las propiedades dinámicas están gobernadas por la manera en que se construyen las figuras y deben ser descubiertas por el estudiante.

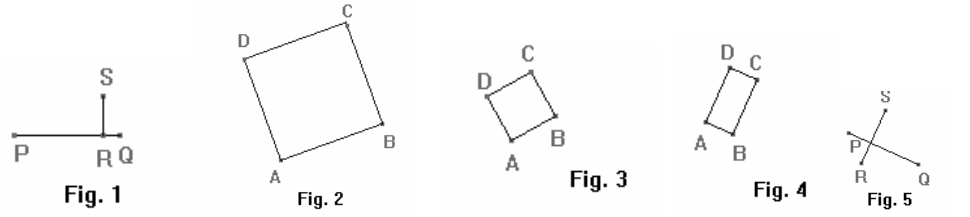


Figura 1. Cajas negras

Una vez que reprodujeron la figura en Cabri, se les preguntó: 1.- ¿Cuáles son los elementos independientes y dependientes?; 2.- ¿Qué observas al arrastrar los elementos independientes?; 3.- ¿Qué propiedades geométricas están orientando la construcción?, y 4.- ¿Qué relación hay entre los elementos independientes y dependientes? Las respuestas a estas preguntas son analizadas en este trabajo.

¿Cómo distinguimos propiedades de relaciones?

La propiedades son enunciados de la forma Pa donde a es un objeto geométrico y P es un predicado; las relaciones tienen la forma Pab, donde a y b son objetos geométricos y P es un predicado que relaciona a y b. También es conveniente distinguir las propiedades y relaciones geométricas que no dependen de las posibilidades dinámicas del software de aquellas que sí dependen de la dinámica, las cuales se marcarán con el signo (*) en la siguiente tabla, en la cual se resumen las principales relaciones y propiedades que emergen en los problemas.

	Propiedades	Relaciones
Problema 1	R es punto. PQ es segmento. RS es segmento. (*) P es independiente. (*) Q es independiente.	R está sobre el segmento PQ. RS es perpendicular a PQ. (*) R se mueve a lo largo de PQ. (*) El tamaño de RS varía con la posición de R en PQ. (*) El punto S describe una semicircunferencia cuyo diámetro es PQ, conforme P recorre PQ.
Problema 2	La figura ABCD es un cuadrado. (*) El punto B es independiente.	DC // AB y AD // BC. DC $\perp$ AD AB $\perp$ BC (*) El punto B se mueve alrededor de un círculo con centro A y radio constante.
Problema 3	La figura ABCD es un cuadrado. (*) El punto A es independiente. (*) El punto B es independiente	DC // AB y AD // BC. DC $\perp$ AD AB $\perp$ BC (*) Al arrastrar A o B, la figura ABCD se mantiene como cuadrado, pero cambia su tamaño y posición.

Problema 4	La figura ABCD es un rectángulo. (*) Los puntos A, B, y D son independientes. (*) El segmento AD aumenta o disminuye.	DC // AB y AD // BC. DC $\perp$ AD AB $\perp$ BC (*) D está en la recta perpendicular a AB que pasa por A
Problema 5	P, Q y R son independientes.	PQ $\perp$ RS. Los segmentos PQ y RS son perpendiculares. (*) El segmento RS se mueve perpendicularmente al segmento PQ y varía su dimensión.

Categorías de análisis. Para distinguir las características de las respuestas de los alumnos, utilizamos las siguientes puntuaciones:

a. Identificación de elementos independientes y dependientes.

2. Señalan todos o casi todos los elementos solicitados.
1. Señalan pocos o alguno de los elementos solicitados.
0. Confunden o no identifican elementos dependientes e independientes.

b. Tipo de "objetos" o fenómenos que perciben los alumnos con el arrastre.

2. Distinguen el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura; y además propiedades que permanecen invariantes.
0. Identifican el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura, sin señalar algún tipo de invariante.
0. No describen aspectos en que cambia la figura o partes de ella.

c. Identifican alguna relación o propiedad geométrica en el comportamiento de la construcción.

2. Señalan explícitamente relaciones geométricas que orientan el comportamiento dinámico de la figura.
1. Señalan sólo propiedades que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura.
1. No señalan alguna propiedad o relación que este orientando el comportamiento dinámico de la figura.

d. Establecen alguna relación geométrica entre elementos independientes y dependientes.

2. Señalan explícitamente alguna relación geométrica entre dichos elementos.
1. Expresan alguna idea vaga de que existe alguna relación geométrica entre dichos elementos.
0. No expresan ningún tipo de relación geométrica entre dichos elementos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se ejemplifica la aplicación de los criterios utilizados para asignar la puntuación a las respuestas en cada categoría.

Con relación a la primera categoría, la identificación de elementos independientes y dependientes, el reconocimiento de dichos elementos habla de la percepción que tienen los alumnos de una relación funcional entre elementos específicos de la figura. El siguiente caso

ilustra el tipo de respuesta[2] que se considera expresa relaciones, y que obtiene una puntuación de 2.

- Brenda y Victoria (Problema 1)
  cuando el punto P se mueve entonces es independiente de los demás puntos, y de ese movimiento dependen los punto R, Q, S, el segmento SR y el segmento PQ. Cuando el punto R se mueve es independiente de todos los puntos, y de ese movimiento dependen el punto S y el segmento SR. Al mover el punto Q es independiente de los demás puntos, y de este movimiento dependen los puntos R, P, S, el segmento PQ y el segmento SR.

En la respuesta anterior se observa la relación funcional que los alumnos describen entre los elementos independientes y dependientes de la figura, derivada del movimiento que "producen" unos sobre otros. Si traducimos sus expresiones a un formato en donde se puedan separar los términos y los predicados, se ve que los enunciados equivalentes expresan relaciones entre diverso número de elementos. Por ejemplo, algunas de las ideas anteriores pueden ser escritas con enunciados que tienen la siguiente forma:

"El punto P es independiente de los puntos R, Q, S, el segmento SR y el segmento PQ", la cual sería una relación con seis términos.[3]

Ahora bien, surge la pregunta de si esto es suficiente para pensar que los alumnos pueden estar percibiendo alguna relación estructural entre elementos de la figura. Si la respuesta es si, entonces tenemos evidencia experimental de que el cabri contribuye en este rasgo cognitivo fundamental para poder realizar una demostración. Pero, si la respuesta es no, entonces es necesario comprender mejor que tipo de aspectos están en juego en esta situación. Por ello, incursionaremos más en tal dirección.

Una hipótesis que se propone para tener una primera aproximación, es la siguiente: conviene distinguir entre la descripción que realizan los alumnos de un hecho geométrico, según si los predicados están basados en la percepción visual (fenomenológicos) o en los "primitivos geométricos" del Cabri (perpendiculares, paralelas, etc.) (Laborde, 1994), los cuales incluso pueden estar asociados al tipo de pregunta que se formula, y no reflejar directamente un rasgo cognitivo. Así, en la descripción anterior se describen fenómenos visuales, por lo cual se puede afirmar que los alumnos no necesariamente están percibiendo relaciones estructurales del dibujo Cabri cuando formulan tales respuestas. Sin embargo, es muy importante hacer notar que el uso del Cabri propicia el empleo de un lenguaje que describe relaciones y que opera como un instrumento psicológico, el cual eventualmente les permitirá a los alumnos, mediante su gradual apropiación, acceder a otro nivel de abstracción.[4]

2 En todos los casos se indican seudónimos de las parejas de alumnos y el número del problema que responden. La trascripción aparece en cursivas y siempre es fiel a la redacción de los propios estudiantes, salvo correcciones ortográficas.

3 Ahora bien, para poder observar los aspectos que interesa es necesario antes caracterizar con precisión los componentes de una proposición. Un sujeto, desde el punto de vista lógico, es el nombre o descripción de un individuo u objeto particular (y corresponde en el lenguaje común a un nombre propio o a la descripción de un objeto único). Desde un punto de vista lógico, crea mayores dificultades decir que es un predicado, pero una idea básica es que el predicado es el resto de la oración, la cual dice algo acerca del sujeto. En un nivel muy elemental de la lógica simbólica se puede decir que un predicado es un nombre que designa propiedades atribuidas a los individuos o relaciones que existen entre individuos (Agazzi, 1979).

4 El empleo de instrumentos psicológicos es un requisito para su apropiación o internalización. Así, el Cabri pro-

Las respuestas que señalan pocos o alguno de los elementos solicitados, y a las cuales se les asignó la puntuación de 1, fueron del siguiente tipo:

- Dimas y Natalia (Problema 1)
  El elemento independiente es el segmento PQ y el dependiente el segmento SR.

Se observa que en este caso los enunciados equivalentes son conjunciones de enunciados simples, por ejemplo: "PQ es elemento independiente" y "el segmento SR es elemento dependiente". Además, cada uno de los enunciados simples tiene un formato de una relación más simple, que es equivalente a la forma tradicional sujeto-predicado. En general, los alumnos están más familiarizados con el uso de este tipo de enunciados, lo cual refleja una mayor apropiación o internalización de este instrumento de mediación semiótica.

Finalmente, las respuestas con puntuación de 0, las cuales confunden elementos dependientes e independientes, son como la siguiente:

- Clara y María (Problema 1)
  Los elementos independientes, son: los puntos S y R, y el elemento dependiente es el segmento PQ.

En este caso los enunciados que se pueden escribir también son equivalentes al esquema tradicional sujeto-predicado en el que se expresan propiedades o clases de objetos. Por ejemplo: "Los puntos S y R son elementos independientes", "P y Q son puntos dependientes". Sin embargo, los predicados "es un elemento independiente" y "es un elemento dependiente" están mal utilizados. Así, en estos casos sólo hay un intento de descripción, pero los alumnos no entienden en realidad que se está demandando.

A continuación se presenta una tabla con los resultados generales en esta primera categoría.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	**Total**
Problema 1	2	1	2	2	2	2	0	0	**11**
Problema 2	2	0	1	1	1	2	2	2	**11**
Problema 3	2	1	2	2	2	2	2	2	**15**
Problema 4		2	2	2	1			2	**9**
Problema 5	2		2	2			2		**8**
Total	**8**	**4**	**9**	**9**	**6**	**6**	**6**	**6**	

Tabla 1. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría a.

Con respecto a la identificación de elementos independientes y dependientes, los resultados que se resumen en las tablas anteriores, muestran que todos los alumnos manifiestan alguna habilidad para indicar todos o casi todos los elementos solicitados. De un total de

picia el uso de un lenguaje en el que se expresan "naturalmente" relaciones. "La intervención de los instrumentos psicológicos engendra nuevas funciones psicológicas que tienen un origen sociocultural y cuya naturaleza es supraindividual. La adquisición de instrumentos psicológicos de orden superior constituye el requisito necesario para que la enseñanza formal tenga éxito (Kozulin, 2000, pp. 103-104).

31 respuestas que se obtuvieron, en 24 ocasiones tienen la mayor puntuación, es decir, que señalan todos o casi todos los elementos solicitados.

El análisis que se realiza también muestra que cuando los alumnos realizan una descripción del comportamiento de la figura sus ideas se pueden escribir como propiedades o relaciones, sin embargo, dichas relaciones no son necesariamente estructurales.

El segundo rasgo cognitivo se refiere al tipo de "objetos" o fenómenos que perciben los alumnos con el arrastre. La percepción no se remite al aspecto meramente visual, sino que implica una interpretación o lectura que se basa en ciertos conocimientos. Estos pueden corresponder más a una racionalidad empírica o teórica, según el acento que los alumnos den a estos aspectos, es decir, la diferencia es sólo de grado. Por consiguiente, se pueden distinguir tales racionalidades o enfoques como de sentido común o de carácter geométrico.

Un ejemplo de respuesta en donde los estudiantes distinguen el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura; y además propiedades que permanecen invariantes, se dan a continuación. A estas respuestas se asignó la puntuación de 2.

- Irán (Problema 3)

Se observa que la figura cambia de tamaño al mover y arrastrar los puntos independientes, cambia de tamaño pero no de forma, sigue conservando las propiedades y sigue siendo un cuadrilátero.

En este caso, hay una conjunción del aspecto fenomenológico y geométrico, distinguen entre la forma y el tamaño de la figura. La forma de la figura la asocian con la propiedad de ser un cuadrilátero. Es claro que la propiedad aquí la entienden como una cualidad o atributo geométrico y no como una relación entre elementos.

En esta misma categoría, la puntuación de 1 corresponde al tipo de respuestas que identifican el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura, sin señalar algún tipo de invariante. Un ejemplo es el siguiente:

- Nadia y Liz (Problema 3)

Al arrastrar el punto B el cuadrado se cierra y se abre cambiando el valor de sus medidas, al arrastrar el punto A el cuadrado da vueltas disminuyendo el tamaño del mismo.

En este caso, al no describir ninguna propiedad invariante los alumnos sólo hacen una descripción fenomenológica del comportamiento de la figura. No hay alguna descripción de propiedades geométricas.

En la tercera opción de esta categoría, cuando los alumnos no describen aspectos en que cambia la figura o partes de ella, se les asignó la puntuación de 0, como ocurrió en el siguiente caso:

- Karla y Ernesto (Problema 2)

Si arrastramos estas elementos la figura puede moverse al mismo tiempo mueve a las dependientes.

En este caso los alumnos ni siquiera describen el comportamiento dinámico de la figura, sólo asocian el movimiento con los elementos independientes.

La siguiente tabla contienen los resultados generales relacionados con la segunda categoría. Se ve claramente que en la mayor parte de respuestas los alumnos identifican el cambio o movimiento de la figura y/o el cambio o movimiento de elementos de la figura, sin señalar algún tipo de invariante. Así, sólo en 8 casos de las 32 respuestas, los alumnos expresan propiedades que permanecen invariantes. La destreza que revelen los alumnos con respecto a la categoría anterior es menor.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	**Total**
Problema 1	1	2	2	1	1	2	1	1	**11**
Problema 2	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
Problema 3	1	1	1	1	2	1	1	1	**9**
Problema 4		1	2	1	1			1	**6**
Problema 5	1		2		2		1		**6**
Total	**4**	**5**	**8**	**4**	**7**	**4**	**4**	**4**	

Tabla 2. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría b.

La tercera categoría corresponde a la identificación de alguna relación geométrica en el comportamiento de la construcción. Cuando los alumnos señalaron explícitamente relaciones geométricas que orientan el comportamiento dinámico de la figura se les asignó la puntuación de 2. El siguiente caso ejemplifica esta situación:

- Emilio y Dora (Problema 4)
  La propiedad que mantiene es la relación de paralelismo, ejemplo de que AB es paralela a DC y DA es paralela CB sin importar la deformación que sufra la figura siempre guardara esta relación.

En este caso se señala claramente propiedades invariantes de la figura, las cuales son equivalentes a un enunciado en el que aparecen explícitamente relaciones, a saber: “AB es paralela a DC”; “DA es paralela a CB”. Asimismo, cuando dicen que los segmentos de la figura siempre conservan la propiedad de ser perpendiculares, el predicado “conservan la propiedad de ser perpendiculares”, necesariamente se refiere a la relación entre dos términos. En este caso claramente se indican relaciones estructurales.

Si la respuesta señala sólo propiedades que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura se les da la puntuación de 1. Por ejemplo:

- Emilio y Dora (Problema 1)
  La propiedad geométrica de esta construcción se da entre los elementos R y S siendo R independiente y S su dependiente; muestra un movimiento circular, aumentando o disminuyendo su distancia en cuanto a su avance en el segmento PQ.

Los alumnos señalan explícitamente como propiedad geométrica una relación entre dos puntos, y además la asocian con una trayectoria geométrica que indica su comportamiento (La propiedad señalada es una relación entre R y S descrita por la trayectoria del punto S

mientras R se desplaza por el segmento PQ). Esta es una situación que indica claramente la focalización de los alumnos hacia un aspecto geométrico del dibujo.

Por último, si los estudiantes no mencionan alguna propiedad geométrica que este orientando el comportamiento dinámico de la figura se le da la puntuación 0.

- Nadia y Liz (Problema 3)
  Básicamente las propiedades son que al mover los puntos A y B la figura gira en ese vértice pero al mismo tiempo va disminuyendo la figura, ya que se va cerrando conforme va dando vueltas la figura.

Las alumnas confunden las propiedades geométricas con el comportamiento dinámico de la figura. De esta manera entienden que la propiedad que tiene la figura es la manera de comportarse dinámicamente. Esta idea refleja una acepción muy personal del término "propiedad". Los resultados generales de la tercera categoría se presentan en la siguiente tabla.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	**Total**
Problema 1	2	2	2	2	1	1	1	0	**11**
Problema 2	1	1	2	1	2	1	0	0	**7**
Problema 3	2	2	0		2	1	0	0	**6**
Problema 4		2	2	1	2		1	0	**7**
Problema 5	2				2				**4**
Total	**7**	**7**	**6**	**4**	**6**	**3**	**2**	**0**	

Tabla 3. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría c.

En 5 de 8 parejas (62.5), los estudiantes señalan relaciones geométricas que caracterizan el comportamiento dinámico de la figura. Sólo hay un caso de alumnos que no logran señalar alguna propiedad que este orientando el comportamiento dinámico de las figuras dadas. Incluso, en catorce ocasiones identifican relaciones geométricas que orientan el comportamiento dinámico de las figuras dadas.

Finalmente, con relación a la cuarta categoría, cuando los alumnos señalaron explícitamente alguna relación geométrica entre los elementos independientes y dependientes se les asignó la puntuación de 2, como ocurrió en los siguientes casos:

- Irán (Problema 1)
  Que el elemento independiente al moverlo, los demás puntos se mueven en relación a este y el dependiente conserva su propiedad [el punto S siempre forma una perpendicular).

El alumno claramente establece una relación funcional entre un elemento independiente y uno dependiente. Sin embargo, también percibe una relación estructural al indicar una propiedad invariante. Tal relación estructural es más bien una propiedad en términos del atributo que le asigna a un elemento ("*el punto S siempre forma una perpendicular*"), y no una relación entre elementos de la figura.

Si los alumnos sólo expresaron alguna idea vaga de que existe alguna relación entre dichos elementos se dio la puntuación de 1. La siguiente respuesta ilustra esta situación.

- Brenda y Victoria (Problema 3)
  Al mover los elementos independientes, éstos provocan un cambio en los elementos dependientes, en este caso cambia el tamaño de los lados del cuadrado.

En este caso las alumnas pueden mencionar una relación funcional pero no logran precisar una relación estructural. Hablan de que "cambia el tamaño de los lados del cuadrado" pero no indican que relación hay entre los elementos independientes y dependientes.

Por último, cuando los alumnos sólo parafrasean lo que se entiende por elemento independiente y dependiente en un ambiente de geometría dinámica, se evalúa con 0.

- Brenda y Victoria (Problema 1)
  Las características de los elementos dependientes siempre van a ser de acuerdo a como estén colocados los elementos independientes, nunca van a poder cambiar forma a la figura si un elemento independiente no se mueve.

Los resultados generales sobre esta cuarta categoría se resumen en la siguiente tabla.

Pareja de estudiantes	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Problema 1	0	0	0	1	2	1	1	0	5
Problema 2	0	0	1	1	1	0	0	0	3
Problema 3	1	0	0	0	0	1	1	0	3
Problema 4		0	0	0	0			2	2
Problema 5	0				0		0		0
Total	1	0	1	2	3	2	2	2	

Tabla 4. Resultados de las respuestas de acuerdo con la categoría d.

Es importante destacar que este rasgo cognitivo, desde el punto de vista del conocimiento geométrico que se pretende, es el que consideramos el más importante y difícil de percibir con plena conciencia. Como se puede observar, parecen existir severas dificultades para que los alumnos establezcan alguna relación geométrica entre elementos independientes y dependientes. Sin embargo, en esta población observada en dos casos hacen tal señalamiento, y en otros 8 más intentan expresar alguna idea de que existe alguna relación geométrica entre dichos elementos.

CONCLUSIONES

Es posible inferir de las respuestas de los estudiantes que perciben diferencias entre propiedades y relaciones. También se observa que es más fácil para ellos percibir las propiedades y luego las relaciones; lo cual puede ser un indicador de un proceso de evolución en la comprensión de las características geométricas de las figuras. Esta evolución se caracteriza por un desplazamiento de la atención en los aspectos visuales hacia los aspectos teóricos-geométricos, y se manifiesta en diferentes niveles de comprensión de las construcciones por parte de los estudiantes.

Dicha evolución es propiciada por tres elementos de mediación que operan en el desarrollo de las actividades: 1. El software de Cabri; 2. El lenguaje (analizado aquí en las expresiones de propiedades o relaciones) y 3. Discusiones entre parejas y con el profesor. Lo anterior es compatible con el marco teórico de Vygotsky que postula que el desarrollo cognitivo se produce por un proceso de mediación semiótica en el que interviene herramientas culturales, instrumentos psicológicos y la interacción social.

REFERENCIAS

Agazzi, E. (1979). *La lógica Simbólica.* Editorial Herder, Barcelona.

Goldenberg, E: P. & Cuoco, A. A., (1998). What is Dynamic Geometry?, en R. Leherer & D. Chazan (eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, pp. 351-368.

Hazzan, O & Goldenberg, E. P., (1997). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 1(3)*, 263-291.

Kozulin, A. (1998). *Psychological Tools*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Laborde, C. & Caponni, B., (1994). Cabri-Géomètre constituant d´un milieu pour l´apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14(1-2) 165-210.

Laborde, C. (1994). Les rapports entre visuel et géométrique dans un eiao. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. La Pensée Savage, Paris, France.

Nidditch, P. H. (1995). *El desarrollo de la lógica Matemática*. Ediciones Cátedra. Madrid.

Salinas, J & Sánchez E., (2006). Interpretation of the Cabri dragging in a learning experience. *Proceedings of the Twenty eight annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics Education, Vol. 2, 427-429.*

Talmon, V. & Yerushalmy. M., (2004). Understanding dynamic behavior: parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics* 57, 91-119.

TIPOS DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES DEL GRADO 10º EN SANTANDER (COLOMBIA)

Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universidad de Valencia

RESUMEN

Presentamos los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a tres grupos de estudiantes de 10º grado de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), cuyo objetivo apuntaba a indagar y analizar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes al inicio del curso. Los datos, además, nos permitieron sacar algunas conclusiones acerca de su comprensión de la demostración.

ABSTRACT

We present qualitative and quantitative results of a diagnostic evaluation applied to three groups of students of 10th grade (14-16 years) in three high schools in Santander (Colombia). The evaluation was aimed to investigate and analyze the types of proofs they produced at the beginning of the course. The data, informed us the types of proof produced at the beginning of the course, and allowed us to reach some conclusions about the understanding of proof by the students in this level.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Jorge Enrique Fiallo Leal y Ángel Gutiérrez Rodríguez (2007). TIPOS DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES DEL GRADO 10º EN SANTANDER (COLOMBIA), pp. 355-368.

INTRODUCCIÓN

Los fracasos y bajos niveles de comprensión de la demostración han llevado a que muchos profesores abandonen esta práctica (Mariotti, 2006). Sin embargo existe el consenso general entre los didactas de las matemáticas de que el desarrollo del sentido de la demostración constituye un objetivo importante de la educación matemática y se ve una tendencia general a incluir el aprendizaje de la demostración en el currículo de matemáticas, como se puede apreciar, por ejemplo, en los "principios y estándares" del National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M., 2003), donde se señala el razonamiento y la demostración como uno de los estándares para las matemáticas escolares desde preescolar al nivel 12 inclusive. En este texto se sugiere que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones.
- Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración. (N.C.T.M., 2003, p. 59).

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), dentro de los procesos generales se menciona el razonamiento matemático como una actividad que debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y que tiene que ver con:

- Dar cuenta de cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p. 77).

Teniendo en cuenta estas ideas y las de varios investigadores en el tema de la demostración en matemáticas, se planteó un proyecto de investigación llevado a cabo dentro del programa del Doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, cuyos objetivos fueron: i) Diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración; ii) Analizar los tipos de demostración que emergen con el uso de Cabri en el proceso de demostración de propiedades trigonométricas de los estudiantes; iii) Analizar los procedimientos, las estrategias de razonamiento y los errores y dificultades detectados en el desarrollo de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza. Una de las fases de dicho trabajo consistió en la aplicación y análisis de un test diagnóstico que nos permitió clasificar a cada uno de los estudiantes y obtener información sobre sus ideas y su comprensión de la demostración en matemáticas antes de iniciar el curso.

Presentamos en este texto el marco teórico, la metodología, el proceso de análisis de los datos y algunas conclusiones de esta fase de la investigación.

MARCO TEÓRICO

El análisis de las respuesta de los estudiantes al test diagnóstico se hizo considerando la demostración desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para explicar, verificar o justificar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

Para la clasificación de las respuestas de los estudiantes se utilizaron las categorías propuestas por Marrades y Gutiérrez (2000), quienes apoyados en los trabajos de Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), propusieron la siguiente estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración.

A) Demostraciones empíricas, caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- *Empirismo ingenuo:* Cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio específico. Se identifican dos tipos de empirismo ingenuo:
  - *Perceptivo:* Cuando los estudiantes se basan en elementos visuales o táctiles.
  - *Inductivo:* Cuando los estudiantes se basan en elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.
- *Experimento crucial:* Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:
  - *Basado en ejemplo:* Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.
  - *Constructivo:* Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
  - *Analítico:* Cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
  - *Intelectual:* Cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo, pero en la demostración usan propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.
- *Ejemplo genérico:* Cuando en la demostración o la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase, y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos.

Los cuatro tipos de demostración definidos en los párrafos anteriores para el experimento crucial se presentan en los ejemplos genéricos.

B) Demostraciones deductivas, caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

- *Experimento mental:* Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

- *Experimento mental transformativo:* Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.
- *Experimento mental estructural:* Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

- *Deducción formal:* Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.

Los dos tipos de demostración definidos para el experimento mental, pueden también ser encontrados en la demostración deductiva forma.

También plantean una clase llamada fallida, que incluye los casos de estudiante que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve al planteamiento de una conjetura o de una demostración, o aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura, o no se puede inferir nada de sus respuestas.

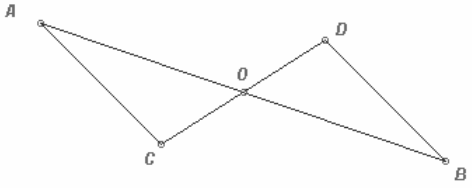
METODOLOGÍA

El test diagnóstico se aplicó el segundo día del inicio de la experimentación de la investigación, en una sesión de 90 minutos a 100 estudiantes del grado 10º de bachillerato (14 a 16 años de edad) de dos instituciones privadas y una pública de de Santander (Colombia), tomando como criterio para su elección la facilidad de poder establecer contactos con las directivas y profesores, y que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales durante el periodo de tiempo que se había planeado la experimentación.

Al finalizar la prueba se recogieron los originales de los test de todos los estudiantes. Las actuaciones de los estudiantes se usaron para realizar un análisis cualitativo usando las categorías mencionadas antes y un análisis cuantitativo del porcentaje de estudiantes clasificados en cada categoría.

TEST DIAGNÓSTICO DE LOS TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Problema 1. En el siguiente diagrama los segmentos *AB* y *CD* se intersecan en el punto medio *O*. Los segmentos pueden variar de posición o variar su longitud y siempre se intersecan en el punto medio *O* formando el cuadrilátero cruzado *ACDB.*



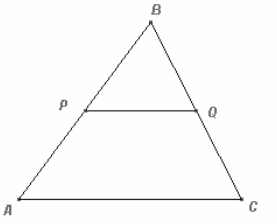
Andrea, Cesar, Natalia, Silvia, Óscar y Carlos están discutiendo si la siguiente afirmación es verdadera:

"Los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales".

Respuesta de Andrea	**Respuesta de César**
Mido los lados de los triángulos y encuentro que OC = OD = 1.5cm., OA = OB = 3cm., AC = DB = 2cm. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.	Si los dos segmentos son iguales y forman un ángulo de 60º, se forman dos triángulos equiláteros de igual longitud. **Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales**
Respuesta de Natalia	**Respuesta de Silvia**
Mido los ángulos y encuentro que $m\angle COA = m\angle DOB$, $m\angle ACO = m\angle BDO$, $m\angle OCA = m\angle ODB$ Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales.	Los lados *OC = OD*, *OA = OB*, Por ser O el punto medio de los segmentos. $m\angle COA = m\angle DOB$, Porque son ángulos opuestos. Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales.
Respuesta de Óscar	**Respuesta de Carlos**
Si se mueve el segmento *CD* hasta que quede perpendicular a los lados *AC* y *BD* se forman dos triángulos rectángulos iguales. Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales.	Siempre que se muevan los segmentos *AB* y *CD* los triángulos *ACO* y *BDO* quedan en diferentes posiciones. Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* no son iguales.

¿Cuál de las respuestas se identifica más con lo que usted haría?, ¿Por qué?

Problema 2. En el siguiente diagrama *PQ // AC*. ¿Qué relación hay entre ΔABC y ΔPBQ ? Demuestra tu conjetura.



Descripción de las categorías y análisis de los datos del problema 1

En el primer problema de la prueba se daban seis respuestas acerca de la verdad de una afirmación. Cada respuesta correspondía a un tipo de demostración asignado según las categorías propuestas. El objetivo era que los estudiantes seleccionaran una de las seis de acuerdo a lo que ellos hubieran hecho para dar respuesta al problema, y que justificaran el motivo de su selección. La comparación de la respuesta elegida con la justificación dada determinaría la categoría del tipo de demostración asignada al estudiante.

A continuación se explica la asignación que se le dio a cada una de las respuestas propuestas en el enunciado del problema y se explica la razón para ubicarla en esta categoría:

***Respuesta de Andrea**:* Corresponde a un Empirismo Ingenuo Inductivo (EII), puesto que Andrea sustenta su afirmación en las medidas tomadas sobre el único ejemplo dado y en la relación de igualdad que surge al comparar las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos del ejemplo.

***Respuesta de César**:* Corresponde a un Experimento Crucial Basado en Ejemplo (ECB), puesto que Cesar construye un triángulo específico (equilátero), describe la figura que se ha inventado y supone que si se cumple para este ejemplo se cumple para todos los triángulos.

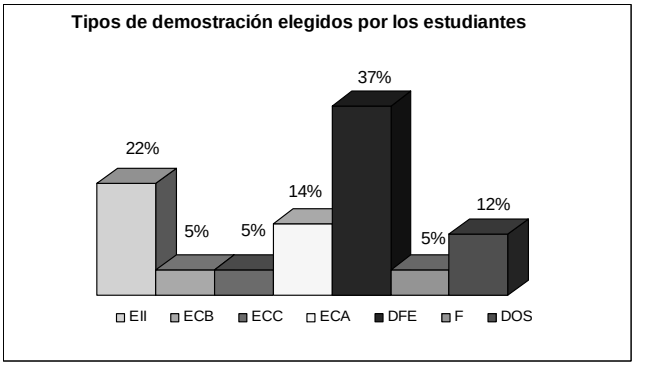
Respuesta de Natalia: Corresponde a Experimento Crucial Analítico (ECA), puesto que Natalia hace mediciones sobre la figura dada y se da cuenta de la igualdad de los ángulos correspondientes, finalmente se basa en las propiedades empíricas observadas en el ejemplo para justificar la verdad de su conjetura.

Respuesta de Silvia: Corresponde a Deductivo Formal Estructural (DFE), puesto que Silvia no hace uso de ningún ejemplo para sustentar la verdad de la afirmación y sus justificaciones están basadas en secuencias y propiedades lógicas derivadas de los datos del problema y del teorema LAL de la congruencia de triángulos.

Respuesta de Óscar: Corresponde a Experimento Crucial Constructivo (ECC), puesto que Oscar construye un ejemplo específico (triángulo rectángulo) y basa su justificación en la forma de conseguir el ejemplo.

Respuesta de Carlos: Corresponde a una Demostración Fallida (F), puesto que Carlos no muestra ningún proceso empírico ni deductivo para afirmar que la afirmación es falsa (sólo dice que si se mueven los segmentos los triángulos cambian).

Al tener en cuenta solamente la respuesta elegida (es decir con cuál de las repuestas se identificaban) salió la siguiente clasificación (DOS representa a los estudiantes que escogieron dos respuestas):



Observando el diagrama de barras se podría interpretar que existía un porcentaje significativo de estudiantes que realizaban demostraciones formales estructuradas o demostraciones ingenuas inductivas, pero al analizar las justificaciones de su elección vimos que era necesario matizar esta asignación inicial, pues no representaba con suficiente exactitud la forma de pensar de los estudiantes.

De acuerdo a las justificaciones dadas, se decidió utilizar los siguientes criterios para la clasificación de los estudiantes:

(1) Si el estudiante escogía una respuesta demostración empírica o deductiva, se respetó esa primera ubicación, es decir aceptamos que el estudiante podría haber razonado de mane-

ra empírica o deductiva respectivamente. También se respetó la subclase correspondiente a la demostración escogida (Empirismo Ingenuo, Experimento Crucial, Experimento Mental o Deducción Formal).

(2) Si la justificación dada por el estudiante era coherente con el tipo de justificación escogida (perceptiva, inductiva, basada en ejemplo, constructiva, analítica, intelectual, transformativa o estructural), se asignó ese tipo; si la justificación dada por el estudiante apuntaba a otro tipo de demostración, pero dentro de la misma subclase, se asignó al estudiante a este tipo.

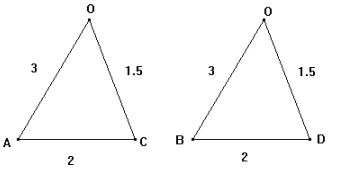
(3) Si de la justificación del estudiante no se podía determinar nada, se clasificaba como Empírica Fallida (EF) o Deductiva Fallida (DF) respetando que podía haber razonado empíricamente o deductivamente como se planteó en el primer criterio.

(4) Si escogían dos respuestas, se analizaba la coherencia o complementariedad de las dos y se clasificaba en una de las categorías de la estructura.

Con estos criterios queríamos establecer una categorización que permitiera una coherencia entre lo que el estudiante *piensa* que es una demostración que se identificaría con lo que él haría y lo que el estudiante *hace* cuando tiene que justificar una conjetura. Es decir si el estudiantes escoge una respuesta es porque se está identificando con esa forma de razonamiento, ya sea porque piensa de esta forma, porque cree en ella, porque le gusta la forma, porque le parece fácil o porque fue la única que entendió, por eso se respeta la subclase de demostración escogida y se busca la coherencia con la justificación dada.

Analizando las justificaciones, de los 22 estudiantes que se inclinaron por la respuesta de Andrea (EII), encontramos varias justificaciones que se basaban en argumentos similares a los de Andrea refiriéndose a los lados correspondientes de los dos triángulos, por ejemplo:

G35: *La de Andrea, porque los triángulos son iguales cuando los lados son congruentes, o se de la mima medida.*



En este caso las medidas coinciden por eso son iguales.

Estos estudiantes permanecieron en EII, aunque se pueden identificar justificaciones de más nivel que otras y se podría decir que hay algunos estudiantes que podrían estar en otra subclase superior (pero no los hemos cambiado de subclase de acuerdo a los criterios determinados) o son estudiantes que están en una transición entre las demostraciones empíricas ingenuas y los experimentos cruciales; igualmente algunos con su justificación mostrada pareciera que dan respuestas de menor categoría, pero se dejaron ahí ya que de alguna manera son estudiantes que no tienen entrenamiento previo para responder este tipo de preguntas.

Otras justificaciones se basan en argumentos de convicción externa (Harel y Sowder, 1998), por ejemplo:

G34: *La respuesta de Andrea porque las aclaraciones todas son ciertas, y no dudo en nada de lo que dice.*

Estos estudiantes no muestran en sus respuestas un razonamiento ni exploración de las relaciones matemáticas de los lados de los triángulos en el problema, ni ninguna alusión a teoremas matemáticos; por lo que se ubicaron en EF.

De los 5 estudiantes que escogieron la respuesta de Cesar (ECB), solamente dos de las justificaciones se refirieron a la relación de los lados del triángulo y de los ángulos, por ejemplo:

F35: *…allí no cambia la longitud de los segmentos ya que siempre va a ser la misma, solo cambia su posición llegando a ser un triángulo equilátero y teniendo siempre la misma forma los triángulos formados por aquellos segmentos.*

Uno de los cinco se clasificó en ECA, al hacer referencia a las mediciones que haría. Las otras dos justificaciones se clasificaron en EF.

De los 5 estudiantes que escogieron la respuesta de Oscar (ECC), algunos hicieron referencia al movimiento realizado por Oscar, pero no justificaron adecuadamente por qué los dos triángulos rectángulos formados eran iguales, por ejemplo:

F08: *Yo pienso que de cualquier forma que se mueva el segmento CD o también el AB, siempre y cuando la longitud del segmento AC y DB no cambien la longitud, entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.*

Al analizar las justificaciones se concluyó que para ellos los triángulos ya eran iguales por simple percepción, ninguno comparó los lados correspondientes de los lados de los triángulos rectángulos formados ni sus ángulos rectos, por lo tanto, de acuerdo a nuestro criterio de clasificación se ubicaron todos los 5 en EF.

De los 14 estudiantes que escogieron la respuesta de Natalia (ECA), 9 de ellos fundamentaron su respuesta argumentando que si los ángulos correspondientes eran iguales entonces los triángulos eran iguales, por lo que estuvimos de acuerdo en dejarlos en esa categoría. Cuatro de los 14 estudiantes basaron sus justificaciones enunciando propiedades aceptadas, pero refiriéndose a que era suficiente tener los ángulos iguales para que los triángulos fueran iguales. Estos estudiantes se reubicaron en Experimento Crucial Intelectual (ECI) y uno se pasó a EF.

De los 37 que se identificaron con la respuesta de Silvia (DFE), 10 se dejaron en esa categoría, por ejemplo:

C15: *…ella dice que entre los dos triángulos existe una relación de ángulo, lado, ángulo, y con esas tres cosas se puede saber si 2 triángulos son equivalentes. Cumple con una de las reglas para saber si dos triángulos son equivalentes. En la grafica muestran el punto O como la mitad, por lo que sería razonable que* $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ y $\overline{CO} \cong \overline{OD}$, *y como* $\overline{AB}$ *se interseca con* $\overline{CD}$ *forman ángulos opuestos, lo cual son equivalentes y* $m\angle AOC = m\angle DOB$

Solamente en este caso se hizo alusión al teorema LAL para justificar la congruencia de los triángulos además de utilizar una notación adecuada. Los otros estudiantes mencionaron la relación de igualdad entre los lados correspondientes y al ángulo opuesto por el vértice, argumentando que eso es lo que se necesitaban para que los triángulos fueran iguales. Algunos de ellos lo hicieron por convicción en la respuesta de Silvia y porque les pareció que Silvia completó de manera general lo que hicieron Andrea y Natalia. Otros, queriendo argumentar más sus repuestas llegaron a conclusiones falsas pero dejaron entrever un razonamiento deductivo formal. Doce de estos estudiantes fueron clasificados con un el tipo Experimento Mental Estructurado (EME) al usar el gráfico como ejemplo para basar sus justificaciones

en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema. Los 15 estudiantes restantes se reclasificaron en DF.

De los 5 que escogieron la demostración de Carlos (F), todos coincidieron en que si se movían los segmentos, entonces los triángulos cambiaban. Todos quedaron en la misma categoría.

De los 12 que escogieron dos respuestas, 8 seleccionaron la respuesta de Andrea combinada con otra, 3 la combinaron con Silvia, mencionando que se debe conocer las medidas de los lados y los ángulos, por ejemplo:

G10: …*para identificar si dos triángulos son iguales, debo saber las medidas de cada uno de sus lados y también saber la de sus ángulos.*

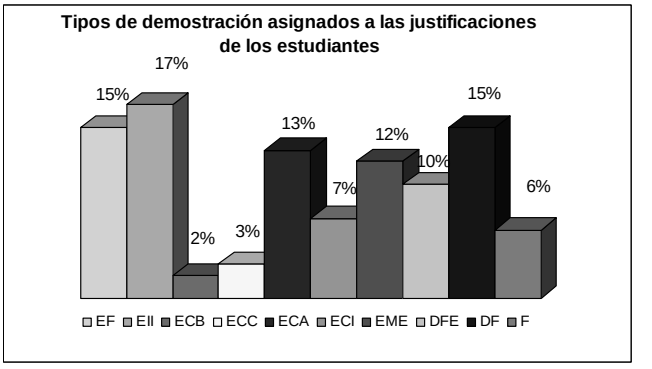
Suponiendo que de alguna manera aceptaban y entendían los argumentos de Silvia y por sus justificaciones, estos tres estudiantes se clasificaron en ECI.

Otros 3 la combinan con la respuesta de Natalia, refiriéndose todos a que las dos son complementarias. Estos estudiantes se ubicaron en ECA, puesto que recurrieron a propiedades aceptadas que consideraban necesarias para justificar la respuesta.

Dos estudiantes combinaron la respuesta de Andrea con la de Cesar o la de Oscar haciendo construcciones auxiliares sobre el diagrama dado para que los triángulos "quedaran" equiláteros y se refirieron a la construcción para su justificación por lo que se ubicaron ECC. Un estudiante escogió las respuestas de Oscar y Cesar y basó su justificación en el movimiento de los segmentos, por lo que también se ubicó en ECC.

Dos estudiantes combinaron las respuestas de Natalia con Silvia y Oscar, pero sus justificaciones los ubicaron en una demostración EF. Uno escogió las respuestas contradictorias de Andrea y Carlos, por lo que se ubicó en F.

La siguiente gráfica resume los resultados de la nueva asignación de los estudiantes:



La nueva clasificación permitió ver que muchos de los estudiantes que se identificaban con una respuesta de tipo deductivo formal estructurado realmente no tenían ese tipo de razonamiento, dando lugar a la nueva categoría de demostración deductiva fallida. Igualmente ocurrió con varios que estaban en las subclases empíricas, cuyas justificaciones no mostraban un tipo de razonamiento que los mantuviera en esa categoría, por lo que hubo necesidad de pasarlos a la nueva categoría de demostración empírica fallida de acuerdo a los criterios planteados.

Descripción de las categorías y análisis de los datos del problema 2

Para el análisis se consideró la asignación de categoría final dada a cada estudiante en el problema 1 y se examinaron todas las respuestas de los estudiantes agrupados en determinada categoría para ver las conjeturas que planteaban y las demostraciones que hacían en el problema 2. Esto nos permitió analizar y contrastar la asignación final dada al estudiante en el problema 1 de "escoger una demostración" con el problema 2 de "hacer una demostración". Una consideración para la clasificación y diferenciación de las demostraciones fallidas y las demostraciones empíricas fallidas que tuvimos en cuenta fue que, si el estudiante enunciaba alguna relación válida entre los dos triángulos, aunque no hiciera ninguna demostración se ubicaba en EF, pero si la conjetura dada no tenía nada que ver con la relación entre los dos triángulos, se ubicaba en F.

Los estudiantes que fueron clasificados en el problema 1 en empirismo fallido encontraron relaciones de proporcionalidad, igualdad de ángulos, ser parte de, o estar incluido en, estar dentro de, semejanza, reducción, ser el doble de, congruencia, tener en común el punto B. Ninguno de estos estudiantes realizó una demostración válida, aunque algunos trataban de justificar con palabras lo que "veían" y creían. Por ejemplo:

F17: …*son proporcionales, se ve que tienen el mismo ángulo,…, se podría demostrar con regla y transportador midiendo y finalmente haciendo pruebas para ver que son proporcionales.*

Considerando que la mayoría de estudiantes plantearon conjeturas válidas, pero no las demostraron, se pudo ver que existía una gran correlación entre la clasificación del problema 1 y 2, es decir, casi todos estos estudiantes están en la categoría EF. Solamente los casos de los estudiantes que señalaron la congruencia y la mitad como relación entre los triángulos sin justificar por qué se pasaron a F.

La mayoría de estudiantes que en el problema 1 habían sido clasificados en empirismo ingenuo inductivo identificaron relaciones (algunas más completas que otras), pero no las demostraron, se limitaron a comentar lo que veían, por lo que los clasificamos en EF. Por ejemplo:

C09:…*por medio del segmento PQ se forma otro triángulo adentro del ΔABC.*…

Algunos estudiantes quedaron ubicados en EII al basar sus justificaciones en las propiedades observadas en el diagrama y referirse a medidas hechas sobre el dibujo. Por ejemplo:

F31: … *el triángulo ABC es el doble de grande que el triángulo PBQ, lo comprobé midiéndolos. Además como PQ//AC si el triángulo PBQ fuera más grande, aumentaría sus medidas al doble sería exactamente igual que el ΔABC.*

El caso de F02 se consideró como una demostración DFE puesto que utilizó una secuencia lógica de teoremas aceptados derivados de los datos del problema.

F02: *Equivalencia: Porque siendo paralelas las líneas PQ y AC, los ángulos formados por la intervención de la línea PQ en los segmentos BC y BA serían igual en ángulo ACB, es decir <ACB=<PQB, <CAB=<QPB. La igualdad de 2 ángulos en 2 triángulos distintos garantiza la equivalencia de dichos triángulos, en este caso PBQ y ABC son equivalentes.*

Los dos estudiantes que estaban ubicados en el problema 1 en experimento crucial basado respondieron lo siguiente:

F35: *ΔABC es una reducción de ΔPBQ o viceversa… se podría comprobar trasladando PQ hasta AC y el resultado sería que los dos triángulos son iguales.* (ECB)

G17: *La relación que hay entre ABC y PBO es que se cortan en el vértice B.* (EF)

Para F35 fue suficiente tomar un ejemplo para trasladar el segmento y comprobar su con-

jetura, no habló de otros ejemplos, ni de contraejemplos, G17 plantea solamente una conjetura y no la demuestra.

Uno de los tres estudiantes clasificado en el problema 1 en experimento crucial constructivo, en el problema 2 quedó en ECA al basar su justificación en las propiedades observadas sobre el ejemplo:

F32: … *que ΔABC tiene los mismos ángulos que el ΔPBQ ya que P y Q están paralelamente organizadas sobre la recta* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *respectivamente, entonces los ángulos <BPQ y BQP no cambian con respecto a <BAC y <BCA.*

Los otros dos estudiantes se ubicaron en EF.

Varios de los 13 estudiantes ubicados en experimento crucial analítico se limitaban a dar la conjetura y no realizar ninguna demostración, por lo que siguió predominando la categoría EF. F29 se ubicó en ECC ya que su justificación se basó en la construcción realizada sobre el diagrama dado:

F29: *En este caso, si se triangula la figura grande, nos damos cuenta que surgen 4 triángulos de la medida de ΔPBQ. Entonces existe una relación de ¼ de ΔPBQ con respecto a ΔABC. En conclusión el ΔPBQ está reducido a escala del ΔABC.*

F30 se basó en lo observado sobre el diagrama para su demostración por lo que lo ubicamos en Empirismo Ingenio Perceptivo (EIP):

F30: *que son triángulos semejantes porque si observamos su forma es igual pero las medidas de PBQ no son iguales porque es el mismo triángulo pero reducido, también se ve que sus ángulos son iguales.*

La mayoría de estudiantes ubicados en el problema 1 en experimento crucial intelectual identificó la semejanza de los triángulos, pero a la hora de dar una demostración se limitaron a enunciar propiedades y teoremas aceptados sin usarlos propiamente en la demostración, no consideramos que sea empirismo ingenuo debido a que no estaban usando medidas ni propiedades particulares sino propiedades generales, tampoco correspondía a un ejemplo genérico porque no se están refiriendo a un representante de una clase, por lo tanto los clasificamos en ECI:

F37: *Al ser paralelas las líneas PQ y AC lo que los relaciona es la forma solo que ΔPBQ tiene un área menor que ABC. Ya que las líneas BC y BA no cambian su inclinación y los ángulos a simple vista se ven similares, m<BAC=m<BPQ, m<BCA=m<BPQ, m<ABC=m<PBQ*

Los casos que solo enunciaron la relación siguen siendo EF.

Respecto a los 12 estudiantes que en el problema 1 se clasificaron en experimento mental estructural, se notó que a medida que estaban en una categoría que requería un mayor razonamiento, los estudiantes identificaban más la relación de semejanza entre los dos triángulos, además de tratar de utilizar o al menos mencionar propiedades matemáticas aceptadas. También se vio que, a pesar que a algunos estudiantes se les había dejado en esta categoría en el primer punto respetando que la elección fuera por que habían razonado de manera similar a la respuesta seleccionada, se evidenció que tal razonamiento no existía, sino más bien existían creencias de cómo debe ser una demostración de acuerdo a lo estudiado en los años anteriores pero no existía la habilidad como tal. De los 12 estudiantes sólo tres tenían un tipo de demostración que correspondía a EME; no se ubicaron en DFE o DFT porque no existía una cadena lógica en su argumentación, sino más bien se hacía mención de algunas propiedades que ayudaban a validar la conjetura, pero les faltó explicar por qué estas propiedades se cumplían. Por ejemplo:

C07: … *m<PQB es igual a la m<BCA pues las rectas son paralelas y aunque el ΔABC tiene mayor proporción, la abertura de los ángulos se conserva. Igualmente sucede con m<BPQ y la m<BAC. Los ángulos de los triángulos son congruentes por lo que los triángulos son semejantes.*

Los demás estudiantes fueron ubicados en EF o DF por que plantearon una conjetura pero no realizaron su demostración; para diferenciarlo y poder decidir si era empírico o deductivo se tuvo en cuenta lo que explicaron para tratar de justificar su conjetura.

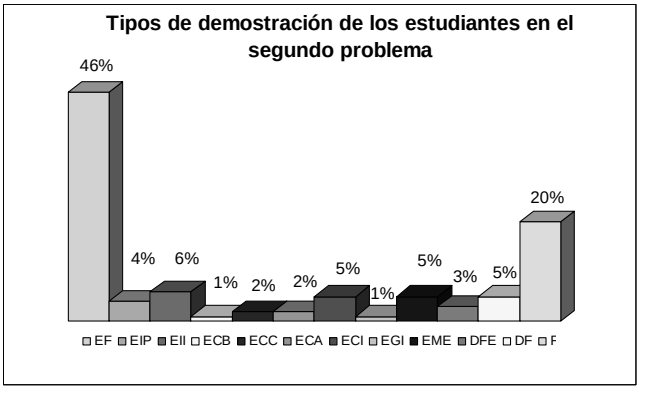
Analizando el número de estudiantes (10) que se clasificaron en deductivo formal estructural en el problema 1 con los del problema 2 (5). Concluimos que muchos de ellos fueron capaces de comprender un tipo de demostración DFE pero todavía no tenían las habilidades suficientes para realizarlas por su cuenta. Por ejemplo:

C02: *Que los dos triángulos son semejantes ya que sus bases son paralelas. En el triángulo ABC el segmento* $\overline{AB}$ *es casi la mitad del segmento* $\overline{PQ}$ *con lo que sus medidas son semejantes en cuanto a sus lados y ángulos.*

Los que estaban en el problema 1 en deductiva fallida se clasificaron en diferentes subclases de demostraciones, se percibió que efectivamente algunos de los que habían escogido la respuesta que en el primer punto correspondía a DFE eran porque reconocían que las demostraciones se debían basar en propiedades generales pero les faltaba habilidad de demostración. Todos a excepción de uno dieron respuestas de tipo empírico o fallidas. Los que dieron respuestas erradas o acertadas sin ningún tipo de explicación también confirmaron que existía diferencia entre entender una demostración y aceptar su validez a tener las habilidades para realizarla.

Los que en el problema 1 se clasificaron en demostración fallida reconfirman su clasificación como pudo concluirse de sus respuestas dadas al problema 2.

El siguiente diagrama de barras muestra los porcentajes de respuestas en cada uno de los tipos de demostración asignados en el problema 2. Se evidencia el predomino de las demostraciones fallidas, es decir estudiantes que no tienen la habilidad necesaria para plantear sus propias conjeturas y demostrarlas por si mismos, pero sí la capacidad para entenderlas como lo vimos en el problema 1, lo cual se considera como un acierto el hecho de haber propuesto ese tipo de problema.



ALGUNAS CONCLUSIONES

Los resultados de la comparación del problema 1, entre lo que los estudiantes escogieron y justificaron permitieron ver que la mayoría de estudiantes tenían un tipo de razonamiento empírico, inclusive los clasificados en el deductivo usaban bastante el empirismo. Estos últimos tienen la idea de que hay que utilizar argumentos matemáticos aceptados para demostrar, pero al no ser capaces de dar justificaciones deductivas se apoyaban bastante en el empirismo. Esto se reconfirmó con el análisis del problema 2. También emergieron, de acuerdo a las justificaciones y a los criterios, las demostraciones de tipo experimento crucial intelectual y experimento mental estructural. Las demostraciones que fueron seleccionadas inicialmente y que tuvieron mayor coherencia con las justificaciones dadas por los estudiantes fueron las de tipo experimento crucial analítico y la demostración fallida, la de menos coherencia la de tipo experimento crucial constructivo. En el problema 2 hubo más tipos de demostraciones que en el problema 1 debido a que no se limitaban a los casos dados, pero se notó la falta de demostraciones tipo experimento genérico y el bajo porcentaje de estudiantes que plantearon un tipo de demostración deductiva. Con este análisis se evidenció el predomino de los tipos de demostración empírica, empírica fallida y fallida que indica que los estudiantes no tienen la habilidad necesaria para poder demostrar por sí mismos sus propias conjeturas. Esto posiblemente debido a que los procesos de conjeturar y demostrar no son promovidos en los cursos anteriores.

Pudimos poner en práctica un instrumento valioso de obtención de información inicial de las habilidades de demostración de nuestros estudiantes que sirvió de punto de partida para el logro de los objetivos de la investigación mencionados en la introducción de este artículo. El test diagnóstico también sirvió para poner en práctica y validar la pertinencia y coherencia de la estructura de análisis propuesta, la cual permitió aportar información del proceso de demostración de propiedades de las razones trigonométricas realizado por los estudiantes en el transcurso de la investigación (Fiallo, 2006).

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En Pimm, D. (Ed.). *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23-40.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración*, Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En Schoenfeld, A.H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2001). *Investigating factors that influence students´ mathematical reasoning*. Manuscrito descargado de http://www.ioe.ac.uk/proof/ proofPME25.pdf.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Roterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.

N.C.T.M. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

UNA APROXIMACIÓN A LOS DESCRIPTORES DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA SEMEJANZA

Élgar Gualdrón Pinto
Departamento de Matemática
Universidad de Pamplona (Colombia)

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia (España)

RESUMEN

El modelo de razonamiento de Van Hiele ha sido una potente estructura conceptual cuando se trata de investigaciones relacionadas con la enseñanza de la geometría. Hemos utilizado este modelo (junto con otros referentes teóricos) para diseñar una unidad de enseñanza para la semejanza de polígonos. La experimentación de dicha unidad, con estudiantes colombianos de noveno grado (14-15 años), ha dado lugar a una descripción inicial de las características de los niveles de Van Hiele específicas para la semejanza. También presentamos algunas conclusiones acerca del efecto de la experimentación en la mejora del nivel de razonamiento de los estudiantes.

ABSTRACT

Van Hiele's model of reasoning has been a powerful conceptual structure for research related with the teaching of geometry. We have used this model (with other theoretical referents) to design a teaching unit for similarity of polygons. After the experimentation of the above mentioned teaching unit, with Colombian students of ninth grade (14-15 year old), we have produced an initial description of the characteristics of Van Hiele's levels specific for similarity. Also we presented some conclusions about the effect of experimentation on the improvement of students' level of reasoning.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Élgar Gualdrón Pinto y Ángel Gutiérrez Rodríguez (2007). UNA APROXIMACIÓN A LOS DESCRIPTORES DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA SEMEJANZA, pp. 369-380.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una síntesis de una parte de los resultados obtenidos de una investigación llevada a cabo dentro del programa de doctorado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia.

El conocimiento de conceptos, propiedades y estrategias básicos de geometría es fundamental para que los estudiantes interactúen efectivamente con su propio entorno y también para que puedan empezar a estudiar la geometría de una manera más abstracta y formal (Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner, 1987). Por este motivo, el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas geométricos nos demanda más investigación para conocer las formas que tienen los estudiantes de adquirir de manera adecuada y significativa los conocimientos geométricos.

La investigación que hemos realizado, y en particular los aspectos que trataremos en este trabajo, apuntan a aportar elementos a los profesores de matemáticas que les permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la semejanza.

El modelo de razonamiento de Van Hiele está demostrando que es un excelente referente teórico para la organización y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje. Un buen ejemplo de ello es N.C.T.M. (2003). En este trabajo presentamos los descriptores de niveles de Van Hiele que se pudieron constatar después de experimentar con estudiantes de noveno grado (14-15 años) de Colombia una unidad de enseñanza de la semejanza de polígonos. El planteamiento inicial de los descriptores de razonamiento se hizo teniendo en cuenta los propuestos, de forma general, para la geometría por P.M. Van Hiele y otros autores como Van Hiele (1957), Usiskin (1982), Burger y Shaughnessy (1986), Jaime (1993), Guillén (1997) y Gutiérrez y Jaime (1998).

ANTECEDENTES

Después de realizar una revisión bibliográfica, se puede constatar que es poco lo que se ha hecho respecto a la semejanza y en particular, propuestas de enseñanza basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Algunos de los trabajos encontrados, que incluyen el concepto de semejanza, utilizando diferentes marcos teóricos y persiguiendo diferentes objetivos, son por ejemplo, Fernández (2001), quien trabajó con estudiantes de primaria. Hart y otros (1981, 1984, 1989), quienes trabajaron con estudiantes y profesores de secundaria, al igual que Margarit y otros (2001). Escudero y Sánchez (1999) trabajaron la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de secundaria y la enseñanza práctica de la semejanza. A nivel de propuestas curriculares (propuestas orientadoras) para profesores, desde diferentes corrientes conceptuales, encontramos las del Grupo Beta (1997), Lappan y otros (1986), O`Daffer y Clemens (1977), Almató y otros (1986).

Friedlander y otros (1985) realizaron un estudio en el que perseguían tres objetivos bien definidos: determinar patrones de mejoramiento en el desarrollo de los estudiantes (de 6º, 7º y 8º grados) en el concepto de semejanza, determinar los efectos de una intervención de enseñanza (en 6 clases, con una unidad de enseñanza sobre semejanza) en los tres grados, y determinar si la enseñanza de la semejanza tiene algún efecto en la habilidad general de los estudiantes para el razonamiento proporcional. A los estudiantes se les aplicó un test escrito antes y después de enseñarles el tema.

Específicamente en relación a los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele en el tema de la semejanza, la revisión bibliográfica no generó ningún resultado.

MARCO TEÓRICO

Para el diseño y posterior análisis de la unidad de enseñanza de la semejanza tuvimos en cuenta el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, algunos aspectos de la Fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad y semejanza.

En este texto sólo presentaremos la parte de la investigación relacionada con el modelo de Van Hiele. Van Hiele (1957) y Van Hiele-Geldof (1957) presentaron, respectivamente, un modelo teórico de enseñanza y aprendizaje de la geometría y una aplicación concreta del modelo en algunos cursos de geometría. Según este modelo, a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles que son secuenciales, ordenados y de tal manera que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los contenidos matemáticos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y realizar demostraciones (Jaime, 1993).

Presentamos de manera muy resumida, las principales características del modelo de Van Hiele. Se puede encontrar un estudio más detallado, por ejemplo, en Jaime (1993).

Nivel 1 (Reconocimiento): Los estudiantes juzgan un objeto geométrico por su apariencia física y lo consideran como un todo.

Nivel 2 (Análisis): Los estudiantes identifican los componentes de las figuras geométricas y las describen por medio de sus propiedades. Las deducciones que hacen están basadas en la observación y la medición.

Nivel 3 (Deducción informal): Los estudiantes son capaces de definir y clasificar lógicamente las familias de figuras. Pueden dar argumentos deductivos informales para demostrar sus conjeturas.

Nivel 4 (Deducción formal): Los estudiantes entienden el papel de los elementos de un sistema axiomático, y pueden realizar demostraciones formales.

De las propiedades del modelo de Van Hiele, conviene mencionar la "continuidad" de los niveles. En la formulación inicial del modelo, los Van Hiele plantearon que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto. Sin embargo, posteriores investigaciones, por ejemplo Burger y Shaughnessy (1990) y Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) han puesto en evidencia la presencia de estudiantes que muestran características propias de dos niveles consecutivos, lo que significa que esos estudiantes se encuentran en transición de un nivel de razonamiento al siguiente. En esta investigación consideramos el carácter continuo de la transición entre niveles.

METODOLOGÍA

La muestra con la cual se llevó a cabo este trabajo estuvo formada por 34 estudiantes de dos instituciones (17 en cada una, con los cuales se formaron 5 grupos), una pública y una privada, del departamento de Santander (Colombia). Era la primera vez que estos estudiantes recibían instrucción sobre el tema de semejanza.

La unidad de enseñanza se diseñó con los objetivos, entre otros, de:

- Fortalecer la adquisición de los niveles 1 (Reconocimiento) y 2 (Análisis) de Van Hiele en el tema propuesto.

- Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele en el tema semejanza de figuras planas a partir de la experimentación.

En el diseño de las actividades hubo dos aspectos que se tuvieron presentes: Uno fue el tipo de papel sobre el cual se presentarían las tareas a los estudiantes, y otro, el tipo de figura sobre la que los alumnos deberían trabajar. De esta forma, las tareas fueron escogidas o diseñadas para que los estudiantes trabajaran sobre hojas de papel blanco o cuadriculado y manipularan diversas superficies poligonales (entre otras, figuras no estándar), tanto cóncavas como convexas. También tuvimos cuidado con las medidas de las longitudes de dichas superficies y sus posiciones en la hoja y en relación a las demás figuras de la misma actividad (figuras en posición no estándar). En este sentido Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), teniendo en cuenta las teorías de Van Hiele y Vinner, plantean que un estudiante comienza a construir su imagen mental de un concepto de manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales. Además plantean que un método adecuado de introducción de nuevos conceptos es la inclusión de ejemplos y contraejemplos. De esta manera pretendíamos eliminar estereotipos, que son muy habituales en la enseñanza de la geometría, que limitan la adquisición de conocimiento de los estudiantes y que, en algunos, casos inducen a determinados errores como es el uso generalizado de formas típicas, como el cuadrado, el rectángulo o el triángulo, y de posiciones estándar de las mismas (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992).

Cada actividad fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales el estudiante debía justificar cada uno de los procesos que lo conducían hacia la respuesta (numérica y/o gráfica y/o verbal). Para el desarrollo de cada una de las actividades el estudiante podía utilizar reglas, escuadras o cartabones, compás, transportador, tijeras y calculadora, entre otros elementos auxiliares.

Metodología de trabajo en clase:

En las dos clases, la experimentación comenzó con la aplicación de un pretest a la muestra seleccionada. En uno de los colegios estuvieron presentes la profesora titular y el investigador. Éste asistió a todas las clases en calidad de observador participativo, observando la actividad de los alumnos y, al mismo tiempo, colaborando con la profesora en las tareas de asesoramiento y orientación a los alumnos durante las sesiones de clase. En la otra institución, fue el investigador quien hizo las veces de profesor. Al finalizar la experimentación, se aplicó un postest a los estudiantes que participaron, en una jornada de clase supervisada por el investigador y la profesora titular, que intervenían para clarificar palabras o frases, pero no para guiar las respuestas de los estudiantes.

Las actividades de la unidad de enseñanza se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. Algunas tareas planteadas requerían para su realización de un material didáctico adecuado, material que les fue proporcionado en cada caso a los grupos y que se detalla junto a la exposición de las tareas. El medio escolar en el que se llevaron a cabo las experimentaciones de la unidad de enseñanza fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de los estudiantes. Todas las actividades fueron realizadas dentro de la jornada escolar.

En total la experimentación se compuso de nueve sesiones de 100 minutos cada una y duró 8 semanas. El tiempo transcurrido entre las aplicaciones del pretest y del postest fue de 9 semanas.

En lo que respecta a la organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que plantea el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.

Recogida de información:

Los medios utilizados para la recogida de información en los grupos experimentales fueron:

- Respuesta de los estudiantes en el pretest y el postest.
- Material desarrollado por los estudiantes en cada una de las actividades.
- Grabaciones en video tomadas de cada una de las actividades desarrolladas.
- Las notas tomadas por el investigador durante el desarrollo de las actividades.

Las grabaciones se realizaron haciendo seguimiento a dos de los grupos (en cada institución), los cuales fueron formados por las profesoras titulares teniendo en cuenta la empatía que existía entre los miembros del grupo hacia el trabajo en estas condiciones. También se grabaron las intervenciones de la docente titular en un caso y del investigador en el otro.

RESULTADOS

A continuación presentamos algunos de los aspectos que nos han parecido más relevantes. En este análisis, se tendrá en cuenta lo planteado en el marco teórico referente al Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Presentaremos el efecto que tuvo la unidad de enseñanza en el fortalecimiento y adquisición de los niveles 1 y 2 de Van Hiele. También presentamos la caracterización de éstos en el tema de la semejanza.

Las diferentes estrategias de resolución de las actividades usadas por los estudiantes en cada nivel de razonamiento son las siguientes:

Razonamiento de nivel 1:

E 1: Usan una estrategia visual.

Razonamiento de nivel 2:

E 2: Usan mediciones.
E 3: Usan definición o criterio relacionado con la semejanza de figuras.
E 4: Deducen propiedades empíricamente.
E 5: Usan cuadrícula y localización de partes que componen la figura.
E 6: Amplían o reducen multiplicando las medidas.
E 7: Usan razón interna.
E 8: Usan razón externa.
E 9: Usan regla de tres.
E 10: Deducen criterio nuevo para la semejanza.

Otras respuestas:

(E 11): Responden, o justifican, o concluyen erróneamente sin exhibir un nivel en concreto.

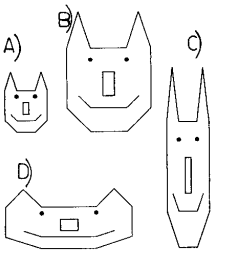
En la tabla 1 se resumen las diferentes estrategias de resolución de las actividades usadas por los estudiantes en cada nivel de razonamiento.

	Nivel 1	**Nivel 2**									**Otras respuestas**
	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11
Actividad 1	10										
Actividad 2	10										
Actividad 3	9	1									
Actividad 4	9	1									
Actividad 5	8	2									
Actividad 6	2			6							2
Actividad 7					10						
Actividad 8	4(8d)		6(8d)			10(8a-c)					
Actividad 9			10								
Actividad 10							2	6	1		1
Actividad 11							4	1	5		
Actividad 12							8	1	1		
Actividad 13							4	6			
Actividad 14							1	2	6		1
Actividad 15				8							2
Actividad 16				8							2
Actividad 17	1(17a-b)		6(17a-b)							8(17c)	2(17a-b) 1(17a-c) 1(17c)
Actividad 18			8(18a-b) 2(18b)								2(18a)
Actividad 19	2(19a) 1(19b) 2(19a-b)		4(19a) 3(19b) 1(19a-b)							1(19a) 3(19b)	
Actividad 20	3									7	
Actividad 21			6(21a-b)							6(21c) 1(21a-c)	3(21a-c)
Actividad 22			1(22a-b) 1(22e)							8(22a-e)	1(22c-d) 1(22a-e)

Tabla 1. Nivel de razonamiento y estrategias de resolución exhibidas por los 10 grupos de estudiantes

A continuación se presentan algunos ejemplos de respuestas. Las estrategias están directamente relacionadas con los aspectos que tuvimos en cuenta para el diseño de la unidad de enseñanza.

En la *actividad 1* se presentaban cuatro figuras[1]. Los estudiantes debían decidir cuáles de ellas tienen "la misma forma" y justificar su elección.



El grupo (IEA, 1) respondió: *La A y la B, porque su tamaño disminuye pero la figura no se altera,* [además] *sus ángulos son iguales pero sus longitudes varían.*

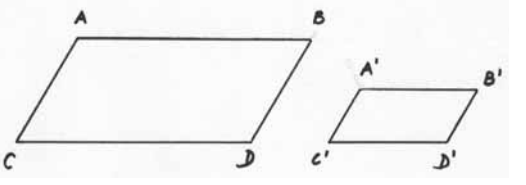
El grupo (FCUIS, 1) respondió: *Las caras más parecidas son la A y la B, ya que la B es el doble de la A y mantiene las proporciones, mientras que la C es alargada y angosta, y en la D su nariz está volteada y el ángulo de la sonrisa aparentemente es distinto.*

El primer grupo responde utilizando argumentos de tipo visual al decir "más pequeño" o "más grande". Mencionan la igualdad de ángulos pero, parece ser que, lo plantean por simple observación, ya que no aparece ningún intento de medición. El segundo grupo menciona una estrategia multiplicativa (el doble) y expresiones como "alargada" y "angosta" pero, al igual que con el primer grupo, no hay indicios de que hayan tomado medidas ni hecho operaciones. Esto quiere decir que los estudiantes se basaron en consideraciones de tipo visual (estrategia E1), lo cual confirma que su razonamiento en estas respuestas fue del nivel 1.

En la *actividad 3* se pedía seleccionar cuáles de los 9 triángulos dados tenían "la misma forma", además de solicitar los criterios que se tuvieron en cuenta para dar la respuesta.

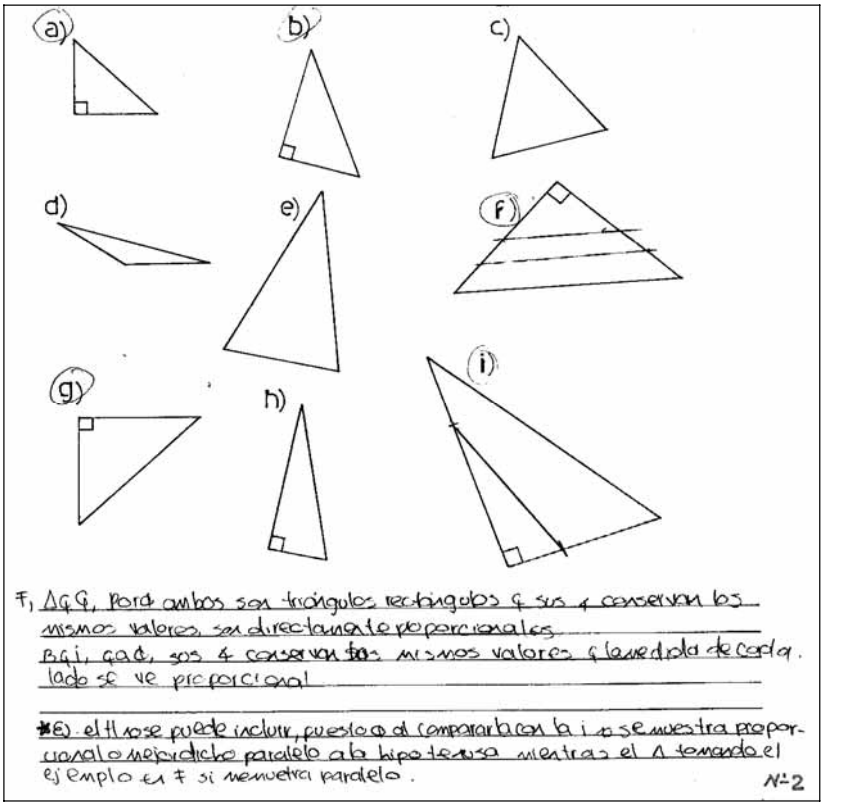
La respuesta del grupo (FCUIS, 2) aparece en el cuadro 1 (página siguiente). Esta respuesta corresponde al nivel 2 y a la estrategia E2, ya que los estudiantes utilizaron argumentaciones diferentes a las estrictamente visuales, por ejemplo al realizar una superposición (realizando mediciones) de los triángulos *f, g* y *a* y plantear que sus ángulos se mantienen y las medidas de los lados son proporcionales. Similar sucedió con los triángulos *i* y *h.*

En la *actividad 12* se pedía usar la figura dada ABCD para dibujar otra, sabiendo que por cada 7 unidades en ABCD debe haber 3 unidades en la figura nueva. Durante el desarrollo de esta actividad, el grupo (IEA, 2) había dibujado la nueva figura A'B'C'D' cuando llegó el profesor. Transcribimos parte de su diálogo (P denota profesor y E estudiante):



1 Inspirado en una actividad de Lappan (1986).

P: *¿Tuvieron en cuenta los ángulos para hacer el dibujo?*
E: *Sí.*
P: *¿Cuáles?*
E: *Éste* [señala el ángulo A] *por ejemplo mide 135 grados.*
P: *Entonces en la nueva figura ¿alguno mide 135 grados?*
E: *Sí, éste* [señala el ángulo A`].
P: *¿Y éste ángulo cuánto mide?* [Señalando el ángulo C].
E: *45 grados.*
P: *En la nueva figura ¿alguno mide 45 grados?*
E: *Sí, éste* [Señalando el ángulo C`].
P: *¿Era importante tener en cuenta la medida de los ángulos?*
E: *Pienso que sí, por que si no, resultaría cualquier figura.*



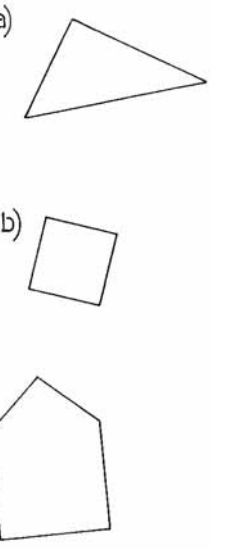
Cuadro 1. Respuesta dada por el grupo (FCUIS, 2) a la actividad 3

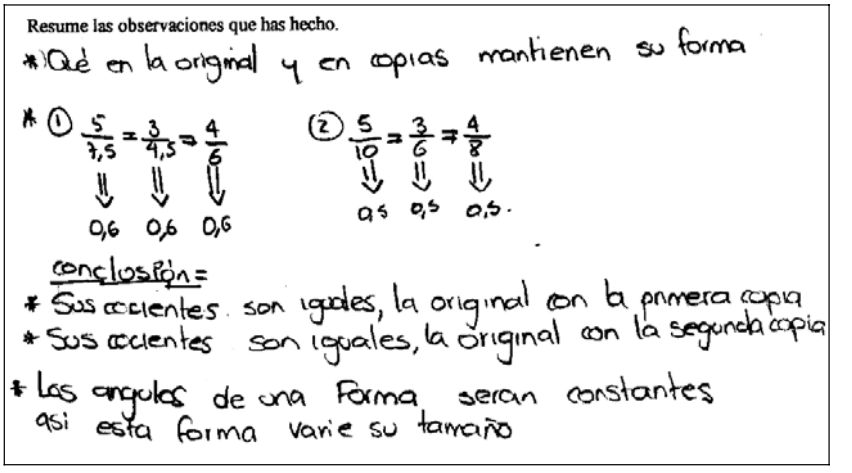
Esta respuesta corresponde al Nivel 2 y a la estrategia E7, ya que mostraron la importancia de tener en cuenta la medida de los ángulos al dibujar una figura semejante a otra dada, es decir, que no es suficiente con ampliar o reducir las medidas de sus lados. Otro aspecto que tuvimos en cuenta en su clasificación fue el desarrollo planteado en su hoja de trabajo.

Vamos a ampliar estas figuras en la fotocopiadora; ampliamos el original y después la fotocopia (los estudiantes recibieron tres folios, las figuras originales y las dos ampliaciones).

a) Observa cada una de las figuras del original y toma las medidas de sus lados y anótalas.
b) Haz lo mismo con las de las fotocopias.
c) Compara los cocientes de las medidas de los lados correspondientes del original con las de la primera copia y las de ésta con las de la segunda.
d) ¿Qué observas? Anótalo.
e) Toma las medidas de los ángulos del original y las dos copias, anótalas.
f) Compara las mediciones del ítem anterior.
g) ¿Qué observas? Anótalo.

Resume las observaciones que has hecho.





Cuadro 2. Respuesta dada por el grupo (IEA, 2) a la actividad 6.

En la *actividad 6*, que aparece a continuación, el grupo (IEA, 2) respondió como aparece en el cuadro 2.

La respuesta dada por este grupo fue clasificada en el Nivel 2 y la estrategia E4, ya que los estudiantes deducen empíricamente una forma de determinar cuándo dos figuras planas son semejantes (como se pudo constatar, además, en la trascripción de uno de los videos).

IDENTIFICACIÓN INICIAL DE LOS DESCRIPTORES DE LOS NIVELES DE VAN HIELE

Los resultados sugieren que la formulación inicial de los descriptores de los niveles 1 y 2 de Van Hiele que propusimos para la semejanza se confirmó en su mayoría, es decir que el análisis de los resultados de la experimentación evidenció dichos descriptores. A continuación presentamos los descriptores que resultaron:

Nivel 1 (Reconocimiento)

Reconocen figuras semejantes basándose principalmente en la apariencia de ellas.

En este nivel los estudiantes ven las figuras como un todo y describen las diferencias y semejanzas de ellas usando términos como, más grande, más pequeño, estirado, ampliado. Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre la semejanza de dos dibujos, podría decir, "la cabeza es demasiado grande, si se compara con el tronco", o "este rectángulo no es tan largo como éste". Además de incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

Los estudiantes empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada.

Nivel 2 (Análisis)

Los estudiantes se centran en aspectos matemáticos específicos de las figuras tales como las longitudes de los segmentos y las medidas de los ángulos, así que pueden inducir cuáles son las condiciones necesarias para que las figuras sean semejantes.

Las transformaciones usadas en semejanza, las ampliaciones y reducciones, son centrales en todas las actividades en las cuales los estudiantes crean figuras semejantes.

La orientación de las figuras semejantes es vista como irrelevante.

Pueden realizar construcciones de figuras semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si la figura resultante será una ampliación, una reducción o una figura idéntica a la dada.

Realizan la deducción de propiedades matemáticas mediante experimentación y generalización. Además, generalizan dichas propiedades a otros tipos de figuras.

Realizan demostraciones de propiedades que tienen que ver con la semejanza de figuras verificando que se cumplen en algunos casos.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Después de experimentar la unidad de enseñanza, se pudo constatar que las actividades 1 a 5 y las 6 a 22 fueron desarrolladas por la mayoría de los estudiantes en los niveles 1 y 2 de razonamiento, respectivamente. Además, ningún grupo de estudiantes dio muestras de acercamiento al tercer nivel de razonamiento.

En ninguno de los grupos se presentó el intento, por parte de los estudiantes, de demostrar alguna conjetura, ni siquiera en las actividades donde lo habíamos previsto. Pensamos que probablemente esto sucedió porque ninguna actividad o ítem en particular lo pedía explícitamente.

Se observa en la mayoría de los estudiantes el progreso en la adquisición del segundo nivel de razonamiento y su consolidación durante la experimentación. Esto parece indicar que la mayoría de ellos alcanzó el segundo nivel de razonamiento.

Para futuros trabajos se podría tener en cuenta otro enfoque para la semejanza de figuras, por ejemplo la presentación de ésta a partir de configuraciones homotéticas y verificar qué caracterización de niveles de Van Hiele resulta. Además verificar el resultado de la enseñanza, desde esta perspectiva, con el marco de referencia usado en esta investigación.

REFERENCIAS

Almató, A., Fiol, M. L., Fortuny, J. M., Hosta, I., y Valldaura, J. (1986). *Proposta didàctica per treballar la proporcionalitat* (vol. 2). Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17, 1*, 31-48.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry* (Reporte final). Corvallis, USA: Oregon State University.

Escudero, I., y Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: The case of similarity. *Proceedings of the 23th PME Conference, 2*, 305-312.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (2001). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados)* (2ª edición). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Friedlander, A., Lappan, G., y Fitzgerald, W. M. (1985). The Growth of similarity concepts over the middle grades (6, 7, 8). *Proceedings of the 7th PME-NA.*, 86-92.

Grupo-Beta. (1997). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.

Guillén, G. (1997). *EL Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20, 2 y 3*, 27-46.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children`s strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.

Hart, K., y otros (1981). *Children`s understanding of mathematics: 11-16* (1 ed.). Londres, Inglaterra: John Murray.

Hart, K., y otros (1989). *Children`s mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., y Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In N.C.T.M. (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 222-235): Reston-VA.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon, 23*, 49-62.

Lappan, G., Fitzgerald, W., Winter, M. J., y Phillips, E. (1986). *Similarity and Equivalent Fractions*. Michigan: Addison-Wesley.

Margarit, J., Gómez, B., y Figueras, O. (2001). Ratio comparison: Performance on ratio in similarity tasks. *Proceedings of the 25th PME Conference, 1*, 340.

N.C.T.M. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales.

O`Daffer, P. G., y Clemens, S. R. (1977). *Geometry: An Investigative Approach*. Illinois, USA: Addison-Wesley.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, USA: ERIC.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984, pp.1-206).

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

ERRORES SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

Mª Jesús Salinas Portugal
Universidad de Santiago de Compostela

RESUMEN

Partiendo de la creencia de que las matemáticas escolares deben formar parte de la componente del conocimiento sobre las matemáticas del futuro maestro, hemos hecho un estudio sobre el sistema de numeración decimal. El estudio empírico se llevó a cabo en tres etapas con estudiantes que finalizan magisterio.

Este trabajo se centra en el análisis de las dificultades surgidas en el aprendizaje de ciertos aspectos de nuestro sistema de numeración, más concretamente, el valor posicional de las cifras. Los resultados de la investigación se complementan con una fundamentación teórica y algunos datos adicionales, de cara a proporcionar al lector una visión más amplia del problema.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Mª Jesús Salinas Portugal (2007). ERRORES SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO, pp. 381-390.

LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

El tema de la formación de profesores de Primaria y Secundaria viene siendo una constante en las investigaciones sobre educación matemática. Esta preocupación viene pareja con la preocupación por la mejora de la enseñanza de la matemática; así Flores (1998) hace referencia a esta preocupación en los congresos sobre educación matemática, destacando también el paralelismo entre los paradigmas empleados para investigar la enseñanza y los utilizados en las investigaciones referidas a la formación de los profesores de matemáticas.

Los responsables de la política educativa de la mayoría de los países han asumido una distinción en la formación de los profesores de Primaria y de Secundaria. Así, mientras que para los primeros propician una mayor formación de carácter psicopedagógico, para los segundos abogan por más preparación en la materia que van a enseñar (Llinares, 1991). Esta situación nos llevó a dos tipos de formación muy dispares, como señala Rico (1993, 16) al referirse a los profesores que imparten la Enseñanza Secundaria en España: "nos encontramos en una situación donde los miembros actuales de la profesión docente proceden de dos tipos muy distintos de formación, cada uno con un componente muy bien desarrollado y el otro muy débil o inexistente". Refiriendose a la formación de profesores del primer ciclo de enseñanza básica, Palhares y Gomes (2006) destacan el énfasis puesto en el conocimiento educacional frente a la trivialización del conocimiento matemático.

Dejando aparte esa polémica, aún sin resolver, como podemos ver en Molina (2002) al hablar de la controversia sobre la integración del conocimiento con la didáctica específica del mismo, pasamos a centrarnos en los conocimientos que debe poseer el profesor de matemáticas. Siguiendo el esquema que presenta Llinares (1991, 32) sobre las componentes del conocimiento del profesor: 1) el conocimiento sobre la materia, 2) el conocimiento sobre los aprendices y el aprendizaje de las matemáticas, 3) el conocimiento sobre el proceso instructivo; para nuestro estudio nos hemos centrado en el apartado del conocimiento sobre la materia específica.

Aún restringiéndonos solamente al componente que se refiere al conocimiento sobre las matemáticas, que debe formar parte de la formación de profesores de matemáticas, el problema es complejo. Las opiniones sobre el tema son diversas, las investigaciones son parciales y los problemas se analizan por separado. Uno de los aspectos en el que los investigadores están de acuerdo es que el profesor de Primaria posea una profunda comprensión de las matemáticas escolares (Llinares 1991, 1993; Bromme y Brophy, 1986). En Carrillo y Climent (1999) se recogen una serie de reflexiones sobre los modelos de formación de maestros, estando las matemáticas escolares presentes en todas las propuestas.

A lo largo de nuestra práctica docente como formadores de maestros, venimos constatando en nuestros alumnos lagunas de conocimiento y errores conceptuales en contenidos matemáticos que deberían haberse adquirido en los primeros años de la enseñanza Primaria. El objetivo de nuestra investigación es analizar algunos de esos errores, centrándonos en aquellas concepciones erróneas de los futuros maestros que recogen aspectos relacionados con el sistema de numeración decimal y más concretamente con el valor de posición por ser uno de los campos en los que más errores hemos detectado a través de las experiencias de aula.

Nuestros sujetos de estudio adquirieron los conocimientos y destrezas relativos a estos conceptos, entre los seis y los once años, edad que se corresponde, según la teoría de los estadios de Piaget, con el período de las operaciones concretas. En los siguientes años de escolaridad obligatoria y no obligatoria, ya no se vuelve sobre estos temas, al menos de una forma explicita. Por ser adquiridos en edades tan tempranas, surgen dificultades, que, de no

intervenir a tiempo, pueden llevar a errores conceptuales, que en la mayoría de los casos persisten en la época adulta.

Los errores que se producen sistemáticamente en situaciones similares, son para Centeno (1988), reveladores de la existencia de modelos implícitos erróneos que están relacionados con una cierta manera de conocer que permite detectar la resistencia a la evolución de un concepto. Gómez (1994: 246), por su parte, al presentar las conclusiones sobre errores en cálculo mental de los estudiantes para profesores, aboga por "hacer emerger y conocer los errores de los estudiantes" ya que ello ayuda a conocer sus creencias así como la forma en que están aprendiendo o han aprendido y las dificultades que enfronta.

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Nuestro sistema de numeración, posicional de base diez, con símbolos para los dígitos y la inclusión del cero, supuso mucho tiempo para su desarrollo, por lo que no debe sorprender que algunos niños se muestren muy lentos a la hora de captar todas las implicaciones de la notación y su estructura conceptual subyacente (Orton, 1990). No nos ocuparemos aquí de como el niño adquiere el concepto de número, sino de las dificultades que entraña su representación a través de nuestro sistema de numeración, dificultades que se agravan al iniciar su aprendizaje en edades tempranas. Como señala Kamii (1986: 71): "la enseñanza prematura, sea del valor de la posición o de cualquier otro aspecto del programa de estudios, es perniciosa para la comprensión de una disciplina por parte de los niños".

Autores como Kamii (1986; 1992), Baroody (1988), Ball (1991), Verschaffel y De Corte (1996), entre otros, coinciden tanto en la importancia de la comprensión del valor de posición para conocer y entender nuestro sistema de numeración decimal y las operaciones, como en la dificultad que entraña su aprendizaje. Pero también coinciden en criticar, bien la manera en que los niños aprenden, (Ball,1991), bien el momento en el que se enseña. Así, Kamii (1986: 63) señala que a un niño de primer curso le es fácil reconocer que 26 es menor que 62 pero no puede comprender, en cambio, que el 2 de 26 signifique "20".

Para Verschaffel y De Corte (1996: 108), la comprensión del valor de posición requiere la integración de tres aspectos: "las cantidades y el nombre base (2 decenas y 5 unidades), el nombre número (veinticinco) y el numeral escrito (25)". Critican también estos autores el énfasis exagerado puesto en los conocimientos instrumentales a expensas de los conocimientos relacionales, lo que motiva que muchos niños experimenten grandes dificultades para construir conceptos apropiados de la numeración de varios dígitos.

Bednarz y Janvier (1982), en un estudio realizado con niños de primero, tercero y cuarto grados (6 a 10 años), llegan a la conclusión de que incluso en tercero y cuarto grado la mayor parte de los niños no entienden el valor de posición. Encuentran estos autores los mayores problemas en los siguientes aspectos: dificultades con el cero, trabajar con agrupaciones de agrupaciones, trabajar simultáneamente con dos agrupaciones, deshacer agrupaciones y manejar el concepto de acarreo.

Podemos, pues, destacar entre las dificultades para llegar a la comprensión del valor de posición, los siguientes campos:

a) Diferencias entre el sistema de numeración escrito y el sistema de numeración oral

Nuestro sistema de numeración escrito es posicional mientras que el sistema oral no lo es. En el sistema oral, la yuxtaposición de palabras supone una operación de suma, en unos casos, y una operación de multiplicación en otros, siendo que estas dos operaciones aparecen

en general combinadas en la denominación de un número. Por el contrario, en la numeración escrita no hay ningún rastro de las operaciones aritméticas involucradas y las potencias de la base solo pueden inferirse a partir de la posición que ocupan las cifras (Lerner y Sadovsky, 1994).

Otro de los problemas que existe en la numeración oral de muchos idiomas son las irregularidades de nombres de números; así , en español los nombres: *once, doce, trece, catorce* y *quince* no se corresponden con los de los nombres de los que los siguen, en los que aparece una suma (*diez* y *seis)*, o el caso de las decenas: *veinte* (dos dieces). Esto lleva, según Baroody (1988), a que los niños deban aprender procedimientos para traducir el sistema escrito a la serie numérica verbal, incluyendo reglas especiales para casos excepcionales. En este sentido, Fuson (1992), al comentar las irregularidades que existen en el inglés para las palabras número entre diez y cien, pone de manifiesto las consecuencias para el aprendizaje de los niños de habla inglesa en contraste con los niños que hablan un idioma regular; en este caso estaría el japonés en el que, como explica Brissiaud (1993: 172), añadir y cambiar de unidad se emplean con los primeros números: "diez y uno" (11), "diez y dos" (12), etc. y en las decenas "dos dieces" (20), lo que recalca la decena como una nueva unidad.

b) El papel del cero

Al niño le cuesta ver que el cero ocupa un lugar y es, por tanto, una cifra significativa. Para Baroody (1988: 200), este papel del cero en los órdenes de unidades es bastante abstracto si se compara con los significados iniciales que el niño atribuye al cero: cero como representante de un conjunto vacío o cero como algo que carece de efecto (por ejemplo añadir cero). El hecho de interpretar que el cero significa "nada" entra en conflicto con las reglas de codificación y decodificación para los ceros intermedios, lo que para Baroody podría explicar el por qué algunos niños leen, por ejemplo 402 como "cuarenta y dos" o , al revés, escriben cuarenta y dos como "402".

c) Relaciones entre los distintos órdenes

Según Baroody (1988: 194), un número de varias cifras es una expresión numérica que codifica relaciones entre las cifras aisladas; las relaciones entre cada una de las cifras se codifican mediante su posición, por lo que los niños deben aprender como se codifican y decodifican estas relaciones. En el sistema de numeración decimal, cada unidad de un orden equivale a diez unidades del orden inferior, así una decena equivale a diez unidades simples, una centena a diez decenas, etc. Además la representación escrita lleva implícitas las operaciones de suma y multiplicación. Pensar simultáneamente en una decena y en diez unidades es una tarea difícil para niños pequeños. Para comprender que un número de dos dígitos se compone de decenas y unidades, el niño tiene que construir un segundo sistema, el de las decenas, sobre el primer sistema, el de las unidades, y al igual que estas requiere que el niño sintetice las relaciones de orden e inclusión jerárquica (Kamii, 1992). Análogamente sucede con las centenas.

Para Kamii (1986), llegar a la comprensión de la posición en números de dos cifras requiere la síntesis de tres ideas construidas gradualmente: "regla de notación" (el 1 de 16 significa 10), "relaciones numéricas parte-todo" (10 + 6 = 16), "multiplicación" (1x10 = 10). También esta autora cree que ni el momento en el que se enseña ni la forma de hacerlo son adecuados. Para Baroody (1988), existen unos niveles típicos de dominio de la lectura y escritura de

números, que coincidirían con números de una cifra, de dos cifras, etc. Insiste este autor en la creciente dificultad con números a partir de la centena.

Ante esta problemática podemos preguntarnos si los errores detectados en el período de aprendizaje institucionalizado, ¿desaparecen al avanzar, tanto en la formación matemática, como en la utilización del sistema de numeración en los distintos contextos? Estudios realizados con alumnos de 11 a 15 años nos muestran como en estas edades aún se detectan dichos errores de forma significativa. En nuestro estudio pretendemos poner de manifiesto errores en el *dominio del valor de posición* en estudiantes que terminan los estudios de Magisterio.

En primer lugar citaremos el estudio llevado a cabo en el Reino Unido por el *Assessment of Performance Unit* (APU), publicado en 1980 en el que se realizaron pruebas escritas a niños de 11 años. Sigue siendo preocupante el porcentaje de fallos correspondiente a algunos ítems relacionados con el sistema de numeración, por ejemplo, solo el 64 por ciento de los niños encuestados responde correctamente al ítem "El número que es una unidad menos que 2010 es ... " (APU, 1980: 38). En 1963 Flournoy, Brand y McGregor, publicaron los resultados de un test realizado con alumnos norteamericanos de grado siete (13 años). Estos resultados formaban parte de un estudio más amplio que abarcaba los grados 4º, 5º, 6º y 7º. El test correspondiente a 7º grado constaba de 25 ítems de elección múltiple y versaba sobre cuestiones relacionadas con el valor de posición en el aspecto de organizar o descomponer un número; diez de los ítems tienen porcentajes de error superior al 50 por ciento, cinco están entre el 30 y el 50 por ciento de error y solo diez presenta un porcentaje de error inferior al 30 por ciento. El ítem con mayor porcentaje de error (83 por ciento), consistía en elegir, de entre cuatro numerales el que correspondía a organizar un cierto número de unidades, decenas, centena y millares.

Otro de los estudios relevantes para nuestro análisis fue el realizado con niños ingleses de 11 a 15 años por el CSMS (*Concepts in Secondary Mathematics and Science)* (Hart y otros, 1981). Uno de los diez temas tratados en este estudio se refiere a "valor posicional y decimales". Dentro del tema del valor posicional, llamamos la atención en relación con seis aspectos que van desde la correspondencia entre "nombre y lugar" hasta el resultado de la división por un múltiplo de una potencia de diez. Del análisis de resultados que revela el citado informe (Brown, 1981: pp 48 y ss), se deduce que el dominio del valor de posición entre los alumnos de 12 a 15 años es muy débil. Así, una o dos preguntas de valor posicional, especialmente las que contenían números superiores a mil, llevaron a dudar aún a niños de rendimiento medio.

Aguilar y Martínez (1996), realizaron un estudio sobre el valor posicional con niños españoles en Cádiz, que abarcaba cinco niveles, desde 4º de Primaria a 8º de EGB. Para este estudio seleccionaron diez ítems de los trabajos señalados por nosotros. Los resultados de este estudio no concuerdan ítem a ítem con los obtenidos en los trabajos originales, pues el porcentaje de aciertos es superior en unos casos e inferior en otros, sin embargo, en una valoración de conjunto, el resultado es muy similar.

Ball (1991) realizó un estudio con futuros profesores de primaria sobre la comprensión del algoritmo de la multiplicación encontrando una relación entre la comprensión del valor de posición y la de los algoritmos.

DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

La muestra está recogida en tres fases; en todas ellas los sujetos estaban formados por alumnos que finalizan los estudios de Magisterio. La primera muestra formada por 467 suje-

tos, correspondía a los alumnos de tercer curso de Magisterio que realizan sus estudios durante el curso 1994/1995 en las tres universidades gallegas en estos centros: Santiago y Lugo, de la Universidad de Santiago; A Coruña de la Universidad de A Coruña; Ourense y Pontevedra, de la Universidad de Vigo. La segunda muestra, con 150 sujetos, se restringió a los alumnos de la Universidad de Santiago, que estaban matriculados, durante el curso 1998/99, en alguna de las cuatro especialidades de Magisterio: Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Musical y Lengua Extranjera. Por último, la tercera fase está formada por 46 alumnos matriculados en la especialidad de Educación Infantil de la Universidad de Santiago durante el curso 2004/2005.

Las muestras corresponden a tres planes de estudio diferentes; la primera muestra corresponde al plan de estudios de 1971, la segunda al plan de 1993 y la tercera muestra corresponde al plan actual (2000). Los alumnos de las dos primeras muestras habían cursado las asignaturas de matemáticas de la carrera mientras que los de la tercera muestra aún no.

Para nuestro estudio se construyó una prueba de 23 ítems. En este trabajo analizaremos solamente los seis ítems que se detallan a continuación; dichos ítems fueron baremados para alumnos de enseñanza secundaria y final de la enseñanza primaria, lo cual nos va a permitir realizar la comparación con los resultados obtenidos por los alumnos de Magisterio.

A continuación se describen dichos ítems:

1.- ¿Cuál de las soluciones (A, B, C o D) significa 25 centenas y 4 decenas?

A - 25040 *B - 2540* *C – 2504* *D - ninguna de las anteriores*

2.- ¿Cuál de los siguientes valores (A, B, C o D) significa 15320 unidades?

A - 15320 decenas *C - 1532 decenas*

B - 15 centenas y 320 decenas *D - 1532 decenas y 20 unidades*

3.- ¿Qué alternativa (A, B, C o D) equivale a...?

Millares	*Centenas*	*Decenas*	*Unidades*
2	*35*	*18*	*6*

A - 3486 B - 5386 *C – 5686* *D - ninguno de los anteriores*

4.- Escribe el número que es 10 veces 100: _____

5.- En el número 1864, ¿cuántas veces el valor representado por el 8 es superior al valor representado por el 4?

A - 2 veces *B - 200 veces* *C - 100 veces* *D - 20 veces*

*6.- ¿Qué relación hay entre el **6** en negrita y el 6 subrayado?*

*6 **6** 6 6*

*A.- El **6** es 10 veces mayor que 6* *B.- El **6** es 100 veces mayor que 6*

*C.- El **6** es 1/10 veces mayor que 6* *D.- El **6** es 1/100 veces mayor que 6*

Estos ítems fueron extraídos de Flournoy y otros (1963: 90-91) y forman parte de un test que se aplicó a alumnos de séptimo grado (Secundaria), en Estados Unidos; a excepción del ítem 4, el cual forma parte de un test elaborado por el *Assessment of Perfomance Unit* (APU, 1980), para niños ingleses de Primaria (11 años). En el estudio deAguilar y Martínez, citado más arriba, se utilizan los ítems 1, 2, 3, 5 y 6

Los objetivos que nos proponemos en este estudio son, por una parte poner de manifiesto los errores referidos al valor de posición de los estudiantes de magisterio y por otra, comparar los resultados obtenidos en los tres planes de estudio y con los resultados obtenidos por los alumnos de secundaria.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Podemos ver en la siguiente tabla los resultados de cada ítem especificando en cada uno de ellos los aciertos, los fallos y las respuestas en blanco.

Ítems	1ª Fase: N = 467			2ª Fase: N = 150			3ª Fase: N=46		
	%Aciert.	**% Fallos**	**% Blanco**	**% Aciert.**	**% Fallos**	**% Blanco**	**% Aciert.**	**% Fallos**	**% Blanco**
1	55,2	39,0	5,8	66,7	30,0	3,3	50,0	43,5	6,5
2	56,1	24,4	19,5	59,4	25,3	15,3	41,3	37,0	21,7
3	34,7	54,0	11,3	36,0	52,0	12,0	24,0	67,4	8,6
4	79,9	16,3	3,8	75,3	24,0	0,7	56,5	39,1	4,4
5	43,2	42,2	14,6	36,0	48,7	15,3	32,6	60,9	6,5
6	44,8	40,2	15,0	48,0	37,3	14,7	37,0	45,6	17,4

Tabla 1: Resultados de cada uno de los ítems en las tres fases de aplicación

Aunque las muestras no son comparables, tanto por el tamaño como por no estar controladas las mismas variables, podemos constatar el bajo porcentaje de aciertos en las tres fases.

Como podemos apreciar, los resultados son bajos, sobre todo si se tiene en cuenta que estos ítems corresponden a contenidos que se supone deberían haber sido adquiridos en secundaria. Los ítems 3, 5 y 6 están por debajo del 50% de aciertos en las tres fases, en la tercera también el ítem 11 está por debajo de esta puntuación. El ítem 3, que fue el que menos porcentaje de aciertos obtuvo en las tres fases, proponía buscar la alternativa equivalente a 2 millares, 35 centenas, 18 decenas y 6 unidades; la solución es 5686 en la que desaparece el 2 de los millares, al analizar las respuestas de los alumnos un porcentaje alto eligen la respuesta *D* (ninguno de los anteriores) lo que nos lleva a un error habitual en alumnos que empiezan a trabajar el sistema decimal. Si nos centramos en los ítems 5 y 6 vemos que los alumnos se pueden encontrar con dos tipos de dificultades: por un lado el valor posicional de cada cifra y por otro la palabra “veces” que resulta ser uno de los tópicos en los errores cometidos por los alumnos.

En la tabla 2 presentamos el análisis comparativo de los resultados obtenidos en Primaria y Secundaria, y los obtenidos en nuestro estudio con alumnos que finalizan Magisterio.

Respecto a la consideración de error en los ítems ya baremados, a excepción del número 4, no fue posible determinar el criterio utilizado en el sentido de saber si engloba o no las respuestas en blanco (excepto el ítem 4 que sí las incluye).

Ítem	Resultados en porcentajes en Primaria y Secundaria		Resultados en porcentajes de nuestro estudio			
	Nivel en el que se baremó	Resultados (errores)	Fases	Aciertos	Fallos	Blanco
1	7º grado	75,47	1ª	55,2	39,0	5,8,
			2ª	66,7	30,0	3,3
			3ª	50,0	43,5	6,5
2	7º grado	64,15	1ª	56,1	24,4	19,5
			2ª	59,4	25,3	15,3
			3ª	41,3	37,0	21,7
3	7º grado	83,02	1ª	34,7	54,0	11,3
			2ª	36,0	52,0	12,0
			3ª	24,0	67,4	8,6
4	11 años	29	1ª	79,9	16,3	3,8
			2ª	75,3	24,0	0,7
			3ª	56,5	39,1	4,4
5	7º grado	69,81	1ª	43,2	42,2	14,6
			2ª	36,0	48,7	15,3
			3ª	32,6	60,9	6,5
6	7º grado	65,09	1ª	44,8	40,2	15,0
			2ª	48,0	37,3	14,7
			3ª	37,0	45,6	17,4

Tabla 2: Resultados de los ítems baremados y de los obtenidos por los sujetos de nuestro estudio.

CONCLUSIONES

A modo de conclusión podríamos señalar algunas que sirvan para reflexionar sobre el conocimiento que, sobre las matemáticas escolares, poseen los alumnos que finalizan los estudios de Magisterio. La mayor parte de los errores que detectamos en este estudio pueden tener su origen en el momento de su aprendizaje institucionalizada (Kamii, 1992; Verschaffel y De Corte, 1996; Lerner y Sadovsky, 1994; etc.). Este momento es por un lado prematuro, en el sentido de que la capacidad intelectual del alumno aún no está suficientemente desarrollada para adquirir tales conceptos; y por otro inadecuado, considerando sin embargo que en la actualidad, y pese a las investigaciones realizadas en este campo, no hay consenso sobre las metodologías más apropiadas.

Las investigaciones realizadas apuntan a que los niños no dominan el valor de posición al terminar el nivel educativo en el que se estudia dicho contenido, lo que en la mayoría de los

currícula sucede alrededor de los diez-once años. El Informe Cockcroft, en el párrafo 342, señala que existe una dispersión de siete años en cuanto al momento en el que se logra la comprensión del valor de posición necesaria para saber qué número es una unidad mayor que 6399; esto significa que mientras que algunos alumnos de catorce años no pueden hacerlo, otros de siete sí pueden (Cockcroft, 1985: 124)

Por otra parte, los contenidos referidos al sistema de numeración decimal, no se tratan en los currícula de matemáticas a partir del quinto año de primaria; pero dichos contenidos serán utilizados en la vida diaria, lo cual puede llevar a la persistencia de errores adquiridos en esa etapa educativa (Salinas, 2003). Aunque en los nuevos planes de estudio ya no hay lugar a dudas sobre la cuestión de la introducción de las matemáticas escolares en los currícula de los futuros maestros, seguimos haciéndonos preguntas acerca de, ¿qué matemáticas?, o, ¿cómo corregir las concepciones erróneas de los estudiantes?

Lo que sí creemos es que los alumnos que inician los estudios de Magisterio no dominan los contenidos referidos a las matemáticas escolares, en el sentido de recordar conocimientos adquiridos en las primeras etapas de la enseñanza.

REFERENCIAS

Aguilar, M. y Martínez, J. (1996). “Las dificultades del aprendizaje de la numeración en la educación primaria”. *Epsilón,* 35, 179 - 192.

ASSESSMENT OF PERFORMANCE UNIT (APU), (1980). *Mathematical Development. Primary Survey Report. Nº 1*. London: HMSO.

ASSESSMENT OF PERFORMANCE UNIT (APU), (1981). *Mathematical Development. Primary Survey Report. Nº 2*. London: HMSO

Ball, D. L. (1991). “Research on teaching Mathematics: Making subject-mather Knowledge part of the equation”, en J. Brophy (Ed.) *Advances in research on teaching*. Greenwich: JAI Pres. (1 - 48).

Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1982). “The understanding of numeration in primary school”. *Educational Studies in Mathematics,* 13 (1), 33 - 57.

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y la teoría de los conjuntos*. Madrid: Visor.

Bromme, R. y Brophy, J. (1986). “Teachers cognitive activites”, en B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel. (99 - 139).

Brown, M. (1981). “Place value and decimal”, en K. M. Hart y otros. *Children´s Understanding of Mathematics 11 - 16*. London: John Murray. (48 - 65).

Carrillo, J. y Climent, N. (Eds.). (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. Por qué? Para qué?* Madrid: Síntesis.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MECFlournoy, F., Brandt, D. y Mcgregor, J. (1963). “Pupil understanding of the numeration system”. *Arithmetic Teacher*, 10, 88 - 92.

Flores, P. (1988*) Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.* Granada: Comares.

Flournoy, F., Brandt, D. y Mcgregor, J. (1963). “Pupil understanding of the numeration system”. *Arithmetic Teacher*, 10, 88 - 92.

Fuson, K. C. (1992). “Research on whole number addition and subtraction”, en D. A. Grows (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan. (243 - 275).

Gómez, B. (1994). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo. Un análisis en la formación de profesores*. Granada: Comares.

Hart, K. M. y otros (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* London: John Murray

Kamii, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

Kamii, C. (1992). *Reinventando la aritmética II*: Madrid. Visor.

Lerner, D. Y Sadovsky, P. (1994). “El sistema de numeración: Un problema didáctico”, en C. Parra e I. Saiz (Comps). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.*

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.

Llinares, S. (1993). “Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje”, en L. Montero y J. M. Vez (Eds.). *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións. (377-407).

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Palhares,P y Gomes,A. (2006). “A formação em matemática para professores do 1º ciclo. Em que bases nos podemos apoiar”. En Palhares,P y Gomes,A (Cds) *Desafios para un novo rumo.* Braga. Universidade do Minho.

Rico, L. (1993). “Mathematics assessment in the Spanish educational system”, en M. NISS (Ed.) *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (9 - 20).

Salinas, M. J. (2003). *Competencia matemática al finalizar los estudios de Magisterio. Explicación mediante un modelo causal*. Tesis doctoral. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.

Verschaffel, L. Y De Corte, E. (1996). “Number and Arithmetic”, en A. Bishop y otros. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: (99 - 137).

ANEXO

RÉPLICAS AL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN II: DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS

IX SIMPOSIO DE LA SEIEM. CÓRDOBA 2005

LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y EL USO DE C.A.S. EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO.

RÉPLICA A LA PONENCIA "LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO HACIENDO USO DE C.A.S. (Computer Algebra System)" DEL PROFESOR MATÍAS CAMACHO

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Jordi Deulofeu (2007). LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y EL USO DE C.A.S. EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO. RÉPLICA A LA PONENCIA "LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO HACIENDO USO DE C.A.S. (Computer Algebra System)" DEL PROFESOR MATÍAS CAMACHO, pp. 393-397.

1. INTRODUCCIÓN

No hay duda que el binomio análisis matemático y TIC's es un aspecto muy relevante de la didáctica de las matemáticas en los niveles avanzados, pero además de relevante plantea un conjunto de retos y problemas de enseñanza-aprendizaje a los cuales la investigación actual trata de dar respuestas, a mi entender todavía parciales, que se enmarcan en una problemática de investigación mucho más general: el uso y la influencia de las TIC's en la enseñanza de las matemáticas.

En mi intervención voy a tratar de subrayar tanto algunas características y resultados de las investigaciones presentadas por el profesor Matías Camacho como también ciertas dificultades y limitaciones de las mismas, y de otros trabajos recientes relacionados con el mismo tema, que a mi entender explican cual es la situación presente de este tipo de investigaciones.

Centrare mis observaciones en dos aspectos complementarios, que también aborda la ponencia que replico: el papel que juegan los sistemas de representación en relación con el análisis matemático y los problemas de transferencia entre distintos entornos, en particular el trabajo con lápiz y papel versus el trabajo con un determinado CAS (Computer Algebra System). Ambos aspectos permiten enmarcar estas investigaciones en el ámbito de la didáctica del análisis matemático.

2. ANÁLISIS MATEMÁTICO Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Hacer ya más de 25 años que Claude Janvier en su tesis doctoral (Janvier, 1978, citada en Janvier 1987) planteó, creo que por primera vez, la importancia de las representaciones en relación con el concepto de función, y la constatación que el núcleo del trabajo con funciones radica en la interpretación que subyace a cada representación, así como a lo que Janvier llamó traducciones de una representación a otra.

El hecho anterior permite explicar en buena parte la relevancia del uso de CAS en el trabajo sobre el análisis matemático, dado que una de las características de aquellos es precisamente la posibilidad de utilizar distintas representaciones de manera simultánea, lo cual facilita la realización de procesos de traducción; pero, al mismo tiempo, se plantea un problema fundamental: el uso de un cierto CAS altera tanto el entorno de trabajo de los estudiantes, como la aproximación a los principales conceptos del análisis: función, derivada, integral, límite.

Mi referencia al concepto de función se debe, por un lado, al hecho que algunas de nuestras investigaciones (Fabra-Deulofeu, 2000, Burrel, 2005, Cuesta, 2005) se centran en dicho concepto en distintos niveles de la educación secundaria, donde el mismo ocupa un lugar central, pero también al hecho que en la mayoría de investigaciones que conozco relacionadas con el análisis, incluidas las que abordan los niveles universitarios, siempre se encuentran referencias (a veces indirectas y a menudo no explícitas) a dificultades de los estudiantes relacionadas con dicho concepto. También en el trabajo que ha presentado el profesor Camacho, al referirse a las dificultades detectadas en los estudiantes cuando aprenden a usar las calculadoras, cita, entre otros, los problemas de interpretación del gráfico de una función: límites de la pantalla al representar la gráfica y consideración de las asíntotas como parte de la función. En varios de nuestros trabajos citados anteriormente, hemos encontrado dificultades muy similares, sin diferencias relevantes debidas al contexto de trabajo: lápiz y papel

o con un determinado CAS. Entendemos que, más allá de los condicionantes del contexto, se trata de un problema de tipo conceptual relacionado con la interpretación del significado de una función expresada a través del lenguaje gráfico, pero aplicable a otros lenguajes de representación.

A pesar de las dificultades que subsisten, aunque muchas veces se presenten de forma distinta, esto no es un impedimento para considerar que el uso de un CAS, como por ejemplo Derive que es uno de los adecuados para la secundaria y en particular para el trabajo con funciones elementales, constituye un potente instrumento para que los alumnos descubran las relaciones de los conceptos que subyacen a las funciones, principalmente por las posibilidades que ofrece para relacionar los distintos lenguajes de representación y también para el trabajo dentro de un mismo lenguaje, especialmente el gráfico.

No obstante, investigaciones como las que presenta en su ponencia el profesor Camacho muestran que no basta con poner un CAS al alcance de los estudiantes para que estos puedan elaborar concepciones coherentes y complejas sobre las funciones o sobre cualquier otro concepto fundamental del análisis. Entonces, para que ello sea posible, es necesario un trabajo extenso que permita, por un lado, familiarizarse con un CAS, y por otro, posibilitar el abordaje de problemas de cierta complejidad, que eviten, por ejemplo, la tendencia al uso de prototipos (Fabra – Deulofeu, 2000, Burrel, 2005), y donde se produzca una auténtica interrelación entre distintos lenguajes y conceptos, con la finalidad de incidir en las concepciones de los estudiantes.

3. LA TRANSFERENCIA ENTRE DISTINTOS ENTORNOS

Uno de los problemas que subyace a muchas investigaciones de este campo y que también la ponencia del profesor Camacho cita como una cuestión por resolver, es la relación y el sentido que tiene el combinar el trabajo con lápiz y papel con el que se realiza mediante el uso de CAS.

En una investigación reciente, Florencio Burrel (2005) constata que alumnos de cuarto de ESO responden de manera distinta a cuestiones similares según se utilice un cuestionario con lápiz y papel o con el uso de Derive. Estos alumnos han trabajado de manera combinada en los dos entornos. Resulta interesante analizar el tipo de respuestas en un entorno y en otro: así, mientras en general las respuestas a través del CAS resultan ser de mayor riqueza, en el sentido que los alumnos son capaces de apoyarse en ejemplos variados, al mismo tiempo tienen un carácter mucho más procedimental (el CAS les permite, efectivamente, realizar cálculos y cambios de representación con mucha más facilidad). En cambio, des de un punto de vista conceptual, las respuestas a través del CAS son, en la mayoría de los casos, bastante más limitadas e incluso presentan un mayor número de contradicciones. Así, se confirma una vez más, la ya mencionada falta de transferencia y la importancia del entorno utilizado que actúa como condicionante, y se constata que, a pesar de su similitud desde el punto de vista del trabajo matemático solicitado, existe muy poca interrelación entre los dos tipos de trabajo.

A nuestro modo de ver, la situación anterior cuestiona algunos de los planteamientos de un gran número de experiencias, donde se alternan las sesiones de trabajo con el ordenador y sin el, algo frecuente en las investigaciones con el uso de CAS.

Por otro lado, la constatación que a través del uso de CAS los estudiantes son capaces de desarrollar un trabajo de carácter procedimental y de mejorar en relación a la capacidad para abordar problemas de cierta complejidad, aún cuando sus concepciones sobre los conceptos manejados son todavía muy limitadas, me lleva a considerar que quizás su utilización debería avanzarse y en todo caso preceder al trabajo con papel y lápiz, puesto que las CAS constituyen un entorno que facilita la experimentación y esta debe estar presente, precisamente, en las primeras fases del aprendizaje de cualquier concepto.

Así pues, entiendo que el uso de CAS plantea de nuevo un viejo problema de la Didáctica de las Matemáticas: el diseño y la organización de secuencias de aprendizaje para un tema determinado. En este sentido, no pretendemos decir que el objetivo sea hallar una secuencia óptima, algo demasiado pretencioso y seguramente inviable, dado el número de factores que inciden en cada situación de aprendizaje, sino que las investigaciones pueden aportar elementos valiosos, como el que acabamos de mencionar, que lleven a priorizar unas determinadas secuencias por encima de otras.

El punto anterior nos lleva a preguntarnos por la diferencia que hay entre las dos experiencias presentadas por Matías Camacho, en relación con el uso de un CAS, y considerar que desde la perspectiva del aprendizaje es importante que el uso del ordenador no se limite a unas sesiones puntuales, ya que sólo un trabajo largo en el tiempo puede posibilitar la reflexión y las necesarias puestas en común sobre conceptos y procesos complejos, como son los del análisis matemático.

En este sentido, entendemos que la primera de las investigaciones presentadas en la ponencia va en esta línea, al centrarse en la influencia que un CAS determinado tiene en el uso de las representaciones por parte de los estudiantes. Aún así, el análisis de los resultados permite constatar, a través de los perfiles de actuación de los estudiantes, que solamente una parte de ellos fue capaz de utilizar las auténticas potencialidades del CAS.

4. CONSIDERACIONES FINALES

A pesar de las dificultades reflejadas por muchas investigaciones en relación con el aprendizaje de los aspectos de carácter conceptual, el uso de CAS es una herramienta potente para el trabajo relacionado con el análisis matemático. Además de un instrumento para “liberar al estudiante de memorizar fórmulas y procedimientos de cálculo”, como expresa el profesor Camacho en sus conclusiones, el uso de software permite ampliar el significado del análisis para los estudiantes, desde un conjunto de técnicas para resolver ejercicios más o menos complejos, a una disciplina que tiene por objetivo en la educación secundaria, dar cuenta de cómo cambian unas magnitudes que dependen de otras, y como se puede conocer este cambio a través de conceptos como la tasa de variación y la acumulación de dicha tasa de variación. Algunos de los ejemplos presentados en la ponencia muestran claramente esta característica, al posibilitar el uso de estrategias que utilizan la representación gráfica, entre otras cosas, para el cálculo de integrales.

Por otra parte, es fundamental diseñar, realizar y evaluar secuencias de enseñanza-aprendizaje que potencien el carácter experimental que posibilita el uso de CAS, relacionado con los distintos conceptos del análisis; en dichas secuencias el uso del ordenador debe ser exten-

so y continuado. Esto no excluye, sino que prepara y complementa, un trabajo de tipo teórico y de manipulación simbólica igualmente importante y necesario en los niveles avanzados.

En definitiva, el uso de CAS puede actuar de catalizador para seguir repensando la didáctica del análisis, iniciada poco antes de la aparición de aquellos, tratando de presentar a los estudiantes secuencias de enseñanza-aprendizaje que promuevan la experimentación, la relación entre lenguajes y la búsqueda de estrategias propias para la resolución de problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002) Learning mathematics in a CAS environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* Vol 7 (3), p. 245-274.

Borba, M.C. – Confrey, J. (1996) A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics,* 31, 3.

Burrel, F. (2005) *Movilización de los procesos de pensamiento de los alumnos en un entorno de múltiple representación: Los modelos elementales de funciones.* (trabajo de investigación no publicado). Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona

Camacho, M. (2005) La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS. *Investigación en Educación Matemática. Actas del IX Simposio de la SEIEM.* Córdoba. p. 97-110.

Camacho, M., Depool, R. (2003) Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (CAS) Derive. Educación Matemática 15(3), 119-140.

Cuesta, A. (2005) *Dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función.* Tesis de maestría. Universitat Autònoma de Barcelona.

Fabra, M., Deulofeu, J. (2000) Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Relime*, vol 3, 2, p. 207-230.

Janvier (1978) The interpretation of complex Graphs. Ph D Thesis (no publicada). University of Nottingham

Janvier (1987) Representations and understanding: The notion of function as an example. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematicas.* NJ: Lawrence Erlbaum A.

Tall (1996) Functions and Calculus. En *International Handbook of Mathematics Education.* Bishop et al (Ed.). Dordrecht (Netherland): Kluwer A. P.

Valldeperez, C., Deulofeu, J. (2000) Las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables. *SUMA*, 33, p. 73-81.

Yerushalmy, M. (1997) Reaching the Unreachable: Technology and the Semantics of Asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning.* Vol 2, 1.

RÉPLICA À CONFERÊNCIA: UMA APROXIMAÇÃO ONTOSEMIÓTICA DA DIDÁCTICA DA DERIVADA DO PROFESSOR VICENÇ FONT

António Domingos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
António Domingos (2007). RÉPLICA À CONFERÊNCIA: UMA APROXIMAÇÃO ONTOSEMIÓTICA DA DIDÁCTICA DA DERIVADA DO PROFESSOR VICENÇ FONT, pp. 399-403.

Neste comentário à conferência do Professor Vicenç Font centrar-me-ei essencialmente nos aspectos relativos à teoria das funções semióticas, o papel das representações externas (ostensivas) presentes no estudo da função derivada e a complexidade semiótica que este estudo envolve. Sempre que seja oportuno farei referência ao caso português, utilizando para tal dados empíricos recolhidos junto de alunos do ensino superior, que frequentavam pela primeira vez a disciplina de Análise Matemática.

De um modo global considero que esta conferência traz um grande contributo para toda a comunidade de educadores matemáticos que se interessam pelo ensino e aprendizagem da Matemática, quer pela teoria apresentada, quer pela análise que é feita dos dados empíricos que representam uma diversidade de abordagens presentes em diversos sistemas de ensino.

No que se refere à aproximação ontosemiótica podemos considerar que se trata de uma ferramenta poderosa que nos permite desenhar abordagens didácticas bastante completas dos conceitos matemáticos, bem como analisar em profundidade a compreensão que os alunos manifestam desses mesmos conceitos. Ela partilha dos mesmos pressupostos gerais que outras teorias defendidas por autores como Anna Sfard (teoria da reificação), David Tall (visão proceptual dos conceitos) ou Ed Dubinsky (teoria APOS), para citar apenas alguns dos que se têm dedicado ao estudo dos conceitos matemáticos no domínio do pensamento matemático avançado, tem no entanto especificidades que lhe conferem características próprias que permitem uma análise mais profunda da natureza desses conceitos.

O modo como a teoria aborda os objectos matemáticos e a sua emergência mostra-nos uma das suas faces mais importantes. O facto de considerar que estes objectos têm a sua origem nas práticas e não se cingem apenas aos conceitos acabados, podendo ser também considerados como tal a *linguagem*, *acções*, *argumentações*, *propriedades* e *situações problemáticas*, reforça a dimensão construtivista da aprendizagem bem como o papel desempenhado pelos contextos onde essa prática se encontra inserida. A distinção entre os objectos institucionais e pessoais vem reforçar a ideia anterior diversificando os significados e sentidos que podem ser atribuídos a estes mesmos objectos. Desta forma podemos fazer a distinção entre os diferentes significados (institucional de referência, institucional pretendido, institucional implementado e institucional avaliado) que o conceito apresenta e aqueles que o aluno pode manifestar (pessoal global, o declarado e o obtido). Esta distinção é fundamental para o desenho didáctico de situações de ensino dos conceitos a estudar. É ainda com base nas práticas que se estabelece uma outra ferramenta, as configurações (cognitivas ou epistémicas), que se tornam fundamentais no ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Ao realizar e avaliar as práticas desenvolvidas na resolução de um determinado problema matemático podemos ter acesso a um conjunto de objectos matemáticos traduzidos pelas representações tornadas externas (ostensivas) que nos permitem estabelecer as configurações presentes nessa prática e desta forma compreender a estrutura cognitiva que lhe está associada.

A escolha do sistema de práticas como forma de originar os objectos matemáticos é bastante rica, mas ao mesmo tempo complexa. A necessidade de ter que considerar em simultâneo os objectos que emergem das práticas e os que intervêm nas mesmas interpretando o jogo de linguagem que se estabelece entre ambos (dualidades cognitivas) introduz um grau de complexidade bastante elevado que passa pela dificuldade em articular todas as dimensões presentes. A sua riqueza reside no facto de permitir conhecer em profundidade a compre-

ensão que os alunos manifestam do conceito (objecto), ainda que nem sempre seja possível estabelecer generalizações dentro de um mesmo grupo que esteja sujeito a uma determinada abordagem didáctica.

O ensino de um dado conceito com o objectivo de que os alunos tenham uma compreensão efectiva do mesmo é uma das principais preocupações que o professor deve ter. No caso concreto do conceito de derivada é apresentada uma configuração epistémica, baseada num questionário que recorre à função exponencial. Esta configuração tem em conta a construção do conceito, partindo de uma abordagem operacional (no sentido que é dado ao termo por Anna Sfard) que se baseia em algumas das suas representações externas (ostensivas) sem esquecer todo um conjunto de outros objectos que são necessários para a tradução entre estas representações (linguagem, situação problema, acções, argumentos, propriedades prévias e emergentes e conceitos prévios e emergentes). Esta configuração apresenta-se como um bom exemplo para introduzir o cálculo da derivada nalguns casos concretos (funções lineares, exponenciais e logarítmicas), destacando no entanto o papel desempenhado pelas representações externas que são activadas com o seu cálculo. Como se mostra no texto o cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ corresponde a uma prática que activa várias das representações externas que vão sendo convertidas umas nas outras, nomeadamente, traduções e conversões entre distintas formas de representar a função $f(x)$, a passagem de uma representação de $f(x)$ para outra forma de representação de $f'(x)$ e traduções e conversões entre diferentes formas de representar $f'(x)$. A forma como estas representações são activadas e a tradução que é feita entre elas tornam-se determinantes na forma como o conceito é compreendido pelos alunos. Uma das vantagens deste tipo de abordagem é a que permite diversificar as técnicas de cálculo da função derivada sem recorrer a técnicas como as regras de derivação ou o uso de limites.

Dada a diversidade de representações presentes no cálculo da função derivada, a tradução que é feita entre elas e os objectos que intervêm nessa tradução é de esperar que esteja presente uma complexidade semiótica que pode variar com a forma como as representações são activadas e o modo como as traduções entre elas são feitas. Como é referido no texto esta complexidade pode ser reduzida ou aumentada dependendo do modo como a prática é realizada. É neste tipo de situações que a teoria da aproximação ontosemiótica se revela como uma ferramenta poderosa para reduzir esta complexidade desenhando contextos de prática que conduzam ao significado institucional dos objectos matemáticos. Nestes contextos é quase sempre possível observar o aparecimento de conflitos semióticos (termo com significado semelhante ao utilizado por Tall e Vinner, quando se referem a conflito cognitivo potencial ou actual) e que se traduz numa discrepância entre os significados que o aluno e o ensino atribuem a uma mesma expressão ou conceito. Tomando como exemplo o caso português, num estudo realizado com alunos do primeiro ano do ensino superior na disciplina de Análise Matemática (Domingos, 2003), foi possível observar alguns destes conflitos. Quando se procurou saber o que significava dizer que uma função tinha derivada num ponto, um aluno fez uma interpretação geométrica dizendo que "é o declive da recta tangente ao gráfico no ponto", no entanto não conseguiu relacionar a afirmação que fez com a definição de derivada ($\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$), que entretanto também não sabia representar simbolicamente. Noutro caso o aluno relaciona a derivada com o declive da recta tangente ao gráfico no ponto e consegue escrever a definição simbólica, no entanto quando se pretende que dê uma interpretação geométrica da definição que escreveu não consegue fazer a tradução entre ambas as representações. Este tipo de resultados foi comum à maioria dos alunos entrevistados, revelando

uma compartimentação entre as várias representações do mesmo conceito. Ainda que não fizesse parte dos objectivos do referido estudo, parece que o tipo de ensino ministrado pode ter contribuído para o aparecimento deste tipo de conflitos. O conceito de derivada foi abordado nas aulas a partir da sua definição formal (ainda que a sua introdução já tenha sido feita em anos anteriores) pondo desta forma em destaque a parte intensiva da dualidade intensivo/extensivo. Desta forma as regras do jogo de linguagem que são referidas no texto como determinantes para que os alunos possam compreender a complexidade semiótica associada a estas práticas não foram adquiridas pelos alunos levando-os a considerar cada uma das representações anteriores como constructos distintos. Os exemplos apresentados pelo autor no texto sobre esta dualidade extensivo/intensivo são reveladores do papel que é desempenhado pelo jogo da linguagem que se estabelece entre o professor e os alunos, onde, por vezes, estes últimos têm dificuldade em participar. O estabelecimento de normas sociomatemáticas que privilegiem aulas de natureza inquiridora (no sentido que é dado ao termo por Cobb e Yackel) podem revelar-se como facilitadoras deste jogo de linguagem.

Na parte final do texto é feita referência à implementação de um processo de ensino no estudo da derivada de uma função, onde com base nos constructos elaborados pela teoria da aproximação ontosemiótica se pretendia passar da derivada de uma função num ponto para a função derivada. As principais conclusões apresentadas são muito semelhantes às encontradas no estudo referido anteriormente com alunos portugueses.

Uma das conclusões está relacionada com o tempo disponível para implementar o estudo do conceito de derivada, que se revelou bastante insuficiente, levando a que não fossem tidos em conta os conhecimentos prévios dos alunos. O conceito foi introduzido a partir da sua definição formal referindo-se a objectos matemáticos que os alunos não conseguiam descapsular (no sentido que é dado ao termo por Ed Dubinsky) e revelando-se desta forma geradores de conflitos semióticos potenciais.

Outra das conclusões que se pode destacar refere-se ao significado pessoal que os alunos têm dos objectos que foram estudados anteriormente, que difere do significado institucional pretendido, revelando-se insuficiente para a compreensão deste, mostrando-se por vezes irrelevante no contexto em estudo.

O recurso à definição (limite da razão incremental) como forma de introduzir o conceito de derivada revelou-se bastante complexo quando se pretendeu que os alunos fizessem a tradução entre esta representação e a sua interpretação geométrica. Esta dificuldade parece ser um indicador da complexidade semiótica que está presente na definição. Quando esta tradução é feita, com a ajuda do investigador na situação de entrevista semi-estruturada com características de experiência de ensino (Domingos, 2003), os alunos revelam ser capazes de atribuir aos objectos em causa um significado pessoal bastante próximo do significado institucional pretendido. Esta abordagem vem reforçar as potencialidades referidas anteriormente da aproximação ontosemiótica da didáctica da derivada, mostrando ser possível criar contextos de aprendizagem autênticos onde a reificação dos objectos matemáticos se torna num lugar comum em todo o processo.

REFERÊNCIAS

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados - a matemática no início do superior* (tese de doutoramento não publicada, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa). Lisboa.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Em D. Tall

(Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Tall, D. e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D., Gray, E., Ali, M. B., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. e Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 81-104.

Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

RÉPLICA A LA PONENCIA “EL PAPEL DE LA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO: EVOLUCIÓN, ESTADO ACTUAL Y RETOS FUTUROS” DE LA PROFESORA MAR MORENO

Mª Teresa González Astudillo
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales
Universidad de Salamanca

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Mª Teresa González Astudillo (2007). RÉPLICA A LA PONENCIA “EL PAPEL DE LA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO: EVOLUCIÓN, ESTADO ACTUAL Y RETOS FUTUROS” DE LA PROFESORA MAR MORENO, pp. 405-414.

1.- INTRODUCCIÓN

Desde las primeras investigaciones realizadas en torno a los conceptos del Cálculo los resultados obtenidos han sido unánimes en la confirmación de que la enseñanza-aprendizaje de esta parte de las matemáticas es un proceso complejo que genera múltiples dificultades tanto a los alumnos como a los profesores, y tanto en el nivel de secundaria como en el superior. La raíz del problema, según los investigadores, reside fundamentalmente en la problemática noción de infinito y, por lo tanto, en todos los procesos en los que interviene el paso al límite. Desde el punto de vista práctico, para salvar esta dificultad conceptual se suele centrar la enseñanza en procurar que los alumnos adquieran ciertos automatismos de cálculo que les permita tener éxito en las tareas que han de realizar, y posteriormente se evalúan las capacidades adquiridas de esta forma. Pero a medida que se van complicando los conceptos y se necesita una mayor comprensión conceptual, el fracaso, los errores, las concepciones erróneas y las dificultades se van acentuando. Las principales dificultades que tienen los alumnos se pueden clasificar en tres grandes grupos (Artigue, 1995):

- Las relacionadas con los conceptos básicos del cálculo: número real, sucesión, función
- Las asociadas con el concepto de límite y su formalización
- Las asociadas con la ruptura con el pensamiento algebraico y la adquisición de las formas del pensamiento específico del Análisis.

En definitiva, los alumnos no son capaces de alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de este campo de las matemáticas. De ahí la necesidad de seguir profundizando en el conocimiento de todos los aspectos que forman parte de la instrucción, y concretamente en la enseñanza. La ponencia de Moreno se centra precisamente en la enseñanza de los conceptos de Cálculo.

Inicialmente, a partir del título de la ponencia, *el papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo,* pensé que el contenido iba a tratar de cómo habían ido evolucionando los problemas que aborda la didáctica de la matemática para resolver las dificultades que entrañaba la enseñanza del Cálculo. Es decir, supuse que el centro de interés iba a estar puesto en la investigación en Didáctica y en las aportaciones que ésta había hecho en la enseñanza del Cálculo. El hecho de que se incluyera la *evolución, estado actual y retos futuros*, me reafirmó en mi idea, suponiendo que lo que se pretendía era partir de los resultados que se habían obtenido, para comprender cómo se estaba enfocando actualmente la investigación, cuáles eran los problemas, líneas de investigación y métodos que estaban vigentes y poder encarar los retos que deparaba el futuro de la didáctica del Análisis.

En este sentido, para mí, fue una sorpresa la lectura de esta ponencia, puesto que, creo que el enfoque no está puesto tanto en los avances de la investigación en didáctica como en la problemática de la enseñanza del Análisis Matemático. Por ello he realizado una réplica que se basara en la información que se ofrece en ella aunque adaptándola para darle la orientación que en el primer momento me sugirió el título.

Partiendo de esta base, desde mi punto de vista esta ponencia está engarzada en torno a una línea argumental en la que se pueden identificar tres ideas diferentes pero, a la vez, interrelacionadas:

- Las características de la enseñanza universitaria hasta el momento.
- Los intentos de reforma que se han realizado en diferentes países para mejorar la com-

prensión del Cálculo en el nivel universitario.

- La necesidad de conocer el pensamiento y la práctica profesional de los enseñantes para poder mejorar esta práctica en el futuro desde la Didáctica de la Matemática.

Intentaré analizar cada uno de estos puntos para profundizar en las aportaciones que creo que realiza esta ponencia para finalmente establecer algunos comentarios que pueden dar lugar al debate.

2.- EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

En general, los primeros cursos de enseñanza universitaria, que es donde fundamentalmente se han realizado las investigaciones en didáctica de la matemática, están centrados en torno a los conceptos del Cálculo y del Álgebra Lineal, y en algunos casos también se incluye la Estadística. No hay uniformidad en los contenidos del Cálculo que se enseñan en los diferentes países ni siquiera en las universidades de un mismo país. Pueden variar desde un Cálculo muy informal e intuitivo hasta el estudio del Análisis Matemático desde un punto de vista estrictamente formal. Los tópicos principales que se suelen incluir son: funciones, límite, continuidad, convergencia, diferenciación, integración, el teorema fundamental del cálculo, ecuaciones diferenciales, series de potencias, series de Fourier y aplicaciones de estos conceptos. La mayoría de estos conceptos adquirieron su estado actual en torno a los siglos XIX y XX con un objetivo unificador y de formalización claro (Harel y Trgalovà, 1996).

Hay, en cambio, bastante uniformidad en cuanto a la forma de enseñanza que impera en las aulas universitarias. Ésta se realiza principalmente a través de la clase magistral, con algunas clases de prácticas o problemas, muy pocas evaluaciones o exámenes y una gran independencia del alumno que debe realizar el estudio fundamentalmente en solitario (Robert, 1996). Incluso los intereses, habilidades, motivaciones, hábitos de estudio y actitudes de los alumnos muchas veces, fuerzan al profesor hacia un discurso distinto del que supondría una enseñanza alejada de los métodos tradicionales, y así se señala en la ponencia que los alumnos prefieren el "énfasis en las destrezas procedimentales ... frente a otros que supongan un aprendizaje significativo y relacional" (Moreno, 2005). Además no están interesados en la epistemología de las matemáticas o en su historia, se bloquean para hacer preguntas y esperan que el profesor les proporcione métodos matemáticos listos para utilizar más que involucrarse en actividades que requieran un conocimiento profundo de los conceptos y la realización de actividades que supongan una actitud más investigadora.

En cuanto a los profesores universitarios, suelen estar involucrados en numerosas actividades que muchas veces implican una saturación: la docencia, su propia investigación que es donde suelen centrar sus esfuerzos, la mayoría de las veces también la gestión, por lo que su motivación e implicación en relación con la docencia, junto con una infravaloración de la didáctica de la matemática, les impide estar en contacto con la investigación en educación matemática o simplemente identificarse con métodos de enseñanza más actuales. Esto ha hecho que desde la Didáctica de la Matemática se hayan realizado investigaciones en torno a la enseñanza del cálculo y que se hayan propuesto algunas innovaciones en torno a la enseñanza universitaria.

En la forma de secuenciar la instrucción de los conceptos del Cálculo, muchos educadores matemáticos están de acuerdo en que no debe realizarse en un corto periodo de tiempo de dos o tres cursos, sino que debería ser un proceso largo que empezara en la enseñanza elemental, continuara en la educación secundaria y culminara en la enseñanza superior. Este proceso es-

taría determinado por tres fases: *intuitiva*, *pragmática* y *formal*. La fase intuitiva comenzaría en la enseñanza elemental a partir de nociones relacionadas con el cambio y la variación en la vida diaria y en situaciones físicas y serviría como fundamento de las ideas del Cálculo. La fase pragmática sería exploratoria más que formal pero en ella se introducirían algunos de los conceptos clave del Cálculo. Finalmente en la tercera fase, los alumnos utilizarían el lenguaje formal junto con el rigor y la demostración.

A partir de estas ideas y enlazando con lo que será el próximo punto ¿cuál es el estado actual de la enseñanza del Cálculo en las universidades españolas? ¿Sería posible desarrollar en ellas un sistema de enseñanza del Cálculo innovador? ¿Está colaborando nuestra área de conocimiento con los departamentos involucrados en la enseñanza de esta materia?

3.- REFORMAS EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

En este momento, estamos embarcados en un movimiento de reforma profunda de la enseñanza universitaria por la adaptación de las estructuras y prácticas de las universidades de los países de la Unión Europea a un Espacio común de Educación Superior, por lo que creo que todos estaremos de acuerdo que el tema de la ponencia *la enseñanza del Cálculo* es de plena actualidad.

Además, las investigaciones de Didáctica de la Matemática correspondientes al nivel de enseñanza universitaria, están casi enteramente relacionadas con la enseñanza del Cálculo como lo demuestra el contenido de la obra *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991) y como consecuencia de las dificultades y concepciones que los alumnos arrastran de su paso por las enseñanzas medias. Esto también ha sido la causa, y así se indica en la ponencia, para el desarrollo de Proyectos de innovación tanto en el nivel de educación secundaria como en el superior. Pero, como indica Artigue (1995) la mayoría de estos proyectos de innovación se han realizado de forma independiente a la investigación existente.

Estas reformas que han ido surgiendo para dar soluciones, y que se mencionan en la ponencia, se pueden clasificar desde ángulos muy diversos: según el peso que tienen en ellas las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, según el marco teórico que las sustenta, …, pero en este caso, he utilizado otra clasificación en dos bloques. Un bloque estaría formado por aquéllas que, aunque se han desarrollado en torno a los conceptos del Análisis, las premisas de las que parten y los planteamientos que desarrollan, son comunes a otras ramas de las Matemáticas y a otros niveles educativos, por lo que no considero que se deban incluir en investigaciones ligadas exclusivamente a la enseñanza del Cálculo. Dentro de este bloque estarían: el "Proyecto de Cálculo en Contexto", el "Proyecto de Debate Científico" y las investigaciones que ponen el énfasis en la modelización.

Así, el "Proyecto de Cálculo en Contexto" cuyo objetivo es "que los estudiantes construyan las matemáticas a través de sus aplicaciones" (Moreno, 2005) podría resultar también beneficioso no sólo para los alumnos de la licenciatura de matemáticas sino para todos aquéllos que tienen una materia de Cálculo entre sus enseñanzas si se permitiera el análisis de situaciones relacionadas con los ámbitos profesionales de los alumnos, incluso para otras ramas de las matemáticas como podría ser, por ejemplo, la Estadística y otros niveles educativos para promover la comprensión de los conceptos en el contexto en el que adquieren sentido. No tenemos más que recordar las palabras de Freudenthal (1980).

> "la perspectiva correcta se da principalmente a partir del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección. No: primero hacer las matemáticas y después regresar al mundo real, sino el mundo real primero y después la matematiza-

> ción… Al enseñar a matematizar, el mundo real esta representado por un contexto significativo que involucra un concepto matemático. Significativo, por supuesto, quiere decir que significativo para quienes aprenden. Las matemáticas deberían ser enseñadas en contextos".

para apoyar esta idea.

Como contraposición a la enseñanza algorítmica que se ha venido realizando hasta el momento y que permite al alumno, mediante la memorización de unas cuantas reglas, tener éxito en la realización de las tareas que se le proponen, nacen proyectos como el "Proyecto de Debate Científico" que se apoya en la idea de que "los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos mediante la introducción de diferentes conceptos del cálculo en el contexto de problemas científicos matemáticas" (Moreno, 2005), una idea que no es exclusiva del Análisis Matemático y que salvando las diferencias de nivel también se ha intentado en el nivel secundario bajo el slogan de que para "saber matemáticas hay que hacer matemáticas" ya que permitiría utilizar ciertos procesos mentales que no se ponen en práctica en la enseñanza tradicional de la matemática como son los de conjeturar, modelizar, tantear, comprobar, ejecutar, demostrar, aplicar ... (Sierra y González, 2001).

Considerando el término modelo como la generalización conceptual que es abstraída de un grupo de experiencias con el propósito de categorizar y sistematizar nuevas experiencia, las reformas basadas en la modelización, engloban a las dos anteriores ya que entronca con la idea de que hacer matemáticas implica desde la identificación de una situación como problema hasta la utilización o creación de los instrumentos matemáticos adecuados para su resolución y la devolución de esta a la situación de partida. La modelización permite motivar a los estudiantes e iniciarles en la actividad propia de los matemáticos. Así son muchos los investigadores que consideran clave el uso de las matemáticas en contextos reales para la adquisición de los conceptos y que sugieren la utilización de ordenadores puesto que gracias a ellos se puede disponer de la simulación de fenómenos físicos que son de gran ayuda en la generación de procesos de matematización y formación de conceptos (Hitt, 1993). En este mismo sentido Harel (1985) formuló el *principio de necesidad* por el que las actividades deben ofrecer situaciones problemáticas que sean realistas y apreciadas por los alumnos "para que los alumnos aprendan, deben ver una necesidad para lo que se les intenta enseñar. Por necesidad se quiere decir necesidad intelectual, como opuesta a una necesidad social o económica".

Otro bloque está formado por las reformas mencionadas en la ponencia, que por el contrario, están ligadas de una forma u otra de los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo exclusivamente en relación con los contenidos del Cálculo, y por tanto, no provienen de premisas generales aceptadas en torno a la educación matemática. Dentro de este grupo están: la ingeniería didáctica, las que han hecho del ordenador el centro de enseñanza y las propuestas de enseñanza que siguen el modelo APOS.

La ingeniería didáctica de Artigue, aunque forma parte de un proyecto amplio que abarca todas las matemáticas, está construida a partir de investigaciones centradas de manera totalmente explícita en los conceptos del Análisis y las dificultades que entraña su aprendizaje. La comprensión de todos los procesos involucrados en el aprendizaje son el punto de partida para el diseño de las situaciones de enseñanza. Así, se realiza un estudio epistemológico en el que la clave es el estudio histórico de los problemas tanto de matemáticas como externos a ellas que han dado origen a los conceptos del Análisis, se completa con un estudio didáctico ligado a la evolución de la enseñanza de estos conceptos, la selección de conteni-

dos, su secuenciación, los hábitos y los debates que han acompañado a esta evolución, y un análisis cognitivo relativo a las concepciones de los alumnos. A partir de los resultados de estos estudios se hace el diseño de las secuencias de enseñanza que se planifica en forma de "debate científico" a partir de las conjeturas de los alumnos o de las propuestas que hace el profesor, procura la interacción de los diferentes sistemas de representación propios del Análisis Matemático fundamentalmente los enfoques algebraico y gráfico, se apoya en el uso de ordenadores para facilitar el acceso al registro gráfico y finalmente estudia la viabilidad de las propuestas generadas.

Aunque podría pensarse que el utilizar los ordenadores para la enseñanza debería haberlo incluido en el bloque anterior, son precisamente las formas de representación en Análisis Matemático las que sirven a los propósitos de Tall cuando diseña su software. La idea que sirve de base es la de introducir los conceptos del Análisis sin que intervenga el concepto de límite considerando el Análisis como "el estudio del cambio y la acumulación cuantificables y en la relación entre los dos" (Kaput, 1992). Otra aportación de los ordenadores tiene que ver con un papel directo y concreto en relación con la visualización debido a las maneras en que pueden generar gráficas matemáticas (Zimmermann y Cunningham, 1991) tanto estáticas como dinámicas e interactivas que es un aspecto clave en la comprensión de los conceptos del Cálculo. A partir de ellas se pueden crear intuiciones que permitan dar sentido a las definiciones formales, establecer relaciones entre los objetos matemáticos y servir de vehículo para la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático (Guzmán, 1996). La mayoría de las investigaciones e innovaciones relacionadas con la enseñanza del Análisis Matemático tienen en cuenta estos aspectos relacionados con la introducción de las nuevas tecnologías en el aula bien a partir de:

- El diseño de micromundos de simulación de diversas situaciones matemáticas o físicas.
- Las potencialidades que permite la gestión simultánea y dinámica de diferentes registros de representación semiótica de las funciones
- El uso de software de cálculo simbólico como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA,…

Por último, el modelo APOS, aunque no es exclusivo de los conceptos del Análisis, sí los incluye, así como todos los conceptos matemáticos de nivel superior que están relacionados con el denominado Pensamiento Matemático Avanzado. Este modelo, con una fuerte influencia piagetiana, tiene en cuenta aspectos cognitivos por medio de la identificación de los procesos de abstracción reflexiva que permiten establecer la descomposición genética de los conceptos matemáticos. Estos procesos de abstracción ponen en evidencia la construcción jerárquica que procede desde la acción a los procesos, la encapsulación en objetos y finalmente la construcción de esquemas más complejos. A partir de los análisis efectuados en torno a los conceptos se construyen productos de enseñanza utilizando lenguajes de programación como ISETL desarrollado por Dubinsky (1994) diseñando diferentes tipos de actividades que permiten el paso por los diferentes niveles de la jerarquía establecida.

Hasta aquí se han revisado las reformas en la enseñanza del Cálculo mencionadas en la ponencia. Estas reformas por un lado no completan todo el panorama de la investigación en Didáctica del Análisis y además quedan algunas preguntas pendientes. Puesto que hay muchos elementos en común entre las distintas líneas de investigación: la utilización de las nue-

vas tecnologías, la actividad del alumno, la generación de actividades basadas en contextos reales, el conocimiento de los procesos que utiliza el alumno para alcanzar la comprensión de los conceptos... ¿No podrían unificarse para crear una única línea de investigación más fuerte que tenga mayor impacto en el sistema universitario? El que cada escuela de pensamiento insista en sus propios planteamientos ¿no limita la fuerza de éstos por estar circunscrita simplemente a su ámbito de influencia?

En realidad solo se ha planteado la filosofía de estas reformas, en cuanto a los resultados obtenidos ¿qué fortalezas y debilidades implican en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Cálculo?

La puesta en práctica de estas reformas involucra a todos los agentes educativos ¿en qué forma han intervenido cada uno de ellos? ¿Cuáles han sido las presiones, aportaciones, necesidades que han tenido que superar? ¿Cómo se ha realizado la formación de los profesores que han intervenido en estas reformas?

4. CREENCIAS DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL UNIVERSITARIO

La mayor aportación de esta ponencia es la relativa a la exposición del trabajo de Moreno sobre concepciones y creencias de los profesores universitarios acerca de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Se trata de un trabajo pionero en la investigación en Didáctica de la Matemática en España puesto que son pocos los trabajos que han abordado el pensamiento de los profesores de la enseñanza superior. Está enmarcado en la línea de investigación de Thompson (1992) en un momento en el que parece que el centro de interés de las investigaciones en didáctica de la Matemática se ha desplazado desde el alumno hacia el profesor y en el que se utiliza una metodología estrictamente cualitativa, por lo que podemos considerarlo como el prototipo de las investigaciones de los inicios del siglo XXI (Sfard, 2005).

Dos son los propósitos de este trabajo:

- Por un lado ofrecer una descripción de los perfiles de los profesores según su práctica docente.
- Por otro lado, valorar estos perfiles a partir del nivel de coherencia entre sus concepciones y creencias.

Los perfiles determinados por Moreno tienen sus antecedentes en Carrillo (1998) y en los descritos por Thompson (1992) y vienen determinados por la concepción que tiene el profesor acerca de las Matemáticas, de su práctica docente y las creencias sobre cómo debería ser esta última. Están caracterizados por los aspectos en los que pone el énfasis el profesor: en la estructura conceptual de la materia, en la práctica y aplicaciones, o bien en el alumno a los que asigna respectivamente los epígrafes de dogmático-conservador, instrumental y pragmático-constructivista.

Pero desde mi punto de vista, la gran aportación de la investigación de Moreno reside en el segundo punto. No se trata tan solo de inscribir a un profesor en un perfil o tendencia como indicaría Contreras (1999), sino de estudiar la coherencia en sus concepciones y creencias para, a partir de ellas, poder incidir en su formación didáctica. De esta forma la clasificación que se hace de los profesores no depende tanto de sus perfiles como de la coherencia que existe entre los aspectos que se han analizado en esta investigación.

Entre los resultados obtenidos, un asunto preocupante desde el punto de vista de la Didác-

tica de la Matemática es el que podemos asociar con los profesores encuadrados en el grupo I. Es decir, aquellos profesores que son los menos coherentes y consistentes, según se deduce de su mayor capacidad de reflexión y autocrítica. Según se indica en la ponencia, estos profesores "están convencidos que seria necesario buscar la parte mas significativa de las ecuaciones diferenciales, aproximarse más a los intereses de los estudiantes y de las profesiones en las que se están formando". Son esos mismos profesores los que indican que no disponen ni del tiempo ni de los medios adecuados y que carecen de la formación adecuada para progresar como docentes. Uno de los profesores indica que no tiene la formación suficiente de modelos químicos y biológicos para dar explicaciones convincentes y que existe una falta de textos y materiales didácticos adecuados.

En cuanto a los profesores del grupo II, los más coherentes y consistentes, se indica en el texto que "aleja cualquier expectativa, por parte de los investigadores de cualquier tipo de cambio o puesta en práctica de una experiencia de innovación". Desde mi punto de vista esta resulta ser una afirmación bastante tajante, quizás yo no disponga de los datos necesarios para determinar cómo se ha llegado a esta conclusión pero creo que también podría hacerse una segunda lectura. Es posible que por falta de tiempo, de ganas, de información, de conocimiento de alternativas, esos profesores se encuentren en esa posición y que el profesor sienta la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren su efectividad en el aula.

Actualmente algunos investigadores (Speer 2005) ponen en tela de juicio las investigaciones en las que se estudia la coherencia entre las creencias manifestadas por los profesores y las que les atribuyen los investigadores a partir de su práctica docente. Consideran que estas coherencias o incoherencias son el resultado de los artefactos metodológicos utilizados y no provienen de una reflexión ajustada por cuanto muchas veces los investigadores y los profesores no comparten los mismos significados de los términos relacionados con la enseñanza o como consecuencia de la falta de coordinación entre los datos obtenidos en torno a las creencias y los datos obtenidos a partir de la práctica docente. Por ello se propone que el diseño de las investigaciones debe incorporar oportunidades para valorar y generar significados compartidos desde los términos relacionados con la práctica docentes hasta aquellos relativos a las propias creencias, los datos sobre las creencias deben obtenerse al mismo tiempo que aquéllos relacionados con la práctica que se quiere comprender y es inapropiado clasificar cualquier creencia que tiene un profesor puesto que dichas creencias son clasificadas y encuadradas por los propios investigadores.

Hasta aquí esta investigación realiza una aportación fundamentalmente descriptiva de los profesores basada en las creencias del profesor, pero para que la didáctica de la Matemática pueda ejercer su labor creo que nos falta todavía mucho trecho por recorrer. Como señalan Marks (1989), Even (1990) y Schulman (1999) es necesario desarrollar más investigación sobre los diferentes componentes, categorías, características, dimensiones e indicadores del CCP para seguir generando un cuerpo de conocimientos que fundamente y oriente los programas de formación inicial y permanente y subsecuentes investigaciones. También se están realizando algunas investigaciones cuyo foco es el contexto sociocultural en el que la práctica de la enseñanza y el aprendizaje son co-construidas por los participantes. No quiero ser exhaustiva en la relación de toda la investigación que queda por hacer y en todas las líneas que están abiertas aunque pienso que estas investigaciones son imprescindibles para poder organizar una formación de profesores con una base científica.

REFERENCIAS

Artigue, M y otros (1995) *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Carrillo, J. (1998) *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza, metodología de la investigación y relaciones.* Huelva: Universidad de Huelva.

Contreras, L.C. (1999) *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva: Universidad de Huelva.

Even, R. (1990) Subject matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24 (2), 94-116.

Freudenthal, H. (1980) Major problems of mathematics education. Conferencia plenaria del ICME4, Berkeley. *Educational Studies in Mathematics,*12.

Guzmán, M. (1996) *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático: Elementos básicos del Análisis.* Madrid: Pirámide.

Harel, G (1985) *Teaching Linear algebra in high school* Tesis doctoral inédita. Ben Gurion University of Negev, Israel.

Harel, G. y Trgalovà (1996) Higher Mathematics Education. En A.J. Bishop et alt (eds.) *International Handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp 675-700.

Hitt, F. (1993) Simulación de fenómenos físicos vía microcomputadora en la formación de conceptos matemáticos. *Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.* Mérida, Yucatán.

Kaput, J (1992) Technology and mathematics education. En D. Grouws (ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning.* New York: MacMillan.

Marks, R. (1989) What exactly is pedagogical content knowledge? Examples from mathematics. *Paper presented at AERA Annual Conference, San Francisco.*

Robert, A (1987) De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, *Cahier de Didactique des mathématiques*, nº 29, IREM, París 7, París.

Sfard, A (2005) What could be more practical than good research. On mental relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 393-413.

Shulman, L.S. (1999) Foreword. En J. Gess-Newsome y N. Lederman (ed) *Examining pedagogical content knowledge*. London: Kluwer Academic Publishers.

Sierra, M. y González, M. T. (2001) Situaciones problema en relación con algunas de las reglas del cálculo de derivadas. *Actas de las X JAEM*. Zaragoza.

Speer, N. (2005) Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 361-391.

Tall, D. (1991) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Thompson, A (1992) Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Grouws (ed) *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan, pp. 127-146.

Zimmermann, W y Cunningham (1991) ¿Qué es la visualización en matemáticas? En W. Zimmermann y Cunningham (eds.). *Visualizaction in teaching an learning mathematics.* MAA notes number 19, 67-76.

Comité organizador del XI Simposio de la SEIEM:

Matías Camacho Machín (Secretario)
Mª Candelaria Afonso Martín
Alicia Bruno Castañeda
Josefa Hernández Domínguez
Mª Aurelia Noda Herrera
Mª Mercedes Palarea Medina
Inés Plasencia Cruz
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna