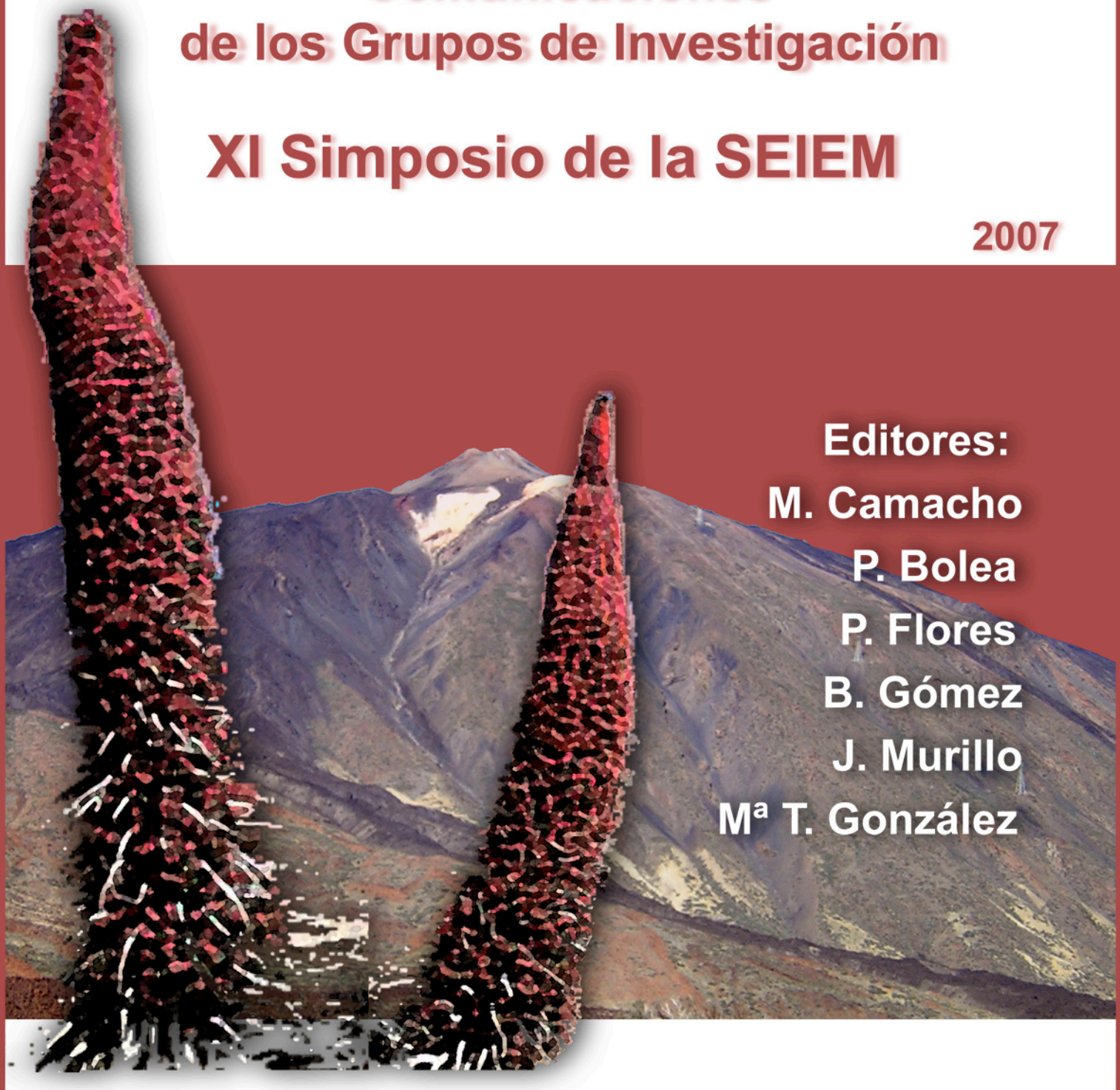
Investigación en Educación Matemática

Comunicaciones de los Grupos de Investigación

XI Simposio de la SEIEM

2007



Editores:

M. Camacho

P. Bolea

P. Flores

B. Gómez

J. Murillo

Mª T. González

ISBN: 978-84-612-5856-7

XI Simposio de la SEIEM. Tenerife

Investigación en Educación Matemática

Comunicaciones de los grupos de investigación

2007

Edita
© CajaCanarias

© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Editores: M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González
Título: Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XI Simposio de la SEIEM.
Diseño de la portada: Víctor José Socas Guerra

ISBN: 978-84-612-5856-7

ÍNDICE

APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA:
Planteamiento de un proyecto de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza.
Sergio Pérez y Gregoria Guillén

Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica
Edna González; Gregoria Guillén y Olimpia Figueras.

Análisis de demostraciones en entornos de Lápiz y Papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas
Félix Rodríguez Díaz y Ángel Gutiérrez Rodríguez

CONOCIMIENTO Y DESARROLLO PROFESIONAL DE LOS PROFESORES
Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura
Ana Caballero Carrasco; Lorenzo J. Blanco Nieto y Eloisa Guerrero Barona

Análisis de vídeos en entornos colaborativos
José Carrillo y Nuria Climent

Entornos Virtuales de Aprendizaje: Interacción y Construcción del Conocimiento sobre la Enseñanza de la Matemática
Julia Valls; Mª Luz Callejo y Salvador Llinares

DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO
Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior
Mª Mar Moreno; Germán Mesa y Carmen Azcárate

La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio
Matías Camacho Machín; Josefa Perdomo Díaz y Manuel Santos Trigo

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA LA PROBABILIDAD Y LA COMBINATORIA
Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias: significado en textos de estadística aplicada a la ingeniería
Hugo Alvarado Martínez y Carmen Batanero Bernabeu

Informe sobre el proyecto de tesis "la media aritmética. Aspectos cognitivos, estrategias, errores y dificultades en su comprensión por el alumnado
Alexandre Joaquim Garrett y Juan Antonio García Cruz

Comprensión de la idea de juego equitativo en los maestros en formación
Juan Jesús Ortiz de Haro; Nordin Mohamed Maanan; Luis Serrano Romero y Jesús Rodríguez García

La ilusión de linealidad en estadística regresión logística versus regresión lineal
Miguel Andériz; Eduardo Lacasta; Miguel R. Wilhelmi; Gabriel Tiberio; Javier Lafita y Carlos Romero

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA COMO UNA DISCIPLINA CIENTÍFICA
Dimensión normativa en didáctica desde un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticas
Juan D. Godino; Vicenç Font; Miguel R. Wilhelmi y Carlos de Castro

Significados histórico-epistemológicos y escolares de la integral definida. Restricciones planteadas por las pruebas de acceso a la universidad
Lourdes Ordóñez Cañada y Ángel Contreras de la Fuente

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y ALGEBRAICO
Una organización de tareas de razón en semejanza para el diseño de un modelo de enseñanza
Alejandro Fernández Lajusticia y Bernardo Gómez Alfonso

Producción ISI del profesorado universitario español del área de Didáctica de la Matemática
Alexander Maz Machado y Manuel Torralbo Rodríguez

Ecuaciones ambiguas y soluciones imposibles en el álgebra de George Peacock
Aurora Gallardo y Oralia Torres

Razonamiento inductivo en un aula de formación de maestros
Víctor Javier Barrera Castarnado y Encarnación Castro Martínez

Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados
Jesús Gallardo Romero; José Luis González Marí y Wenceslao Quispe Yapo

La enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con fracciones en 1º ESO
Eduardo Lacasta; Álvaro Sáenz de Cabezón y Miguel R. Wilhelmi

Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico – lineal
Mª Victoria Martínez Videla; Francisco Fernández García y Pablo Flores Martínez

Una categorización de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones
Mauricio Contreras del Rincón y Bernardo Gómez Alfonso.

PRESENTACIÓN

El undécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), celebrado en Tenerife entre los días 4 al 7 de septiembre, constituyó una muestra de las investigaciones que se vienen realizando durante los últimos años en el campo de la Educación Matemática, tanto en España como en algunos países Latinoamericanos. En la publicación Investigación en Educación Matemática XI* se recogieron las 22 comunicaciones arbitradas debatidas durante el simposio, así como las seis ponencias que se desarrollaron en los dos Seminarios de Investigación *Contrastando enfoques de Investigación en Álgebra* y *Enseñanza de la Estadística en los niveles no universitarios,* en los que se presentó de manera exhaustiva una visión general de los avances actuales de la investigación sobre enseñanza y aprendizaje del Álgebra y la Estadística.

Además, al igual que en ocasiones anteriores, en el XI Simposio se dispuso como viene siendo habitual de un espacio de discusión que se repartió lo largo de tres días en cuatro sesiones de hora y media, donde los Grupos de Investigación se reunieron para exponer y debatir sobre las comunicaciones que presentamos ahora en soporte informático. Es sabido, que la discusión de estos trabajos resulta útil para los investigadores noveles o expertos, debido al debate constructivo que se fomenta en estos grupos en el que participan estudiantes de doctorado, directores de Tesis Doctorales, etc.

En esta ocasión, y al igual que los otros años, los Grupos de Investigación que se reunieron en el Simposio durante seis horas fueron: Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica; Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor; Investigación en Historia de la Matemática y de la Educación Matemática; Aprendizaje de la Geometría; Didáctica del Análisis; Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria y Pensamiento Numérico y Algebraico.

En esta nueva publicación en formato CD se recogen las diferentes comunicaciones presentadas en los Grupos de Investigación las cuales no han sido sometidas a arbitraje, pero en las que los autores han incorporado algunas de las sugerencias y aportaciones fruto del debate que surgió en las exposiciones de las mismas durante su presentación en el Simposio. Hemos considerado oportuno, incluir en este CD el contenido de la publicación Investigación en Educación Matemática XI, que fue publicada y entregada a los participantes en el Simposio en formato de libro.

Los editores
La Laguna, 2007

---

* Camacho, M.; Flores, P. y Bolea, P. (2007) *Investigación en Educación Matemática XI* (ISBN: 847985-261-5; ISSN: 1888-0762)

PLANTEAMIENTO DE UN PROYECTO DE INVESTIGACIÓN SOBRE CREENCIAS Y CONCEPCIONES DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA Y SU ENSEÑANZA

Sergio Pérez
Gregoria Guillén
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de Valencia. España.

Resumen

En este trabajo presentamos el planteamiento de una investigación elaborada considerando las deficiencias y carencias que hemos detectado en un estudio exploratorio previo. El nuevo estudio pretende obtener información sobre: i) la importancia dada por los profesores participantes a la geometría y a los diferentes contenidos geométricos; ii) las razones por las que se imparte esta materia y sus determinados contenidos; iii) los contenidos geométricos del currículum que se imparten y iv) la manera de introducir e impartir geometría en las clases. Pretendemos reelaborar y validar la encuesta utilizada en el estudio exploratorio, precisar y complementar las categorías establecidas y utilizar técnicas estadísticas para el análisis de los datos.

En este informe, además de describir brevemente la investigación planteada, proponemos algunas cuestiones para el debate, con objeto de que los participantes avalen y/o critiquen el estudio y puedan aportar sugerencias para precisar y completar el trabajo.

Abstract

In this work we present the approach of an elaborated investigation considering the deficiencies and lack that we have detected in a previous exploratory study. The new study intends to obtain information on: i) the importance given by the participating teachers on geometry and the different geometric contents; ii) the reasons for which this subject is given and its particular contents; iii) the geometric contents of the curriculum that is given and iv) the way to introduce and give geometry in the classes. We attempt to re-elaborate and validate the survey used in the exploratory study, specify and complement the established categories and use statistical techniques for the data analysis.

In this report, besides describing briefly the raised investigation, we propose some questions for the debate, with object of which the participants guarantee and/or criticize the study and can contribute suggestions in order to precise and complete the work.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007*)*. Planteamiento de un proyecto de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de Secundaria en relación con la Geometría y su enseñanza. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 9-20.

Presentación

Diferentes autores han destacado la geometría como disciplina matemática que ofrece grandes posibilidades para estudiar los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar,… utilizando diferentes situaciones de partida y experimentando con materiales adecuados (Alsina et al., 1997; Guillén, 1991, 2004; Guillén y Puig, 2001, 2006). Se subraya que la enseñanza de la geometría permite desarrollar el razonamiento de los alumnos y que éstos avancen en la progresiva matematización a través de la práctica matemática (Guillén, 2004). También se ha destacado que es un campo interesante para realizar investigaciones (Fernández, 1994) y que tiene hoy en día una finalidad social, ocupando un lugar destacado en nuestra cultura (Pérez, 1994).

Ahora bien, el gran reto sigue siendo todavía que los nuevos enfoques que se proponen para su estudio en las investigaciones y las sugerencias que se aportan en éstas se vean reflejados en las aulas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (Pérez, 2006). Cabe pues plantearse como objeto de estudio, ¿Qué geometría se enseña en la ESO? ¿Cómo se enseña? Estas cuestiones se han tomado como punto de partida para la investigación que se describe brevemente en este informe.

Diferentes estudios sobre la enseñanza/aprendizaje de la geometría en primaria (Figueras et. al., 2001; Guillén, 2006; Guillén y Figueras, 2004, 2005; Guillén et al. 2006) han aportado información sobre la geometría que se enseña en algunas escuelas mexicanas y han determinado algunas causas que pueden explicar la situación actual de la enseñanza de la materia en Primaria. Tomando como referencia estos estudios y cambiando el ámbito de trabajo, hemos realizado un trabajo de investigación sobre creencias y concepciones de profesores de Secundaria de la Comunidad Valenciana en relación con la geometría y su enseñanza, realizado para la obtención de los 12 créditos de la fase investigadora de los estudios de doctorado (Pérez, 2006). En este informe, describimos y evaluamos este estudio previo, parte del cual se ha presentado en una comunicación (Pérez y Guillén, 2007). Asimismo, informamos sobre el planteamiento de la investigación sobre la geometría y su enseñanza que extiende el estudio realizado y proponemos algunas cuestiones para el debate, con objeto de que los participantes avalen y/o critiquen esta planificación y puedan aportar sugerencias para precisar y completar el trabajo.

Describiendo y evaluando el estudio previo

En Pérez (2006), tomando como ámbito de estudio profesores de Secundaria, nos propusimos obtener información sobre cuatro grandes temáticas: 1. La importancia dada por algunos profesores de la ESO a: i) la Geometría con respecto a los otros bloques temáticos del currículum de la ESO; ii) los diferentes contenidos geométricos; iii) la geometría con respecto a la medición. 2. Las razones de los profesores para explicar: i) por qué imparten o no geometría; ii) por qué no imparten todos los contenidos geométricos y/o de medición del currículum en el curso que ellos enseñan; iii) por qué no enseñarían un contenido geométrico determinado en una situación ideal en la que dispusieran de tiempo suficiente para impartir los contenidos del currículum; iv) por qué enseñan determinados contenidos del currículum relativos a geometría y/o medición. 3. Los contenidos geométricos: i) que los profesores dicen impartir o que impartirían en una situación ideal, ii) que conllevan dificultades para ellos, iii) a los que ellos les asignan mayor importancia, iv) que conllevan dificultades para los estudiantes, v) a los que se les asocian determinados errores. 4. La manera de introducir e impartir la geometría en las clases. Para ello, diseñamos una encuesta que al administrarla a profesores de Secundaria en ejercicio seleccionados previamente permitiera obtener

información relacionada estas 4 grandes temáticas. Se obtuvieron varios resultados, algunos pueden consultarse en Pérez y Guillén (2007), pero como se subraya en la conclusión de este trabajo se han detectado algunas deficiencias que vamos a señalar a continuación:

1. El objetivo de la investigación era demasiado extenso. Nuestro propósito fue obtener información sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría en la ESO y las temáticas que hemos enunciado anteriormente eran demasiadas extensas.

2. En la revisión bibliográfica que formaba parte de nuestro marco teórico prestamos atención a los estudios que versan sobre como se analizan los contenidos geométricos y/o de medición y los que aportan información sobre los procesos de aprendizaje de dichos contenidos, ahora bien, ha quedado demasiado pobre la revisión bibliográfica relativa al conocimiento del profesor, así como la relacionada con la realización de cuestionarios, valoración de ítems y técnicas estadísticas para analizar los datos.

3. El instrumento de recogida de datos utilizado era demasiado extenso. Era una encuesta que contenía 22 ítems de los cuales la mayoría eran de respuesta abierta. Ésta constaba de cuatro partes: la primera sobre creencias, actitudes, saberes, relaciones y conexiones acerca de la geometría (ítems 1-9); la segunda sobre la enseñanza de la geometría en la ESO, en relación con otros bloques temáticos del currículum de la ESO o considerando diferentes áreas de la geometría, o en relación con las razones que se aportan sobre por qué enseñar o no la geometría del currículum (ítems 10-15); la tercera sobre qué contenidos geométricos enseñan en sus clases y qué procedimientos utilizan, qué contenidos geométricos consideran más o menos importantes de los que imparten en sus clases, y qué contenidos seleccionan como los que tiene que conocer el alumno para si no se conocen se considere que se tiene bajo rendimiento en geometría en el curso correspondiente (ítems 16-19) y la cuarta sobre su labor docente (ítems 20-22). Cabe señalar que algunos ítems se componían de varias preguntas, por ejemplo el ítem 16 se planteó como se muestra en los cuadros I y II del anexo. Para cada uno de los contenidos geométricos del currículum de la ESO seleccionados se plantearon 3 tipos de preguntas que se introducían con la cuestión 16 que se muestra en el cuadro I. Al referirnos a cada contenido, la cuestión se replanteó como muestra el cuadro II para el contenido 1 del bloque que hacía referencia a clasificar formas geométricas de tres y dos dimensiones bajo distintos criterios. Otro ejemplo que demuestra la extensión de algunos ítems lo exponemos en el cuadro III del anexo que hace referencia al ítem 17 de la encuesta.

Cabe reflexionar sobre la información que ha proporcionado cada una de las preguntas de la encuesta, con objeto de decidir si cabe incluirlas o no en la encuesta reelaborada. También cabría evaluar si las preguntas planteadas conllevan una respuesta diferente para la geometría que para otras partes de las matemáticas, en un intento de tener criterios para restringir las problemáticas objeto de estudio.

4. La administración del cuestionario sólo la pudimos llevar a cabo en aquellos centros a los que se tenía acceso porque se conocían algunos profesores que impartían clase en estos centros. El número de profesores que respondieron el cuestionario fue bastante bajo (19 profesores sobre 50 encuestas entregadas). Con objeto de facilitar la realización de la encuesta, se permitió que éstas se respondieran en casa. Al repartirlas se sugirió que se devolvieran lo antes posible, una vez que se hubieran respondido. Cabe señalar que por término medio los profesores utilizaron un mes y medio para devolver las encuestas. Algunos profesores tardaron tres meses. Se siente como necesario que en el nuevo estudio el investigador esté presente cuando se administre la encuesta.

5. El análisis de los datos lo realizamos mediante una categorización de las respuestas y elaboración de plantillas. El estudio previo ha hecho sentir la necesidad de realizar un nuevo estudio para corroborar estas categorías y reelaborar otras nuevas si fuera necesario.

6. El análisis cuantitativo de los datos lo hicimos simplemente utilizando tablas de frecuencias con sus respectivas representaciones gráficas. Se siente como necesario continuar el estudio utilizando otras técnicas para el análisis de los mismos.

7. Los resultados elaborados en el estudio exploratorio fueron puramente descriptivos y no eran generalizables. Como se ha señalado, la muestra no fue lo suficiente representativa para extraer unos resultados que se pudieren generalizar a otros ámbitos de estudio. Es necesario continuar el estudio para que se obtengan resultados que vayan más allá de los resultados en términos de frecuencias que se han obtenido en esta primera fase.

8. Las conclusiones obtenidas provienen de datos que pueden sintetizarse mucho más y además pueden establecerse relaciones entre ellos que no se han contemplado en el estudio previo. Los paquetes estadísticos para el análisis de los datos se sienten como necesarios para el trabajo de la segunda fase.

9. En el estudio previo hemos constatado que las respuestas dadas por algunos profesores han reflejado que el desconocimiento que se tiene de algunos contenidos geométricos sobre los que se cuestionaba, llevaba a respuestas que podían llevar a conclusiones erróneas por parte del investigador al analizar las respuestas. Por ello, para el estudio de esta segunda fase, se siente necesario prestar atención a cuestiones que tienen que ver con la "comunicación" que se tiene cuando se pregunta a los profesores de la ESO sobre determinados contenidos geométricos.

Sobre la investigación propuesta

Metas iniciales

El nuevo Proyecto de Investigación, en el que vamos a intentar obtener información sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría en la ESO y que pretendemos desarrollar intentando paliar estas deficiencias, tiene como metas iniciales:

- Delimitar aquellos objetivos, de los que se tenían inicialmente, sobre los que nos vamos a centrar. Inicialmente estamos interesados en averiguar, reunir, organizar y analizar una amplia muestra de la diversidad de juicios y valoraciones que sostiene los profesores de la ESO sobre diferentes contenidos geométricos que dicen impartir en sus clases así como en obtener información sobre cómo expresan que llevan a cabo en sus clases la enseñanza de diferentes procesos matemáticos.
- Diseñar un marco teórico que contemple los trabajos ya considerados en el estudio de la primera fase y otros trabajos que no se han contemplado aún y que se puedan integrar de manera coherente. Entre éstos consideraremos los que hacen referencia al saber del profesor como profesional, desde el que se puedan interpretar las respuestas u opiniones didáctico-matemáticas obtenidas de la muestra intencional. Entre la bibliografía que tenemos pensada consultar podemos citar como ejemplo Alsina et al. (1997); Carrillo (1998); Corberán (1996); Del Olmo y otros (1989); Flores (1995); Gil y Rico (2003); Guillén (1991, 1997, 2004, 2005); Guillén y Figueras (2004, 2005); Ponte & Chapman (2006); Sáiz, (2002).
- Elaborar documentos/tests y validarlos.
- Diseñar preguntas que hasta ahora no habíamos contemplando que aporten información para ver si entienden nuestra manera de hablar o están dando un significado diferente al que nosotros estamos presuponiendo.
- Seleccionar una muestra que sea representativa de los profesores de los distritos municipales de la ciudad de Valencia y de las comarcas en que se haya divida la provincia de Valencia.

- Realizar un análisis de los datos utilizando técnicas estadísticas.
- Obtener resultados en relación con las problemáticas que hayamos seleccionados como objetivos prioritarios.
-

Marco de referencia

Como ya hemos indicado en el estudio previo (Pérez, 2006), como marco para el trabajo hemos considerado, por un lado, los estudios en los que se analizan los procesos matemáticos involucrándolos con las ideas de los conceptos geométricos que se tratan (Guillén, 2004, 2005), se subrayan la multitud de relaciones que existen entre los conceptos geométricos (por ejemplo, Alsina et al., 1997; Guillén, 1991), se presta atención a las dificultades que conlleva la enseñanza/aprendizaje o se dan sugerencias para la instrucción (Guillén, 2005). Por otro lado, los trabajos sobre medición que aportan información sobre diferentes aproximaciones al área y el volumen, sobre dificultades y/o errores y dan sugerencias para la instrucción; entre ellos hemos considerado los realizados en Educación Matemática dirigidos hacia la enseñanza (Del Olmo y otros, 1989) e investigaciones sobre medición (Corberán, 1996; Sáiz, 2002).

Dado que nuestra investigación toma como ámbito de estudio profesores en ejercicio, nuestro marco teórico contempla investigaciones que han centrado la atención en creencias, concepciones y/o formación de profesores (como por ejemplo, Andrews & Hatch, 2000; Carrillo, 1998; Gil y Rico, 2003; Flores, 1995; Llinares, 1996; Ponte, 1999; Benken & Brown, 2002**;** Magro y Luengo, 2004; Ponte & Chapman, 2006), a partir de las que hemos interpretado términos clave usados en el trabajo, como *creencias y concepciones*, o han enfatizado la importancia que tiene determinar y analizar las dificultades y errores que presentan los estudiantes.

Metodología

El trabajo lo desarrollaremos en tres etapas.

En la primera etapa haremos una revisión bibliográfica actualizándola y haciendo especial hincapié en aquella bibliografía que permita paliar los aspectos deficitarios que hemos mencionado en el apartado anterior.

En la segunda abordaremos el problema de diseñar el instrumento o instrumentos específicos que permitan estudiar las concepciones y creencias de los profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza y los contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos y relaciones) que enseñan los profesores en la geometría de la ESO. Inicialmente se tiene previsto que estos instrumentos sean dos cuestionarios de respuestas abiertas y/o cerradas que sean validados y considerados en la comunidad científica como fiables.

En la tercera etapa administraremos los cuestionarios a una muestra representativa de la población, principalmente de la provincia de Valencia. La administración de los cuestionarios se aplicará en varias sesiones según se tenga acceso a los sujetos. Por una parte se solicitará a los responsables de los distintos centros de Secundaria que nos permitan administrar el test y entrevistar a los profesores personalmente. Por otra parte se intentará aplicar los cuestionarios en un curso de actualización para el profesorado, en algún curso de especialización o en un curso de doctorado en Educación Matemática. También pensamos que sería conveniente pasarlos a estudiantes del último curso de la Facultad de Matemáticas. En todas las aplicaciones se intentará que esté presente el investigador.

El análisis de los datos tendrá en cuenta los tipos de preguntas que contengan los cuestionarios aplicados en este estudio. Así pues también será especifico el tratamiento de los datos procedentes de cada uno de estos cuestionarios.

Los cuestionarios abiertos plantearán un problema de análisis de contenido, en este caso presentaremos los resultados de la forma más simple posible. Para ello procederemos a un trabajo de codificación que llevaremos a cabo en dos fases. En la primera, elaboraremos unos criterios de clasificación mediante el análisis de una muestra del conjunto de respuestas. En la segunda, asignaremos a cada una de esas categorías las respuestas correspondientes.

La categorización de respuestas la llevaremos a cabo como indica Gil (1999) siguiendo las pautas que marcan Ghiglione y Matalon (1991) para este tipo de cuestionarios y que resumiendo podemos decir que el criterio de clasificación debe presentar las siguientes características: i) el número de categorías no debe ser demasiado elevado, ii) no deben haber categorías sin respuestas, iii) los criterios de clasificación de las respuestas deben ser suficientemente claros y iv) cada respuesta sólo debe clasificarse dentro de una categoría. Lo ideal sería que la codificación de las respuestas fuera realizada por otros investigadores, para que el peso de las hipótesis no influyera en las decisiones.

Dado que nuestro objetivo va a ser recabar información sobre como se realiza la enseñanza de la geometría por los profesores de los distintos cursos de la ESO, el análisis no se realizará en un estudio individual de las respuestas dadas por los profesores en cada uno de los ítems sino en relación con las respuestas dadas en los ítems implicados en cada aspecto. Para ello pretendemos ayudarnos de paquetes de técnicas estadísticas como el SPSS.

Finalmente pretendemos extraer unas conclusiones que puedan ayudar en los planes de formación del profesorado y en la organización del sistema educativo.

Algunas cuestiones para la discusión en el grupo de geometría

Expuesto el análisis del estudio exploratorio y la propuesta para la continuación de la investigación, para dirigir la discusión sobre este trabajo proponemos las siguientes cuestiones:

- ¿Las diferentes temáticas que se intentan tratar en la investigación se consideran importantes y viables para una investigación con carácter de tesis doctoral?
- ¿Se puede aportar alguna información sobre las temáticas tratadas en el estudio previo (véase el apartado describiendo y evaluando el estudio previo) que pueden resultar más o menos interesantes como objeto de estudio para continuar la investigación?
- ¿Qué decir sobre el diseño de diferentes tipos de cuestionarios que puedan ser más o menos adecuados para determinar concepciones y creencias de los profesores de Secundaria en relación con la geometría y la enseñanza? ¿Y de las medidas que hemos de tomar para garantizar la validez de contenido de nuestros cuestionarios? ¿Y de otras técnicas de obtención de datos que puedan ser adecuados para un estudio de estas características?
- ¿Qué ideas se pueden aportar para paliar las dificultades que conlleva que los profesores colaboren para una investigación de estas características, dado que la muestra que participe en el estudio tiene que ser considerada representativa?

Referencias bibliográficas

Alsina, C.; Fotuny, J.M. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué la geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Síntesis. Madrid.

Andrews, P. & Hatch, G. (2000). A comparison of hungarian and english teachers' conceptions of mathematics and its teaching, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43 (1), 31-64.

Benken, B. M & Brown, N. (2002). *Preparing prospective elementary teachers to foster conceptually based mathematical understandings: a study investigating change in prospective teachers' conceptions related to mathematics teaching and learning,* en http://www.eric.ed.gov/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED471764.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza* (Tesis Doctoral), Universidad de Huelva. Huelva.

Corberán, R.M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis Doctoral), Universitat de València. Valencia (Publicada en 2002. Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Universitat de València. Valencia).

Del Olmo, M.A., Moreno, F., y Gil, F. (1989). *Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? ,* Síntesis. Madrid.

Fernández, S. (1994). Investigando en geometría, *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 2, 57-63.

Figueras, O; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y Sáiz, M. (2001). Diseño del proyecto *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en* matemáticas, Proyecto de investigación, modalidad grupal, co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) (con clave G37301-S).

Flores, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada. Granada.

Ghiglione, R. y Matalon, B. (1991). *Les enqüetes sociologiques. Theóries et* pratique, Armand Colin. París.

Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada. Granada.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, *Enseñanza de las ciencias*, vol. 21 (1), 27-47.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*, Síntesis. Madrid.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje* (Tesis doctoral), Universitat de València. Valencia (Publicada en 1999. Col·lecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Universitat de València. Valencia).

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática, *Educación Matemática*, vol. 16 (3), 103-125.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos, *Educación Matemática*, vol. 17 (2), 117-152.

Guillén, G. (2006). *Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas*, en http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat/ Web elaborada en el marco del Proyecto de investigación Figueras, O; Buenrostro, A.; García, F.; López, G. y Sáiz, M. (2001-2006). *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemática,* co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) de México (con clave G37301-S).

Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta. En E. Castro y E. De la Torre (Eds), *Investigación en Educación Matemática. VIII Simposio de la SEIEM*, pp. 219-228.

Universidade da Coruña. A Coruña.

Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso taller como técnica para la obtención de datos. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds), *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la SEIEM*, pp. 227-234. Universidad de Córdoba. Córdoba.

Guillén, G. y Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudio de algunas Relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds), *Investigación en Educación Matemática. V Simposio de la SEIEM*, pp. 183-188. Universidad de Almería. Almería.

Guillén, G. y Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. Estudio exploratorio, *Educación Matemática*, 18 (3), 65-102.

Guillén, G.; Figueras, O.; Corberán, R.M. (2006). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio, en Aymerich, J.V. y Vives, S.M. . (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI.* Universitat Jaume I. Castellón. 215- 224.

Llinares, S. (1996). Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria. En J. Jiménez, S. Llinares y V. Sánchez (Eds), *El Proceso de llegar a ser un profesor de primaria, cuestiones desde la educación matemática*, pp. 13-36. Mathema. Granada.

Magro, M.H. y Luengo, R. (2004). Concepções dos alunos do Ensino Secundário acerca da matemática e sua aprendizagem. En R. Luengo (Ed), *Líneas de Investigación en Educación Matemática*, vol. 1, 59-82. Servicio de publicaciones de FESPM. Badajoz.

Pérez, R. (1994). Construir la geometría, *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas,* vol. 2, 65-80.

Pérez, S. (2006). *Algunos resultados sobre la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Estudio exploratorio* (Trabajo de investigación del Programa de Doctorado), Universitat de València. Valencia.

Pérez, S. y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En P. Bolea; M. Camacho y P. Flores (Eds), *Investigación en Educación Matemática. XI Simposio de la* SEIEM, pp. 295-305. Universidad de La Laguna. Tenerife.

Ponte, J. P. (1999). Teachers' beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education. In K. Krainer & F. Goffree (Eds.), *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education*, pp. 43-50. Forschungsintitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 461-494. Sense Publishers.

Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de Primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza* (Tesis Doctoral), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México.

Anexo

16. Cada una de las preguntas de este bloque del cuestionario se refiere a un contenido geométrico del currículum de secundaria. Para cada contenido se hacen tres tipos de cuestionamientos, a saber:
a) Si lo ha impartido en el año escolar que acaba de terminar. En las opciones para las respuestas este aspecto se denomina "Situación actual".
b) Cómo considera el contenido: Imprescindible, importante, se puede dejar de estudiar, nada importante. En las opciones para la respuesta este aspecto aparece como "Lo considero".
c) Si lo impartiría suponiendo que tiene una situación ideal en el aula en la cual tiene tiempo suficiente para dar todos los contenidos del curso. En las opciones para las respuestas este aspecto se llama "Situación ideal".
Notas:
Para los cuestionamientos a) y c) puede precisar sus respuestas al elegir una o varias de las opciones que se presentan.
Para los contenidos que implican varias familias o elementos, si sólo ha impartido lo relativo a algunas/os, subraye aquellas/os que ha tratado en clase.

Cuadro I

II.1 Clasificar los sólidos.

a) Situación actual:
Lo he impartido □ No lo he impartido □
Marque con una cruz en qué curso/s lo ha impartido: 1º □ 2º □ 3º □ 4º □
Marque con una cruz por qué no lo ha impartido:
No es de mi agrado: □
No he tenido tiempo: □
No está en los libros de texto: □
No tengo dominio del tema: □
Lo considero difícil para el alumno: □
Otras razones. Indique cuales:
……
……

……

b) Lo considero:

Imprescindible □ Importante □ Se puede dejar de estudiar □ Nada importante □

c) Situación ideal:

Lo impartiría: □ No lo impartiría: □

Marque con una cruz en que curso/s y por qué lo impartiría:

1º □ 2º □ 3º □ 4º □

Porque está en el programa: □

No es de mi agrado: □

Desarrolla capacidades del alumno: □

Lo considero un contenido

Se necesita para otros contenidos: □

Porque le gusta a los alumnos: □

No está en los libros de texto: □

Porque tengo dominio del tema: □

Pero no es de mi agrado: □

Pero no está en los libros de texto: □

No contamos con apoyos para

Pero necesito formación: □

formarnos: □

Otros comentarios. Indique cuales:

……

……

……

……

Otros comentarios. Indique cuales:

……

……

……

……

Cuadro II

17.- Las siguientes cuestiones se refieren a contenidos geométricos que hemos indicado en el ítem anterior. Si los ha impartido, responda a las preguntas correspondientes intentando dar una explicación.

17.1- ¿Qué elementos de los poliedros ha tenido en cuenta para su descripción?
17.2- ¿Qué elementos de los cuerpos de revolución ha tenido en cuenta para su descripción?
17.3- ¿Qué familias de poliedros ha descrito?
17.4- ¿Qué cuerpos de revolución ha descrito?
17.5- ¿Qué elementos geométricos del plano ha tenido en cuenta al describir los polígonos?
17.6- ¿Qué propiedades ha tenido en cuenta de los cuadriláteros?
17.7- ¿Qué ha descrito de los polígonos regulares?
17.8- ¿Qué relaciones ha establecido entre diferentes poliedros, por ejemplo entre el cubo y la pirámide?
17.9- ¿Qué relaciones ha establecido entre diferentes cuerpos de revolución, por ejemplo entre el cono y el cilindro?
17.10-¿Qué relaciones ha establecido entre diferentes poliedros y cuerpos de revolución, por ejemplo entre el prisma y el cilindro?
17.11-¿Qué relaciones ha establecido entre los elementos del plano y del espacio, por ejemplo truncando la esquina de un cubo obtengo como sección un triángulo equilátero?
17.12-¿Qué relaciones ha establecido entre los elementos del plano, por ejemplo entre el triángulo equilátero y el hexágono regular?
17.13-¿Trabaja la clasificación en el mundo de los sólidos con criterios que no se centren en el polígono de la base? Precise los contenidos que imparte en relación con esta clasificación.
17.14-¿Qué criterios utiliza en la clasificación de los ángulos, triángulos, cuadriláteros, polígonos?
17.15-¿Qué problemas relacionados con la clasificación trabaja al tratar las clasificaciones anteriores (establecer clases, describir y enumerar ejemplos de clases, propiedades,…)?
17.16.- Si utiliza las representaciones físicas (objetos del entorno, modelos o armazones de los sólidos,...) como modelo de fenómenos al explicar la geometría, explique cómo lo hace.

Cuadro III

DISEÑO DE UN ESTUDIO SOBRE LA PUESTA EN PRÁCTICA DE UN MODELO DE ENSEÑANZA PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS PARA LA FORMACIÓN CONTINUA DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Edna González
Gregoria Guillén
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.
Olimpia Figueras.
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México

Resumen

Diversas investigaciones realizadas en Educación matemática han señalado la importancia de implementar en los planes de formación para maestros contenidos de distinta naturaleza. En este trabajo presentamos el plan de acción para el diseño y la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos que tiene como finalidad apoyar la formación continua de profesores de educación básica. Este proyecto está incluido en la línea de investigación abierta que alude al diseño de modelos de enseñanza y a la observación de procesos de enseñanza-aprendizaje de la Geometría a partir del estudio de los sólidos. Asimismo planteamos algunas cuestiones para abordar una discusión en el grupo de trabajo de aprendizaje de la geometría que permita evaluar el trabajo y aporte reflexiones para desarrollarlo.

Abstract

Some researches in Mathematical Education have indicated the importance of implementing contents of different nature in the plans of training teachers. In this work we present the action plan for the design and implementation of a Teaching Model for the geometry of solids which main objective is to support a permanent training for basic education teachers. This project is included in the line of investigation that alludes to the design Teaching Models and the observation of the processes of teaching-learning geometry from the study of solids. We also raised some questions to approach a discussion in the work group of learning of geometry that allows to evaluate the work and contributes reflections to develop it.

González, E.; Guillén, G. y Figueras, O. (2007). Diseño de un estudio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos para la formación continua de profesores de educación básica. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife*. pp. 21-30.

Justificación

Trabajos desarrollados en Didáctica de las matemáticas referidos a la geometría de los sólidos (por ejemplo, Guillén, 1991, 1997, 2000) han mostrado que los sólidos constituyen un contexto muy rico para trabajar los procesos matemáticos. Ahora bien, si se ha subrayado que los sólidos constituyen un buen soporte para desarrollar actividad matemática, la situación actual de la enseñanza de la geometría de los sólidos en las escuelas no refleja este hecho. Investigaciones relativas a la enseñanza de la geometría en primaria (por ejemplo Barrantes y Blanco, 2004; Guillén y otras 2004, 2005, 2006) señalan que con respecto a la enseñanza de la geometría de los sólidos el panorama no es muy alentador. En Guillén y otras (2004, 2005) se señala que algunos profesores expresaron que el estudio de la geometría lo abordaban a partir de la geometría del plano y reconocieron que no tienen una formación muy sólida en cuanto a geometría de los sólidos se refiere. Dada esta situación, en los reportes se remarca que son necesarias más investigaciones en este campo.

Esto obliga a plantearnos la siguiente pregunta ¿Cómo se puede cambiar esta situación y mejorar la enseñanza de la geometría en el nivel primaria? Dado que el profesor ocupa un papel significativo para la enseñanza de la geometría escolar, cabe también plantearnos las siguientes preguntas ¿Cómo se puede influir en la formación de los profesores para mejorar la enseñanza de esta materia? ¿Cómo se puede influir en las creencias y concepciones que tienen los profesores en cuanto a la enseñanza de la geometría de los sólidos? Cabe esperar que si impulsamos el desarrollo profesional de los mismos podremos mejorar la situación actual.

Investigaciones realizadas en la línea de formación de profesores hacen referencia a diversos contenidos pertinentes para tomar en cuenta en un plan de formación inicial de profesores (por ejemplo Climent y Carrillo, 2003), pero poco se ha trabajado en cuanto a geometría de los sólidos se refiere, por lo que es necesario realizar investigaciones tomando como referencia esta materia.

En este proyecto el trabajo se refiere a la formación de profesores de primaria (en ejercicio) en relación con la geometría de los sólidos contemplando el análisis del conocimiento o la práctica de los profesores. Pretendemos diseñar un Modelo de Enseñanza (ME) para la geometría de los sólidos enfocado a la formación permanente de profesores de primaria en ejercicio considerando el conocimiento relativo a contenidos geométricos y a su enseñanza.

Para el diseño del ME tomaremos como referencia los diferentes tipos de contenidos que se delimiten en la investigación; entre ellos figuran contenidos teóricos referentes a contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos y diferentes tipos de relaciones) y contenidos profesionales o prácticos sobre: currículos oficiales; cómo enseñar geometría de los sólidos a un tipo de alumnos (estilos y métodos de enseñanza, enfoques,..); cómo planificar las clases; creencias y tomas de postura; cómo se aprenden algunos contenidos.

En el estudio de casos se observarán procesos de aprendizaje relativos a la geometría de los sólidos de algunos profesores de primaria al evaluar los efectos del modelo de enseñanza que se ha diseñado y desarrollado con ellos analizando cómo lo transfieren al modelo de enseñanza que ellos diseñen y desarrollen en sus clases de primaria.

En el siguiente apartado se expresan los objetivos que se pretenden alcanzar al desarrollar el proyecto de investigación propuesto en este documento.

Objetivos generales

El proyecto de investigación se estructura considerando tres líneas centrales de trabajo y centrando la atención sobre el nivel de la primaria de la educación básica. A cada una de esas líneas corresponde uno de los objetivos generales siguientes:

Obj. 1. Elaboración de un Modelo de Enseñanza de geometría de los sólidos para la formación de profesores de educación primaria a partir de libros de texto e investigaciones antecedentes Guillén (1997, 2000) y la adaptación de éste al medio "Internet" (ME2).

Obj. 2. Realización de un estudio con profesores de primaria en servicio al poner a prueba el Modelo de Enseñanza diseñado y hacer un estudio de casos al observar la transferencia que hacen algunos de los maestros que participan en el estudio en el aula de sus clases.

Obj. 3. Reelaboración del Modelo Teórico Local.

En los siguientes apartados describimos brevemente los antecedentes del trabajo que conforman el marco de referencia de este estudio y se exponen algunas cuestiones que se han planeado acerca de la metodología a utilizar en el desarrollo del proyecto.

Antecedentes. Marco de referencia

La investigación que se presenta en este anteproyecto está incluida en una línea de investigación sobre Didáctica de la Geometría de los sólidos que se inició en España y que se ha consolidado durante estos años (Guillén, 1997, 2000, 2001, 2004, 2005, 2006; Guillén y Puig, 2001, 2006; Guillén et al. 2003, 2004; González et al. 2006). En esta línea de investigación se han elaborado Modelos de Enseñanza para la geometría de los sólidos y se han sacado conclusiones referidas a la observación de procesos de aprendizaje en esta área de la geometría (Guillén, 1997, 2000; Guillén y Puig, 2001, 2006). Estos modelos de enseñanza tienen como objeto desarrollar el razonamiento lógico de los estudiantes, entendiendo razonamiento lógico como los procesos matemáticos de analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer (Fielker, 1979; Guillen, 1997, 2001); pretenden que los estudiantes avancen en la progresiva matematización[1].

Recientemente se ha elaborado una página Web con la intención de apoyar la formación permanente de profesores de primaria en cuanto a la geometría de los sólidos, ésta se puede consultar en:

http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat/

Su marco de referencia lo constituye el modelo de los Van Hiele y otros estudios que pueden integrarse con el mismo (Freudenthal, 1973, 1978, 1983; Vinner, 1983) considerando cómo han ido evolucionando las ideas plasmadas en este modelo como consecuencia de investigaciones realizadas en el Instituto de Freudenthal.

Como marco metodológico para la experimentación retomamos la teoría de los Modelos Teóricos Locales (Filloy 1999). Una descripción muy general de la misma se presenta también en este documento.

La escuela holandesa

El trabajo que describimos se apoya en trabajos desarrollados en la Escuela Holandesa, que ven los problemas relacionados con la didáctica de las matemáticas desde el punto de vista de la fenomenología didáctica, en este sentido, el trabajo de Freudenthal (Freudenthal, 1971, 1973, 1978, 1983; Puig, 1997), Treffers (1987), Kindt (1993) y el proyecto Wiscobas (desarrollado el

[1] *matematizar* es entendido en un sentido muy amplio: formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar son verbos que denotan aspectos del proceso de matematización. (Treffers, 1987).

Instituto de Freudenthal) son de referencia obligada. En ellos se considera como objeto de la enseñanza de la geometría que se vaya avanzando en el proceso de matematización[2].

El estudio teórico de Freudenthal y la interpretación que hace Puig (1997) de parte del trabajo de Freudenthal (1983) muestra de manera global nuestra toma de postura ante diferentes concepciones que se presentan sobre la naturaleza de las matemáticas, la geometría, o su enseñanza; aportan información para organizar la enseñanza de la geometría de los sólidos.

Freudenthal (1971, 1973), fundamenta teóricamente nuestra posición respecto a las relaciones que existen entre los contenidos geométricos; esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza pretendemos desarrollar como objetivo de primer orden: razonamientos lógicos, que significa procesos matemáticos de análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración.

Nuestra postura es que el estudio de la geometría debe comenzar por el espacio. El trabajo que presenta Freudenthal (1973, 1983) aporta sugerencias y comentarios concretos referidos a la enseñanza/aprendizaje de conceptos geométricos, algunas de ellas se pueden consultar también en Guillén (1997).

Por otro lado también tendremos en cuenta, para nuestro trabajo, el término de competencias utilizado en el sentido de Filloy (1999) como los elementos del modelo de competencia, estos elementos se refieren a los conocimientos de un individuo ideal, elementos que debieran formar parte de la conducta competente de profesores de primaria al enseñar los contenidos geométricos relativos a los sólidos en sus clases.

Sobre los diferentes tipos de conocimiento

Situando la investigación actual en el marco de la formación del profesor, tomamos como referente el trabajo de Climent y Carrillo (2003) y los que ahí se referencian. Ellos consideran que el conocimiento del profesor en servicio, consta de diferentes componentes: Conocimiento del contenido matemático de y sobre las matemáticas y el conocimiento de la materia para su enseñanza. En el primero se incluye lo relativo al conocimiento de hechos, procedimientos, conceptos, las relaciones entre éstos, y los significados y principios subyacentes, así como el referido a la comprensión de la naturaleza del conocimiento matemático y de la matemática como cuerpo de conocimiento. En el segundo se incluye el conocimiento de los modos de representación más adecuados para facilitar su comprensión y el conocimiento de las características del aprendizaje de los contenidos, el conocimiento de materiales curriculares para la enseñanza de los contenidos, el conocimiento de los currículos oficiales relativos a la enseñanza de la materia.

En este estudio nosotras nos centramos especialmente en el contenido de la geometría de los sólidos a nivel escolar de la primaria y en "la labor docente como formador de profesores".

[2] En la teoría desarrollada en el instituto Freudenthal se distingue la matematización horizontal o fase en la que interviene la aproximación empírica, la observación, la experimentación, el razonamiento inductivo y que se concreta en el momento en que se ataca un problema; y matematización vertical, que agrupa las actividades que llevan a la solución de un problema: resolución generalización, formalización o revisión. Precisando un poco más, por la primera se entiende la matematización que da cuenta de la diferencia entre transformar un problema más o menos real en un problema matemático y procesar dentro del sistema matemático, lo cual conlleva una sistematización, una simbolización, y una esquematización/modelización. La segunda, se refiere al procesamiento matemático, dentro del sistema matemático, y al nivel alcanzado en la estructuración del problema en consideración.

Acerca de creencias y concepciones

Dado que compartimos el mismo marco de referencia que Guillén y Figueras (2004), el término creencia lo utilizamos en el mismo sentido, es decir, con el significado de Villoro (1982, pag. 71), quien considera que las condiciones necesarias para toda creencia son: *S* cree que *p* si y sólo si: 1) *S* está en un estado adquirido *x* de disposición a responder de determinada manera ante determinadas circunstancias; 2) *p* ha sido aprehendida por *S*, y 3) *p* determina *x*. De donde propone la siguiente definición: creencia, que se refiere a un estado interno del sujeto, es un estado disposicional adquirido, que causa un conjunto coherente de respuestas y que está determinado por un objeto o situación objetiva aprehendidos. Ese estado es una condición inicial sin la cual no se explicaría la consistencia en las respuestas del sujeto. Añadida a los estímulos y a otras condiciones iniciales (otras creencias y otras disposiciones) es causa del comportamiento.

El término concepción vamos a usarlo con el significado que expresa De Ponte (1994): Las concepciones son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva, que condicionan la forma en que realizamos las tareas.

La teoría de los modelos teóricos locales

Según Filloy et cols. (1999), para poder tomar en cuenta la complejidad de los fenómenos que se producen en los sistemas educativos, los MTL integran varios componentes teóricos interrelacionados: 1) Modelo de enseñanza; 2) Modelo para los procesos cognitivos; 3) Modelo de competencia, y 4) Modelo de los procesos de comunicación. Estos componentes del MTL son marcos de referencia para futuras investigaciones. Lo que distingue a unos componentes de otros es, entre otras cosas, los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto del que se realiza el análisis.

Utilizando la idea de los MTL como marco metodológico, en el trabajo se propone reorganizar a través de los cuatro componentes del MTL los datos y resultados obtenidos en las investigaciones previas sobre la introducción a la enseñanza/aprendizaje de la geometría. Se plantea también un diseño experimental que ilustre acerca de las interrelaciones y contraposiciones que hay durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con los componentes.

Metodología

Los resultados de este trabajo, los obtendremos utilizando diferentes metodologías. Por un lado, obtendremos datos que provienen de estudios teóricos. Para ellos realizaremos un análisis de: i) la investigación existente referida a la formación de profesores en geometría o a la enseñanza/aprendizaje de la geometría escolar, ii) del curriculum de primaria, iii) de textos escolares; y iv) de test utilizados en la evaluación.

Por otro lado, realizaremos un análisis de los datos que aporten las experimentaciones realizadas, que también se obtendrán utilizando diferentes metodologías. Cabe señalar que el estudio que se propone en este proyecto es de corte cualitativo y en diversas acciones será necesario videograbar con la intención de facilitar la reconstrucción de lo acontecido y efectuar el análisis correspondiente.

Teniendo en cuenta los objetivos planteados, a continuación se describen brevemente distintas actividades que serán puestas en práctica.

Etapa 1

Como primera actividad será necesario examinar y hacer un análisis del currículum oficial para la educación primaria de los contenidos que hacen referencia a la geometría de los sólidos, tanto de México como de España para identificarlos y reorganizarlos, también se examinarán sitios en Internet que estén dedicados a la formación de profesores en geometría.

Elaboración de Modelo de Enseñanza

Para la elaboración del Modelo de Enseñanza tendremos que reelaborar el modelo de Competencia Inicial que resultó de una primera etapa del proyecto (trabajo de investigación 12 créditos), tomando en cuenta que por un lado tendremos los rasgos de la conducta competente en el domino de los contenidos geométricos que se vayan a enseñar, y por otro, los rasgos de la conducta competente para la enseñanza de los contenidos geométricos. Conjuntamente a esta actividad y basándonos en los trabajos teóricos analizados se elaborará el Modelo de cognición.

Se seleccionará un grado o dos de primaria para hacer la revisión de los libros de texto de la Secretaría de Educación Publica de México y libros de texto de dos de las editoriales españolas para la educación básica, una vez elegidos los textos identificaremos las actividades que hacen referencia a la geometría de los sólidos. Se seleccionarán y analizarán algunas de esas actividades propuestas y, con base en ellas, los modelos de competencia y cognición, en las unidades de enseñanza propuesta por Guillen (1997) y los contenidos identificados de los currículums, se diseñará el modelo de enseñanza que servirá como elemento mediador para la formación de profesores de primaria en servicio. Como parte del Modelo de Enseñanza diseñado se incorporarán elementos que hacen referencia a los diferentes tipos de contenidos que se recomiendan incluir en los planes de formación, los cuales se han identificado en diversos trabajos de investigación.

El diseño del Modelo de Enseñanza también se apegará a las características establecidas por el "enfoque realista para la enseñanza de las matemáticas" sustentado por la escuela holandesa. Las tareas o actividades que se propongan partirán de situaciones reales o de situaciones que tengan sentido para quien aprende a pesar de que sean artificiales.

Adaptación al medio Internet

Para iniciar la adaptación del Modelo de enseñanza al medio Internet (ME2), se realizará una búsqueda y análisis de páginas web dedicadas a la formación de profesores que hagan referencia a la geometría de los sólidos. Los resultados derivados de esta actividad propiciará la posibilidad de incorporar las modificaciones que se consideren pertinentes al modelo de enseñanza para adaptarlo al medio Internet y así los profesores participantes tengan la oportunidad de aprender contenidos geométricos.

Etapa 2

Una vez terminado el ME2 se llevará a cabo la planeación y el diseño de las sesiones de trabajo para llevarlo a la práctica, para esto se hará un plan de trabajo diario a realizar con los profesores participantes, posteriormente se convocará a profesores de primaria en servicio de colegios españoles concertados para asistir a las sesiones de trabajo.

Con la finalidad de controlar toda la información que surge en la situación de enseñanza cuando el medio por el cual se pretende hacer la formación es Internet, cada sesión de trabajo con los profesores será grabada en video y audio, además se utilizarán otros instrumentos para

la recolección de datos que permitan analizar la actuación de los profesores al realizar las actividades del ME2.

Se diseñarán pruebas objetivas a partir de las utilizadas por Guillen (1997) para la identificación de elementos relativos a cómo va evolucionando en los profesores la construcción de objetos mentales de contenidos geométricos implicados en el ME2 y desarrollo de los procesos matemáticos de describir y clasificar. Su aplicación se llevará a cabo al menos durante dos momentos de la experimentación: antes de la instrucción y al final de la instrucción. Los resultados que se obtengan de las mismas permitirán caracterizar la evolución de cada uno de los participantes, así como el desarrollo del nivel de razonamiento logrado. Dicha situación tendrá como marco de referencia los modelos de competencia y cognitivo elaborados en la etapa 2 del proyecto.

Una vez analizados los resultados se seleccionarán los casos para realizar el seguimiento de algunos de los profesores al observar su actuación cuando éstos diseñen su unidad de actividades para llevar a su aula de clases, para esto se diseñarán instrumentos para la obtención y análisis de datos sobre sus actuaciones durante la planificación y durante su actuación en su aula de clases. Se analizarán los resultados obtenidos para hacer una evaluación de los aprendizajes alcanzados por los profesores participantes.

Etapa 3

A partir de la revisión bibliográfica, de los análisis de comportamientos, así como del modelo de enseñanza diseñado por los profesores y su actuación al llevarla a cabo en su aula de clases, perfilaremos los diferentes componentes del MTLI.

Algunas cuestiones para abrir una discusión en el grupo de trabajo de geometría

Como una forma de generar y guiar una discusión o reflexión dentro del grupo de trabajo de Geometría, la presentación gira en torno a cuestiones sobre la viabilidad del proyecto, su originalidad, fiabilidad, pertinencia e interés dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas además de plantear, sobre todo, preguntas que se centran en el punto que tiene que ver con la recogida y el registro de datos sobre lo que hacen los maestros como usuarios de un modelo de enseñanza previamente diseñado y adaptado al medio Internet. También se avanzan algunas reflexiones sobre la metodología que se usará en la etapa dos del estudio.

Las cuestiones que plateamos son:

¿Los objetivos de la investigación hacen referencia a alguna cuestión que se considere importante actualmente en el campo de investigación en didáctica de las matemáticas?

¿Se vislumbra viable la realización del proyecto?

¿Se puede continuar con la realización del proyecto considerando que es apropiado para una tesis doctoral?

¿La metodología que se ha planteado se considera adecuada?

Acerca de esta última pregunta, surgen diferentes inquietudes respecto a la metodología que utilizaremos durante la etapa 2 del proyecto. Así pues, suponiendo que ya se tiene el ME y que ya se tiene una manera de analizar los datos ¿Cómo conseguimos, dada la especificidad de trabajar con actividades que se encuentran en Internet, registrar lo que hagan los profesores? A continuación plantemos algunas cuestiones sobre la utilidad y deficiencia de algunos tipos de medios para la obtención de datos cuando se trabaja con Internet:

¿Qué tan poderosos resultan estos medios (video y audio) para la obtención de datos en una investigación de carácter cualitativo?

¿Qué se debe considerar para tener un rendimiento óptimo de estos medios de obtención de datos?

¿Qué otros medios pueden ser utilizados para la recolección de datos cuando se trabaja a través de Internet?

¿Cuándo se trabaja por Internet cómo podemos llegar a tener un registro de las actuaciones de los profesores?

¿Qué instrumentos se diseñarán, y qué características tendrán éstos, que nos permitan obtener datos sobre la actuación de los profesores?

¿Qué tanto dependen uno del otro el diseño de los instrumentos de recogida de datos y el diseño para la adaptación del ME al medio Internet?

Al hacer una breve reflexión acerca de la metodología de la etapa 2, creemos que al recoger los datos de las sesiones de trabajo a través del video y audio y haciendo una trascripción de éstas, podemos lograr controlar la mayor parte de la información que surge en la situación de enseñanza. Algunas consideraciones que se deben contemplar para lograr un uso óptimo de estos medios pueden ser las que hacen referencia a los propósitos de la investigación y su carácter cualitativo, las necesidades materiales y las condiciones físicas en las que se llevará a cabo la experimentación así como la parte que se refiere a la definición de las unidades de análisis de la información.

Para el diseño de las pruebas que pretendemos aplicar durante la puesta en práctica del Modelo de Enseñanza (ME) hace falta reflexionar también acerca del medio por el cual serán aplicadas, por un lado al tener el ME adaptado al Medio Internet existe la posibilidad de diseñar las pruebas de tal modo que también se aproveche este recurso para su aplicación, lo que implica cuestionarnos sobre las herramientas que existen para tal finalidad como pueden ser foros de discusión, bases de datos, etc

¿Cuáles de estas herramientas resultarían más eficientes?

¿Qué se debe considerar para la elección de la herramienta? Y por otro lado está la opción de diseñar las pruebas para ser aplicadas en papel.

Referencias bibliográficas

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativa y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar, *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 22 (2), 241-250.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras, *Enseñanza de las ciencias,* vol. 21 (3), 387-404.

Fielker, D.S. (1979): Strategies for Teaching Geometry to Younger Children, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 10 (l), 85-133.

Filloy, E. Y col. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa. Investigaciones en Matemática Educativa*, Ed. Iberoamérica. México.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 3 (2/4), 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel. Dordrecht.

Freudenthal, H. (1878). ¿Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas?, en Piaget, J. y otros (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza. Madrid. 159-173.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reídle. Dordrecht.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*, Síntesis. Madrid.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*, Tesis doctoral. Universitat de València.

Guillén, G. (2000). *Proyecto Docente para optar a una plaza de Profesor Titular de Universidad en el Área de Didáctica de la Matemática*. Universitàt de Valencia.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3), 415-431.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica, *Educación Matemática*, 16 (3), 79-101.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos, *Educación Matemática*, 17 (2), 117-152.

Guillén, G. (2006). *Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas*. http://hipatia.matedu.cinvestav.mx/~descubrirymat/

Guillén, G. y Figueras, O. (2004). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Elaboración de una encuesta. En Castro, E.; De la Torre, E. (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* pp. 219-228. A Coruña.

Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Curso taller como técnica para la obtención de datos. En Maz, A.; Gómez, B,; Torralbo, M. (eds.), *Actas de IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* pp. 227-234. Córdoba.

Guillén, G. y Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudio de algunas Relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En Moreno, F., Gil, F., Socas, M. y Godino, J. D. (Eds), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 183-188. Almería.

Guillén, G. y Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. Estudio exploratorio, *Educación Matemática*, 18 (3), 65-102.

Guillén, G.; Corberán, R.M.; Sáiz, M. y Figueras, O. (2003). Transferencia de resultados de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría al aula. En Castro, E., Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L.; Vallecillos, A. (Eds.), *Actas del VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).* pp. 247-255. Granada

Guillén, G.; Figueras, O.; Corberán, R.M. (2006). Algunos resultados sobre la enseñanza de la geometría en primaria. Un estudio exploratorio, en Aymerich, J.V. y Vives, S.M. . (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI.* Universitat Jaume I. Castellón. 215- 224.

González, E; Guillén, G y Figueras, O (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. En Bolea, P.; González, M. J.; Moreno, M. (Eds.), *Actas de X Simposio de la Sociedad Española*

de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), pp. 195-204. Huesca.

Kindt, M. (1993). Enfoque realista de la Educación matemática, en Salar, A; Alayo, F; Kindt, M y Puig, L. (1993). *Aspectos didácticos de Matemáticas. 4.* ICE de la U. de Zaragoza. Zaragoza. 67-91.

Ponte, J. (1994). Mathematics Teacher' Professional Knowledge, en Ponte, J. y Matos, J. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisboa.

Puig, L. (1997): Análisis fenomenológico, en Rico, L., ed. (1997): *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Horsori. Barcelona. 61-94.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* D. Reidel. Dordrecht:

Villoro, L. (1982). *Creer, saber, conocer.* Siglo XXI editores. México.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* vol. 83, 20-25.

ANÁLISIS DE DEMOSTRACIONES EN ENTORNOS DE LÁPIZ Y PAPEL Y DE CABRI POR ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Félix Rodríguez Díaz
Universidad de las Islas Baleares. Islas Baleares. España
Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universidad de Valencia. Valencia. España.

Resumen

En esta comunicación presentamos una investigación realizada con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la que estamos interesados en conocer si existen diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar de geometría entre un entorno de resolución de Lápiz y Papel y un entorno de Software de Geometría Dinámica.

Abstract

We present in this text a study to investigate the differences among the ways university mathematics students solve geometry proof problems when they are working in two different environments, paper-and-pencil and dynamic-geometry-software.

Rodríguez, F. y Gutiérrez, A. (2007*).* Análisis de demostraciones en entornos de Lápiz y Papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 31-40.

Introducción al problema.

Marrades y Gutiérrez (2000) presentan una investigación para analizar formas en las que el Software de Geometría Dinámica (SGD) puede ser utilizado por estudiantes de Educación Secundaria para mejorar la comprensión de la naturaleza de la demostración matemática y sus destrezas de demostración. Los autores presentan también un marco teórico para describir y analizar las respuestas que dan los estudiantes a problemas de demostrar. Una de las conclusiones del estudio citado es que el SGD puede ayudar a los estudiantes de secundaria a entender la necesidad de las justificaciones abstractas y las demostraciones deductivas en matemáticas. La transición desde las justificaciones empíricas hasta las deductivas es un proceso lento y debe estar arraigado en los métodos empíricos usados por los estudiantes hasta el momento. En este proceso de transición, el SGD permite a los estudiantes realizar exploraciones empíricas antes de intentar producir una justificación deductiva. Al final del artículo apuntan que hay muchas investigaciones basadas en estudiantes de secundaria pero que los estudios basados en estudiantes universitarios son insuficientes.

Es en este punto donde comienza nuestro proyecto. El estudio ha sido realizado con alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura en Matemáticas. Esto implica un cambio en la esencia del planteamiento respecto de otras investigaciones: los alumnos supuestamente ya han finalizado la transición desde las justificaciones empíricas hacia las deductivas. Por tanto, en principio, no buscamos maneras de utilizar el SGD para favorecer o agilizar dicha transición, sino que estamos interesados en conocer si existen diferencias entre los procesos de demostración utilizados por los alumnos en un entorno de SGD, concretamente de Cabri (C), y en un entorno clásico de Lápiz y Papel (LP).

Objetivos.

Como ya hemos comentado anteriormente, podemos suponer que los alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura en Matemáticas se hallan en un terreno deductivo y, por tanto, no queremos utilizar Cabri para agilizar el paso hacia las demostraciones deductivas, como suele realizarse en las investigaciones con alumnos de enseñanza secundaria. Cabri, en el contexto de nuestra investigación, es una herramienta que los estudiantes pueden utilizar para la resolución de problemas, como lo es el compás en un entorno de resolución de Lápiz y Papel. El programa Cabri tiene un amplio abanico de herramientas que lo hacen más potente que los utensilios convencionales utilizados en un entorno de Lápiz y Papel (regla y compás). Además, se trata de software dinámico, lo que introduce nuevos aspectos a tener en cuenta en la resolución de problemas de demostrar. Por tanto, hemos considerado pertinente marcar los siguientes objetivos centrales de nuestra investigación:

O1. Identificar los tipos de demostraciones que hacen los estudiantes de Matemáticas en un entorno de Lápiz y Papel (LP) y un entorno Cabri (C).

O2. Analizar si existen diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar por estudiantes de Matemáticas entre ambos entornos de resolución y, en caso de existir, determinar de qué tipo son las diferencias.

Creemos conveniente aclarar ciertos términos utilizados en la redacción de los objetivos principales. Una aclaración es sobre el significado del término “resolución”, que aquí está utilizado en el sentido del proceso que realiza una persona para llegar al resultado del problema, donde el término “resultado” significa la respuesta final a la pregunta del problema, producto de la resolución. Nótese que utilizamos el término “problema” en lugar de “ejercicio” ya que en didáctica de las matemáticas a éste se le da la connotación de pura manipulación algorítmica o de cierta mecánica o rutina memorizadas. Para más detalle sobre

la terminología propia de resolución de problemas aquí utilizada, puede consultarse Puig (1996, capítulo 2).

Por otra parte, es preciso aclarar que utilizamos los términos *demostrar* y *demostración* en un sentido amplio, de modo que incluya cualquier tipo de argumento o justificación elaborado para convencer de la veracidad de una afirmación matemática.

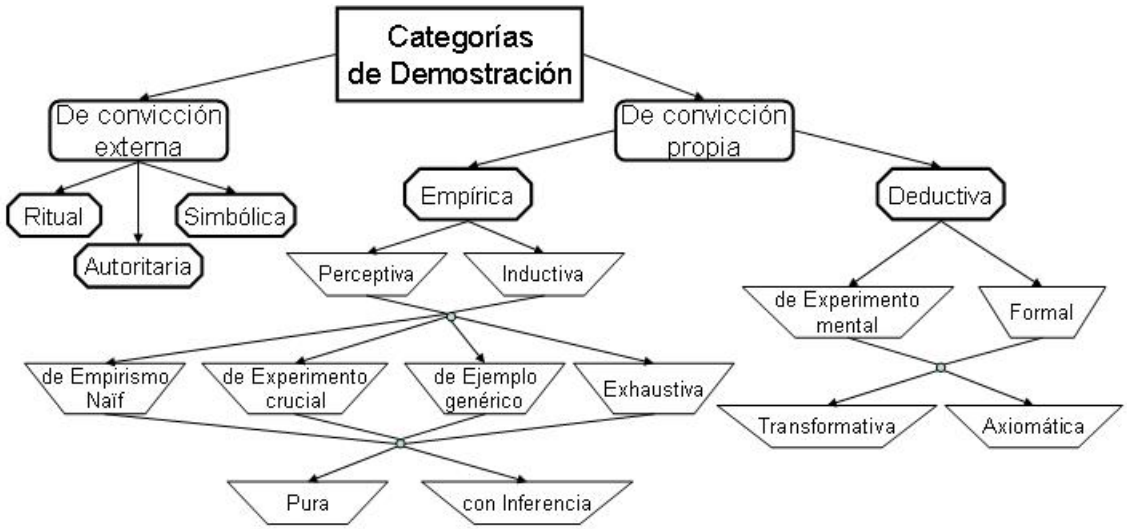
Otra aclaración es qué entendemos por diferencias en las resoluciones o en los procesos de demostrar. Estas diferencias no radican en la estética de las producciones ni en el material utilizado, ya que éstas son obvias. Nos referimos, por ejemplo, a diferencias en la tipología de las demostraciones realizadas, en el mismo sentido que en los trabajos de Bell (1976), Balacheff (1988), Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) e Ibañes (2001); o en las fases recorridas en los procesos de exploración-conjetura-demostración, en el sentido de los trabajos de Gallo (1994), Arzarello y otros (1998, 2002), y Olivero (1999).

Esta última aclaración es muy importante ya que hace énfasis en el hecho de que si no hallamos diferencias en las resoluciones efectuadas en ambos entornos puede significar dos cosas: que realmente no existen dichas diferencias en los aspectos que analizamos o que la categorización de las demostraciones y estudio de fases empleados no sirven para este fin.

Marco teórico.

Para el análisis de los datos de nuestra investigación, en lo referente a categorías de demostración, hemos intentado reunir aquellos aspectos de las clasificaciones de varios autores, Bell (1976), Balacheff (1988), Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) e Ibañes (2001), que consideramos más adecuados para alcanzar los objetivos marcados en nuestro estudio.

Sin más detalle incluimos el siguiente diagrama que sintetiza nuestra categorización de la demostración. Remitimos al lector a Rodríguez (2006) para la explicación pormenorizada de cada una de las categorías.



La información aportada por las categorías de demostración es insuficiente si queremos obtener una información detallada de los procesos de resolución, debido a que asumen que el estudiante trabaja de una forma lineal y coherente en una categoría desde el principio hasta el final de la resolución del problema.

Así pues, es necesario ampliar el marco teórico de las clasificaciones de la demostración y el análisis de las resoluciones de manera que queden recogidos de alguna forma el tipo de trabajo realizado en cada momento de la resolución de un problema y los diferentes saltos

entre unas modalidades y otras. Para ello, basándonos en investigaciones sobre los procesos de exploración-conjetura-demostración descritos en Arzarello y otros (1998), y en la línea de Marrades y Gutiérrez (2000), definimos:

- *Fase ascendente*: toda actividad empírica que ayuda a entender el problema, generar conjeturas o verificarlas.
- *Fase descendente*: toda actividad encaminada a construir una demostración deductiva de una conjetura realizada.

Contexto.

La fase experimental de la investigación fue realizada durante el curso 2004-2005 con los 8 alumnos matriculados en la asignatura "Métodos Geométricos", optativa cuatrimestral del segundo ciclo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universitat de les Illes Balears. Dicha asignatura constaba de clases de aproximadamente 100 minutos, dos días a la semana durante el primer cuatrimestre.

Para formar las cuatro parejas dimos libertad a los alumnos para que las formaran, con la única consigna de que al menos un miembro de cada pareja hubiera cursado la asignatura de geometría de primer curso del plan nuevo. Debido a que coexistían dos planes de estudios y en el antiguo no existía ninguna asignatura de geometría euclídea, la directriz dada impedía que formaran una pareja sin una base establecida de conocimientos en este tipo de geometría.

Una vez introducidos los conceptos básicos necesarios, comenzamos con las clases de resolución de problemas. La estructura general de una clase fue la siguiente:

i) se enuncia el problema,

ii) cada pareja intenta resolverlo por separado,

iii) la docente supervisa las resoluciones de cada pareja, evaluando si es necesario dar alguna ayuda o resolver alguna duda que surja,

iv) si dentro del tiempo de la clase se resuelve el problema, entonces alguna de las parejas que lo han resuelto expone su resolución en la pizarra y se discute entre toda la clase bajo la moderación de la docente.

Si no da tiempo a terminar el problema dentro de la clase, éste queda pendiente como tarea para casa que las parejas deben entregar a la docente en las próximas clases. Tanto si el problema queda resuelto como si no, al terminar la clase, los alumnos deben entregar al investigador las resoluciones que han realizado durante la clase. El papel que jugó el investigador durante las clases fue el de observador participativo, tomando notas de campo, y colaborando con la docente en la tarea de supervisión de las resoluciones y evaluación de la necesidad de dar ayudas o resolver dudas.

La batería de problemas fue dividida en dos bloques. El primero corresponde a los problemas que debían resolverse en el entorno LP, y el segundo corresponde a aquellos que debían resolverse en el entorno C. Cada uno de estos bloques comienza con varios problemas de construir (problemas dónde el objetivo es construir cierta figura geométrica y justificar la corrección de los pasos dados para realizarla) que sirvieron de recordatorio para la resolución de problemas de geometría euclídea, de entrenamiento en la nueva forma de escribir las resoluciones de los problemas y para familiarizarse con el compañero de pareja, la dinámica de las clases y con el entorno (especialmente en el uso de Cabri). Además, una vez finalizados los problemas de LP y antes de comenzar los de C, dedicamos dos clases completas a explicar a los alumnos el funcionamiento del programa Cabri-Géomètre (versión II plus para Windows) y sus comandos y funciones con ejercicios prácticos para que fueran adquiriendo cierta destreza en su manejo, que acabarían de obtener con los problemas de construir.

En cada bloque, una vez finalizados los problemas de construir, fueron resueltos los problemas de demostrar que han sido objeto de estudio en este trabajo. Los problemas de cada tipo (construir y demostrar) de la lista que habíamos elaborado para el curso fueron repartidos en los dos bloques sin seguir un criterio específico. Dicho de otro modo, los problemas del bloque de C no son problemas que cumplan ciertas condiciones ni que hayan sido elegidos porque sea más fácil o difícil su resolución con dicho software.

Metodología.

Uno de los dilemas que surgieron a la hora de planificar la investigación fue hallar una herramienta metodológica que nos permitiera obtener la máxima información posible sobre los procesos cognitivos realizados por los alumnos durante la resolución de los problemas, es decir en sus intentos de llegar a escribir demostraciones que sean las soluciones de los problemas.

La información aportada por pruebas de tipo test puede ser útil si lo que nos interesa es la solución del problema, pero es insuficiente para estudiar los procesos realizados en la resolución del mismo.

Por otra parte, la información que aporta una demostración formal "pasada a limpio" y saneada de conjeturas refutadas y comprobaciones empíricas es escasa. La valoración de las demostraciones finales producidas por los estudiantes, comparadas con las resoluciones de "experto", no es lo que más interesa en esta investigación.

Si son recogidas las producciones "en sucio" de los alumnos, esto es, las hojas de papel que contienen sus conjeturas, comprobaciones empíricas, fragmentos de demostraciones informales y formales, sin más orden que el espacial del lugar en que han sido escritas por los alumnos, obtenemos una información mucho más rica, aunque, al mismo tiempo, mucho más compleja y difícil de analizar.

Realizar entrevistas clínicas sería útil y productivo, pero entrevistar a todas las parejas de alumnos después de cada problema era, en la práctica, imposible dado el número de problemas y el tiempo disponible para ello, y entrevistar sólo a parte de los estudiantes o sólo después de unos pocos problemas podría dar insuficiente información.

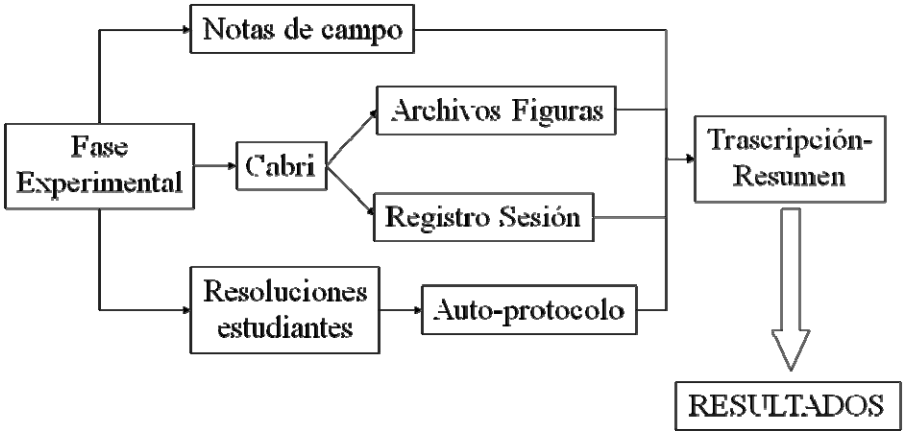
Para solventar esta serie de inconvenientes de los métodos tradicionales de recogida de datos pensamos que, como novedad de la investigación y a modo experimental, podríamos hacer que fueran los propios alumnos quienes, mientras resolvían los problemas, escribieran un "guión" de lo que hacían y pensaban, qué decisiones tomaban y por qué las tomaban, y cualquier otro aspecto que ellos consideraran interesante o que había influido en su trabajo. Hemos denominado *auto-protocolo*, ver Gutiérrez (2005) y Rodríguez (2006), a estos textos escritos por los estudiantes, que, generalmente, incluyen, entremezclados pero ordenados temporalmente, sus progresos en la resolución de los problemas y sus comentarios de tipo descriptivo o metacognitivo.

Además de los auto-protocolos, recogimos notas de campo del investigador, los archivos de las figuras de Cabri guardadas en el ordenador y los registros de sesión de Cabri.

Para integrar la información procedente de los diferentes tipos de datos obtenidos sobre la resolución de un problema por una pareja de estudiantes, y para facilitar su posterior análisis, especialmente en los problemas resueltos con Cabri, elaboramos unas tablas que incluyen

- un resumen detallado del auto-protocolo correspondiente, con transcripciones de los fragmentos significativos,
- comentarios del investigador y

- los dibujos en papel o figuras de Cabri correspondientes al trabajo realizado en esos párrafos.



Resultados.

En cuanto a las categorías de demostración la siguiente tabla sintetiza los resultados obtenidos:

Categoría	Pareja	Problema								
		LP05	LP06	LP07	LP09	C03	C04	C05	C06	C07
Experimento mental transformativa	01	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	02		x	x	x		x	x	x	x
	03		x	x	x	x	x	x	x	x
	04		x	x	x	x	x	x	x	x
Inductiva de ejemplo genérico con inferencia	02	x				x				
Perceptiva de empirismo naïf con inferencia	03	x								
	04	x								

LP = problema resuelto en entorno de Lápiz y Papel C = problema resuelto en entorno Cabri

Respecto a las fases ascendentes y descendentes aparecidas en las resoluciones, la siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Pareja	Problema								
	LP05	LP06	LP07	LP09	C03	C04	C05	C06	C07
01	II	II	II	II	II	II	II	II	II
02	I	II	II	II	I	II	II	II	II
03	I	II	II	II	II	II	II	II	II
04	I	II	II	II	II	II	II	II	II

I = Secuencia de fases ascendentes (sólo aparecen fases ascendentes en la resolución)

II = Secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas.

Para una descripción mucho más detallada del análisis de los resultados del estudio véase Rodríguez (2006).

Conclusiones.

Una labor de conjunción de la información contenida en los diferentes tipos de datos recogidos nos permite realizar un análisis de los resultados desde la perspectiva planteada desde un principio y elaborar las siguientes conclusiones:

1. En problemas de demostrar de geometría euclídea, salvo muy pocas excepciones, los estudiantes de la experiencia, alumnos de la licenciatura en Matemáticas, han realizado demostraciones deductivas del tipo experimento mental transformativo, independientemente del entorno de resolución (LP o C).

2. En los aspectos analizados, y en el nivel educativo estudiado, no hemos hallado evidencias de que existan diferencias significativas entre las resoluciones del entorno LP y las del entorno C.

3. Las categorizaciones de la demostración propuestas y el estudio de fases nos han permitido hacer un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes a problemas de demostrar en ambos entornos, LP y C, pero no han mostrado que existan diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar con alumnos de este nivel entre ambos entornos, ya que todas quedan etiquetadas en la misma categoría y no hay diferencias evidentes en las secuencias de fases.

4. El auto-protocolo ha resultado ser una herramienta metodológica útil para obtener información acerca de la actividad de los estudiantes durante la resolución de problemas que, en unos casos, no aparece en la información que obtenemos a través de otros tipos de datos y, en otros, la complementa.

Sin intención de dar carácter general a las conclusiones de nuestro estudio, al revisarlas inducen al establecimiento de una hipótesis de trabajo para futuras investigaciones: el software de geometría dinámica no influye en la categoría de demostración ni en la secuencia de fases realizadas por alumnos que han finalizado la transición hacia las demostraciones deductivas. Por consiguiente, y a diferencia de lo que algunas publicaciones informan sobre alumnos de enseñanza secundaria, la utilización de Cabri parece que no hace que los alumnos de la licenciatura en Matemáticas muestren menos necesidad de realizar demostraciones deductivas para justificar los resultados.

Limitaciones y vías abiertas.

Como en los aspectos analizados no hemos hallado diferencias entre las resoluciones de ambos entornos, es necesario ampliar el análisis a otros aspectos, además de las categorías de demostración y las secuencias de fases. Igualmente, en futuros estudios deben tenerse en cuenta las limitaciones de esta investigación con el objetivo de fortalecer sus puntos débiles:

- El auto-protocolo ha dado buenos resultados como herramienta metodológica experimental, no obstante hay que depurarlo y determinar los contextos en los que es útil aplicarlo.
- Se debe realizar un análisis más profundo de los procesos de exploración-conjetura-demostración. Identificar las fases ascendentes y descendentes es insuficiente para una descripción detallada de los procesos seguidos en la resolución de un problema de demostrar. Puede resultar conveniente combinar estas fases con otros conceptos como, por ejemplo, la abducción descrita en Olivero (1999).
- Tal y como afirmamos en la conclusión 2, no hemos hallado evidencias de que existan diferencias significativas entre las resoluciones del entorno LP y las del entorno C. Esta conclusión surge de la comparación de los resultados obtenidos en el entorno LP con los obtenidos en el entorno C. En el caso de las categorías de demostración, en nuestro estudio, el resultado de la comparación es obvio ya que

casi la totalidad de las resoluciones quedan descritas como deductivas de experimento mental transformativas. La comparación no es tan sencilla si hablamos de secuencias de fases. Si clasificamos las secuencias de fases en tipos, resulta que casi la totalidad de las resoluciones quedan catalogadas por un mismo tipo (secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas). Sin embargo, esa clasificación en dos tipos es muy simple. Es necesario, junto con la sugerencia del punto anterior, disponer de un método o una herramienta para poder comparar las secuencias de fases de dos resoluciones. Sin unos criterios específicos establecidos, la comparación queda reducida a una visión simplista de las fases o a una apreciación subjetiva del investigador.

A modo de comentario final, esperamos que nuestro estudio arroje un poquito de luz sobre aspectos insuficientemente investigados y, sobre todo, abra el camino a nuevas líneas de investigación.

Referencias bibliográficas.

Arzarello, F. y otros (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, pp. 24-31. University of Stellenbosch. Stellenbosch.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children,* pp. 216-235. Hodder & Stoughton: Londres.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, vol. 1, 23-40.

Gallo, E. (1994). Control and solution of "algebraic problems". *Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*, 52, vol. 3, pp. 263-278.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría Dinámica. En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: IX Simposio de la SEIEM*, pp. 27-44. Universidad de Córdoba y SEIEM: Córdoba.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, pp. 234-283. American Mathematical Society: Providence, EE.UU.

Ibañes, M.J. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *Proceedings of ICTMT4*. Plymouth, Inglaterra.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* (Colección Mathema, 6), Comares. Granada.

Rodríguez, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la licenciatura en Matemáticas.* Memoria del Trabajo de Investigación presentado en el programa de doctorado de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. Valencia.

Rodríguez, F.; Gutiérrez, A. (2006). Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 4, p. 433. Prague, Czech Republic.

LAS ACTITUDES Y EMOCIONES ANTE LAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTROS DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Ana Caballero Carrasco
Lorenzo J. Blanco Nieto
Dpto. Dtca. de las CC. Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura
Guerrero Barona, Eloisa
Departamento de Psicología y Antropología

Resumen

Los factores afectivos del profesorado tienen una gran influencia en los de los alumnos y en los logros de éstos. Además, pueden explicar gran parte de la atracción y rechazo hacia las matemáticas. En esta ponencia presentamos algunos de los resultados hallados en una investigación en curso acerca del dominio afectivo de los estudiantes para maestro de la Universidad de Extremadura hacia las matemáticas, describiendo por tanto las actitudes, creencias y emociones que manifiestan hacia dicha disciplina. Esta descripción parte de los datos obtenidos de la aplicación y posterior análisis de un cuestionario elaborado de acuerdo al fin propuesto.

Palabras clave: matemáticas, dominio afectivo, actitudes, creencias, emociones, estudiantes para maestro.

Summary

The affective factors of the teaching staff have a great influence in those of the students and in the profits of these. In addition, they can explain great part of the attraction and rejection towards the mathematics. In this communication we presented/displayed some of the results found in an investigation in course about the affective domain of the students for teacher of the University of Extremadura towards the mathematics, describing therefore the attitudes, beliefs and emotions that declare towards this discipline. This description leaves from the collected data of the application and later analysis of a questionnaire elaborated according to the proposed aim.

Key words: mathematics, affective domain, attitudes, believes, emotions, students for teacher.

Caballero, A.; Guerrero, E. y Blanco, L. J. (2007), Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 41-52.

Introducción

A pesar de que las matemáticas son necesarias en todos los ámbitos de la vida, existe un alto índice de fracaso escolar en dicha disciplina, tal como señalan diversas evaluaciones tanto a nivel nacional como internacional (INECSE, 2001; PISA, 2003), siendo muchos los alumnos que generan actitudes negativas hacia la materia, manifestando a veces aversión y/rechazo hacia esta disciplina. La aparición de estas actitudes podría estar relacionada con los fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, de ahí que consideremos necesario el estudio de los factores afectivos y emocionales en el aprendizaje matemático de los estudiantes para maestro, ya que, como futuros docentes, sus creencias y emociones hacia las matemáticas influirán en el logro de sus alumnos así como en las creencias y actitudes de éstos hacia la misma, tal como señalan diversos autores (Gómez-Chacón, 1998; Carpenter y Fennema, 1992; Emenaker, 1996; Etxandi, 2007; Espejo, 1999; Bermejo, 1996). De esta forma podremos mejorar dichos factores y así, de forma indirecta, mejorar también las de sus respectivos alumnos.

Con el objetivo de valorar la importancia de los factores afectivos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y el propósito de promover actitudes y creencias positivas en los estudiantes para maestro que redunden en la mejora del rendimiento de su práctica profesional y de las expectativas de logro hacia las matemáticas, estamos desarrollando un estudio descriptivo en la Facultad de Educación de Badajoz de la Universidad de Extremadura[1].

La muestra, escogida a través de un muestreo no probabilístico de conveniencia, está compuesta por 249 estudiantes para maestro pertenecientes a los cursos de primero y tercero de las especialidades de Educación Primaria, Educación Física y Educación Especial.

A posteriori se ampliará esta muestra con los cursos de primero y tercero de las mismas especialidades, habiendo así estudiado cuatro promociones (o generaciones) de estudiantes para maestro. Este estudio servirá como base para un estudio posterior en el que se llevará a cabo un programa de intervención cuyo objetivo se centrará en la modificación de los afectos hacia las matemáticas de los estudiantes para maestro, y más específicamente en relación con la enseñanza/aprendizaje de la resolución de problemas.

1. Marco teótico

La dimensión afectiva puede definirse como un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son considerados como algo diferente de la pura cognición, incluyendo no sólo los sentimientos y emociones (McLeod, 1989), sino también las creencias, actitudes, valores y apreciaciones (Gómez-Chacón, 2000). Siguiendo a McLeod (1989) consideramos que el dominio afectivo en educación matemática engloba creencias, actitudes y emociones.

Las **creencias** son definidas, según Gilbert (1991) como concepciones o ideas, formadas a partir de la experiencia, sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y sobre sí mismo en relación con la disciplina.

McLeod (1992) con relación a las creencias establece cuatro ejes:

[1] El trabajo se inserta en la investigación desarrollada al amparo del Proyecto de Investigación “La formación inicial y permanente de profesores de Matemáticas en Secundaria y Bachillerato en España y Portugal, en el nuevo marco europeo y en el contexto de uso de las nuevas tecnologías”, aprobado en III Plan Regional de Investigación, Desarrollo e Innovación (2005-2008), y concedido por la Junta de Extremadura.

a) Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su aprendizaje; aunque involucran poca componente afectiva, constituyen una parte importante del contexto social. Suelen percibirse las matemáticas como fijas, inmutables, externas, irreales, abstractas, no relacionadas con la realidad, una aplicación de hechos, reglas, fórmulas y procedimientos… Estas creencias tienen una influencia negativa en la actividad matemática y en la resolución de problemas, provocando una actitud de recelo y desconfianza, tal como señalan González-Pienda y Álvarez (1998). De igual forma, cuando la situación de aprendizaje no corresponde con las expectativas del alumno sobre cómo ha de ser la enseñanza de las matemáticas, se produce una fuerte insatisfacción que incide en la motivación del alumno (Gómez-Chacón, 2000).
b) Creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas; tienen una fuerte carga afectiva en relación con la confianza, el autoconcepto y la atribución causal del éxito y fracaso escolar (Gómez-Chacón, 1997). La implicación del alumnado en el proceso de aprendizaje aumenta cuando se siente competente, cuando confía en sus capacidades y tiene expectativas de autoeficacia. Por otra parte, siguiendo a Miras (2001), el aprendizaje se ve favorecido si tanto los éxitos como los fracasos son atribuidos a causas internas, variables y controlables (esfuerzo personal, perseverancia, planificación…) y desfavorecido si los éxitos se atribuyen a causas externas e incontrolables (suerte, facilidad de la tarea…) y los fracasos a causas internas, estables e incontrolables (escasa capacidad). De ahí que consideremos necesario estudiar estos aspectos en los estudiantes para maestros.
c) Creencias sobre la enseñanza de las matemáticas. Es importante el estudio de las expectativas de los estudiantes acerca del rol que ha de desempeñar el profesor, ya que a menudo se produce un choque entre la idea arraigada del profesor como mero transmisor de conocimientos y la idea constructivista del profesor como dinamizador del aprendizaje. Bermejo (1996) indica que los estudiantes demandan a un profesorado capaz de estimular la curiosidad y los intereses del alumnado y que establezca un clima emocional positivo. No menos importante es conocer el valor que otorgan a las interacciones entre profesor-alumno y alumnos entre sí, puesto que el clima de aula repercute en el rendimiento del estudiantado.
d) Creencias suscitadas por el contexto social, las cuales, siguiendo a Gómez-Chacón (1997), influyen en la situación de enseñanza-aprendizaje, en la selección de los conocimientos y en las circunstancias y condiciones para que se dé el aprendizaje, de ahí la necesidad de su estudiar dichas creencias en los estudiantes para maestro.

Hart (1989) define **actitud** como una predisposición evaluativa (positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. En el ámbito psicopedagógico se definen las actitudes en función de tres componentes: el cognitivo (creencias, expectativas, preferencias…), el afectivo (sentimientos, emociones y estados de ánimo) y el comportamental (conductas e intenciones de acción). Guerrero, Blanco y Vicente (2002) por su parte definen la actitud como una predisposición permanente conformada de acuerdo a una serie de convicciones y sentimientos, que hacen que el sujeto reaccione acorde con sus creencias y sentimientos.

En relación a las matemáticas, distinguimos entre *actitudes hacia las matemáticas* y *actitudes matemáticas*; mientras que las primeras se refieren a la valoración y aprecio por esta materia subrayando más la componente afectiva, las actitudes matemáticas comprenden el manejo de las capacidades cognitivas generales, resaltando el componente cognitivo (Callejo, 1994; Gómez-Chacón, 1997).

Algunas de las actitudes y comportamientos más habituales en el proceso de aprendizaje que manifiesta el alumnado son el rechazo, la negación, la frustración, la evitación, etc. Se hace necesario pues el estudio de las actitudes de los estudiantes para maestro puesto que el desarrollo de actitudes positivas a través del fomento de sentimientos y emociones positivas facilitará un cambio en las creencias y expectativas hacia la materia, favoreciendo su acercamiento hacia las matemáticas.

Tomando como base las definiciones de McLeod (1992) y Gómez-Chacón (2000) acerca de las **emociones**, podemos definir éstas como la respuesta afectiva caracterizada por la activación de Sistema Nervioso Autónomo (SNA) ante la interrupción y discrepancias entre las expectativas, pensamientos, del sujeto y lo que éste experimenta, las acciones; serían el resultado del aprendizaje, de la influencia social y de la interpretación. De ahí la *teoría de la discrepancia de Mandler*, que explica la forma en que las creencias de los estudiantes y su integración con situaciones de resolución de problemas conducen a respuestas afectivas. Así, conocer las expectativas de los estudiantes en relación a las matemáticas sería un primer paso para abordar de forma efectiva su afecto durante el desarrollo del proceso de resolución de problemas, a través de un programa de intervención.

La *teoría de la atribución de Weiner* explica que ante el resultado de un acontecimiento se produce una reacción general positiva o negativa, según se perciba éxito (felicidad) o fracaso (frustración); tras la valoración del resultado y la reacción afectiva, se buscará una adscripción causal en función de la atribución/es elegidas y se generarán una serie de emociones diferentes (orgullo, desesperanza, culpabilidad, ira, autoestima, gratitud…). Dichas reacciones serían por tanto dependientes del resultado e independientes de la atribución.

Gómez-Chacón (2000) manifiesta que los afectos ejercen una influencia decisiva en el aprendizaje y en cómo los alumnos perciben y consideran las matemáticas, así como en la propia visión de sí mismos como aprendices y en su conducta. Así, los afectos en el aprendizaje matemático desempeñan las siguientes **funciones**:

a) *Como un sistema regulador*; la toma de conciencia de la actividad emocional sirve al alumnado y al profesorado como instrumento de control de las relaciones interpersonales y de autorregulación del aprendizaje.
b) *Como un indicador de la situación de aprendizaje*; a partir de la perspectiva matemática y las creencias del estudiante se pueden estimar sus experiencias de aprendizaje, la perspectiva profesional del profesor, el tipo de enseñanza recibida, etc.
c) *Como fuerzas de inercia*, cuando los afectos impulsan la actividad matemática, y como fuerzas de resistencia al cambio.
d) *Como vehículos del conocimiento*, pues trata de conocer las dificultades que comporta tanto aprender como enseñar matemáticas, facilitando la búsqueda de estrategias más efectivas a utilizar en el aula para la obtención de mejores resultados.

Tal como señala la misma autora, para un desarrollo óptimo de la dimensión afectiva en el aula de matemáticas son necesarias situaciones que posibiliten el descubrimiento y la liberación de creencias limitativas del alumnado, la incorporación de experiencias vitales así como la estimación de la emoción y el afecto como vehículos del conocimiento matemático. Para ello es precisa la formación del profesorado en aspectos matemáticos y didácticos específicos relativos al área de la sociología y psicología de la Educación

Matemática. Pero para que dicha formación sea posible es necesario en primer lugar conocer los afectos de los docentes, objetivo central del estudio que aquí se presenta.

2. Metodología

Justificación de la utilización del cuestionario

Consideramos el cuestionario como el instrumento adecuado para la recogida de datos en este estudio ya que, tal como señala Callejo (1994), dicha herramienta permite recoger información acerca de creencias y actitudes y además, el cuestionario, concede al alumno un papel en el proceso de evaluación y exige poco tiempo al profesor para recoger los datos.

De acuerdo con Gairín (1990) el cuestionario permite la administración simultánea a muchas personas así como el anonimato de éstas y facilita el análisis e interpretación de los datos, entre otras ventajas.

De hecho son múltiples los autores que han hecho uso del cuestionario para describir y analizar las creencias, actitudes y emociones de alumnos y de futuros profesores hacia las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. Entre dichos autores cabe destacar a Gairín (1990); Callejo (1994); Camacho, Hernández y Socas (1995); Hernández y Socas (1999); Hernández, Palarea y Socas (2001); Gómez-Chacón (2000); Gil (2003); Amorim (2004); Ruiz (2002).

Elaboración del cuestionario

El diseño y valoración del cuestionario se desarrolló a través de las siguientes fases:

1º A partir de la revisión de las fuentes bibliográficas relacionadas con el objeto de estudio y del análisis previo de los ítems de otros cuestionarios, en concreto los de Gil (2003), Gómez-Chacón (2000), Callejo (1994) y Amorim (2004), se seleccionaron algunos ítems textuales, mientras que otros fueron adaptados y modificados. A éstos se añadieron ítems de elaboración propia referentes a la valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación a las matemáticas. Además, se elaboraron los campos concernientes a la recogida de información relativa al alumno, incluyendo las siguientes variables: sexo, edad, especialidad de magisterio, curso, localidad de procedencia (rural o urbana) y estudios preuniversitarios.

Tras ello se procedió a la organización y estructuración de los ítems en categorías o factores, obteniendo en total seis categorías:

2º En segundo lugar se procedió a la determinación de la tipología y cantidad de preguntas decantándonos por preguntas cerradas, dada su facilidad a la hora de interpretar las respuestas. Ante dichas preguntas los encuestados han de posicionarse a través de cuatro alternativas de respuestas en función del grado de conformidad que presente con cada uno de los aspectos (Muy en desacuerdo – En desacuerdo – De acuerdo – Muy de acuerdo).

3º A continuación se sometió un cuestionario inicial a la evaluación de expertos en el tema, valorando así la validez de contenido del instrumento, quienes nos aportaron diversas sugerencias en torno a las cuales se efectuaron los ajustes adecuados. Consideramos adecuadas las cualidades técnicas por estar compuesto, en su mayoría, de ítems validados en otras investigaciones como la de Gil, Blanco, y Guerrero (2006a, 2006b).

4º Por último se procedió a aplicar el cuestionario a un número reducido de estudiantes para maestros con la finalidad de detectar cualquier posible fallo o error.

Así, el cuestionario final consta de 48 ítems distribuidos en seis categorías diferentes, tal como se muestra a continuación.

a) Creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje.
   - Objetivo: analizar y buscar una mayor comprensión del papel y valor que los estudiantes para maestro atribuyen a la matemática y al aprendizaje de la misma.
   - Descriptores:
     - Visión de utilidad, aplicabilidad e importancia de las matemáticas en todas las esferas de la vida:
       - *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.*
       - *Las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemáticas para resolver problemas no tienen nada que ver con las utilizadas para resolver problemas en la vida cotidiana.*
     - Percepción de la disciplina como conocimiento abstracto, memorístico, mecánico:
       - *Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad*
       - *En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas*
       - *Al intentar resolver un problema es más importante el resultado que el proceso seguido.*
     - Visión del estudiante para maestro sobre cómo se deben aprender matemáticas:
       - *Casi todos los problemas de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.*
       - *La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual*
       - *En primaria, al resolver un problema buscaba distintas maneras y métodos.*

b) Creencias acerca de uno mismo como aprendiz de matemáticas
   - Objetivo: explorar la autoimagen del estudiante para maestro con respecto a sus habilidades y capacidades como aprendiz de matemáticas.
   - Descriptores:
     - Nivel de confianza y seguridad en sus habilidades, en sus capacidades y posibilidades para desenvolverse con éxito en la materia:
       - *Cuando resuelvo un problema suelo dudar de si el resultado es correcto.*
       - *Tengo confianza en mí mismo cuando me enfrento a los problemas de matemáticas*
       - *Me considero muy capaz y hábil en matemáticas*
       - *Estoy calmado y tranquilo cuando resuelvo problemas de matemáticas*
     - Expectativas de logro relacionadas con el placer y gusto por aprender matemáticas y por la influencia a la hora de optar por distintos itinerarios formativos, con el deseo de dominar la materia, con la valoración y reconocimiento de los demás:
       - *El gusto por las matemáticas me influyó a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato.*
       - *Los buenos alumnos en matemáticas son más valorados y admirados por los compañeros*
       - *Si no se comprenden las matemáticas, difícilmente se podrán asimilar y dominar otras asignaturas relacionadas con ella (como física, química, etc.)*
     - Atribución causal de éxito o fracaso en matemáticas (qué motivos atribuyen al éxito o fracaso –profesor, dedicación, esfuerzo, suerte-):

- *El rendimiento en matemáticas depende en gran medida de la actitud del profesor hacia el estudiante.*
- *Cuando se dedica más tiempo de estudio a las matemáticas se obtienen mejores resultados en la resolución de problemas.*
- *Cuando me esfuerzo en la resolución de un problema suelo dar con el resultado correcto.*
- *La suerte influye a la hora de resolver con éxito un problema de Matemáticas.*

c) Creencias acerca del papel del profesorado de matemáticas

- Objetivo: examinar las percepciones y valoraciones de los estudiantes para maestro acerca del papel del profesor de matemáticas.
- Descriptores:
  - Visión de las características personales y del papel del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje:
    - *Los profesores de matemáticas están siempre dispuestos a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.*
    - *Los buenos profesores que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.*
    - *Los profesores de matemáticas se interesan por la evolución y el rendimiento del estudiante en dicha materia.*
    - *En clase de matemáticas los profesores valoran el esfuerzo y reconocen el trabajo diario del estudiante en la asignatura.*
  - Metodología y recursos didácticos empleados por el profesorado:
    - *En las clases de matemáticas los profesores emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que permiten al estudiante relacionar las matemáticas con situaciones de la vida diaria.*
  - Interacción profesor-alumno:
    - *Mis relaciones con los profesores de matemáticas han sido satisfactorias*

d) Creencias suscitadas por el contexto sociofamiliar

- Objetivo: Determinar las influencias del entorno (familia, amigos...) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, con el fin de comprender al sujeto en el contexto en que se desenvuelve.
- Descriptores:
  - Interés de los padres:
    - *Mis padres me han animado y ayudado con los problemas de matemáticas*
  - Expectativas de los padres:
    - *Alguno de mis padres ha esperado de mí buenos resultados en matemáticas.*
  - Interés de compañeros/amigos:
    - *Mis amigos/as pasan de las matemáticas*
  - Estatus socioeconómico, sentimiento de competencia social, éxito académico, laboral:
    - *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas.*
    - *Aumentar los conocimientos matemáticos hace a una persona sentirse competente en la sociedad.*
    - *Dominar las matemáticas permite tener éxito en otros estudios.*
    - *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mi profesión.*

  - Estereotipos sociales en matemáticas: asociación gusto/placer por las matemáticas con personalidad extravagante, rara, con una mayor inteligencia y creatividad:
    - *La gente a la que le gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.*
    - *Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.*
    - *La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando.*

e) Actitudes y reacciones emocionales hacia las matemáticas
- Objetivo: conocer y analizar las actitudes y reacciones emocionales que los estudiantes para maestro manifiestan hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Descriptores:
  - Grado de perseverancia en las tareas:
    - *Ante un problema complicado suelo darme por vencido fácilmente.*
    - *Cuando fracasan mis intentos por resolver un problema lo intento de nuevo.*
    - *La resolución de un problema exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.*
  - Nivel de satisfacción, curiosidad y seguridad en la materia:
    - *Cuando me enfrento a un problema experimento mucha curiosidad por conocer la solución*
    - *Cuando resuelvo problemas en grupo tengo más seguridad en mí mismo.*
    - *Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un problema matemático.*
  - Nivel de ansiedad (angustia, miedo), sensación de fracaso y frustración, bloqueo:
    - *Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un problema empiezo a sentirme inseguro, desesperado, nervioso…*
    - *Si no encuentro la solución de un problema tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo*

f) Valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación a las matemáticas
- Objetivo: analizar la valoración del alumno acerca de su formación en matemática así como los cambios que magisterio ha producido en su afectividad ante dicha materia.
- Descriptores:
  - Nivel de satisfacción en la formación como maestro en matemáticas:
    - *Se completaron mis expectativas respecto a mi formación en relación a la enseñanza de las matemáticas*
    - *En magisterio, he descubierto otras formas de abordar los problemas matemáticos.*
    - *Me siento capacitado con mi formación para enseñar matemáticas.*
  - Visión del estudiante para maestro acerca del cambio producido en sus actitudes y creencias hacia las matemáticas debido a los estudios de magisterio:
    - *Los estudios de magisterio han cambiado mi percepción sobre las matemáticas.*
    - *Como estudiante de magisterio y futuro maestro, valoro de forma más positiva la importancia de las matemáticas que antes*

Esta última categoría sólo va dirigida a los alumnos matriculados en el tercer curso de magisterio ya que, los del primer curso aún no tienen la experiencia ni formación suficiente para valorar los diferentes aspectos que en ella se reflejan.

3. Resultados previsibles

Aunque esta primera parte de la investigación aún no ha sido concluída, podemos prever, en vista de los datos obtenidos y análisis parciales realizados, algunos resultados.

En cuanto a las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje respecta, los estudiantes para maestro parecen considerar las matemáticas como útiles y necesarias tanto para desenvolverse adecuadamente en la sociedad como para asimilar y dominar otras asignaturas que guardan relación con dicha disciplina. De esta forma quedaría patente el deseo de dominio en la materia.

No están de acuerdo en describir las matemáticas como difíciles, aburridas y alejadas de la realidad, de ahí que señalen la aplicabilidad de las matemáticas coincidiendo con Gil (2003) en su investigación con alumnos de educación secundaria y contradiciendo a González-Pienda y Álvarez (1998) quienes señalan que son pocos los alumnos que perciben las matemáticas, como fáciles, divertidas y cercanas a la realidad, frente a una gran mayoría que manifiesta lo contrario.

En relación a cómo deben aprenderse las matemáticas, hay divergencias en la opinión del estudiantado acerca de las matemáticas como materia memorística así como también existen discrepancias en torno a considerar dicha materia como mecánica, esto es al expresar su punto de vista sobre si el conocimiento de fórmulas, reglas o procedimientos determina normalmente la resolución de los problemas matemáticos. Sin embargo, en el trabajo de Gil (2003) se aprecia una creencia general del alumnado de secundaria de que en matemáticas es fundamental el aprendizaje memorístico de conceptos, fórmulas y reglas, al igual que lo expresado por Garofalo (1989) quien manifiesta que la conclusión de los alumnos al respecto es que “el pensamiento matemático consiste en ser capaz de aplicar hechos, reglas, fórmulas y procedimientos”. Como justifica Blanco (1997) esto puede ser debido a que su actividad en la resolución de problemas haya estado muy ligada a los denominados problemas tipos, es decir, a problemas entre los que no hay apenas diferencia, sin variedad, y que exigen prácticamente la misma vía de resolución, de forma que acaban estudiando los ejemplos de memoria y realizan “trampas” de sustituciones, anulándose así la verdadera resolución de problemas.

Prácticamente la totalidad del estudiantado piensa que el resultado de un problema no es más importante que el proceso seguido.

En lo que a la metodología respecta, los estudiantes para maestros rechazan el estudio individual como la mejor forma para aprender matemáticas prefiriendo el trabajo en grupo, ya que de esa forma tienen más seguridad en sí mismos, aunque son muchos los que expresan carecer de autoconfianza al resolver problemas matemáticos, en concreto el mismo porcentaje que experimenta inseguridad, desesperación y nerviosismo al atascarse o bloquearse siendo sólo la mitad de ellos los que sienten calma y tranquilidad en dicho proceso de resolución.

Igualmente queda esto de manifiesto en el trabajo de Hernández, Palarea y Socas (2001), de donde se extrae que más de la mitad de los estudiantes para maestro se sienten poco seguros al hacer matemáticas.

Acerca de las creencias de los estudiantes para maestro sobre sí mismos como aprendices de matemáticas, se concluye que buscan diversas maneras y métodos para la resolución de problemas matemáticos, aunque hay un importante porcentaje de ellos que

no hacen uso de dicha pericia. Esto concuerda con lo hallado por Gil (2003) al respecto en alumnos de secundaria.

El estudiantado de magisterio expresa que la aptitud matemática no reporta mayor valoración social por parte del grupo de iguales.

Por lo general, atribuyen el éxito en matemáticas a la actitud del profesorado hacia el estudiante, a una mayor dedicación al estudio de dicha materia y al esfuerzo, descartando en dicho éxito la influencia de la suerte. Por tanto se concluye que atribuyen tanto el éxito como el fracaso mayormente a causas internas, inestables y controlables, atribución favorecedora para el aprendizaje. Estas conclusiones son similares a las extraídas por Gil (2003), sin embargo esta autora, encuentra que el alumnado no señala la influencia de la actitud del profesorado en el éxito/fracaso en la actividad matemática.

Los estudiantes para maestro no se perciben capaces y hábiles en matemáticas, soliendo dudar, tras la resolución de un problema, sobre la corrección del resultado obtenido.

En relación a las creencias de dicho estudiantado sobre el papel del profesorado, éste manifiesta que no todo el profesorado emplea diversidad de medios y ejemplos que permitan relacionar las matemáticas con la vida diaria. Por otra parte, valoran de manera positiva la disponibilidad y la actitud del profesorado, su cercanía al alumnado y las relaciones establecidas entre ellos, así como valoran de igual forma características personales como la claridad, la simpatía y el entusiasmo manifestado por el profesorado. También es bien visto por los estudiantes el interés mostrado por parte del profesorado de matemáticas por su evolución y rendimiento en dicha disciplina y el que valoren el esfuerzo y el trabajo diario del estudiante.

Estos aspectos fueron valorados de igual forma por los estudiantes de ESO en el trabajo de Gil (2003).

En cuanto a las creencias suscitadas por el contexto sociofamiliar, se aprecian expectativas positivas hacia los estudiantes en el área de matemáticas por parte de sus padres, existiendo una implicación satisfactoria de éstos en dicha materia. Sin embargo en el grupo de iguales se observa que hay divergencias respecto a su actitud ante las matemáticas, de forma que mientras que unos muestran un gran interés otros pasan de las matemáticas, en contra de los resultados hallados por Gil (2003) quien manifiesta que el grupo de iguales de los alumnos de ESO expresan interés por las matemáticas. Por otra parte, de forma general, los estudiantes para maestro valoran ligeramente la competencia social, el estatus socioeconómico y el éxito académico que las matemáticas les puede reportar desprestigiando dicho factor a la hora de considerar el éxito laboral. Recordar lo indicado al respecto en el cuarto *National Assessment of Educational Progress* (NAEP) al señalar que la utilidad de las matemáticas en la sociedad es percibida por el alumno como muy importante, desde un punto de vista global, pero tienden a desvalorizar su importancia desde el punto de vista personal.

Se aprecia una superación de los estereotipos sociales generalizados según los cuales se relacionan las matemáticas con la inteligencia y la creatividad y con características personales “raras”. Los alumnos de ESO tampoco se dejan influenciar por dichos estereotipos, tal como señala Gil (2003).

Atendiendo a las actitudes y reacciones emocionales hacia las matemáticas y su aprendizaje, se puede concluir que los estudiantes para maestro no manifiestan rechazo hacia dicha disciplina, puesto que manifiestan sentir curiosidad por la solución de los problemas y una enorme satisfacción ante el éxito en la actividad matemática así como la sensación de fracaso en el caso de no encontrar dicha solución, lo que hace que perseveren

y se esfuercen en la resolución de problemas, reconociendo estos aspectos, junto con la paciencia, como fundamentales para la mencionada tarea.

Haciendo referencia a la valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación a las matemáticas, se concluye en el presente estudio que los estudiantes para maestro, debido a sus estudios de magisterio, no han visto modificadas su percepción sobre las matemáticas, aunque sí que éstos han producido un cambio favorable en la valoración otorgada a dicha disciplina. La mayoría ha visto completadas sus expectativas respecto a la formación recibida de didáctica de las matemáticas, la cual les ha aportado otras formas de abordar los problemas matemáticos que antes desconocían. Ello hace que se sientan capacitados con la formación recibida para practicar la docencia en el área de las matemáticas en el nivel de primaria.

Este estudio se completará, como se ha comentado al inicio, ampliando la muestra.

Posteriormente, en vista de la necesidad de mejorar la afectividad de los estudiantes para maestro hacia las matemáticas, se desarrollará y evaluará la efectividad de un Programa de Intervención Psicopedagógica centrado sobre todo en la resolución de problemas matemáticos.

4. Bibliografía

Amorim, S. (2004). Improving student teachers´ attitudes to mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 25-32

Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matemáticas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la Instrucción I.* (pp. 256-279). Madrid: Síntesis.

Blanco, L. J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Quadrante. Revista Teorica e de Investigaçao*. v. 6(2) 45-65.

Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.

Camacho, M., Hernández, J. y Socas, M. M. (1995). Concepciones y actitudes de futuros profesores de Secundaria hacia la Matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. En L. J. Blanco y V. Mellado, *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal* (pp. 81-97). Servicio de publicaciones Diputación Provincial de Badajoz.

Carpenter, T., y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.

Emenaker, C. (1996). A problem-solving based mathematics course and elementary teachers' beliefs. *School Science and Mathematics*, 96(2), 75-85.

Espejo, B. (1999). Hacia un modelo de educación integral: el aprendizaje emocional en la práctica educativa. *Revista de Ciencias de la Educación* (180), 521-535.

Etxandi, R. (2007). Matemática en educación primaria: un intento de renovación de la práctica en el aula. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, n. 45, pp. 15-25

Gairín, J. (1990). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática.* Barcelona: Boixareu Universitaria.

GAROFALO, J. (1989). Beliefs, responses and mathematics education: Observations from the back of the classroom. *School Science and Mathematics*, 89 (6), pp. 451-455.

Gil, N. (2003). *Creencias, actitudes y emociones en el aprendizaje matemático*. Memoria de Proyecto de investigación para la obtención del DEA. Departamento de Psicología y Sociología de la Educación. Universidad de Extremadura.

Gil, N.; Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2006a). El papel de la afectividad en la resolución de problemas. *Revista de educación nº 340 551-569.*

Gil, N; Guerrero, E. y Blanco, L. J. (2006b) El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Revista de Investigación psicoeducativa* 27 – 42

Gilbert, D. (1991). How mental systems relieve. *American Psychology*, 46(2), 107-119.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *Revista Uno*, 13, 7-22.

Gómez-Chacón, I. M. (1998). Creencias y contexto social en matemáticas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n. 17, pp. 83-103

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

González-Pienda, J. A. y Álvarez, L. (1998). Dificultades específicas relacionadas con las matemáticas. En J. A. González Pienda y J.C. Núñez Pérez (Coords), *Dificultades del aprendizaje escolar*, pp. 315-340

Guerrero, E.; Blanco, L. J. y Vicente, F. (2002) Trastornos emocionales ante la educación matemática. En J. N. García (Coord.), *Aplicaciones a la Intervención Psicopedagógica*, pp. 229-237.

Hart, L. (1989): Classroom processes, sex of student, and confidence in learning mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (3), pp. 242-260.

Hernández, J. y Socas, M. M. (1999). Las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas. El papel de los materiales didácticos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales, *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática I* (pp.105-114). Departamento de Análisis matemático. Universidad de la Laguna.

Hernández, J., Palarea, M. M. y Socas, M. M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. El papel de los materiales didácticos. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales, *Formación del profesorado e investigación en educación matemática II* (pp. 115-124). Departamento de Análisis matemático. Universidad de la Laguna.

INECSE (2001). *Evaluación de la educación secundaria obligatoria 2000: datos básicos*. Madrid. MEC.

McLeod, D.B. (1989) Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlang.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp.575-598). New York: Macmillan.

Miras, M. (2001). Afectos, emociones, atribuciones y expectativas: el sentido del aprendizaje escolar. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.), *Desarrollo Psicológico y Educación. II.* Psicología de la Educación Escolar (pp. 309-329). Madrid: Alianza.

PISA (2003). *Learning for tomorrow's world. First results from PISA 2003.* OCDE.

Ruiz, N. (2002). Análisis de un cuestionario para evaluar las creencias y actitudes de los futuros maestros sobre las matemáticas. En Mª C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Coords). *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* pp. 513-526. *Actas del V Simposio de Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Alicante

ANÁLISIS DE VÍDEOS EN ENTORNOS COLABORATIVOS

José Carrillo
Nuria Climent
Universidad de Huelva

Resumen
La experiencia que se describe ejemplifica cómo analizamos lecciones de matemáticas con un grupo de maestras de primaria e investigadores del área, en el marco de un proyecto de investigación colaborativa. Tomando instrumentos que provienen de investigaciones previas, nos fijamos principalmente en el foco matemático y didáctico de la lección, así como en la gestión por parte del profesor de la participación de los alumnos en el aula. El análisis en el grupo nos permite profundizar en nuestra idea común de buena práctica en matemáticas, así como mejorar los propios instrumentos de análisis.

Abstract
We present our analysis of mathematics lessons with a group consisting of primary teachers and researchers within the frame of a collaborative project. Using instruments derived from previous research, we deal mainly with the mathematical and the didactical foci of the lesson, as well as with the management of the students' participation in the classroom by the teacher. The analysis in the group allows us to go further in our shared meaning of good practice in mathematics, and to improve the analysis instruments.

Carrillo, J. y Climent, N. (2007*). Análisis de vídeos en entornos colaborativos*. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 53-62.

Lo que aquí presentamos es fruto de un proyecto de investigación colaborativa (PIC) con un grupo de maestras con el que venimos trabajando desde el año 1999. Asuntos relacionados con la puesta en práctica de una metodología basada en la resolución de problemas, elaboración de actividades TIC, desarrollo de una concepción propia de lo que entendemos por buena práctica de enseñanza y la gestión de la participación matemática del alumno por parte del profesor han sido objeto de reflexión dentro del grupo, actualmente Proyecto de Investigación Educativa de la Junta de Andalucía.

Nuestro objetivo en esta comunicación es mostrar cómo abordamos el análisis de vídeos en el seno del PIC. Para ello, ejemplificamos con una lección, puesta en práctica por una de las maestras del grupo y observada por los demás miembros. Esta sesión es, además, grabada en vídeo y analizada a posteriori en una sesión conjunta del grupo. Para dicho análisis, que primero se realiza de modo individual por cada componente del grupo y se discute en una sesión común, hacemos uso de dos instrumentos de análisis, con los que previamente nos hemos familiarizado todos. La discusión de la sesión nos sirve para perfilar nuestra construcción conjunta de buena práctica en el aula de matemáticas, tanto a nivel teórico como con imágenes de la misma, profundizar en aspectos problemáticos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en Primaria y refinar nuestros propios instrumentos de análisis de la práctica. El fin último de esta tarea, como todas las del grupo, es el desarrollo profesional de todos sus miembros y la investigación sobre el desarrollo de las maestras.

Descripción de la lección

La lección cuyo análisis vamos a presentar se desarrolla en 4º de Educación Primaria. Es el inicio del trabajo con geometría en este curso, habiéndose trabajado en cursos anteriores los cuerpos geométricos.

Pasamos a describir la lección con cierto detalle, para poder entender el análisis realizado.

Al comienzo de la sesión la maestra recuerda lo que se hizo en la sesión anterior, dedicada al repaso sobre cuerpos geométricos (recordando sus nombres y sus caras).

Tras esto comienza la sesión en sí, que dividimos en 5 episodios[1]:

1º) introducción de la sesión

2º) trabajo individual sobre las actividades 1 y 2 y puesta en común de la 1

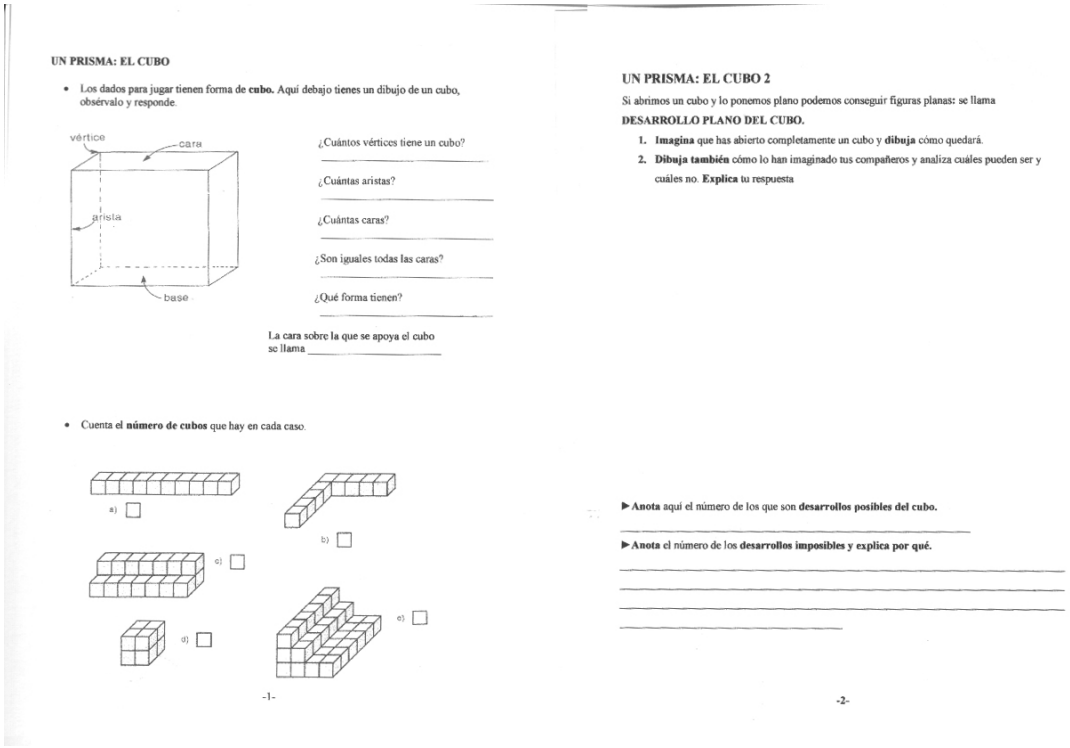
3º) puesta en común de la actividad 2

4º) introducción a la actividad 3 y trabajo individual

5º) puesta en común de la actividad 3

A continuación se presenta la ficha de trabajo, seguida de la descripción del episodio 1 (a modo de ejemplo, pues las limitaciones propias de la comunicación impiden incluir la descripción de la lección completa):

[1] Andrews, Carrillo y Climent (2005).



UN PRISMA: EL CUBO

- Los dados para jugar tienen forma de **cubo.** Aquí debajo tienes un dibujo de un cubo, observalo y responde.

vértice cara arista base

¿Cuántos vértices tiene un cubo?

¿Cuántas aristas?

¿Cuántas caras?

¿Son iguales todas las caras?

¿Qué forma tienen?

La cara sobre la que se apoya el cubo se llama

- Cuenta el **número de cubos** que hay en cada caso.

a) b) c) d) e)

-1-

UN PRISMA: EL CUBO 2

Si abrimos un cubo y lo ponemos plano podemos conseguir figuras planas: se llama **DESARROLLO PLANO DEL CUBO.**

1. **Imagina** que has abierto completamente un cubo y **dibuja** cómo quedará.
2. **Dibuja también** cómo lo han imaginado tus compañeros y analiza cuáles pueden ser y cuáles no. **Explica** tu respuesta

► **Anota** aquí el número de los que son **desarrollos posibles del cubo.**

► **Anota** el número de los **desarrollos imposibles y explica por qué.**

-2-

La maestra, Inma, reparte las fichas a trabajar y pide a los alumnos que la lean y pregunten lo que no entiendan. Tras unos minutos, les invita a preguntar las dudas y se dirige a algunos alumnos preguntándoles si lo han entendido. Una niña duda si "se cuentan también las caras de atrás" (refiriéndose a la cuestión sobre el número de caras que tiene un cubo, en la primera actividad). La maestra contesta preguntándole: "¿qué te pregunta?", lo que parece aclararle a la alumna su duda. Un niño cuestiona si respecto de la pregunta anterior, también se incluye la base, a lo que Inma contesta preguntándole si la base es una cara. El alumno lo afirma y la maestra asiente. Otro niño vuelve a repetir si hay que contar las caras de detrás, y la maestra cuestiona de nuevo si preguntan por caras delanteras o por "caras".

Inma: "lo ideal, y lo que ahora mismo hay que hacer, es responder a las preguntas, y no sólo mirando el dibujo de la ficha, sino también el de nuestra cabeza. Si además alguien quiere asegurarse, para eso están aquí los cubos (señalando unos cubos de cartulina apoyados en la pizarra), que venga y coja un cubo y se puede poner a contar los vértices, las caras…".

Un niño pide ya un cubo pero ella le sugiere que primero lo intente sin el material y si después tiene dudas o quiere comprobar, que lo coja.

En resumen, en el *primer episodio* se entrega la ficha de trabajo (actividades 1 y 2) y se pide a los alumnos que la lean y pregunten sus dudas. Las dudas que surgen están en relación con si hay que contar la cara de atrás y la base del cubo (actividad 1). Inma responde a las cuestiones preguntándoles si el enunciado de la actividad se refiere a algunas caras determinadas. Les sugiere que se fijen en el dibujo "de sus cabezas". También pueden coger un cubo de los que hay disponibles, pero primero deben pensarlo.

Análisis

La sesión en general pone el énfasis en contenidos que muchas veces se encuentran fuera de las aulas de Primaria: el razonamiento espacial (entendido como la capacidad de imaginarse las figuras, analizar sus partes y moverlas a partir de dicha imagen), la

comparación crítica de estrategias de recuento (asociado, además, a cuerpos geométricos, lo cual no es una asociación habitual) y el paso del espacio al plano y viceversa.

Vamos a especificar ahora el análisis desde dos perspectivas diferentes. En primer lugar presentaremos el análisis efectuado aplicando "el instrumento METE", Esquema para el análisis de vídeos (adaptación de Andrews et al (2005) realizada por Jiménez et al –proyecto PIC)[2]. Después de dicho análisis, presentaremos el realizado desde la perspectiva de la gestión de la participación matemática de los alumnos por parte de la maestra (incluyendo previamente la descripción del instrumento de análisis).

Desde la perspectiva del instrumento METE

En las tablas que siguen presentamos el resumen del instrumento.

Respecto del foco matemático, durante toda la sesión se observa un interés *conceptual* por parte de la maestra (concepto de cubo y su estructura), en el *razonamiento* (tanto espacial, en el sentido antes indicado, como en que los alumnos argumenten sus respuestas) y en la *resolución de problemas* (tareas no rutinarias para los alumnos, sobre todo por lo que se les solicita de ellas). Se puede observar el foco *eficiente* en la comparación de los procedimientos de recuento antes señalada, favoreciendo que se aprecien aquellas formas más eficaces y elegantes en el sentido matemático (economía, facilidad). Se potencia una matemática con comprensión conceptual, relacional desde la perspectiva de Skemp (1978, quien la contrapone a la *comprensión instrumental*, que pone el énfasis en el conocimiento mecánico de reglas para ser aplicadas). La estrategia de la maestra de responder con preguntas a las preguntas de los alumnos potencia esa comprensión conceptual de la materia.

Todas las actividades se presentan en un *contexto matemático* (se presentan directamente los cubos, aunque éstos puedan ser objetos cercanos al alumno) e inducen un *aprendizaje profundo*. Esto último porque se favorece que el alumno se implique en la construcción de un significado, por ejemplo respondiendo a sus preguntas con otras preguntas, para que él mismo se haga con la situación.

Es constante que los alumnos compartan públicamente (en el gran grupo) sus ideas (*compartir*), no sólo en los episodios de puesta en común (2, 3 y 5), sino también en la presentación de las actividades (episodio 1). Por parte de la maestra, continuamente se ofrecen sugerencias, indicios o pistas para que el alumno reconsidere su trabajo y mejore en su comprensión (*entrenamiento*), en la mayoría de las ocasiones *formulando preguntas*. La *motivación* de los alumnos hacia la materia se favorece constantemente, por las tareas que se presentan (que son de interés para el alumno), por las demandas que se hacen (que les retan pero a la vez son accesibles), en cómo se favorece que todos participen y puedan aportar algo, cómo se valoran sus aportaciones y cómo se favorece que se escuchen y analicen las respuestas de sus compañeros, haciendo que el alumno sienta que sus ideas son importantes, tanto para la maestra como para sus compañeros.

[2] Puede verse el análisis de otra sesión en Climent y Carrillo (2007).

Foco matemático	El foco matemático se refiere a los objetivos subyacentes en las acciones y en la toma de decisiones del profesor. Puede haber más de un foco en cada episodio en una lección o, incluso, puede no existir foco para un episodio en particular. Sin embargo, la totalidad de tales características e probablemente un indicador del modo o el estilo de enseñanza.	
	Conceptual	Parece que el profesor enfatiza o promueve el desarrollo conceptual de sus estudiantes.
	Derivational	Parece que el profesor enfatiza o promueve el proceso de desarrollo de nuevos entes matemáticos a partir del conocimiento existente.
	Estructural	Parece que el profesor enfatiza o promueve los nexos o conexiones entre diferentes entes matemáticos: conceptos, propiedades, etc.
	Mecánico	Parece que el profesor enfatiza o promueve la adquisición de destrezas, procedimientos, técnicas o algoritmos.
	Eficiente	Parece que el profesor enfatiza o promueve en los aprendices la comprensión o adquisición de procesos o técnicas que desarrollan la flexibilidad, la elegancia o la comparación crítica del trabajo.
	Resolución de problemas	Parece que el profesor enfatiza o promueve la implicación de los aprendices en la solución de tareas no triviales o no rutinarias.
	Razonamiento	Parece que el profesor enfatiza o promueve en los aprendices el desarrollo y la articulación de justificaciones y argumentaciones.

Contexto matemático	El contexto matemático se refiere a la localización de los problemas propuestos en la clase de matemáticas.

Foco didáctico	Los profesores utilizan diferentes estrategias didácticas o pedagógicas en función de las diferentes condiciones y contextos. A excepción de la actividad didáctica de compartir las propias ideas, la cual consiste en un acto público explícito todas las estrategias podían ser vistas tanto en sus dos contextos tanto público (el grupo clase) como privado (trabajo individual)

	Realista	Un problema realista es o bien un problema del mundo real con datos genuinos o procedentes de un enunciado real imaginativo.
	Quasi realista	Un problema quasi realista es un problema elaborado que se presenta como si fuera realista. El contexto puede ser plausible pero los datos, las condiciones o las cuestiones propuestas no.
	Matemático	Un problema matemático es is el que está enmarcado en la propia matemática.

Actividades que inducen	Diferentes tipos de actividades inducen probablemente diferentes tipos de aprendizaje	
	Aprendizaje profundo	Las actividades que inducen aprendizaje profundo normalmente hacen que los alumnos se impliquen en la construcción de significado.
	Aprendizaje superficial	Las actividades que inducen aprendizaje superficial normalmente fracasan a la hora de hacer que los alumnos se impliquen en la construcción de significado.

	Acceso al conocimiento previo	El profesor implica a los alumnos en una actividad que pretende focalizar la atención en el contenido matemático ya adquirido por el alumno. Normalmente, podría considerarse como un periodo de revisión o preparación para las actividades que se van a realizar.

	Explicación	El profesor explica una idea o solución. Puede incluir demostraciones, explicaciones concretas o que pretenden ser un modelo pedagógico de pensamiento de un nivel superior. En estos casos, el maestro es el que interviene sin a penas respuesta del alumno.
	Expresión de las propias ideas	El profesor anima a los alumnos a compartir públicamente sus ideas, soluciones o respuestas con sus compañeros. Puede incluir discusiones del grupo clase, así como el modelo socrático de formulación de preguntas en el cual el maestro se convierte en un gestor de las actividades, más que un mero informador.
	Exploración	El profesor implica a los alumnos en una actividad se pretende que emerja una nueva idea matemática. Podría ser una investigación o una secuencia de problemas estructurados, pero en todos los casos se espera que sean los alumnos quienes articulen sus descubrimientos.
	Coaching	El profesor ofrece indicios, sugiere u ofrece retroalimentación para facilitar su comprensión o desarrollar habilidades para poder llevar a acabo las tareas
	Valoración o evaluación	El profesor valora o evalúa las respuestas de los alumnos para determinar la dirección de su próxima actuación.
	Motivación	El profesor, a través de sus acciones, ofrece estímulos o dirige las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas.
	Formulación de preguntas	Se refiere a todas las formas de formulación de preguntas.

El análisis de esta sesión nos ha llevado a ampliar nuestra caracterización de algunas categorías del instrumento METE. Situándonos en el foco matemático, en el *razonamiento* no sólo consideramos un razonamiento más general, relacionado con la argumentación y justificación de las ideas, sino también razonamiento espacial, la capacidad espacial de imaginarse las figuras y analizarlas. Además, en el foco estructural, damos cabida a que se establezcan nexos entre conceptos y nuevas situaciones o fenómenos no habituales o no esperables asociados.

Redactaríamos el indicador incluyendo "*relaciones entre entes y entre entes y fenómenos que no han formado parte de la conceptualización inicial de dicho ente y cuya actividad no se enfoca primariamente al desarrollo conceptual de este ente*".

Por otra parte, constatamos la dificultad de evidenciar el indicador *valoración/evaluación* (en el foco didáctico). Sólo podremos constatarlo si vemos que la valoración de dificultades lleva a reconducir la acción en el aula, a modificar lo previsto (podría ser en esta misma sesión o en posteriores). Que no se encuentren evidencias no quiere decir que no se esté realizando por parte de la maestra dicha evaluación.

Finalmente, parece difícil encontrar una sesión de clase en la que no se perciba el indicador *formulación de preguntas* (también del foco didáctico), puesto que su descripción es muy amplia.

Desde la perspectiva de la gestión de la participación

El siguiente cuadro nos informa de las dimensiones de análisis consideradas:

Dimensiones	**Niveles o tipos**	**Código**
Responsabilización del aprendizaje	Transmisión	RT
	Cesión de responsabilidad del profesor hacia el alumno	RPA
	Co-responsabilización	RC
Comunicación promovida	Unidireccional	CU
	Contributiva	CC
	Reflexiva	CR
	Instructiva	CI
Validación del conocimiento	El profesor	VP
	El profesor y los alumnos	VPA
	Los alumnos	VA

Destacamos las muestras de corresponsabilización del aprendizaje cuando los alumnos ayudan a sus compañeros (con verdaderas ayudas, no diciendo la respuesta) e incluso detectan dónde residen sus dificultades y las hacen explícitas.

Además, muchos de los alumnos muestran su concienciación de lo que están aprendiendo, cómo lo hacen, dónde se equivocan, los problemas que han tenido y la importancia de aprender. Son ellos mismos los que explican el proceso que les ha llevado a cometer errores.

En la maestra observamos cómo pregunta en qué reside la dificultad de las tareas realizadas, quién ha tenido problemas y por qué, potenciando dicha responsabilización y toma de conciencia por parte del alumno. Esta actuación de la maestra es la que se refiere a la gestión de la participación, y este modo de gestionar (que, a juzgar por los resultados, parece ser una constante en la maestra) potencia esa responsabilidad de los alumnos (hacia su aprendizaje y el de sus compañeros). El hecho de plantearles preguntas como respuesta a las suyas, hace que la mayor responsabilidad del aprendizaje recaiga en el propio alumno, es él el que debe encontrar las respuestas. Encontramos, por tanto, cesión de responsabilidad del profesor hacia el alumno (la maestra hace que el alumno se cuestione sus respuestas, se haga responsable de su aprendizaje) y corresponsabilización (se potencia la generación de conocimiento compartido entre los alumnos).

Respecto de la comunicación promovida se observan momentos de *comunicación contributiva* (en actividades en que, según la maestra, no vale tanto la pena detenerse), y otros en los que podríamos hablar de *reflexiva* porque se promueven respuestas reflexivas y argumentadas, aunque no se implica al alumno en la investigación o exploración.

Finalmente, vemos una *validación compartida entre el profesor y los alumnos*, con mucha intervención de los alumnos.

Por otra parte, respecto del instrumento de análisis en sí, hay que superar la tendencia habitual a pensar que las distintas categorías de cada dimensión son excluyentes o graduales. Por ejemplo, en los distintos modos de gestionar la participación desde la perspectiva de la responsabilización del aprendizaje, se tiende a considerar que la corresponsabilización es un nivel superior a la cesión. Por lo tanto, hay que considerar que varias categorías se pueden dar a la vez, sin tratar de que una supere a la otra, e incluso podrían darse las tres en la misma sesión. La primera categoría de esta dimensión (transmisión) parece despectiva, pero no tiene que serlo si se da junto a otras.

A raíz del análisis de esta sesión, matizamos la categoría *comunicación reflexiva*. Ponemos el énfasis en la reflexión y argumentación (suavizando la exploración o investigación); si además en alguna situación observada hubiera exploración, se comentaría. Con esto, creemos que se consigue analizar con más riqueza la gestión del profesor desde la perspectiva de esta dimensión, dado que categorías demasiado estrictas te llevan a identificar situaciones que pueden quedar excluidas de dicha categoría pero que presentan matices interesantes al respecto (ver análisis de esta dimensión).

Referencias bibliográficas

Andrews, P., Carrillo, J. & Climent, N. (2005). Proyecto “METE” (mathematics education traditions of Europe): el foco matemático. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (eds) *Investigación en Educación Matemática*. IX Simposio de la SEIEM. Córdoba: Publicaciones de la Universidad de Córdoba. (p. 131-137)

Climent, N. & Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, 61, 23-35.

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.

ENTORNOS VIRTUALES DE APRENDIZAJE: INTERACCIÓN Y CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA[1]

Julia Valls (julia.valls@ua.es) Mª Luz Callejo (luz.callejo@ua.es)
Salvador Llinares (sllinares@ua.es)

Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante

Resumen

En esta comunicación exponemos cómo dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas -construcción de conocimiento profesional- a través de un modelo de construcción del conocimiento. La aproximación metodológica adoptada ha sido la de los "experimentos de enseñanza". Se ha diseñado integrando el visionado de vídeo-clips de registros de situaciones de clases de matemáticas, la lectura de documentos, la participación en debates virtuales y la elaboración de un informe de reflexión final. Se han analizado las formas de participar y los niveles de construcción de conocimiento de los estudiantes para profesores de matemáticas de secundaria en el entorno: "Gestión de la enseñanza: Competencia matemática y enseñanza en educación secundaria".

Palabras Claves: Construcción del conocimiento; Experimentos de enseñanza; Formas de participar; Niveles de construcción de conocimiento; Conocimiento y competencia necesaria para enseñar matemáticas

[1] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de I+D+I del Plan Nacional de Investigación, SEJ2004-054479-EDU

Valls, J.; Callejo, M.L. y Llinares, S. (2007*). Entornos Virtuales de aprendizaje: Interacción y construcción del conocimiento sobre la enseñanza de la matemática*. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 63-72.

Introducción. Aprender a "ver" la enseñanza de las matemáticas

Uno de los objetivos perseguidos en la formación inicial del profesorado en el área de matemáticas es que aprendan a "ver", a "mirar", situaciones de enseñanza, entendiendo esta manera de "ver" como la capacidad de relacionar los sucesos de una clase con principios teóricos procedentes de didáctica de la matemática. La relación entre lo que ocurre en el proceso de enseñanza de las matemáticas y el conocimiento teórico permite que los estudiantes para profesor puedan interpretar y explicar diferentes aspectos de una lección de matemáticas, vinculando lo particular a lo general y por tanto ello puede ser el germen del desarrollo del conocimiento profesional. Desde este punto de vista, el hecho de que los estudiantes para profesores de matemáticas generen una perspectiva interpretativa de la enseñanza de las matemáticas se vincula al propósito de llegar a comprender lo que sucede en las aulas de matemáticas (Llinares, 2006).

Desde este planteamiento nos proponemos *caracterizar cómo los estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria aprenden a interpretar aspectos relevantes de la enseñanza de las matemáticas.* Para abordar este objetivo hemos desarrollado una propuesta metodológica centrada en los "experimentos de enseñanza" (Callejo et al., 2007; Simon, 2000) que permite relacionar la teoría con la práctica y producir conocimiento sobre cómo parece funcionar la instrucción en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

Ciclo de un "experimento de enseñanza"

Los experimentos de enseñanza se formalizan mediante el diseño e implementación de entornos de aprendizaje (García et al., 2006) y su análisis posterior. Los entornos de aprendizaje diseñados se han articulado en nuestro caso a través de la resolución de tareas-actividades en las que los estudiantes para profesor pueden negociar y discutir los significados de las diferentes ideas, por ejemplo sobre la gestión del profesor de las interacciones en el aula y el desarrollo de la competencia matemática.

La adaptación de la metodología de los "experimentos de enseñanza" contempla un "ciclo de investigación" en tres fases (Gravemeijer, 2004; Simon, 1995) que se enuncian a continuación:

Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción:

- Definición de los objetivos de aprendizaje que definen las metas a alcanzar.
- Diseño de las tareas propuestas a los estudiantes.
- Caracterización de una trayectoria hipotética de aprendizaje o predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden evolucionar cuando resuelven las tareas propuestas.

Fase 2: Experimentación de las tareas diseñadas en un entorno virtual.

Fase 3: Análisis retrospectivo: En esta última fase se analiza la experiencia desde las referencias teóricas que fundamentan la trayectoria hipotética de aprendizaje. En ella se trata de investigar si la actividad cognitiva y social desarrollada por los estudiantes se corresponde o no con la que los investigadores habían previsto en la primera fase. Su análisis e interpretación pueden dar lugar a modificar las tareas propuestas, a diseñar otras nuevas y/o a

cambiar la trayectoria hipotética de aprendizaje inicialmente conjeturada. El producto de esta última fase es por tanto doble: (1) una secuencia de actividades y formas de llevarla a cabo corregida y (2) un nuevo conocimiento sobre cómo parece funcionar la instrucción.

En los siguientes apartados se describe este ciclo en el caso de un experimento de enseñanza a través del diseño de un entorno de aprendizaje que tenia como objetivo que los estudiantes para profesor desarrollaran su comprensión de la relación que se da en el aula de matemáticas entre las características de la gestión que hace un profesor de matemáticas de la enseñanza y el desarrollo de la competencia matemática en alumnos de educación secundaria. Esta temática se concibe dentro de una secuencia más amplia de instrucción, caracterizada por la incorporación sucesiva de nuevas funciones del estudiante para profesor de matemáticas de educación secundaria como gestor de una situación de enseñanza y por el incremento de las dimensiones con que éste ha de abordar las tareas que se le plantean.

Diseño y planificación del entorno de aprendizaje "Gestión de la enseñanza: Competencia matemática y enseñanza"

En el diseño y planificación del entorno de aprendizaje se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

Objetivo de aprendizaje: desarrollo de niveles de competencia profesional

El objetivo que se pretendía era que los estudiantes para profesor de matemáticas aprendiesen a identificar, describir, e interpretar cómo una determinada gestión por parte del profesor de la interacción del trabajo de un pequeño grupo de estudiantes de secundaria resolviendo problemas desarrolla o no la competencia matemática.

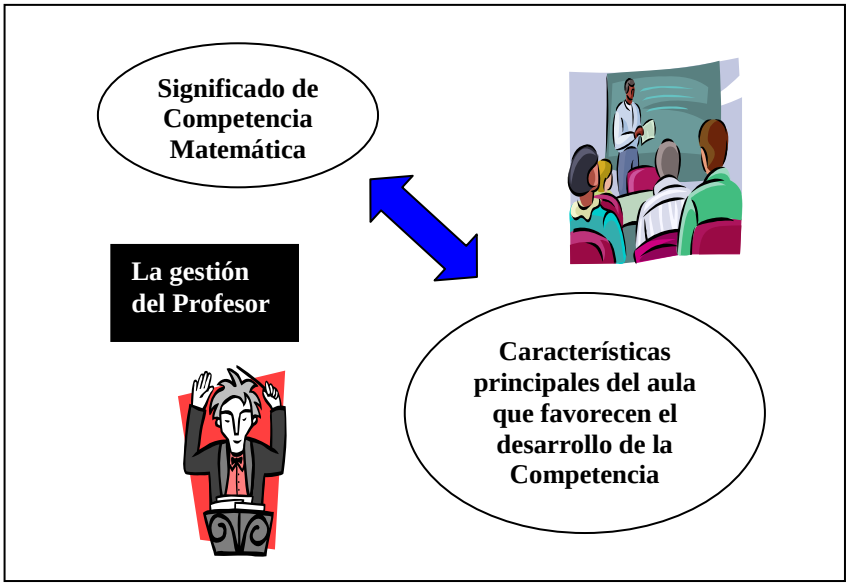


Figura 1. Conocimiento de Didáctica de la matemática necesario para la resolución de la actividad propuesta

Secuencia de tareas y debates virtuales

Las tareas consistían en: (a) visionar un video-clip en el que un profesor de matemáticas gestiona las interacciones de un pequeño grupo de estudiantes de 3º de educación Secundaria mientras resuelven un problema sobre funciones; (b) leer unos documentos sobre la idea de competencia matemática y sobre las características de un clase de matemáticas que potencie el desarrollo de los diferentes dimensiones de esta competencia; (c) participar en un debate virtual para intercambiar y consensuar los análisis e interpretaciones realizados de la situación de enseñanza propuesta, y (d) escribir un informe en pequeño grupo sobre lo realizado.

Las preguntas planteadas para el debate virtual fueron las siguientes:

¿Qué dimensiones de la competencia matemática se potencian en la interacción de Sara (la profesora) con sus alumnos?

¿Qué aspectos de la enseñanza (tarea matemática propuesta, metodología, gestión de la enseñanza…) influyen en el desarrollo de las diferentes dimensiones de la competencia matemática en esta situación?

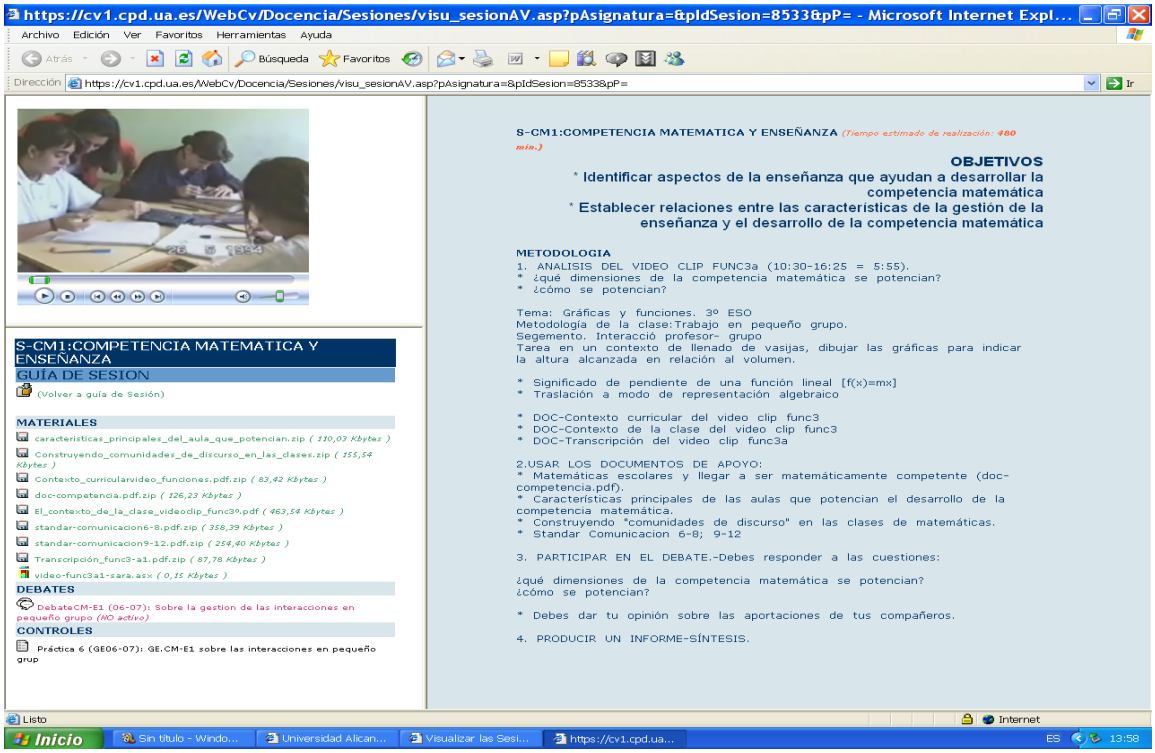


Figura 2. Pagina de entrada al entorno virtual en el que se implementó el entorno de aprendizaje diseñado en el experimento de enseñanza

Trayectorias hipotéticas de aprendizaje

Entendemos que los estudiantes para profesor construyen conocimiento útil para gestionar la interacción en pequeño grupo: (a) identificando diferentes aspectos que configuran una secuencia en la que una profesor/a está enseñando las funciones a sus alumnos; (b) identificando cómo se favorece el desarrollo de la competencia matemática seleccionando o modificando las variables didácticas de un enunciado; (c) analizando e interpretando las

producciones de los alumnos, y orientando los procesos de resolución (gestión del profesor); (d) finalmente, relacionando entre sí de forma sistémica los elementos anteriores justificándolos desde la teoría para explicar las situaciones reales de enseñanza.

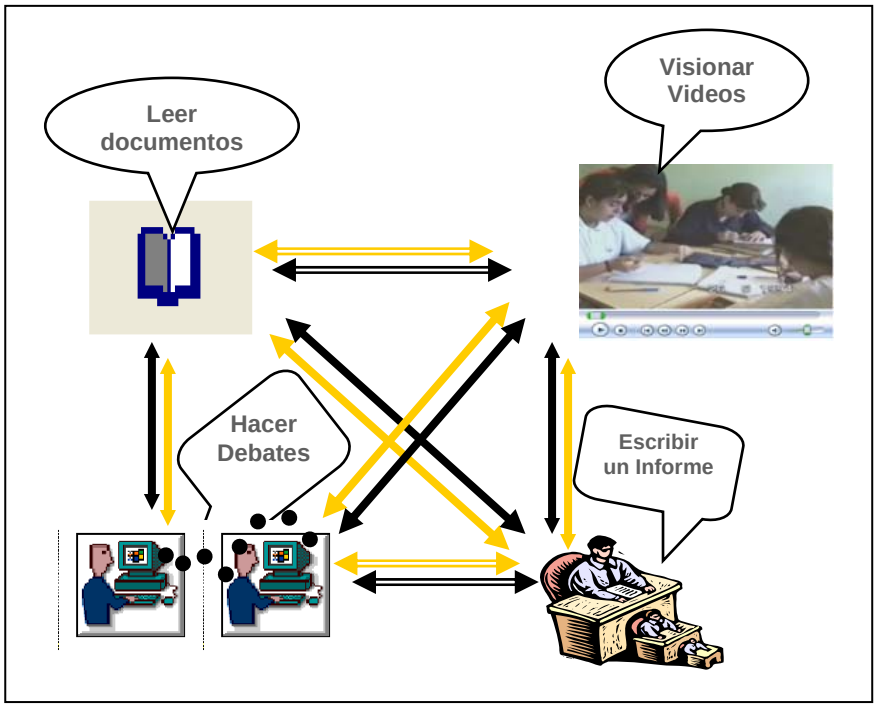


Figura 3. Estructura metodológica del entorno de aprendizaje diseñado en el experimento de enseñanza

Experimentación

Desde hace cuatro cursos académicos estamos desarrollando diferentes experimentos de enseñanza. Los datos que se recogen aquí son del curso 2006-2007. En el experimento participaron 23 estudiantes matriculados en la asignatura "Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria" de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Alicante.

La tabla 1 recoge los datos relativos al nivel de participación en el debate:

Nº de alumnos	Nº de participaciones en el debate	Días que permaneció activo el debate	Nº informes producidos en grupo
23	109	17	6

Tabla 1. Datos de participación en el módulo experimental de la asignatura "Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria"

Análisis

Los datos que servirán para realizar el análisis retrospectivo son las intervenciones escritas de los estudiantes para profesor de matemáticas en los debates virtuales. El análisis propuesto se realizó en dos etapas. En la primera etapa se consideró como unidad de análisis las aportaciones individuales realizadas por los estudiantes en el debate y en la segunda las cadenas conversacionales generadas.

Primera etapa

En la primera etapa se tuvieron en cuenta las siguientes dimensiones: participación, interacción y cognición (Schire, 2006).

El análisis de la *participación* tiene en cuenta quiénes han participado y cuándo. Los datos sobre la distribución de la participación por parte de los alumnos a lo largo del debate se recogieron en una tabla de doble entrada donde se indica el número de veces que cada alumno ha participado cada día, el total de participaciones por alumno y el total de participaciones por día.

En cuanto a la *interacción* consideramos que se puede producir entre un estudiante y algunos de lo siguientes elementos: otro estudiante, la situación presentada en el vídeo y la teoría desde la que se pretende que se analice la situación. Se puede producir de distintas formas: aportando información, mostrando asentimiento, discrepando, etc.

Hemos distinguido inicialmente entre las participaciones que hacen o no referencia a intervenciones anteriores (monólogo o diálogo). En cada caso éstas pueden apoyarse en distintas fuentes: la experiencia, las ideas teóricas de los documentos proporcionados y la situación presentada en el vídeo.

		Fuentes			
		Experiencia	Documentos	Vídeo	Estudiante (Intervenciones)
Interacción	A: Monólogo				
	B: Diálogo				

Tabla 2. Fuentes para realizar una aportación y tipos de participación

En cuanto a las *formas de participar* distinguimos las siguientes:

- *Aporta información.* Responde a las cuestiones planteadas pero sin hacer referencia a ninguna aportación previa. En algunos casos suelen ser aportaciones iniciales. Esta aportación de información puede ser más o menos rica en la medida en que se refiere o no a las ideas teóricas, proporciona citas del video-clip, plantea cuestiones o algún dilema. En

ocasiones esta información no es nueva, pues ya se ha expresado anteriormente en el debate.

- *Clarifica.* Amplia algún aspecto introducido anteriormente.
- *Concuerda.* Manifiesta conformidad y apoyo hacia una aportación determinada.
- *Concuerda y amplia.* Concuerda y amplia aspectos mencionados en otras aportaciones. Argumenta y genera una hipótesis.
- *Discrepa.* Manifiesta disconformidad.
- *Discrepa y amplía.* Manifiesta disconformidad y argumenta su discrepancia.

En relación al análisis de la *cognición* desde la perspectiva de la construcción del conocimiento hemos diferenciado cuatro niveles atendiendo a las fuentes utilizadas, los aspectos a que hace referencia y la relación entre las ideas: (1) descriptivo, (2) retórico, (3) identificación e inicio de un uso instrumental de la información y (4) teorizar-conceptualizar. Además, en el análisis de contenido de las participaciones hemos tenido en cuenta si los argumentos expuestos usaban ideas y/o relaciones entre ellas desde una perspectiva general o si consideran también el contenido matemático o ideas de didáctica de la matemática específicas del contenido matemático de la clase que se muestra en el video-clip. La segunda perspectiva se indica en la tabla 3 introduciendo una 'm' entre paréntesis.

Niveles	Fuentes	Interacciones	Contenido matemáticas o didáctica de las matemáticas
N1	Experiencia	Estudiante-experiencia	**N1(m)**
N2	Experiencia y documentos	Estudiante-teoría	**N2(m)**
N3	Experiencia, documentos y vídeo	Estudiante-situación-teoría	**N3(m)**
N4			**N4(m)**

Tabla 3. Caracterización de los niveles por las fuentes utilizadas y la interacción

A continuación exponemos brevemente los cuatro niveles de construcción del conocimiento:

- *N1. Descriptivo:* El estudiante responde describiendo de manera "natural" lo que ve, sin utilizar aquellas ideas de la teoría que son necesarias y relevantes para analizar la situación.
- *N2. Retórico:* Uso de ideas teóricas de los documentos para construir un discurso, sin establecer relaciones entre estas ideas o de ellas con la situación. Se podría decir que falta cohesión en el discurso.
- *N3. Identificación e inicio de un uso instrumental de la información:* Identifica uno o varios aspectos relevantes de la situación y los interpreta utilizando ideas teóricas y los relacionan o no entre ellos.

- *N4. Teorizar-conceptualizar. Integración relacional:* La información teórica se transforma en herramienta conceptual. Las herramientas conceptuales se identifican y se usan integrándolas para dar una respuesta a la tarea.

Segunda etapa

En la segunda etapa del análisis se consideró como unidad de referencia las cadenas conversacionales. Una cadena conversacional es un conjunto de interacciones vinculadas a una misma temática, que permite identificar alrededor de qué temas y de que manera los estudiantes para profesor generan interacción.

El contenido de las aportaciones generadas inicialmente en respuesta a las dos cuestiones del debate dio lugar a dos cadenas cuyo contenido está relacionado con cada una de las cuestiones:

> *Pregunta 1. ¿Qué dimensiones de la competencia matemática se potencian en la interacción de SARA con sus alumnos?*
>
> *Pregunta 2. ¿Qué aspectos de la enseñanza (tarea matemática propuesta, metodología, gestión de la enseñanza,...) influyen en el desarrollo de las diferentes dimensiones de la competencia matemática en esta situación?*

- *Cadena 1*: El significado de la idea de competencia matemática como interrelación entre las siguientes dimensiones: (a) comprensión conceptual, (b) desarrollo de destrezas procedimentales, (c) comunicar, explicar y argumentar matemáticamente, (d) capacidad de formular, representar y resolver problemas (pensamiento estratégico), (e) desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas y (f) llegar a tener confianza matemática en uno mismo.
- *Cadena 2*: La gestión de la situación por parte de la profesora para desarrollar la competencia matemática de los estudiantes, en particular: (a) el rigor en el uso del lenguaje matemático en el aula, (b) las características del trabajo en grupo, (c) el papel de las interacciones entre los estudiantes y la profesora, (d) las características de la tarea (matemáticamente relevante, potencialidad de la actividad matemática que se genera con el problema propuesto), (e) la forma en que la profesora gestiona la relación entre conseguir los objetivos de la lección y tener en cuenta las respuestas de los estudiantes, y por último (f) descripción de las actividades del contexto del que esta extraído el video-clip.

Las 109 aportaciones se centraron de manera desigual en las dos preguntas: 16 se referían a la primera pregunta y 93 a la segunda.

Reflexiones finales

Intentar responder a las preguntas

- ¿Cómo dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes para maestro? (construcción de conocimiento profesional)
- ¿Cómo aprenden los estudiantes a "ver" aspectos relevantes de la enseñanza de las matemáticas?

plantea dificultades conceptuales y metodológicas.

Dotar de sentido a la idea de aprender a "ver" los aspectos relevantes de la enseñanza desde la perspectiva de **interpretarlos** desde alguna información que consideremos relevantes desde la

didáctica de la matemática y de **identificar** aquellos aspectos de lo que sucede cuando el profesor enseña a resolver problemas que inciden en el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes no es una tarea fácil. Para poder realizarla abogamos por hacer operativas ideas procedentes de una perspectiva sociocultural del aprendizaje que relaciona "discurso" y conocimiento, entendiendo el discurso como una manifestación de la manera en la que se comprende algo en un momento determinado.

Reconocimiento.- Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de I+D+i del Plan Nacional de Investigación, SEJ2004-054479-EDU

Referencias

Callejo, M.L.; Valls, J. y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la escuela,* vol. 61, pp. 5–21.

García, M., Sánchez, V., Escudero, I. y Llinares, S. (2006). The Dialectic Relationship Between Research and Practice in Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 109-128

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 105-128.

Llinares, S. (2006). Aprendiendo a ver la enseñanza de las matemáticas. En En Sbaragli, S. & D´Amore, B. (eds.) (2006). *La Matemática e la seua Didattica, ventánni diimpegno.* (pp.177-180). Roma: Carocci Faber.

Schrire, S. (2006). Knowledge building in asynchronous discussion groups: Going beyond quantitative analysis. *Computers & Education*, 46, 49-70.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Simon, M. (2000). Research on the Development of Mathematics Teachers: The teacher Development Experiment. En A. Kelly, & R. Lesh (eds) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp.335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Pubs.

Referencias previas en este proyecto

Callejo, M.L. (1999). Un marco para actividades de formación permanente centradas en la resolución de problemas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Nº 20 , 75-87.

Cos, A. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKE*, nº 14, 7-28.

Llinares, S. (2004b). *Construir conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Prácticas sociales y tecnológicas.* Conferencia presentada en Seminario ticinese sulla didáctica

della matemática. L'Alta Scuola Pedagógica (ASP): Locarno.

Penalva, MC.; Valls, J.; Cos, A.; Rey, C.; Llinares, S. y Torregrosa, G. (2005-a). La comunicación en un entorno virtual de aprendizaje de Didáctica de la Matemática. Comunicación presentada en las *III Jornadas de Redes de Investigación en docencia universitaria. La configuración del espacio Europeo de Educación Superior*. Alicante: Universidad de Alicante, pp. 1–14.

Penalva, MC.; Escudero, I. y Barba, D. (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica.* Granada: Proyecto Sur.

Penalva, MC.; Torregrosa, G.; Escudero, I.; Gavilán, JM. y Roig, A. (2006). Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización. En Penalva, MC.; Escudero, I. y Barba, D. (eds.) *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica.* Granada: Proyecto Sur.

Rey, C. ; Penalva, C.; Llinares, S. (2007). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas: Análisis de un caso. *Quadrante* , vol. XV, pp. 95–120, (2007)

Roig, A.I. y Callejo, M.L. (2006). El campus Virtual: Un espacio para el trabajo autónomo y colaborativo en la formación inicial de maestros. Comunicación presentada en el *V Congreso de aplicación de las nuevas tecnologías a la docencia presencial y E-Learning*. Valencia. Mayo.

Valls, J.; Cos, A. & Llinares, S. (2003). Virtual debate vs in-public debate as learning environments for mathematics education. En *Advances in Technology-based Education: toward a Knowledge-based Society. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003)*. (pp. 1386-1390). Badajoz, España.

Valls, J., Llinares, S. y Callejo, M.L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: Construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En Penalva, MC.; Escudero, I. y Barba, D. (eds.) *Conocimiento, entornos de aprendizaje y autorización para la formación del profesorado de matemáticas. Construyendo comunidades de práctica* Granada: Proyecto Sur, pp. 25-53

COMPETENCIAS Y EVALUACIÓN: DESARROLLO DE UN INSTRUMENTO DE ANÁLISIS Y CARACTERIZACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE NIVEL SUPERIOR.

María del Mar Moreno
Univesidad de Lleida
Germán Mesa
Carmen Azcárate
Universidad Autónoma de Barcelona

En el marco de una investigación sobre enseñanza del concepto de derivada nos hemos planteado el valor de la evaluación en su vertiente formativa, y como paso necesario para mejorar las propuestas de enseñanza-aprendizaje, y avanzar en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. El análisis de los manuales y libros de texto, hojas de problemas, y en definitiva, los recursos disponibles para el profesor son un punto de referencia muy importante que complementan el amplio abanico de recursos disponibles en el diseño e implementación de los diferentes temas que conforman el programa formativo de una asignatura, y proporciona una información muy valiosa sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de universidad.

En este sentido presentamos un modelo de análisis de problemas de diferentes textos de matemáticas, relevantes para un grupo de profesores, que nos ayuda a reflexionar sobre el tipo de competencias que se desarrollan en los problemas de iniciación a la derivada y las implicaciones que se pueden obtener, no sólo de cara a la mejora de las propuestas de enseñanza de la derivada, sino también pensando en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas de universidad. En definitiva, lo que se pretende es proporcionar herramientas de evaluación, análisis y reflexión a los profesores para que avancen en su formación como profesores y adecuen sus enseñanzas a las competencias profesionales que deberían tener los egresados.

En los últimos años la comunidad universitaria se ha visto inmersa en una nueva cultura de trabajo y forma de entender la formación universitaria de los futuros egresados. Los ciudadanos, la sociedad del conocimiento y del bienestar necesitan, cada vez con más urgencia, que la universidad se convierta en el espacio, físico, científico e intelectual, donde profesores, estudiantes y ciudadanos avancen conjuntamente en el desarrollo del conocimiento, de la creatividad y de la competencia de las personas. Es decir una universidad "viva" en continuo cambio, preparada para la formación de profesionales competentes.

Nuestra hipótesis de partida asume la necesidad de conocer las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas sobre enseñanza, aprendizaje y sobre la materia a enseñar,

Moreno, M. ; Mesa, G. y Azcárate, C. (2007*). Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior*. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 73-86.

como paso previo a la toma de decisiones que afecten a la gestión del aula, a la implementación de propuestas de mejora de la docencia, etc. Asimismo, no podemos desligarnos de un conocimiento más amplio, que se demuestra necesario, del conocimiento didáctico del profesor. En este punto es donde pensamos que las competencias pueden y deben jugar un papel muy importante, como elemento que vincule al profesor, la materia y al alumno. Todo en el contexto de la institución en la que se realiza el proceso de enseñanza y aprendizaje, y de la sociedad en la que estamos ubicados y con la cual interactuamos.

Actualmente, la propuesta de enseñanza que propugnan los acuerdos de Bolonia y la adopción del EEES como un referente que permita esa movilidad estudiantil y una preparación de los estudiantes más allá de los contenidos específicos que cada universidad fije, conduce al profesor, a los departamentos, a los centros y, en general, a la institución a reflexionar en términos de competencias, e incorporar estos cambios tan profundos a su quehacer diario y, en definitiva, 'modificar' la visión que el profesor tiene de la enseñanza de las matemáticas y de sus aplicaciones en contextos profesionalizadores.

Es necesario, proporcionar al profesor un instrumento de análisis lo suficientemente potente como para ayudarle a reflexionar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, y evaluación, que le facilite una rápida y fácil identificación de las competencias que directa o indirectamente, a través de la propuesta didáctica específica que diseñe, y quiere promover en los estudiantes. Así, hemos diseñado un instrumento de evaluación que permita al profesor analizar las diferentes tareas de enseñanza, los materiales y recursos de enseñanza en términos de competencias, y así poner en evidencia la posición del profesor respecto de lo que cree que hace, lo que quiere hacer y lo que debería hacer.

El objetivo de la investigación es proporcionar un instrumento que permita poner en evidencia las competencias que más se favorecen, explicar la formación que damos a los estudiantes, reflexionar sobre la incidencia real que tenemos sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes, estudiar en qué medida favorecemos la formación reflexiva y constructiva de los conocimientos, el pensamiento crítico, la abstracción y la creatividad, cualidades todas ellas deseables en estudiantes universitarios que deberán incorporarse a un mundo profesional que exige tales competencias.

Marco teórico

Sin tratar de ser exhaustivos ni profundizar en las diferentes acepciones del término competencia (dado que no es el objetivo de esta ponencia), sí diremos que la definición de competencia está muy condicionada por el enfoque y el modelo en el que nos situamos, ya sea más funcional y ligado al mundo empresarial, más conductista o más constructivista.

En el ámbito de las matemáticas, donde nos situamos, asumimos la definición que se da en Pisa 2003 "Mathematical Literacy", y traducida por Rico (2004), como "competencia matemática" y referida a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones (OCDE, 2005). Tal como apunta Puig (2006) en un trabajo muy interesante donde analiza y cuestiona "ese deslizamiento de términos" a que ha aludido Rico en diversas ocasiones (2005, 2006), el problema del término competencia radica en que a

palabras diferentes utilizadas en inglés como “mathematical literacy”, “competences”, “competencias”, “performance /proficiency” al traducirlas al castellano se han acabado traduciendo prácticamente igual, sin embargo, los matices en inglés son diferentes.

Para Niss (2003) competencia es la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en las situaciones en las que éstas pueden jugar un papel importante. Las competencias matemáticas las clasifica en: pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones (OCDE, 2004, p.40). Competencias matemáticas propias del proceso de matematización y que como apunta Puig (2006) tienen su base en la concepción de la tradición de la escuela holandesa freudenthaliana.

Para obtener información del proceso de enseñanza y aprendizaje, así como de los conocimientos adquiridos por los estudiantes, cambios conceptuales, desarrollo cognitivo, etc., es necesario tener un conjunto variado de instrumentos que aporten información de naturaleza diversa y poder utilizarlos en diferentes momentos del aprendizaje (Alvarez, 2000). Ello nos lleva a considerar una evaluación de tipo formativa, que no se limite a calificar y sancionar el aprendizaje, pues perdería toda la credibilidad y valor que se le otorga. Para concebir la evaluación como instrumento formativo al servicio del aprendizaje y de la enseñanza se han de articular procedimientos que permitan recoger toda la información necesaria para adoptar decisiones, que permitan evaluar, además de los resultados, el propio diseño de la asignatura, los procesos cognitivos de los estudiantes, los avances y retos, las dificultades, y el contexto donde se ubican.

El término competencia forma parte desde hace pocos años, de nuestra vida universitaria como docentes. Ligado al proceso iniciado allá por el año 1998 por algunos países europeos en el marco de la reunión de la Sorbona, se plantearon, y posteriormente acordaron, la creación del denominado “Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) que implicaba la adopción de un sistema de créditos que facilitara la equiparación de títulos entre los distintos países europeos, promoción de la movilidad, cooperación entre instituciones tanto para asegurar la calidad, como para avanzar y compartir el desarrollo curricular, los programas de estudio, etc.

La presencia del término competencia responde a la necesidad por parte de las instituciones de garantizar que los futuros egresados serán capaces de responder a los retos del nuevo milenio, reforzar la conciencia de los valores compartidos y de la presencia de un espacio socio-cultural común. Asimismo, desde un punto de vista más didáctico, supone, una mayor implicación del estudiante en su proceso de aprendizaje, familiarizarse con la sociedad de la información y del conocimiento. Este proceso de aprendizaje supone varias etapas de desarrollo: desde la más básica y sencilla que implica la realización de tareas de organización, análisis, síntesis y evaluación; hasta otras de nivel superior que suponen gestión de la información, utilización de ésta para integrar, transformar, aplicar y transferir conocimiento.

Las competencias ya aparecieron en el año 2003 en el marco del programa PISA[1] promovido por los países de la OCDE. Tal como nos explica Rico, L. (2006) este programa se

[1] Programme for Internacional Student Assesment (PISA) fue establecido para contribuir al desarrollo de los países d ela OCDE y generar indicadores del capital en educación para una sociedad. Dicha evaluación pretende

sostiene sobre un potente marco teórico, denominado Modelo Funcional Pisa, a partir del cual se pueden interpretar correctamente los indicadores, datos, y valoraciones derivados del estudio. Este modelo concibe las matemáticas como una manera de "hacer" y "aplicar" el conocimiento matemático a situaciones de la vida cotidiana.

Según el paradigma del Modelo Funcional (Rico, 2006), éste pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los diferentes procesos cognitivos que están involucrados. Cuando un estudiante intenta dar respuesta a una determinada cuestión matemática, éste pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los diferentes procesos cognitivos que están implicados.

Si lo que nos interesa evaluar no es sólo la competencia, sino además el momento del desarrollo cognitivo del estudiante, es necesario definir unos indicadores cuanto más fino y específicos mejor para poder llegar a tener bastante nivel de detalle del momento cognitivo del estudiante. Así suscribimos el modelo de PISA y como describe Rico (2006), cada una de esas competencias, será analizada y evaluada desde una visión más global y considerando tres grandes categorías en función de las acciones que realiza el estudiante al enfrentarse a una situación matemática frente a las matemáticas:

- Acción de reproducción y de procedimientos rutinarios.
- Acción de conexiones.
- La acción de reflexión

Cada uno de estas acciones, como indica Lupiañez (2005), y de modo empírico ha ido elaborando, queda definida por indicadores que caracterizarían las diferentes tareas de los estudiantes, en función de la destreza o pericia "proficiency" (Puig, 2006) que cada estudiante demuestre a la hora de resolver indeterminado problema.

La aportación de nuestro trabajo al marco teórico de Lupiañez (2005) radica en, a partir de lo que el autor ha determinado los descriptores que definen los diferentes niveles de competencias, rellenar los huecos de la tabla lo que nos permite hacer un análisis más fino y preciso de la situación. Asimismo, pensamos que resulta interesante disponer de indicadores de evaluación de cada una de las clases: reproducción, conexiones y reflexión, que al igual que en el caso de Lupiañez se concretan en grados de destreza matemática y por lo tanto en grado de desarrollo cognitivo. En este sentido se hace necesario distinguir entre dos tareas que siendo de la categoría de representación, no están en el mismo nivel de dificultad una que tan sólo exige identificar un modelo bien otra que use modelos conocidos en situaciones concretas. Si bien ambas pertenecen a la misma categoría una implica un gran mayor de complejidad que la otra.

Este instrumento puede ayudarnos a categorizar tareas, evaluar competencias de los estudiantes, hacer conscientes a los profesores de las competencias más trabajadas, de las menos, y la incidencia global de esta formación en el futuro profesional.

obtener información sobre el dominio que los ciudadanos de una comunidad tienen cuando usan las herramientas matemáticas en situaciones de la vida cotidiana, como referente de la calidad de su sistema educativo.

Metodología de análisis:

Se trata de una investigación de carácter empírico y cualitativo. Teniendo en cuenta los objetivos de ésta, que era diseñar un instrumento de evaluación formativo a partir del cual tener control del proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante y del profesor, y asumiendo que una parte del proceso de enseñanza del profesor y del diseño de la enseñanza de la materia lo forman los libros de texto, hojas de problemas etc. Decidimos analizar las tareas que sobre iniciación al concepto de derivada y de su interpretación, aparecen en los correspondientes capítulos de tres libros de texto que se usan comúnmente para la enseñanza de la derivada en el nivel universitario. Los textos eran: Stewart (1999), Salas y Hill; y Larson (1999).

Si bien en un primer estudio piloto (Mesa, Azcárate, Moreno, 2006) analizamos el capítulo correspondiente de cada uno de estos tres libros, incluyendo todo el desarrollo teórico que se hacía del tema, finalmente decidimos centrarnos exclusivamente en las tareas que aparecen en los textos a modo de problemas para ser resueltas por los estudiantes, en la idea de ver qué competencias desarrollaban cada una de éstas y que habilidades cognitivas debían poner en marcha para que el alumno las resolviera.

Para desarrollar el instrumento de análisis que nos permitiera analizar cada una de estas tareas, partimos de la tabla que propia Lupiáñez (2005), completando algunos niveles que en la tabla no aparecían. Así en la tabla se pueden observar las 8 competencias de Niss (2003), los indicadores de destreza para cada una de las tres categorías asumidas en el proceso de matematización (ver tabla 1)

A partir de un estudio de tipo empírico y triangulando la información específica sobre derivadas con expertos en el tema, realizamos el verdadero instrumento de análisis que fue empleado posteriormente para analizar las tareas en términos de competencias. Dado que en estos momentos estamos en proceso de análisis de más materiales y en pleno proceso de investigación mostramos, a modo de ejemplo, una información parcial de la tabla de competencias y niveles de categorías específicos para derivadas (ver tabla 2)

Es importante destacar que los indicadores que aparecen en esta tabla son producto de una serie muy larga de continuas reducciones y que en cada una de estas fases, se ha consultado con expertos, los cuales han ayudado a completar y matizar la información que en ella aparecía.

Indicadores de las competencias *matemáticas* según los niveles de cobertura –acción.

Competen/Niveles	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Pensar y razonar	Identifica que un contexto puede tener respuesta con las matemáticas.	Responde a cuestiones en contextos muy conocidos.	Responde a cuestiones en contextos poco familiares	Sabe cuándo, dónde y cómo usar un concepto para una tarea especifica	Responde a cuestiones complejas en multitud de contextos	Elabora conceptos y técnicas matemáticas, relacionándolos con la vida diaria.
Argumentar	Identifica que es una prueba matemática.	Diferencia los tipos de razonamiento, teorema hipótesis, axioma, una conjetura….etc.	Sigue y evalúa una cadena de argumentos matemáticos. Sabe que es una prueba	Elabora argumentos basados en conjeturas o acciones matemáticas	Formula razonamientos desarrollados a partir de conceptos aprendidos. Realiza pruebas.	Deduce, conjetura y obtiene conclusiones que generalizan un concepto. Demuestra teoremas.
Modelizar	Identifica que un modelo es similar a otros modelos vistos antes	Usa modelos explícitos en situaciones concretas	Identifica que hay que realizar un modelo (o trata de hacerlo)	Estructura la situación que va modelizar.	Desarrolla y usar modelos en múltiples situaciones	Monitorea y controla el modelo (incluye limitaciones) y sus resultados.
Resolver problemas	Identifica problemas que las matemáticas ofrecen respuesta.	Planifica y resuelve problemas con datos sencillos	Desarrolla procedimientos intuitivos validos, aunque no sean apropiados.	Selecciona y aplica estrategias validas y apropiadas	Selecciona, compara y evalúa y ajusta estrategias	Generaliza resultados de problemas
Representar	Leer datos de tablas o figuras (gráficos).	Usa un único tipo de representación	Conoce y usa diferentes sistemas	Vincula diferentes sistemas, incluido el simbólico	Usa un único tipo de representación para traducir un contexto de la vida real	Relaciona y traducir con fluidez diferentes sistemas
Comunicar	Describe resultados obtenidos.	Realiza explicaciones sencillas	Entiende explicaciones de conceptos, en los libros de texto.	Entiende aseveraciones de los demás sobre matemáticas	Comunica conclusiones con precisión	
Utilizar lenguajes matemáticos	Realiza operaciones básicas.	Usa algoritmos y fórmulas elementales	Aplica procedimientos descritos con claridad	Escoge el procedimiento adecuado para la solución de un ejercicio.	Utiliza con símbolos matemáticos en situaciones de la vida real	Domina con rigor el lenguaje simbólico
Usar Ayudas y herramientas NTIC	Identifica la necesidad de los TICs para una tarea específica.	Resuelve, operaciones sencillas, ecuaciones. Visualiza el comportamiento de una función.	Escoge el software apropiado para una tarea específica.	Comprende que el TICs tiene limitaciones para realizar determinadas actividades	Encuentra una solución al problema propuesto con la ayuda TICs	Diseña programas para solucionar problemas
Indicadores para la complejidad de las tareas en cada una de las categorías	**REPRODUCCIÓN.** Contextos familiares, conocimientos ya practicados, aplicación de algoritmos estándar, realización de operaciones sencillas, uso de fórmulas elementales.		**CONEXIÓN**. Contextos menos familiares, interpretar y explicar, manejar y relacionar diferentes sistemas de representación, seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios		**REFLEXIÓN.** Tareas que requieren comprensión y reflexión, creatividad, ejemplificación y uso de conceptos, relacionar conocimientos para resolver problemas complejos, generalizar y justificar resultados obtenidos.	

(Tabla1: Indicadores de competencias matemáticas basada en Lupiáñez, 2005)

Ejemplo de algunos indicadores de las competencias según los niveles de cobertura –acción para **el concepto de derivada (CD)**

Competen/Niveles	1	2	3	4	5	6
Pensar y razonar	Identifica un contexto donde aparece o es necesario utilizar el CD.		Dota de significado el CD en contextos familiares.			
Argumentar						Deduce, conjetura y obtiene conclusiones que generalizan el CD.
Modelizar			Caracteriza un modelo que involucra el CD.		Desarrolla y usa modelos que incluyen el CD en múltiples situaciones concretas.	
Resolver problemas				Selecciona y aplica estrategias validas y apropiadas para solucionar problemas con el CD.		
Representar	Usa un único tipo de representación de la derivada					
Comunicar		Comunica (oral, escrito) procedimientos y explicaciones (interpretaciones literales) sobre el CD.				
Utilizar lenguajes matemáticos	Realiza operaciones simples (procedimientos rutinarios) como derivar en forma simbólica.					
Usar Ayudas y herramientas TIC						Diseña una estrategia para usar las TICs en una situación original, o dar respuesta a una necesidad.

(Tabla 2: Indicadores de competencias de derivadas)

Análisis de los resultados:

En este trabajo presentamos, a modo de muestra, el análisis correspondiente a las tareas sobre iniciación al concepto de derivada y sobre su interpretación (secciones 2.6 y 2.7) del texto de Stewart, capítulo 2 "Límites y derivadas".

En total se han analizado 56 tareas (entre ejercicios y problemas) todas ellas referidas a la definición de derivada y a su interpretación. Cada tarea ha sido analizada utilizando el instrumento descrito (tabla 2), en términos de las ocho competencias definidas y, a su vez, pensando en el tipo de categoría a la que pertenecía: representación, establecimiento de conexiones o bien de reflexión. Igualmente, hemos establecido dos subniveles en cada uno de estas categorías, determinados por los correspondientes indicadores de "destreza" cognitiva que suponen.

Para ilustrar un poco más el análisis y hacerlo más significativo, hemos elegido dos tareas cualesquiera, y mostramos el análisis realizado bajo la lupa de las competencias:

Una curva tiene la ecuación y=f(x). Encuentre una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P (3, f(3)) y Q (x, f(x)). Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

P/sar y Rz/nar						Argumentar						Modelizar						F y R P/mas						Representar						Comunicar						Usar L. M					
Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx	
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
																															X					**X**					

Este problema se centra en la competencia "comunicar y utilizar lenguaje matemáticos". En concreto, para la competencia comunicativa, lo que se favorece es la comunicación escrita de la explicación literal del concepto de derivada. Además, realiza operaciones simples o procedimientos rutinarios de la expresión de la derivada en forma simbólica.

Por lo tanto se trata de una tarea de representación que activa niveles cognitivos básicos y en los que el alumno no tiene que hacer otra cosa más que aplicar directamente el modelo teórico explicado en clase por el profesor.

Veamos otro ejemplo que movilice capacidades de nivel superior.

> 2.6.15. Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 ft/s, su altura (en pies) después de t segundos se expresa con $y=40t-16t^2$. Encuentre la velocidad cuando t=2.

P/sar y Rz/nar						Argumentar						Modelizar						F y R P/mas						Representar						Comunicar						Usar L. M					
Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx		Rep		Con		Refx	
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
			X											**X**					**X**							**X**							**X**						**X**			

En este caso, tal y como refleja la tabla, se favorece el trabajo de seis de las ocho competencias: pensar y razonar, modelizar, resolver problemas, representar, comunicar y usar lenguajes matemáticos. A parte de trabajar estas competencias, lo interesante es conocer exactamente que niveles cognitivos estaría activando en los estudiantes.

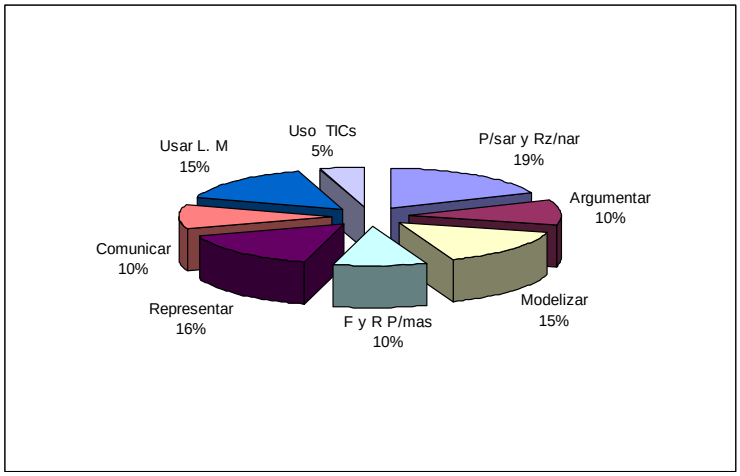
Dentro de lo que sería la competencia de "pensar y razonar", el alumno ha de ser capaz de establecer conexiones y en particular a de ser capaz de identificar cómo, cuándo y dónde usar el concepto de derivada, lo que ya supone un mayor nivel de abstracción. Además, se trata de una tarea de "modelización" en la que el estudiante ha de caracterizar un modelo que implica el concepto de derivada. No solo debería ser capaz de caracterizar un modelo sino que además tendría que resolverlo, evidentemente en un nivel aún de reproducción e imitación de problemas tipo explicados en clase. El problema propuesto supone que el estudiante trabajará la competencia de "representación", eso sí, en una categoría cognitiva de conexión, en la que las destrezas cognitivas que posiblemente pueda desarrollar sean las de conocer y utilizar diferentes formas de representar el concepto de derivada y estimar el valor de ésta en una tabla funcional.

Igualmente, se favorece la competencia comunicativa, en un nivel de conexión, lo que supondría ser capaz de exponer las explicaciones e interpretaciones del estudiante mediante argumentos, resultados y razonamientos. Además, en este nivel de destreza cognitiva en el que hemos enmarcado la tarea, el estudiante es capaz de entender aseveraciones realizadas sobre el concepto de derivada bien realizadas por sus compañeros, o bien tomadas de un texto científico. Finalmente, diremos que la actividad también potencia la competencia de "utilizar el lenguaje matemático". Entendemos que se enmarca en un nivel de conexión, y que el estudiante es capaz de escoger el procedimiento adecuado para calcular la derivada de funciones algebraicas. No hacemos referencia a la "utilización de las TICs" porque no trabaja este aspecto.

El tipo de análisis presentado se ha realizado con las 56 tareas analizadas. Mostramos a continuación el resultado final de nuestro análisis, donde globalmente podemos ver la proporción de tareas que se vinculan más a una u otra competencia, así como las categorías en las que se encuentran.

Reproducción	52
Conexión	48
Reflexión	8
	108

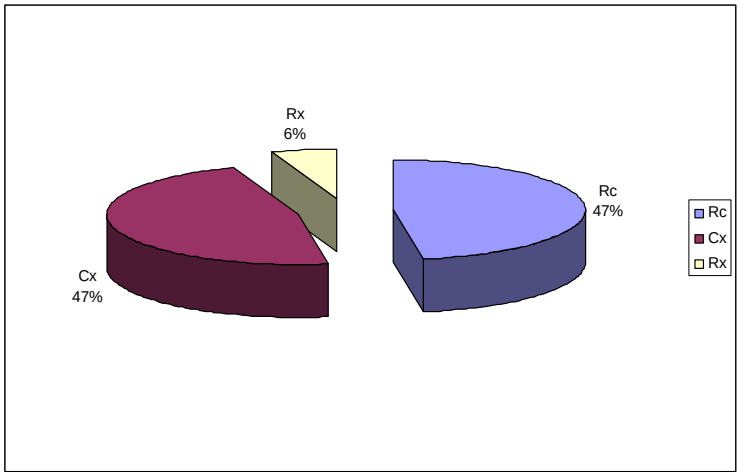
nivel 1	29
nivel 2	23
nivel 3	38
nivel 4	10
nivel 5	8
nivel 6	0
	108



Por competencias, podemos decir que este libro, busca bastante el equilibrio y que, salvo la competencia referida a la "utilización de las TICs" (5%), el resto se trabajan en un porcentaje muy similar. Si miramos con más detalle el diagrama, observaremos que la competencia de "pensar y razonar" es la que más se potencia (19%) por delante de la de "representar" (16%) y "modelizar" (15%) o "usar lenguajes matemáticos" (15%). Aparentemente estos resultados chocan con otras tres competencias que están menos trabajadas, eso sí, en la misma proporción: "comunicar" (10%), "argumentar" (10%) y "formular y resolver problemas" (10%).

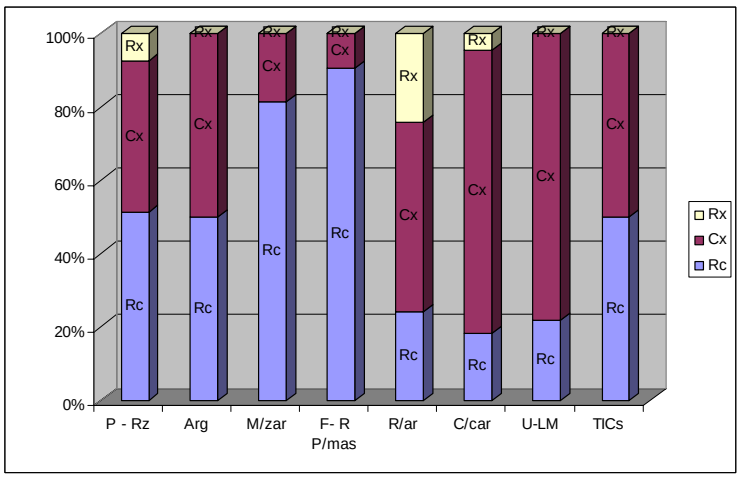
Una primera aproximación nos estaría hablando de que el autor de este libro, intenta proporcionar al profesor una manera de enseñar el concepto de derivada en la que obliga al estudiante a trabajar con modelos matemáticos, manejar diferentes representaciones (tablas, gráficas de funciones, etc.), etc., no tanto para resolver problemas o argumentar sobre ellos, sino para pensar y razonar sobre las situaciones propuestas y a partir de ahí ser capaz de, o bien reproducir esquemas de trabajo dados por el profesor o explicados en clase o en manuales de carácter científico, o bien establecer conexiones. Como podíamos prever inicialmente, la incorporación de las nuevas tecnologías sigue siendo algo meramente anecdótico, si bien en el caso de este autor el porcentaje de 5% puede considerarse interesante, y podemos incluso intuir que la preocupación por trabajar el concepto de derivada desde todas las competencias básicas matemáticas queda muy bien reflejado en estos dos capítulos introductorias del libro.

Si miramos desde la perspectiva de las tres categorías asumidas como tal: conexión, reflexión y reproducción. Podemos observar un equilibrio muy grande entre reproducción y conexión (47%), frente a un trabajo francamente insignificante en la categoría de reflexión (6%). Desde el punto de vista conceptual y teniendo en cuenta que el instrumento de evaluación propuesto nos permite establecer niveles de pensamiento matemático, desde el nivel más bajo de reproducción (1) hasta el más alto de reflexión (6), lo deseable sería no sólo buscar un equilibrio entre las competencias trabajadas, sino además, hacer una propuesta progresiva de enseñanza que barriera todos los niveles cognitivos desde el más básico hasta el de mayor nivel de abstracción. Difícilmente podremos ayudar al estudiante a alcanzar un nivel cognitivo alto, si las tareas propuestas son de nivel medio y bajo.



Tal como podemos observar en la siguiente diagrama de barras, la reproducción y la conexión son las categorías más presentes en la mayoría de las tareas analizadas. Esto significa que fundamentalmente se trabaja en contextos familiares, se manejan conocimientos que se han practicado previamente en clase, se acaba proponiendo mucha tarea de aplicación algorítmica, operaciones sencillas y manejo de fórmulas elementales. Además, se inicia al estudiante al manejo de diferentes sistemas de representación y le enfrenta a trabajar en contextos un poco menos familiares que los que posiblemente se han tratado en el aula y empieza a usar estrategias de resolución de problemas no muy rutinarios.

No obstante, todas las tareas que requieren mayor comprensión, reflexión y creatividad por parte del estudiante quedan reducidas a un 6%. De la misma forma, en contadas ocasiones se enfrenta al estudiante a la resolución de problemas más complejos, generalizaciones o justificación formal de resultados obtenidos.



Asimismo, llama la atención el fuerte desequilibrio de las categorías más representativas relacionándolo con la competencia a la que se vincula. Así por ejemplo, en la competencia "formular y resolver problemas" observamos que la mayoría de las tareas son de reproducir (más de un 80%), es decir, que el tipo de problemas que trabaja fundamente el estudiante lo son en contextos familiares y donde aplica esquemas de

resolución conocidos. El mismo tipo de análisis se podría hacer para la competencia de modelizar. Si bien es muy positivo que el propio material de trabajo incluya tareas para desarrollar dicha competencia, la "calidad" de éstas, deja un poco que desear, pues enfrenta al estudiante a situaciones y modelos familiares que son aplicación directa de otros ya vistos; por el contrario, aquellas situaciones susceptibles de ser modelizadas, menos familiares o incluso desconocidas, o son pocas o prácticamente inexistentes.

Tal como podemos leer en el diagrama de barras, los desequilibrios son muy claros y una de las conclusiones a las que deberíamos llegar esa la necesidad de equilibrar las tres categorías, por las implicaciones cognitivas que tiene. Sería deseable que los estudiantes pudieran moverse de forma progresiva entre niveles de pensamiento matemático del más básico que les permitiera percibir los objetos de su entorno, a un nivel más avanzado ene. Que ya fuera capaz de actuar sobre los objetos matemáticos e incluso pudiera resolver algunos problemas; y finalmente, llegara a un nivel superior de pensamiento en el que fuera capaz de actuar sobre objetos matemáticos a partir del razonamiento y con el objetivo de construir otros nuevos objetos, a partir de los cuales volver a interactuar.

Conclusiones:

Hemos de entender que las conclusiones son parciales en la medida que el trabajo que os presento forma parte de una investigación en curso. Además, solamente hemos analizado un texto, que desde el criterio de muchas personas podría pensarse que no es representativo del tipo de texto que se manejan habitualmente en asignaturas de Cálculo I /Análisis I en la universidad. No pretendemos establecer generalizaciones, lo único que se pretende en este apartado es llamar la atención de todos, sobre las implicaciones que tiene un instrumento de estas características de cara al desarrollo profesional del profesor y todo lo que ello supone. De esta forma algunas conclusiones que consideramos relevantes son:

- Desde el punto de vista metodológico:

    1. Resulta un instrumento muy valioso que permite pensar en términos de competencias.
    2. Se hace necesario un trabajo previo sobre los indicadores de competencias según los niveles de cobertura-acción para las matemáticas en general, de forma que se pueda hace una transferencia a las correspondientes tablas de contenidos matemáticos que se enseñan en el primer ciclo de universidad.
    3. Los niveles de destreza cognitiva dentro de cada una de las tres categorías con las que hemos trabajado son un primer paso muy importante que puede enriquecerse aún más con un trabajo experimental dirigido a los estudiantes.
    4. Se trata de un instrumento de evaluación muy potente para el profesor, tanto para hacer una evaluación formativa de los estudiantes como para evaluar su propia planificación docente una asignatura/materia concreta.

- Desde el punto de vista del desarrollo profesional del profesor:

    1. Este instrumento aporta al profesor una nueva visión sobre cómo organizar el proceso de enseñanza haciéndole más consciente de los desequilibrios tan grandes que normalmente aparecen en los programas y materiales de trabajo diseñados.
    2. El análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de las competencias aporta una nueva dimensión muy enriquecedora para el profesor y que da respuestas a muchas preguntas básicas sobre los aprendizajes y resultados de los estudiantes.
    3. Permite la búsqueda del equilibrio entre las propuestas de los textos y las editoriales, y las necesidades del profesor y de la materia que enseña, siendo un instrumento que puede incidir en el diseño de materiales por parte de las editoriales.

Bibliografía:

Alvarez, J.M. (2000). Evaluar para conocer, examinar para excluir. Morata, Madrid.

Lupiañez, J.L. (2005). *Análisis Cognitivo*. Universidad de Granada, Granada (pendiente de publicación)

Mesa, G., Azcárate, C. y Moreno, M.M. (2006). Identificación y clasificación de los enfoques didácticos para la educación por competencias en algunos libros de cálculo diferencial. *CD-Comunicaciones del X Simposio de la SEIEM: Investigación en Educación Matemática*. U. de Zaragoza.

Niss, M. (2003). The Danish KOM Project and posible consequences for teacher education. En R. STRÄSSER, G. BRANDELL, B. GREVHOLM (Eds.): Educating for the future. *Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education, pp. 179-192*. Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.

OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: first results from PISA 2003*. OCDE, Paris.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Santillana, Madrid.

OCDE: *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris, OCDE.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. BOLEA, M.J. GONZÁLEZ, M.MORENO (Eds.): *Actas del X Simposio de la SEIEM*. Instituto de Estudios Altoaragoneses. Universidad de Zaragoza.

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. CASTRO, E. DE LA TORRE (Eds.): *Actas VIII SEIEM*. La Coruña, Universidad de A Coruña.

Rico, L. (2005). Competencias Matemáticas e Instrumentos de Evaluación en el Proyecto PISA 2003. En *PISA 2003. Pruebas matemáticas y de solución de problemas*. M.E.C., Madrid.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, extraordinario, pp. 275-294*.

Stewart, J. (1999). *Cálculo, conceptos y contextos*. (Edición Internacional). International Thompson Ed., S.A. DC.B.

La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio[1]

Matías Camacho Machín (mcamacho@ull.es)
Josefa Perdomo Díaz (pepiperdomo@gmail.com)
Universidad de La Laguna
Manuel Santos Trigo (msantos@cinvestav.mx)
Cinvestav-IPN

Resumen

En este trabajo analizamos hasta qué punto los estudiantes de Universidad utilizan diferentes procesos y representaciones matemáticas para interpretar y responder a un grupo de cuestiones que recogen conceptos fundamentales relacionados con el estudio de las ecuaciones diferenciales. Los resultados obtenidos nos sugieren que, para los estudiantes, la idea de resolver una ecuación diferencial se reduce a la aplicación de algoritmos específicos de clasificación y resolución de las mismas. No recuerdan bien los diferentes métodos de resolución y eso les lleva a no tener una idea clara del concepto de solución. Los resultados nos indican que se debería promover la realización de actividades que conlleven el uso de diferentes sistemas de representación en las cuales los estudiantes puedan reflexionar sobre los diferentes conceptos asociados al concepto propiamente dicho, los diferentes métodos de solución, los procedimientos y los significados y conexiones entre las representaciones utilizadas.

Abstract

In this work, we document and analyze the extent to which university students utilize diverse representations and mathematical processes to interpret and respond to a set of questions that involves fundamental concepts associated with the study of differential equations. Results indicate that the students' idea to solve a differential equation is reduced to the application of proper solution methods to a certain types of forms or equation differential expressions. They failed to remember the solutions methods and lacked clear comprehension of the concept of solution. Results suggest that instructional activities should promote the students' use of several representation systems in which they can reflect on the various aspects associated with the concept itself, the solution methods, the procedures, and the corresponding meaning and connections among those representations.

[1] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación SEJ2005-08499 del Plan Nacional de I+D+I del MEC y cofinanciado con fondos FEDER de la CEE y por el Conacyt, Mexico (referencia 47850).

Camacho, M.; Perdomo, J. y Santos Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio*. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 87-106.

Introducción

El concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria forma parte de la mayoría de los currículas de los estudios universitarios de tipo científico-tecnológico debido a las numerosas y diversas aplicaciones del mismo. En muchas ocasiones el término Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) se asocia con el estudio de una serie de algoritmos que permitan identificar el tipo de ecuación al que nos enfrentamos para posteriormente resolverla dependiendo de la clasificación establecida. Algo similar ocurre con el Campo de Direcciones asociado a una EDO, lo que conlleva que la mayoría de los estudiantes, pasado un tiempo desde que han recibido la instrucción, no recuerden cómo enfrentarse a gran parte de las ecuaciones que se les plantean.

La resolución de problemas es una parte fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Santos, 2007) en general y de las EDO en particular debido a las múltiples aplicaciones que tiene el concepto. Esto nos lleva a preguntarnos cómo se enfrentan los estudiantes universitarios a problemas que involucren EDO después de haber recibido una instrucción basada en algoritmos de resolución, ¿recordarán dichos algoritmos y sabrán emplearlos adecuadamente?, ¿pensarán en estrategias alternativas para resolver las tareas en caso de no recordarlos?, ¿considerarán diferentes maneras de representar el problema para conseguir enfrentarse al mismo? Estas preguntas se irán contestando a lo largo de este trabajo, a través del análisis de las respuestas de estudiantes universitarios a un cuestionario formado por problemas que se han planteado desde una perspectiva diferente a la que los alumnos están acostumbrados a trabajar en su proceso de instrucción.

Nuestra investigación gira en torno a cuatro preguntas principales: ¿los alumnos utilizan los conocimientos que poseen, anteriores al estudio de las EDO, para resolver cuestiones sencillas?, ¿qué uso hacen de los distintos sistemas de representación?, ¿qué influencia tiene el enunciado de la pregunta en el modo de actuación de los estudiantes? y ¿cómo actúan frente a problemas con un contexto real?

Marco conceptual

El aprendizaje matemático es un proceso continuo en el que los estudiantes necesitan representar y examinar conceptos matemáticos desde diferentes puntos de vista por lo que es necesario que el alumno construya una red de relaciones y significados asociados con ese concepto (Camacho, Perdomo, Santos, 2008). El desarrollo de estas construcciones depende directamente de los sistemas de representación utilizados y de la coordinación entre ellos (Duval, 1998). El concepto de solución de una EDO y de Campo de Direcciones asociado al mismo son algunos de los significados que están íntimamente relacionados con el concepto de EDO. La naturaleza gráfica del Campo de Direcciones y el enfoque tradicionalmente algebraico desde el que se enseñan las EDO sugiere la necesidad de analizar cómo de estables son las construcciones de las relaciones entre diferentes sistemas de representación.

Por otra parte, el aprendizaje de un concepto matemático lleva implícito la habilidad para emplear dicho concepto en la resolución de problemas (Santos, 2007), por lo que la resolución de problemas debe constituir una parte importante en la enseñanza.

Partiendo de estas premisas podemos considerar que la comprensión de un concepto matemático pasa por diferentes estados o fases, entre los que podemos encontrar la fase de comprensión de la definición del propio concepto, la etapa en la que dicho concepto se

emplea de forma algorítmica y aquella en la que se le reconoce como herramienta para la resolución de problemas.

El análisis de los errores que cometen los estudiantes a la hora de enfrentarse a un concepto nos proporciona información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan diferentes procedimientos para conseguir los objetivos perseguidos. Los errores pueden tener su origen en un obstáculo, entendido éste como un conocimiento que se ha adquirido en algún momento, proporcionando resultados adecuados en determinados contextos pero que, empleado fuera de dicho contexto ha provocado respuestas incorrectas (Socas, 1997). Es fundamental identificar estos errores con el objetivo de proponer actividades que provoquen en el estudiante situaciones de conflicto donde se refleje en qué contextos es factible emplear dichos conocimientos y en cuáles no.

Metodología

En esta investigación participaron diez estudiantes de la licenciatura de Matemáticas y once de la de Física, siendo la principal diferencia entre ellos el enfoque que se presenta del concepto de EDO, más teórico en el caso de los matemáticos y más algorítmico en Física. Esta diferencia se debe en parte a la naturaleza de las asignaturas que cursaban los alumnos. Ambas eran cuatrimestrales, pero en el caso de Matemáticas es una asignatura de tercer curso, dedicada exclusivamente al estudio de las EDO y en Física se trata de una asignatura de primer curso en la que se tratan además conceptos de Análisis Complejo.

El análisis de las estrategias empleadas por estos estudiantes para resolver actividades relacionadas con las EDO, así como las dificultades y los errores que surgen en el proceso de resolución, se realiza a partir de un cuestionario diseñado específicamente para tal fin (Anexo 1). El cuestionario consta de once problemas cuya característica principal es que pueden ser resueltos empleando diversos métodos, no limitándose a la aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos. La elección de los mismos se hizo teniendo en cuenta los resultados mostrados en la bibliografía analizada, en lo que a dificultades y errores relacionados con las EDO se refiere (Brodetsky, 1919, 1920; Hernández, 1995; Habre, 2000) y se escogieron, en su mayoría, de libros de texto empleados en la enseñanza de las EDO. Otros se diseñaron específicamente con el fin de responder a las cuestiones principales de nuestra investigación. Las EDO que conforman el cuestionario son muy sencillas. Se presentan actividades en las que los estudiantes necesitan trabajar los sistemas de representación algebraico y gráfico, tanto de forma aislada como conjunta, y tienen que emplear sus conocimientos en la resolución de problemas enmarcados en un contexto real. Las actividades debían resolverse empleando únicamente lápiz y papel.

En el cuestionario se tratan otros conceptos asociados al de Ecuación Diferencial Ordinaria: solución y Campo de Direcciones. Una vez definido el concepto de EDO, pasamos inmediatamente a preocuparnos por sus soluciones, ya sea por obtener su expresión algebraica o por conocer algunas propiedades de las mismas. El concepto de Campo de Direcciones asociado a una EDO engloba dos procedimientos que podemos considerar diferentes desde el punto de vista cognitivo, su interpretación y su representación. Mientras que representar un Campo de Direcciones se puede convertir en algunos casos en una tarea algorítmica y mecanizada, su interpretación necesita de la existencia de una mínima comprensión del propio concepto.

El cuestionario se ha diseñado teniendo en cuenta todas las consideraciones anteriores, clasificándose los problemas que lo forman en cuatro grupos diferentes cuyas características son:

Tipo 1: Requieren del conocimiento del concepto de solución de una EDO. Consisten en comprobar si una expresión algebraica es solución particular o general de una EDO o imponer que lo sea (P3, P4 y P11) y en analizar algunas propiedades generales de las soluciones de una EDO en función de los términos de la misma (P5).

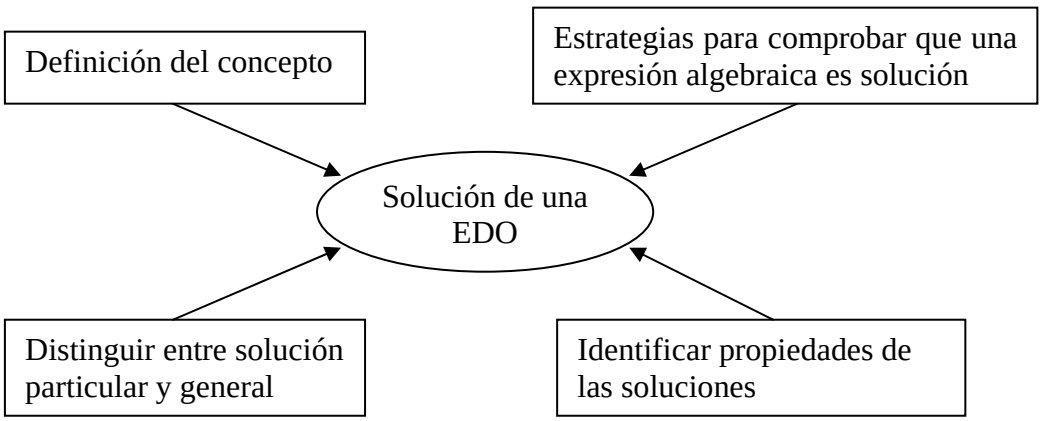
Tipo 2: Su resolución se puede abordar haciendo uso de razonamientos lógicos (P1) o empleando métodos algebraicos sencillos (P2). Conllevan la representación gráfica de funciones elementales, pero no se ven involucrados ni la construcción o interpretación del Campo de Direcciones ni la interpretación de datos desde y hacia un contexto matemático.

Tipo 3: Cuestiones para cuya completa resolución es necesaria la representación y/o interpretación del Campo de Direcciones asociado a una EDO (P6, P8 y P10).

Tipo 4: Actividades en las que es necesario interpretar información proporcionada en términos algebraicos o gráficos, en un contexto real o viceversa (P7 y P9).

Análisis de datos

La comprensión del concepto de solución de una EDO se va desarrollando a medida que su definición se conjuga con otros elementos como son el conocimiento de diferentes estrategias para comprobar si una determinada expresión algebraica es solución de una EDO, la distinción entre solución particular y general y la identificación de propiedades de las soluciones a partir de ejemplos sencillos.



Las respuestas de los estudiantes a las preguntas de Tipo 1 evidencian que tres alumnos no muestran siquiera conocer la definición del concepto de solución de una EDO (AF1, AF4 y AF5). El procedimiento empleado con mayor frecuencia por los estudiantes para comprobar si una expresión algebraica es solución de una EDO (P3) y para imponer la condición de que lo sea (P11) es la derivación, seguido por la resolución de la ecuación con el método para ecuaciones con variables separadas (Tabla 1). Cinco alumnos emplearon los mismos procedimientos para resolver cada una de estas actividades; otros cinco utilizaron estrategias claramente diferentes (Figura 1).

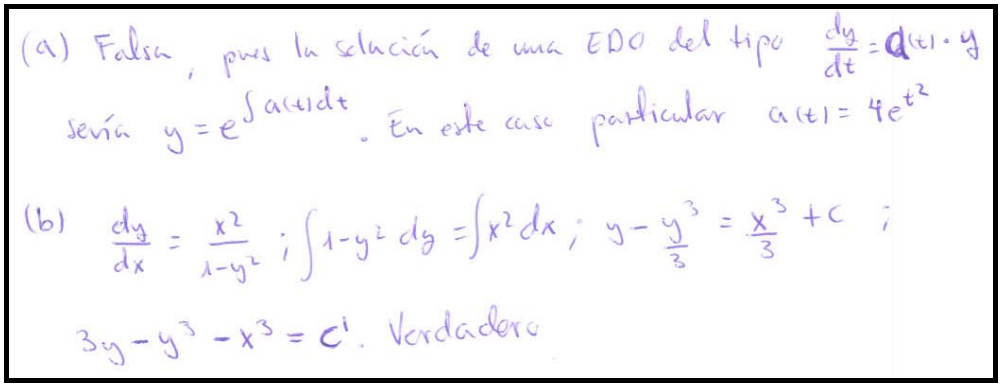


Figura 1: AM4 emplea métodos diferentes para resolver tareas del mismo tipo

El alumno AM4 se basa en las propiedades de las soluciones de una EDO para responder a P4, mientras que el resto de los alumnos queda prácticamente dividido en dos grupos (Tabla 2). Por un lado están aquellos que resuelven la ecuación y por otro nos encontramos con un nutrido grupo de estudiantes que comprueba que la expresión dada verifica la ecuación, sin distinguir entre esta expresión y la solución general de la ecuación diferencial.

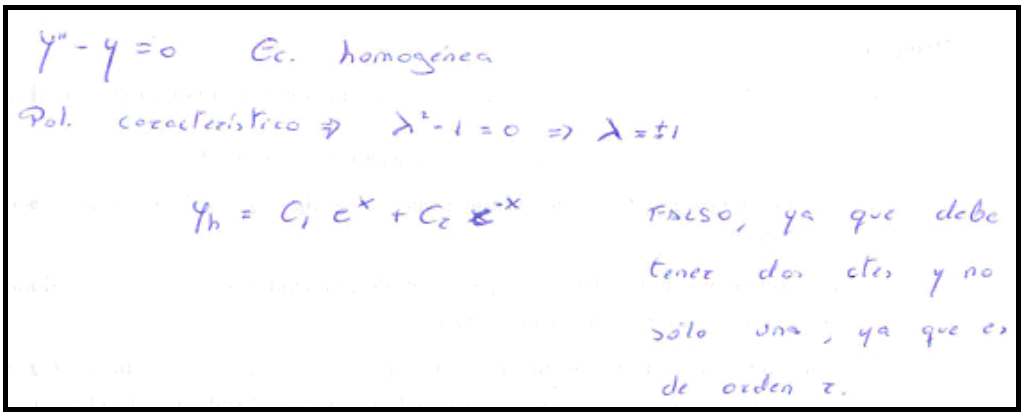


Figura 2: Método algebraico empleado por los estudiantes para encontrar la solución general de una EDO

Finalmente, entre las actividades englobadas dentro del Tipo 1, se propone una actividad que consiste en deducir una propiedad de las soluciones de una EDO apoyándose en los resultados obtenidos en otras actividades del cuestionario (P5). Únicamente dos estudiantes, AM7 y AM10, identificaron dicha propiedad a partir de P2. El resto de los alumnos que se enfrentan a esta cuestión lo hacen presentando razonamientos incorrectos (Tabla 3), un ejemplo de los cuales se muestra en la siguiente figura.

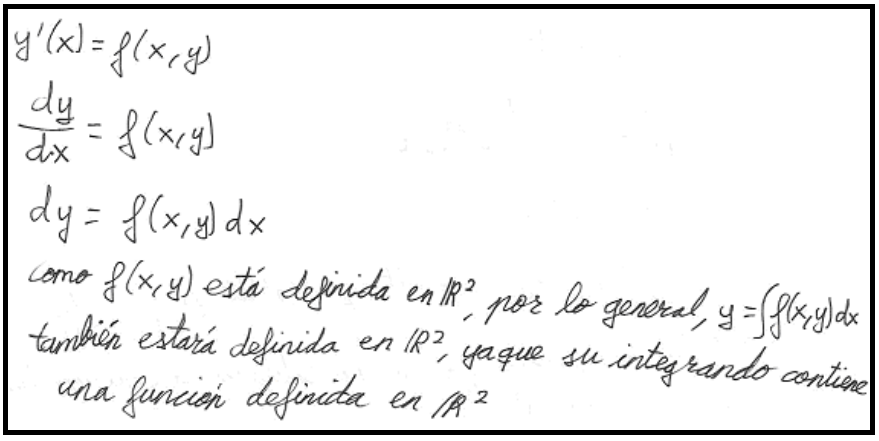


Figura 3: Razonamiento incorrecto empleado por un estudiante

La mayoría de los errores que los estudiantes cometen durante la resolución de los problemas de Tipo 1 están relacionados con conceptos y procedimientos que han aprendido durante su instrucción previa al estudio de las EDO. Entre los más destacados se encuentra el desarrollo de procedimientos como la derivación y la integración, así como considerar propiedades incorrectas de funciones como la exponencial y la logarítmica. La actividad en la que más errores de este tipo se han cometido es P5. Las dificultades relacionadas directamente con las EDO se han encontrado a la hora de aplicar algoritmos propios de resolución de las mismas, así como en la distinción entre los conceptos de solución particular y general de una EDO.

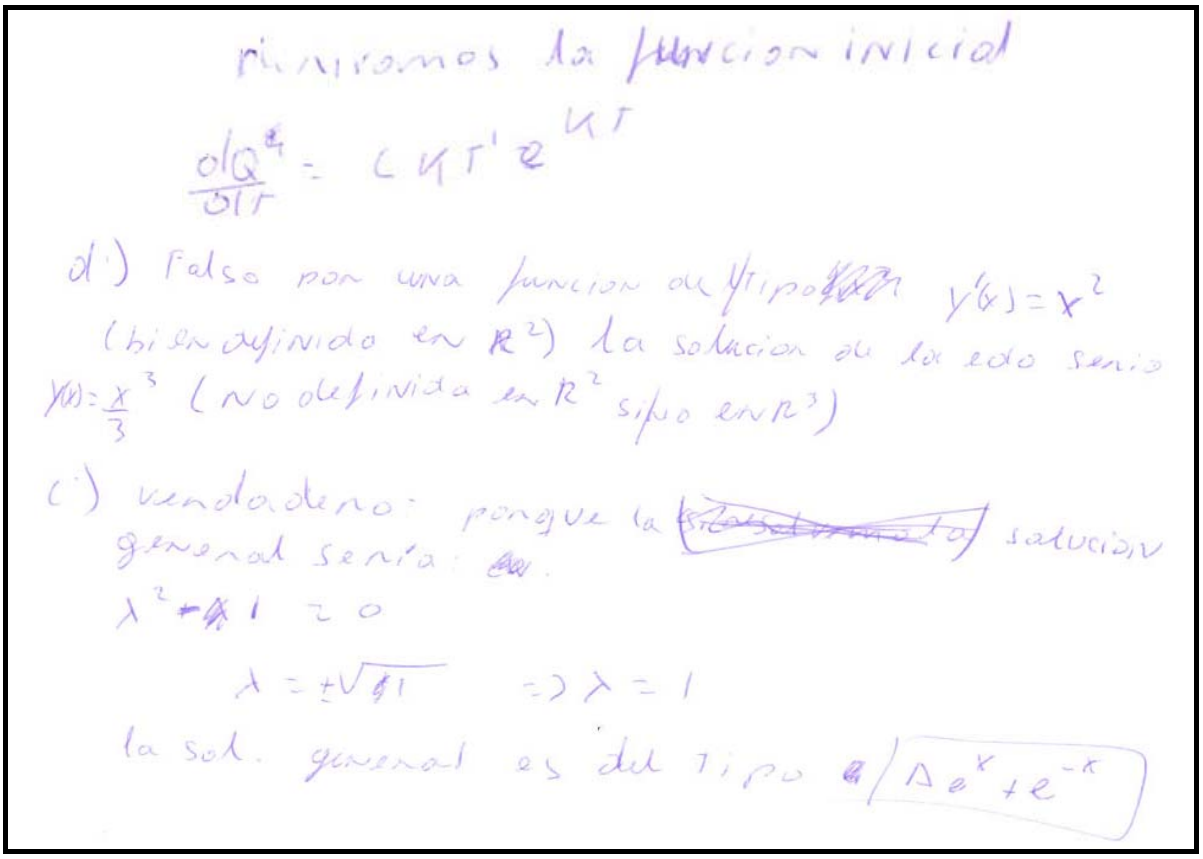


Figura 4: Dificultades y errores mostrados por AF7 ante P11, P5 y P4 respectivamente

Los problemas de Tipo 2 nos permiten observar si los estudiantes hacen uso de conocimientos que han adquirido anteriormente al estudio de las EDO para resolver los casos más sencillos de ecuaciones diferenciales ordinarias (P1) y analizar qué métodos utilizan en la resolución de casos un poco más complicados (P2). La respuesta del estudiante AF1 a la tarea P1 refleja que no comprende el concepto de solución de una EDO (Figura 5). El resto de los alumnos se puede clasificar en dos grandes grupos: los que emplean conocimientos anteriores al estudio de las ecuaciones diferenciales para resolver algunos casos sencillos y los que resuelven todas las ecuaciones con métodos específicos para EDO (Tabla 4).

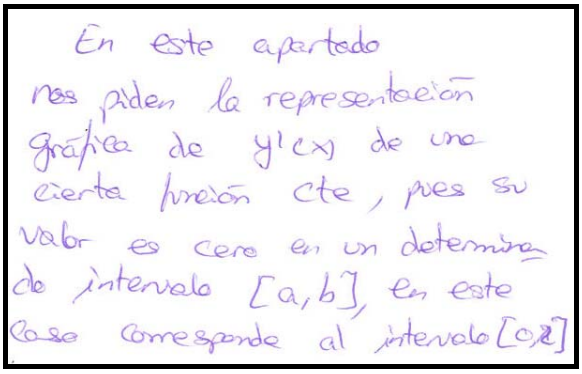


Figura 5: Argumento expresado por AF1 en el problema P1

Más de la mitad de los estudiantes emplean conocimientos adquiridos con anterioridad al estudio de las EDO para resolver la ecuación y'=0, dos de los cuáles modifican su actuación frente a la ecuación y'=cosx (Figura 6). Sólo cinco alumnos utilizan este tipo de recursos para resolver la ecuación y'=y.

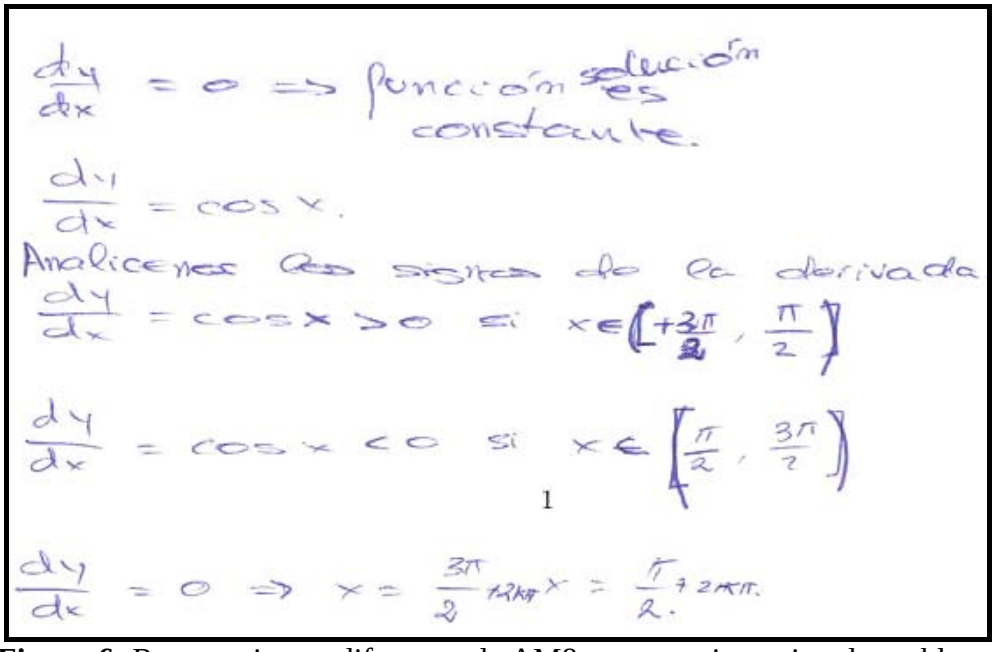


Figura 6: Razonamientos diferentes de AM8 ante un mismo tipo de problema

Las respuestas de los alumnos AF7 y AF11 evidencian que, si bien emplean conocimientos anteriores al concepto de EDO, no lo hacen de forma razonada ya que intentan extender de forma incorrecta dichos razonamientos al problema P2 (Figura 7).

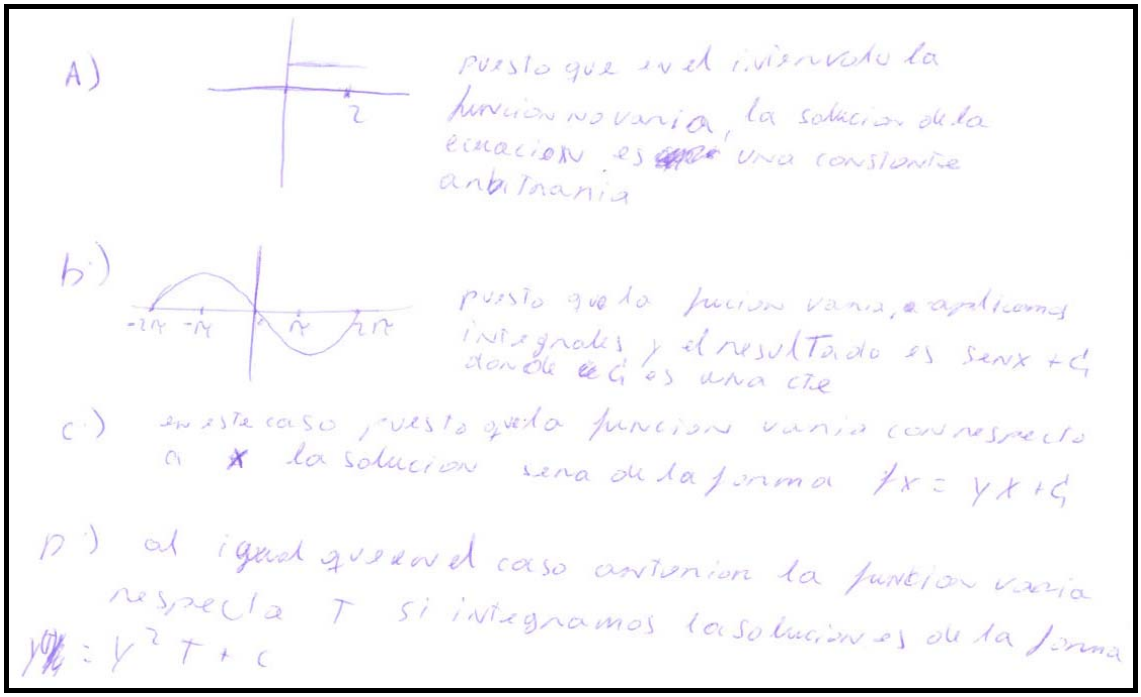


Figura 7: Respuesta de AF11 a P1 y P2

Los siete estudiantes que no muestran evidencias de utilizar conocimientos anteriores al estudio de las EDO para resolver ecuaciones sencillas optan por el uso de métodos específicos de resolución de EDO, llegando incluso a considerar la ecuación y'=0 como una EDO de variables separadas. Este es el caso de AF2 que emplea el método de resolución de ecuaciones con variables separadas para resolver las ecuaciones que estamos considerando excepto $y'=y^2$, cuya resolución intenta hacer empleando un método específico para la resolución de EDO lineales de coeficientes constantes (Figura 10).

De entre los métodos algebraicos específicos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, el más empleado fue el de variables separadas. Algunos estudiantes muestran otras estrategias como es el caso de AM1 que resuelve dos de las ecuaciones con una fórmula que normalmente se emplea para EDO lineales no homogéneas (Figura 8) o AF3 que emplea un método propio de EDO de segundo orden para resolver el primer apartado del problema P2 (Figura 9).

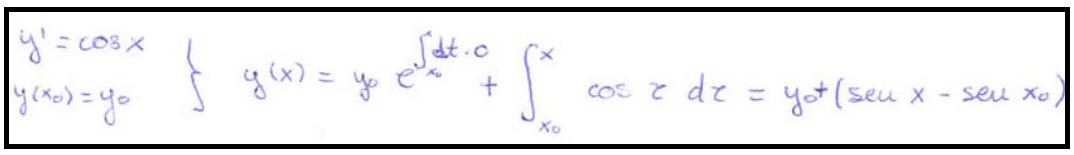


Figura 8: Respuesta de AM1 a P1b

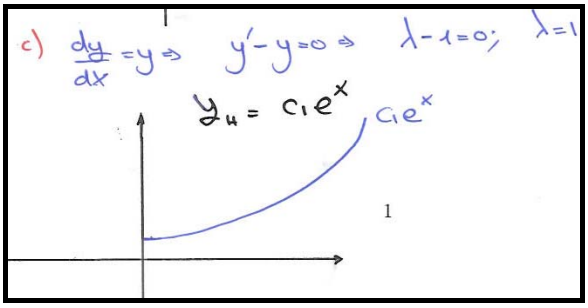


Figura 9: Respuesta de AF3 a P2a

El análisis de las respuestas de los estudiantes a los problemas de Tipo 2 muestran que, aproximadamente la mitad de los alumnos sigue el camino de la resolución de EDO sencillas aplicando conocimientos anteriores. Cinco de estos estudiantes no pasan a la fase de resolución aplicando métodos algebraicos específicos para EDO. Además se observa que, en el momento de enfrentarse a este cuestionario, sólo nueve de los veintiún alumnos se encuentran en la fase de selección del método adecuado para resolver las EDO presentadas (Tabla 5).

Se han detectado dificultades y errores de dos tipos principalmente, aquellos relacionados con los conocimientos que los alumnos han adquirido previamente al estudio de las EDO, como son el no considerar la existencia de una constante de integración cuando se calcula una integral indefinida o los relacionados con la representación gráfica de funciones y sus traslaciones, y los relacionados directamente con las EDO, entre los que podemos encontrar el desconocimiento de métodos algebraicos de resolución o el uso inapropiado de los mismos (Figura 10).

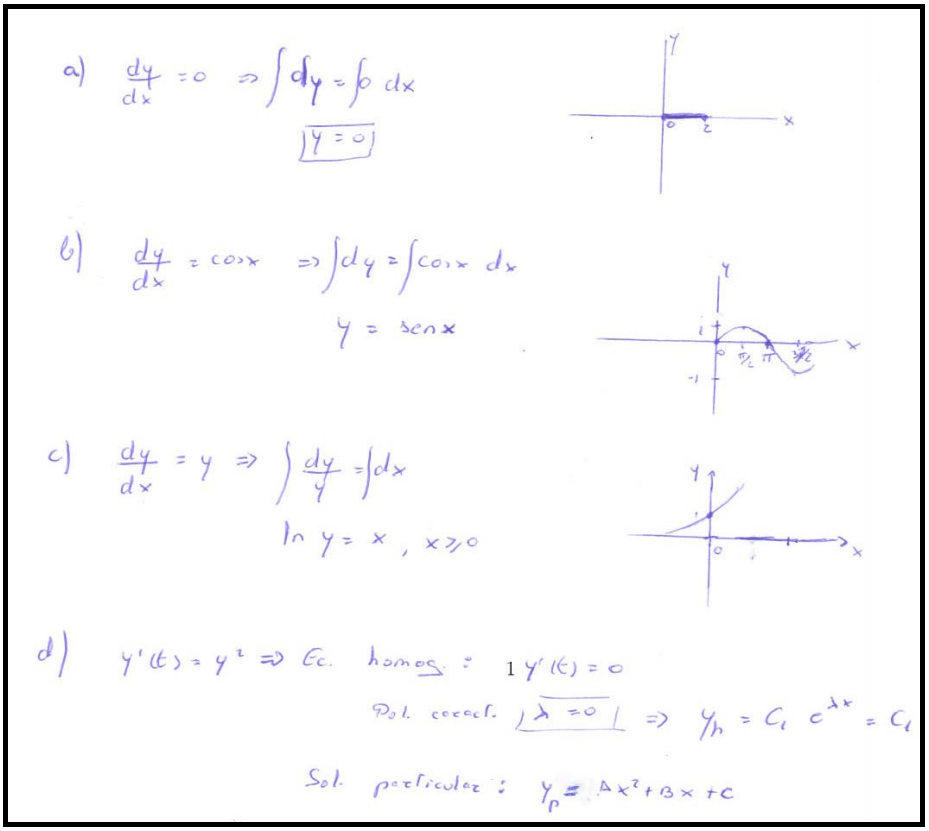


Figura 10: Respuesta de AF2 a los problemas de Tipo 2

Los problemas del cuestionario clasificados como Tipo 3, nos permiten analizar el uso que hacen los estudiantes del sistema de representación gráfico, en particular del Campo de Direcciones asociado a una EDO, y las relaciones que establecen entre éste y los métodos algebraicos de resolución de EDO. Existen algunas diferencias en cuanto al planteamiento de los tres problemas que se enmarcan dentro de esta clasificación. Mientras uno de ellos, P8, persigue analizar en qué medida el alumno utiliza la información que se le presenta en un Campo de Direcciones, los otros dos, P6 y P10, piden al estudiante representarlo. El enunciado de P6 comienza de una manera más familiar para el alumno, solicitando en primer lugar la resolución de una EDO y después la representación del Campo de Direcciones. El planteamiento en P10 es justamente al contrario, partiendo de la representación de un Campo de Direcciones se pide resolver un Problema de Valores Iniciales. Cabe esperar entonces que las estrategias empleadas por los estudiantes para enfrentarse a cada una de estas tareas sean diferentes.

El primer dato que hay que señalar al analizar las respuestas de los estudiantes a estas cuestiones es que aumenta considerablemente el número de alumnos que no contestan. La siguiente tabla muestra cómo se produce dicho aumento de forma especial en los problemas cuyo enunciado parte de la interpretación o construcción de un Campo de Direcciones, P8 y P10 respectivamente.

	P6	**P8**	**P10**
Estudiantes que no abordan cada problema	AF4, AF5 (2 alumnos)	AM2, AM3, AM4, AM6, AM8, AF4, AF5, AF7, AF12 (9 alumnos)	AM2, AM3, AM5, AM6, AM8, AF1, AF5, AF7, AF10, AF12 (10 alumnos)

Tabla 6

Las estrategias seguidas por los estudiantes en la resolución de P8 permiten clasificar a los doce estudiantes que respondieron a esta tarea en tres grupos: aquellos que lo abordan a través de la información que pueden obtener del Campo de Direcciones (AM1, AM5, AF3, AF9 y AF11), los que hacen caso omiso del Campo de Direcciones e intentan resolver la EDO sin éxito (AM9, AF1, AF2, AF6 y AF10) y aquellos que hacen uso tanto del Campo de Direcciones como de la EDO a la hora de enfrentarse a esta actividad (AM7 y AM10).

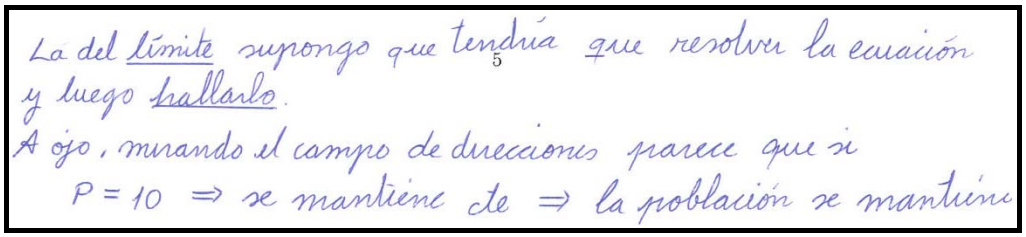


Figura 11: Argumento de AM7 para usar el Campo de Direcciones

En cuanto a los otros dos problemas, hay dos estudiantes (AM4 y AF9) que claramente siguen la dinámica marcada por el enunciado de cada uno de ellos, es decir, que en P6 resuelven en primer lugar la EDO, empleando el método de variables separadas, y después representan el Campo de Direcciones asociado a la ecuación. Al enfrentarse a P10, dibujan el Campo de Direcciones en primer lugar y, a partir de él, resuelven el Problema de Valores Iniciales (Figuras 12 y 13). Otros nueve estudiantes parecen seguir este mismo

comportamiento ya que en el problema P6 o no dibujan el Campo de Direcciones o lo hacen de forma incorrecta y no intentan abordar P10, ni siquiera prescindiendo del sistema de representación gráfico (Tabla 7). El resto de los alumnos que se enfrenta a estos dos problemas lo hacen resolviendo en primer lugar la EDO y representando después, en caso de hacerlo, el Campo de Direcciones. Nuevamente, el método de variables separadas es el más empleado por los estudiantes a la hora de resolver las EDO.

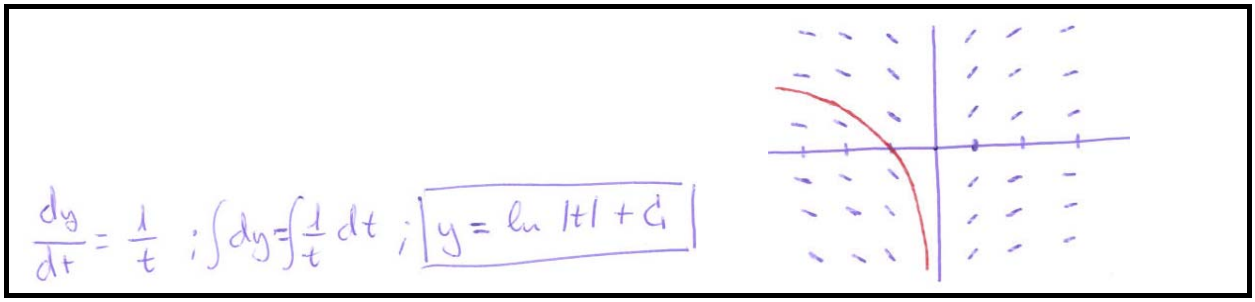


Figura 12: Respuesta de AM4 a P6

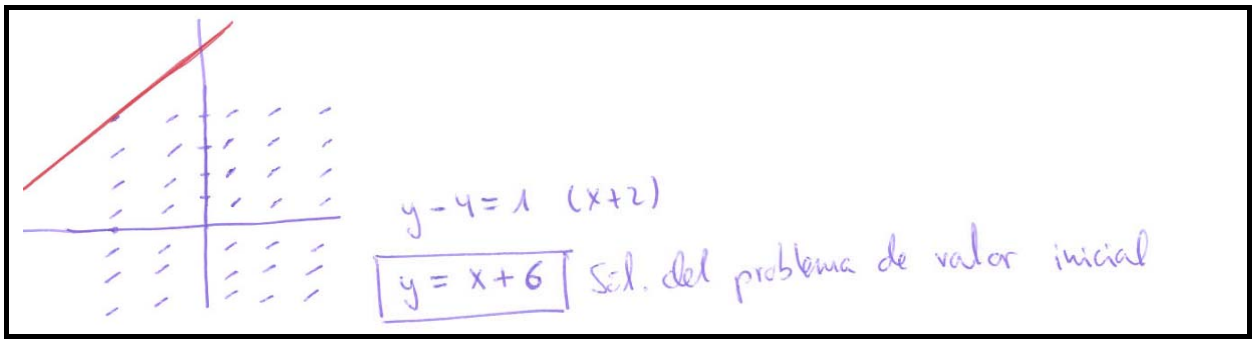


Figura 13: Respuesta de AM4 a P10

La mayoría de los estudiantes no muestran los razonamientos que utilizan para representar el Campo de Direcciones, únicamente AM5, AM7 y AM10 lo hacen, pero en algunos casos resulta evidente que lo han dibujado a partir de una solución. Las alumnas AM5 y AM7 aplican un algoritmo para calcular los valores de la variable independiente en los que la recta tangente a la función tiene la misma pendiente. Los cálculos que presenta AM10 parecen responder a un intento de aplicación de algún algoritmo pero son incorrectos (Figura 14).

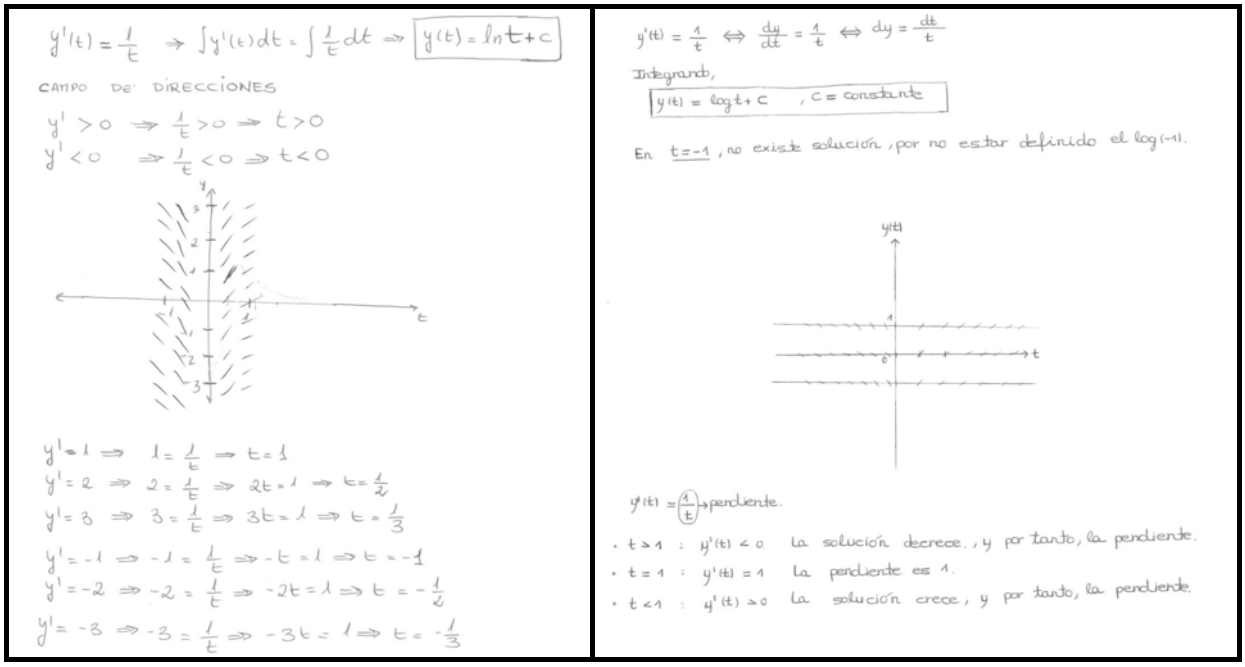


Figura 14: Respuestas de AM5 y AM10 a P6

Del análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario se desprende que, en el momento en que se desarrolló la investigación, no todos habían desarrollado los procedimientos asociados al concepto de Campo de Direcciones de representación e interpretación del mismo. Es mayor el número de alumnos que representa el Campo de Direcciones asociado a ecuaciones sencillas que el de aquellos que interpretan correctamente información proporcionada a través del mismo (Tabla 8). Además, doce de los estudiantes no muestran signos de un mínimo conocimiento de estos procesos asociados con el concepto de Campo de Direcciones. AM5, por su parte, interpreta matemáticamente información proporcionada a través de un Campo de Direcciones pero no consigue representarlo en casos sencillos, aunque demuestra conocer un algoritmo algebraico que ayuda en el proceso de llevar a cabo dicha representación gráfica.

Representación gráfica del Campo de Direcciones	AM4, AM10, AF6	
	Interpretación matemática del Campo de Direcciones	AM1, AM7, AF3, AF9, AF11

Tabla 8

La mayoría de los estudiantes se han encontrado con la dificultad de la representación gráfica y la interpretación del Campo de Direcciones, además de presentar serios problemas a la hora de relacionar información proporcionada a través de los sistemas de representación gráfico y algebraico. Entre los errores nos encontramos con aquellos relacionados con conceptos estudiados previamente, como es el caso de la integración indefinida de la función logarítmica y la consideración de la constante de integración en las mismas (Figura 14).

El último grupo de actividades, Tipo 4, se caracteriza porque los problemas que lo componen se enuncian como parte de un contexto real, en los que los estudiantes necesitan interpretar cierta información dada algebraica o gráficamente como relativa a una población determinada. Hay siete estudiantes que no abordan este tipo de problemas. AF11 utiliza una

regla de tres para responder a P7, mientras que AF2 trata en primer lugar de traducir al lenguaje matemático los datos proporcionados en el enunciado y, al no lograrlo, abandona el problema. Ninguno de estos dos alumnos responde a P9. El resto de los estudiantes se enfrenta a P7 resolviendo en primer lugar la ecuación, para lo cuál la mayoría de ellos utiliza el método para ecuaciones de variables separadas (Tabla 9).

A la hora de tener que traducir al lenguaje matemático los datos que proporciona el enunciado del problema sobre la población que se intenta determinar, hay dos alumnas que no lo consiguen (AM7 y AM9). AF9 resuelve la ecuación diferencial teniendo ya en mente que se encuentra en un contexto en el que se relacionan el tiempo transcurrido y una población determinada (Figura 15). De los doce alumnos que resuelven la EDO en P7, únicamente dos responden correctamente a la tarea P9, AF3 lo hace parcialmente, AM10 interpreta mal la información y el resto, ocho alumnos, no contestan a esta pregunta (Tabla 9).

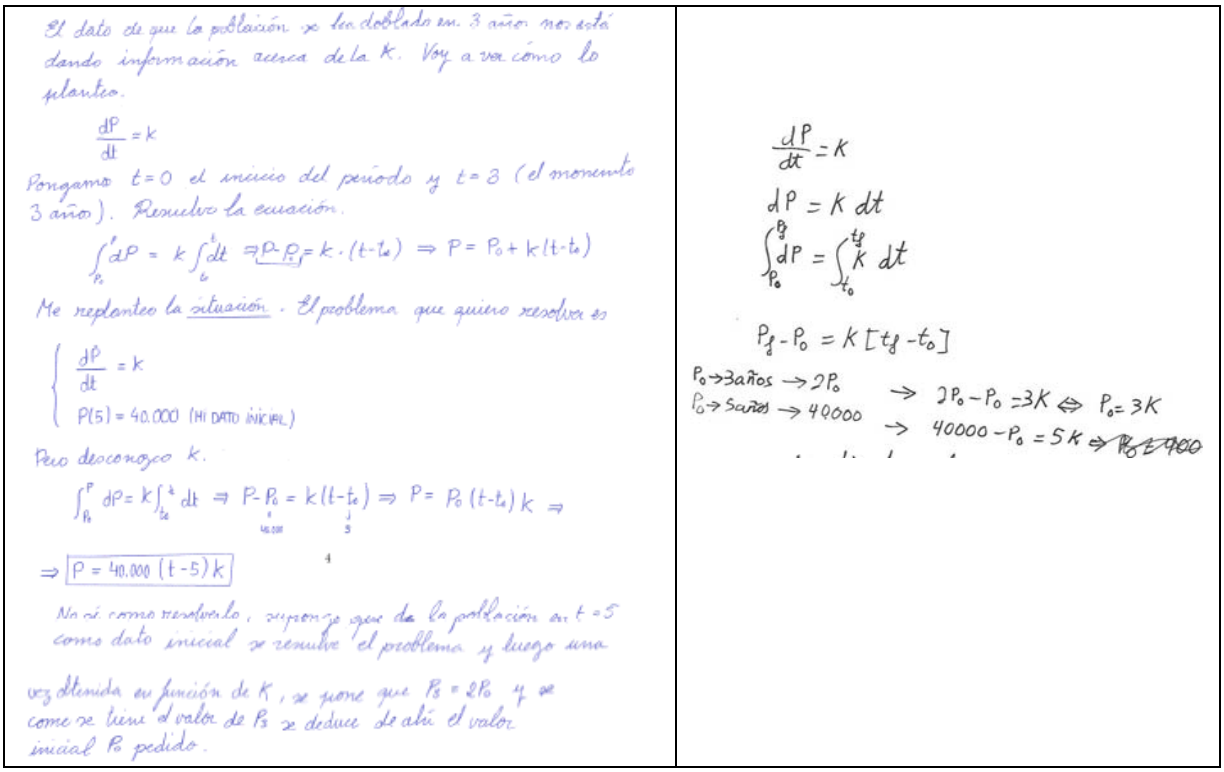


Figura 15: Respuestas de AM7 y AF9 a P7

CONCLUSIONES

Las respuestas de los alumnos a las diferentes cuestiones planteadas evidencian su preferencia por el uso del registro algebraico frente al registro gráfico y verbal. Esto no es más que el reflejo de la instrucción recibida en la que se han primado los aspectos algebraicos, presentando el estudio gráfico de una forma casi anecdótica y sin incentivar una posible resolución verbal. Además se observa que muchos de los estudiantes conciben el concepto de EDO como un ente matemático aislado, sin ningún tipo de conexión con otras nociones conocidas anteriormente.

Podemos establecer diferentes perfiles de actuación de los estudiantes cuando se enfrentan a cuestiones relacionadas con el concepto de EDO. Atendiendo a los registros de representación empleados por los alumnos nos encontramos, por un lado, con aquellos que trabajan única y exclusivamente con el registro algebraico y por otro lado con estudiantes que

abordan las cuestiones en el registro presentado, sin tener en cuenta otros que les puedan llevar a una correcta solución. Por otro lado, si nos fijamos en el modo de resolución de los diferentes problemas nos encontraremos con alumnos que no emplean el mismo método de resolución para una mismo EDO y con estudiantes que sí utilizan el mismo método pero cometen errores cuando la EDO se presenta dentro de un contexto.

Nuestras acciones futuras van dirigidas a conseguir que estos perfiles converjan a uno, el del alumno que se enfrenta a cualquier tipo de problema con una amplia variedad de herramientas y es capaz de elegir en cada momento la que más conviene a sus intereses. "*Resulta fundamental que el alumno aprenda a formular preguntas y a buscar distintos caminos que le permitan encontrar soluciones o respuestas de esas preguntas" (Santos, 2007).*

En este sentido consideramos que, introducir los conceptos a partir de otros ya conocidos puede provocar en el alumno una mayor conexión entre las diferentes cuestiones estudiadas. Además dará una visión más amplia del concepto de EDO, no restringiéndose este al uso de determinadas recetas fácilmente olvidables e infructuosos.

Una enseñanza basada en la resolución de problemas en la que se muestre al alumno la necesidad de la consideración y el trabajo con diferentes registros de representación motivará que se enfrenten a las cuestiones relacionadas con las matemáticas, en general, y con las EDO, en particular, de una forma más abierta y completa, aumentando en gran medida sus posibilidades de éxito en dicha resolución.

Referencias

Brodetsky, S. (1919). The graphical treatment of differential equations (I). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 377-382, Ed. Greenstreet, W. J.

Brodetsky, S. (1920a). The graphical treatment of differential equations (II). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 3-8, Ed. Greenstreet, W. J.

Brodetsky, S. (1920b). The graphical treatment of differential equations (III). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 35-38, Ed. Greenstreet, W. J.

Brodetsky, S. (1920c). The graphical treatment of differential equations (IV). *The Mathematical Gazette*, vol. X, pp. 49-59, Ed. Greenstreet, W. J.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2008) Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. (Aceptado para su publicación en *Research and Collegiate Mathematics Education*, Vol. 8)

Camacho, M. y Perdomo, J. (2005). La comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias en estudiantes de primeros cursos universitarios: Un estudio preliminar. *XII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, pp 879-884. Albacete.

Camacho, M. y Perdomo, J. (2005b). Análisis de las respuestas de estudiantes universitarios a un cuestionario sobre el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, pp. 127-139.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173-201, Grupo Editorial Iberamérica.

Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 18 (4), pp.. 455-472.

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las EDO*. Tesis Doctoral sin publicar. CINVESTAV. México.

Santos Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* Editorial Trillas.

Anexo 1: Cuestionario

Tipo 1

P3. Contesta, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La función $y = e^{\int e^{t^2} dt}$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dt} = 4e^{t^2} y$.

b) Las funciones y = f(x) que cumplen que $-x^3 + 3y - y^3 = C$ son soluciones de la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$.

P4. Contesta, de forma razonada, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "*Las soluciones de la EDO* $y'' - y = 0$ *son de la forma* $y(x) = Ae^x + e^{-x}$*, donde A es una constante arbitraria.*"

P5. Contesta, de forma razonada, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *"Consideremos la EDO de primer orden* $y'(x) = f(x, y)$*. Si la función* $f(x, y)$ *está definida en* R^2*, las soluciones de la EDO estarán también definidas en* R^2*."*

P11. Si la función $Q = Ce^{kt}$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dQ}{dt} = -0.03Q$, ¿qué propiedades cumplen los valores de C y Q?

Tipo 2

P1. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{dy}{dx} = 0; \quad x \in [0,2]$

b) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

P2. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones:

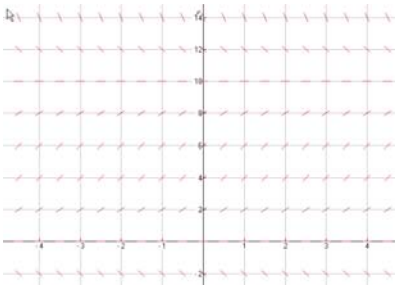
a) $\frac{dy}{dx} = y; \quad x \geq 0$

b) $y'(t) = y^2$

Tipo 3

P6. Resuelve la ecuación diferencial $y'(t) = \frac{1}{t}$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a t=-1.

P8. Consideremos el campo de direcciones asociado a la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.1P(10 - P)dP$



Representa las soluciones que cumplen que P(0) = 0 y P(-2) = 12. ¿Para qué valores positivos de P las soluciones son crecientes? ¿y decrecientes? ¿Cuál es el límite de P cuando t tiende a infinito?

P10. Dibuja el campo de direcciones de la EDO $\frac{dy}{dx} = 1$ y, a partir de él, resuelve el siguiente problema de valores iniciales.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -1 \\ y(-2) = 4 \end{cases}$$

Tipo 4

P7. Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = K\,,\ \text{K>0.}$$

Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

P9. Si la ecuación diferencial dada en P8 modeliza un población determinada de individuos, ¿cómo interpretarías los resultados que acabas de obtener?

Anexo 2

Tablas de procedimientos empleados por los estudiantes para resolver cada una de las tareas propuestas en el cuestionario.

P3a	P3b	P11	Estudiantes
Derivan	Derivan	Derivan	AM2, AM10, AF9
	Resuelven la ecuación	Derivan	AM7, AF12
	No contestan	Derivan	AM1, AM3, AM5, AM8, AF11
Resuelven la ecuación	Resuelven la ecuación	Derivan	AM9
		Resuelven la ecuación	AF2, AF6
Otros procedimientos correctos	Resuelven la ecuación	Deriva	AM4
Procedimientos incorrectos	Derivan	No contesta	AF3
	Procedimientos incorrectos	Resuelve la ecuación	AF10
No contestan	Resuelven la ecuación	Resuelven la ecuación	AM6
	No contestan	Derivan	AF7
		No contestan	AF1, AF4, AF5

Tabla 1: Procedimientos de los estudiantes en P3 y P11

P4	Estudiantes
Resuelven la EDO	AM2, AF1, AF2, AF3, AF5, AF6, AF7, AF9, AF12
Emplea propiedades de las soluciones	AM4
Comprueban que la expresión algebraica es solución	AM1, AM3, AM6, AM7, AM9, AM10, AF10, AF11
No contestan	AM5, AM8, AF4

Tabla 2: Procedimientos de los estudiantes en P4

P5	Estudiantes
Identificaron la propiedad	AM7, AM10
Emplean razonamientos incorrectos	AM1, AM4, AF2, AF7, AF9, AF10, AF11, AF12
No argumentan	AM2, AM9, AF3
No contestan	AM3, AM5, AM6, AM8, AF1, AF4, AF5, AF6

Tabla 3: Procedimientos de los estudiantes en P5

P1a	P1b	P2a	P2b	Alumnos
Uso de conocimientos anteriores	Uso de conocimientos anteriores	Uso de conocimientos anteriores	No contesta	AM5
			Variables separadas	AM6, AF10
			Otros	AF5
			Extensión incorrecta de procedimientos	AF11
		Extensión incorrecta de procedimientos	Extensión incorrecta de procedimientos	AF7
		Variables separadas	Variables separadas	AM7, AM2
			No contesta	AF6
		Otros	Variables separadas	AF3
		No contesta	No contesta	AF4
	Variables separadas	Variables separadas	Variables separadas	AF9
	Intenta representar el Campo de Direcciones	No contesta	No contesta	AM8
Expresa algebraicamente la solución	Variables separadas	Variables separadas	Variables separadas	AM4, AM9, AM10
			No contesta	AF12
	Método para EDO lineal no homogénea	Método para EDO lineal no homogénea	Variables separadas	AM1
Variables separadas	Variables separadas	Variables separadas	Variables separadas	AM3
			Otros	AF2

Tabla 4: Procedimientos de los estudiantes en P1 y P2

Emplea conocimientos previos	AM5, AM8, AF4, AF5, AF7, AF11		
	Métodos algebraicos específicos	AF6	
		Selecciona un método más adecuado	AM2, AM6, AM7, AF3, AF9, AF10
Usa métodos algebraicos específicos	AF2, AF12		
	Selecciona un método más adecuado	AM1, AM3, AM4, AM9, AM10	

Tabla 5: Estrategias de resolución de problemas mostradas por los estudiantes al resolver las tareas de Tipo 2

	P6	P10	Alumnos
Campo de Direcciones	Representan	Representan	AM4, AM7, AM10, AF6, AF9
	Representación incorrecta	Representan	AF3, AF11
		No contestan	AF7
	No representan	Representan	AM1
		No representan	AM9, AF2
		No contestan	AM2, AM3, AM5, AM6, AM8, AF1, AF10, AF12

Tabla 7: Representación del Campo de Direcciones en P6 y P10

P7	P9	Alumnos
Interpretación correcta	Interpretación correcta	AM1
	Interpretación parcial	AF3
	Mal interpretado	AM10
	No contestan	AM3, AM4, AF6, AF7, AF9, AF10, AF12
No interpretan	Interpretación correcta	AM7
	No contestan	AM9

Tabla 9: Interpretación de datos algebraicos y/o gráficos

DISTRIBUCIÓN ASINTÓTICA DE LA SUMA DE VARIABLES ALEATORIAS: SIGNIFICADO EN TEXTOS DE ESTADÍSTICA APLICADA A LA INGENIERÍA

Hugo Alvarado Martínez
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Carmen Batanero Bernabeu
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos la presentación del teorema central del límite en una muestra de libros de textos de estadística destinados a la formación de ingenieros. Siguiendo un modelo teórico sobre el significado de un objeto matemático, estudiamos, además de los enunciados del teorema y sus propiedades, las representaciones, campos de problema, procedimientos y argumentos asociados. Como consecuencia deducimos algunos criterios para el diseño de futuras propuestas de enseñanza.

Palabras claves: Teorema central del límite, significado de objetos matemáticos, análisis de libros de texto.

Abstract

In this paper we analyse the presentation of the central limit theorem in a sample of statistics textbooks directed to engineers. Our work is based on a theoretical model on the meaning of mathematical objects, where we study the theorem statements and properties, its associated representations, problems fields and arguments. We conclude with some criteria to design future teaching proposals.

Keywords: Central limit theorem, meaning of mathematical objects, analyse of textbooks.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). *Distribución asintótica de la suma de variables aleatorias: Significado en textos de estadística aplicada a la ingeniería*. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 107-116.

Introducción

La distribución asintótica de la suma de variables aleatorias, conocida como el teorema central del límite es importante en la enseñanza universitaria, especialmente en las carreras de ingenierías y ciencias, donde es un instrumento que se utiliza en situaciones profesionales y como herramienta de investigación. La versión actual de este teorema, en forma simplificada establece que "*la suma de un gran número de variables aleatorias independientes tiende a seguir de manera asintótica una distribución normal, siempre que determinadas condiciones queden satisfech*as" (Wisniewski y Velasco, 2001, pp. 211). Pero, como muestra la evolución histórica (Alvarado, 2004), esta aparente simplicidad es sólo aparente.

En este trabajo estudiamos el significado del teorema central del límite en los libros de texto de estadística aplicada en ingeniería. Aunque el análisis de los textos no sustituye la observación de la enseñanza, puede proporcionar información para la construcción de instrumentos de evaluación o para mejorar la enseñanza (Ortiz y cols., 2002) y es un recurso para los profesores, proporcionándoles ideas para enriquecer su actividad docente en el aula, y mostrando algunas dificultades que podrían tener los estudiantes.

Nos basamos en el modelo teórico de Godino (2002, 2003), que considera las matemáticas como una actividad humana implicada en la solución de cierta clase de situaciones problemáticas de la cual emergen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos. El autor considera diferentes entidades primarias como constituyentes del significado de un objeto matemático, que son las que tratamos de analizar en este trabajo:

- *Problemas y situaciones* que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas asociado al objeto.
- *Procedimientos*. Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de *prácticas*, que llegan a convertirse con el tiempo en objeto de enseñanza.
- *Lenguaje* utilizada en la actividad de resolución de problemas (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos).
- *Definiciones y propiedades* características del objeto y sus relaciones con otros conceptos.
- *Demostraciones* que empleamos para probar sus propiedades y que llegan a formar parte de su significado.

También nos apoyamos en trabajos previos, que analizan este teorema. Por ejemplo Méndez (1991) representó el conjunto de conocimientos implícito en el teorema por medio de un mapa conceptual, utilizando cuatro propiedades básicas en la comprensión del teorema, referidas a la media y varianza de la distribución muestral y su forma aproximadamente normal a medida que el tamaño muestral crece. Vallecillos (1994) observa falta de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral y confusión entre la media. DelMas, Garfield, y Chance (1999) observan los mismos errores tras una enseñanza basada en la simulación, y sugieren que la tecnología por si sóla no es suficiente para la comprensión, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructiva juega un papel relevante. Tauber (2001) describe los múltiples elementos de significado relacionados con la distribución normal, que son necesarios para la comprensión del teorema.

Metodología

El análisis se llevó a cabo con los 16 textos (ver Apéndice) que son recomendados en Chile en la enseñanza en ingeniería. Seleccionada la muestra de textos y posteriormente los capítulos que tratan el tema, se clasificaron las diferentes definiciones, propiedades,

representaciones y justificaciones, depurando la clasificación con un proceso inductivo. Los resultados se presentan en tablas comparativas que recogen los elementos de significados en los distintos textos seleccionados que se analizan para obtener las conclusiones. Un resumen se presenta a continuación.

Campos de problemas

Se encontraron diferentes tipos de situaciones y problemas históricos cuya resolución hace surgir la idea del teorema central del límite:

CP1: *Obtener una aproximación de la distribución binomial para valores grandes de n.* En el cálculo de la distribución binomial *bin(n,p)* intervienen los términos factoriales, que crecen muy rápidamente al aumentar el valor de *n.* Este problema llevó a distintos matemáticos a tratar de encontrar valores aproximados de estas probabilidades para valores de *n* grandes.

CP2: *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias discretas independientes e idénticamente distribuidas*. La demostración que la distribución binomial se aproximaba a la distribución normal llevó a tratar de generalizar este resultado a la suma de otras variables discretas, distinguiéndose subcampos: CP2.1. *Variables con distribución uniforme discreta;* CP2.2. *Variables discretas* acotadas, como la binomial y CP2.3. *Variables discretas no acotadas,* como la Poisson.

CP3: *Establecer la distribución de la suma de variables aleatorias discretas no idénticamente distribuidas*. Poisson generalizó la demostración de Laplace a la suma de variables aleatorias discretas perteneciente a una misma familia de distribuciones aunque con parámetros diferentes.

CP4: *Determinar la distribución de la suma de variables aleatorias continuas*. Posteriormente Poisson da una demostración más rigurosa para una *variable continua* (de este modo sembró la semilla para el concepto de variables aleatorias).

CP5: *Estimar del error de aproximación en el teorema*. Cauchy, mediante la función característica, dio una demostración del teorema siguiendo la demostración de Poisson y estableció una cota superior para la diferencia entre el valor exacto y la aproximación.

CP6: *Encontrar condiciones necesarias y suficientes para el teorema*. Estos problemas fueron resueltos por Chebychev y sus discípulos Markov y Liapunov. Linderberg, consideró que los momentos de tercer orden han de estar acotados para validar la convergencia, como condición suficiente del teorema.

CP7: *Obtener la distribución de la suma de variables aleatorias dependientes.* El supuesto de dependencia es menos frecuente y presenta una dificultad de especificar modelos en más de dos variables.

En el análisis de los libros también hemos encontrado otros campos de problemas indirectos, cuya solución no lleva directamente al teorema, sino a uno de los problemas anteriores, es decir a la búsqueda de una distribución que aproxime la suma de variables aleatorias. Son los siguientes: CP8: *Obtención del tamaño adecuado de una muestra aleatoria de poblaciones desconocidas;* CP9: *Distribución de la suma de los logaritmos de variables aleatorias independientes;* CP10: *Distribución de diferencias de medias muestrales en dos poblaciones;* CP11: *Distribuciones de funciones de variables aleatorias;* CP12: *Estimación de la media y otros parámetros de poblaciones no normales por intervalos de confianza en muestras grandes;*CP13: *Contrastes de hipótesis sobre uno o varios parámetros de poblaciones en poblaciones no normales para muestras grandes.*

Los campos de problemas comunes en todos los libros son el de aproximación de ciertas distribuciones (CP1) y la distribución de la suma de variables aleatorias continuas (CP4). En

cambio, los campos CP7 y CP3, carácter teórico, son inexistentes en la mayoría de los libros. Entre los campos de problemas indirectos (CP8 a CP13) los campos CP12 y CP13 son los más frecuentes y están presentes hoy en día en la mayoría de los textos de estadística para ingenieros. En general, los textos muestran muchos ejercicios de aplicación del teorema para variables con distribución continua, en particular a la distribución exponencial y uniforme, y por otro lado carecen de problemas elementales, basados en extracción a partir de urnas, lanzamientos de dados o monedas, que permitan un primer acercamiento tangible del teorema. Además, falta rigurosidad en los ejemplos resueltos en algunos libros, pues no mencionan explícitamente que se está utilizando el teorema en el desarrollo del ejercicio, ni tampoco indican que el resultado es sólo aproximado.

Lenguaje

Términos y expresiones verbales

Un primer tipo (Ortiz, 1999):son las palabras y frases que usamos para describir los conceptos, sus operaciones y transformaciones que son de tres tipos.

1. Palabras o expresiones específicas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Por ejemplo: Distribución límite, teorema, teorema central del limite, distribución asintótica en el muestreo, convergencia en ley, convergencia de sucesiones de v.a., error de estimación, suma de v.a.i., idénticamente distribuida, no i.d., variable transformada, función característica. Es la categoría más numerosa, ya que el teorema es un objeto puramente matemático, que ha sido analizado a lo largo de la historia con un nivel avanzado de conocimiento matemático y últimamente por simulación.
2. Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque *no siempre con e*l *mismo significado* en los dos contextos. Por ejemplo: Suficientemente grande, simulación manipulable, contraejemplo, muestra grande, generalización, bajo ciertas condiciones.
3. Palabras que tienen *significados iguales* o muy próximos en ambos contextos. Por ejemplo: Central, muestra, caso particular.

Notaciones y símbolos

En nuestro estudio hemos encontrando las siguientes expresiones simbólica del teorema tales como $X_1, X_{2,.....,} X_n$ para referirse a una muestra aleatoria, $s_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ al enunciar la suma de n variables aleatorias, $\overline{X} \approx N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ al describir la distribución muestral de la media de la muestra para *n* suficientemente grande, la fórmula de estandarización de la media muestral $\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$, la representación para muestras grandes de un intervalo de confianza para la media $\mu = \bar{x} \pm Z(1-\alpha/2)\, S/\sqrt{n}$, etc.

Representaciones gráficas

Hemos encontrado histogramas para representar la distribución empírica de las medias muestrales y gráficos de control de medias para representar que la distribución de las medias muestrales estará más próxima a una distribución normal que las mediciones individuales. Al hablar de conceptos relacionados aparecen gráficos de barras para ilustrar la distribución de probabilidad teórica de la población, distribución de frecuencias relativas y distribuciones poblacionales.

Simulaciones

La simulación es una representación en el sentido que sustituye un experimento estocástico por otro y su empleo es especialmente útil en la enseñanza de conceptos en el campo de las distribuciones en el muestreo. Algunos textos proponen ejercicios para generar muestras aleatorias de observaciones de diversas distribuciones de probabilidad, usando los paquetes de software estadístico MINITAB, SAS o planilla electrónica EXCEL.

Lo más común para referirse al teorema es a través de los símbolos, presente en todos los textos. Es débil la presencia de representaciones gráficas; y la simulación; de los ocho textos de estadística para ingenieros sólo tres la presentan.

Procedimientos

Las situaciones-problemas relacionadas con el teorema se pueden resolver mediante las siguientes técnicas:

AP1: *Cálculo algebraico y transformación de variables aleatorias aplicando propiedades*. El cálculo algebraico de la media muestral de variables aleatorias es el más típico y presente en todos los libros de textos analizados.

AP2: *Operación inversa a la tipificación normal del cálculo de probabilidades para obtener una muestra aleatoria de tamaño adecuado.*

AP3: *Cálculo de probabilidades referidas al teorema con calculadora o programa de ordenador.*

AP4. *Cálculo de probabilidades referidas al teorema a partir de simulación manual de situaciones de muestreo en tamaños pequeños.*

Observamos que la estrategia más común para resolver problemas es el cálculo algebraico de la suma o media de v.a., presente en todos los textos analizados. Por el contrario, la técnica menos empleada es la operación inversa a la transformación estándar, que le exige al alumno habilidad en la operatoria algebraica y dominio del teorema. En los textos nuevos, la simulación, que no aparece en los textos de orientación matemática, se hace presente cada vez más como técnica específica de presentar el teorema, aunque sólo en tres textos para ingenieros se apoyan con el ordenador.

Enunciados diferenciados del teorema

Se encuentran diversos tipos de presentaciones para el teorema, según el grado de formalización, y que enfatizan diferentes aspectos del significado de los conceptos o se remiten a diferentes formas aplicación:

E1: Enunciado *del teorema mediante la convergencia de sucesiones de variables aleatorias*, de manera formal y rigurosa con un nivel de matemática avanzada.

E2: Enunciado *del teorema como límite ordinario de una sucesión de funciones.* E3: *Enunciado del teorema en forma verbal para la suma de variables independientes no idénticamente distribuidas.*

E4: Enunciado *del teorema para la suma de variables independientes idénticamente distribuidas.* Esta definición más restringida del teorema es la más común en los libros.

E5: *Enunciado del teorema de forma general*. Son varios los textos aplicado a la ingeniería que introduce el tema sin formulación matemática.

E6: *Enunciado intuitivo del teorema*. Otra forma de presentar el teorema es a través de la manipulación con objetos didácticos concretos de un experimento, por ejemplo mediante la obtención de la distribución de lanzamientos de varios dados.

En la mayoría de los textos aparece el correspondiente a la suma de v.a.i. idénticamente distribuidas (E4). Los menos encontrados en los libros son las presentados con rigor matemático (E1 y E2), seguido del enunciado del teorema para v.a.i. no idénticamente distribuida. La tendencia de los textos actuales es hacia la presentación intuitiva del teorema, contrario a los libros más antiguo que lo introducen de manera formal el teorema. Por último, los enunciados E4 a E6 no son dados en forma precisa y clara, lo hacen por medio de un ejercicio planteado.

Propiedades

Tauber (2001, pp. 139 a 144) encontró nueve propiedades de la distribución normal que clasificó en geométricas, estadísticas y algebraicas. Entre ellas, las siguientes ponen en correspondencia diferentes elementos de definición, lenguaje, representación y procedimiento del teorema central del límite:

P1: *La media de la distribución aproximada de una suma de variables aleatorias es la suma de las medias;*

P2: *La varianza de la distribución de la suma de variables aleatorias es la suma de las varianzas;*

P3: *La media aritmética de una muestra aleatoria de tamaño suficientemente grande sigue una distribución aproximadamente normal*;

P4: *La aproximación mejora con el número de sumandos;*

P5: *Las transformaciones lineales de variables aleatorias también siguen una distribución asintótica normal*.

Además hemos encontrado las siguientes propiedades que tratan aplicaciones del teorema:

P6: *Las medias muestrales en dos poblaciones sigue una distribución aproximadamente normal;*

P7: *Aproximación de la binomial por la normal como caso especial del teorema;*

P8: *Aproximación de algunas distribuciones clásicas a la distribución normal;*

P9: *Errores aleatorios siguen una distribución normal*;

P10: *Los estimadores de máxima verosimilitud tienen distribución asintótica normal*;

P11: *Los estimadores de los momentos tienen distribución asintótica normal*.

P12: *Corrección de continuidad.*

Las propiedades más frecuentes en los textos son las relacionadas con la corrección de continuidad (P12), convergencia a la normal (P5 y P3), siendo escasa la presencia de las relacionadas con la teoría de errores (P9) y los estimadores de máxima verosimilitud (P10). Sólo la mitad de los textos consultados, inicia el teorema con el cálculo algebraico de las propiedades de la suma y varianza de v.a. (P1 y P2), lo que implica que en los otros textos el estudiante debe conocer esto anteriormente. Las propiedades P6 y P7 no son definidas en forma precisa y clara. Finalmente, de los 16 textos analizados, la mitad presenta el tema específico del teorema y a continuación como caso especial la aproximación de la binomial por la normal. Didácticamente sería preferible iniciar la enseñanza del teorema partiendo con el caso particular del estudio de la distribución binomial para muestras grandes, seguido del caso general para cualquier distribución.

Argumentos

Todas las definiciones, propiedades, problemas y algoritmos anteriores se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o demostrar las propiedades y relaciones, que se pueden clasificar en la forma siguiente:

A1: *Mediante demostraciones formales algebraicas y/ o deductivas*. Por ejemplo, la demostración del teorema usando la función generadora característica.
A2: *Enunciado del teorema como caso especial de un resultado general*.
A3: *Mediante simulaciones manipulables, generalizando las conclusiones de la experiencia.*
A4. *Simulación gráfica con ordenador del teorema.* Una forma moderna de ilustrar y argumentar el TCL consiste en realizar simulaciones con el ordenador aumentando progresivamente el tamaño muestral.
A5: *Mediante comprobación de ejemplos y contraejemplos, sin pretensión de generalizar*.
Algunos textos utilizan distribuciones clásicas, la Binomial o Poisson, para verificar la exactitud de aproximación.

La forma de demostrar más reiterativa en los textos es mediante la comprobación de ejemplos. Son pocos los que utilizan la simulación con ordenador, o bien dispositivos de dados y monedas como un tipo de argumento que, aunque no proporciona una demostración, puede ayudar a la comprensión intuitiva del teorema. Los libros de estadística matemática son los más completo en las demostraciones aunque no trabajan la simulación como elemento validativo. En general, las demostraciones formales están ausentes en los textos para ingenieros; al parecer están más allá del propósito de los autores, dejándolo para cursos más avanzados.

Conclusiones

Nuestro análisis sirve para identificar los elementos de significado más importantes del teorema central del límite, aunque muestra que no todos se utilizan de manera significativa. Así también, se muestra la complejidad del teorema y la riqueza de sus múltiples campos de problemas y representaciones. En el caso particular de la formación de las competencias y formación de conocimiento estadístico de los ingenieros, consideramos importante emplear el teorema para describir y comprender la variabilidad. Señalamos nuestra preocupación que no todos los libros destinados a estos estudiantes consideren las representaciones y simulaciones, medios didácticos relevantes en el aprendizaje del teorema. En cuanto a los procedimientos de resolución de problemas, los textos son pobres al mostrar un algoritmo único y se inclinan por el cálculo algebraico. Respecto al enunciado del teorema, se ha pasado en los últimos años del rigor matemático actualmente a la presentación intuitiva. De las propiedades la de mayor presencia es la aproximación de la media aritmética a la distribución normal. Percibimos una tendencia de la demostración deductiva a desaparecer en los textos, y obtuvimos el contraejemplo como elemento validativo más recurrente por los autores. Además no se diferencia la aplicación del teorema para la suma de v.a. y la media aritmética, no se enfatizan problemas reales de la ingeniería con salida de software estadístico.

La información proporcionada por los libros, aunque valiosa es limitada, ya que sólo proporciona una primera aproximación a la enseñanza del teorema central del límite. Se sugiere para la construcción del significado del teorema comenzar la distribución de frecuencias de estimadores con materiales didácticos, seguido de la simulación gráfica con

apoyo del ordenador para muestras grandes y luego analizar su forma algebraica en variados campos de problemas, que requieren de la proposición como herramienta de análisis de datos en ingeniería.

Referencias bibliográficas

Alvarado, H. (2004). *Elementos del significado del teorema central del límite en textos de estadística para ingenieros*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Delmas, R. C., Garfield, J. B. y Chance, B. L. (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students´ statistical reasoning. *Journal of Statistic Education*, 7, 3. On line: [http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n3/delmas.cfm]

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: El autor.

Mendez, H. (1991). *Understanding the central limit theorem*. Tesis Doctoral. Universidad de California. UMI 6369.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Serrano, L. y Batanero, C. (2002). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA*, 36.

Tauber, L. (2001). *Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Apéndice

Libros de textos incluidos en el análisis:

1. Canavos, G. (1992). *Probabilidad y estadística*. México: Mc Graw Hill.
2. De Groot, M. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Wilmington: Addison-Wesley.
3. Devore, J. (2001). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Quinta edición. México: Thompson.
4. Johnson, R. y Kuby, P. (2004). *Estadística Elemental*. Tercera edición. México: Thompson.
5. Kennedy, J. y Neville, A. (1982). *Estadística para Ciencias e Ingeniería*. Segunda edición. México: Harla.
6. Mendenhall, W., Wackerly, D. y Scheaffer, R. (1994). *Estadística Matemática con aplicaciones*. Segunda edición. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
7. Mendenhall, W. y Sincich, T. (1997). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Cuarta edición. México: Prentice Hall.
8. Meyer, P. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadística*. Segunda edición. México: Addison-Wesley.
9. Miller, I., Freund, J. y Johnson, R. (1992). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Cuarta edición. México: Prentice Hall.

10. Montgomery, D. y Runger, G. (1996). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. México: Mc Graw Hill.
11. Parzen, E. (1987). *Teoría Moderna de Probabilidades y sus Aplicaciones*. Quinta edición. México: Limusa.
12. Peña, D. (1995). *Estadística. Modelos y Métodos*. Octava edición. Madrid: Alianza Universitaria.
13. Scheaffer, R. y McClave, J. (1993). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Tercera edición. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
14. Velasco, G. y Wisniewski, P. (2001). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México: Thompson.
15. Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1999). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Sexta edición. México: Prentice Hall, Pearson.
16. Wisniewski, P. y Velasco, G. (2001). *Problemario de Probabilidad*. México: Thompson.

INFORME SOBRE EL PROYECTO DE TESIS "LA MEDIA ARITMÉTICA. ASPECTOS COGNITIVOS, ESTRATEGIAS, ERRORES Y DIFICULTADES EN SU COMPRENSIÓN POR EL ALUMNADO".

Alexandre Joaquim Garrett
Juan Antonio García Cruz
Universidad de La Laguna, Islas Canarias. España

Resumen

En este trabajo exponemos diferentes aspectos que conforman nuestro proyecto de investigación respecto a los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual en la comprensión de la media aritmética. El estudio constituye una investigación de carácter educativo, que pretende profundizar en el análisis de las concepciones, errores y dificultades de los alumnos en ese contenido para una mejor comprensión del proceso de enseñanza y aprendizaje y las condiciones en las cuales se puede realizar para obtener una eficacia óptima. El estudio se lleva a acabo con estudiantes de secundaria y profesores en formación, en Luanda (Angola), y tratamos de conjugar métodos y técnicas de investigación cuantitativas y cualitativas. A través de un cuestionario obtenemos las respuestas de los alumnos que son interpretadas, codificadas y, desarrollamos una categorización jerárquica de las mismas, basándonos en la taxonomía SOLO.

Abstract

In this work we set out various aspects that make up our research project regarding the cognitive aspects of operational and conceptual understanding of the arithmetic average. The study is an investigation of an educational nature, which seeks to deepen the analysis of the conception, mistakes and difficulties of the students in that content for a better understanding of the teaching and learning process and the conditions under which it can do them to obtain optimum effectiveness. The study takes just with high school students and teachers in training, in Luanda (Angola), and we seek to combine methods and techniques for quantitative and qualitative research. Through a questionnaire get responses from students who are interpreted, and encrypted. So, we developed a hierarchical categorization of the same, based on the SOLO taxonomy.

García Cruz, J.A. y Garrett, A.J. (2007). Informe sobre el proyecto de tesis "La media aritmética. Aspectos cognitivos, estrategias, errores y dificultades en su comprensión por el alumnado". En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 117-124.

Introducción

La media aritmética es un concepto que se ha incorporado a los currículos de estadística y de las matemáticas en los diferentes niveles de enseñanza debido a que aparece de forma natural y en ocasiones de manera inconsciente en nuestra vida diaria. Su uso en diversas esferas es una práctica común, ya sea en la propia docencia, para abordar los demás conceptos, como en la vida social, a través de la prensa y donde sea necesario el análisis exploratorio de datos.

En reconocimiento a lo anterior, asistimos a un aumento considerable de publicaciones e investigaciones relacionadas con este concepto, que contemplan diversos aspectos, tanto de carácter operacional como conceptual.

El objetivo de nuestro estudio está relacionado con algunos de estos aspectos. Se pretende: profundizar en el análisis sobre la comprensión y los conocimientos del alumnado sobre la media aritmética, profundizar en la identificación de los errores, dificultades y obstáculos en la adquisición de este concepto, ampliar el análisis de las estrategias del alumnado al resolver un problema relacionado con la media aritmética, examinar sus acciones en los problemas abiertos y de elección múltiple y elaborar una propuesta de estructuración metodológica para la enseñanza de la media aritmética y de algunos conceptos relacionados. La investigación se circunscribe en el ámbito de nuestro proyecto de tesis doctoral que todavía se encuentra en desarrollo, presentando aquí las ideas principales a que está referida.

El estudio proyecta analizar el desarrollo de este concepto desde diferentes perspectivas, integrando también una evaluación cualitativa del aprendizaje de los alumnos, tomando como referencia la taxonomía SOLO, y constituye una aportación más, tendente a proporcionar diferentes informaciones sobre la adquisición de este concepto en el alumnado en Luanda (Angola), cuyos resultados, particularmente, resultarían de interés para los profesores, didactas y autoridades de aquel país, y en general para toda la comunidad investigadora, cuyos datos podrían ser útiles para contrastar informaciones y realizar estudios interculturales.

Antecedentes

El estudio de la media aritmética no es un asunto nuevo. Existen distintas investigaciones que vienen abordando el tema, analizando las concepciones del alumnado sobre este concepto.

Desde el año 2004 venimos realizando investigaciones en el campo de la media, donde destacamos un estudio exploratorio que ha sido fundamental para la superación de la fase investigadora del programa de doctorado 2003-2005. El trabajo consistió en desarrollar un instrumento de evaluación del razonamiento del alumnado sobre la media aritmética, sus concepciones, errores y dificultades, y ha sido administrado a estudiantes de cursos previos a la universidad en Luanda (Angola) y Tenerife (España). Los resultados obtenidos indicaron diferentes grados de dificultades del alumnado en la comprensión de este concepto y en particular, se han observado mayores dificultades en la muestra de Luanda. Esta constatación es una de las razones que nos motivó a seguir con la investigación en aquel país, con el fin de ampliar y profundizar nuestro estudio preliminar.

Son varios, los antecedentes en este campo de investigación. En general, señalan que la comprensión del concepto de media aritmética no es tan fácil como aparenta, a pesar de su carácter elemental. Algunas de las investigaciones realizadas en este área son las siguientes: Pollatsek, Lima y Well (1981) analizan las dificultades de algunos estudiantes universitarios al resolver problemas de media ponderada; Los resultados de Mevarech (1983) indican que una explicación posible de los errores de los alumnos en el cálculo de la media, es que ellos se

comportan como si creyeran que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética, constituyera un grupo algebraico que satisface los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso; Strauss y Bichler (1988) centran su atención en la conceptualización de siete propiedades de la media aritmética. Algunos de sus resultados fueron también confirmados por Leon y Zawojewski (1991); El estudio de Mokros y Russell (1995) identificó y analizó cinco construcciones básicas sobre representatividad: La media como moda, la media como algoritmo, la media como algo razonable, la media como punto medio y la media como punto matemático de equilibrio; Cai (1995), evalúa la capacidad de los alumnos al invertir el algoritmo de cálculo de la media y la comprensión conceptual; Batanero, Godino y Navas (1997) identificaron errores conceptuales y dificultades de aplicación práctica de los conocimientos sobre promedios en maestros de Primaria en formación; Gattuso y Mary (1998), profundizaron en el estudio de la media ponderada, con estudiantes de la enseñanza secundaria, de 13 a 15 años de edad; Cobo y Batanero (2004) presentan un trabajo en que continúan las investigaciones sobre las dificultades que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria tienen con las medidas de tendencia central; García Cruz y Garrett (2006a; 2006b), analizaron las actuaciones de los estudiantes ante preguntas de respuestas abiertas relacionadas con preguntas de respuestas de elección múltiple, observando que los alumnos no son consistentes con sus afirmaciones, ya que para una situación similar utilizaban criterios completamente diferentes; Watson y Moritz (1999, 2000) desarrollan la comprensión del concepto de media aritmética estableciendo una caracterización jerárquica de las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión. Sus resultados mostraron una cierta tendencia de mejora en los niveles de respuestas en función del grado cursado.

Nuestra investigación continúa con las investigaciones en este tema. El conocimiento de los datos anteriores es un fundamento teórico para abordar transparentemente las cuestiones propuestas, y es una base para comparar los resultados encontrados con nuestros alumnos.

Delimitación del problema y objetivos de investigación

Al revisar los trabajos que constituyen nuestros antecedentes en el estudio de la media aritmética, observamos que los principales objetivos considerados se resumen en el análisis de la comprensión conceptual y algorítmica, de las capacidades procedimentales de los alumnos en la resolución de problemas y de los errores conceptuales asociados, en la evaluación del efecto del tipo de dato y del medio de presentación, entre otros. Sin embargo, cuestiones como, la caracterización jerárquica del desarrollo cognitivos en la comprensión de la media, el análisis del origen de los errores y dificultades de los alumnos, el análisis de las actuaciones de los alumnos en preguntas de respuestas abiertas y de elección múltiple relacionadas, no han sido profundamente explorados, aunque hubiesen sido mencionados en algunos trabajos. Por ejemplo, la caracterización analítica de las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión, ha sido abordada por Watson y Moritz (1999, 2000), sin embargo ese análisis se ha restringido a alumnos de primaria y secundaria. En nuestro caso, además de estudiar diferentes aspectos sobre la media aritmética, en contextos diferentes, ampliamos este análisis con alumnos universitarios, algo que hasta ahora no se había efectuado en este tipo de estudio.

Concretamente, nuestra investigación aborda los siguientes objetivos:

- Profundizar en el análisis de los aspectos cognitivos de carácter operacional y conceptual sobre la media aritmética que posee el alumnado.
- Profundizar en la identificación de los errores y dificultades del alumnado respecto a la media aritmética y estudiar sus orígenes.

- Ampliar el análisis de las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas que involucran el concepto de media aritmética.
- Analizar las acciones de los estudiantes en la resolución de problemas abiertos y de elección múltiple, que tienen una cierta relación.
- Desarrollar una propuesta de guía didáctica para la enseñanza de la media aritmética y de otras medidas de tendencia central, que facilite el aprendizaje de estos conceptos.

Con el estudio no sólo se pretende identificar las dificultades y errores que cometen los estudiantes en la adquisición de este concepto, sino que también se proponen soluciones tendentes a mejorar la enseñanza y aprendizaje del mismo.

Marcos de referencia

La investigación se elabora basándose en diferentes teorías. El marco de referencia empieza con el abordaje de las distintas acepciones de la comprensión y su evolución, según las explicaciones de diversos autores (Skemp, 1976, 1979; Sierpinska, 1990; Sfard, 1991; Hiebert y Lefevre, 1986; Hiebert y Carpenter, 1992). Utiliza también la teoría de Batanero y Godino (2001), para analizar los componentes del significado de los objetos estadísticos y aborda los orígenes de las dificultades y errores de los estudiantes basándose en el trabajo de Socas (1997).

El modelo neopiagetiano SOLO, propuesto por Biggs y Collis (1982; 1991), asume un papel de destaque en la investigación, porque con él se clasifican las respuestas de los alumnos en niveles de comprensión. En este sentido, y de acuerdo con la descripción de Biggs y Collis (1982; 1991), el *nivel prestructural* estaría asociado con las respuestas iniciales, indicando que el aprendizaje es demasiado bajo con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea. El estudiante se muestra despistado o atraído por aspectos sin ninguna relevancia. En el *nivel uniestructural* se situarían las respuestas de aquellos estudiantes que se centran en el dominio adecuado de la tarea pero que consideran sólo un aspecto dentro del mismo. En el *nivel multiestructural* se caracterizaría por el hecho de que el estudiante aprende, cada vez, más características adecuadas y correctas, pero presenta dificultades en integrarlas. En el *nivel relacional*, estarían las respuestas de aquellos estudiantes que integran las diferentes partes para, con ellas, completar una estructura coherente y significativa.

Pero en función de las respuestas observadas en el proceso de análisis, nuestra clasificación asume su forma particular, pues, hemos encontrado respuestas que se han situado en el nivel intermedio entre el nivel multiestructural y el relacional, que consideramos como nivel de transición.

Metodología

Muestra

El estudio lo llevamos a cabo con un total de 227 estudiantes de Luanda (Angola), de enseñanza secundaria y universitaria. Estos últimos eran de la facultad de educación. Los estudiantes de secundaria y los universitarios de la especialidad de pedagogía recibieron enseñanza sobre estadística descriptiva en el curso anterior, mientras que los estudiantes de la especialidad de matemática, estudiaron estadística inferencial.

Instrumento de recogida de datos

La recogida de datos se realiza, en una primera fase, con la administración de un cuestionario que contempla nueve problemas sobre diversos aspectos de la media aritmética y que combina preguntas de respuestas abiertas y de elección múltiple. Algunos de los problemas tenían apartados, completando, así, un total de 13 ítems. En la segunda fase, se

realizan entrevistas semiestructuradas, con el propósito de aclararse y profundizar en las respuestas obtenidas con la administración del cuestionario.

Las tareas del cuestionario ponen de manifiesto los elementos de significado de un concepto señalados en Batanero y Godino (2001): El campo de problemas y situaciones del que emerge el concepto; Los procedimientos, algoritmos y operaciones que son un conjunto de prácticas que un sujeto realiza cuando se enfrenta a un problema y trata de resolverlo; Las representaciones, como por ejemplo, los números, términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, etc., que tienen una función semiótica y también una función instrumental, ya que es con ellas que se opera y no con el concepto representado; Las definiciones y propiedades del concepto; Los argumentos y justificaciones que se empleados para convencer de la validez de las soluciones de los problemas o de la veracidad de las propiedades relacionadas con los conceptos. A continuación, presentamos tres problemas para ilustrar algunas tareas que configuran el cuestionario:

Problema "En una clase de ciencia": *Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:*

6'2	*6'0*	*6'0*	*15'3*	*6'1*	*6'3*	*6'2*	*6'15*	*6'2*

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

a. Usar el número más repetido, que es 6'2.

b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.

c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.

d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.

Este problema lo hemos adaptado del cuestionario descrito en Garfield (2003). La tarea, evalúa el uso de la media como mejor estimador de un valor desconocido en presencia de errores de medición, la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media, así como la posible confusión en los alumnos entre la media y otras medidas de tendencia central. La mejor estimación para el problema viene dada por la media aritmética, de forma general, pero en el caso, se da un valor atípico que es necesario descartar antes de proceder al cálculo de la media, por ser esta muy sensible a los valores extremos.

Cada respuesta tiene un significado concreto. De esta forma, si el alumno responde al apartado:

- *Usar el número más común, que es 6'2,* sugiere que él ha escogido como respuesta la moda. En las condiciones dadas, la moda es peor estimador que la media (Batanero, Godino y Navas, 2000; Estrada, 2002).

- *Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales,* sugiere que el alumno ha confundido la palabra precisión con cantidad de cifras decimales.

- *Sumar los 9 números y dividir la suma por 9,* realiza el cálculo algorítmico de la media.

- *Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8,* conoce que la media es sensible a valores extremos y por tanto se debe desechar el valor atípico, antes de calcular la media aritmética.

Problema "Hijos por familia": *El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo?*

(marcar una sola de las siguientes respuestas)

_____a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.

_____b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.

_____c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.

_____d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.

_____e. El número más común de niños en una familia es 2.

Este problema también fue adaptado de Garfield (2003), y ha sido utilizado por otros autores (Batanero, Godino y Navas, 2000; Estrada, 2002). El problema evalúa la comprensión adecuada del algoritmo de cálculo de la media, la confusión de este concepto con otras medidas de posición central (mediana y moda), así como sus posiciones relativas en distribuciones asimétricas.

La solución correcta es la opción que dice "*hay un total de 110 niños en la ciudad*", que nos revelaría, que, probablemente, el alumno ha invertido el algoritmo de cálculo de la media aritmética para determinar la suma total, dado que se conoce la media y el total de datos. Eso mostraría que el alumno tiene una comprensión relacional del concepto.

La elección de la opción a) indicaría que el alumno confundió la media con la mediana. Evidentemente, la media y la mediana estarán más cerca si la distribución tiene una forma aproximadamente simétrica, sin embargo, en distribuciones asimétricas, la media se desplaza hacia la cola más larga.

La elección de la opción b) se interpreta que el alumno no acepta que la media pueda ser un valor no entero. La idea de que la media de hijos es 2'2 le produce una confusión, ya que la variable en cuestión es discreta. Entonces, redondeaba por exceso este valor, considerando que hay más familias con 3 niños que con 2.

Si el alumno marca la opción d) lo interpretamos que ha confundido los términos "adultos" y "familias", mientras que si indica la opción e) concluimos que identifica la media a la moda.

Problema "Peces capturados": *El número de peces capturados por seis alumnos en una actividad de ocio, es 3, 4, 5, 3, 1, y 2 respectivamente, que hace un promedio de 3 peces por alumno [(3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2)/6]. Más tarde se descubrió que en la actividad había participado otro alumno que no pescó ningún ejemplar. ¿Crees que cambiará el valor medio de peces capturados por cada alumno, al considerarse este último alumno? ¿Justifica tu respuesta?*

Este problema fue adaptado de Strauss y Bichler (1988), y abarca los aspectos abstracto y estadístico de esta medida, pues hay que tener en cuenta el cero en el cálculo de la media y la media se ve afectada si se añade un valor distinto de su valor respectivamente. Se trata de un problema de reparto equitativo, donde se pretende averiguar si el alumno sabe que los valores nulos influyen en el cálculo de la media cuando se quiere que el reparto sea justo.

Tareas similares a esta también han sido referidas por otros autores (Mevarech, 1983; Leon y Zawojewski, 1991; Tormo, 1995), lo que muestra la importancia que tiene el analizar la comprensión de nociones relacionadas.

Procedimiento en el análisis de las respuestas de los alumnos

Tras la administración del cuestionario, las respuestas de los alumnos fueron categorizadas y codificadas para facilitar el análisis de los datos. Las categorías fueron determinadas teniendo en cuenta el tipo de problema: Para los de respuestas de elección múltiple, relacionamos la categoría con el contenido matemático del distractor, mientras que para los de respuesta abierta, establecimos como categoría la estrategia presentada por el sujeto en el proceso de resolución.

Las entrevistas, fueron audiograbadas y simultáneamente se hizo la traducción y transcripción, ya que el idioma de trabajo fue el portugués. Cada entrevista tardó entre 15 y 25 minutos. El tiempo dependía de la capacidad de argumentación del alumno y del tipo de respuesta presentado.

Para el análisis de los datos tratamos de combinar en un todo las operaciones de análisis e interpretación, considerando como punto de partida las preguntas de investigación y las cuestiones derivadas de las respuestas de los alumnos al cuestionario que se les administró.

Conclusiones

Aunque ya se han obtenido algunos resultados, nuestro trabajo todavía se encuentra en fase de ejecución. Pretendemos discutir algunos datos con las teorías que apoyan nuestro trabajo y hacer interpretaciones que muestren su concordancia con los objetivos y cuestiones de investigación planteados inicialmente.

Con base en lo anterior, se revelarán las principales dificultades y errores observados en nuestros alumnos, bien como sus orígenes. Expondremos las estrategias (correctas o incorrectas) que utilizan al resolver algunos problemas sobre la media aritmética, analizaremos sus capacidades de argumentación, y las inconsistencias presentadas al enfrentarse a problemas de respuestas abiertas y de elección múltiple que tienen relaciones, así como del efecto que podría o no producir el experimento del aula realizado con algunos de ellos.

Los resultados finales servirán de referencia para los demás estudios, además de ser una aportación en el contexto del cruce de informaciones interculturales, reclamada por la comunidad de investigadores en educación estadística.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. Godino, J. D. (2001). Developing New Theoretical Tools in Statistics Education Research. *Proceedings of the 5rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de Primaria en Formación sobre los Promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310-324.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press, New York.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. In H. A. H. Rowe (Ed.), Intelligence: Reconceptualization and measurement (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.3, pp.144-151). Universidad de Pernambuco.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Garcia Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2006b). Students' actions in open and multiple-choice questions regarding understanding of averages. *In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 161-168. Prague: PME.

Garcia Cruz, J.A. y Garrett, A. J. (2006a). On average and open-end questions. *Proceedings of the 7 th International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahia, Brazil.

Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Education Research Journal* 2 (1), 22-38.

Garrett, A. J. (2005). Construcción de un cuestionario sobre los promedios. Resultados con alumnos de Luanda y Tenerife. *Memoria Fase de Investigación, curso de doctorado 2003-2005*.

Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school students. *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 685-691). Singapur.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. W. Grouwns (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics* (pp. 65-97). New york: Macmilan.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leon, M. R., y Zawokeswski, J. S. (1991). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary results. En D. Vere- Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 302-306). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in mathematic*, 14, 415-429.

Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, 1, 20-39.

Pollatsek, A. Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24-41.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching* 77, 20-26.

Skemp, R.R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action. A foundation for theory and practice in education.* Chichester (etc.): John Wiley &Sons.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En*: L. Rico y otros (ed.) La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (Cap. V, pp.125-154.), Horsori, Barcelona.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Education Studies in Mathematics*, 37, 145-168.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The Longitudinal Development of Understanding of Average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1/&2), 11-50.

COMPRENSIÓN DE LA IDEA DE JUEGO EQUITATIVO EN LOS MAESTROS EN FORMACIÓN

Juan Jesús Ortiz de Haro
Nordin Mohamed Maanan
Luis Serrano Romero
Jesús Rodríguez García
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo analizamos las respuestas a dos ítems que plantean la idea de juego equitativo, y han sido tomados de Green (1983) y Fishcbein y Gazit (1984), en una muestra de 167 maestros en formación de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla (Universidad de Granada). Hemos analizado el porcentaje de respuestas correctas y los argumentos utilizados, comparándolos con los obtenidos por los niños de 10-14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997). Concluimos con algunas implicaciones educativas que pueden ser tenidas en cuenta para mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el campo de la probabilidad.
Palabras clave: Probabilidad, juego equitativo, formación de profesores.

Abstract

In this paper we analyze the responses to two items that raise the idea of equitable game, and they have been taken from Green (1983) and Fishcbein and Gazit (1984), in a sample of 167 teachers in training at the Faculty of Education and Humanities at Melilla (University of Granada). We have analyzed the percentage of correct answers and the used arguments, compared with those obtained by children of 10-14 years who participated in the investigation of Cañizares (1997). We conclude with some educational implications that can be taken into account to improve our didactic action of teacher's training in the field of probability.
Keywords: Probability, equitable game, teacher training.

Ortiz, J. J.; Mohamed, N.; Serrano, L. y Rodríguez, J. (2007). Comprensión de la idea de juego equitativo en maestros en formación. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife*. pp. 125-134.

Introducción

En los últimos años se ha producido una reforma de la enseñanza obligatoria, que progresivamente ha ido concediendo un mayor peso al estudio de la Probabilidad. Una muestra es el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación primaria (MEC, 2006), donde se incluye un bloque de contenidos sobre *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* desde el primer ciclo. Este documento enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de hacer más activa y exploratoria la metodología de enseñanza, incidiendo en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en otros currículos (ej., NCTM, 2000; SEP, 2006).

Pero un cambio efectivo de la enseñanza de la probabilidad requiere mejorar la formación de los profesores que han de llevar a cabo la enseñanza (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, con frecuencia erróneas, y que podrían transmitir a sus estudiantes (Cardeñoso, 2001; Ortiz y cols., 2006). Para conocer si los maestros en formación están debidamente preparados hemos realizado un amplio estudio de evaluación inicial de la capacidad de los futuros profesores de educación primaria para resolver problemas elementales de probabilidad. En este trabajo presentamos solo una pequeña parte de los resultados relacionada con las concepciones de los maestros en formación sobre la idea de juego equitativo. Para ello analizamos las respuestas de 167 estudiantes de magisterio a dos ítems tomados de Green (1983) y Fishcbein y Gazit (1984), estudiando los porcentajes de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por los alumnos. Pretendemos después analizar las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997), concluyendo con algunas implicaciones educativas que pueden ser tenidas en cuenta para mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el campo de la probabilidad. A continuación describimos la investigación previa, el cuestionario y los resultados obtenidos.

Investigaciones previas

Comprensión de la probabilidad en niños y adolescentes

Son todavía escasas las investigaciones sobre las concepciones que los alumnos tienen sobre la idea de juego equitativo, en comparación con las realizadas respecto a la idea de probabilidad, aleatoriedad y otros conceptos probabilísticos. Watson y Collis (1994) estudiaron las interpretaciones de los diagramas de barras y la toma de decisiones sobre si un dado es o no sesgado, encontrando un funcionamiento multimodal en algunas respuestas y la relación de éstas con la forma concreta de presentación simbólica. También algunos alumnos consideran la necesidad de experimentación para decidir sobre la equitatividad de los dados. En Lidster y cols. (1995) describen dos estudios con alumnos de 8 a 14 años que tratan de relacionar las experiencias dentro y fuera de la escuela con el desarrollo de la noción de equitatividad. Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el profesor y el conocimiento construido por el alumno. En Cañizares y cols. (1999), pretendían analizar las concepciones de los niños entre 10 y 14 años sobre la idea de juego equitativo, completando anteriores estudios sobre las creencias de los niños en el terreno de probabilidad y su influencia en la asignación de probabilidades (Cañizares y cols., 1997, Cañizares y Batanero, 1998). Entre sus conclusiones destacan que la mayoría de los alumnos demuestran una adecuada concepción de la idea de juego justo

o equitativo, aunque las entrevistas mostraron una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas.

Aunque las investigaciones han mostrado una serie de sesgos en el razonamiento probabilístico, también se han encontrado muchas ideas productivas de los niños y adolescentes sobre la probabilidad. Vahey y cols. (1997) mostró que los alumnos de secundaria empleaban el razonamiento probabilístico de forma productiva en una tarea sobre equitatividad en un entorno teconológico, y también sugiere que algunas heurísticas citadas frecuentemente, como la representatividad, no describen adecuadamente los razonamientos de los estudiantes. Scholttmann y Anderson (1994) que han estudiado las intuiciones de los niños de 5 a 10 años sobre la esperanza matemática, concluyen que, incluidos los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la idea de esperanza matemática, teniendo en cuenta, tanto la probabilidad, como el valor del premio para tomar sus decisiones. Sin embargo, tanto la asignación de probabilidad, como la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar sigue, con frecuencia, estrategias aditivas.

Investigaciones relacionadas con la formación en probabilidad de futuros profesores

El gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores en la pasada década apenas se refleja para el caso de la probabilidad, como se pone de manifiesto en el pasado ICMI Study 15, donde sólo se presentó un trabajo (entre unos 150) sobre el tema. También se observa al analizar los contenidos de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, o en el survey de Stohl (2005). A pesar de ello progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en este colectivo (ver por ejemplo, las investigaciones de Azcárate (1995) o Cardeñoso (2001) y trabajos posteriores de los mismos autores; la investigación de Ortiz y cols. (2006) y los estudios de Mickelson y Heaton (2004) y Franklin y Mewborn (2006)).

También se inician algunas experiencias (por ejemplo, López, 2006 y trabajos anteriores de la misma autora) que analizan la forma en que los profesores diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, sobre todo en la escuela primaria, que muestran la gran dificultad de estos profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos. En otros casos (por ejemplo, Batanero, Godino y Cañizares, 2005) se describe el efecto de experiencias de enseñanza basadas en simulación sobre la superación de algunos sesgos en el razonamiento o como los profesores de instituto que participaron en el estudio llevado a cabo por Sánchez (2002) mejoraron el conocimiento sobre conceptos como la variabilidad y la utilidad de simular situaciones de probabilidad.

Método

La muestra de la cual se tomaron los datos estuvo integrada por 167 maestros en formación de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, de los tres cursos y de todas las especialidades salvo Audición y Lenguaje, con una media aritmética de edad de 21 años. Estos estudiantes, en general, tienen escasa formación matemática, y en particular, probabilística. Los resultados se han obtenido a partir de las respuestas escritas de dicha muestra, a dos cuestiones sobre la equitatividad de sendos juegos tomadas de las investigaciones de Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984). A continuación reproducimos los ítems del cuestionario, que se aplicó antes de la instrucción:

ÍTEM 1.- Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

ÍTEM 2: María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 peseta si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó *5 ó* 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo? RESPUESTA _____ pts. ¿Por qué?

Para resolver el ítem 1, tomado de Fischbein y Gazit (1984), se precisa la comparación de fracciones, para el caso de composición proporcional de las urnas. El contexto y la mención explícita a la equitatividad del juego introducen elementos subjetivos en la comparación, relacionados con las concepciones del alumno sobre la aleatoriedad y el juego equitativo. El distractor introducido en este ítem es una idea muy extendida entre los niños, que diferencia un problema de comparación de probabilidades de otro de comparación de fracciones. Se trata de la creencia en que, a pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el número absoluto de casos favorables representa una ventaja. Según los resultados de nuestra investigación previa (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997), este tipo de elemento subjetivo hace que aumente el nivel de dificultad del problema con respecto al esperado en un problema de comparación de fracciones como los propuestos por Noelting (1980).

El ítem 2 tomado de Green (1983) evalúa las intuiciones que manifiestan los alumnos sobre lo que sería un juego equitativo, en concreto la idea de que si uno de los jugadores lleva ventaja, las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador. En este ítem, el alumno puede asignar la ganancia *5* a Esteban, o hacer caso omiso del desequilibrio de probabilidades y responder que ambos jugadores deberán ganar lo mismo. Una opción intermedia sería dar la respuesta correcta por correspondencia entre casos favorables y desfavorables *(«por cada vez que gane Esteban, María ganará unas cinco veces»*).

Resultados

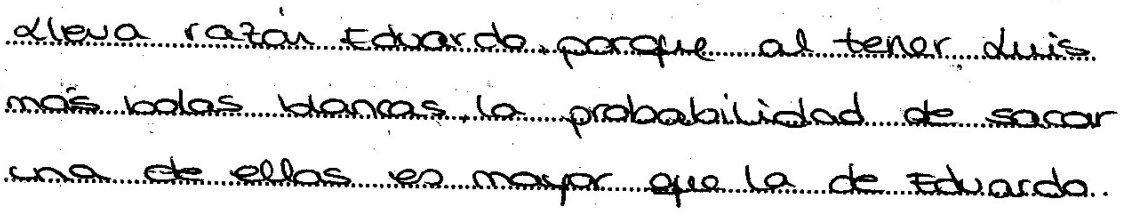
Análisis ítem 1

En el ítem 1, hubo un 57.8 % de maestros en formación que indicaron que el juego era equitativo, utilizando dos estrategias correctas diferentes. Por su parte, el 35% de los niños también considera que el juego es equitativo, aunque no todas las respuestas correctas se han obtenido por medio de un argumento válido, pues el 8.4% de ellas justifican la equitatividad apoyándose en un argumento no pertinente, por lo que el porcentaje real de respuestas correctas es del 26.6%. Tras un análisis de dichos argumentos, hemos obtenido las estrategias, que se muestran en la tabla 1.

Comparación absoluta del número de casos favorables:

Es una estrategia incompleta, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. Piaget e Inhelder (1951) encuentran que, cuando se propone a los niños comparar dos probabilidades, tratan de comparar en primer lugar los casos posibles. Una vez superada esta etapa, centran su atención en la comparación de los casos favorables, eligiendo la caja que tiene más. Un ejemplo de esta estrategia nos lo proporciona la respuesta del maestro en formación

(alumno 8): "*Lleva razón Eduardo porque al tener Luis más bolas blancas la probabilidad de sacar una de ellas es mayor que la de Eduardo*":



En nuestro estudio, el porcentaje de utilización de esta estrategia por los maestros en formación (11.8%) está bastante por debajo de los porcentajes de los niños de 10-14 años (42.7%) de la investigación de Cañizares (1997), aunque consideramos que es alto debido a la sencillez del problema planteado y tratándose de futuros maestros de educación primaria.

Comparación absoluta del número de casos desfavorables:

Cuando, una vez intentada la estrategia anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables, eligiendo la caja que tenga menos casos desfavorables. Corresponde, según Piaget e Inhelder *(1951)* al final del nivel preoperacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y las partes. Ejemplo claro de esta estrategia es la respuesta del maestro en formación (alumno 50): "*Que no es cierto lo que opina Eduardo ya que Luis también tiene el doble de bolas negras que él. Así que los dos tienen las mismas posibilidades*".

Los resultados de nuestro estudio muestran que el porcentaje de utilización de esta estrategia por los maestros en formación (2%) también está por debajo de los porcentajes de los niños de 10-14 años (4.9%) de la investigación de Cañizares (1997), aunque con una diferencia menor que en el apartado anterior.

Estrategia de correspondencia:

Esta estrategia consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Piaget e Inhelder *(1951)* afirman que, a falta de un cálculo completo de fracciones, el niño realiza la comparación por un sistema de correspondencias; cuando las proporciones entre casos favorables y desfavorables no aparecen como inmediatas, el sujeto calcula los casos favorables que hay por cada caso desfavorable (o viceversa) en una de las cajas y compara si esta proporción es mayor o menor en la otra caja. Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente el ítem 1. Ejemplo de esta estrategia es la siguiente respuesta de un maestro en formación (alumno 11): "*Igual que en el problema anterior existe la misma proporción de bolas*".

Podemos observar en los resultados de nuestro estudio que el porcentaje de utilización de esta estrategia correcta por los maestros en formación (43.1%) es bastante más alto que el de los niños de 10-14 años (26.6%), aunque pensamos que, en el caso de los primeros, es demasiado elevado ya que se trata de una estrategia utilizada por personas que aún no tienen un dominio completo del cálculo de fracciones.

Estrategia multiplicativa:

Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951), en el período de las operaciones formales, es sin duda, la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Un ejemplo de esta estrategia que resuelve con éxito este ítem es la respuesta siguiente de un maestro en formación (alumno 10): "*Tienen las mismas*

probabilidades", después de realizar los cálculos correspondientes utilizando la Regla de Laplace.

En este caso el porcentaje de utilización de esta estrategia por maestros en formación es del 14.7%, no apareciendo ningún caso entre los niños de 10 a 14 años, como, por otra parte, era de esperar, ya que la mayoría no han estudiado la regla de Laplace.

Otras estrategias

Entre ellas hemos encontrado las estrategias aditivas tanto en maestros en formación (1%) como en los niños (4.2%) donde se comparan las cuatro cantidades mediante operaciones de adición o substracción. Otras estrategias consisten en comparar sólo el número de casos posibles (maestros en formación 2% y niños 0.7%) o bien tomar aspectos irrelevantes, como el color favorito o la posición de las bolas en la urna o hacer referencia a la suerte (maestros en formación 2% y niños 9.1%).

Tabla 1. Porcentaje de estrategias en el ítem 1 utilizadas por maestros en formación (entre paréntesis los niños)

Juego equitativo		**Juego no equitativo**				**Otras**	**Incomp./ No responde**
Correspond *	Multiplicat *	Favorab.	Desfav.	Posibles	Aditivas		
43.1 (26.6)	14.7 (0)	11.8 (42.7)	2 (4.9)	2 (0.7)	1 (4.2)	2 (9.1)	12.8 (12.1)

En resumen, en la tabla 1 observamos el predominio de la utilización de las estrategias pertinentes o correctas en los maestros en formación (57.8%), mientras que sólo el 26.6% de los niños usa una estrategia considerada pertinente (correspondencia), lo cual corresponde a un mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un porcentaje importante que utiliza estrategias incorrectas (18.8%). Por otro lado, en el grupo de los niños predomina la estrategia basada en la comparación de casos favorables (42.7%), lo que lleva a la respuesta incorrecta de dar ventaja al jugador con más fichas blancas. Destaca también el alto porcentaje de respuestas incompletas o sin contestar en los dos grupos estudiados, estando en torno al 12%.

Análisis ítem 2

En la tabla 2 se puede observar que la respuesta mayoritaria de los maestros en formación al ítem 2 fue la correcta (77.5%), seguida de la opción 6 pts (7.0%). Los que no contestan o dan otro tipo de respuesta suponen el 9.6%, y ya con porcentajes algo más bajos los futuros maestros eligen la opción que otorga la misma ganancia (3.9%), independientemente de las probabilidades de ganar. En el caso de los niños de 10 a 14 años, también es mayoritaria la respuesta correcta (58%), seguida de la que otorga 1 pts (11.9%), es decir, la misma ganancia, independientemente de las probabilidades de ganar, y de los que no contestan o dan otro tipo de respuesta (11.9%). Por último están los niños que asignan 2, 3, 4 y 6 pts (9.1%).

Tabla 2. Porcentaje de respuestas al ítem 2

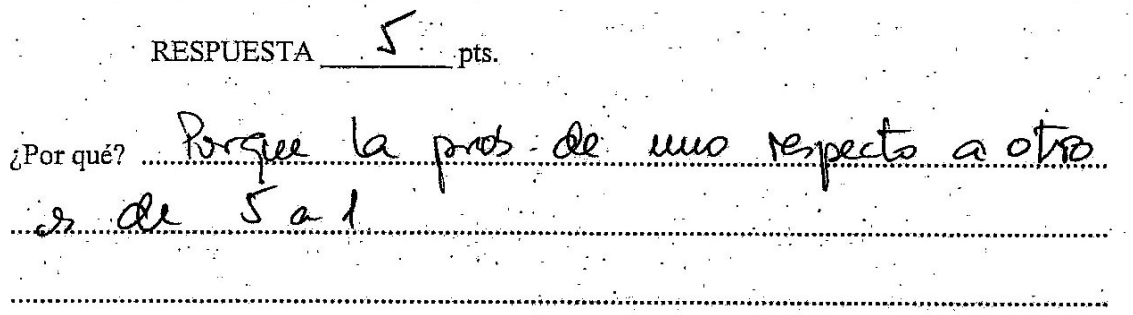
	1 pts.	2,3,4 pts**	5 pts.*	6 pts.	Otra	Blanco
Maestros formación	3.9	2.0	77.5	7.0	4.8	4.8

Niños	11.9	9.1	58.0	9.1	7.0	4.9

***** Respuesta correcta ** El valor 2 no aparece en los maestros en formación

Como vemos en los dos grupos estudiados la respuesta correcta es mayoritaria, siendo la diferencia principal en que los maestros eligen en segundo lugar la opción "6 pts", mientras que los niños eligen en ese puesto la opción de la misma ganancia "1pts", siendo también mayor el porcentaje de niños que eligen las cantidades menores 2, 3, y 4 pts. Por ello, creemos que los maestros en formación cuando responden de forma incorrecta como los niños, parece que tienen en cuenta las probabilidades de ganar y asignan a Esteban cantidades mayores para que, según ellos, el juego sea equitativo.

En cuanto a los argumentos empleados, un 69.3% del total de los maestros en formación apoyan su respuesta correcta con un argumento en que se cuantifican las posibilidades de los contrincantes, como ocurre con la respuesta del alumno nº 1: "*(Esteban debe ganar)* 5 *pts, porque la probabilidad de uno respecto a otro es de 5 a 1*":



mientras que un 12.4% de los argumentos admiten la ventaja de María, pero no la cuantifican explícitamente. Este tipo de argumentos se usa para justificar la respuesta correcta, o cualquier cantidad de dinero superior a 1 pts, como ocurre con la respuesta del alumno 23: "*(Esteban debe ganar) 6 pts., porque hay 1 posibilidad entre 6 de que salga el 1*". Otros piensan que debe ganar igual que María, como en la respuesta del alumno 14: "*(Esteban debe ganar)1 pts., es lo mismo que gana María sacando un número del 2 al 6*".

En el caso de los niños, un 46% del total de los alumnos argumentan la respuesta correcta basándose en la ventaja de María, como ocurre con la respuesta de Ricardo (12 años; 1 mes): *«María tiene 5 oportunidades más, o sea, que considero justo que sean 5 pts.»*, y un 19.6% considera que María tiene más posibilidades de ganar, pero tampoco la cuantifican.

En resumen, podemos afirmar que aunque los porcentajes de respuestas correctas de los maestros en formación son mayores que los de los niños, existe todavía un porcentaje elevado de estrategias y argumentos utilizados incorrectos. Destaca también el alto porcentaje de otro tipo de respuestas o sin contestar en los dos grupos estudiados, siendo del 9.6% en el caso de los futuros maestros y del 11.9% en el caso de los niños de 10-14 años.

Conclusiones

En resumen, aunque la mayoría de los maestros en formación demuestran una adecuada concepción de la idea de juego justo o equitativo, obteniendo resultados mejores que los niños de 10 a 14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997), como consecuencia de este estudio, consideramos que se debe incidir en la enseñanza de estos problemas de probabilidad, ya que observamos que, a pesar de ser

bastante elementales, existen dificultades en su resolución por parte de los futuros profesores de educación primaria. Para ello se debe mejorar la formación de profesores en probabilidad, incluyendo las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004) y realizando un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos.

Agradecimientos: Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2004-00789/EDUC, MEC, España y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Su estudio en el caso de la educación primaria. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference.* CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C.; Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: http://www.amstat.org/publications/jse/

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 14, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in childrens' comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti.

Cañizares, M. J.; Batanero, C.; Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números,* 37, 37-55.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar*. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad. Tesis Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Fischbein, E. y Gazit, (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics,* 15 (1), 1-24.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Green, D. R. (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield.

Lidster, S. T., Pereira-Mendoza, L., Watson, J. M. y Collis, K .F. (1995). What is fair for grade 6? Comunicación presentada en la *Annual Conference of the Australian Association for Research in Education*, Hobart, Tasmania.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute. CD ROM, en prensa

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and th ration concept. Part 1: Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (2), 217-253.

Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers'statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands:Kluwer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.

N. C. T. M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J.; Mohamed, N.; Batanero, C.; Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P, Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Schlottmann, A. y Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology*, 30 (1), 56-66.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* Dodrecht: Kluwer

Vahey, P.; Enyedy, N. y Gifford, B. (1997). Beyond represen tativeness: Productive intuitions about probability. Comunicación presentada en la *Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Stanford Un versity, Palo Alto, CA.

Watson, J. y ColIis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understandi chance and data concepts. En J. P. Ponte and J. P. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (v4, pp. 369-376). Universidad de Lisboa.

LA ILUSIÓN DE LINEALIDAD EN ESTADÍSTICA REGRESIÓN LOGÍSTICA VERSUS REGRESIÓN LINEAL

Miguel Andériz
Eduardo Lacasta
Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra, España
Gabriel Tiberio
Hospital Virgen del Camino de Pamplona, España
Javier Lafita
Hospital de Navarra, España
Carlos Romero
Hospital Virgen del Camino de Pamplona, España

Resumen

En este trabajo presentamos el análisis de un caso real en medicina. Este caso debe ser descrito por una regresión logística y no puede ser descrito correctamente mediante una regresión lineal. Sin embargo, un grupo de expertos rechazó el uso de la regresión logística. Este hecho muestra la dificultad de sobrepasar la tendencia a utilizar modelos lineales en la determinación de relaciones de causalidad.

……

Abstract

In this paper we show the analysis of a real case in medicine. This case must be described by a logistic regression and it cannot be described correctly by means of a linear regression. Nevertheless, a group of experts rejected the use of the logistic regression. This fact shows the difficulty to exceed the tendency to use linear models in the determination of causality relations.

Proporcionalidad lineal: noción transversal en la formación matemática y científica

Desde muy temprana edad la proporcionalidad se manifiesta como un modo adecuado para abordar situaciones en contextos muy diversos. Rouche (1992) muestra cómo la función lineal está sistemáticamente presente en la construcción de nociones, procesos y significados en matemáticas, así permite describir, construir y comunicar clases muy distintas de tareas y situaciones matemáticas y científicas de diferentes grados de complejidad. Spinillo y Bryant (1999) comparten esta visión al afirmar que:

> "La proporción es importante no sólo en el aprendizaje de las matemáticas, sino también tratándose de conceptos científicos básicos, tales como temperatura y densidad y en la realización de transacciones cotidianas, tales como decidir la 'mejor compra' o determinar las consecuencias de la inflación" (181).

Andériz, M.; Lacasta, E.; Wilhelmi, M. R.; Tiberio, G.; Lafita, J. y Romero C. (2007). La ilusión de linealidad en estadística. Regresión logística versus regresión lineal. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 134-142.

Spinillo y Bryant (1999) aportan sustento experimental a la tesis según la cual los niños a partir de los 6 años son capaces de realizar razonamientos proporcionales en comparaciones entre cantidades continuas y discontinuas. El análisis de la varianza de los datos (ANOVA) permite afirmar además una diferencia esencial entre los grupos según la edad. Los niños de 6 años producen una pequeña cantidad de justificaciones proporcionales en las cuales la razón de comparación es, implícita o explícitamente, la mitad; mientras que los niños de 7–8 años hacen razonamientos proporcionales más frecuentemente y más generales.

Estas diferencias según la edad son conformes a los estudios piagetianos sobre las etapas del desarrollo cognitivo de los niños y su apropiación de la noción de número natural, en lo que esta noción se refiere a la relación cantidad-cardinal en conjuntos de objetos (Peres, 1988).

Otros autores también aportan datos empíricos sobre las diferencias y peculiaridades en el razonamiento referidos a la etapa de 5-7 años (Sophian y Wood, 1997) y 8-9 años (Fujimura, 2001).

Van Dooren, De Bock y Verschaffel (2006) hacen una revisión de la literatura en educación matemática y científica donde se muestra el uso de modelos lineales en contextos y situaciones donde éstos no son aplicables (*ilusión de linealidad*). Asimismo, dichos autores evidencian que dichos usos obedecen a cuestiones de tipo *cognitivo* (tendencia "natural" a razonar proporcionalmente), *socio-cultural* (uso generalizado de la proporción como una regla del tipo "a más, más; a menos, menos", sin considerar la necesidad de existencia de una "constante de proporcionalidad"), *epistemológico* (enraizadas en desarrollos históricos, por ejemplo, en la teoría aristotélica sobre la caída de los cuerpos) y *didáctico* (relativos a la enseñanza escolarizada).

Necesidad de investigaciones en la institución Ciencias de la Salud

En unos trabajos anteriores (Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006, 2007) hemos mostrado cómo el uso constante de la regla de tres en primaria hace que los alumnos la mecanicen, no cuestionen su generalidad y pierdan el control de su ámbito de aplicación. De hecho, la regla de tres (y la idea de proporcionalidad que los alumnos identifican explícita o implícitamente con ella) dificulta la distinción entre la proporcionalidad directa e inversa (y la noción de función lineal asociada), así como la búsqueda de relaciones funcionales no lineales (afines, parabólicas, etc.). Estos trabajos buscaban justificar en la institución secundaria la necesidad de investigaciones centradas en la enseñanza de la función afín que extiendan la noción de función lineal ($y = ax$ con $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$), ligada a la de proporcionalidad (y a las de razón y proporción).

Esta necesidad de desarrollar investigaciones que busquen, de uno u otro modo, sobrepasar la ilusión de linealidad se puede extender a contextos muy diversos.

En este trabajo presentamos un caso real en medicina. Un artículo nuestro fue rechazado en primera instancia en una revista médica de cierto nivel, debido a la utilización de la regresión logística en lugar de la lineal, que es la que proponía el comité de selección de la revista.

Posteriormente, tras una discusión sobre el significado, utilidad y pertinencia de cada unas de las regresiones, el artículo fue aceptado y publicado[1].

No somos los únicos en señalar fallos en los evaluadores médicos de trabajos científicos cuando éstos abordan temas de los que no poseen suficiente conocimiento. Una justificación de este hecho es la "tecnificación" de la estadística en la institución Ciencias de la Salud (Andériz, 2005). El uso masivo de programas informáticos para el análisis de datos conlleva en muchos casos:

1. *La pérdida de capacidad axiológica o valorativa*. Se acepta tácitamente la transparencia de los resultados producidos con los programas informáticos, que dejan de ser cuestionados.
2. *Los programas informáticos son la medida de los análisis estadísticos*. Se restringen los análisis estadísticos a las posibilidades técnicas de los programas utilizados.

En el caso en que nos ocupa, la mayoría de los programas informáticos tienen por defecto definidas órdenes para la regresión lineal, que es el medio más extendido de relacionar dos magnitudes con el fin de establecer relaciones causales o realizar previsiones o prospecciones en la institución Ciencias de la Salud. Este hecho lleva a interpretar de manear errónea diversas situaciones y, por consiguiente, a rechazar estudios que no encajan en el esquema de trabajo estándar en la institución.

Datos

En un servicio médico de un hospital público se anotó durante once años el número de altas anuales (tabla 1). Durante dicho período de tiempo no variaron ni la dotación de personal ni la de material de dicho servicio.

Año	Número de altas
1	619
2	663
3	751
4	892
5	1097
6	1225
7	1189
8	1302
9	1377
10	1301
11	1370

Tabla 1. Número de altas anuales en once años consecutivos

Con estos resultados se elaboró el gráfico puntual (figura 1), en la que aparece en línea continua el trazado real y en línea discontinua el que hubiera correspondido a la recta de regresión lineal simple.

[1] Por razones obvias omitimos la referencia bibliográfica. Los datos están levemente cambiados, pese a lo cual el ejemplo tiene todo su valor y conserva sus características originales.

El análisis exploratorio de datos, basado en el gráfico presentado, no nos permite ver con precisión el procedimiento estadístico a utilizar para una correcta interpretación de estos resultados. La primera mitad de la curva obtenida se ajusta en cuanto su forma a la típica línea sigmoidea de la regresión logística; no sucede lo mismo con la segunda mitad, donde las fluctuaciones del número anual de altas no permiten apreciar dicha forma con claridad.

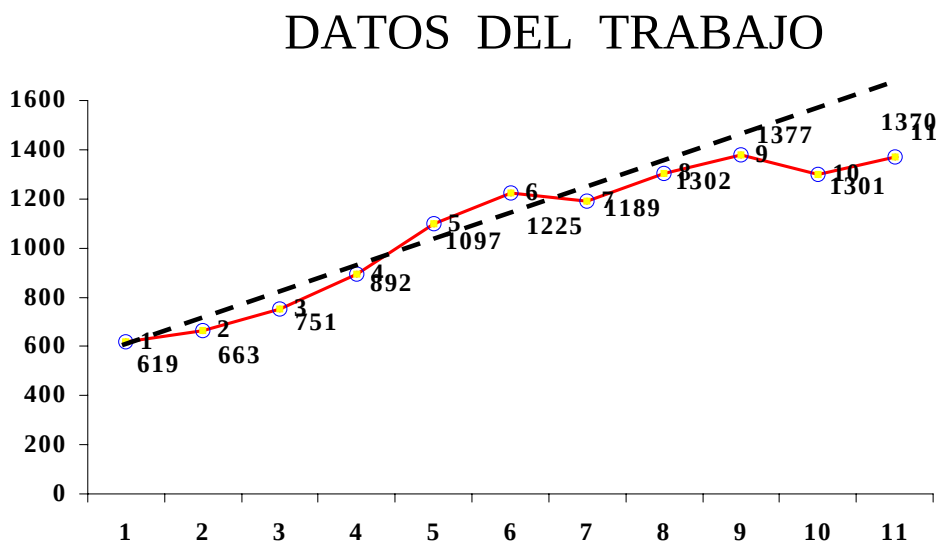


Figura 1. Representación gráfica de los datos

Modelos de población

Los orígenes de los modelos de población se deben al economista inglés Malthus (1766–1834) y al matemático holandés Verhust (1804–1849). En el modelo malthusiano la velocidad de crecimiento de una población es proporcional al número de individuos de una determinada especie en dicho instante. Sea $P(t)$ el número de individuos de una especie en el instante t, entonces existe una constante λ positiva ($\lambda > 0$) tal que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t)$$

Parece claro que esto representa una gran simplificación de la realidad, ya que, aun suponiendo proporcionalidad, λ tendría que depender de alguna manera de las condiciones y situación de la población. Un análisis del modelo malthusiano muestra que sólo es útil en ocasiones para predicciones a corto plazo y que no puede ser válido en general en predicciones a largo plazo, ya que $P(t) \to \infty$, cuando $t \to \infty$, lo que lleva a situaciones imposibles. Para predicciones en intervalos pequeños da excelentes resultados en muchas situaciones y con diferentes poblaciones (bacterias, ratones, etc.)

Para plantear un modelo que refleje de una manera más realista el crecimiento de poblaciones, puede aceptarse que a medida que aumenta P, el factor λ disminuya y así también vaya disminuyendo la velocidad de crecimiento. Esto hace que sea conveniente sustituir λ por $\lambda(1 - bP)$, con $b > 0$ y "pequeño". De esta manera, para P pequeño, el factor es próximo a λ y cuando P se hace grande ($< 1/b$), el factor se va aproximando a cero. La ecuación que describe la evolución de la población es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda(1 - bP(t))P(t) = \lambda P(t) - \lambda bP^2(t)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación logística o de Verhust. El término – λbP^2 se denomina "término de competición".

Elección del método

La curva logística es la más apropiada para describir los datos, ya que muestra una tendencia creciente aunque con oscilaciones propias de los fenómenos aleatorios. Por otra parte, el hecho de que no han variado los recursos del servicio en cuestión, hace suponer que el buen rendimiento del mismo tiene un límite superior, por lo que muy bien puede tratarse de una función de crecimiento, tipo Verhulst, cuando las "reservas" de que se dispone son limitadas. La búsqueda de una cota superior sitúa a ésta en torno a las 1380 altas anuales, a menos que ulteriores resultados acusasen una cifra mayor. Esta acotación es importante ya que nos va a permitir efectuar cálculos con *logits* e incluso abordar la regresión logística.

Si supusiéramos que la línea obtenida es una recta, incurriríamos en el error de creer que el aumento del número anual de altas es ilimitado, o sea que tiende a infinito, cosa totalmente contraria al sentido común más elemental. Una cosa es que esta evolución no sea lineal y otra muy diferente que, tratando el modelo como lineal, obtengamos buenos resultados, como así parece ser en este caso. El escaso número de observaciones, once, favorece el hallazgo de altos valores del coeficiente de correlación.

A continuación vamos a realizar un tratamiento de los datos siguiendo tres procedimientos distintos: regresión lineal, regresión logística linealizada (mediante *logits*) y regresión logística no lineal. La comparación de los resultados nos orientará sobre el acierto de nuestra suposición inicial o nos inclinará a rechazarla.

Regresión lineal

El modelo en este caso es el propio de la forma simple de regresión lineal con una sola variable independiente. Si el error medio se estima en cero, la ecuación es la ya conocida de todos:

$$y = b_0 + b_1 x$$

siendo y el número de altas esperado y x el número del año correspondiente. Se obtienen de esta manera los siguientes valores:

r = 0.95 (con p = 0)
b_0 = 575.255
b_1 = 82.7
Aquí, como es lógico, no hay asíntota superior.
Suma de cuadrados de residuales = 80498.84
Prueba "ji-cuadrado" = 74.07, con g.l.=10 (p=0).

Esta última se ha efectuado entre la distribución teórica hallada y la experimental realmente obtenida.

Regresión logística "linealizada"

Realizando la trasformación *logit* y haciendo uso de los logaritmos naturales de los valores obtenidos, según el procedimiento conocido, el modelo sería:

$$y = \frac{K}{1 + \exp\{-(b_0 + b_1 x\}}$$

donde K es la cota de 1380 altas anuales, y el número de altas esperado y x el número del año correspondiente. Obtenemos así los valores siguientes:

r = 0.88 (p = 0.0004)

b_0 = –1.228

b_1 = 0.5443

Puede tomarse como valor de la asíntota superior, K = 1380.

Suma de cuadrados de residuales = 55896.13

Prueba "ji-cuadrado" = 82.38, con g.l.=10 (p=0).

Regresión no lineal

El modelo matemático es el mismo que en el caso anterior, pero el procedimiento ya no es lineal, efectuándose el cálculo por medio de ponderaciones sucesivas o mediante el método de máxima verosimilitud, en ambos casos mediante programas de ordenador. Ahora se utiliza la función logística, si bien el tipo de regresión es el llamado "no lineal". Los valores obtenidos son los siguientes:

b_0 = - 0.843

b_1 = 0.375

La asíntota superior es ahora K = 1432.657

Suma de cuadrados de residuales = 26663

Prueba "ji-cuadrado" = 29, con g.l.=10 (p=0.0012).

Breve discusión de los resultados

Los mejores resultados conseguidos en el tercer procedimiento abogan en favor de nuestra suposición inicial, siendo la regresión logística en su forma "clásica" el método de elección para el tratamiento de estos datos.

El método de regresión lineal, si bien proporciona resultados aparentemente satisfactorios, está evidentemente en manifiesta desventaja en relación a los procedimientos de regresión logística, además de que no es conforme al "sentido común".

De los dos procedimientos logísticos, el que linealiza la regresión y resuelve sencillamente el sistema de ecuaciones formado, se aleja más de los datos que el método "clásico" a base de iteraciones. Sabido es que en una ecuación, al introducir exponentes se obtienen soluciones extrañas, no siendo las mejores en este caso que estamos tratando.

Estos hechos nos permiten afirmar que:

1) El solo análisis exploratorio de los datos puede ser insuficiente a la hora de determinar el procedimiento estadístico a seguir en determinadas circunstancias.
2) El estudio de los residuales juega a veces un papel importante en este sentido, como hemos tenido ocasión de comprobar.

3) Los conocimientos del investigador y el correcto uso de los mismos son una de las mejores herramientas a la hora de elegir un procedimiento estadístico adecuado a los condicionantes de la situación que en cada caso se presenta.

A modo de conclusión

En la institución médica en muchas ocasiones los resultados están mediatizados por los conocimientos matemáticos de los profesionales en Ciencias de la Salud. Hemos mostrado como la concepción lineal imperante dificulta la interpretación de un hecho (el número de altas) que tiene implicaciones serías sobre la puesta en marcha de planes de organización de centros médicos. Es necesario un estudio sobre cómo esta concepción puede influir en las previsiones y tomas de decisión en la necesidad de recursos materiales y humanos.

Reconocimiento

Este trabajo se enmarca en el proyecto: SEJ2007-60110/EDUC. MCYT-FEDER

Referencias

Artículos en revista

Fujimura, N. (2001). Facilitating children's proportional reasoning: A model of reasoning processes and effects of intervention on strategy change. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 589–603.

Lacasta, E; Madoz, E. G.; Wilhelmi, M. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *INDIVISA, boletín de estudios e investigación, Monografía IV*, pp. 79–90.

Sophian, C.; Wood, A. (1997). Proportional reasoning in young children: The parts and the whole of it. *Journal of Educational Psychology*, 89(2), 309–317.

Spinillo, A. G.; Bryant, P. E. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical cognition* 5 (2), 181–197.

Van Dooren, W.; De Bock, D.; Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *INDIVISA, boletín de estudios e investigación, Monografía IV*, pp. 115–135.

Libros

Ánderiz, M. (2005). *Didáctica de la estadística a profesionales de Ciencias de la Salud*, Tesis Doctoral. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles: Hatier.

Peres, J. (1988). Recherches piagetiennes sur la construction des structures numériques. IREM, Universidad de Burdeos I.

Artículos en actas

Lacasta, E.; Madoz, E.G.; Wilhelmi, M.R. (2007) Propuesta de ingeniería para la introducción de la función afín en la Educación Secundaria Obligatoria. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. Huesca*, pp. 247-261.

DIMENSIÓN NORMATIVA EN DIDÁCTICA DESDE UN ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICAS[1]

Juan D. Godino
Universidad de Granada, España
Vicenç Font
Universidad de Barcelona, España
Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra, España
Carlos de Castro
Universidad Complutense de Madrid, España

Resumen

Las nociones de contrato didáctico, norma social y sociomatemática son claves en distintas teorías didácticas. En este trabajo, después de hacer una síntesis de los variados modos de entender las normas en didáctica de las matemáticas, presentamos una perspectiva integradora desde un enfoque ontosemiótico, que categoriza las normas según la faceta de los procesos de estudio a la que se refieren: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. Asimismo, mostramos cómo la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica de un proceso de estudio se integran junto a las normas incorporando una racionalidad axiológica en el análisis didáctico.

Abstract

The concepts of didactical contract, social norms and socio-mathematical norms are very relevant in mathematics education. In this article, we present a synthesis of various perspectives of norms in mathematics education as well as an onto-semiotic approach to these notions in order to include them as part of the "normative dimension" of teaching and learning processes. Using this approach we categorize the norms according to the facet refer: epistemic, cognitive, interactional, meditational, affective and ecological. Also, we apply the didactical suitability criteria to provide an axiological rationality to the didactical analysis.

[1] Una versión preliminar fue presentada en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 21), Maracaibo (Venezuela), 22–26 julio 2007.

Godino, J. D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. y De Castro, C. (2007). Dimensión normativa en didáctica desde un enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemáticas. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 143-150.

Introducción

La educación, como cualquier actividad social, es una actividad regulada, en algunos aspectos de manera explícita y en otros implícitamente. Desde el nivel más general de las directrices curriculares (decretos oficiales, leyes orgánicas, etc.) hasta los comportamientos de cortesía y respeto mutuo entre profesor y alumnos, los procesos de enseñanza y aprendizaje están regulados por normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones,... Todos estos elementos reguladores conforman lo que en este trabajo denominamos "dimensión normativa de los procesos de estudio".

Una empresa prioritaria debe ser el estudio de esta "dimensión normativa" para, por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario), para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de matemáticas.

Las normas han sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas por autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), introduciendo nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996). Asimismo, la noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau en diversos trabajos constituyendo una pieza clave en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1988, 1997). En ambos casos, se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones, generalmente implícitas, que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos.

Tanto el "contrato interaccionista" como el "situacionista" constituyen visiones parciales del complejo sistema de normas sobre las cuales se apoyan y restringen la educación en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular.

Nos parece necesario abordar el estudio sistemático y global de las normas. En este trabajo, vamos a iniciar este estudio global de las normas según el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Contreras y Font, 2006).

Presupuestos de partida

La perspectiva global sobre la *dimensión normativa* de los procesos de estudio de las matemáticas en Didáctica de las Matemáticas, que desarrollamos en este trabajo, se basa en los siguientes supuestos:

1. No es posible describir un proceso de instrucción sin comprender las normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje en un contexto institucional determinado.
2. La Didáctica de la Matemática no debería limitarse a la mera descripción que lo deja todo como estaba, debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los sistemas didácticos; necesita pues criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora.
3. Por criterio de idoneidad se debe entender unas reglas de corrección que establecen cómo debería realizarse un proceso de instrucción. Estas reglas de corrección emanan del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando éste está orientado

a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor"[2]. De hecho, la asunción de unos criterios de idoneidad didáctica supone, implícitamente, una propuesta de principios para la Didáctica de las Matemáticas.

La aplicación concreta de estas reglas de corrección es "situada". Es decir, la aplicación, priorización, relegación, etc., de dichas reglas depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de instrucción y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que las debe tener en cuenta. Se trata de una guía para la mejora de los procesos de instrucción, no de un ideal que produzca frustración en el profesor al no poderlo alcanzar.

Contratos en educación matemática

La sociedad organiza la escuela con el fin, entre otros, de formar o educar a sus miembros (ciudadanos) para hacer de ellos miembros activos, responsables, competentes en la solución de los problemas actuales o futuros que se presenten a la sociedad. Hay pues una primera y básica regla del contrato educativo: la escuela debe educar para la ciudadanía y el desempeño profesional. Pero la escuela es un ente abstracto que se personaliza en los sujetos (profesores, estudiantes, directores, administradores, etc.). La obligación de educar se concreta en la obligación de enseñar por parte de los profesores y de aprender para los estudiantes; asimismo, la sociedad en su conjunto tiene la obligación de proporcionar los medios necesarios y los padres la obligación de contribuir en algunas esferas específicas.

La noción genérica de "contrato", heredada del mundo jurídico, busca especificar esas reglas. En las relaciones pedagógicas, y didácticas en particular, que se establecen en las instituciones escolares, intervienen diversos agentes y facetas. Esto hace que no todas las reglas, que determinan dichas relaciones, sean de la misma naturaleza. Por ello se habla de contratos: *social, educativo, institucional, pedagógico* o *didáctico*, según sea su ámbito de aplicación (y agentes intervinientes): la sociedad, el conjunto de personas y de grupos interesados en la creación y comunicación de saberes de un cierto campo, la institución, la clase, o la clase de matemáticas.

Las reglas en la clase de matemáticas no son únicamente las del contrato didáctico, sino todas las que constituyen los cinco contratos mencionados. Creemos conveniente hacer un esfuerzo por integrar en una sola noción teórica los aspectos relativos a los diferentes contratos, que representarán aspectos o dimensiones de una misma realidad.

Facetas de la dimensión normativa de los procesos de estudio

En las secciones siguientes, describiremos nuestra perspectiva de la dimensión normativa según el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Según este enfoque, la *dimensión normativa* estará constituida por el sistema de normas que regulan el funcionamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en un contexto institucional determinado. Estas normas, explícitas o implícitas, pueden ser establecidas por agentes externos al ámbito escolar, o por el profesor, y afectan a las diversas dimensiones del proceso de estudio. Pueden condicionar decisivamente este proceso, despojándolo de algunas de sus características esenciales.

El EOS propone tener en cuenta las siguientes dimensiones para analizar los procesos de instrucción matemática: epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica (Godino, 2002).

Cada una de estas dimensiones puede ser analizada desde la perspectiva de las normas

[2] Se trata de una orientación inspirada en los desarrollos y adaptaciones de la idea de la teoría consensual de la verdad de Peirce (Apel, 1985; Habermas, 1987).

(matemáticas, socio-matemáticas y sociales) aportando criterios para la clasificación de las mismas. A continuación describimos algunas características de las normas ligadas a cada una de las facetas o dimensiones de los procesos de estudio matemáticos.

Normas epistémicas

En la clase de matemáticas se establece un compromiso básico: enseñar y aprender matemáticas. Llamaremos *faceta epistémica de la dimensión normativa* (o *normas epistémicas*, para abreviar) al conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una determinada institución. Las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. Dicho en la terminología del EOS, las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan.

En el EOS se considera que es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas… 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas cuyo análisis nos informa de la "anatomía de la actividad matemática". Si además de la "estructura" interesa analizar su "funcionamiento" con alumnos son necesarias otras herramientas, en especial los procesos asociados.

Normas cognitivas

En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*. De acuerdo con este punto de vista, consideramos que las normas cognitivas regulan el ámbito de lo personal (en contraposición a lo institucional) dentro del proceso de estudio de las matemáticas. Esta faceta normativa, entre otros aspectos, establece que el alumno debe aprender y que la institución debe asegurarse de, (1) que el alumno tiene los conocimientos previos necesarios, (2) que lo que se le va a enseñar está dentro de la zona de desarrollo próximo del alumno y (3) que la institución se adaptará a la diversidad del alumnado.

Normas interactivas

Los modos de interacción entre docente y discentes, para el logro de los objetivos de enseñanza y aprendizaje, están sujetos a reglas, hábitos, tradiciones, compromisos y convenios. La faceta interaccional de la dimensión normativa es el sistema de normas que regulan los modos de interacción entre las personas que intervienen en los procesos de estudio matemático.

El objetivo central de las interacciones didácticas es conseguir el aprendizaje (apropiación de significados) de los alumnos de la manera más autónoma posible, por medio de la participación en una comunidad de prácticas que permite identificar los conflictos semióticos[3]

[3] Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

y pone los medios adecuados para resolverlos. Los formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes muestran su relación con los objetos matemáticos y, por lo tanto, el profesor tiene indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada.

Normas mediacionales

La enseñanza y el aprendizaje se apoya en el uso de medios técnicos (libros, ordenadores,...) y se distribuye en el tiempo, que es también un recurso. El uso de ambos tipos de medios o recursos está gobernado por reglas que condicionan los procesos de estudio. Este sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales es lo que designamos como faceta mediacional de la dimensión normativa.

Normas afectivas

Otra de las dimensiones a tener en cuenta en los procesos de estudio matemático se refiere a la afectividad, la motivación, las emociones. Se dice que el alumno debe estar motivado, tener una actitud positiva, sin fobia hacia las matemáticas, lo cual parece obvio. La mirada se dirige con frecuencia de manera preferente hacia el profesor, de quien se dice "debe" motivar a los estudiantes; debe elegir unos contenidos "atractivos" y crear un "clima" afectivo en la clase propicio para el aprendizaje. Estas serían cláusulas genéricas de la faceta afectiva de la dimensión normativa, que no indican el tipo de acciones específicas que pueden estar al alcance del profesor en el caso de las matemáticas.

La principal motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas parece estar en la elección de los tipos de situaciones–problema matemáticas, las tareas, actividades concretas que propone a los alumnos, las cuales deben reunir unas características específicas. Además el "modelo instruccional" que implementa en la clase —tipos de configuraciones y trayectorias didácticas que organiza y gestiona— condiciona las oportunidades de aprendizaje autónomo de los alumnos, y por tanto, en cierta medida, su autoestima y compromiso con el estudio.

Una regla será pues que el profesor debe buscar o inventar situaciones matemáticas ricas, que pertenezcan al campo de intereses a corto y medio plazo de los estudiantes.

Normas ecológicas

En la perspectiva global que hemos adoptado en este trabajo sobre las normas que regulan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no podemos prescindir de aquellas que relacionan la escuela con la sociedad a cuyo servicio se constituye. Tener en cuenta la faceta ecológica de la dimensión normativa implica buscar información sobre el entorno social, político y económico donde se ubica la escuela, ya que éste influye sobre el tipo de prácticas matemáticas que se van a realizar en la clase de matemáticas.

La faceta normativa - ecológica tiene como dos objetivos principales: uno, educar a ciudadanos garantizando la asunción de los valores de una sociedad democrática, garantizando los derechos de todos y fomentando los deberes cívicos; otro, conseguir una formación inicial de profesionales competentes para su futuro ejercicio profesional.

Valoración del efecto o eficacia de las normas

En las secciones anteriores hemos presentado un panorama de la tipología de normas que regulan los procesos de estudio matemático, usando las nociones teóricas del EOS. Ahora parece necesario abordar el estudio de la dimensión axiológica o valorativa de las normas,

esto es, de los principios o criterios de idoneidad, pertinencia y eficacia de las normas para el logro de los fines de la educación matemática. Tales criterios de valoración se aplicarán a las normas que regulan los procesos de estudio matemático, constituyendo por tanto unos principios didáctico – matemáticos aplicables tanto al diseño, a la implementación y a la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La introducción en el marco teórico del EOS de la noción de significado de referencia[4] y la adopción de postulados socio-constructivistas para el aprendizaje[5], permiten formular criterios de idoneidad/ adecuación para las distintas dimensiones implicadas en un proceso de estudio matemático. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007) se define:

- *Idoneidad epistémica*, grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad interaccional*, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción; el principal indicador empírico de esta idoneidad puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos. Debemos resaltar que estos criterios orientan o "guían" la práctica educativa, pero no *aseguran* el logro de su idoneidad. La concepción sistémica de la Didáctica de las Matemáticas permite afirmar que un cambio en uno de los componentes del sistema didáctico (profesor, alumnos, significado) determina un desequilibrio de dicho sistema y un equilibrio posterior. Este equilibrio último debe ser valorado globalmente y no únicamente según el componente sobre el cual se ha incidido.

Los criterios de idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemático, junto con los componentes e indicadores empíricos que los desarrollan, constituyen una propuesta que incluye y hace operativos a los "Principios" del NCTM (2000). En la tabla 1 incluimos el enunciado de los "Principios" y los criterios con los cuales se relacionan. Esta tabla se completa con la "pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007), donde se aporta un sistema de componentes e indicadores empíricos para cada una de las dimensiones a tener en cuenta en el análisis didáctico de los procesos de estudio matemáticos.

[4] El significado de referencia tiene un carácter relativo al contexto institucional y a las finalidades educativas previamente establecidas.

[5] El aprendizaje como apropiación de significados, participación en comunidades de prácticas y acoplamiento mutuo entre los significados institucionales y personales.

Tabla 1: Principios de las matemáticas escolares y criterios de idoneidad

PRINCIPIOS	CRITERIOS
Equidad. La educación matemática de calidad ha de basarse en la equidad (altas expectativas y apoyo a todos los estudiantes, según sus características.	Idoneidad cognitiva, afectiva y ecológica
Currículo. Un currículo es más que una colección de actividades; debe ser: coherente, centrado en matemáticas importantes y bien articulado a lo largo de los niveles.	Idoneidad epistémica y ecológica
Enseñanza. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere que los estudiantes sepan qué conocen y qué necesitan aprender	Idoneidad cognitiva e interaccional
Aprendizaje. Los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.	Idoneidad cognitiva
Evaluación. La evaluación debe apoyar el aprendizaje y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.	Idoneidad cognitiva, interaccional
Tecnología. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.	Idoneidad mediacional, epistémica y cognitiva

Concluimos finalmente que los criterios de idoneidad, junto con la pauta que los desarrolla (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007), son herramientas útiles para guiar el análisis didáctico en las fases de diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática. En concreto, son útiles para valorar las diversas facetas que intervienen en la dimensión normativa de los procesos de estudio efectivamente implementados, y por tanto orientar su mejora.

Reflexiones finales

Las normas que regulan los procesos de estudio matemáticos se pueden categorizar desde otros puntos de vistas complementarios del que aquí hemos desarrollado (las facetas o dimensiones de los procesos de estudio introducidos por el EOS hasta ahora). En particular, se pueden clasificar según los *momentos* o fases de desarrollo de dichos procesos (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), el *grado de coerción*/ rigidez de las normas (aquellas que se presentan como verdades necesarias, p. e., "2 + 2 = 4"; convenciones de cumplimiento obligatorio, p. e., la prioridad de operaciones; convenios basados en hábitos culturales, p.e., los que rigen algunas interacciones en el aula; etc.), el *origen* de las normas (la administración educativa, la sociedad, la escuela, el aula, la disciplina). El análisis de estas tipologías de normas deberá ser abordado en otros trabajos.

La principal implicación de este trabajo es la toma de conciencia, por parte de investigadores y docentes, de la naturaleza normativa de los objetos matemáticos y didácticos y del conglomerado de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio de las matemáticas.

La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

1. Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas, y su tipología, que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.

2. Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

Referencias

Artículos en revistas

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *RDM* 9(3), 309-336.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *RDM* 22(2/3): 237-284

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2): 127-135.

Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221–252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *RDM* 26 (1), 39-88.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Libros

Apel, K.O. (1985). *Transformación de la filosofía*. Madrid: Taurus

Blumer, H. (1969). El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques. Dordrecht: Kluwer.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Habermas, J. (1987). *Teoría de la Acción Comunicativa I. Racionalidad de acción y racionalización social*. Madrid: Taurus.

NCTM (2000). *Principios y estándares en educación matemática*. Granada: Thales.

SIGNIFICADOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS Y ESCOLARES DE LA INTEGRAL DEFINIDA. RESTRICCIONES PLANTEADAS POR LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Lourdes Ordóñez Cañada
Profesora IES «Albariza». Mengíbar (Jaén).
Ángel Contreras de la Fuente
Universidad de Jaén

Resumen

El objeto integral definida es uno de los conceptos matemáticos más controvertidos e interesantes de las matemáticas de Bachillerato. Desde el marco conceptual del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2002, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), en este trabajo se trata de profundizar sobre el significado institucional histórico-epistemológico global de la integral definida (Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino, 2006) con el objetivo de obtener los significados institucionales escolares. Por último, dentro de este esquema teórico, se analizan las restricciones institucionales que representa la enseñanza del concepto en el nivel de Bachillerato mediante un estudio de las pruebas de acceso a la universidad.

Abstract

The definite integral is one of the more controversial and interesting mathematical concepts on Mathematics in the Bachillerato. In this paper we try to make a profound study of the total historical-epistemologic meaning of definite integral (Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino, 2006) from the ontosemiotic frame of the mathematical cognition (Godino, 2002, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005) The aim is to obtain the school institutional meanings. Finally, inside this theorical frame, we analyze the institutional restriction which represents the teaching of the concept in Bachillerato, through a study of the access to University tests.

Ordóñez, L. y Contreras, Á. (2007*).* Significados histórico-epistemológicos y escolares de la integral definida. Restricciones planteadas por las pruebas de acceso a la Universidad. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 151-172.

Introducción

En los niveles elementales de la enseñanza-aprendizaje del Cálculo Integral se observa una tendencia a un desarrollo muy sesgado hacia el cálculo algorítmico ligado a la operación inversa de la derivación. Como se indica en Contreras y Ordóñez (2005): "Esto supone que el estudiante llega a conocer las diversas técnicas algorítmicas, pero a costa de permanecer sin una contextualización adecuada el proceso de integración." (p. 1).

Este es un problema didáctico que se extiende a los currículos de diversos países. Así, Wenzelburger (1994) señala: "El Cálculo Integral se introduce normalmente como el método "inverso" del Cálculo Diferencial, lo cual se puede justificar y comprobar desde el punto de vista matemático. Sin embargo, para muchos alumnos permanece el concepto abstracto de un Cálculo Diferencial "inverso" sin significado, ya que no pueden relacionar fácilmente la derivación e integración como tales procesos inversos." (p. 7)

A nivel de la Comunidad Autónoma de Andalucía, diversos trabajos, Ordóñez y Contreras (2001) y Contreras y otros (2003), han mostrado que los estudiantes tienen dificultades para lograr la emergencia del objeto integral definida. Además, en Contreras y Ordóñez 2006 se ha mostrado la complejidad ontosemiótica de dicho objeto.

En este trabajo, se comienza exponiendo el marco teórico en el que se basan los resultados obtenidos en el estudio. A continuación, se describe la problemática de las pruebas de acceso a la universidad. Posteriormente, se identifican las configuraciones epistémicas del objeto d integral definida tanto histórico-epistemológicas como las escolares. Por último, se aplica el modelo teórico obtenido al estudio de las restricciones institucionales de las pruebas de acceso respecto a la integral definida.

Marco teórico

Este trabajo se basa en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002 y Contreras y cols., 2005) y se utiliza una dimensión subjetiva del significado, el significado personal, como el sistema de prácticas personales que un sujeto pone en funcionamiento para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto matemático integral definida. También se empleará el término significado institucional, como el sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas del que emerge el objeto matemático integral definida.

Para poder hacer operativas las definiciones anteriores, es necesario disponer de ciertas entidades primarias de análisis de la actividad matemática, las cuales pueden agruparse para formar entidades más complejas. Estas entidades primarias son las siguientes (Godino, 2002):

(1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos:

(2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios,...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

(3) Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

(4) Conceptos-regla, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función,...)

(5) Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

(6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones epistémicas" (si se refieren a significados institucionales) definidas como las redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos (Godino, Contreras y Font, 2006).

Por último, se define el **conflicto semiótico** como: "Toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa" (Godino, 2002, p. 258).

Pruebas de acceso a la Universidad

La integral definida en el Bachillerato

La enseñanza del Cálculo Infinitesimal ha sido siempre un tema importante en la formación de los alumnos preuniversitarios, el cual, como la enseñanza en general, ha sufrido diversas modificaciones. La Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo, LOGSE, constituye el marco general que regula el bachillerato en España y en ella se establece la organización, las diferentes modalidades y se explicitan las materias comunes, entre las que no se encuentran las matemáticas. Esta ley orgánica señala como objetivo básico de este nivel educativo facultar a los alumnos para acceder a la formación profesional y a los estudios universitarios. Para ello, las materias propias de cada modalidad, como es el caso de las Matemáticas II en donde se sitúa nuestro objeto de investigación, deben contribuir a dominar los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y las habilidades básicas características de dicha modalidad, estableciendo, además, la relación entre los aspectos teóricos y sus aplicaciones prácticas en la sociedad. Es decir, entre los objetivos básicos de la formación de Bachillerato está el que los contenidos que se impartan expresen sus relaciones con los aspectos tecnológicos y sus aplicaciones prácticas y no sean conocimientos meramente teóricos.

Asimismo, otro objetivo básico lo marca el hecho de que son estudios preuniversitarios y, por ello, no pueden ignorar su carácter preparatorio para este nivel educativo, teniendo en cuenta las distintas carreras a las que darán acceso.

Para el desarrollo de esta Ley a nivel estatal se aprobaron el Real Decreto 1700/1991, de 29 de noviembre, y el Real Decreto 1178/1992, de 2 de octubre. El primero, determina la estructura del bachillerato, configura las diferentes modalidades de que consta y fija las materias propias de cada una de ellas. En el segundo, se establecieron los aspectos básicos del currículo que constituye las enseñanzas mínimas del bachillerato, con el fin de garantizar una formación común de todos los alumnos y la validez de los títulos correspondientes a nivel nacional. Tras un proceso de implantación anticipada por una serie de centros, con los datos recogidos y una serie de estudios realizados ambos decretos fueron modificados por el Real Decreto 3474/2000, de 29 de diciembre. En él se fija Matemáticas I y II como materias propias de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de la modalidad de Tecnología y sus contenidos mínimos y criterios de evaluación.

En este Real Decreto se marca como objetivos generales de Matemáticas I y II: *comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general y aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolas en la interpretación de las ciencias y en las actividades cotidianas*. Es decir, se vuelve a hacer hincapié tanto en su carácter instrumental para la interpretación de las ciencias, como en el propedéutico por lo que sus contenidos deberán estar en consonancia con los de los estudios específicos de grado superior a los que se dirigen.

En lo que respecta a estos contenidos mínimos, observamos que se ha eliminado el concepto de integral de matemáticas I donde inicialmente se hacía una introducción al concepto, encontrándose únicamente en matemáticas II. Para esta materia dichos contenidos mínimos son: *Integrales definidas. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas*. En lo que respecta a los criterios de evaluación: *Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida de áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables*. De esta manera podemos observar que en los contenidos mínimos el Cálculo integral están exclusivamente ligados a la aplicación de la regla de Barrow y al cálculo de áreas de funciones que se puedan representar.

Establecer el currículo de cada nivel, etapa y modalidad teniendo en cuenta las enseñanzas mínimas fijadas a nivel nacional corresponde a las administraciones educativas competentes, como es el caso de la Comunidad Autónoma de Andalucía. De esta manera el Decreto 208/2002, de 23 de julio (BOJA 20 de agosto de 2002), por el que se modifica el Decreto 126/1994, de 7 de junio, establece las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. En él volvemos a observar que el Cálculo Integral desaparece del primer curso pasando a tratarse por completo en segundo curso. Los contenidos propuestos son:

• *El problema del área. Cálculo aproximado: método de las sumas.*

• *La integral definida de una función en un intervalo cerrado: concepto, notación y obtención de algunas propiedades sencillas.*

• *Relación entre los procesos de integración y derivación: el teorema fundamental del cálculo. La regla de Barrow.*

• *Métodos de cálculo de primitivas. Integración inmediata, por descomposición, cambio de variables y por partes (hasta dos niveles). Integración de funciones racionales sencillas con raíces reales en el denominador.*

Resaltamos los siguientes **criterios de evaluación**:

2. Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos, así como a la resolución de problemas de optimización y medida.

Este criterio pretende evaluar la capacidad del alumnado para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio analítico de las funciones. (…). El cálculo de integrales se limitará a los métodos generales de integración, y en todo caso, con cambios de variables simples.

7. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

Se pretende evaluar la madurez del alumnado para enfrentarse con situaciones nuevas utilizando la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas.

Si además consideramos los **objetivos generales**:

1. Comprender los conceptos, procedimientos, estrategias y métodos matemáticos que le permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de Ciencias o Técnicos y adquirir una formación científica de carácter general.

2. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en actividades cotidianas.

Observamos que se pretende que los alumnos sean capaces de aplicar los nuevos conceptos en situaciones de la vida cotidiana y le sirva como instrumento de interpretación de la ciencia, tecnología y la vida cotidiana, en consonancia con los objetivos básicos del

Bachillerato. Sin embargo, los contenidos están totalmente centrados en la interpretación de la integral definida como área o como inversa de la derivada sin hacer ninguna referencia a su interpretación como *efecto de cambio* tal y como lo propone Wenzelburger (1993). Para esta autora el Cálculo integral se suele introducir como proceso inverso de la derivación solamente, con lo que carece de significación. Según su propuesta *la idea fundamental del Cálculo Integral es la determinación de resultados o efectos de cambios o procesos. Mientras que en el Cálculo Diferencial interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo integral para determinar los resultados totales de procesos de cambio* (p.110-111). Esta idea fundamental está presente en la vida cotidiana de una u otra manera en muchos procesos y sólo será necesario hacerlo consciente mediante una buena didáctica, que además dotará de significación al concepto objeto de estudio. Consideramos que de esta manera adquiere todo su sentido el Cálculo Integral como inversa del Cálculo Diferencial y no sólo como mera operación algebraica" (Ordóñez y otros, 2002 p. 6; X Ceam-2002)

La problemática de las pruebas de acceso a la Universidad

La Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), establece que para acceder a los estudios universitarios, tras la obtención del título de Bachiller, será necesaria la superación de una prueba cuya finalidad será, junto a las calificaciones obtenidas en el Bachillerato, valorar objetivamente, la madurez académica de los alumnos y los conocimientos adquiridos en él. Dicha prueba viene regulada por el Real Decreto 1640/1999, de 22 de octubre (BOE 17/10/99) modificado y completado por el R. Decreto 990/2000, de 2 de junio (BOE 3/6/00), y modificado por el Real Decreto 1025/2002, de 4 de octubre (BOE 22/10/02)

Se establece que la prueba de acceso deberá basarse en los objetivos generales del Bachillerato y en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación de las materias comunes y de modalidad, establecidas en los Reales Decretos, de enseñanzas mínimas. Además, como la Comunidad Autónoma de Andalucía es competente en materia de regulación y administración de la enseñanza esta prueba deberá basarse también en los Decretos que establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en dicha Comunidad.

En lo que respecta a Andalucía, la Ley 1/1992 de 21 de mayo, de Coordinación del Sistema Universitario dispone que todas la Universidades Andaluzas, a los únicos efectos de ingreso en los Centros Universitarios, se consideraran como un distrito único. Posteriormente, la Orden de 8 de enero de 1996 crea la Comisión Coordinadora Interuniversitaria para la organización y seguimiento de las Pruebas de Acceso a las Universidades Andaluzas. Esta estará compuesta por un Rector de la Universidades Andaluzas que actúa como presidente, vocales: un responsable por cada Universidad y un funcionario docente, perteneciente al Servicio de Inspección Educativa o al Cuerpo de Profesores de Secundaria, y el secretario de Distrito Único. Además, en cada Universidad se creará una Comisión Universitaria delegada de la Interuniversitaria formada por el Rector de la Universidad, los dos vocales de la Comisión Coordinadora Interuniversitaria y cuatro miembros más, dos designados por la Universidad y dos nombrados por la Conserjería de Educación y Ciencia entre funcionarios docentes, perteneciente uno al Servicio de Inspección Educativa, y otro al Cuerpo de Profesores de Secundaria con cargo de Director.

La Resolución de 21 de febrero de 1996, de las Direcciones Generales de Universidades e Investigación y de Planificación del Sistema Educativo y Formación Profesional, por la que se dictan instrucciones para la organización de las pruebas de acceso a la Universidad, establece que la Comisión Interuniversitaria encargará la elaboración de las pruebas a especialistas de la

Universidad, los Servicios de Inspección de Educación o los Institutos de Educación Secundaria. Además, se deberán adjuntar a éstas los criterios de corrección.

Por otra parte, las Comisiones Universitarias serán las encargadas de informar a los Centros. Para ello se constituye una ponencia por cada una de las materias objeto de examen formadas por un profesor universitario y un especialista de la materia entre un funcionario perteneciente al Servicio de la Inspección Educativa o al Cuerpo de Profesores de Secundaria. Las ponencias informarán a los centros, en reuniones celebradas al menos una vez al trimestre, sobre la estructura y organización de las pruebas y facilitarán modelos de examen de las diferentes materias.

Centrándonos en la integral definida, la Ponencia de Matemáticas II propone un Documento de Orientación para las Pruebas de Acceso a la Universidad cada curso cuya finalidad es servir de orientación para la elaboración de la Prueba de Acceso a la Universidad de la materia Matemáticas II, como ya se ha explicado anteriormente.

Esta relación se adapta al currículum de la asignatura y su objetivo es matizar y especificar con cierto detalle algunos aspectos de los apartados del currículum. En lo que respecta a la integral definida en los últimos 5 años nos encontramos con:

- ➔ *Conocer la técnica de integración por cambio de variable. [2]* [1].
- ➔ *Conocer las propiedades de linealidad de la integral definida con respecto tanto al integrando como al intervalo de integración. [2].*
- ➔ *Conocer las propiedades de monotonía de la integral definida con respecto al integrando. [2].*
- ➔ *Conocer la interpretación geométrica de la integral definida de una función (el área como límite de sumas superiores e inferiores). [2,7].*
- ➔ *Conocer la noción de función integral (o función área) y saber el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow. [2,7].*
- ➔ *Saber calcular el área de recintos planos limitados por curvas. [2,7].*

Resaltamos que no hay prácticamente cambios respecto a los contenidos propuestos para el Bachillerato con lo que lo apuntado allí vuelve a ser válido en este punto. Sin embargo, nos parece que el penúltimo punto merece una atención especial pues en su redacción *Conocer la noción de función integral (o función área)* potencia la confusión entre integral y área que trataremos en este trabajo y que nos parece está en la base de algunos errores de los alumnos como expondremos más adelante.

Configuraciones epistémicas de la integral definida

Configuraciones epistémicas detectadas en el desarrollo epistemológico de la integral definida

Para el estudio de los distintos significados que se relacionan a continuación se han utilizado las referencias bibliográficas siguientes: Bessot et als. 1999; Guichard 2000; Dahan-Dalmedico y Peiffer 1986; González 1992; Mnemosyne n^{os} 1, 2, 6, 13; Gaud et als 1998; Reproduction de textes anciens nouvelles série 1 y 3

Significado institucional de la integral definida en la cultura griega

Los griegos, principalmente al estudiar la composición de los entes geométricos, mostraron gran intuición respecto a las nociones del continuo, del infinito matemático y del

[1] Los números entre corchetes indican los criterios de evaluación, según el Decreto 208/2002 de 23 de Julio de 2002 (B.O.J.A. de 20 de Agosto de 2002) y han sido expuestos anteriormente.

límite. Sin embargo, tuvieron grandes dificultades para formular dichas nociones de modo explícito, por lo que intentaron eludirlos y/o camuflarlos en sus significados.

Inicialmente, los pitagóricos (585-400 a.C.) establecieron un paralelismo entre la Geometría y la Aritmética, considerando los números como puntos geométricos, y las figuras geométricas como conjunto de puntos. Con este significado de número, toda magnitud continua se identificaba con un número. Lógicamente, este intento de identificar los números enteros y las magnitudes continuas, de interpretar el continuo en términos de lo discreto, fracasó.

Se enfrentan entonces dos significados bien distintos sobre la ontología matemática: el significado continuista, que considera al número, al espacio, al tiempo y a la materia como divisibles infinitamente; y el significado atomista, que preconiza la existencia de elementos primarios indivisibles. Zenón, mediante sus aporías, muestra que ambas hipótesis conducen a un "callejón sin salida", esto es, a conflictos semióticos que deben ser resueltos modificando los significados institucionales del momento. Como consecuencia se separa definitivamente la Geometría de la Aritmética y se acentúa el "horror al infinito" que caracteriza la Matemática de esta época.

En este contexto surge Eudoxio de Cnido, introduciendo el concepto de "tan pequeño como se quiera". Además elimina la imposibilidad de expresar la razón entre dos cantidades inconmensurables definiendo la igualdad de razones (proporciones). Así, Eudoxio, con su teoría de las proporciones, intentó dotar de sentido a las magnitudes inconmensurables y, en cierto, modo admitir a los números irracionales en el campo de la matemática griega.

¿Qué significa, entonces, medir para los griegos? Los griegos incapaces de encontrar una unidad de medida común a las magnitudes inconmensurables, no miden las magnitudes geométricas sino que las comparan entre ellas calculando sus relaciones. Es decir, calcular el área de una superficie es un falso problema para los griegos, pero determinar la relación de las áreas a estudiar con otras conocidas es un problema susceptible de ser resuelto en el marco de sus matemáticas. El método de exhausción les permite comparar el área de una superficie como la de un segmento de parábola con el área de una superficie conocida de un cuadrado. En este contexto toman sentido las cuadraturas y cubaturas.

El mayor artífice de la matemática griega es Arquímedes que como griego que era emplea el método de exhausción, el cual utiliza como argumentación la doble reducción al absurdo, para sus demostraciones. Sin embargo este método sufre una evolución con Arquímedes ya que pasa de los procesos puramente geométricos a otros más numéricos, lo que continuaron los árabes en el siglo IX. Este tipo de doble razonamiento por reducción al absurdo evita de modo ingenioso cualquier consideración infinitesimal, aún cuando las acciones subyacentes constituyen una investigación infinitesimal.

En todos los casos tratados, los griegos demuestran que la diferencia de las áreas es tan pequeña como se quiera (en términos modernos que el área es el límite de las magnitudes que aparecen), pero repiten la misma forma de demostración en cada caso particular ignorando la analogía de todos estos problemas. No pudieron extraer ningún método general.

Significado institucional de la integral definida en la Edad Media

En la Edad Media hay una superación del "horror al infinito" de la época griega, por lo que la Escolástica de la baja Edad Media realiza con frecuencia especulaciones sobre el infinito (se estudian y utilizan por primera vez series infinitas). Sin embargo, el cambio más importante viene dado por el conjunto de situaciones objeto de estudio. Tomando como punto de partida la "Física" de Aristóteles y la "Estática" de Arquímedes, abordan el **estudio del**

cambio y el movimiento, que se convierte en el tópico de la especulación filosófica medieval, lo que supone un gran desarrollo de la Cinemática. Se consideran las Matemáticas como instrumento privilegiado del conocimiento de fenómenos naturales.

La filosofía escolástica se interesó ampliamente por los fenómenos naturales de intensidad medible, utilizando para ello el concepto de "forma". Se estudian principalmente las variaciones de las intensidades a través del tiempo, que es el prototipo del continuo. En esta línea Oresme (siglo XIV) realiza el mayor progreso teórico de la Edad Media al estudiar la variabilidad cuantitativa desde un punto de vista mucho más geométrico que sus contemporáneos. La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de las figuras geométricas.

Oresme estudia ampliamente lo que él llama la *latitud de las formas* o *intensidad de las cualidades*, una representación gráfica que le ayuda a explicar la variación. En ella que toma como *longitud* (abscisa) el tiempo y a cada punto le asigna un segmento, *latitud* (ordenada), cuya extensión es la intensidad o amplitud del fenómeno. En esta representación gráfica, la variación de un fenómeno a lo largo del tiempo viene representada por la figura total, es decir, el área y que llama "figura".

Oresme estudia diversas formas, principalmente asociadas a fenómenos de movimiento. En particular, al estudiar la *figura* de la velocidad respecto del tiempo en un movimiento uniformemente acelerado, asocia el área con la distancia recorrida aunque no da una justificación de este hecho.

Sin embargo Oresme no se interesa en el estudio analítico de la curva sino que centra sus estudios en la variación de las *formas* (curvas) y de las *figuras* (áreas), lo que hoy consideramos aspectos diferenciales e integrales, obteniendo diversos resultados de índole infinitesimal.

Por último, señalar que se estudian los métodos de Arquímedes, aunque se separan de éste y buscan métodos que mejoren el de exhausción, al que consideran demasiado pesado. Además se utiliza el infinito de forma intuitiva lo que facilitará el camino al desarrollo de las técnicas infinitesimales del siglo XVII. Podemos afirmar que las especulaciones escolásticas sobre el infinito, el infinitamente pequeño y la naturaleza del continuo revivieron el interés por el problema del infinito y preparan la aceptación de las consideraciones infinitesimales al siglo XVII.

Significado institucional de la integral definida en la etapa del uso explícito de los procesos infinitos

En la época del Renacimiento se produce una recuperación de la cultura clásica. Se traducen las principales obras de los clásicos, aunque enriqueciéndolas con la extensión de los resultados y métodos. En este sentido será fundamental la naciente Álgebra Simbólica. Por otra parte, en la matemática se impone un carácter eminentemente práctico e instrumental y, además, el progreso continuado de las ciencias y las artes, del momento, plantea nuevos problemas geométricos y mecánicos que no pueden ser resueltos por procedimientos antiguos como es el método de exhausción. Así mismo, es importante observar que el método de exhausción no es un método heurístico, esto es, es necesario conocer previamente el resultado que se quiere probar.

Por todo lo anterior, los matemáticos del momento necesitan desarrollar nuevas herramientas que permitan el avance de las Matemáticas. Se da un paso fundamental, un cambio de mentalidad, al romper con el rigor dejando paso a la intuición en pos de un método heurístico que permita resolver problemas (González, pp.256-257), aunque ello planteará

problemas de fundamentación que tardarán siglos en resolverse siendo la continuidad uno de los problemas más importantes.

Con Stevin y Valerio se libera al método de exhausción de la doble reducción al absurdo, pasando a calcular un área por la suma de una serie potencialmente infinita de términos. Los métodos de Fermat y Pascal perfeccionarán los métodos de sus predecesores. Progresivamente, los métodos de Arquímedes y en concreto el método de exhausción se va liberando de las trabas iniciales de la doble reducción al absurdo, lo que prepara su utilización como procedimiento infinito. Es en los trabajos de Grégorie de Saint Vicent (1584-1667) que se identifica explícitamente un área con la suma de una infinidad de elementos infinitesimales. "L'infini au carrefour de la philosophie et des mathematiques" pp.76 a 79.

Kepler (1571-1630), abandona los procedimientos clásicos y recurre a métodos más intuitivos salvando la barrera entre lo rectilíneo y lo curvilíneo, lo finito y lo infinito, lo discreto y lo continuo. Realiza encubiertamente el paso al límite identificando, por ejemplo, una curva con una suma de segmentos infinitamente pequeños. Hay que resaltar que si bien al operar descompone las superficies en una infinidad de elementos infinitesimales de la misma dimensión, a la vez emplea el lenguaje de los indivisibles. No distingue un área infinitesimal de una línea, ni un círculo de un polígono de una infinidad de lados.

Por su parte, Cavalieri (1598-1647) intenta mediante artificios geométricos evitar la rigidez del método de exhausción, consiguiendo, además, un método heurístico de rápido descubrimiento: los indivisibles. En esta línea, consideraría que las figuras eran engendradas por el movimiento de una línea. El objetivo de Cavalieri no es componer una superficie con líneas, él no toma posición sobre la composición del continuo. El de los indivisibles es solamente un método que le permite establecer la relación entre dos áreas cuyos indivisibles están en relación constante. Este principio será fructífero en la búsqueda de resultados. Sin embargo, planteó grandes problemas de fundamentación ya que contradice el principio de homogeneidad.

Roberval (1602-1675), contrariamente a Cavalieri, señala que una superficie está compuesta por superficies, de tal modo que la infinidad de líneas representa la infinidad de pequeñas superficies que componen la superficie total. Es decir, está tomando elementos infinitesimales del mismo orden. Los resultados que se obtenían no variaban de los obtenidos por el método de los indivisibles, pero la importancia deriva del hecho de introducir una cantidad arbitrariamente pequeña, es decir, un *infinitamente pequeño*.

Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667) concibe una infinidad de figuras rectilíneas que rellenan exhaustivamente la figura curvilínea dada, contrariamente a sus predecesores que aumentaban el número de lados de los polígonos inscritos o circunscritos hasta que la diferencia sea inferior a una cantidad dada. Es probablemente el primero en enunciar explícitamente que una serie infinita define una magnitud, un *término* (infinito actual). Es en los trabajos de Grégorie de Saint Vicent que se identifica explícitamente un área con la suma de una infinidad de elementos infinitesimales (Girad 2000, pp.76 a 79)

Significado institucional de la integral definida en la etapa de generalización de los métodos infinitesimales

Por otra parte, al disponer del recurso del álgebra Vieta inicia una cierta generalización de los problemas según la naturaleza de la integral subyacente. Vieta (1540-1603) emprende la recuperación del análisis geométrico de los griegos pero aplicándole la nueva Álgebra, en la creencia de que el carácter algorítmico de ésta podría mejorar la capacidad heurística de aquél y preparando así el camino hacia la Geometría Analítica que desarrollaron Fermat y Descartes. De hecho "*la gran visión que tuvieron Descartes y Fermat y fue la de apreciar que*

la aplicación del Álgebra como instrumento algorítmico por excelencia incrementaría aún más la capacidad heurística del Análisis" (González, p. 57)

En principio, fruto de esta aplicación del Álgebra al Cálculo infinitesimal surgen los intentos de aritmetización del método de exhausción de los griegos. Fermat y Pascal desarrollan métodos de cuadraturas aritméticas buscando fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros y usando para ello métodos de inducción completa e incompleta.

Más concretamente, Pascal (1623-1662), reemplaza los argumentos intuitivos de Cavalieri por razonamientos aritméticos sobre las series. El ignorar términos del tipo $n^2/2 + n/6$, frente a $n^3/3$ (que tiene su fundamento en las conversiones que Pascal establece entre el registro geométrico y el numérico y que le hace comparar el indivisible geométrico al cero aritmético), llegará a ser un modo sistemático de proceder en los métodos infinitesimales de la segunda mitad del siglo XVII.

El método de Fermat contiene los elementos esenciales de la definición de la integral definida para funciones continuas, salvo que no reconoce la operación integral y salvo que hace el cálculo para un área particular. Además sus métodos se basan en conceptos algebraicos puramente finitos, derivados de la teoría de las ecuaciones de Vieta.

Precisamente aplicando esta teoría de las ecuaciones Fermat intenta plantear los problemas de cuadratura bajo forma algebraica, lo que dota a sus procedimientos un carácter más general y le permite desarrollar el lado algorítmico del análisis infinitesimal. Fue el primero en considerar infinitamente pequeños aritméticos y no geométricos y, en lugar de hacerlos tender a cero, los hizo cero directamente (adegalisation, adigualdad).

Descartes fue crítico con el uso excesivamente libre que Fermat hacía de los infinitesimales, lo que estimuló a éste a justificar y extender su método.

En Inglaterra, donde el uso de las series infinitas estaba muy extendido, la influencia de Fermat y Descartes fue notable. Esto originó una fuerte tendencia a la aritmetización, que desarrollaron fundamentalmente Wallis (1616-1703) y en James Gregory (1638-1675) Concretamente, Wallis fue parco en rigor, mediante inducción incompleta y basándose en lo métodos algebraicos introducidos y los avances en métodos de cálculo numérico realizados por Napier y Briggs con relación a desarrollos logarítmicos, obtiene resultados sobre series numéricas, que le permitirán sustituir los indivisibles geométricos por aritméticos. El tratamiento que hace Wallis de la integral se apoya en la idea de altura promedio, es decir, la integral se interpreta como "un promedio aritmético".

Como reacción a esta tendencia aritmética de Wallis y a los métodos algebraicos de la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, Barrow (1630-1677), muy preocupado por las cuestiones filosóficas que afectaban a las Matemáticas del momento y a la vez era un gran conocedor de la matemática griega, reivindica una vuelta al punto de vista geométrico y al rigor euclidiano. Esto le obliga a trabajar en un lenguaje poco claro y con frecuencia muy confuso, ocultando, de esta manera, el verdadero valor de sus resultados. En la línea de la tradición escolástica la variable tiempo jugará un papel fundamental en sus especulaciones sobre el continuo aunque adopta diferentes puntos de vista tanto infinitesimales y como atomísticos.

A Barrow se le considera como el primero en reconocer claramente que el problema de las tangentes y el de las cuadraturas son inversos. Esto permite calcular integrales (límites de sumas) buscando primitiva, es decir, invirtiendo los problemas de derivación. Construye para una función $f(x)$ de la que conoce en cada punto su tangente (derivada) una función $Y = \int_0^x f(x)$ que es la suma. Desde las definidas construye la indefinida como una suma =

acumulación. Sin embargo, no realiza el camino inverso, esto es, no construye definidas a partir de las indefinidas quizás porque al no disponer de un método general para la obtención de derivas y tangentes, no vio la importancia de este camino inverso. La equivalencia de este teorema se encuentra en Barrow, aunque su pesado y confuso desarrollo geométrico le convierte en totalmente inoperante.

Significado institucional de integral como inversa de la derivada

La amalgama de problemas aislados relativos a las cuadraturas y tangentes son unificados y controlados por Newton y Leibniz. En la medida en que la generalidad de sus métodos y de sus técnicas hacen del análisis infinitesimal un campo autónomo, independiente de la geometría, es como pueden considerarse a ambos los fundadores del cálculo diferencial e integral.

Influenciado por las obras de Descartes, Fermat, Galileo, Wallis y Barrow, Newton (1643-1727) muestra tres significados distintos del cálculo infinitesimal. En el primero, *significado infinitesimal*, opera con cantidades infinitamente pequeñas que denomina *momentos* y que son equivalentes a los crecimientos infinitesimales de Fermat. Utiliza igualmente momentos de área de los que hace depender su método de cuadratura. Newton calcula el área bajo la curva cuya ecuación $y=f(x)$ está dada, invirtiendo las operaciones de derivación, se decir, calculando la integral indefinida de f. Newton no adiciona más superficies infinitesimales como sus predecesores, sino que toma la derivada como centro de su desarrollo, privilegia la integral indefinida en detrimento de la definida.

El segundo de los significados, conocido como método de las fluxiones, lo introduce en su obra Métodos de las fluxiones y de las series infinitas. Considera las cantidades matemáticas como engendradas por un aumento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento e imagina las velocidades de los movimientos que las engendran. Estas velocidades se llaman fluxiones. Para fundamentar su método, se inspira en el modelo de la mecánica teórica e introduce el tiempo como variable universal de toda correspondencia funcional. No se interesa por el tiempo como tal, sino su discurrir uniforme. Las fluentes las nombra por x y las fluxiones por $\dot{x}$. Si o es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ serán los crecimientos infinitamente pequeños de x y de y.... La introducción de la noción de fluxión modifica muy poco el significado infinitesimal anterior.

En su obra Quadratura curvarum, Newton trata de eliminar toda huella de los infinitamente pequeños, primeramente no considerando más que sus relaciones, después concibiendo lo que fue su tercer método, el *método de las primeras y últimas razones*. Procede como anteriormente con las notaciones, pero en lugar de obviar sin una justificación aceptable los términos que contienen o, forma la relación de la variación de x con respecto a y, después deja a o desvanecerse (eliminarse) en la relación. El resultado - la relación de 1 a nx^{n-1} - es lo que Newton llamó la *última razón de las variaciones evanescentes*; plantea igualmente la relación de la primera razón de las variaciones nacientes, y es la relación de las fluxiones.

Tanto el método de las fluxiones como el de las primeras y últimas razones son insuficientes para poner al cálculo diferencial sobre bases rigurosas. Éste es siempre tributario de otro método, ya sea el de los infinitamente pequeños, ya sea el de los límites.

Newton innova haciendo del uso de las series infinitas un método general y una técnica de integración. Desarrolla las funciones en series infinitas e integra término a término, extendiendo la validez de la integración término a término a las sumas infinitas lo cual sólo se había visto para las sumas finitas.

Significado institucional de la integral definida como suma de elementos infinitesimales

En la época de Leibniz (1646-1716) las preocupaciones metafísicas, que surgen de forma paralela a los trabajos en Física sobre el movimiento, centran su reflexión sobre la sustancia. El cuerpo, la materia, el movimiento no se puede comprender sin ella. El continuo se concibe como una evolución de variaciones insensibles sin rupturas, las percepciones no conscientes o insensibles son pequeñas percepciones o percepciones infinitamente pequeñas, infinitesimales (Guichard, 2000, p. 108)

Para Leibniz el primer elemento constituyente de todo es la *monada*, elemento que compone todas las cosas y que es un punto metafísico. Las pequeñas percepciones o percepciones infinitamente pequeñas son manifestaciones cualitativas de la monada cuya expresión matemática será el concepto de diferencial: *dx*, instrumento del <<cálculo del infinito>>. Esta concepción metafísica del infinito junto a la eficacia operatoria bastarán a Leibniz para fundamentar y justificar dicho concepto que no será para él más que un valioso útil.

Las primeras preocupaciones de Leibniz se centraron en la combinatoria y en su observación de las series de números, lo que le llevó a enunciar que "la suma de las diferencias entre términos consecutivos es igual a la diferencia entre los dos extremos", esto es:

A-A+B-B+C-C+D-D+E-E=0

+L +M +N +P por lo que L+M+N+P=E-A

Él pretende crear un buen sistema de símbolos que permita la operatividad a la vez que obtener nuevas propiedades que de otro modo serían difíciles de vislumbrar.

Por otra parte, se introduce en la geometría, estudiando los problemas de cuadraturas, principalmente a través de los trabajos de Cavalieri aunque sin considerar inicialmente el vínculo entre la combinatoria y la geometría.

Para establecer el enlace con el cálculo infinitesimal, interpreta la sucesión de números como un conjunto de valores de una función y la diferencia entre dos números como la diferencia entre dos valores cercanos de la función; diferencia que el denota por l. Abrevia la palabra latina omnia, utilizando omn. para denotar la suma. Por analogía con el cálculo de diferencias y el cálculo de sumatorias para las cantidades descritas, el carácter recíproco de ambos símbolos aparece de forma natural, bajo un aspecto muy formal, fuera de toda consideración geométrica. La propiedad anterior se escribe entonces por omn. l = y. Ahora bien, Leibniz preferirá dy a l y ∫, una S de suma estilizada, a omn. la relación anterior queda ∫ dy = y. Esta notación elegante y cómoda, que se ha conservado hasta hoy, le permite elaborar un método formal para calcular sumas y diferencias de infinitesimales.

Inspirado en la lectura de la obra de Pascal sobre el triángulo característico, observa que la búsqueda de la tangente a la curva depende de las razones de las diferencias entre ordenadas y abscisas cuando llegan a ser infinitamente pequeñas y que la cuadratura depende de la suma de las ordenadas o rectángulos infinitamente finos elevados sobre los intervalos infinitesimales del eje de abscisas. Como problema inverso al de las tangentes identifica el de las cuadraturas.

Relativo al problema de las tangentes Leibniz considera el triángulo característico que estará formado por una parte infinitamente pequeña de la tangente y por los dos lados infinitamente pequeños paralelos a las abscisas y ordenadas. Esto le permitirá asignar un valor a la relación *dy/dx*, incluso si ambos son arbitrariamente pequeños, al ser proporcional a otro triángulo. De esta manera podrá dar una definición de diferencial *dy* aunque basada en la subtangente. Leibniz admite infinitamente pequeños. El triángulo característico es inasignable

o infinitamente pequeño ahora *dx* y *dy* se toman infinitamente pequeños, los dos puntos de la curva deben considerarse como que la distancia de uno a otro es inferior a toda cantidad dada. A partir de ahora, no habrá más recursos al razonamiento de los griegos, los infinitamente pequeños tienen un estatus actual.

Leibniz llamará *dy* al crecimiento momentáneo de y. Identifica un arco de curva con un lado de un polígono de una infinidad de lados. Para obtener el área bajo una curva, suma las áreas de los rectángulos, ya que: "se pueden ignorar los triángulos puesto que son infinitamente pequeños y, por tanto, represento en mi cálculo el área por ∫ ydx."

Creará una auténtica álgebra de infinitamente pequeños al obtener reglas de cálculo y definiendo su cálculo como "un tipo nuevo de notación". Todo ello le permitirá trabajar con ellos y utilizarlos en múltiples problemas. Adquieren un gran auge debido a su simplicidad, su notación elegante y su formalismo, pero también por la fecundidad del mismo, en particular en el estudio de fenómenos físicos y mecánicos. Con esto lleva a cabo la algebraización de la geometría comenzada por Vieta y Descartes.

Leibniz insiste en el carácter general del Algoritmo del Cálculo, que hace que nada se le resista y él prosigue poniendo en evidencia su potencia operatoria que hace que cualquier método conocido hasta ahora no le iguale.

El cálculo de diferenciales es la operación fundamental del cálculo de Leibniz. La sumatoria es la operación inversa y, a la vez, se puede, por simple lectura, deducir una tabla de integrales de una tabla de diferenciales. Piensa las áreas y los volúmenes como sumas invirtiendo las operaciones de derivación. Contrariamente a Newton, quien considera la integral indefinida y calcula las áreas y los volúmenes a partir de su tasa de variación, Leibniz introduce la integral definida, interpretando las áreas y volúmenes como sumas de rectángulos y cilindros, respectivamente.

Significado institucional de la integral definida como límite de una suma

Debido a su naturaleza aún poco clara matemáticos como Lagrange intentan desarrollar una matemática sin utilizar los infinitésimos. Además, como afirma J. de Lorenzo (p.39) en esta época el análisis se encontraba muy limitado, enfocado a meros desarrollos algorítmicos en función de la mecánica celeste o problemas físicos. Por otra parte, los matemáticos de la época se ven obligados a enseñar debido a la importancia que adquieren, después de la Revolución francesa, las Universidades, como la Politécnica de París, a la vez empiezan a aparecer revistas dedicadas a la matemática. Estos elementos obligan a fundamentar la matemática.

Todo esto conduce a un cambio de mentalidad en el hacer matemático del siglo XIX, se produce una inversión. La matemática ha alcanzado unos límites que no le permiten resolver algunos problemas nuevos, sin poder explicar los motivos. La inversión consistirá en cuestionar los propios fundamentos buscando afrontar los mismos problemas desde una perspectiva más general y que permita explicar los motivos de estas limitaciones a la vez que resolver los problemas surgidos.

El principal artífice de este proceso de inversión en el análisis es Cauchy. Cuestiona la noción de continuidad y hasta la misma noción de función, que eran conceptos aceptados hasta el momento de forma intuitiva. Observa que conceptos fundamentales como la derivación e integración dependen del paso al límite por lo que se propone clarificarlo, estableciéndolo como la noción central. Intenta además justificar los infinitésimos y los métodos puramente mecánicos que se estaban utilizando en ese momento (J. de Lorenzo, p.45)

Para ello utiliza el concepto de límite de D'Alembert que, a su vez, se basa en una modificación del método de Newton de las primeras y últimas razones. Prescinde de la geometría y le da un carácter más aritmético aunque aún impreciso. Asimismo, define los infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero. (Sonsoles, p.72)

Como se señala en Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986), fue Cauchy el principal artífice de la introducción del rigor en el cálculo infinitesimal, al lograr superar y eludir los aspectos de tipo metafísico. En todo este proceso, el concepto de límite aparece como fundamental para la construcción de los conceptos del análisis matemático. La definición que da de este concepto rompe definitivamente con el significado geométrico que subyacía en el mismo y hace del límite una noción aritmética. Valiéndose de este concepto y de la varibilidad de la función, clarifica la noción de infinitésimo, que no es más que una sucesión convergente que tiene por límite cero.

Cauchy, retomando el significado de Leibniz sobre la integral definida, el cual tomó las áreas y los volúmenes como suma de rectángulos y cilindros, da una definición precisa de integral definida, centrándose en dar las condiciones de su existencia antes de definir propiedades de la misma.

Toma, como punto de partida, una función real, continua en un intervalo cerrado $[x_0, X]$. Los elementos $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}, x_n=X$ del intervalo lo subdividen en n subintervalos. Entonces se forma la suma:

$S = (x-x_0)f(x_0) + (x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+ (X-x_{n-1})f(x_{n-1})$

Demuestra que el límite de S, cuando la longitud del mayor subintervalo tiende a cero, existe si f es continua en el intervalo dado. Además, dicho límite sólo depende de la propia función $f(x)$ y de los extremos del intervalo. Precisamente, a este límite es a lo que Cauchy denominó integral definida. La integral se extiende a funciones continuas a trozos o con un número finito de puntos de discontinuidad.

Por último será Weierstrass quien aritmetiza el análisis con una construcción precisa del número real lo que permite dar una definición estática del concepto de límite. Con ello depura la definición de Cauchy pues elimina la subjetividad del término "se acerca" que sugiere una idea movimiento y de tiempo. Ha establecido la formulación actual.

Riemann va a desarrollar una teoría de la integración más general que la de Cauchy para poder representar por medio de las series de Fourier funciones que tienen una infinidad de discontinuidades. Da un ejemplo de una función acotada con una infinidad numerable de discontinuidades e integrable según su teoría de integración

Configuraciones epistémicas escolares

Este estudio histórico-epistemológico nos permite establecer las configuraciones epistémicas escolares que conformaran el significado global de la integral definida y que serán los que encontremos en los textos y los significados personales por lo que los utilizaremos en el estudio de la faceta instruccional.

Estas configuraciones epistémicos serían: Configuración epistémica geométrica, de resultado de un proceso de cambio, de inversa de la derivada y de aproximación al límite y que son el resultado actual del desarrollo histórico que se ha mostrado.

Para determinar una configuración epistémica nos ha parecido fundamental el tipo de situación problema que se resuelve ya que estimamos que movilizará unos determinados elementos de significados distintivos y por tanto un significado parcial. Además, no diferenciar entre ellos o no movilizarlos en los diferentes momentos que se suceden en la resolución de situaciones-problema complejas, lleva a conflictos semiótico. En este sentido,

describimos a continuación cada una de las configuraciones atendiendo a su evolución histórica. Es claro que en cada una de ellas se podrán utilizar los diferentes métodos de cálculo integral que han surgido a lo largo del desarrollo de la noción, que sólo nos han parecido determinantes de otra configuración epistémico si sobrepasan su función de elementos necesarios para el cálculo.

Configuración epistémica geométrica

El tipo de situaciones que se estudian son cálculos de áreas, volúmenes, longitudes. Es decir, situaciones que hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento.

Podemos situar su origen en las situaciones abordadas por los griegos, como eran cuadraturas, cubaturas y rectificaciones de curvas. Este tipo de problemas se retoman en el renacimiento, que supone una vuelta al mundo clásico desde la nueva óptica del álgebra y también del tratamiento del infinito desde un punto de vista intuitivo, pero práctico. Es en esta etapa que surgen los indivisibles.

En las siguientes etapas el objetivo será conseguir un mayor rigor para las situaciones que se plantean, así surgen los infinitamente pequeños y la diferencial En este sentido, desde la perspectiva actual, nos podemos situar el desarrollo de Leibniz considerando la integral definida como suma de elementos infinitesimales aunque con la noción de límite como central en el desarrollo.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	CEgeom.
Situaciones-problema	Cálculo de áreas y volúmenes
Lenguaje	Gráfico, algebraico, numérico.
Acciones	Cálculo de puntos de corte Representación gráfica de la función Cálculo de las integrales definidas Asignación de un valor al área o volumen
Conceptos-regla	CRárea
Proposiciones	Regla de Barrow Métodos de integración
Argumentaciones	Retórica y heurística
Conflictos semióticos asociados a esta CE	No diferenciar entre integral definida y área. La integral debe ser un área, entonces positiva. Si la integral es cero entonces la función coincide en ese tramo con OX. Es imprescindible el valor absoluto para calcular la integral

Configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio

Esta configuración epistémica supone un cambio sustancial en cuanto a las situaciones que se estudian. Ello implicará poner en juego un significado diferente de la integral con diferentes matices que deben ser tenidos en cuenta, como es el caso de resultados negativo.

Podemos situar el inicio en la época en la que la Escolástica medieval comienza a interesarse por las cuestiones del cambio, considerando el tiempo como prototipo del continuo. Sin embargo, el avance de las ciencias y las artes de siglos posteriores se revelan como motores del desarrollo del concepto e integral, unas veces en cuanto a métodos de

cálculo y otras mediante las nuevas formulaciones que se hacen necesarias para ampliar el campo de problemas considerados en la matemática del momento. Newton de alguna manera es un gran propulsor de este significado.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	CErpc
Situaciones-problema	Situaciones de otras ciencias, de modelización.
Lenguaje	Gráfico, algebraico, numérico.
Acciones	Modelizar la situación a través de la integral definida Cálculo de integrales y aplicación de la regla de Barrow Interpretación del resultado
Conceptos-regla	CRrpc
Proposiciones	Regla de Barrow Métodos de integración
Argumentaciones	Retórica y heurística
Conflictos semióticos	

Configuración epistémico inversa de la derivada

La relación entre derivada e integral, principalmente, se establece a partir de Newton y Leibniz consolidándose este resultado para las etapas posteriores. Aunque se unen los métodos y resultados de las etapas posteriores donde el límite se plantea como noción central y las funciones integrables van teniendo condiciones cada vez menos restrictivas.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	CEderivada
Situaciones-problema	Ligadas a la relación que existe entre la función derivada y la propia función
Lenguaje	Gráfico y algebraico
Acciones	Extraer propiedades de la función y de su primitiva identificándolas como función y derivada
Conceptos-regla	Inversión integral derivada
Proposiciones	Teorema fundamental del cálculo integral
Argumentaciones	Retóricas
Conflictos semióticos asociados a esta CE	Confusión entre función y primitiva

Configuración epistémico de aproximación al límite

Está directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dará lugar a la nueva definición de integral definida que éste realiza.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	CEaproxlim
Situaciones-problema	Calculo de áreas por aproximación
Lenguaje	Gráfico y numérico

Acciones	Dada una función o figura, realizar una partición y calcular una aproximación de su área, realizar mejores aproximaciones e identificar el área con el límite.
Conceptos-regla	CRlímite de una suma
Proposiciones	Límite de las sumas inferiores y el de las superiores coincide y es el área
Argumentaciones	Heurísticas
Conflictos semióticos asociados a esta CE	Horror al infinito: conflicto infinito potencial-actual (llenar algo finito como un área con una suma infinita) Heterogeneidad de las dimensiones (completar un área de dos dimensiones con líneas de dimensión 1)

Configuración epistémica algebraica

Además de las configuraciones epistémicas anteriores añadimos la **configuración epistémica algebraica**, que es fruto de la trasposición didáctica. En la secundaria se emplea gran parte del tiempo a practicar las reglas de integración. Así, una parte importante del significado implementado está exclusivamente dedicado al manejo de estas reglas. Es por ello que en ocasiones sólo se evalúe si el alumno saber aplicar los métodos explicados. Todo esto nos da lugar a otra configuración epistémica escolar, que no proviene de la historia estrictamente, y que consiste en las reglas de integración y la regla de Barow.

INTEGRAL DEFINIDA	
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO	CEalg.
Situaciones-problema	Calcular el valor de una integral
Lenguaje	Algebraico, numérico
Acciones	Dada una integral definida aplicar el método oportuno para calcular su valor.
Conceptos-regla	La integración y la derivación son operaciones inversas
Proposiciones	Tabla de integrales inmediatas Métodos de integración Regla de Barrow
Argumentaciones	Heurística
Conflictos semióticos	La integral carece de significado.

Análisis pruebas de acceso

La integral definida en las pruebas de acceso a la universidad

Se han analizado las pruebas de Matemáticas II de acceso a la universidad en las universidades andaluzas en el periodo comprendido entre 1999 y 2006. Aparecen tanto las pruebas propuestas a los estudiantes como aquellas otras que no salieron en el sorteo. Teniendo en cuenta que son seis pruebas A y seis pruebas B por año y ocho los años, son 96 las pruebas analizadas.

Las configuraciones escolares que aparecen en las pruebas son las siguientes: 50 de las pruebas corresponden a la configuración epistémica geométrica (CEG) de la integral definida; 22 a la configuración epistémica algebraica (CEAL) de la integral definida y 4 a la

configuración epistémica inversa de la derivada de la integral definida (CEINVD). El resto de las 23 pruebas, hasta 96, o bien se relacionan con integrales indefinidas o bien no figura en ellas el concepto de integral (hay que tener en cuenta que existe una prueba con tres configuraciones epistémicas y otra con dos configuraciones).

Podemos observar que los significados institucionales presentes en las pruebas de evaluación corresponden mayoritariamente a la configuración epistémico geométrica (en un 52,08%). El porcentaje de la algebraica es del 22,91% y la inversa de la derivada, el 4,16%. Es decir, los acuerdos institucionales a los que se llega en las reuniones de coordinación de las pruebas de acceso indican que prácticamente los significados de la integral definida se reducen a dos configuraciones, la geométrica y la algebraica. Teniendo en cuenta que se han detectado cinco configuraciones epistémicas escolares, las pruebas de acceso a la universidad en Matemáticas II inciden negativamente en la enseñanza-aprendizaje del significado global del concepto, al quedar éste prácticamente sesgado hacia dos de dichas configuraciones. Se trata de un fenómeno didáctico perjudicial para la instrucción de los estudiantes que después deben enfrentarse, en su mayoría, al significado global de la integral definida en cursos posteriores.

Además, se considera que la configuración epistémica geométrica no facilita la aplicación de la integral definida a otras ciencias como la Física y la Economía, la Biología…, ya que el área es un concepto propio de la Geometría, cuyo traslado a otras ciencias implica una modelización que no se trabaja, quedando al margen la configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio, verdadera responsable de la mayoría de las aplicaciones.

Por otra parte, la configuración epistémica geométrica puede inducir conflictos semióticos a los estudiantes, tales como "no tiene sentido un resultado negativo en la integral definida", "si la integral definida vale cero, entonces la función coincide en ese tramo con el eje OX". Por tanto, en las cuestiones donde aparezca esta configuración se deberían indagar la presencia o la superación de tales conflictos semióticos, lo cual no ocurre en las pruebas de acceso analizadas.

Complejidad ontosemiótica de la integral definida en las pruebas de acceso a la universidad

Se analiza a continuación una prueba correspondiente al año 2003, con las opciones A y B entre las que puede escoger un alumno, a fin de determinar la complejidad ontosemiótica de la misma.

En el primer caso esta complejidad ontosemiótica está relacionada con el propio enunciado de la situación propuesta y en el segundo caso la complejidad está asociada únicamente a los cálculos algebraicos a realizar.

OPCIÓN A

Ejercicio 2. **[2'5 puntos]** Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.

Configuraciones Epistémicas	SITUACIÓN PROBLEMA	LENGUAJES	ACCIONES	CONCEPTOS	PROPOSICIONES
CEG	- Se propone un problema de razonamiento para utilizar el cálculo de áreas encerradas entre curvas en el cálculo de un determinado parámetro. -Puede suceder que la integral salga negativa con lo que el alumno debe interpretar y así diferenciar entre integral y área	- Natural - Analítico	Enunciado → gráfico → algebraico↔ analítico. Tratamientos y conversiones	Área. como integral. Idea de parámetro.	- Métodos de integración. - Regla de Barrow

Respecto de esta primera cuestión analizada, una dificultad añadida en esta situación es la utilización de un parámetro, ya que el carácter intensivo del mismo supone un verdadero problema de interpretación para el estudiante puesto que ha de convertir el intensivo en extensivo y al contrario.

En cuanto a las acciones, hay que resaltar, que aparte de los tratamientos dentro de un mismo lenguaje, la situación problema exige que el alumno efectúe tres conversiones para poder obtener la solución. Estas son del lenguaje natural y analítico que se utiliza en el enunciado al lenguaje gráfico que le permite interpretar esta situación. De ahí, una serie de conversiones entre el lenguaje algebraico y el analítico, que le permitirán obtener los puntos de corte, el valor de la integral y el valor del parámetro λ.

El gráfico puede ser ostensivo o no ostensivo. En el primer caso, el alumno dibujará las funciones buscando "ver" el área encerrada, encontrándose con la dificultad de interpretar el carácter intensivo de la recta que se le propone. En el segundo caso, al no recurrir explícitamente al lenguaje gráfico, es posible que la integral definida siga la interpretación directa del enunciado, en cuyo caso aparecerá una integral negativa que debe convertir en positiva. Aún así, en este segundo caso, el lenguaje gráfico está presente recordando el método general para este tipo de problemas.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) **[0'5 puntos]** Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

(b) **[0'5 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta tangente obtenida.

(c) **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Configuraciones Epistémicas	SITUACIÓN PROBLEMA	LENGUAJES	ACCIONES	CONCEPTOS	PROPOSICIONES
CEG	- Se pide hallar el área intersecada entre una curva y una recta tangente habiendo pedido previamente esbozar el recinto.	- Natural - Analítico	- Enunciado → analítico, Enunciado → gráfico... Gráfico → algebraico → analítico	Recta tangente a una función en un punto. Área. como integral.	- Métodos de integración. - Regla de Barrow

Respecto de la segunda cuestión, destacar que se plantea una situación en la que el estudiante está totalmente dirigido a una secuencia en la que basa el planteamiento en una correcta representación gráfica. La dificultad proviene de los conceptos necesarios para obtener la integral definida como son la resolución de ecuaciones.

Referencias bibliográficas

Bessot, D. et als. (1999) *Aux origines du calcul infinitésimal*, IREM de Basse-Normandie: Ellipses. Paris

Contreras, A. y cols (2003), Análisis de manuales de 1º y 2º de Bachillerato LOGSE en Institutos de educación Secundaria de la provincia de Jaén en cuanto a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal derivada e integral, *Proyecto de investigación, Instituto de estudios giennenses*. Excelentísima Diputación Provincial de Jaén. Jaén.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2005), Análisis de significados personales de los estudiantes acerca de la integral definida, *IX SEIEM*, pp. 1-14. Universidad de Córdoba. Córdoba

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006), Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime* vol. 9 nº 1, 65-84.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 25(2), 151-186.

Crisóstomo, E., Ordóñez, L. Contreras, A., Godino, J. (2006) Reconstrucción del significado global de la integral definida desde al perspectiva de la didáctica de al matemática. En A. Contreras, L. Ordóñez, C. Batanero (Eds), *Investigación en Didáctica de la matemática. 1er congreso internacional sobre aplicaciones y*

desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas, pp.125-166. Universidad de Jaén. Jaén.

Dahan-Dalmedico, A. y Peiffer, J. (1986), *Une histoire des mathématiques*, Éditions du Seuil. París

Gaud, D. et als. (1998), *Des tangentes aux infiniment petites. Réflexions & travaux pour la classe*. IREM, Université de Poitiers.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 14 (3), 325-355.

Godino. J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 22(2/3), 237-284.

González, P.M. (1992), *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII,* Alianza Editorial. Madrid.

Guichard, J. (2000), *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques*, IREM de Poitiers : Ellipses. París

Mnemosyne N^{o} 1 (1992), *Mathématiques. Approche par les textes historiques,* IREM, Université Paris VII. París

Mnemosyne N^{o} 13 (1997), *Mathématiques. Approche par les textes historiques*, IREM, Université Paris VII. París

Mnemosyne N^{o} 2 (1992), *Mathématiques. Approche par les textes historiques,* IREM, Université Paris VII. París

Mnemosyne N^{o} 6 (1993), *Mathématiques. Approche par les textes historiques*, IREM, Université Paris VII. París

Montucla, J. E. (1986), *Histoire des recherches sur la quadrature de cercle, Reproduction de textes anciens nouvelles série nº1*, IREM, Université Paris VII. París

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2001), La enseñanza de la integral en estudiantes de 2º de bachillerato. En E. Palacian y J. Sancho (Eds) X *Jornadas para el aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, pp.437-442 Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza. Zaragoza

Ordóñez, L. y otros (2002) Significado institucional de la Integral, *X Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemáticas (THALES)* Universidad de Almería. Almería.

Roberval, G. P. de (1987), *Traité des indivisibles, Reproduction de textes anciens nouvelles série nº3*. IREM, Université Paris VII. París

Wenzelburger, E. (1993), Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral-Una propuesta didáctica, *Educación matemática*, vol. 5 nº 3, 93-123.

Wenzelburger, E. (1994), *Cálculo Integral*, Grupo Editorial Iberoamérica: México D.F.

[1]UNA ORGANIZACIÓN DE TAREAS DE RAZÓN EN SEMEJANZA PARA EL DISEÑO DE UN MODELO DE ENSEÑANZA

Alejandro Fernández Lajusticia
Bernardo Gómez Alfonso
Universitat de València

Resumen
Con el propósito de indagar, mediante el método denominado "análisis de tareas", qué situaciones de razón en semejanza facilitan el tránsito de la proporción a la función lineal, se presenta una organización de los problemas de tipo escolar en tres ejes: escala, pendiente y medición indirecta-Tales. Estos ejes se integran en un esquema (Solomon, 1987) para organizar la enseñanza que toma la proporción numérica como idea unificadora de la proporción en el área de geometría.

Abstract
We present an organisation of school problems in three axes, scales, slope, and indirect measurement-Tales, whose aim is to investigate which situations of ratio in similarities make easy the transition from proportion to linear function, using the task analysis method. These axes are integrated in a scheme (Solomon, 1987), in which the numerical proportion is the unifying idea of proportion, a scheme that is used to organise the teaching of ratio and proportion.

[1] Este trabajo.se ha realizado gracias a la financiación del MEC . Ref.: SEJ2005-06697/EDUC

Fernández, A. y Gómez, B. (2007). Razonamiento inductivo en un aula de formación de maestros. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 173-180.

Antecedentes

La importancia de las nociones de razón y proporción, así como la complejidad de sus procesos de enseñanza-aprendizaje es conocida. Como estas nociones, en sí mismas complejas, son temas de las matemáticas escolares de secundaria que generan dificultades, tanto a los profesores, para enseñarlos, como a los alumnos, para aprenderlos, pensamos que son un campo interesante para la investigación en educación matemática. De hecho son múltiples los trabajos que sobre estos temas se han realizado hasta el momento (Hart, K., 1981; Karplus, Pulos y Stage, 1983a y 1983b; Küchmann, 1989; Noelting, 1980a y 1980b; Streefland, 1984-1985; …);

Por lo que respecta a nuestro trabajo, éste se enmarca en los estudios realizados por nuestro grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico en colaboración con el Departamento de Matemática Educativa en México. Todos ellos en el marco del convenio entre el Departamento de Didáctica de la Matemática de la *Universitat de València* y el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México.

Los estudios que dan origen y sustentan el trabajo se realizaron inicialmente en México, durante el período 1993-96, en un proyecto de investigación dirigido por Olimpia Figueras. En este proyecto, en el que colaboró Bernardo Gómez, se obtuvo un primer acercamiento a la identificación, categorización y evolución de clases de actuaciones de alumnos de la escuela primaria al resolver tareas vinculadas a la razón y proporción. En particular se logró articular un esquema de análisis y clasificación de respuestas de los estudiantes que transitó de un modelo de descripción de actuaciones aisladas hacia otro de agrupamiento de tipos de comportamiento identificados de acuerdo con características comunes desde un enfoque relacional.

El modelo, que ha sido pertinente para poder derivar conclusiones y supuestos sobre las tendencias del comportamiento y las competencias de los niños, ha constituido el punto de partida del desarrollo de una investigación posterior realizada en la Universitat de València durante el periodo 1996-2001. Entre otros trabajos, los de Fernández, Figueras, Gómez y Margarit (1997); Fernández, Gómez, y Margarit (1997); Fernández, A. (2001) y Margarit, Figueras y Gómez (2001). En ellos se amplia y afina el esquema de análisis y clasificación – ver el capítulo 2 de Fernández (2001).

El trabajo de investigación, como la mayoría de los que lleva a cabo nuestro grupo, se desarrolla en el marco de los modelos teóricos locales que Eugenio Filloy inició hace algunos años. Esta forma de organizar la investigación la podemos encontrar en Filloy y cols. (1999) o, en su última versión, en Filloy, Rojano & Puig (2007).

El problema a investigar

Tomando como referencia el marco teórico desarrollado por Freudenthal (1983), el problema a investigar surgió y se delimitó, tras la lectura del capítulo sobre razón y proporcionalidad de su texto "Fenomenología didáctica de las estructuras matemática, junto con el análisis fenomenológico que de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad hacen Fernández, A. y Puig, L. (2002).

Basándose en la organización de fenómenos que, alrededor de la razón, hace Freudenthal (1983) –Exposiciones, Composiciones y ∑-constructos–, Fernández (2001) propone una agrupación de tareas de razón, proporción y proporcionalidad en cuatro bloques: Escalas, Densidad, Comparación de razones y tanto por ciento y Valor perdido y proporcionalidad. Esto le posibilita diseñar, por un lado, una herramienta de recogida de datos (cuestionario de lápiz y papel) y, por otro, cuatro secuencias de enseñanza (una por cada uno de los bloques) que permiten desarrollar un estudio de casos. El conjunto de las cuatro secuencias constituye

un modelo de enseñanza sobre razón y proporción en la escuela primaria.

Siguiendo una perspectiva similar, ahora nos fijamos en el análisis fenomenológico que Freudenthal hace sobre los Constructos aplicando su teoría sobre razones internas y externas. Es decir, la razón como una relación en una magnitud y entre magnitudes.

Digamos algo sobre constructos. Consideremos una figura de la que se ha hecho un modelo reducido, o un país y su mapa a una cierta escala, o una foto o un dibujo de los que se ha hecho una ampliación. En cada uno de estos casos, se obtiene la distancia entre dos puntos cualquiera del segundo objeto (el modelo reducido, el mapa, la ampliación), multiplicando por un mismo operador la distancia entre dos puntos homólogos del objeto de salida. El operador en cuestión se llama "factor de escala".

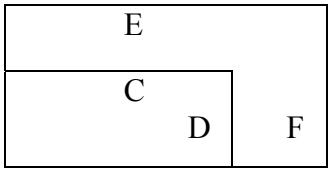
En las situaciones anteriores un conjunto de magnitudes se pone en correspondencia con otro mediante una ley, esta ley es una razón constante, que sintetiza una proporción cuya interpretación Geométrica es la semejanza.

La razón en semejanza –la constante que corresponde al factor de escala– es una razón externa, en el sentido señalado antes, que nos da una idea del "tamaño" de la nueva figura en relación con la primitiva. Sin embargo, no lo es en el sentido griego, pues para ellos la razón en semejanza era entre lados homólogos de una figura, que es una razón interna.

En los textos escolares y en el currículo de secundaria la semejanza aparece pronto al estudiar las figuras semejantes –principalmente los triángulos– y se espera que los estudiantes aprendan qué es la semejanza, reconozcan cuando dos figuras son semejantes, conozcan sus propiedades y sepan usarlas en algunas de sus aplicaciones más comunes; por ejemplo, en la determinación de distancias inaccesibles.

Bien entendido que, de acuerdo con Hart, Brown y Küchmann (1981, p. 98 y 99) en su estudio CSMS con estudiantes de secundaria, la palabra "semejante" es una noción difícil, dado que para muchos estudiantes significa vagamente la misma forma. La "misma forma" también es difícil cuando se trata de figuras rectilíneas, por el distinto significado que tiene "tener la misma forma" en el lenguaje cotidiano y el que tiene en Matemáticas. En el lenguaje cotidiano todos los triángulos "tienen la misma forma", son triángulos.

En el proceso de comparar figuras para ver si son semejantes, por ejemplo rectángulos, la razón "C es a D" (siendo C y D los lados diferentes del rectángulo) nos da una idea de la forma del rectángulo. Cuando otro rectángulo tiene la misma forma (siendo E y F los lados diferentes) es porque las longitudes de los lados C, D, E y F están en proporción, es decir "C es a D como E es a F". Este tipo de razones son internas, relaciones en un mismo sistema, entre cantidades homogéneas.



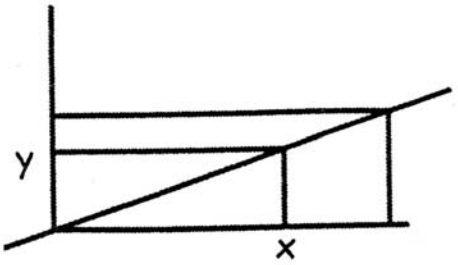
Así pues, al comparar figuras, la ideas de forma y tamaño están vinculadas a razones internas y externas respectivamente. Pero, en relación con la conexión entre las razones internas y externas Freudenthal (2001) dice: "el intercambio de los términos medios en una proporción nos es bastante familiar. Me pregunto si nos percatamos suficientemente de que no tiene por qué ser tan obvio para el que aprende. La instrucción aritmética anterior era bastante consciente de este salto. En vez de pasar por encima del obstáculo, en ella se inventaban dos tipos de división: la división razón y la división distributiva. Junto con este monstruo de dos cabezas parece haberse desvanecido también la conciencia previamente existente de este

problema y ya nadie es consciente hoy en día del salto mental de las razones internas a las externas, nadie plantea la cuestión de si no será un salto demasiado largo para el que aprende".

Una reflexión sobre el planteamiento anterior nos ha a llevado formular la siguiente hipótesis de trabajo:

> En el tránsito de la proporcionalidad numérica a la función lineal es crucial "el paso de la razón interna a la razón externa". Este tránsito se puede favorecer mediante situaciones asociadas a la razón en semejanza que aprovechen, dentro de la riqueza del contexto geométrico discretizado con una métrica, los nexos de unión entre razón, proporción, proporcionalidad y función lineal.

Una de estas situaciones se puede visualizar mediante la figura que representa la gráfica de la función lineal.



En ella, la relación entre los valores de la x y de la y (abcisa y ordenada) se puede considerar una relación externa, si los sistemas de magnitud que utilizamos son los ejes de coordenadas. Sin embargo, si la relación la consideramos entre las longitudes de los lados del rectángulo, que también tienen los valores x e y, entonces la relación es dentro de un sistema de magnitud (el constructo rectángulo) y por tanto interna. Significamos que una misma relación puede dar lugar a interpretaciones distintas en su comparación. Si lo hacemos como una igualdad de razones internas nos dice que los rectángulos son semejantes y si lo hacemos como una igualdad de razones externas entonces se trata de una constante: la pendiente de la recta.

Cabe destacar que al formular la hipótesis de esta manera, la pregunta inmediata que surge es:

> ¿Qué problemas o situaciones de semejanza pueden favorecer el tránsito de la proporcionalidad numérica a la función lineal? En particular "el paso de la razón interna a la razón externa".

Con las indagaciones que conlleva la anterior pregunta de investigación, nos planteamos fundamentar sugerencias para la construcción de un nuevo "modelo de enseñanza" y, para ello, diseñar un proceso para construir un modelo teórico local con el fin de alcanzar los objetivos que se han indicado anteriormente.

Todo esto requiere conocer previamente dos aspectos. Uno, qué tipo de problemas en este campo han sido los protagonistas principales en los libros escolares de matemáticas, y otro, cómo estos problemas se han encargado de organizar la noción de la razón en semejanza en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Conocer todo esto nos permitirá elaborar problemas denominados "no escolares". Tareas en las que su contexto, presentación, demanda…, las hace independientes de una instrucción reciente y, por tanto, útiles para el diseño de un cuestionario que constituya el instrumento del que nos vamos a valer para indagar sobre la hipótesis y sobre las actuaciones y comportamientos de los estudiantes de secundaria al responder al cuestionario.

La organización de tareas de semejanza en ejes

En este apartado presentamos la organización de tareas de semejanza de acuerdo con el objetivo señalado anteriormente.

El análisis de libros escolares y el análisis fenomenológico de las situaciones y problemas de semejanza que en ellos se encuentran han permitido:

Poder describir qué contextos predominan y se han utilizado en la historia y en los libros de texto relativos a la noción de semejanza, y

Organizar y agrupar los problemas en ejes según sus contenidos.

Para realizar dicha agrupación contemplamos, por una parte, los contextos que sirven para caracterizar a los propios problemas y, por otra, las nociones matemáticas que en ellos hay implicadas.

Mediante este análisis previo hemos identificado tres ejes que posibilitan la agrupación de tareas y confección de un cuestionario de lápiz y papel.

Estos ejes son:

EJE ESCALA

En él se agrupan aquellos problemas o situaciones que corresponden a fenómenos que se pueden modelar o representar por medio de transformaciones del plano en el plano con las siguientes propiedades:

Las medidas de ángulos correspondientes se conservan, y

Las relaciones entre las medidas (longitudes) de segmentos de recta homólogos entre dos figuras semejantes se pueden expresar mediante un número entero o fraccionario que es constante.

Fenómenos de este tipo son reducciones o ampliaciones y representaciones planas de objetos reales, tales como planos de casas, mapas, y cosas por el estilo.

Los problemas de escala son casos particulares de la homotecia que en los curricula de la educación primaria y secundaria se han considerado como un contenido matemático. En consecuencia en los libros de texto, tanto antiguos como actuales, hay una sección o capítulo destinado al estudio y la resolución de problemas de escala.

En las secuencias de enseñanza de los conceptos matemáticos vinculados con las situaciones de escalas se intenta que los estudiantes distingan entre situaciones de semejanza de figuras y aquellas en las que no hay semejanza y se pone énfasis en criterios de conservación que permiten analizar situaciones de tal tipo.

EJE PENDIENTE

En él se incluyen fenómenos asociados a la proporcionalidad que se pueden visualizar a través de representaciones en un plano cartesiano cuyos ejes se construyen con aquellas cantidades que se relacionan, tales como distancia medida en kilómetros y el tiempo en horas para representar de forma gráfica el movimiento rectilíneo y uniforme. Esa representación de situaciones de proporcionalidad por medio de una línea recta que pasa por el origen pone el énfasis en la relación entre las dos cantidades en juego y en aquello que se mantiene constante, el factor de proporcionalidad, en este caso la pendiente de la recta.

Este modelo se puede utilizar en situaciones como el coste expresado en un sistema monetario (euros) de una mercancía (arroz) representada en cantidades medidas en kilogramos. En ellas la línea recta que pasa por el origen, modela la relación entre esas cantidades aun cuando habrá puntos en la recta que no tengan sentido en la vida real, por ejemplo un gramo de arroz y su coste en euros.

La pendiente de una recta es un contenido que podría considerarse secundario en el currículo de la educación secundaria obligatoria; se estudia entretejido con otros contenidos tales como la función lineal y la resolución de problemas vinculados con un plano inclinado.

Debido a que se pueden estudiar situaciones de comparación de magnitudes relacionadas con la pendiente de una recta poniendo énfasis en la razón en semejanza, se puede usar este contenido matemático como un nexo entre la proporcionalidad numérica y la función lineal.

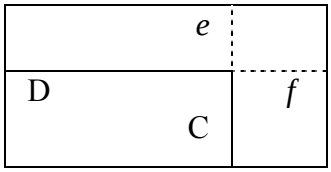
EJE MEDICIÓN INDIRECTA USANDO EL TEOREMA DE TALES

Incluimos en él problemas que tradicionalmente se han llamado "Aplicaciones del Teorema de Tales". Algunas de las aplicaciones del teorema de Tales (partición de un segmento en *n* partes iguales, cálculo de longitudes de segmentos proporcionales –cuarto, tercero, medio proporcional–, triángulos en situación de Tales…) y sus implicaciones en la semejanza son contenidos matemáticos que, además de tener gran utilidad en esta área, se aplican frecuentemente en las ejecuciones técnicas de otras áreas como dibujo lineal, arquitectura, ingeniería…

Adaptación del esquema de Solomon

El esquema de Solomon (1987) es un diagrama en el que aparecen juntas las variadas relaciones y significados que se encuentran cuando se toma la razón y la proporción aritmética como idea unificadora de nociones ubicadas en el área de geometría.

Un ejemplo de esta idea unificadora se tiene cuando la proporción aritmética entre cuatro números se interpreta geométricamente como un arreglo de cuatro segmentos que da igualdad de formas o de áreas. Desde la igualdad de razones internas (C es D como *e* es a *f*) nos da la igualdad de formas y desde la igualdad de productos en cruz ($C \cdot f = D \cdot e$) la equivalencia de áreas.

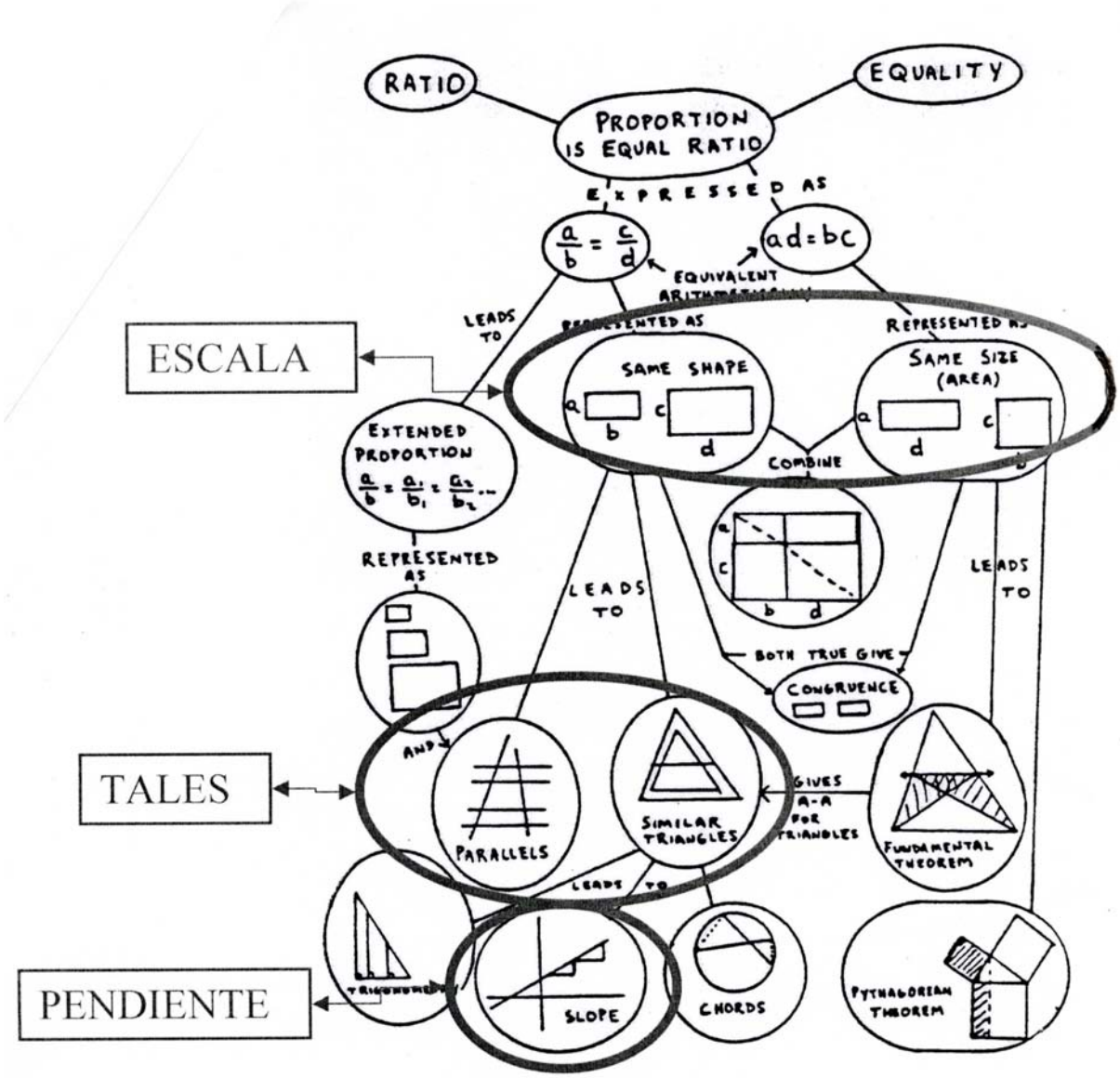


Para nosotros, el esquema de Solomon es interesante porque más que un mapa conceptual, es un plano topográfico que muestra las relaciones de continuidad que hay en una variedad de situaciones geométricas con diferentes niveles de complejidad, resaltando como fluyen (o se siguen) unas de otras.

También los Ejes descritos permiten organizar "los problemas" relacionados con la razón geométrica cuando ésta se interpreta numéricamente.

Tenemos, pues, dos maneras para organizar el contenido matemático de la proporción y sus interrelaciones con otras partes de la geometría. El esquema de Solomon nos ayuda a enlazar las nociones, mostrando sus nodos, y los Ejes nos ayudan a agrupar las situaciones o tareas, y a ubicarlas en su nodo correspondiente.

Con el fin de integrar estas dos formas organizadoras, elaboramos un nuevo esquema que contempla tanto el entramado de Solomon como los Ejes identificados. En el nuevo esquema aparecen unos óvalos (trazo fino) que rodean contenidos matemáticos y otros óvalos (trazo grueso) que agrupan los contenidos que corresponden a cada eje.



Epílogo a modo de conclusión

Recordemos que la hipótesis de nuestro trabajo era que en el tránsito de la proporcionalidad numérica a la función lineal, es crucial el paso de la razón interna a la razón externa, y este paso se puede favorecer mediante situaciones visuales asociadas a la razón en semejanza.

La organización de tareas en Ejes nos permitirá diseñar una herramienta de recogida de datos, cuestionario de lápiz y papel, para aplicar a estudiantes de secundaria (12-16 años), con el fin de ver qué tareas favorecen o desencadenan el uso de una u otra de las razones.

Esperamos que el análisis de los datos obtenidos y el esquema adaptado de Solomon posibiliten el diseño de secuencias de enseñanza y, por tanto, un modelo de enseñanza a experimentar y aplicar con alumnos de secundaria. Modelo que no contemple el estudio de la razón, proporción, proporcionalidad y función lineal como piezas aisladas, sino que de una continuidad a estas ideas y facilite el tránsito de unas a otras.

Referencias bibliográficas

Fernández, A. (2001): Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria. Tesis de Doctorado. Universitat de València. España.

Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* vol. 5, núm. 2.

Fernández, A.; Figueras, O.; Gómez, B. y Margarit, J. 1997. Algunas aportaciones a un modelo de interpretación de respuestas de alumnos de primaria a un cuestionario de tareas relacionadas con razón y proporción. *VIII JAEM (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas).* Septiembre. Salamanca.

Fernández, A.; Gómez B. y Margarit, J. (1997). Comportamientos relevantes observados en las respuestas incorrectas de estudiantes de primaria en tareas de razón y proporción. *III Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana,* Valencia, Mayo.

Filloy, E. et al. (1999): *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Filloy, E. ; Rojano, T. and Puig, L. (2007): *Educational Álgebra. A Theoretical and Empirical Approach.* Springer. New York.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. Traducción introducción y notas de Luis Puig. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Hart, K. (1981). Ratio. En K. Hart (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics.* 11-16. London. John Murray. México, D. F.

Hart, K. M. ; Brown, M. L. y Küchemann D. E. (1981). The CSMS Mathematics Team. "Chlidren's Understanding of Mathematics: 11-16. Oxford, London and Northampon. John Murray.

Karplus, R.; Pulos, S.; Stage, E.K. (1983a) Early Adolescents Proportional Reasoning on Rate Problems. *Educational Studies in Mathematics*. vol. 14, Nº. 3, pp.219-233.

Karplus, R.; Pulos, S.; Stage, E.K.(1983b) Proportional Reasoning of Early Adolescents. In R. Lesh & M. Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*(pp.45-90). Academic Press. New York.

Küchmann, D. (1989). Learning and Teaching Ratio: A Look at Some Current Texbooks. En Paul Ernest (Ed.). *Mathematics Teaching. The State of the Art.* The Falmer Press.119-135. New York.

Margarit, J.; Figueras, O. and Gómez, B. (2001). Ratio Comparison: Performance on Ratio in Similarity Tasks. *Proceedings of the 25 PME (25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education), v*ol. I, 340 Utrecht. Netherland.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics* 11, 2, pp. 217-353.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem-Structure at succesive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics* 11, 3. pp. 332-363

Solomon, A. (1987): Proportion: Interrelations and Meaning in Mathematics. *For the Learning of Mathematics,* vol. 7, nº 1. pp. 14-22

Streefland, L. (1984-85) Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (partes I y II). *Educational Studies in Mathematics*, vol.15, Nº.4,5.

PRODUCCIÓN ISI DEL PROFESORADO UNIVERSITARIO ESPAÑOL DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Alexander Maz Machado
Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba

Resumen
Los distintos comités que evalúan la experiencia investigadora de los docentes españoles otorgan gran importancia a la publicación de artículos en revistas incluidas en las bases de datos del ISI, este hecho nos ha llevado a realizar un estudio de la producción española en las citadas revistas arrojando resultados que señalan que las revisas de esta base de datos no son el medio natural de difusión de la investigación española en Educación Matemática.

Abstract
The different committees that evaluate the research experience of the Spanish teachers grant great importance to the publication of articles in journals included in the databases of the ISI, this fact has taken us to carry out a study of the Spanish production in those mentioned journals.

Maz, A. y Torralbo, M. (2007). Producción ISI del profesorado universitario español del área de Didáctica de la Matemática. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife*. pp. 181-188.

Introducción

El acceso a los cuerpos docentes en la universidad española esta reglamentado por la ley y los criterios para efectuar la evaluación de la experiencia investigadora han sido determinados tanto por el CNAI, la ANECA así como por las respectivas Agencias autonómicas. En ellas se consideran primordiales los artículos publicados en revistas de la base de datos del Institute for Scientific Information (ISI) bien sea del Social Science Citation Index (SSCI) o en el Science Citation Index (SCI).

Por otra parte la resolución de 17 de noviembre de 2006, de la Presidencia de la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora, por la que se establecen los criterios específicos en cada uno de los campos de evaluación, en relación con el Campo 7: Ciencias Sociales, Políticas, del Comportamiento y de la Educación, señala lo siguiente (CNEAI, 2006):

> Con carácter orientador también, para obtener una evaluación positiva, en las áreas de Ciencias de la Educación, Comunicación y Periodismo, se considerará necesario que las aportaciones cumplan alguna de las siguientes condiciones mínimas: a) que una sea un libro monográfico de investigación que cuente con difusión y referencia internacionales y cumpla los requisitos que se indican en el punto 3, b) que dos sean artículos publicados en revistas recogidas en el «Journal of Citation Report del Social Science Citation Index», c) que tres sean artículos publicados en revistas, nacionales o internacionales, que cumplan los criterios que se especifican en el apéndice 1.

Como puede apreciarse a la luz de la importancia otorgada a las publicaciones ISI y especialmente el apartado b del párrafo anterior parece como si todos los profesores universitarios o los aspirantes a serlo o aquellos que investigan publicasen en tales bases de datos.

Problema de investigación

Nos interesa conocer si las condiciones de visibilidad investigadora a través de artículos ISI, consideradas para la evaluación favorable de la experiencia investigadora tanto para el acceso a los cuerpos docentes universitarios y para otorgar tramos de investigación, son aplicables al área de Didáctica de la Matemática, por tal razón pretendemos identificar cuáles son estos autores (si los hay) que publican en revistas ISI, cuáles son tales revistas y si publican al menos dos artículos ISI en un lapso de seis años como señala la resolución del CNEAI

Metodología

Consultamos el listado del profesorado universitario en servicio activo del área de Didáctica de la matemática y seleccionamos a todos los profesores catedráticos de universidad (7), titulares de universidad (41) y catedráticos de escuela universitaria (31), en total la muestra la conforman 79 sujetos.

Una vez seleccionada la muestra consultamos la base de datos ISI a través de la Web of Science, para buscar los artículos publicados durante los últimos treinta años hasta el mes de junio de 2007. Posteriormente toda esta información se paso a una base de datos para elaborar las tablas y gráficos que permitieron efectuar los análisis. De hecho, hemos seguido la

metodología propuesta en Fernández-Cano y Bueno (1999, 2002) para explorar patrones cienciométricos en la investigación.

Resultados

Patrones de productividad de autores

En total aparecen 21 autores de 44 artículos, de ellos, dos son responsables del 50% de los artículos (Ángel Granja y Lluis Bibiloni) mientras que la mayor parte de autores solo firman una publicación (el 66%). Se destaca Ángel Granja como gran productor de artículos ISI.

	Autores	**Artículos**	**Universidad**
1	Granja, Ángel	11	León
2	Bibiloni, Lluis	9	Autónoma de Barcelona
3	Gutiérrez, Ángel	4	Valencia
4	Ortega, Tomás	4	Valladolid
5	Batanero, Carmen	3	Granada
6	Fiol, Maria Luisa	3	Autónoma de Barcelona
7	Rico, Luis	2	Granada
8	Azcarate, Pilar	1	Cádiz
9	Camacho, Matías	1	La Laguna
10	Díaz-Godino, Juan	1	Granada
11	Estepa, Antonio	1	Jaén
12	Fortuny, José Mª	1	Autónoma de Barcelona
13	Gil, Francisco	1	Almería
14	González, Mª José	1	Cantabria
15	Gorgorio, Nuria	1	Autónoma de Barcelona
16	Jaimez, Adela	1	Valencia
17	Moreno, Mª Francisca	1	Almería
18	Planas , Nuria	1	Autónoma de Barcelona
19	Romero, Isabel	1	Almería
20	Serrano, Luis	1	Granada
21	Torralbo, Manuel	1	Córdoba

Tabla 1. Autores del área de Didáctica de la matemática con artículos ISI

Patrón de producción diacrónica

El primer artículo de un profesor español del área de Didáctica de la Matemática lo publica Ángel Gutiérrez en el año 1985. Durante el año 1998 se publica en mayor numero de artículos (7) mientras que durante el primer semestre del 2007 se han publicado cinco, el 12.5 % del total de artículos en 22 años.

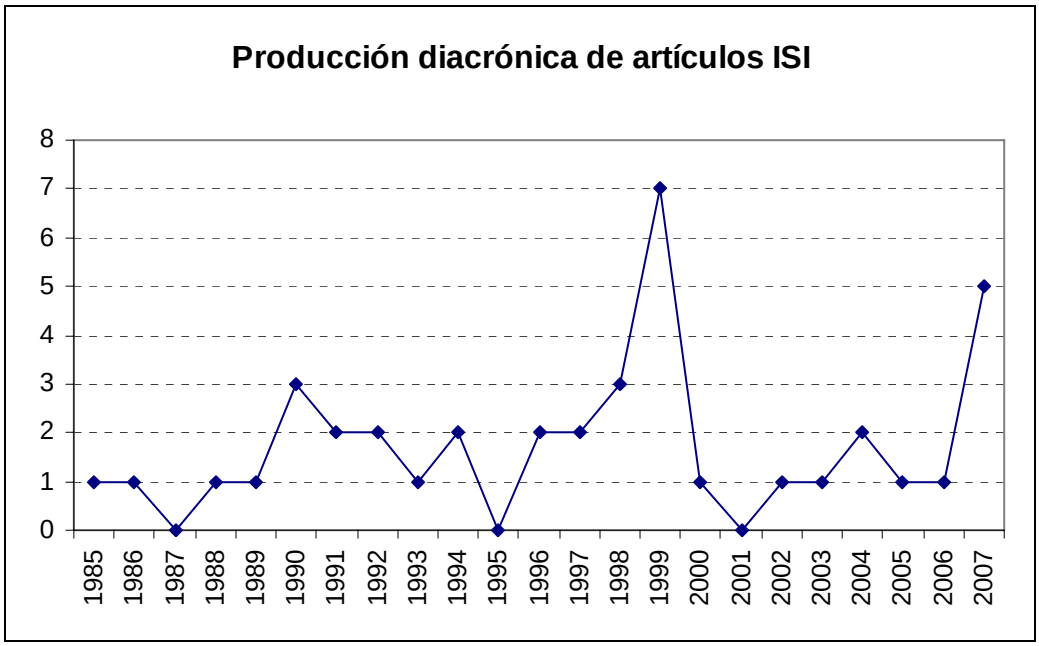


Figura 1. Desarrollo diacrónico de la producción de artículos ISI

Filiación institucional

Los autores están vinculados a 11 universidades españolas. Las universidades Autónoma de Barcelona y de León son las que sus profesores han realizado mayor número de publicaciones ISI, aunque debe señalarse que en la primera cada autor firma en promedio en cada 2.8 artículos mientras que en la segunda un solo autor firma en el 100%.

Universidad	**Nº de profesores**	**Artículos**
Autónoma de Barcelona	5	14
Granada	4	5
Almería	3	1
Valencia	2	4
León	1	11
Valladolid	1	4
Cádiz	1	1
La Laguna	1	1
Jaén	1	1
Cantabria	1	1
Córdoba	1	1
Total	**21**	44

Tabla 2. Filiación universitaria de los autores del área de Didáctica de la Matemática con artículos ISI

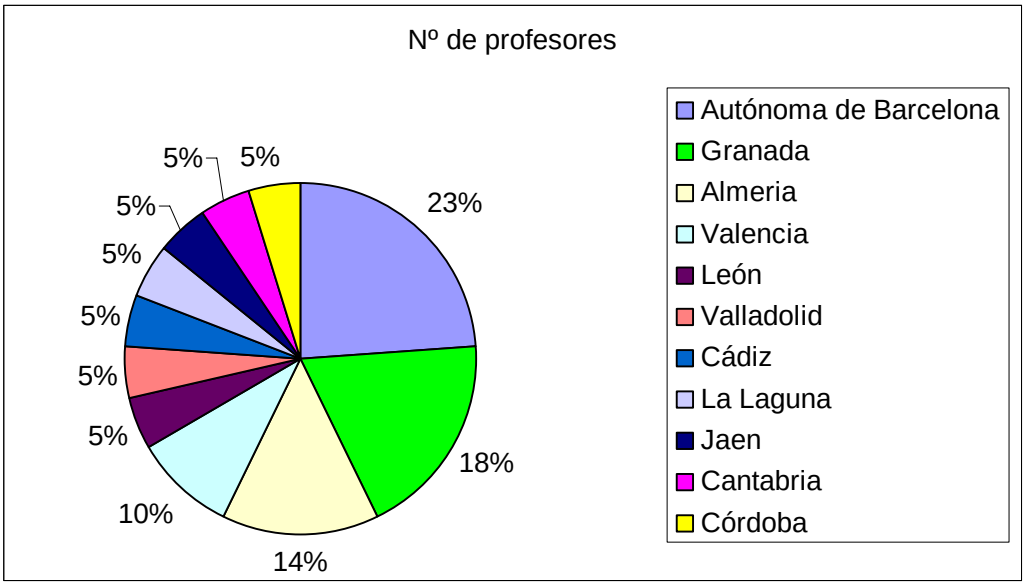


Figura 2. Distribución del profesorado del área de Didáctica de la Matemática con artículos ISI por Universidades.

Tres universidades (Autónoma de Barcelona, Granada y Almería) agrupan el 65% de los autores.

Revistas donde se publica

Los 40 artículos ISI se han publicado en 31 revistas. Las que han publicado dos o más artículos se muestran en la tabla 3.

Revista	
Communications in algebra	4
Journal for research in mathematics education	3
American mathematical monthly	3
Fibonacci quaterly	2
Order- A journal on the theory of ordered sets and its applications	2
Revista matemática iberoamericana	2

Tabla 3. Revistas donde publican los profesores del área de Didáctica de la Matemática con artículos ISI

De todas las revistas solo hay una especifica de Educación Matemática el Journal for Research in Mathematics Education (JRME) que es la única del campo que figura en el ISI. Sin embargo, figuran tres revistas relacionadas con la educación: European Journal of Psychology of Education, Evaluation and Program Planning y el International Journal of Science Education, cada una con un artículo.

Categorías por tema (Subjet Category)

La tabla 4 revela que más de la mitad de los artículos están en la categoría de sólo matemáticas, mientras que el 10% están en categorías relacionadas con aspectos educativos.

Subject Category	Total	Porcentaje
Mathematics	28	58%
Mathematics applied	7	14%
Education & educational research	4	8%
Statistics & probability	2	4%
Social sciences interdisciplinary	1	2%
Psychology educational	1	2%
Physics mathematical	1	2%
Mechanics	1	2%
Mathematics interdsciplinary aplications	1	2%
Information sciences & library science	1	2%
Engineering multidisciplinary	1	2%
Computer science interdisciplinary applications	1	2%

Tabla 4. Categorías por tema de los artículos ISI

Citaciones recibidas

De los autores con publicaciones ISI del área de Didáctica de la Matemática han sido citados 14 en artículos de revistas ISI.

Autores	
Ortega, Tomás	52
Granja, Angel	21
Bibiloni, Lluis	12
Fiol, Maria Luisa	5
Gutierrez, Angel	4
Fortuny, José Mª	3
Jaimez, Adela	3
Torralbo, Manuel	3
Batanero, Carmén	2
Rico, Luis	1
Camacho, Matías	1
Gorgorio, Nuria	1
Planas , Nuria	1
Serrano, Luis	1

Tabla 5. Citaciones recibidas por los autores con publicaciones ISI del área de Didáctica de la Matemática.

Tomás Ortega ha recibido el 47% del total de citaciones recibidas. Destacamos que los cuatro primeros autores en cuanto a citas recibidas no han publicado artículos relacionados con la Educación Matemática sino con la Matemática como ciencia.

Conclusiones

De los 44 articulo publicados en 22 años, solamente 7 (el 17.5%) tienen relación con la Educación Matemática lo que indica que aunque los autores pertenezcan al área de Didáctica de la Matemática su producción internacional ISI la realizan en campos distintos a su área docente.

Tres de los catedráticos del área de Didáctica de la Matemática han publicado algún articulo ISI (Rico, Diaz-Godino y Fortuny). Ángel Granja de la Universidad de León surge como gran productor de artículos ISI. Si bien su trabajo de investigación no lo realiza en Educación Matemática.

Las pocas citaciones recibidas por los artículos publicados sobre Educación Matemática responden a los patrones señalados por Van Leeuwen (2006) según los cuales el 70% de las citas de Ciencias de la Educación en la base de datos del SSCI no pertenecen a revistas ISI.

Una de las condiciones para otorgar tramos de investigación del CENAI señala la publicación de al menos dos artículos ISI durante los últimos seis años, como hemos presentado en este informe, esta condición solamente la cumplirían los primeros seis autores mencionados en la tabla 1. Esta situación afecta incluso a los catedráticos del área, siendo estos los investigadores que se han encargado de liderar y fortalecer el área durante las dos últimas décadas a través de distintos caminos como lo son los programas de doctorado, la publicación de libros y la realización de proyectos de investigación, por lo tanto debemos preguntar ¿cómo se puede pretender que los artículos ISI sean la columna vertebral de la evaluación de la experiencia investigadora de los profesores del área de Didáctica de la Matemática?

A la luz de los resultados, los miembros de los comités evaluadores deberían establecer de manera clara cuáles son las otras bases de datos de revistas que encajen dentro de la normativa que indica que: *"podrán considerarse también artículos publicados en revistas listadas en otras bases de datos internacionales, siempre que, a juicio del comité asesor, cuenten con una calidad científica similar a las incluidas en los índices mencionados"* (CENAI, 2006) para que los investigadores puedan saber a que revistas enviar sus artículos de manera que su publicación les permita acceder al reconocimiento investigador. Aunque en la actualidad algunas agencias autonómicas de evaluación han elaborado listados de clasificaciones de revistas como soporte para evaluar la experiencia investigadora, se hace necesaria la unificación de tales listados.

Referencias bibliográficas

CENAI (2006). *Resolución de 17 de noviembre de 2006, de la Presidencia de la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora, por la que se establecen los criterios específicos en cada uno de los campos de evaluación.* BOE nº 280 Jueves 23 noviembre 2006.

Fernández Cano, A.; Bueno, A. (1999). Synthesizing scientometric patterns in Spanish educational research. *Scientometrics,* 46 (2), 349-367.

Fernández Cano, A.; Bueno, A. (2002). Multivariate evaluation of Spanish educational research journals. *Scientometrics*, 55 (1), 87-102.

Van Leeuwen, T. (2006). The application of bibliometric analyses in the evaluation of social science research. Who benefits from it, and why it is still feasible. *Scientometrics, vol.* 66 (1), 133-154.

ECUACIONES AMBIGUAS Y SOLUCIONES IMPOSIBLES EN EL ÁLGEBRA DE GEORGE PEACOCK[1]

Aurora Gallardo
Oralia Torres
CINVESTAV, MÉXICO

Resumen
George Peacock separó la ciencia del álgebra en dos provincias denominadas por él, álgebra aritmética y álgebra simbólica, con el propósito de entender la categoría de la negatividad en la enseñanza de esta ciencia. Afirmó, que en virtud de la convención que suponía "la permanencia de las formas", seríamos capaces de lograr una extensión de nuestra noción de número, ya que de no alcanzarla, las ciencias del álgebra aritmética y del álgebra simbólica quedarían sin la posibilidad de vincularse.

Abstract
George Peacock separated algebra in two provinces denominated for him, arithmetical algebra and symbolical algebra in order to understand the negativity in the teaching of this science. He claimed that in virtue of a convention which assumes "the permanence of forms", we are enabled to give an extension to our notion of number. Without the aid of such an extension the sciences of arithmetical and symbolical algebra must have long since been separated from each other.

[1] Estudio teórico financiado por CONACYT. Proyecto de investigación: 44 632. "Procesos de abstracción y patrones de comunicación en aulas de matemáticas y ciencias en entornos tecnológicos de aprendizaje: estudio teórico experimental con alumnos de 10 a 16 años de edad."

Gallardo, A. y Torres, O. (2007). Ecuaciones ambiguas y soluciones imposibles en el álgebra de George Peacock. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife*. pp. 189-196.

Introducción

Aunque es bien sabido que George Peacock impulsó el nacimiento del Álgebra Moderna actual, es diferente una lectura de su obra desde la historia o desde las matemáticas que desde la educación matemática. Nuestro George Peacock, el de este artículo, es el autor inglés preocupado por enseñar álgebra a estudiantes.

Los alumnos de secundaria que se encuentran en la transición de la aritmética al álgebra, se enfrentan por primera vez con la arbitrariedad de las literales. En este artículo analizaremos algunas de las ideas fundamentales descritas en "*Treatise of Algebra"* de George Peacock (1845). Esta obra dio lugar a controversias con respecto a las cantidades negativas en la Inglaterra de principios del siglo XIX. Una reflexión crítica del trabajo de Peacock nos ha proporcionado nuevos elementos de análisis para explicar las dificultades que presentan los estudiantes al comenzar el álgebra escolar. Haremos énfasis en la construcción de lo que Peacock denominó *"Álgebra Aritmética"*, que constituye uno de los ejes principales para comprender la transición de la Aritmética al *Álgebra Simbólica* en la educación media.

Ahora bien, nos preguntamos desde nuestro presente y ubicados en la educación matemática:

1) ¿Por qué es necesario considerar el Álgebra Aritmética en la enseñanza del álgebra elemental?
2) ¿Qué nociones referentes a la negatividad contenidas en Peacock pueden rescatarse para el álgebra escolar?
3) ¿Cómo evolucionan la sintaxis y la semántica a partir de proposiciones verbales aritméticas hasta alcanzar el lenguaje algebraico en la obra de este autor?
4) ¿Cómo incorporar el legado de Peacock a los avances conceptuales y tecnológicos existentes actualmente en el álgebra?

Las dos algebras de George Peacock

En el primer volumen de su tratado denominado Álgebra Aritmética (AA), Peacock considera símbolos que representan números digitales[2] y operaciones, definidas éstas como en la aritmética. Así, los signos más y menos denotan la adición y sustracción en su significado usual, de manera que estas operaciones pueden considerarse imposibles cuando los símbolos sean reemplazados por números. Por ejemplo, en a + b, a y b son cantidades de la misma clase. En cambio, para a – b es necesario suponer que a > b. Las cantidades negativas son expulsadas por imposibles o extrañas al Álgebra Aritmética. Debido a esta problemática, Peacock construye el Álgebra Simbólica (AS), que adoptará los principios del Álgebra Aritmética pero eliminará las restricciones. Afirmó que si generalizamos la operación denotada por menos para aplicarla en todos los casos (a – b para a $\geq$ b), habremos encontrado la existencia independiente de este signo e introducido una clase de cantidades, $+a$ y $-a$, nunca contempladas en la Aritmética o en el Álgebra Aritmética. La restricción esencial de que el Álgebra Simbólica deba incluir al Álgebra Aritmética, la denominó el Principio de Permanencia de las Formas Equivalentes. Sobre este principio, el autor explicó que podía considerarse como la ley de Transición de Resultados del Álgebra Aritmética al Álgebra Simbólica. Afirmó: "Bajo este principio seremos capaces de dar una interpretación consistente a formas simbólicas como $+a$ y $-a$ refiriéndolas la una a la otra". Añade,

[2] Peacock denomina *números digitales* a aquellos números representados por los 9 dígitos y el cero (1845)

que solamente en Álgebra Simbólica formamos y reconocemos los resultados cualesquiera que sean. Así, esta ley general de transición de resultados conduce a equivalencias como las siguientes:

$$a - (a + b) = a - a - b = -b$$
$$a - (a + b) = a - a + b = +b$$

Peacock, insiste en el hecho de que los resultados del Álgebra Simbólica que no son comunes al Álgebra Aritmética, son "generalizaciones de forma" y no son deducibles de definiciones inexistentes para este caso. Esta extrapolación resultó muy atrevida para la época.

A continuación, pretendemos mostrar la minuciosidad y detalle de las explicaciones que Peacock consideró necesarias para transitar de la aritmética al álgebra. El autor comienza la construcción del Álgebra Aritmética en el Capítulo I, aclarando que los signos de operación no se requieren en Aritmética. Así la suma de 271, 164 y 1023 se representa como:

$$\begin{array}{r} 271 \\ 164 \\ \underline{1023} \\ 1458 \end{array}$$

Si se describe la suma anterior en forma horizontal, será necesario introducir los signos de operación y estos reemplazarán la proposición verbal (*la suma de…resultado final*) y obtendremos:

$$271 + 164 + 1023 = 1458.$$

Si avanzamos un paso más y sustituimos los números por las letras *a, b, c,…* nos encontramos en *AA* y llegamos a adiciones de la forma: $a + b$, $a + b + c$. Establece así, reglas fundamentales de operaciones cuando los símbolos representan letras; por ejemplo:

$$a + b = b + a,\ a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a$$

Nos advierte que la sustracción no es conmutativa y que en $a - b$, a debe ser mayor que b. En caso contrario, $a - b$ representa una cantidad imposible en *AA*. Es precisamente esta distinción surgida en la operación de sustracción lo que obliga a la separación entre *AA* y *AS*. Afirmaba que nos encontramos siempre ejemplos de operaciones en *AA* que no podemos realizar o resultados que no podemos reconocer. Es muy difícil en innumerable casos, descubrir la imposibilidad de operaciones o la inadmisibilidad de un resultado antes de que la operación se realice. Por ejemplo, al sustraer de 7a + 5b, los elementos: a + 3b, 3a – 2b y 3a + 7b, obtenemos: 7b – 10a. Este resultado es imposible en *AA*. Explicó que sería conveniente denominar a todos los términos que no están precedidos por signo alguno, o lo están por el signo más, términos positivos y aquellos precedidos por el signo menos, términos negativos. Señaló que los estudiantes deben advertir que no se adhiere significado a los adjetivos positivo y negativo en *AA*. Peacock desvía así el énfasis de atribuir significado a los símbolos y signos a priorizar las leyes de las operaciones.

Este autor advirtió que cuando los números son sumados, sustraídos, multiplicados o divididos, generalmente omitimos al concluir la operación, toda traza de los números originales y hacemos uso únicamente del resultado final expresado por los nueve dígitos

y el cero. Sin embargo, si empleamos símbolos para denotar números generalmente no podemos, al menos que se trate de operaciones inversas, omitir en los resultados los símbolos involucrados en las operaciones, ni tampoco las operaciones mismas. Este hecho dio nacimiento a las forma equivalentes. Mostró que al encontrar las forma equivalentes, arribamos a restricciones en *AA*, por ejemplo:

$$c - 10 + d + 8 - 14 - d + 9 + e = c + e - 7.$$

Sin embargo no puede igualarse a: –7 + c + e, expresión imposible en *AA*.

En el capítulo V se encuentran formas equivalentes en ecuaciones cuadráticas que nos conducen a soluciones ambiguas. Así en

$19x - 39 - 2x^2 = 6x - 33$, existen dos valores de x que son: $\frac{1}{2}$ y 6, al completar cuadrados obtenemos:

$$\frac{169}{16} \quad \frac{-13x}{2} \quad + x^2 = \quad \frac{121}{16}$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, se llega a:

$$\frac{13}{4} \; - x \; = \frac{11}{4}; \; x = \frac{1}{2}.$$

Pero si invertimos el orden de los términos de la ecuación anterior, construiremos una forma equivalente a ésta y obtendremos: x = 6. Existen dos valores de *x*. Por consiguiente, la solución es ambigua. Afirmaba también que, las ecuaciones pueden ser posibles o imposibles. La ecuación: $8x^2 + 33x = 44 - 48$ involucra una operación imposible. Las dos raíces de esta ecuación en *AS* serían –4 y $\frac{1}{8}$ pero ninguna de las dos puede interpretarse en *AA*. Esto muestra que las soluciones de ecuaciones requerirá en general, de la ayuda de los propios principios de *AS*.

El estudio

Basándonos en el hecho manifestado por Peacock de que el estudiante debe enfrentarse con las restricciones del Álgebra Aritmética a fin de poder arribar de manera inaplazable al Álgebra Simbólica, realizamos un estudio empírico con sujetos actuales (Gallardo y Torres, 2005 y 2006). Iniciamos con 40 alumnos de edades entre los 15 y 16 años del décimo grado de la escuela preparatoria de la Universidad Autónoma del Estado de México. A partir de su desempeño en el cuestionario y su trabajo en el aula, se eligieron a tres alumnos para entrevistar y finalmente se seleccionó a (M) por la prolífera interacción de lenguajes en uso al resolver los ejercicios.

En el cuestionario y en la entrevista se desarrollaron los temas siguientes: operaciones en lenguaje natural y en lenguaje algebraico, resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Aquí reportamos algunos de los ejercicios realizados en entrevista video–grabada con el estudiante elegido (M). Para su análisis, las respuestas del alumno las hemos organizado en torno a la formación de operaciones, formación de resultados de equivalencia y sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas. Estos tres rubros se originaron a partir del pensamiento de Peacock: la Ley de Transición de Resultados y la Existencia Independiente del signo menos. Además, siguiendo a este autor se analiza detalladamente cualquier cambio en el lenguaje utilizado por el estudiante ya sea verbal o escrito así como la forma vertical u horizontal que emplee.

Sobre la Formación de Operaciones

Ejercicio A. *E: Representa la resta de b más c de a*

1. M: ¿La resta de *b* más *c* de *a?*... [Escribe]: *– bc + a.*

2. E: Si yo te pidiera la resta de 7 más 5 de 10.

3. M ¿De siete más 5?

4. E: De 10.

5. M: Sería entonces 7 más *5* igual a 10... Pero 7 más 5 no es igual a *10*... No entiendo qué es de *10.*

6. E: Bueno, resta 4 de 10.

7. M: ¡Ah! [Vuelve a leer el enunciado del ejercicio].

8. M: [Escribe]: *a – (b + c).*

En el renglón 1 (Rl) escribe: *– b c + a,* vía una lectura de izquierda a derecha de la frase: "la resta de *b* más *c* de a". Interpreta la palabra "resta" como el signo "–" y traduce *b* más *c* como *b c.* M transforma el lenguaje verbal del enunciado en lenguaje escrito en forma horizontal. En R2, E decide sugerirle una resta en un nivel más concreto, esto es, con números naturales para que identifique la operación planteada. En R3, M verbaliza: "de 7 más 5" y olvida la existencia de la resta. Aquí aparece el lenguaje verbal. Además en R5, M iguala esta suma a *10.* Se expresa en lenguaje verbal. Afirma que no entiende la expresión: "de *10".* En R6, E recurre a un ejemplo numérico aún más simple. En R8, M recupera la resta para literales, que rescató de R6, al verbalizar E: "resta *4* de *10".* En R8, M forma la operación planteada en Rl, al volver a leer el enunciado del ejercicio A, escribe: a – (b + c). Recurre a un lenguaje escrito horizontal.

Ejercicio B. E: Restar d – e + 5 de c + d – 2 .

9. M: Este [d – e + 5] se lo tengo que restar a este [c + d – 2]. Trazos del estudiante:

10.
$$\begin{array}{rl} & c + d - 2 \\ - & \underline{d - e + 5} \\ & c + e - 7 \end{array}$$

11. y entonces quedaría: *c,* la *d* se elimina, y queda menos *e*. ¡Ay!, me equivoqué, es mas *e* y vas a restar 5 de menos 2, es menos 7.

En R9, M interpreta correctamente el lenguaje verbal y en R10 forma la sustracción en el lenguaje escrito vertical. Es relevante observar que verbaliza **números** negativos (menos 2, menos 7) empleando para ello un lenguaje verbal.

Sobre la Formación de Resultados de Equivalencia.

Ejercicio C. E: Escribe una forma equivalente a: a – a =

12. M: [Escribe]: a – a – a + a pero esto [–a + a] se elimina.

13. E: Muy bien.

Ejercicio D. E: Escribe una forma equivalente *a:* *a – b* =

14. M: [Escribe]: *a – b – b + b.*

15. E: ¿Habría otra forma de escribir *a* menos *b*?

16. Sí. [Escribe]: *–b + a.*

En R14, utiliza el cero formado por –a +a, para lograr la expresión equivalente: *a–a = a–a – a + a*

Usó el lenguaje escrito horizontal. En R16, forma el resultado de manera análoga a R14,

esto es, agrega el cero: $–b + b$. En R16, surge una nueva forma equivalente:

$a – b = – b + a$ que contiene al término negativo – b. Emplea lenguaje escrito horizontal.

Ejercicio E. E: Escribe una forma equivalente a*:* $a – (b + c + d) =$

17. M: [Escribe]: $a – b – c – d$.
18. E: ¿Cómo lo obtuviste?
19. M: ...Cambié el signo.
20. E: ¿Es resta ésta $[a– (b + c + d)= \ ]$?
21. M: Yo veo que esta $[a]$ es aparte y el signo menos es el que multiplica a toda esta
22. expresión $[b + c + d]$. Lo que está dentro del paréntesis está multiplicándose con el signo menos.

En R19, M escribe una expresión equivalente al despojarla del paréntesis:

$$a– (b + c + d)=a–b–c–d$$

En R21 y R22, el paréntesis lo conduce a introducir una multiplicación en la sustracción planteada. M hace uso del signo menos para obtener la forma equivalente que se le pide.

En la expresión $a – (b + c + d)$ escrita en formato horizontal no advierte el minuendo ni los sustraendos, sino únicamente usa el signo menos. En R22 afirma: "están multiplicándose con el signo menos". Uso del lenguaje escrito horizontal.

Sobre la Resolución de Ecuaciones Cuadráticas

Ejercicio F. E: Resuelve la siguiente ecuación $2x^2 = 50$

23. M: [Verbaliza]: cinco.
24. E: Anótalo.
25. M: [Escribe]:

$$x^2 = \frac{50}{2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$

26. E: Cuando tienes una raíz, ¿cuántos valores hay?
27. M: ¡No entiendo!... Dos. ¿x, x?
28. E: [Escribe ±]: $\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{25}$. Uno es positivo $\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{25}$ y el otro,
29. negativo $\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{25}$
30. M: [Escribe]: $x_1 = 5$

$x_2 = – 5$

31. E: ¿Por qué me diste un sólo valor al principio?
32. M: Porque quien te da más es el positivo. El menos 5 no es válido.
33. E: ¡Compruébalo!
34. M: [Trazos del estudiante]: $2 (–5)^2 = 50$

$2 (25) = 50$

$50 = 50$

35. Todos los números al cuadrado dan un positivo. Los positivos son más valiosos…por 36. decir algo, un terreno ocupa el número positivo.

En R 32, M no valida la solución negativa. La expresión "quién te da más es el positivo" manifiesta un juicio de valor asociado a 5 que corresponde a un contexto fuera de las matemáticas como se comprueba en R35 y R36 donde afirma: "…los positivos son más valiosos, …por decir

algo, un terreno ocupa el número positivo". E sugiere a M en R33, comprobar su resultado, hecho que realiza en R34. El proceso de verificación vía la sustitución del valor (–5) en la ecuación, no conduce a M a la aceptación de la solución negativa. Prioriza el contexto (un terreno) en detrimento de la validez del lenguaje algebraico. Esto significa que este lenguaje no se encuentra bien instalado aún, en el sujeto. Observamos que en R23, M supone una única solución positiva en lenguaje verbal. En R27, duda sobre el doble valor que acompaña a la raíz cuadrada. (Remembranza de la imposibilidad y de la ambigüedad que preocupaban a Peacock).

***Ejercicio G*.** E: ¿Cómo le harías en esta ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$?

37. [Trazos del estudiante]:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$(x-3)^2 = -2 + \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = \pm \sqrt{\left(-2 + \frac{9}{4}\right)}$$

$$(x-3)^2 = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x_1 = + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$x_2 = - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

38. E: ¿A qué llegaste?

39. M: Menos 1. Casi es lo mismo, al pasarlo al cuadrado en la comprobación ya salen positivos.

En R39, M parece justificar sus resultados al comprobar en la ecuación. Afirma tranquilizado: "al pasarlo al cuadrado, ya salen positivos". Se trata de un "reconocimiento condicionado" de la solución negativa pues este valor se transforma en positivo durante el proceso de verificación de la solución. Utiliza los lenguajes verbal y escrito horizontal.

De los diálogos de la entrevista se observa que los términos negativos surgen cuando el estudiante utiliza el lenguaje escrito en forma vertical (ejercicio B) y en forma horizontal (ejercicio D). Ante expresiones con paréntesis (ejercicio E) M recurre al uso independiente del signo menos y suprime la operación de sustracción. La solución negativa es evitada en F y condicionada en G. Así, el estudiante acepta o rechaza los números negativos dependiendo del lenguaje en uso que elige para la resolución de las tareas propuestas.

Conclusiones

El germen de algunas de las ideas que comenzaron a manejarse en la literatura de investigación en educación matemática durante la década de los años 80s, se encontraba ya en la obra de Peacock. El advirtió la importancia de las formas equivalentes e incluso el carácter dual

del signo igual que incluye la igualdad aritmética (proceso-resultado) y la igualdad algebraica (equivalencia de expresiones). Es importante señalar que para Peacock hacen sentido los términos negativos en *AA*. Estos se convierten en símbolos negativos en *AS*, pero nunca nombra a estos símbolos números negativos. El conducir al estudiante a transitar por restricciones impuestas a las literales, nos parece muy pertinente en la época actual en la que el alumno se enfrenta además con diferentes sintaxis introducidas por los ambientes tecnológicos. Así como Peacock recurre al artificio teórico del uso independiente del signo menos cuando ha intuido más no logrado una extensión del concepto de número, muchos de nuestros estudiantes desprenden el signo menos del entero antes de comprender la necesaria extensión numérica.

Este artículo muestra sólo el inicio de lo que puede llegar a visualizarse analizando detenidamente la génesis de la sintaxis y la semántica del lenguaje algebraico. Si para Peacock los términos negativos del *AA* no tienen significado alguno, si que lo adquiere en el *AS* donde los símbolos cesan de ser aritméticos y puede determinarse el significado de las operaciones y de las cantidades no por definición sino vía interpretación. Por ejemplo, la adición de un símbolo precedido por un signo negativo es equivalente a la sustracción del mismo símbolo precedida por el signo positivo e inversamente. Así:

$$a + (-b) = a - b = a - (+ b); \quad a - (- b) = a + b = a + (+b)$$

En el caso de símbolos negativos, la operación de adición no puede continuar asociándose con la idea fundamental de crecer, ni la sustracción con la decrecer. Numerosos son los casos en que las cantidades negativas admiten una interpretación consistente. Un ejemplo de la existencia de cualidades de magnitudes fue expresarlas como direcciones opuestas de rectas en geometría, una de las aplicaciones más importantes de *AS*. Otro ejemplo es la simbolización de los conceptos opuestos de posesión y deuda. Peacock agregó: *"los ejemplos anteriores sobre la interpretación del significado de cantidades negativas y de las operaciones a los que están sujetas, serán suficientes para mostrar al estudiante que el AS no es irreal ni imaginaria"*, (1845).

Con lo mencionado anteriormente, hemos comenzado a responder las preguntas planteadas al inicio del artículo y por ende, justificado el recurrir al análisis de una obra histórica para la interpretación de hechos presentes. Hemos continuado con un estudio empírico a gran escala situado en la transición de la aritmética al álgebra, así como también insistido en el análisis de textos de contemporáneos de George Peacock.

Referencias bibliográficas

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa. Grupo Editorial Iberoamericano*. México.

Gallardo, A.; Torres, O. (2005). El álgebra aritmética de George Peacock: Un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica. *Memorias del IX simposio de la SEIE,* pp.243 – 249. Universidad de Córdoba. España,

Gallardo, A.; Torres, O. (2006). La negatividad permitida: George Peacock en la historia y en la enseñanza: *Memorias del X simposio de la SEIEM,* pp. 161 – 170. Universidad de Zaragoza. Huesca. España.

Peacock, G. (1842). *A treatise on algebra*. 2nd Ed. (Reprinted, New York: Scripta Matematica 1940).

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN UN AULA DE FORMACIÓN DE MAESTROS [1]

Víctor Javier Barrera Castarnado
C.E.S. Cardenal Spínola-CEU
Universidad de Sevilla
Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada (encastro@ugr.es)

Resumen
En este documento se presentan algunos de los resultados de un estudio que pretende obtener información sobre la capacidad que muestran estudiantes, maestros de Educación Primaria en formación, para resolver, de manera intuitiva, tareas en las que el uso del razonamiento inductivo es necesario, y contrastar la mejora que se produce después de llevar a cabo un tratamiento del tema en cuestión.

Abstract
In this document we present some of the results of a study[1] which tries to obtain information on the capacity that primary school teacher trainees show to solve tasks intuitively, where the use of inductive reasoning is necessary, and to contrast the improvement produced after carrying out treatment of the theme in question.

[1] Este estudio ha sido realizado dentro de un proyecto del Plan Nacional de I + D + I financiado por el M.C.yT. con el nº BSO2002-03035 cofinanciado con fondos FEDER.

Barrera, V. y Castro, E. (2007). Razonamiento inductivo en un aula de formación de maestros. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 197-206.

Introducción

Los alumnos de educación primaria van a construir conocimiento mediante razonamiento inductivo, así se desprende del análisis de libros de texto que se usan en cursos de educación primaria, donde se puede apreciar cómo gran parte de la formación matemática que se presenta en ellos se introduce a través de ejemplos concretos. Estos textos responden a las exigencias de los documentos curriculares oficiales MEC (1989) y de otras recomendaciones de tipo curricular expresadas en documentos como los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 1991) y el Informe Cockcroft (1985). Nuestro posicionamiento es que si los alumnos de educación primaria necesitan ejercitarse en dicho razonamiento, sus maestros deben estar preparados para trabajar el mismo, en el aula. Consideramos por tanto necesario que los estudiantes para maestros se preparen para realizar tal trabajo, ya que en su futuro profesional, deberán hacer uso de este tipo de razonamiento en el proceso de enseñanza-aprendizaje de sus alumnos de educación primaria, de aquí nuestro interés en estudiar este tema.

Por razonamiento inductivo entendemos aquel que partiendo de la observación de casos particulares y de las regularidades que estos presentan se llega a una propiedad o generalización de una regla. El conocimiento que se genera por inducción parte de observaciones específicas y concluye en generalizaciones (González, 1998; Santamaría, 1995). Desde las observaciones concretas se detectan patrones, regularidades a partir de las cuales se formulan algunas hipótesis que habrá que demostrar para poder dar resultados de tipo general. Entre las acciones implicadas en el razonamiento inductivo encontramos el estudio de casos particulares, la observación de regularidades en esos casos, el realizar conjeturas sobre posibles propiedades generales, y una última acción de demostración de dicha conjetura. Estas acciones son importantes tanto en matemáticas como en otras ciencias.

Nuestro trabajo queda enmarcado por dos campos de la Educación Matemática, por una parte la Formación de Profesores, ya que vamos a trabajar con estudiantes para profesores de primaria, y por otra el Pensamiento Numérico y Algebraico, ya que pretendemos estudiar el uso que estos sujetos hacen del razonamiento inductivo utilizando secuencias numéricas y situaciones problema que puedan resolverse mediante este tipo de secuencias.

En relación a la Formación de Profesores, algunos autores como Sánchez y García (2002), Carrillo y Climent (1999), Blanco et al (1995), Bromme (1994) o Llinares (1991) analizan la construcción del conocimiento profesional de los futuros maestros. De forma general, los elementos que consideran como componentes del conocimiento profesional de los profesores se pueden recoger en estos 4 tipos: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento del contexto. Además muestran que en el profesor se genera un tipo de conocimiento diferente al que los formadores de profesores aspiran a que adquieran en la formación inicial que es el producto de sus concepciones y creencias. Con este trabajo pretendemos indagar sobre el conocimiento matemático concreto, de tipo procedimental, como es el razonamiento inductivo, en profesores en formación.

En la bibliografía consultada sobre trabajos relacionados con el razonamiento inductivo, se encuentran algunos que ofrecen propuestas didácticas de aprendizaje de la inducción en educación primaria y secundaria. Así ocurre con Allen (2001), Castro (2004), Flores (1992) u Orton y Orton (1994). Otros trabajos están relacionados con la utilización de modelos geométricos en la generalización de ciertas reglas (Feinberg-McBrian (1996), Fernández (2003), Meavilla (1992) o Pagni (1992) entre otros). Por lo general, se defiende la idea de trabajar la inducción, en todos los niveles educativos, desde los primeros aprendizajes

matemáticos, introduciendo a los alumnos gradualmente desde las comprobaciones con casos particulares hasta las demostraciones formales. No obstante todos los trabajos consultados hasta ahora (Avital, 1972; Cañadas y Castro, 2002; Christiansen, 1970; Dienes, 1970; Miyazaki, 2000; Rowan y Bourne, 1999) han sido efectuados con estudiantes de educación primaria o secundaria, en ningún caso se ha trabajado con maestros en formación. Constatamos así la necesidad de estudiar el uso y desarrollo del razonamiento inductivo en maestros en formación.

La lectura y análisis de la bibliografía consultada de la que muestra los documentos citados, se nos plantean entre otras las siguientes cuestiones:

¿Qué uso hacen, de manera intuitiva, los maestros en formación del razonamiento inductivo cuando resuelven tareas matemáticas en el que dicho razonamiento está involucrado?

¿Cómo será la mejora en el uso del razonamiento inductivo, por parte de los estudiantes para profesores de educación primaria, después de haber trabajado en clase un tema sobre razonamiento inductivo?

Objetivos de la investigación:

El objetivos que nos planteamos en este trabajo es estudiar el cambio (suponemos que mejora) que se produce en la utilización del razonamiento inductivo por parte de maestros en formación, después del desarrollo en clase de un tema relacionado con la resolución de problemas en los que dicho razonamiento está presente.

Este objetivo general queda desglosado en los dos objetivos parciales siguientes.

Objetivo 1: Estudiar la utilización que hacen de manera intuitiva, maestros en formación, del razonamiento inductivo cuando resuelven tareas matemáticas apropiadas para dicho uso.

Objetivo 2: Estudiar la utilización que hacen del razonamiento inductivo, estudiantes para profesores de educación primaria, después de haber trabajado en clase un tema en el que se contempla dicho contenido.

Metodología (Diseño de la investigación)

El trabajo que presentamos es de tipo exploratorio. Siguiendo a Cohen y Manion (1990) (p.245) el diseño de investigación utilizado es de tipo pre-experimental de pre-test y post-test de un grupo. Con el pre-test se mide el uso que hacen de manera intuitiva los profesores de Educación Primaria en formación (O_1) del razonamiento inductivo. A continuación se introduce una "manipulación experimental" (X), en este caso el estudio en clase de una unidad didáctica en la que se trabajan contenidos que favorecen el uso del razonamiento inductivo. Después de este tratamiento experimental se vuelve a medir de nuevo el uso que hacen estos sujetos (O_2) del razonamiento inductivo a la hora de resolver situaciones en las que tienen que aplicar acciones relacionadas con la inducción. Posteriormente se procede a explicar las diferencias entre las puntuaciones del pre-test y el post-test por la referencia a los efectos de X.

$$O_1 \qquad X \qquad O_2$$

Esquema del diseño de investigación

Los sujetos que intervinieron para realizar la fase empírica del trabajo fueron 60 estudiantes de ambos sexos de la diplomatura de Magisterio en el CES Cardenal Spínola-CEU de la Universidad de Sevilla. La elección de los alumnos viene dada de forma natural por ser estos alumnos del autor del trabajo en los grupos de 1º de Lengua Extranjera, 2º de Educación Musical y 3º de Educación Física.

Los grupos que realizaron las dos pruebas no eran exactamente iguales, aunque la mayoría de los alumnos participaron en ambas pruebas, hubo algunos que únicamente realizaron uno de los test. Aún así, tanto el número de participantes como las características generales del grupo sí se mantuvieron. Todos los alumnos habían estudiado previamente la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", y en el periodo de la toma de datos cursaban una asignatura del área de Didáctica de las Matemáticas en la que trabajaban la resolución de problemas, y entre las diferentes estrategias estudian la generalización, haciendo uso del razonamiento inductivo.
Para la selección de los ítems de las pruebas, se tuvo en cuenta la prueba que utilizó la doctora Dña. Encarnación Castro para su trabajo de investigación *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales* (Castro, 1995) para obtener el título de doctora en Matemáticas.

A la hora de preparar dicha prueba se tuvieron en cuenta diferentes aspectos en el trabajo con secuencias puntuales y numéricas, quedando finalmente caracterizada de la forma siguiente: dos tipos de secuencias, lineales y cuadráticas, tres sistemas simbólicos de representación, patrones puntuales, secuencia usual de números y desarrollos aritméticos, y cuatro acciones o procedimientos fundamentales, continuar una secuencia, extrapolar, explicar la regla seguida por una secuencia y dar la expresión del término general.

Se confeccionaron dos pruebas similares con diez tareas cada una, ocho no contextualizadas en las que aparecen secuencias numéricas bajo distinta representación. Cada una de ellas contiene varios ítems de forma que permita recoger las variables señaladas anteriormente, y las posibles combinaciones entre ellas. Los dos últimos ítems son problemas que pueden resolverse utilizando secuencias numéricas.
La siguiente tabla muestra las tres variables consideradas, dos de ellas, sistema de representación y procedimiento, en los ejes horizontal y vertical de la tabla respectivamente.

SISTEMAS SIMBÓLICO

PROCEDIMIENTO	R.puntu.	A. usual	D. aritme.
continu.	1,b / 1,a	2,c / 2,a	2,d / 2,b
explicar	6,b / 6,a	5,b	5,a
extrapo.	4,b / 4,a	3,c / 3,a	3,d / 3,b
generali.	7,b / 7,a	8,c / 8,a	8,d / 8,b

Tabla 1: Clasificación de los ítems de las pruebas.

Cada celda de esta tabla se ha dividido en dos partes, una blanca reservada a la secuencia lineal y otra gris para la secuencia cuadrática. En cada uno de los huecos se indica con un número y una letra la localización del ítem que verifica las tres condiciones, el número corresponde a la tarea y la letra al lugar de la misma en el que se encuentra. Se aprecia en la tabla dos lugares vacíos, son dos ítems que hacen referencia a explicar la regla. Se optó por suprimir algún ítem porque parecían demasiados.

Análisis de datos

Una vez realizadas las dos pruebas por los alumnos, se han tabulado los resultados asignando valores numéricos (0, 1 o 2) a cada tipo de respuesta: no contestada, fallo y acierto respectivamente, de los ocho primeros ítems. Se ha hecho un análisis estadístico básico utilizando una hoja de cálculo (Excell) tanto para el pre-test como para el post-test. También se ha calculado el número medio de respuestas dadas en función de las diferentes variables consideradas (tipo de secuencia, tipo de representación que se utiliza en la secuencia o tipo de acción que se requiere en la actividad), para poder determinar para cada variable qué tipo de valor presenta mayor dificultad. Con los resultados de los dos problemas se ha realizado un análisis de tipo cualitativo.

Se compararon los resultados de las dos pruebas con la intención de estudiar el cambio en las respuestas a este tipo de actividades después de trabajar en clase con los sujetos en cuestión una unidad didáctica en la que se estudian contenidos conceptuales y procedimentales relacionados con el razonamiento inductivo.

En la tabla siguiente aparece reflejado el número de respuestas de cada tipo dado para cada ítem en cada una de las pruebas:

Ítem	1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7a	7b	8a	8b	8c	8d	9	10a	10b	10c	10d
N.C.	0	1	0	0	8	1	0	0	8	2	0	1	1	6	0	5	7	16	6	12	29	18	8	7	12	19	31
N.C.	0	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0	5	5	9	7	7	8	15	3	9	22	10	0	0	0	5	5
Fallo	38	28	0	2	8	0	7	7	14	13	7	13	15	9	6	17	18	40	37	30	24	24	41	16	34	26	18
Fallo	9	9	2	2	5	1	1	2	11	7	9	12	5	13	7	19	9	14	28	25	13	3	2	2	2	3	6
Acierto	22	31	60	58	44	59	53	53	38	45	53	46	44	45	54	38	35	4	17	18	7	18	11	37	14	15	11
Acierto	51	50	58	58	54	59	57	56	47	51	51	43	50	38	46	34	43	31	29	26	25	47	58	58	58	52	49

Tabla 2: Número de respuestas para cada ítem en pre-test y post-test

En dicha tabla las filas que aparecen en blanco corresponden al número de respuestas dadas para cada ítem del pre-test, las que aparecen sombreadas indican el número de respuestas de cada tipo para los ítems del post-test. Estos datos quedan representados en las siguientes gráficas.(Las características de cada ítem pueden consultarse en la tabla 1).

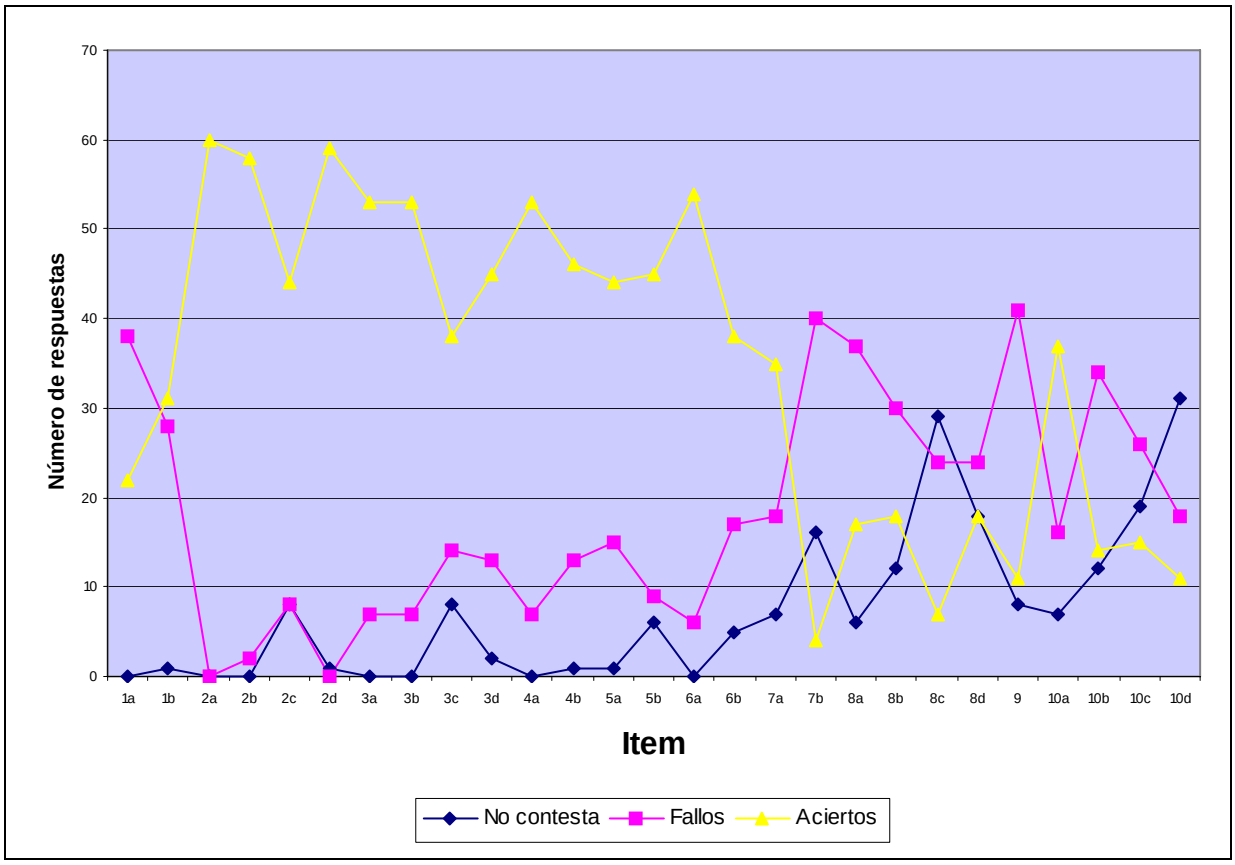


Gráfico 1: Tipo de respuestas por ítem (Pre-test)

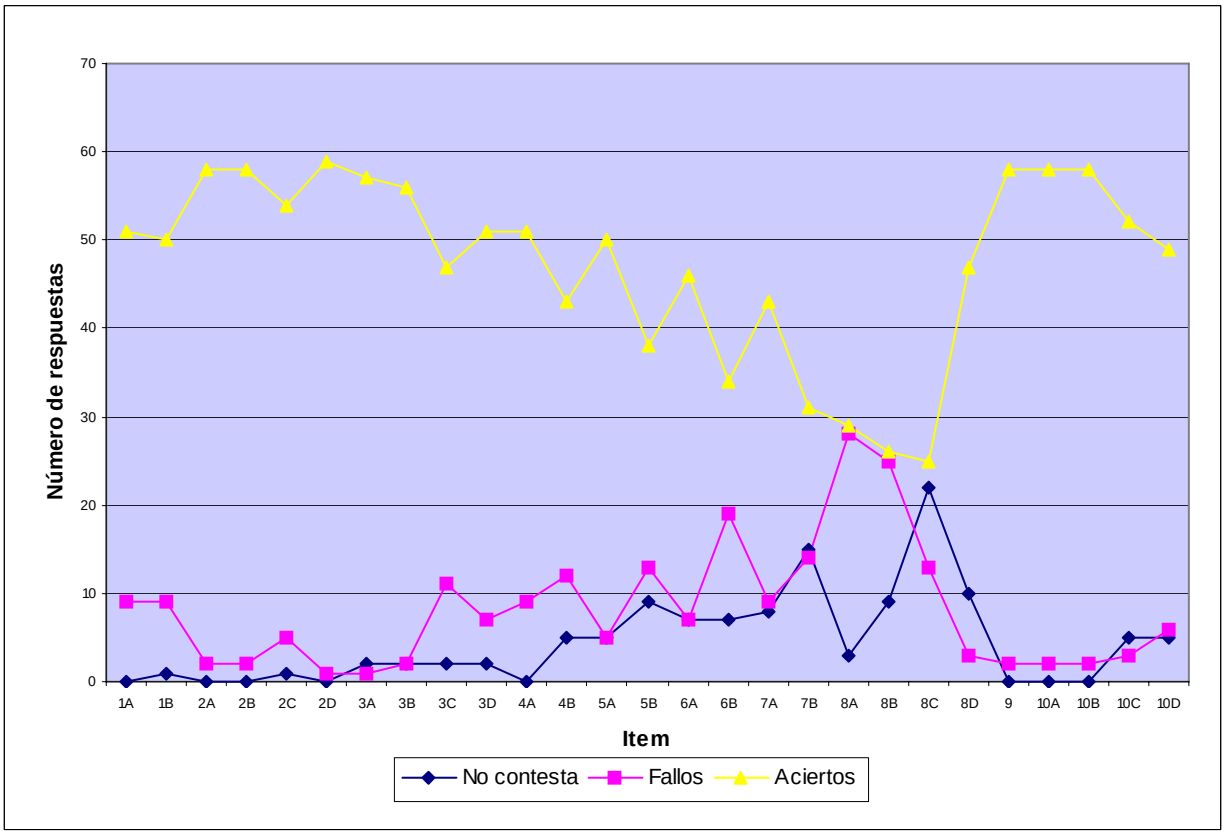


Gráfico 2: Tipo de respuestas por ítem (Post-test)

A simple vista, y como cabía esperar, los resultados del post-test son en general mejores que los del pre-test. Por una parte está la instrucción que han recibido los sujetos entre una prueba y otra. También pudo influir que en la primera prueba había actividades totalmente novedosas para estos alumnos (como el trabajo con secuencias puntuales), y el efecto sorpresa desapareció para el post-test.

En casi todas las tareas el número de respuestas correctas es superior en la prueba final que en la inicial, y en aquellas que han disminuido el número de aciertos la diferencia es mínima.

Observamos que en ambas pruebas se mantiene la tarea 8c, en la que tenían que generalizar una secuencia cuadrática expresada de manera usual, como la tarea menos contestada, aunque en la segunda prueba el número de respuestas correctas a esta actividad es superior al de el mismo ítem en el pre-test.

Si nos fijamos en los dieciséis primeros ítems, a excepción de los 1a y 1b, se mantienen resultados parecidos en las dos pruebas. Donde aparecen diferencias más significativas es en el último tramo de las actividades descontextualizadas.

La tabla siguiente refleja el número medio de respuestas de cada tipo dadas en ambas pruebas.

	Pre-test	Post-test
No contesta	7,33	4,44
Incorrecta	18,22	8,18
Correcta	34,44	47,37

Tabla 3: Número medio de respuestas en cada prueba

Por otra parte se han estudiado el número medio de respuestas de cada que se ha dado en función de las variables a las que se han hecho mención anteriormente.

	No contesta	Fallos	Aciertos
Secuencia Puntual	3,75	20,87	35,37
Secuencia Numérica	7.28	13,14	39,57
Desarrollo Aritmético	5,71	14	40,28
Continuar secuencia	1,67	12,67	45,67
Extrapolar términos	1,83	10,17	48
Explicar regla	2,75	11,75	45,25
Generalizar	14,67	28,83	16,5
Secuencia lineal	2,36	15,18	42,45
Secuencia cuadrática	8,63	17,27	34,09

Tabla 4: Número medio de respuestas (pre-test)

	No contesta	Fallos	Aciertos
Secuencia Puntual	5,38	11,00	43,63
Secuencia Numérica	5,57	10,43	44,00
Desarrollo Aritmético	4,00	6,43	49,57

Continuar secuencia	0,33	4,67	55,00
Extrapolar términos	2,17	7,00	50,83
Explicar regla	7,00	11,00	42,00
Generalizar	11,17	15,33	33,50
Secuencia lineal	3,27	9,00	47,73
Secuencia cuadrática	6,73	9,73	43,55

Tabla 5: Número medio de respuestas (post-test)

Analizamos los resultados obtenidos en las ocho tareas no contextualizadas en función de las variables consideradas.

En relación con el tipo de secuencia que se utiliza en la primera prueba, las tareas con secuencias lineales presentan menos dificultad que las de secuencias cuadráticas. Si observamos los datos de la tabla 4, el número medio de ítems no contestados es mayor en las actividades de secuencias cuadráticas (8,63) que en los de secuencias lineales (2,36). En relación a las respuestas erróneas también es levemente superior el número medio de fallos en secuencias cuadráticas (17,27) que en lineales (15,18).

Si comparamos estos resultados en el post-test podemos comprobar como en este caso esas diferencias disminuyen. En la tabla número 5 se recoge el número medio de ítems no contestados en actividades con secuencias lineales, que es 3,27 y en actividades con secuencias cuadráticas es 6,73. Por otra parte el número medio de errores es muy similar tanto en secuencias lineales como cuadráticas (9 y 9,73 respectivamente)

Se podría concluir que las secuencias lineales tienen un carácter intuitivo, se aprenden a través del currículo oculto y las secuencias cuadráticas necesitan una "instrucción" o proceso de aprendizaje concreto.

En cuanto al tipo de sistema de representación que se utiliza se observa que en las cuestiones presentadas donde mayor número de errores cometen los alumnos, cuando responde de manera intuitiva es en aquellas situaciones que la secuencia viene representada utilizando una configuración puntual. En la tabla 4 se recoge el número medio de respuestas erróneas y es de 20,87. Esto quizás sea debido a que están menos habituados a este tipo de representación que a las secuencias numéricas. Al comparar con el número medio de respuestas erróneas en la segunda prueba (tabla número 5), se observa como en el post-test es bastante inferior al pre-test, debido al trabajo con secuencias de números poligonales llevado a cabo por estos alumnos en clase entre una prueba y otra.

Comparando los resultados reflejados en las tablas 4 y 5 respecto el sistema simbólico, las actividades en las que menos dificultad tienen los alumnos son aquellas en las que la secuencia está representada mediante un desarrollo aritmético. En este caso la secuencia se puede ver como una combinación de secuencias numéricas más simples.

En cuanto a los resultados obtenidos en las pruebas atendiendo al procedimiento a seguir, como refleja la tabla 4, los alumnos tienen grandes dificultades a la hora de dar la expresión general de la secuencia, independientemente del tipo de representación utilizada. El número medio de ítems sin contestar es muy elevado (14,67), al igual que el número de errores.

En el post-test (tabla 5) el número de errores en las respuestas a las tareas requeridas desciende considerablemente respecto al pre-test, independientemente del tipo de representación.

En relación con lo errores cometidos, uno de los más frecuentes es dar una explicación de la regla que sigue la secuencia que no la determina de manera biunívoca. En otros casos, aún conociendo la regla, los alumnos tienen dificultad para utilizar el lenguaje simbólico que representa dicha expresión.

Analizando los resultados de la tabla 3, se puede comprobar como el número medio de respuestas correctas en el post-test (47,37) aumenta respecto al número medio de respuestas válidas del pre-test (34,44). Por tanto, podemos concluir que la instrucción beneficia la resolución correcta de las tareas con secuencias numéricas planteadas a los alumnos.

Conclusiones

Del análisis de los datos obtenemos que solo con su conocimiento intuitivo, la formación de los futuros maestros no está completa en lo relacionado al razonamiento inductivo.

El tratamiento realizado en el aula tampoco ha dado un resultado satisfactorio pues aunque, como era de esperar, se ha producido mejoría, esta no ha sido muy elevada. Para la continuación del trabajo, trataremos de realizar una mejora tanto en el tratamiento como en la metodología.

Hemos de considerar que hay que dedicar más esfuerzo al trabajo de traslación entre los distintos tipos de representación, a la obtención del término general de una sucesión, a la explicación de lo que significa el término general procurando que se utilice un vocabulario correcto.

Uno de nuestros objetivos será detectar cuales son los obstáculos y dificultades que tienen estos alumnos para hacer un uso adecuado del razonamiento inductivo en la resolución de situaciones contextualizadas y no contextualizadas.

Referencias Bibliográficas

Allen, L.G. (2001). Teaching Mathematical Induction: An Alternative Approach, *The Mathematics Teachers*, vol. 94 nº6, 500-504.

Avital, S. (1972). Induction and Deduction in a Unit of Early Álgebra, *School Science and Mathematics*, vol. 8, 692-696.

Blanco, L.; Mellado, V.; Ruiz, C. (1995). Conocimiento Didáctico del Contenido en Ciencias Experimentales y Matemáticas y Formación de Profesores. M.E.C. *Revista de Educación* nº 307, 427-446.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychology topology of teachers´ professional knowledge. En: Bielher, R.; Sholz, R.; Sträber, R. & Winkelman, B. (Eds.), *Didactics of Mathematicas as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 73-88.

Cañadas, M.C.; Castro, E. (2002). La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores. *Jornadas sobre Formación Inicial de Profesores*. Universidad de Granada. Granada.

Carrillo, J.; Climent, N. (Eds.) (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas,* Universidad de Huelva Publicaciones. Huelva.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Castro, E. (2004). Secuencias numéricas y visualización. MEC *El Número, Agente Integrador del Conocimiento.* Madrid: Aulas de Verano. Instituto Superior de Formación del Profesorado. 37-53.

Christiansen, B. (1970). Induction and Deduction in the Learning of Mathematics and in Mathematical Instruction, *Educational Studies in Mathematics* 2, 139-159.

Cockcroft, W. (1985). *Las Matemáticas si cuentan.* Informe Cockroft. MEC. Madrid.

Cohen, L.; Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa.* Editorial Muralla S. A. Madrid.

Dienes, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Vicens-Vives. Barcelona.

Feinberg-McBrian, C. (1996). The Case of Trapazoidal Numbers, *The Mathematics Teacher,* vol 89, 16-21.

Fernández, S. (2003). Configuraciones Numéricas en Primaria. ¡A golpe de vista!, *Sigma* nº 22, 7-21.

Flores, A. (1992). Ida y Vuelta: Primero adivinar, luego probar. *Educación Matemática,* vol. 4, nº2, 79-96.

González, M.J. (1998). *Introducción a la Psicología del Pensamiento,* Trotta. Madrid.

Llinarez, S. (1991). *La Formación de Profesores de Matemáticas,* GID Universidad de Sevilla. Sevilla.

Meavilla, V. (1992). Álgebra Visual: Suma de Números Triangulares. *Sigma*, nº 12, 56-58.

MEC (1989). *Diseño Curricular Base*, Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 41, 47-68.

N.C.T.M. (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática,* SAEM-Thales. Sevilla.

Orton, J., Orton, A. (1994). Students' perception and use of pattern and generalization. In J.P. da Ponte and J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 407-414. Lisbon, Portugal.

Pagni, D. (1992). Extensión of Dimensions. *The Australian Mathematics Teacher, v*ol.48, nº 3, 30-32.

Rowan, T.; Bourne, B. (1999). *Pensando como matemáticos*, Manantial. Buenos Aires.

Sánchez, M.V.; García, M. (2002). Formadores de Profesores de matemáticas. ¿Qué puede aportar la Didáctica de la Matemática a su Formación? En: Penalva, M.C.; Torregrosa, G. y Valls, J. (coord.), *Aportaciones desde la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales,* 203-210, Universidad de Alicante. Alicante.

Santamaría, C. (1995). *Razonamiento y comprensión.* En: M. Carretero, J. Almaraz y P. Fernández (Eds.) ¿FALTA ALGO?..

Smith, L. (2002). *Reasoning by Mathematical Induction in Children´s*, Pergamon. Netherlands.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN. ANÁLISIS DE LAS INTERFERENCIAS ENTRE SIGNIFICADOS

Jesús Gallardo Romero
José Luis González Marí
Universidad de Málaga, Málaga, España
Wenceslao Quispe Yapo
Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú

Resumen
A partir de la configuración específica de uno de los escenarios básicos donde se manifiesta el problema de la interpretación de la comprensión en matemáticas, se desarrolla una propuesta sustentada en un modelo operativo para realizar dicha interpretación y valoración y se comprueba su utilidad en un estudio realizado sobre la comprensión del concepto de fracción en una muestra de profesores en formación. Las evidencias obtenidas en el uso de ciertos significados de la fracción respaldan una caracterización de la comprensión en términos de prioridades de elección y disponibilidad de empleo en el espacio fenómeno-epistemológico del concepto.

Abstract
In this paper a proposal based on an operative model for assessing the comprehension of Mathematical knowledge is outlined and verified its utility in a specific basic didactical situation concerning understanding the concept of fraction in a teacher training course. The evidences gathered about the use of fraction meanings reveals that the priorities in making choices and the availability of knowledge to be ready to use in its phenomenological and epistemological contexts are useful tools in describing, interpretting and assessing understanding mathematical concepts.

Gallardo, J.; González, J. L. y Quispe, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 207-222.

Enfoques en investigación sobre comprensiòn del conocimiento matemático

La comprensión del conocimiento matemático es un tema de interés y estudio prioritario en Educación Matemática. Las investigaciones en este campo se pueden agrupar en dos categorías: a) las que parten de una aproximación **atomizada** del problema, dedicando una atención separada a cada una de las dimensiones identificadas (naturaleza, funcionamiento, evolución, factores, etc.); b) las que consideran una aproximación **integral** al fenómeno, atendiendo a su estudio a través de las relaciones con otras nociones cognitivas.

Los estudios del primer caso (a), que son mayoría, se han orientado al análisis de las siguientes dimensiones de la comprensión:

- *naturaleza* y *funcionamiento*, estrechamente relacionadas y que atienden a qué es y cómo se produce la comprensión. Suelen abordarse al amparo de propuestas teóricas interpretativas de la relación reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo observable, como son la que vincula la comprensión a las representaciones y conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002) o las que emplean tipologías generales de comprensión (Hiebert y Lefevre, 1986) o de referencias metafóricas (Davis, 1992).

- *evolución,* relacionada con la faceta dinámica y con el principio de que la comprensión se va desarrollando en el individuo a lo largo del tiempo. La comprensión, por tanto, es un fenómeno que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter y Lehrer, 1999; Pirie y Kieren, 1994; Kieren, Pirie y Calvert, 1999; Ilaria, 2002; Cavey y Berenson, 2005). Los modelos jerárquicos de categorías o niveles, como el modelo de proceso de dos ejes desarrollado por Koyama (1993, 1997, 2000), constituyen también otra de las estrategias extendidas en la investigación sobre la evolución.

- *factores,* dimensión que incluye todos aquellos aspectos condicionantes de la comprensión, tales como: la especificidad del objeto de comprensión, las capacidades cognitivas generales del sujeto, la valoración personal que éste realiza sobre el propio objeto o las características del medio (Sierpinska, 1994; Godino, 2000).

- *efectos,* dimensión asociada a los resultados o productos de la comprensión, tales como los comportamientos adaptados, la aplicación de conocimientos, la resolución de problemas, la descripción de acciones o los efectos internos y externos asociados a la comprensión (Duffin y Simpon, 2000).

En el segundo caso (b), los estudios reconocen la vinculación de la comprensión del conocimiento matemático con otras configuraciones cognitivas con las que comparte protagonismo, tales como el significado, el aprendizaje, el pensamiento matemático o las competencias. Es posible apreciar esta visión integral en trabajos clásicos como los de Byers y Erlwanger (1985), donde la comprensión se vincula con el aprendizaje y la memoria; Godino y Batanero (1994), donde la relación se establece con el significado de los objetos matemáticos; Bender (1996), que trata la imagen y la comprensión como modos de pensamiento distintos aunque estrechamente relacionados o Warner *et al.* (2003), que estudia la contribución del pensamiento matemático flexible en el crecimiento de la comprensión.

El problema de la interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático. Una aproximación basada en las interferencias entre significados en escenarios básicos de valoración

En todos los estudios sobre comprensión del conocimiento matemático está presente el problema de la naturaleza interpretativa de la valoración[1] como un condicionante

[1] En esencia, la valoración de la comprensión en matemáticas supone *interpretar* productos observables originados por una actividad cognitiva interna.

metodológico de primer orden. Los estudios dirigen la atención hacia los modos y términos en los que valorar la comprensión y hacia los métodos, técnicas e instrumentos a emplear, reconociéndose en todos ellos:

- la elevada complejidad de la valoración;
- la existencia de limitaciones inherentes a su propia naturaleza;
- la influencia de la especificidad del conocimiento matemático;
- la adecuación de las manifestaciones observables como vía para obtener información sobre la comprensión de los alumnos.

Entre las principales contribuciones se encuentran las que se basan en la representación y las conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992), en la superación de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1994) o en las relaciones con significados institucionales (Godino y Batanero, 1994). Igualmente, destacan los métodos y técnicas centrados en la elaboración de perfiles de comprensión (Pirie y Kieren, 1994), las estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático, como son los análisis semántico y estructural propuestos por Niemi (1996), el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos (Godino, 2002a, 2002b) o la aproximación multifacética que fundamenta el estudio que aquí se presenta y que viene dando muestras de ser operativa en la gestión de las componentes que intervienen en la interpretación del uso del conocimiento matemático (Gallardo y González, 2005, 2006a) en diferentes escenarios básicos de valoración[2].

En el presente trabajo se expone una síntesis de dicha aproximación, se profundiza en uno de los escenarios básicos de valoración y se propone un modelo operativo asociado para la interpretación de la comprensión matemática que acontece en él. Para ello se desarrolla un estudio exploratorio con profesores en formación en el ámbito de la comprensión del número racional. A partir de los desajustes manifestados por los participantes en el empleo de los significados del concepto de fracción se llega a caracterizar e interpretar, en términos de comprensión, el fenómeno de interferencia entre significados que se produce cuando el sujeto debe decidir sobre cuándo y cómo utilizar la fracción ante distintas situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico.

Marco teórico

El marco teórico del estudio se estructura en tres grandes apartados: el escenario básico de valoración, el modelo de investigación y el concepto de interferencia en la selección y uso del conocimiento matemático. Veamos a qué nos referimos en cada caso.

El escenario básico de valoración

Se puede identificar como aquél en el que el profesor pretende averiguar lo que un alumno comprende acerca de un conocimiento matemático específico a través de sus realizaciones personales. En este escenario básico, que también comparte la complejidad propia de las situaciones hermenéuticas condicionadas por el lenguaje, llegan a identificarse, entre otros, los siguientes elementos y relaciones (figura 1):

Elementos

(a) El conocimiento matemático como objeto de comprensión, puesto en acción a través de una situación problemática.

[2] Los diferentes escenarios básicos se originan cuando se pretende obtener información sobre la comprensión en fases distintas del proceso de enseñanza y aprendizaje (resolución individual de una tarea, discusión generada en un grupo reducido o las intervenciones durante una explicación de clase). Aunque todos los escenarios comparten elementos comunes, cada uno es específico y diferente a los demás, razón por la cual resulta aconsejable profundizar en las particularidades de la interpretación de la comprensión en cada uno de ellos.

(b) El estudiante que comprende y que intenta resolver la situación haciendo uso de su comprensión, contemplado como un intérprete en el escenario de valoración.

(c) El profesor, como agente observador e intérprete que trata de profundizar en la comprensión matemática del alumno a través de lo acontecido en la situación.

Relaciones

(d) Entre el agente y el conocimiento matemático (AO) se genera el vínculo relativo al dominio fenómeno-epistemológico del primero sobre el segundo. Sobre esta relación suelen surgir cuestiones vinculadas con la naturaleza de las situaciones pertinentes para ser empleadas en labores de diagnóstico y valoración de la comprensión.

(e) El estudiante y el conocimiento matemático puesto en acción (IO) conforman el primero de los dos espacios para la interpretación. Durante la resolución, el alumno se ve inmerso en un círculo hermenéutico abierto que se origina al procurar reconciliar la propia experiencia matemática que está aconteciendo con las formas de describirla y con las expectativas previamente generadas (Brown, 2001). La relación IO sugiere, entre otras, cuestiones relativas a los registros escritos que habrían de dar cuenta de esta actividad interpretativa del estudiante.

(f) El agente intérprete de la comprensión del alumno (AI) necesita disponer de bases teóricas y metodológicas para transformar, mediante interpretaciones fundadas, las acciones registradas en información útil. Una visión particular de la comprensión en matemáticas o una propuesta derivada sobre cómo afrontar la valoración de la misma forman parte de esta fundamentación. El vínculo AI plantea, sobre todo, cuestiones concernientes a las particularidades de los posibles enfoques propuestos.

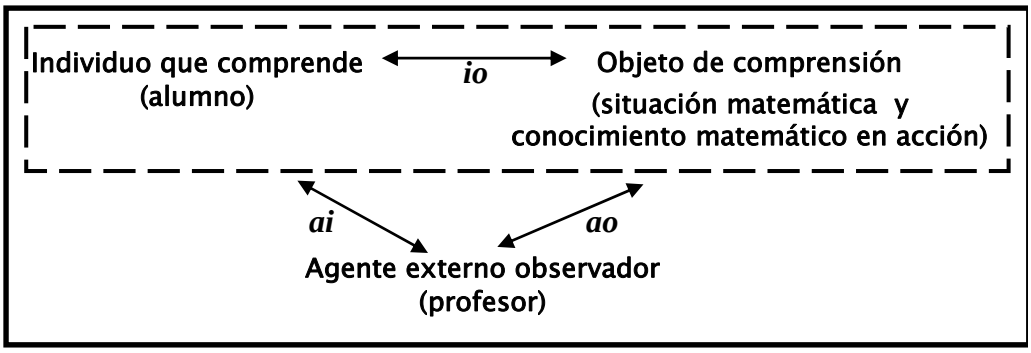


Figura 1. Componentes del escenario básico de comprensión

El conocimiento matemático como objeto de comprensión

Consideramos el conocimiento matemático como una entidad concreta con dos estructuras básicas específicas y exclusivas, constituidas con fines valorativos y al margen del sujeto, que delimitan su naturaleza y existencia y que surgen de las relaciones con otros conocimientos matemáticos (estructura epistemológica) y de las situaciones[3] que dan sentido al propio conocimiento (estructura fenomenológica).

I. Estructura epistemológica. Los conocimientos matemáticos son entidades representables, con significado y relacionadas entre sí. Consideramos que cada conocimiento matemático posee una estructura constituída por las siguientes componentes:

-representaciones externas o registros semióticos.

[3] Las *situaciones* son contempladas en nuestro modelo como tareas problemáticas surgidas de la experiencia personal a las que se enfrenta el individuo en contextos diversos. Interesan especialmente aquellas en las que se emplea el conocimiento matemático objeto de estudio.

-conocimientos constituyentes.
-relaciones con otros conocimientos.
-significados.

Los modos de uso del conocimiento matemático dependen de estos componentes, por lo que este será el primero de los referentes interpretativos que adoptamos.

II. Estructura fenomenológica. El conocimiento matemático puesto en acción permite considerar las relaciones existentes con aquellas situaciones problemáticas en las que tiene sentido su uso. Establecemos así dos tipos de situaciones:

- *Situaciones de aplicación exclusiva.* Donde el empleo del conocimiento es único y la única opción posible para la resolución. No ha lugar a la elección entre diferentes conocimientos.

- *Situaciones de aplicación no-exclusiva*. Admiten varias posibilidades de resolución mediante el empleo de distintos conocimientos matemáticos, entre los que se encuentra como opción el conocimiento dado en alguno de sus posibles modos de empleo.

El criterio fenomenológico por el que un conocimiento matemático interviene en una situación de forma necesaria, en una o varias formas de uso determinadas, o como alternativa entre otros conocimientos, constituye el segundo de los referentes interpretativos de nuestra propuesta de valoración.

En clave topológica, la consideración conjunta de ambas estructuras nos permite percibir una red tridimensional de nodos, cada uno de ellos representando un conocimiento matemático o una situación problemática asociada, conectados entre sí mediante vínculos epistemológicos (conocimiento-conocimiento) y fenomenológicos (conocimiento-situación) (Gallardo y González, 2005).

El sujeto que comprende

Desde la perspectiva del alumno, entendemos que la matemática manifiesta un claro carácter teleológico, mostrándose esencialmente como un conjunto de medios para la gestión óptima, sistemática y fundada de la incertidumbre modélica (en modelos), inespecífica, genérica o estructural que se deriva de la experiencia ante situaciones que involucran un determinado tratamiento de la información. La resolución de dichas situaciones requiere, entre otros aspectos:

- la identificación de los conocimientos matemáticos susceptibles de poderse emplear como medio para la resolución de la tarea;
- la decisión sobre cuál conocimiento matemático emplear, y de qué modo, entre las posibilidades identificadas previamente.

En nuestra propuesta introducimos la noción de *conjunto personal de situaciones* asociado a un conocimiento matemático como el conjunto de todas las situaciones que son identificadas por el individuo como susceptibles de poder ser resueltas con dicho conocimiento matemático. Se trata de una fenomenología subjetiva que constituye el principal referente interpretativo respecto al alumno que comprende. La compresión queda determinada por las características de dicho conjunto personal de situaciones.

El observador

El agente responsable de la valoración necesita planteamientos teóricos y estrategias metodológicas operativas que contribuyan a la obtención de información objetiva con la que garantizar unas descripciones e interpretaciones cercanas a la realidad cognitiva de los estudiantes. La gestión de la interpretación, que se basa en las características fenómeno-epistemológicas del conocimiento matemático y en la interacción visible del alumno sobre el mismo, requiere de los elementos que se desarrollan a continuación.

El modelo de investigación

La interpretación y valoración de la comprensión del conocimiento matemático se fundamenta en los siguientes elementos:

Una idea operativa de la comprensión en matemáticas y su valoración. Interferencias en la selección y uso del conocimiento matemático

Consideramos que una persona manifiesta una cierta comprensión de un conocimiento matemático concreto cuando, ante situaciones de desequilibrio cognitivo relacionadas con dicho conocimiento, que decide voluntariamente abordar, elabora y emite, a su satisfacción, respuestas adaptadas en las que hace un uso significativo (esto es, libre, consciente e intencional) del conocimiento. En definitiva, el uso intencional del conocimiento matemático en situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno-epistemológico da cuenta de la comprensión, es decir: ***lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza,*** en los términos mencionados, ***proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende***; información que siempre será sobre la comprensión mínima que el sujeto posee si la implicación y el rendimiento en las tareas son elevados.

Proponemos, por tanto, sustentar la valoración de la comprensión del conocimiento matemático en el modo de aplicación del mismo en las situaciones propias de su esfera fenómeno-epistemológica. Pero esta condición ideal suele diferir del desempeño real de los sujetos, sobre todo cuando han de decidir en situaciones de aplicación no-exclusiva, en las que se generan ***interferencias entre conocimientos*** y vínculos entre ellos que llegan a determinar el uso posterior en la resolución de la situación. Así se constata en Gallardo (2004), donde se identifican alumnos que no reconocen el algoritmo para la multiplicación de números naturales como medio de resolución de una situación apropiada o, aún reconociendo su idoneidad, prefieren utilizar otros conocimientos.

Las manifestaciones externas motivadas por la aparición de dichas interferencias posibilitan extraer información relativa a la estructura del conjunto personal de situaciones que el individuo asigna al conocimiento matemático. En primer lugar, la observación sobre dónde emplea el sujeto el conocimiento matemático y establece el correspondiente vínculo *situación-conocimiento* permite concretar la ***extensión*** de su conjunto personal de situaciones. En segundo lugar, el análisis complementario de las interferencias en la selección y uso del conocimiento matemático abre además una vía de acceso operativa al estudio de la ***naturaleza de los vínculos*** fenómeno-epistemológicos. Sostenemos que estas dos facetas específicas del conjunto personal de situaciones se muestran como indicadores esenciales de la comprensión, siendo el origen y la referencia para la interpretación en el escenario de valoración examinado.

Un procedimiento para la determinación de situaciones adecuadas para la valoración

La visión adoptada sobre la comprensión y su valoración requiere del agente intérprete procedimientos para la identificación y selección de tareas que generen experiencias matemáticas adecuadas para observar y valorar la comprensión. Para ello es necesario determinar un conjunto reducido de situaciones representativas de la parte de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento cuya comprensión se desea valorar. Esta opción demanda, de una parte, analizar la naturaleza del conocimiento matemático y su estructura epistemológica, y de otra, considerar sus relaciones con los fenómenos y situaciones que lo hacen significativo para establecer la correspondiente estructura fenomenológica. Para la delimitación del conjunto mencionado proponemos la aplicación del *Análisis Didáctico* (González, 1998, Gallardo y González, 2006b) como instrumento metodológico que transcurre por las siguientes fases:

Primera fase. Revisión primaria destinada a la identificación y delimitación del *conjunto genérico de situaciones*. Aceptada la imposibilidad de conocer la totalidad de situaciones

donde tiene sentido emplear un conocimiento matemático particular, se trata de concretar el conjunto más amplio posible o una muestra extensa y representativa del campo de problemas que le da sentido[4]. Para ello se lleva a cabo la consulta y revisión de las siguientes fuentes documentales, centrando la atención en la epistemología y fenomenología del conocimiento matemático:

- antecedentes de investigación sobre enseñanza y aprendizaje matemático;
- muestra representativa de libros de texto de matemáticas;
- textos dirigidos a la formación didáctica del profesorado de matemáticas.
- obras complementarias (manuales de matemáticas, textos de divulgación, etc.).

Los resultados primarios obtenidos incluyen: (a) una batería inicial de tareas o conjunto genérico provisional de situaciones; (b) una primera caracterización de la estructura fenómeno-epistemológica del conocimiento. Los resultados dependen de la naturaleza del conocimiento matemático y del estado de las investigaciones sobre el mismo.

Segunda Fase. Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto genérico de situaciones mediante la ordenación y categorización de las mismas y una posterior consulta a expertos sobre la idoneidad de los resultados y las posibilidades de modificación del campo genérico de situaciones y de las propias categorías establecidas. La estructura obtenida en esta fase es la referencia empleada para la selección del conjunto reducido de situaciones representativas de cada categoría para el diagnóstico y la valoración de la comprensión.

En caso de no disponer de antecedentes empíricos suficientes para garantizar la relevancia y potencialidad de las estructuras, categorías y situaciones, se aborda una **Tercera Fase** de experiencia empírica exploratoria destinada a:

- Depurar la categorización y representación de situaciones observando el desempeño de los estudiantes frente a ellas.

- Identificar y establecer de forma provisional, comportamientos y respuestas tipo asociados a las distintas categorías situacionales.

Como ejemplo concreto, en Gallardo y González (2006a) se describe la aplicación de este método al caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales en Educación Primaria en España (6-12 años).

Estudio Empírico

Con objeto de mostrar la potencialidad práctica de la propuesta interpretativa en el escenario de valoración considerado se ha llevado a cabo un estudio empírico de carácter exploratorio que tiene como propósitos fundamentales evidenciar y caracterizar el fenómeno de interferencia en la elección y uso de la fracción y sus significados y poner de manifiesto aspectos relevantes de la comprensión de este conocimiento matemático a través de la descripción de dicho fenómeno.

[4] La noción de conjunto genérico de situaciones adoptada difiere de la de campo conceptual de Vergnaud (1997), por cuanto se aplica a conocimientos matemáticos específicos y se enuncia en términos de posibilidad y no de requerimiento de uso. Por otra parte, la relación de los conjuntos situacionales, personal y genérico se aproxima a la sugerida por Freudenthal (1983) entre objeto mental y concepto o, en términos de Puig (1997), entre campo semántico personal y campo semántico del concepto. Igualmente, el análisis semántico de Niemi (1996) puede identificarse con el análisis epistemológico, mientras que su análisis estructural difiere del análisis fenomenológico de nuestro modelo. Finalmente, a diferencia de la propuesta de Godino y Batanero (1994), la reflexión fenómeno-epistemológica que proponemos no va dirigida a analizar la génesis institucional y personal del conocimiento matemático, sino a determinar conjuntos de situaciones para el diagnóstico y valoración de la comprensión.

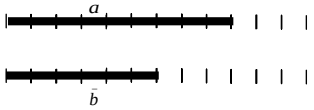
Muestra

Para la experimentación se ha seleccionado una muestra intencional constituida por un total de 60 profesores en formación que cursan sus estudios en los últimos tres años de la Carrera Profesional de Educación Secundaria, especialidad de Matemáticas y Computación, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (Perú). La naturaleza del estudio justifica la amplitud de la muestra y que la facilidad de acceso a la institución educativa haya sido el criterio fundamental utilizado en su selección.

Tareas

La amplia información disponible sobre el aprendizaje de la fracción y la naturaleza de sus significados propició que la aplicación del procedimiento para la determinación y selección de situaciones se redujera a la primera fase. Las tareas elegidas corresponden a aquellas situaciones donde resulta legítimo emplear la fracción en alguno de sus significados conocidos. Tal como se aprecia en la tabla 1, las seis tareas propuestas y presentadas a la muestra en forma de cuestionario[5] para su resolución individual en un tiempo máximo de 45 minutos, son ejemplos representativos de situaciones no-exclusivas propias de los significados básicos: *parte-todo*, en sus contextos continuo y discreto, *cociente*, *medida*, *razón* y *operador*, respectivamente. Estas situaciones permiten observar el referente teórico de la interferencia entre conocimientos matemáticos y su comprensión en función de la disponibilidad a ser empleados.

Tabla 1.- Distribución de las tareas por significado de la fracción

Significado de la fracción	Enunciado
Parte-Todo (continuo)	[S1] *Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿Qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?*
Parte-Todo (discreto)	[S2] *Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿Qué parte del grupo de amigos son chicos?*
Cociente	[S3] *Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿Cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?*
Medida	[S4] *De la observación de la figura. ¿Qué parte de a es b?* 

[5] La interpretación comprensiva comporta una exigencia comunicativa entre el estudiante y el agente intérprete que se articula a través de registros escritos, diálogos directos o una combinación de ambos. En esta ocasión se ha optado por el desempeño individual frente a un cuestionario escrito y el análisis posterior de la información.

Razón	[S5] *En una mesa hay 9 libros de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿Qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?*
Operador	[S6] *En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?*

Categorías de respuestas

Para la observación e interpretación del fenómeno de interferencia entre significados hemos organizado las respuestas de acuerdo con las siguientes categorías:

A. *Empleo propio de la fracción.* Las respuestas manifiestan el vínculo fenómeno-epistemológico entre la situación y el uso de la fracción en su significado oportuno. En esta categoría establecemos la diferencia entre respuesta correcta e incorrecta.

B. *Interferencia en el uso de la fracción.* Las respuestas ponen de manifiesto el empleo de significados diferentes al apropiado, bien de entre los asociados al concepto de fracción (*Interferencia Interna o Endógena*), o bien asociado a otros conocimientos o sin vínculos claros con la fracción como opción para su resolución en alguno de sus significados (*Interferencia Externa o Exógena*). Todo ello con independencia de la adecuación de la solución presentada.

C. *Respuesta dudosa.* Reúne a aquellas respuestas de dudosa inclusión en alguna de las categorías anteriores[6] y que requieren justificaciones complementarias del resolutor que no se han solicitado por el carácter exploratorio del estudio.

Resultados

Los resultados obtenidos permiten profundizar en los dos aspectos principales ya mencionados sobre la comprensión del concepto de fracción: la extensión de los conjuntos personales de situaciones a través del análisis de interferencias externas y la naturaleza del vínculo situación-fracción mediante el estudio de interferencias internas.

Interferencia externa: extensión de los conjuntos personales de situaciones asociados a la fracción

La tabla 2 muestra la frecuencia de las respuestas dadas a las seis tareas del cuestionario distribuidas por categorías. De una primera observación se desprende el empleo mayoritario de la fracción sobre otros conocimientos. El establecimiento general del vínculo 'situación-fracción' y el uso preferencial dado a la fracción en situaciones no-exclusivas se interpretan como acciones favorables que respaldan una valoración preliminar positiva de la comprensión.

Tabla 2.- Número de respuestas dadas por categorías

Categorías de respuestas	S1	S2	S3	S4	S5	S6	TOTAL
Empleo Propio							
Correcto	54	47	34	30	7	32	505
Incorrecto	4	7	9	10	0	2	32
Interferencia							

[6] La consideración de esta última categoría de respuestas está justificada por las limitaciones propias de la opción metodológica empleada en la experimentación para el registro de la comunicación establecida entre estudiante y profesor.

Externa o Exógena	2	2	11	3	6	7	30
Interna o Endógena	0	1	4	15	43	15	78
Dudosa	0	3	2	2	4	4	15

Al mismo tiempo, la puntuación de la categoría de respuesta *Interferencia Externa* también pone de manifiesto el hecho de que algunos profesores en formación no llegan a establecer el mencionado vínculo 'situación-fracción' y, por tanto, a reconocer la situación como perteneciente al conjunto genérico de situaciones asociado a la fracción. Se puede considerar entonces que sus conjuntos personales de situaciones se muestran reducidos en esta parcela fenomenológica respecto a los de aquellos estudiantes que sí superaron la *Interferencia Externa* en la prueba, lo que se interpreta a su vez como una limitación en la comprensión de la fracción. Un ejemplo de este hecho lo manifestó un alumno de quinto curso al no dar muestras suficientes de elección y empleo de la fracción en dos de las seis situaciones planteadas, S3 y S5, revelando por ello una comprensión reducida en los significados *cociente* y *operador* (véase figura 3). En el primer caso se aprecia que la resolución viene dada mediante la aplicación de otro conocimiento matemático como es el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales de uso extendido en el ámbito hispanoamericano. En el segundo, resulta evidente la ausencia de uso de todo significado de la fracción.

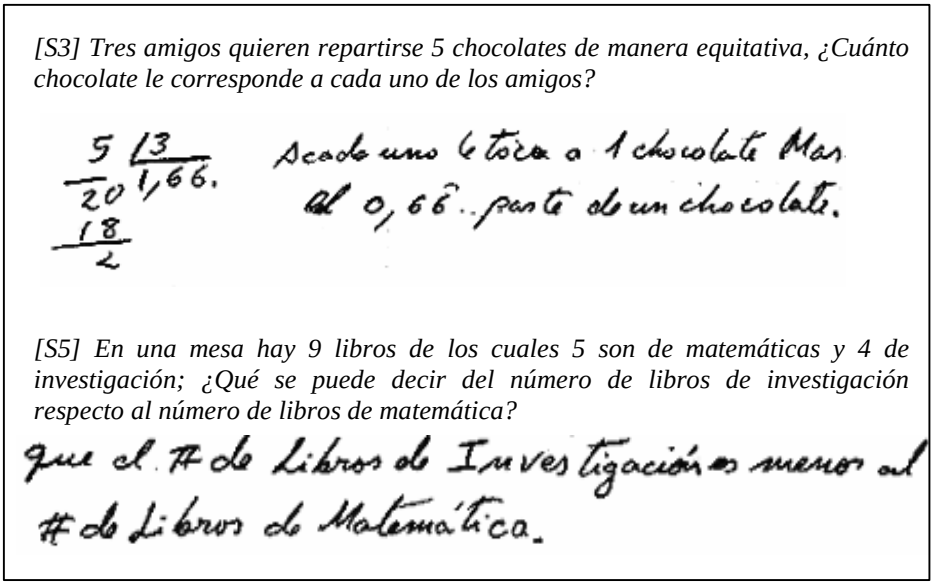


Figura 3.- Manifestaciones del fenómeno de Interferencia Externa

En otro orden de cosas, la respuesta generada por este alumno en S3, que no permite observar su comprensión de la fracción pero sí es indicadora de la del algoritmo mencionado, alude directamente a la cuestión de la relación entre comprensión y competencia matemática en nuestro modelo. En términos específicos, el registro escrito muestra un estudiante competente ante la situación planteada por decidir emplear un procedimiento adecuado a su conveniencia y ajustado a los requerimientos del problema[7], pero al mismo tiempo, privado

[7] Consideramos la competencia matemática como capacidad del individuo para resolver situaciones prácticas cotidianas utilizando para este fin conceptos y procedimientos matemáticos. El énfasis se sitúa en el proceso y en la actividad, aunque también en los conocimientos. Entre otros

de comprensión de la fracción por no haber (presuntamente) identificado la tarea como perteneciente a su esfera fenómeno-epistemológica. En consecuencia, de nuestro modelo se desprende una distinción entre comprensión y competencia matemática fundamentada no tanto en diferencias de carácter funcional como sucede en otras propuestas (Godino, 2002c) sino más bien en la interpretación referida a través del ejemplo discutido.

Interferencia interna: naturaleza de los vínculos fenómeno-epistemológicos de la fracción

De acuerdo con nuestro modelo, además del establecimiento del vínculo 'situación-fracción', que garantiza la superación del fenómeno de interferencia externa ya referido, la siguiente condición para la comprensión establece el empleo de aquel significado de la fracción que le es propio a cada situación. El estudio empírico realizado pone de manifiesto que esta condición no siempre se cumple, surgiendo entre los participantes el fenómeno denominado de *Interferencia Interna*. Los resultados recogidos en la tabla 2 posibilitan apreciar la presencia en el desempeño de los estudiantes de dicho fenómeno con un total de 78 respuestas de esta naturaleza. Con objeto de profundizar en esta categoría de respuesta, detallamos en la tabla 3 los distintos casos de interferencias entre significados de la fracción junto con las frecuencias absolutas de los mismos registradas en la prueba. Se observa que en esta oportunidad llegan a identificarse ocho casos diferentes de interferencia interna producidos entre los significados:

(a) P*arte-todo* sobre el resto de significados.
(b) C*ociente* sobre *operador*.
(c) *Razón* sobre *parte-todo*, *medida* y *operador*.

Tabla 3.- Casos de interferencia interna entre significados de la fracción

Significados interferentes	S1	S2	S3	S4	S5	S6	TOTAL
Parte-Todo			4	14	43	4	65
Cociente	0	0		0	0	5	5
Medida	0	0	0		0	0	0
Razón	0	1	0	1		6	8
Operador	0	0	0	0	0		0

En la actuación de los alumnos se distinguen adicionalmente tres variantes básicas de interferencia interna en la relación entre posibles iniciativas de uso planteadas en la elección de la fracción:

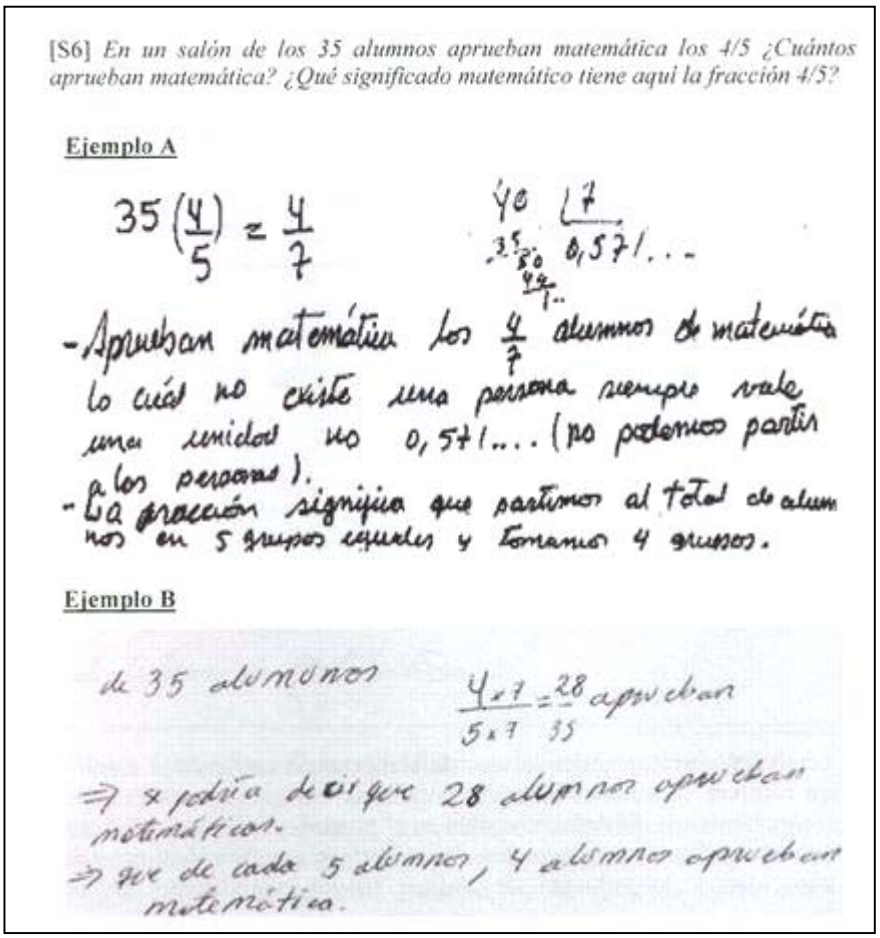
Variante 1. Integración de los significados interferente(s) e interferido a través de su empleo conjunto en la resolución.

Variante 2. Consideración independiente de distintos significados.

Variante 3. Preferencia, no siempre acertada, en el uso de unos significados sobre otros. Este caso se concibe como el escenario genuino de conocimientos enfrentados en su elección y reemplazados en su empleo.

aspectos, la competencia matemática entraña, en distintos grados, la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento y representación.

En el ejemplo A (véase figura 4) se muestra un caso de interferencia interna de los significados *cociente* y *parte-todo* sobre *operador* de otro alumno de quinto curso que emplea al inicio de la resolución el par de significados *cociente* y *operador* en forma colaborativa (variante 1), y, seguidamente, el significado *parte-todo* con independencia de los dos anteriores (variante 2). Por su parte, el estudiante de tercer curso del ejemplo B también evidencia una interferencia interna del significado *razón* sobre *operador* aunque en esta ocasión el primero reemplaza al segundo (variante 3). Variantes como éstas en las acciones de los alumnos revelan matices en la comprensión de los significados de la fracción que permanecen ocultos en el análisis tanto de las interferencias externas como de la adecuación en el uso del significado propio en cada situación.


[S6] *En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿Cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción 4/5?*

Ejemplo A

$35\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{7}$

40 | 7
35 | 5,71...
50
49
1...

- Aprueban matemática los $\frac{4}{7}$ alumnos de matemática lo cuál no existe una persona siempre vale una unidad no 0,571... (no podemos partir a los personas).
- La fracción significa que partimos al total de alumnos en 5 grupos iguales y tomamos 4 grupos.

Ejemplo B

de 35 alumnos $\frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35}$ aprueban

⇒ x podría decir que 28 alumnos aprueban matemáticas.

⇒ que de cada 5 alumnos, 4 alumnos aprueban matemática.

Figura 4.- Ejemplos de Interferencia Interna en sus distintas variantes

En conclusión, interferencias internas como las identificadas constituyen indicadores de primer orden de las particularidades de los posibles vínculos que los participantes establecen a nivel interno entre los significados de la fracción ante su utilización. De hecho, estas interferencias facilitan la caracterización de la estructura fenómeno-epistemológica de los distintos conjuntos personales de situaciones vinculados a los significados de la fracción. Precisamente, la amplitud y complejidad de la red de interferencias internas entre significados manifestada en cada caso emergen como criterios fundamentales para valorar la comprensión de los estudiantes y establecer diferencias entre ellos como las expuestas en los últimos ejemplos.

Adecuación del uso del significado propio

Por último, suponiendo superado todo tipo de interferencia, la manifestación de la comprensión de la fracción aún exige que su empleo en su significado propio sea correcto en cada situación dada. El número de respuestas correspondiente a la categoría de *Empleo Propio Correcto* refleja que esta faceta de comprensión se ha presentado de forma desigual en las distintas situaciones planteadas en la prueba (véase tabla 2). Actuaciones como la recogida en la figura 5 ilustran el caso del estudiante que, aún haciendo uso del significado de fracción correspondiente, expresa sin embargo limitaciones de comprensión relativas a la propia naturaleza del significado.

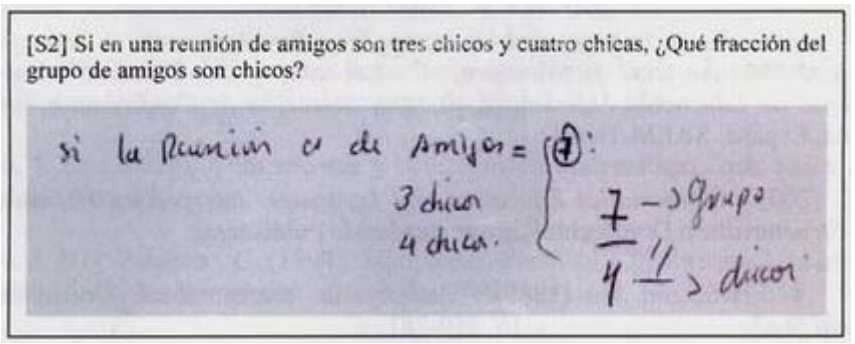


Figura 5.- Ejemplo de empleo propio incorrecto del significado parte-todo

En este ejemplo el empleo propio del significado parte-todo viene acompañado de una confusión acerca del papel que desempeñan y la posición que ocupan la parte y el todo en la representación numérica de la fracción. En definitiva, se trata del tercer aspecto diferente exteriorizado en la comprensión de los significados de la fracción.

Consideraciones finales

En este trabajo se han expuesto las ideas centrales de un modelo en desarrollo para la interpretación de las acciones de los alumnos en uno de los escenarios básicos de valoración de la comprensión en el aula de matemáticas, el referido a la resolución individual de situaciones matemáticas. A pesar de la complejidad que encierra el problema de la interpretación hemos considerado adecuado y factible aproximarnos a su estudio desde una perspectiva que incluye, entre otros aspectos, un planteamiento teórico operativo que posibilita sortear algunas fronteras internas de la comprensión y una estrategia metodológica sustentada en el análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático que favorece la obtención de información con la que garantizar unas descripciones e interpretaciones cercanas a la realidad cognitiva de los alumnos. Con la aproximación propuesta entendemos que se da un paso más hacia la resolución de la problemática existente en la actualidad en torno a los complejos fenómenos de la comprensión en matemáticas, su diagnóstico y valoración. La evidencia empírica recogida y ejemplificada en torno a la comprensión de los significados de la fracción habla por sí sola sobre la potencialidad descriptiva y prescriptiva del modelo de interpretación sugerido.

Para la práctica docente, el estudio reportado proporciona un método operativo para la organización de situaciones matemáticas así como una referencia objetiva con la que afrontar la interpretación en términos de comprensión de las acciones de los estudiantes. A través de la experiencia sobre los significados de la fracción se dan muestras del uso que podría darse a estas situaciones en el aula de cara a la valoración y desarrollo de su comprensión, haciéndose evidente, por tanto, el apoyo que el modelo puede ofrecer al profesorado en la toma de decisiones sobre contenidos o formas de enseñanza.

Finalmente, apostamos por seguir realizando esfuerzos encaminados al desarrollo de aproximaciones a la comprensión del conocimiento matemático que tengan en cuenta aspectos como los presentados, así como propuestas curriculares sistemáticas que contemplen con un mayor acierto la complejidad global de la comprensión de los conocimientos matemáticos y su inclusión efectiva en los diseños y desarrollos curriculares ordinarios. En este sentido, pensamos que los principios establecidos aquí para la interpretación de la comprensión en escenarios de valoración son de interés para los estudios recientes sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). Selección de Conferencias*, pp. 57-74. SAEM Thales. Sevilla, España:

Brown, T. (2001). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Byers, V.; Erlwanger, S. (1985). Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 259-281.

Carpenter, T.; Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*, pp. 19-32. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Cavey, L. O.; Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 171-190.

Davis, R. B. (1992). Understanding "Understanding". *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 225-241.

Duffin, J. M. y Simpson, A. P. (2000). A search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 4, 415-427.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales*. Tesis Doctoral inédita. Málaga: Universidad de Málaga.

Gallardo, J. y González, J. L. (2005). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIE,* pp. 197-204. Universidad de Córdoba. Córdoba:

Gallardo, J.; González, J. L. (2006a). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, 26, 2, 10-15.

Gallardo, J.; González, J. L. (2006b). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* pp. 57-77. Instituto de Estudios Altoaragoneses-Universidad de Zaragoza. Huesca:

Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, vol, 25, 77-87.

Godino, J. D. (2002a). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450.

Godino, J. D. (2002b). Un enfoque semiótico y ontológico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, 2/3, 237-284.

Godino, J. D. (2002c). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Uno*, 29, 9-19.

Godino, J. D.; Batanero, C. (1994). Significado Personal e Institucional de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.

Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematicss Education*, pp. 197-218. Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education, Vol. 1I*, pp. 245-256. Osnabrück, Germany.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). MacMillan Publishing Company. New York.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ilaria, D. R. (2002). Growth in student mathematical understanding through precalculus student and teacher interactions. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3, 129-136. PME. Norwich, England.

Kieren, T., Pirie, S. y Calvert, L. G. (1999). Growing Minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics: from Hierarchies to Networks*, pp. 209-231. GBR: Routledge. London.

Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

Koyama, M. (1997). Research on the complementarity of intuition and logical thinking in the process of understanding mathematics: an examination of the two-axes process model by analyzing an elementary school mathematics class. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 21-33.

Koyama, M. (2000). A research on the validity and effectiveness of "two-axes process model" of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 3, pp. 159-166. PME. Hiroshima, Japan.

Niemi, D. (1996). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications, and Explications. *The Journal of Educational Research*, 89, 6, 351-363.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Horsori. Barcelona.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en Pensamiento Numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM*, pp. 35-46. Universidad de Huelva. Huelva.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press. London.

Vergnaud, G. (1997). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes y P. E. Bryant (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics*, pp. 5-28. Psycology Press, Ltd. London.

Warner, L. B., Alcock, L. J., Coppolo, J.; Davis, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? En N. A. Paterman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 371-378. PME. Honolulu, USA.

LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS OPERACIONES CON FRACCIONES EN 1º ESO

Eduardo Lacasta
Álvaro Sáenz de Cabezón
Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra

Resumen

El trabajo parte de una preocupación profesional: los usos incorrectos de las operaciones elementales con fracciones en el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria. Las estrategias utilizadas para la enseñanza no logran superarlos. Es necesario pues analizar las restricciones de aprendizaje y las limitaciones profesionales para la construcción y puesta en marcha de un proceso de instrucción que faciliten los aprendizajes y los haga estables (significación de los mismos). Para ello reformularemos la problemática docente según unas preguntas de investigación y describiremos los análisis previos realizados.

Abstract

The work derives from a professional worry: the incorrect use of elemental operations with fractions taught during the first cycle of Obligatory Secondary Education. The strategies used for teaching don't manage to exceed them. Therefore, it is necessary to analyse the learning restrictions and the professional limits, in order to create and start a teaching process that will provide an easier and more stable learning process. In order to do this, we will reformulate the teaching problematic through investigation questions and we will describe the previously achieved analysis.

Lacasta, E.; Saenz de Cabezón, A. y Wilhelmi, M. R. (2007*).* La enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con fracciones en 1º de ESO. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 223-232.

De la problemática docente a la problemática del investigador

En nuestra experiencia profesional como profesores de primer ciclo de secundaria hemos constatado que los alumnos no han adquirido en el uso de los conocimientos mínimos para la educación primaria (MEC, 2006) la maestría esperada. En particular, una gran mayoría de alumnos que inician 1º ESO tienen dificultades en la realización de tareas elementales con fracciones, que en muchos casos no desaparecen con la instrucción en Primer Ciclo (1º y 2º) de la ESO.

Nuestra experiencia nos dice que los alumnos de este ciclo no usan de manera eficaz los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones (suma, resta, multiplicación y división). En el 3er Ciclo de Educación Primaria (5º y 6º) se introduce la noción de fracción (positiva) y sus operaciones elementales. Sin embargo, después de 4 años de formación los alumnos siguen sin dominar los algoritmos. Aún más, es persistente el hecho de que un gran número de alumnos sistematizan modos de hacer u operar erróneos.

Como profesionales de la educación buscamos soluciones de mejora de los procesos de aprendizaje y enseñanza. Los hechos citados se concretan en la necesidad profesional de dar respuesta a preguntas del tipo:

[P1] ¿Cuál es el origen de los "usos incorrectos" (operativos y de significación) de las fracciones?

[P2] ¿A qué se debe que estos "usos incorrectos" sean recurrentes en el tiempo para un grupo de alumnos y en los distintos grupos?

[P3] ¿Existe un método de enseñanza, o es posible determinar uno, que permita superar, o cuanto menos paliar parcialmente, esta situación?

La teoría didáctica nos permite hacer una primera reflexión sobre las preguntas profesionales formuladas. El "origen" hace referencia a la *naturaleza* de dichos "usos incorrectos", esto es, si pueden ser clasificados como:

- *Fracaso*. Un alumno ha fracasado si no llega al resultado correcto y además no tiene el conocimiento para alcanzarlo.

  "Un alumno está en situación de fracaso si el resultado obtenido no es conforme a lo que el esperaba y si no dispone de medios para aproximarse al resultado en un nuevo intento" (Briand y Chevalier, 1995, 109)

- *Error*. Un alumno ha cometido un error si no llega al resultado correcto y posee los conocimientos para alcanzarlo y, por lo tanto, es capaz de identificar su fracaso (en la realización de la tarea) como un "error" (susceptible de ser corregido).

  "Diremos que hay un error si el alumno puede disponer de medios para modificar su acción teniendo en cuenta algunos resultados del intento precedente" (Briand, Chevalier, 1995, 109)

Clasificamos los errores según su naturaleza: *anecdóticos*, cometido por un número pequeño de alumnos, de tal forma que en situación y contextos similares la tasa de error es similar o incluso desaparece; *reproducibles*, en situación y contextos similares la tasa de error se repite en un grupo de alumnos representativo de la clase. Son estos últimos los que centran el interés en la investigación, puesto que son susceptibles de identificarse como *fenómenos* (Wilhelmi, Font y Godino, 2005).

- *Misconceptions* o conceptos erróneos. Término general utilizado en la educación de las ciencias (Smith, Di Sessa y Roschelle, 1993), incluida las matemáticas, que representa noción preconcebida, creencia no científica, teoría ingenua o equivocación conceptual. Se identifica con casos en los que una persona tiene un conocimiento al cual le atribuye inadecuadamente un ajuste "suficiente" con el conocimiento científicamente correcto.

- *Obstáculo*: diremos que un alumno tiene un obstáculo cuando un conocimiento anterior dificulta la adquisición de nuevos conocimientos.

> "Un obstáculo se manifiesta por errores, pero estos errores no son debidos al azar […] son reproducibles y persistentes. Más aún, estos errores, para un sujeto, están ligados entre ellos por un origen común: una forma de conocer, una concepción característica, coherente si no correcta, un 'conocimiento' antiguo y que ha sido exitoso en todo un dominio de acciones […] No desaparecen radicalmente, de un golpe, resisten, persisten y después resurgen, se manifiestan mucho después de que el sujeto haya rechazado el modelo defectuoso de su modelo cognitivo consciente" (Brousseau, 1998, 121–122).

De esta forma, las preguntas P1 y P2 pueden sintetizarse en una cuestión crucial:

> ¿Cuál es la naturaleza de los "usos incorrectos"? ¿Son errores (anecdóticos o recurrentes), fracasos, *misconceptions* u obstáculos?

La respuesta a esta cuestión general vincula a la pregunta P3. Si se identifica un obstáculo epistemológico, por ejemplo, se concluye que no existe, en sentido estricto, una situación que "solucione de raíz" la problemática docente. Dicho de otra forma, no son atribuibles exclusivamente a una inadecuada planificación de la enseñanza, a intervenciones desafortunadas del profesor o, de manera general, a una falta de conocimientos didáctico-matemáticos de éste.

¿Son debidos a que el alumno quiere aplicar conceptos adquiridos que le han servido para resolver otro tipo de problemas?; si es así, ¿qué conceptos son? ¿Cómo podemos hacer que el alumno adapte esos conceptos o los sustituya por unos nuevos adecuados para la realización de las operaciones con fracciones? ¿En qué condiciones, en qué plazos?

Samson (2007) identifica "22 errores básicos pero comunes hechos en matemáticas, [determina] porqué se incurren en estas equivocaciones y cómo pueden ser evitadas por una comprensión mejor". Los trabajos como el de Samson (2007) pueden ser utilizados como identificadores de usos inadecuados y como indicadores de posibles soluciones, no necesariamente como medios de intervención directa y eficaz, porque soslayan, en particular, la posibilidad de existencia de obstáculos.

La determinación de un obstáculo epistemológico lleva a la conclusión de que el problema no es pedagógico o instruccional (y en cierto sentido atribuible al profesor) ni cognitivo (atribuible por lo tanto al alumno), sino sujeto a la naturaleza de la noción, proceso o significado matemático implicado. Es ingenuo pensar entonces que la identificación de un uso incorrecto y la justificación matemática del mismo es suficiente para establecer condiciones para su eliminación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La idea básica no es "evitar las situaciones de riesgo", sino enfrentar al alumno de manera sistemática en situaciones controladas *a priori*, que contribuyan a una paulatina superación del obstáculo.

Por otro lado, la determinación de obstáculos cognitivos evita "cargar" en explicaciones asociadas a la motivación de los estudiantes, su empatía hacía las matemáticas o su situación afectiva o social. La proposición de tareas debe cumplir dos requisitos fundamentales: uno, que las situaciones generen las condiciones para que el conocimiento sea útil y preserve el sentido que se le atribuye en la institución; dos, que las capacidades cognitivas de los estudiantes permitan abordar con éxito, después del proceso de estudio planificado, la actividad matemática en la que son involucrados.

En la sección siguiente se dan algunos usos incorrectos en las operaciones con fracciones. Esta revisión da pautas para analizar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos; en particular, aporta conocimiento sobre: 1) el origen, función, naturaleza, etc., de los

comportamientos de los estudiantes y sobre la pertinencia de las intervenciones del profesor y 2) estrategias de intervención y sus consecuencias.

El análisis del sistema didáctico se concreta en el uso de la ingeniería didáctica (Artigue, 1989) como método de investigación y como articulador entre una didáctica normativa o técnica y una didáctica descriptiva o científica. Dentro de esta metodología la dimensión cognitiva está privilegiada. Aportamos pruebas experimentales de un cuestionario sobre las fracciones a alumnos de Primer Ciclo de la ESO. Terminamos con una breve síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas que abordaremos en la investigación en marcha.

Usos incorrectos en las operaciones con fracciones

El aprendizaje del uso de las fracciones presenta grandes dificultades. Desde la adquisición del concepto de fracción por parte del alumno hasta que es capaz de realizar operaciones con fracciones hay un largo proceso (Kiejzer y Terwel, 2001). Así, por ejemplo, los alumnos presentan dificultades a la hora de comprender el símbolo escrito que representa a la fracción (Wearne y Hiebert, 1989). Estos errores no son aislados ni tienen origen exclusivo en las prácticas de enseñanza actuales. Contreras y Gómez (2007) justifican que el análisis histórico-epistemológico da información para caracterizar diversas interpretaciones de la división de fracciones que los estudiantes utilizan en tareas multiplicativas.

Samson (2007) describe distintos errores en matemáticas clasificados en 22 secciones, de las cuales 7 tienen relación con el uso de las fracciones. Estos errores se concretan en reglas de actuación inadecuadas que pueden ser descritas de la siguiente forma:

1. *Fracción equivalente de un número decimal*. "Las fracciones y los decimales son de distinta naturaleza, por lo que no puede haber una equivalencia".
2. *División de un número entero por una fracción*. "La división un número entero entre un fracción es dividir el número entre el denominador de la fracción. Por ejemplo: $3 \div (1/4) = 3 \div 4$".
3. *¿Qué es la fracción de una fracción?* Si una fracción consiste en dividir la unidad en partes iguales, no tiene sentido la fracción de una fracción.
4. *¿* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *es* $\frac{1}{6}$ o $\frac{2}{6}$ *?* "La suma de dos fracciones es igual a sumar sus numeradores y denominadores respectivamente. Si los numeradores son iguales sumamos los denominadores". Este error está relacionado con el siguiente:
5. *Suma de fracciones de numerador 1* (*alícuotas*). "La suma de dos fracciones alícuotas es otra fracción alícuota de denominador la suma de denominadores ($\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$)".
6. *¿Es* $\frac{1}{8}$ = 0.8 o 0.08*?* "Como $\frac{1}{10}$ = 0.1 entonces $\frac{1}{8}$ será igual a 0.8".
7. *¿* $\frac{1}{3}\div\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$ *?* "Si dividimos dos fracciones nos tiene que dar como resultado otra fracción".

Como se puede observar, cuatro de estos errores 3, 4, 5 y 7 identificados por Samson (2007) representan usos inadecuados de operaciones con fracciones.

Ingenieria didáctica: dimensión cognitiva

Nuestra experiencia profesional muestra que los alumnos de 1º y 2º de ESO presentan dificultades en las operaciones con fracciones.

Para identificar y describir estas dificultades preparamos unas pruebas que describimos a continuación.

Descripción de los grupos

Las pruebas las pasamos a los alumnos de 1º y 2º ESO. Los alumnos de 1º ESO se dividen en dos grupos diferenciados por la asignatura optativa: 1ºA, "Creación literaria"; 1ºB, "Matemáticas básicas". Los alumnos de 2º ESO también están divididos según la asignatura optativa: 2º A, "Habilidades lingüísticas"; 2º B, "Ampliación de matemáticas". Todos los grupos, por lo tanto, tienen como asignatura optativa una que refuerza contenidos de lengua o matemáticas, lo cual es indicador de un perfil de alumno "con dificultades de aprendizaje" o, incluso, "con necesidades especiales de aprendizaje".

En la tabla 1 aparece la distribución de los 105 alumnos que constituyen la muestra.

Grupo / Curso	A "Refuerzo en lenguaje"	B "Refuerzo en matemáticas"
1º ESO	23	27
2º ESO	27	28

Tabla 1. Muestra

Prueba

La prueba está dividida en cinco partes:

1. Conocimientos básicos sobre fracciones.
2. Sumas de fracciones.
3. Restas de fracciones.
4. Multiplicaciones de fracciones.
5. Divisiones de fracciones.

Las partes 2-5 están subdivididas a su vez en cuatro apartados, según sean iguales (1) o distintos (0) los numeradores (n) y los denominadores (d) de las fracciones: i) (n = 1, d = 0), ii) (n = 0, d = 1), iii) (n = 1, d = 1) y iv) (n = 0, d = 0).

Las partes 2-5 son comunes a ambos niveles (1º y 2º ESO), mientras que la primera es específica de cada nivel. En la primera parte a los alumnos de 1º se les pide que asocien fracciones con representaciones gráficas y se les pregunta el significado del numerador y el denominador. A los alumnos de 2º se les pide que escriban el nombre de las fracciones y que dada una fracción escrita pongan su representación simbólica.

Resultados

Las tablas de frecuencia de las respuestas de los alumnos muestran una gran heterogeneidad. La tabla 2 representa las frecuencias de las respuestas a la pregunta $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}$, observamos una gran variedad en las respuestas de los alumnos. El 17.1% de los alumnos contesta correctamente a la pregunta ($\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=\frac{20}{15}+\frac{6}{15}=\frac{26}{15}$), pero la respuesta más repetida ha sido 6/8 (41%). ¿A qué puede deberse que una respuesta errónea tenga una frecuencia mayor que la respuesta correcta?

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**	**Porc. válido**	**Porc. acumulado**
10/15	1	1.0	1.0	1.0
18/15	1	1.0	1.0	1.9

20/6	2	1.9	1.9	3.8
26/15	18	17.1	17.1	21.0
28/15	1	1.0	1.0	21.9
4/8	1	1.0	1.0	22.9
5/9	3	2.9	2.9	25.7
6/15	9	8.6	8.6	34.3
6/20	2	1.9	1.9	36.2
6/4	1	1.0	1.0	37.1
6/60	1	1.0	1.0	38.1
6/8	43	41.0	41.0	79.0
7/8	1	1.0	1.0	80.0
8/15	2	1.9	1.9	81.9
8/8	1	1.0	1.0	82.9
9/5	2	1.9	1.9	84.8
NS/NC	16	15.2	15.2	100.0
Total	**105**	**100.0**	**100.0**	**100.0**

Tabla 2. Tablas de frecuencias de las preguntas 3D

Este caso no es una excepción en los resultados de las pruebas, por lo que es necesario analizar las respuestas erróneas que se repiten en varios alumnos. Por lo que definiremos unas variables en las que aparezcan los comportamientos correctos y los erróneos. Estas variables nos servirán para hacer una descripción sintética de las respuestas de los alumnos al cuestionario.

Variables

La tabla 2 es un ejemplo de la heterogeneidad de las respuestas. Para la descripción del cuestionario definimos un conjunto de variables binarias, que nos permitirán hacer una "rejilla o malla" de los comportamientos. Utilizamos variables dicotómicas: 1, si cumple la condición expresa en la variable; 0 en caso contrario.

Variables suplementarias

- Niv1: Es un alumno de primero.
- GruA: Es un alumno del grupo A.

Variables activas de comportamientos de éxito

- Exij: El alumno contesta correctamente a la pregunta *i* apartado *j*.
- Sum: El alumno responde bien al menos el 75% de las sumas.
- Res: El alumno responde bien al menos el 75% de las restas.
- Mul: El alumno responde bien al menos el 75% de las multiplicaciones.
- Div: El alumno responde bien al menos el 75% de las divisiones.

Variables activas que muestran comportamientos erróneos

- Er01:El alumno da como respuesta $(a \pm c)/(b \pm d)$ a las operaciones del tipo $a/b \pm c/d$.
- Er02: El alumno da como respuesta $a/(b \pm d)$ a las operaciones del tipo $a/b \pm a/d$.
- Er03: El alumno da como respuesta a/b a las operaciones del tipo $a/b \pm a/b$.
- Er04: El alumno da como respuesta $(a+c)/(b \cdot d)$ a las operaciones del tipo $a/b \pm c/d$.
- Er05: El alumno da como respuesta $(a \cdot d)/(b \cdot c)$ a la multiplicaciones de fracciones $a/b \cdot c/d$.
- Er06: El alumno da como respuesta $(b \cdot c)/(a \cdot d)$ a la multiplicaciones de fracciones $a/b \cdot c/d$.
- Er07: El alumno da como respuesta $(b \cdot c)/(a \cdot d)$ a la divisiones de fracciones $a/b \div c/d$.
- Er08: El alumno da como respuesta $(a \div c)/(b \div d)$ a la divisiones de fracciones $a/b \div c/d$.
- Er09: El alumno da como respuesta $(a \cdot c)/(b \cdot d)$ a la divisiones de fracciones $a/b \div c/d$.
- Er10: El alumno da como respuesta $(a \div d)/(b \div c)$ a la divisiones de fracciones $a/b \div c/d$, guardando únicamente la parte entera del numerador y del denominador.
- Er11: No sabe, no contesta a más del 50% de las preguntas.

En la tabla 3 aparecen todas las variables explicadas anteriormente con un porcentaje asignado, que es el número de unos que tienen dichas variables.

Niv1:	47,62%	**Ex4a:**	71,43%	**Ex5c:**	40,00%	**Sum:**	15,24%	**Er05:**	31,43%
GrupA:	47,62%	**Ex4b:**	66,67%	**Ex5d:**	39,05%	**Res:**	18,10%	**Er06:**	20,95%
Ex3a:	67,62%	**Ex4c:**	17,14%	**Ex6a:**	25,71%	**Mul:**	40,95%	**Er07:**	11,43%
Ex3b:	17,14%	**Ex4d:**	17,14%	**Ex6b:**	20,95%	**Div:**	24,76%	**Er08:**	22,86%
Ex3c:	41,90%	**Ex4e:**	19,05%	**Ex6c:**	24,76%	**Er01:**	47,62%	**Er09:**	5,71%
Ex3d:	17,14%	**Ex4f:**	20,00%	**Ex6d:**	28,57%	**Er02:**	31,43%	**Er10:**	9,52%
Ex3e:	19,05%	**Ex5a:**	43,81%	**Ex6e:**	24,76%	**Er03:**	11,43%	**Er11:**	7,62%
Ex3f:	17,14%	**Ex5b:**	43,81%	**Ex6f:**	27,62%	**Er04:**	12,38%		

Tabla 3. Porcentaje de unos que tiene cada variable

Discusión

Los comentarios que siguen se apoyan en la tabla 3.

Las tres únicas preguntas en las que el éxito es mayor que el 50% son las preguntas Ex3a, Ex4a y Ex4b las cuales son sumas y restas del tipo a/b±c/b. Este hecho nos permite tomar como hipótesis que la técnica asociada a dicha tarea está rutinizada (los alumnos la utilizan de manera eficaz y económica) por la mayoría de los alumnos.

El error 01 (figura 1) es el que más alumnos cometen con un 47,62%. Este hecho nos permite conjeturar que el conocimiento "suma de números enteros" puede estar "interfiriendo" en el aprendizaje de la técnica para sumar o restar fracciones.

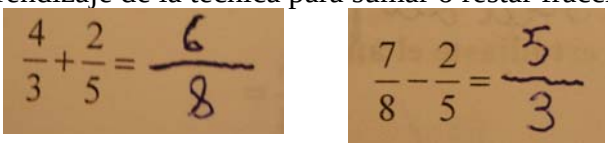


Figura 1. Error "suma-resta" de numeradores y denominadores

El error 02 (figura 2) lo comete alguna vez un 31,43% de los alumnos. En este caso se puede conjeturar que el conocimiento "suma de fracciones con igual denominador" está "interfiriendo" en el aprendizaje de la técnica para sumar o restar fracciones con igual numerador. El error 03 (11.43%, figura 3) puede apoyar esta conjetura.

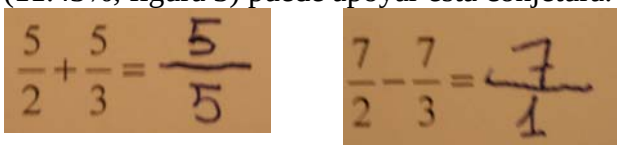


Figura 2. Errores cuando el numerador es igual en ambas fracciones

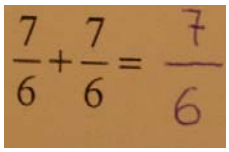


Figura 3. Error al sumar fracciones iguales

El 12,38% de los alumnos comete el error 04 (figura 4). El conocimiento "suma de fracciones con distinto denominador" no ha sido adquirido por el alumno de una manera correcta, ya que sabe que existe una rutina, pero la lleva a cabo de manera incompleta. Realiza la parte que le ha llevado mayor "desgaste cognitivo", pero desprovisto de sentido.

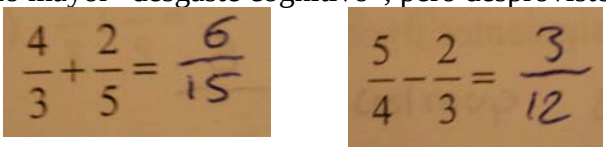


Figura 4. Error "denominador común e invarianza de los numeradores"

Los errores 05 y 06 (figura 5) son también muy repetidos: 31,43% y 20,95%, respectivamente. En estos casos conjeturamos que el conocimiento "división de fracciones" puede estar "interfiriendo" en el aprendizaje de la técnica para multiplicar fracciones con igual numerador.

Figura 5. Multiplicación incorrecta de fracciones

El error 07 y 09 (figura 6) lo comete alguna vez un 11,43% y un 5,71% de los alumnos. Este hecho refuerza la confusión en el aprendizaje de las técnicas de multiplicación y división y, muy probablemente, en la ausencia de sentido que puedan tener estas operaciones.

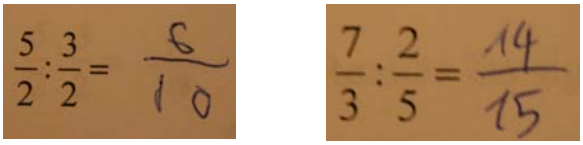


Figura 6. División incorrecta de fracciones

El 22,86% de los alumnos comete el error 08 (figura 7) también refuerza la conjetura sobre la pérdida de sentido de las operaciones división y multiplicación, así como sobre el propio concepto de fracción.

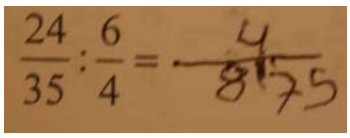


Figura 7. División incorrecta de fracciones

El error 10 (figura 8) es cometido por el 9,52%. La técnica es "dividir en cruz" y quedarse con la parte entera.

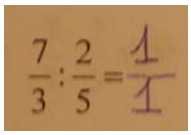


Figura 8. División incorrecta de fracciones

Síntesis, resultados y cuestiones abiertas

El primer paso de la investigación ha consistido en la reformulación de preguntas profesionales en preguntas científicas basadas en nociones clásicas de la didáctica de la matemática. La ingeniería didáctica como método de investigación permite afrontar estas cuestiones y obtener nuevos resultados. Este método contempla el análisis previo de las dimensiones epistemológica, cognitiva y de enseñanza.

Hemos mostrado en este trabajo un cuestionario, con uso exploratorio, de los comportamientos de los estudiantes en la resolución de ejercicios que precisan de los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones. Este cuestionario ha permitido enunciar hipótesis sobre los comportamientos de los estudiantes, relacionados con el uso de las técnicas y su significado (ver sección "discusión").

El análisis previo lo completamos con un análisis de:

- *Dimensión de enseñanza*. Libros de texto actuales según el modelo desarrollado por Godino, Font y Wilhelmi (2006).
- *Dimensión epistemológica*. Contextos de uso y significados de las fracciones, teniendo en cuenta las diferencias entre el desarrollo escolar, la evolución histórica y la ampliación algebraica de los campos numéricos.

Todo ello con el propósito de diseñar un proceso de estudio para la introducción y desarrollo de las técnicas de operaciones con fracciones y su significado, que aporte conocimiento sobre los procesos de construcción y comunicación de las nociones implicadas. El indicador empírico que utilizaremos es el registro del proceso de estudio y un test de conocimientos posterior a dicho proceso.

Referencias bibliográficas

Artículos en revistas

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *RDM* 9(3), 282–307.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133–156.

Kiejzer, R.; Terwel, J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47**,** 53–73.

Samson, I. (2007). Misconceptions in mathematics. Disponible en [10 oct. 07]: http://www.mathsyear2000.co.uk/resources/misconceptions

Smith, J. P.; Di Sessa, A. A.; Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115–163.

Wearne, D.; Hiebert, J. (1989). Cognitive Changes During Conceptually Based Instruction on Decimal Fractions. *Journal of Educational Psychology* 81(4), 507–513.

Libros

Briand, J.; Chevalier, M-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : Hatier.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Actas de congresos

Contreras, M.; Gómez, B. (2007). Las interpretaciones de la división de fracciones en textos históricos de enseñanza. INDIVISA, boletín de estudios e investigación, Monografía, en prensa.

Wilhelmi, M. R.; Font, V.; Godino, J. D. (2005). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique. *Colloque International «Didactiques : quelles references epistemologiques?»*. Bordeaux: IUFM d'Aquitaine et Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education (AFIRSE).

Documentos oficiales

Ministerio de Educación y Cultura (MEC) (2006). REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE 293, viernes 8 diciembre 2006*, 43053– 43102.

CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE ÁLGEBRA ELEMENTAL A PARTIR DE SU RESOLUCIÓN MEDIANTE UN MODELO GEOMÉTRICO – LINEAL

Mª Victoria Martínez Videla
Francisco Fernández García
Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada. España

Resumen

En la siguiente comunicación presentamos un reporte de la investigación realizada como trabajo de investigación tutelado (TIT) para optar al diploma de estudios avanzados (DEA) del programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Dicho trabajo consistió en proponer una clasificación de los problemas de álgebra elemental, presentes en los libros de texto, a partir de su resolución haciendo uso de un modelo de resolución gráfico que hemos llamado geométrico – lineal, previa definición y caracterización de dicho modelo.

Abstract

In the following communication we present a report of the investigation carried out as guided investigation work (TIT) to opt to the diploma of advanced studies (DEA) of the program of Doctorate in Didactics of the Mathematics of the University of Granada. This work consisted on proposing a classification of the problems of elementary algebra, present in texts books, starting from its resolution making use of a graphic resolution model that we have called geometric – lineal, previous definition and characterization of the model.

Martínez, M. V; Fernández, F y Flores, P. (2007). Clasificación de problemas de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico - lineal. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM.* Tenerife. pp. 233-242.

Introducción

El debate en torno al desarrollo de competencias en distintos ámbitos de la educación se ha comenzado a materializar. Un ejemplo de ello lo tenemos en el Real Decreto 1631/2006 del MEC, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, en donde, explícitamente, se ha incorporado el desarrollo de competencias básicas.

Luego, es necesario en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática es importante que realicemos un análisis de las tareas que se plantean a los alumnos tomando en cuenta, entre otras cosas, el desarrollo y utilización de competencias con el fin de que el sujeto que aprende obtenga una visión más compleja, tendente a transformar lo aprendido en una herramienta que le permita, interpretar matemáticamente una diversidad de situaciones.

En particular, el uso del álgebra es de gran utilidad, ya que permite representar situaciones e ideas complejas utilizando un sistema de signos universal, lo que se constituye en un instrumento valioso para desenvolverse exitosamente tanto en numerosas áreas de conocimiento, como en la vida cotidiana.

El álgebra es un área problemática desde que comienza su instrucción. Aunque para el profesor de matemáticas el paso de la aritmética al álgebra, las reglas y el lenguaje algebraico, sean una tarea fácil de comprender y aplicar, generalmente el estudiante de secundaria no concibe dicho proceso como algo elemental (Kaput, 2000; Stacey y Chick, 2004; Kieran, 2004; Lins y Kaput, 2004).

Dado que el álgebra es un elemento crucial para el desarrollo matemático posterior de los estudiantes, se vuelve imprescindible reflexionar en torno a su enseñanza y aprendizaje. Por tal razón nos propusimos realizar un trabajo que nos permitiera analizar una metodología, alternativa a la tradicional, que profundizara en la resolución de problemas (RP) de álgebra elemental como aprendizaje del lenguaje algebraico, sus símbolos y relaciones, de una forma más significativa y cercana al estudiante.

Planteamiento del problema

Como elementos para la reflexión hemos de referirnos, a su vez, a dos áreas problemáticas. En primer lugar vamos a considerar el campo de la RP, en donde tendremos en cuenta el doble papel que juega en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000): históricamente el desarrollo de las matemáticas ha tenido grandes avances en el momento en que ha sido utilizada para resolver algún problema determinado y, por otra parte, la RP se utiliza como metodología de enseñanza, tanto en la instrucción como en la evaluación.

El segundo elemento importante que hemos tenido en cuenta se refiere a los sistemas de representación (SR). En el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro de grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (FQM 193 del PAI de la Junta de Andalucía), se han realizado dos tesis doctorales (Fernández, 1997; Espinosa, 2004) relacionadas con la RP de álgebra elemental. En ellas el trabajo se centra en caracterizar tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental, en base a los SR que los estudiantes utilizan, espontáneamente, para la RP propuestos mediante tareas de lápiz y papel.

Un elemento que llamó nuestra la atención de los resultados obtenidos en los estudios de Fernández (1997) y Espinosa (2004) es que, dentro de los SR que emplean los estudiantes para resolver problemas, el menos utilizado es el que se basa en la utilización de gráficos o dibujos. Sin embargo, diversos autores han resaltado la utilidad del uso de gráficas e imágenes

visuales en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos (Rico, 1997; Castro y Castro, 1997; NCTM, 2000; Goldin y Shteingold, 2001).

Por otra parte, aún cuando en los estudios de Fernández (1997) y Espinosa (2004) el SR que definen como gráfico fue el menos utilizado, éste surge de manera espontánea (no forzada) por parte de los estudiantes, lo que nos lleva a plantearnos la siguiente interrogante:

¿Por qué al enfrentar problemas algebraicos no se utiliza el registro gráfico con mayor frecuencia?

Considerando el carácter amplio de la pregunta, nos planteamos si era posible la utilización, de forma general, para la RP algebraicos escolares, de un modelo gráfico particular, que vamos a denominar *modelo geométrico – lineal (MGL)*, y que se caracteriza por la utilización segmentos de una recta para representar y establecer las relaciones entre los datos y las incógnitas de los problemas, como describiremos más adelante. La RP a través de este modelo puede permitir una comprensión mejor y más significativa del problema y su resolución.

Objetivos de la investigación

Centrando la investigación en determinar la utilidad y funcionalidad del modelo escogido nos plateamos los siguientes objetivos:

- Determinar si todos los problemas algébricos presentes en los libros de texto de matemáticas de la educación secundaria se pueden resolver utilizando el MGL.
- Determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental a partir de las posibles resoluciones basadas en el uso del MGL.

Sistemas de representación y resolución de problemas

La utilización de diferentes SR en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son una realidad, sobre todo respondiendo a la naturaleza abstracta de las ideas con las que se trabaja. Como plantea Rico (1997), las representaciones utilizadas que permiten trabajar en un sistema conceptual y los modelos asociados a determinados conceptos, deben considerarse un pilar fundamental en el momento de organizar la enseñanza.

Ahora bien, debido al uso, frecuente en nuestra disciplina, de los términos *representación* y *modelo*, es necesario aclarar a qué nos referimos cuando los utilizamos. Para efectos de nuestro trabajo, cuando hablamos de representación nos centramos en las representaciones externas que se expresan mediante papel y lápiz, entendiéndolas como: *"notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como su características y propiedades más relevantes"* (Castro y Castro, 1997, pp. 96).

Además, como definición de SR adoptaremos la utilizada por Fernández (1997): *"es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto"* (p. 73).

En términos generales, los SR a los que nos referimos se pueden clasificar en tres grupos: los numéricos, los gráficos y los simbólicos. Sin embargo, Fernández (1997) propone una clasificación más detallada, compuesta por cinco posibles SR, para caracterizar tipologías de resolutores de problemas algebraicos elementales. Dichos sistemas son: *ensayo – error, parte – todo, gráfico, gráfico – simbólico, simbólico.*

Nuestro trabajo se sitúa en la utilización del *sistema de representación gráfico,* considerando éste "el que utiliza un código gráfico para plantear las relaciones entre datos e incógnitas y en donde las operaciones numéricas se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico".

Como parte de este sistema de representación hemos definido un modelo gráfico particular, que expondremos posteriormente, entendiendo que un modelo es *"una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos"* (Castro y Castro, 1997, pp. 106).

Para estudiar la utilización de este modelo gráfico en la RP se hace necesario realizar un análisis del proceso de resolución, para lo cuál utilizamos las fases descritas por Mayer (1986) y utilizadas por Fernández (1997) y Espinosa (2004) que son:

- Planteamiento: fase en la que se traduce a un lenguaje matemático el texto del problema a través de un sistema de representación, en donde se establecen las relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos.
- Ejecución: es el desarrollo de las relaciones establecidas en el planteamiento.
- Desempeño final: es cuando se encuentran el/los resultados pedidos en el texto del problema.

Como hemos planteado, el trabajo se centró en el estudio de uno de los posibles modelos del SR gráfico para la RP algebraicos, modelo al que llamamos MGL.

El modelo en cuestión se basa en la utilización de segmentos de recta para representar las cantidades de magnitudes y sus relaciones. El modelo en sí tiene como ventajas que: permite representar variables discretas y continuas, es de fácil manipulación, es una forma de representación muy utilizada en problemas de otras áreas como la física y como conjunto de segmentos lineales libremente orientados, tiene una estructura de espacio vectorial.

Enmarcado en el SR gráfico, y tomando en cuenta el fundamento de dicho modelo, definimos el MGL en los siguientes términos:

Modelo Geométrico-Lineal (MGL)

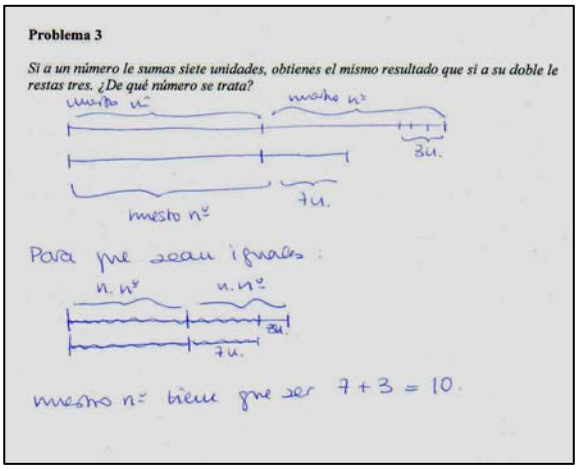
Consideraremos que se utiliza este modelo cuando se establecen las relaciones lineales entre los datos y las incógnitas, contenidas en el enunciado del problema, a través de segmentos de recta, en donde las incógnitas están representadas por trazos o partes de esos segmentos. La resolución del problema, por lo tanto, implica determinar el largo de dicho trazo o, en otros casos, establecer el número de trazos que cumplen las condiciones del problema.

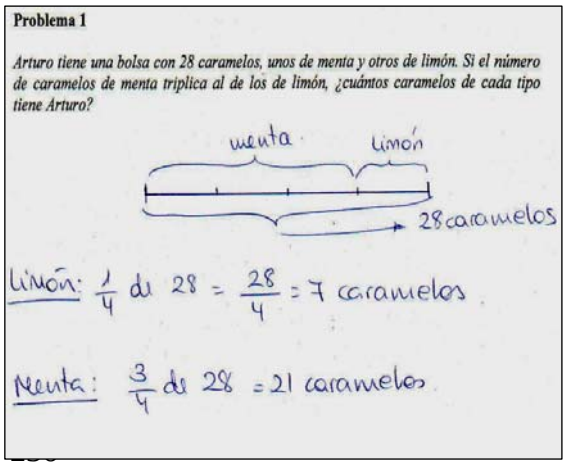
A continuación adjuntamos dos ejemplos de problemas propuestos a un grupo de sujetos en los, que para su resolución, utilizaron el MGL:

En ambos casos se resuelven los problemas haciendo uso de una gráfica lineal en la que se representan las cantidades involucradas.

En el primer problema se conoce el largo total de un segmento y se pretende determinar el largo de las partes contenidas en él.

En el segundo hay que determinar el largo de un segmento al que se le han aplicado una serie de transformaciones.





Metodología

El planteamiento inicial de la problemática apunta a tener que abordar un campo muy amplio. El trabajo, en este caso, pretende ser una aproximación a dicha problemática general, por lo que lo definimos como un estudio exploratorio-descriptivo.

Con el fin de establecer a una clasificación inicial de los problemas de álgebra escolar se desarrollaron dos etapas:

- Clasificación teórica de los problemas presentes en libros de texto de ESO
- Elaboración y aplicación de una encuesta

Etapa nº1: Clasificación teórica

Se revisaron problemas de álgebra elemental contenidos en textos escolares habituales en el mercado editorial, libros de texto utilizados normalmente por los profesores y estudiantes de educación secundaria. Se trabajó con 4 libros de textos, dos de 1º de ESO y dos de 2º de ESO y se analizaron los problemas contenidos en las unidades referidas a algebra y ecuaciones.

Se resolvieron dichos problemas utilizando el MGL, lo que dio origen a la identificación de variables y a una clasificación teórica de los problemas atendiendo a la tipología de su resolución.

Etapa nº2: Variables. Instrumento de aplicación

La definición de las variables se realizó en base a las distintas fases para la RP. Los resultados se medirán de acuerdo con la utilización, o no, del MGL en las fases de planteamiento y ejecución de los problemas. Luego, se evalúa la corrección de las tres fases (planteamiento, ejecución y desempeño final).

Muestra

Para la elección de la muestra de problemas a estudiar se realizaron los siguientes pasos:

a) Se buscaron problemas que implican resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para ello se analizaron los problemas que se recogen en cuatro libros de texto de Primer Ciclo de la ESO, dos correspondientes a 1º y dos a 2º.
b) De acuerdo con una clasificación teórica, se escogieron los problemas atendiendo a dos características: 1) el número de relaciones gráficas lineales necesarias para resolver el problema (una / más de una); 2) el tipo de números presentes en el enunciado (naturales o decimales).

Tomando en cuenta ambas características y sus combinaciones, obtenemos 4 clases de problemas, como se grafica en la Tabla 1:

Tipo de números necesarias \ Nº relaciones necesarias	Un relación (1)	Más de una relación (2)
Números Naturales (1)	(1 , 1)	(1 , 2)
Números decimales (2)	(2 , 1)	(2 , 2)

Tabla 1

Instrumento. Aplicación

A partir de lo anterior elaboramos un Instrumento, basado en tareas de lápiz y papel, formado por 5 problemas: uno de cada clase más un quinto problema de la clase (1 , 1), que jugó el papel de réplica, para verificar los resultados.

Los problemas se organizaron con dificultad creciente, de la siguiente forma:

- Problema 1: clase (1 , 1)
- Problema 2: clase (2 , 1)
- Problema 3: clase (1 , 2)
- Problema 4: clase (1 , 1), réplica
- Problema 5: clase (2 , 2)

Con este instrumento queremos determinar cómo se utiliza el MGL en la RP algebraicos escolares para establecer posteriormente una clasificación a partir de dicha resolución.

Dado que quienes tienen una buena formación matemática tienden a resolver los problemas utilizando el SR simbólico (ecuaciones), y que no están habituados a utilizar otros SR, en particular los gráficos, según se puso de manifiesto en la tesis de Fernández (1997), se vio pertinente elegir individuos que tuvieran una formación matemática avanzada a los que aplicar el instrumento en cuestión. Esto permitiría comprobar si los problemas propuestos se pueden resolver utilizando el MGL por estudiantes no habituados, e incluso reacios, a ello.

En consecuencia, se eligió a un grupo de individuos homogéneo, constituido por 19 estudiantes de la asignatura "Didáctica de la Matemática" correspondiente al CAP (Certificado de Aptitud Pedagógico) de la Universidad de Granada, durante al curso 2005/2006, todos con sólida formación en matemática superior.

Análisis de datos y resultados

Durante la investigación se realizaron dos análisis que dieron origen a dos clasificaciones, una que hemos llamado clasificación teórica y una segunda clasificación empírica, producto del análisis estadístico de los datos obtenidos al pasar el instrumento de los problemas a los individuos descritos.

Clasificación 1: clasificación teórica

Al resolver los problemas a través del MGL, los autores del trabajo observan que, dependiendo del problema, es necesario que sea representado utilizando una o más relaciones graficas lineales, por lo que se ha decido utilizar esta característica como criterio de clasificación.

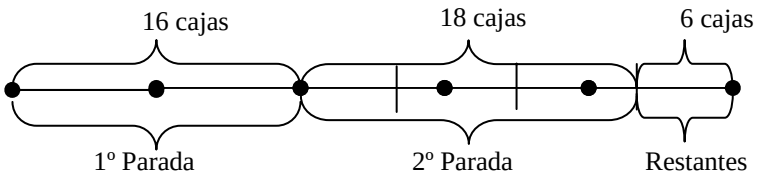
Entendemos por relación gráfica lineal (RGL): *un segmento de recta sobre el que se representan diversas cantidades de una magnitud y la dependencia entre ellas a partir de las condiciones descritas por el enunciado del problema.*

El número de RGL está dado por la cantidad de segmentos de recta que es necesario trazar para representar el problema y manipular dichas magnitudes.

Categoría Nº 1: Está constituida por problemas en que se describen las cantidades como partes de un total o se comparan utilizando la adición y sustracción. En esta categoría encontramos problemas con una o dos incógnitas. Sin embargo, en ambos casos basta con representar los datos y relaciones dadas por el enunciado con una RGL.

Ejemplo:

Un repartidor de frutas llena su furgoneta con varias cajas de tomates. En su primera parada deja los $\frac{2}{5}$ de su carga, y en la segunda y ultima, los $\frac{3}{4}$ de las cajas restantes. Si al final le quedan 6 cajas sin repartir, ¿cuántas cargó?

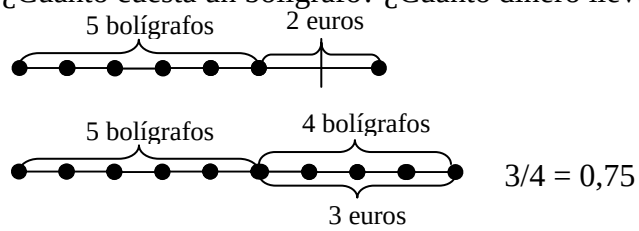


Respuesta: cargó 40 cajas

Categoría Nº 2: Compuesta por problemas en que es necesario plantear dos RGL, ambas dadas directamente por el enunciado que las plantea como una "igualdad".

Ejemplo:

Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?

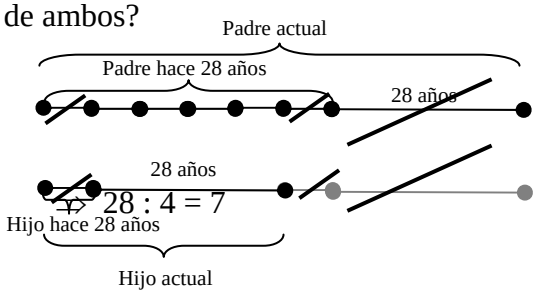


Respuesta: cada bolígrafo cuesta 0,75 euros y llevo 5,75 euros

Categoría Nº 3: Problemas que se caracterizan por utilizar más de dos RGL para ser resueltos. En algunas ocasiones se platean dos relaciones iniciales y, posteriormente, se hace necesario obtener, a partir de ellas, una tercera RGL. En otras ocasiones se plantean directamente tres relaciones dadas por el enunciado.
En estos problemas hay que determinar la longitud de dos segmentos, ya que son problemas en que hay dos incógnitas involucradas.

Ejemplo:

Hace 28 años, la edad de un padre era 6 veces la de un hijo, pero hoy en día es solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de ambos?



Respuesta: hijo: 28 + 7 = 35 años; padre: 28 + 7•6 = 70 años

Clasificación 2: clasificación empírica
Análisis estadístico

Para el análisis estadístico de la información obtenida con la aplicación del instrumento, se realizó una codificación numérica de los datos a partir de las variables definidas inicialmente, y después se llevó a cabo un análisis de frecuencias simples y análisis clúster.

Utilización MGL en las fases de planteamiento y ejecución

En la Tabla 2 se muestra el porcentaje de utilización de MGL en las fases de planeamiento y ejecución:

Fase	Planteamiento			Ejecución		
Problema	% no existe informació	% utilizó modelo no	% utilizó MGL	% no existe información	% utilizó modelo no	% utilizó MGL

	n	G – L			G - L	
1	0	0	100	0	84,2	15,8
2	0	10,5	89,5	0	42,1	57,9
3	0	5,3	94,7	5,3	31,6	63,2
4	0	15,8	84,2	0	73,7	26,3
5	10,5	0	89,5	21,1	26,3	52,6

Tabla 2

A partir de la tabla anterior podemos precisar que:

- La gran mayoría de los sujetos utilizó el MGL en la fase de planteamiento.
- En la fase de ejecución, en los problemas 1 y 4, una amplia mayoría de los sujetos, sobre el 70%, no utiliza el MGL.
- En la misma fase de ejecución, en los problemas restantes (2, 3 y 5), la mayoría de los sujetos utiliza el MGL, aunque no supera el 65%.

Clúster por etapas

Uno de los objetivos planteados para este trabajo consistía en determinar y caracterizar tipologías de problemas de álgebra elemental a partir de la utilización de un MGL. Para esto, se realizó un análisis de clúster en las distintas fases de la resolución del problema utilizando el paquete estadístico SPSS.

Clúster según planteamiento

En la etapa de planteamiento se formaron tres clúster significativos:

Clúster 1. En él se encuentran los problemas 1, 2 y 3, que se caracterizan por ser aquellos problemas en los que se utiliza con mayor frecuencia el MGL y, además, se utiliza correctamente.

Clúster 2. Conforma este cluster el problema 4. Este problema se caracteriza porque un alto porcentaje utiliza el MGL para su resolución. Sin embargo, se observa que aproximadamente un 15% de los sujetos utiliza otro modelo.

Clúster 3. Sólo el problema 5 pertenece este clúster, caracterizándose por ser el problema en el que menos se utiliza el MGL, y por ser el único que no es abordado por algunos sujetos (10,5%).

Clúster según ejecución

En la etapa de ejecución se formaron tres clúster:

Clúster 1. A este clúster pertenecen los problemas 1 y 4, que se caracterizan por tener el menor porcentaje de utilización del MGL y la menor utilización correcta del mismo. La mayoría supera la etapa exitosamente utilizando otro modelo.

Clúster 2. Los problemas 2 y 3 conforman este clúster. En dichos problemas la mayoría de los sujetos utiliza el MGL y lo utilizan correctamente.

Clúster 3. El problema 5 es el único problema incluido en éste cluster y se caracteriza porque aproximadamente el 50% de los sujetos utiliza el MGL, y de éstos sólo la mitad lo utiliza correctamente. También se observa que el 20% no aborda esta fase del problema.

Clúster según desempeño final

En este caso se construyeron 2 clúster significativos:

Clúster 1. Compuesto por los problemas 1, 2, 3 y 4 que se caracterizan por el hecho de que gran parte de los sujetos encuentra la respuesta correcta, superando el 84% en todos los casos.

Clúster 2. Sólo el problema 5 pertenece a este clúster y se caracteriza porque sólo el 26,3% obtuvo la respuesta correcta.

Conclusiones

Respecto de la clasificación de los problemas podemos decir que:

- Aquellos problemas que en la clasificación teórica corresponden a problemas que se resuelven utilizando una o dos RGL se comportan de manera similar en la aplicación del instrumento.
- De forma destacada, el problema 5 del instrumento, que corresponde a problema que se resuelve con tres o más RGL en la clasificación teórica, constituye un clúster por sí solo en los tres análisis realizados, por lo que se puede concluir que, efectivamente, es una tipología de problema que se diferencia de los demás.

Por otra parte, en cuanto a los objetivos de investigación, podemos comentar que fue posible resolver los problemas algebraicos presentes en libros de texto de la ESO utilizando un MGL, aunque destacamos que el modelo ha sido puesto a prueba con una muestra limitada de problemas.

Además, fue posible determinar semejanzas en la utilización del MGL para la RP, lo que permitió proponer una clasificación teórica.

Los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento permitieron la elaboración de clúster según las fases de resolución definidas, siendo éstos caracterizados de forma diferenciada. Sin embargo, no fue posible relacionar las clasificaciones descritas de manera completa.

La caracterización y clasificación de los problemas que se realizaron proporcionan información para la utilización del MGL como metodología significativa, alternativa a los sistemas tradicionales en la RP algebraicos elementales. Ahora bien, para determinar la potencialidad del modelo será necesario ampliar la muestra de problemas utilizada en nuestra investigación.

Como continuación de esta investigación, nos planteamos la elaboración de una propuesta de aula en donde, haciendo uso del MGL, se mejore el rendimiento en la RP algebraicos para conseguir aumentar las expectativas de éxito en el paso de la aritmética al álgebra y al desarrollo del pensamiento algebraico.

Referencias bibliográficas

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* pp. 95-122. HORSORI. Barcelona.

Espinosa, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.

Goldin, G. y Shteingold, M. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En Cuoco y Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics,* pp. 1–21,: NCTM. Reston, VA.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662)

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Refletions on its main activities. En Stacey, Chick y Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra,* pp. 35 – 44. Kluwer Academic Publishers. Netherland.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En Stacey, Chick y Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra,* pp. 47 – 70. Kluwer Academic Publishers. Netherland.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Paidos. España.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Proyecto Sur. Sevilla.

Real Decreto 1631/2006, del 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemática. En Rico, L. (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñaza Secundaria,* pp. 39-55. HORSORI. Barcelona.

Stacey, K. y Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. En Stacey, Chick y Kendal (Eds.) *The future of the teaching and learning of algebra,* pp. 1–20. Kluwer Academic Publishers. Netherland:

UNA CATEGORIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS RELACIONADOS CON LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Mauricio Contreras del Rincón.
Bernardo Gómez Alfonso.
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

Resumen
En esta comunicación se describe una categorización de los problemas multiplicativos en cuya resolución está involucrada la división de fracciones. Los problemas, localizados en una revisión de libros de texto antiguos y modernos, se caracterizan teniendo en cuenta las denominadas variables del problema (estructura dimensional, sentidos de uso de la división y de las fracciones, tipología de datos, contextos y modelos). Se describe la categoría relativa a los problemas sobre un solo espacio de medida. Esta categorización se utilizará para diseñar un cuestionario de investigación para establecer relaciones entre las variables del problema y las variables de resolución que utilizan los estudiantes en sus respuestas.

Palabras clave
División de fracciones, análisis estructural y dimensional, sentidos de uso, modelos, contextos, categorías.

Abstract
In this repport on describe a set of categories of fraction division multiplicative problems. The problems, locates in a revision of historical and modern textbooks, on characterize using problem variables (dimensional structure, division means and fractions constructs, type of dates, contexts and models). On describe the category of problems about only one measurement space. This categories on use for diseign a research questionary with the objetive of analyze relations between problem variables and solve variables that students uses in their answers.

Key words
Fractions' division, structural – dimensional analysis, use sense, models, contexts, categories.

Contreras, M. y Gómez, B. (2007). Una categorización de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife.* pp. 243-252.

El problema a investigar

El presente trabajo sintetiza las características de una categorización de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones.

Dicha categorización es una parte de la investigación que se está llevando a cabo como tesis doctoral en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, en la línea seguida por los miembros del grupo de Pensamiento numérico y algebraico (PNA), en relación con el campo conceptual de la estructura multiplicativa.

El objetivo general del trabajo es indagar acerca de los efectos del modelo de enseñanza de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones.

Objetivos e hipótesis

En trabajos anteriores (Contreras y Gómez, 2006, 2007) se señalan los objetivos particulares e hipótesis de la investigación. La hipótesis principal es que el modelo actual de enseñanza no tiene en cuenta todas las variables involucradas en los problemas de la división de fracciones, lo que posiblemente influye en las variables de resolución.

Las variables

Las variables que hemos identificado son: del problema (estructura dimensional, sentido de uso de la división y de las fracciones, tipología de datos, contextos y modelos); de resolución (enfoque estructural, algoritmos y representaciones), si bien en este artículo solamente nos referiremos a las variables del problema.

El trabajo ya realizado

En un trabajo precedente (Contreras y Gómez, 2006), se utilizaron las variables: "estructura dimensional del problema" y "constructos de fracción", junto con los contextos y modelos físicos, para seleccionar una muestra de problemas de división de fracciones, que se propuso en forma de cuestionario piloto a estudiantes de secundaria, en un intento de contrastar las hipótesis de partida señaladas antes.

En Contreras y Gómez, (2007), se presentaron los resultados de una revisión preliminar de libros de texto orientada a localizar los valores de la variable "interpretaciones de la división de fracciones" que utilizan los autores para explicar las nociones de fracción, división y división de fracciones.

Ahora, presentamos una categorización de los problemas que se basa en una ampliación de esos valores de las variables en donde destaca lo que de Filloy et al. (1999), Puig (1997) y Rubio y otros (2007), denominan "sentidos de uso" para referirse a las evidencias que generan los autores de libros de texto en las definiciones y en el planteamiento de los problemas y que indican la manera en que se ven y se usan las fracciones, la división y la división de fracciones en la situación dada por el enunciado del problema.

Metodología

Las variables que se tienen en cuenta para caracterizar los problemas son las siguientes:

1. Estructura dimensional en los sentidos de Vergnaud (1991) y de Schwarz (1981 y 1988): atendiendo al número de espacios de medida, a la correspondencia sagital (escalar o funcional) o cartesiana entre ellos, a la naturaleza extensiva o intensiva de las cantidades que intervienen en el problema y a sus interrelaciones.
2. Sentidos de uso de la división (medida y partición), de las fracciones (parte-todo, razón, división, medida, operador, número y punto de la recta numérica) y de la

división de fracciones (partición, medida, razón-proporción e inversión de la multiplicación o factor perdido).

3. Tipología de los datos (Q/Z, Z/Q, Q/Q, Z/M, Q/M, M/Q, M/Z y M/M, donde Q, Z y M indican que el dato es fracción, entero o mixto, respectivamente)

4. Contextos: aritmético (sólo números, sin historia), geométrico (con soporte geométrico o gráfico, como por ejemplo un rectángulo o un diagrama circular), algebraico (con mediación de letras o de incógnitas), y situacional (con enunciado que narra una historia, como por ejemplo, edades, móviles, mezclas, dinero, medidas, herencias, tasas, acciones simultáneas, acciones sucesivas, tiempo.)

5. Modelos: discreto (bolas, puntos, monedas, etc), continuo (pastel, rectángulo) y recta numérica.

De entre estas 5 variables, la que da paso a las diferentes categorías es la estructura dimensional del problema (1) (Vergnaud, 1991). Con ella se determinan tres categorías:

1) Problemas multiplicativos sobre un único espacio de medida.
2) Problemas multiplicativos sobre dos espacios de medida
3) Problemas multiplicativos sobre tres espacios de medida.

En cada una de las categorías se analizan los valores que toman el resto de variables.

Ejemplos de una categoría: problemas sobre un solo espacio de medida y equivalentes estructuralmente

En este artículo solamente describiremos con detalle la primera categoría, relativa a los problemas sobre un solo espacio de medida.

Mostramos algunos ejemplos:

P1. La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B? (Yamaguchi y Jwasaki, 1999, Vol. IV. p. 4-341).

P2. Los 15 1/2 años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?" (Bruño, 1940, p. 134)

P3. El producto de dos números es 76 1/8. Si uno es 4/9, ¿cuál es el otro?" (Edelvives, 1934, p. 131)

P4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6×x=3/4". (Edelvives, 1934, p. 244)

P5. ¿Cuántos octavos hay en 14 3/8?" (Edelvives, 1934, p. 137)

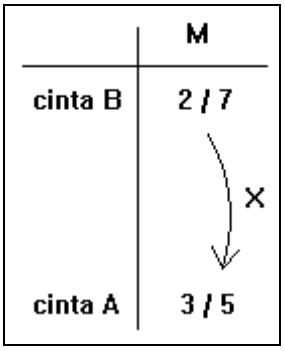
P6. El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor?. (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, pp 43)

P7. Un obrero ha gastado en manutención 1/3 de lo que ha ganado durante el año, 1/8 para vestuario y alquiler y 1/16 en otros gastos; sus ahorros ascienden a 318 ptas.; ¿cuánto había ganado durante este año?" (Bruño, 1940, p. 332)

En estos problemas, observamos valores de las variables que son comunes y otros que difieren.

P1. La longitud de la cinta A es 3/5 m y la de la cinta B es 2/7 m. ¿Cuántas veces la cinta A es tan larga como la cinta B?

El espacio de medida M representa la longitud en metros. La incógnita es el factor multiplicativo K que liga 3/5 con 2/7:

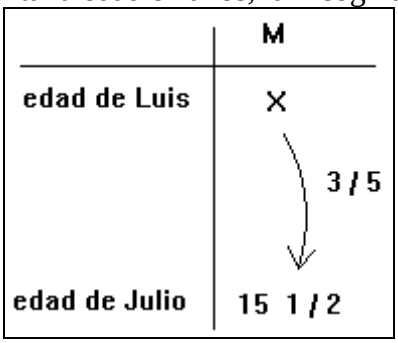


La solución $X=\frac{3/5}{2/7}$ se obtiene como cociente de dos cantidades extensivas, para obtener un escalar. Responde, por tanto, al caso E/E=k (E indica cantidad extensiva del espacio de medida y k un escalar).

Tanto las fracciones que representan los datos como la división de fracciones que da solución al problema tienen el sentido de uso de medida. Por el tipo de datos, el problema corresponde al caso Q/Q. El contexto es situacional (medidas). El modelo es de recta numérica.

P2. Los 15 1/2 años que tiene Julio son los 3/5 de la edad de Luis; ¿cuántos años tiene Luis?

El espacio de medida M representa la edad en años, la incógnita es la cantidad inicial X.



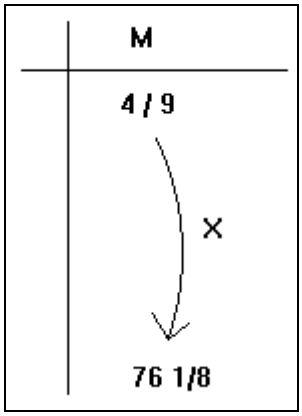
La solución $X=\frac{15\ 1/2}{3/5}$ se obtiene dividiendo una cantidad extensiva (la edad de Julio) entre un escalar (el factor multiplicativo) para obtener una cantidad extensiva (la edad de Luis), es decir, responde al caso E/k=E

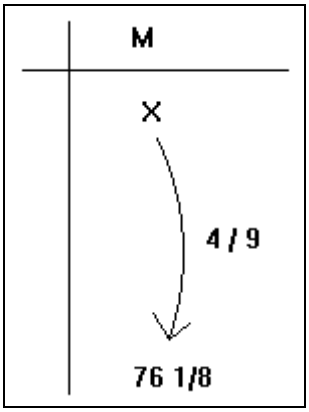
El número mixto 15 1/2 tiene el sentido de uso de medida, la fracción 3/5 tiene el sentido de operador que al actuar sobre la edad de Luis la convierte en la edad de Julio y la división de fracciones tiene el sentido de inversión de la multiplicación o factor perdido. Por el tipo de datos, el problema se encuadra en el caso M/Q. El contexto es situacional (edades). No hay modelo asociado.

P3. El producto de dos números es 76 1/8. Si uno es 4/9, ¿cuál es el otro?"

No hay espacio de medida. Las fracciones tienen el sentido de número y la división tiene el sentido de inversión de la multiplicación o factor perdido. Por el tipo de datos, el problema responde al caso M/Q. El contexto es aritmético. No hay modelo asociado.

El problema es ambiguo, ya que ante la ausencia de contexto situacional, se puede considerar equivalente en estructura al del cálculo del factor multiplicativo (esquema 1) o al del cálculo de la cantidad inicial (esquema 2).

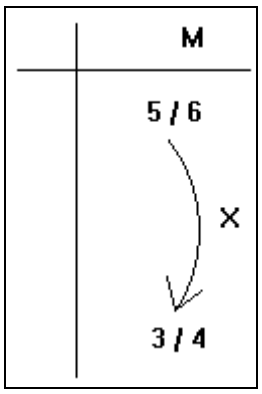
esquema 1 

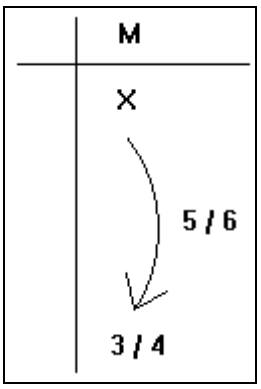
esquema 2 

P4. Hallar el valor de x en la expresión: 5/6×x=3/4.

No hay espacio de medida. Las fracciones tienen el sentido de número y la división tiene el sentido de inversión de la multiplicación o factor perdido. Por el tipo de datos, el problema responde al caso Q/Q. El contexto es algebraico. No hay modelo asociado.

El problema es ambiguo, pudiéndose considerar equivalente en estructura al cálculo del factor multiplicativo (1) o al cálculo de la cantidad inicial (2).

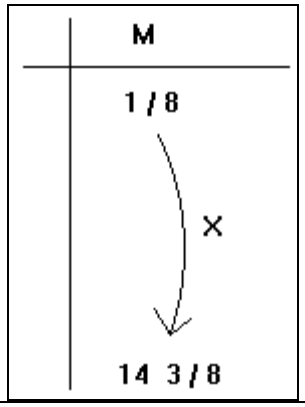
1 

2 

P5. ¿Cuántos octavos hay en 14 3/8?

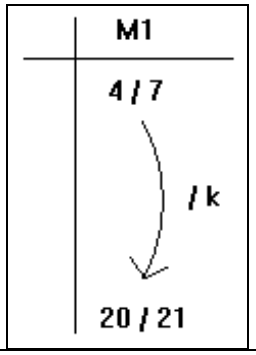
No hay espacio de medida. La fracción que se pregunta tiene el sentido "parte-todo o partes de la unidad". La tipología de los números responde al caso M/Q. El sentido de la división es medida y el contexto aritmético. No hay modelo asociado.

El problema se puede considerar equivalente en estructura al del cálculo del factor multiplicativo.



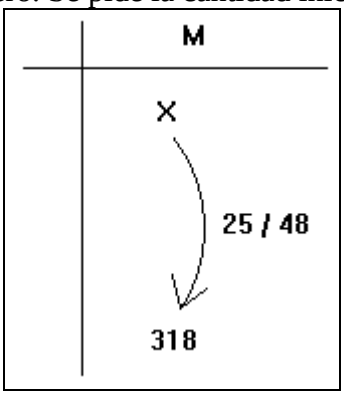
P6. El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor?.

No hay espacio de medida. La división de fracciones tiene el sentido de inversión de la multiplicación. Por el tipo de datos, es el caso Q/Q. El contexto es aritmético. No hay modelo asociado.
El problema se puede considerar equivalente en estructura al del cálculo del factor multiplicativo.



P7. Un obrero ha gastado en manutención 1/3 de lo que ha ganado durante el año, 1/8 para vestuario y alquiler y 1/16 en otros gastos; sus ahorros ascienden a 318 ptas.; ¿cuánto había ganado durante este año?

Se trata de un problema de dos etapas. La primera etapa consiste en determinar una suma de fracciones ($\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{25}{48}$) y la segunda etapa es, propiamente, el problema de división.
El espacio de medida M es el dinero. Se pide la cantidad inicial (salario anual).



La solución X=$\frac{318}{25/48}$ responde al caso E/k=E. Las fracciones del enunciado se usan como operadores y la división de fracciones tiene el sentido de inversión de la multiplicación. El tipo de datos es el Z/Q. El contexto es situacional (dinero). No hay modelo asociado.

Conclusiones que se pueden extraer del análisis de los problemas sobre un solo espacio de medida

1) Estructura
Los ejemplos analizados de esta categoría son de tres tipos:
1. 1. Cálculo del factor multiplicativo
De este tipo es el problema P1. Desde el punto de vista dimensional, la solución se obtiene mediante cociente de cantidades extensivas del mismo espacio de medida y el resultado es un escalar, es decir, el tipo es E/E=k.
1. 2. Cálculo de la cantidad inicial
Son de este tipo los problemas P2 y P7. Desde el punto de vista dimensional, la solución se obtiene como cociente de una cantidad extensiva del espacio de medida entre un escalar (el

factor multiplicativo) y el resultado es una cantidad extensiva del mismo espacio de medida (caso E/k=E).

1. 3. No hay espacio de medida

Son de este tipo los problemas P3, P4, P5 y P6. No hay espacio de medida. Las fracciones tienen el sentido de número. El contexto es aritmético. No hay modelo asociado. Estructuralmente son problemas ambiguos, que pueden considerarse como del tipo 1.1 o del tipo 1.2.

2) Sentido de uso de las fracciones y de la división de fracciones

En los problemas estudiados, las fracciones que aparecen en los datos tienen tres sentidos de uso: Medida (P1), Operador (P2, P7), Número (P3, P4, P6), Parte-todo o partes de la unidad (P5). Como se ve en P2, no todas las fracciones del enunciado tienen el mismo sentido de uso.

La división de fracciones aparece con los sentidos de uso de Inversión de la multiplicación o factor perdido (P2, P3, P4, P6, P7) y Medida (P1, P5)

El sentido de uso de las fracciones que aparecen como datos no coincide con el sentido de uso de la división de fracciones que resuelve el problema P1.

3) Tipología de los datos

Por la naturaleza numérica de los datos, los problemas de esta categoría localizados en la revisión de textos son de los siguientes tipos: Fracción / fracción, Q/Q (P1**,** P4, P6), entero / fracción, Z/Q (P7) y mixto / fracción, M/Q (P2, P3, P5).

4) Tipo de contexto

Los contextos localizados en los problemas de esta categoría son aritmético (P3, P4, P5, P6), algebraico (P4) y situacional (P1, P2, P7). A su vez, los contextos situacionales presentes en los problemas analizados son los siguientes: Edades (P2), Dinero (P7), Medidas (P1).

5) Modelo

El único modelo asociado a los problemas de esta categoría es el de recta numérica (P1).

El siguiente cuadro resume las características de la categoría de problemas multiplicativos de división de fracciones sobre un único espacio de medida:

<table>
<tr><td colspan="2">• Estructura</td></tr>
<tr><td>1. Cálculo del factor multiplicativo
E / E = k</td><td>2. Cálculo de la cantidad inicial
E / k = E; E × k = E</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Sentidos de uso
• De la división { Medida
Inversión de la multiplicación : factor perdido</td></tr>
</table>

• De las fracciones	Operador Punto de una recta numérica (número racional) Medida Número
• Tipología de los datos ..... Q/Q, Z/Q, M/Q	
• Modelo..... Recta numérica	
• Tipo de contexto 1. Aritmético 2. Algebraico 3. Situacional: Edades, Dinero, Medidas.	

De forma similar se pueden analizar el resto de categorías. En definitiva, el análisis estructural y dimensional de los problemas multiplicativos que involucran división de fracciones es la llave que permite caracterizarlos y agruparlos en categorías. Esta categorización en problemas–tipo permitirá diseñar un cuestionario de lápiz y papel. El análisis de las respuestas de los estudiantes permitirá contrastar las hipótesis de la investigación.

- **Referencias bibliográficas:**

Bruño, G. M. (1940). *Aritmética Grado Medio*. Ed. Bruño. Madrid.

Bruño, G. M. (1958). *Aritmética razonada*. Ed. Bruño. Madrid. Décima edición.

Contreras, M. y Gómez, B. (2006). Sobre problemas multiplicativos relacionados con la multiplicación de fracciones. En Pilar Bolea, M.ª José González y Mar Moreno (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. *X simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM*) Huesca. Universidad de Zaragoza, (pp. 171-184). ISBN: 84-8127-156-X.

Contreras, M. y Gómez, B. (2007). Las interpretaciones de la división de fracciones en textos históricos de enseñanza. *INDIVISA. Boletín de estudios e investigación*, vol. V. VIII *Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM*). Centro Universitario La Salle. Aravaca. Madrid. (En imprenta).

Edelvives (1934). *Aritmética de Segundo grado.* Zaragoza. Séptima edición.

Filloy, E, y otros (1999). *Aspectos teóricos del Álgebra Educativa*. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. Serie Investigación en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. México.

Puig, L. (1997). Notes on Semiotics and Mathematics Education. Presentado en el grupo de semiótica de las matemáticas en 21st Conference of PME. Finland.

Rubio, G., Del Valle, R., Del Castillo, A. y Gallardo, A. (2007). Producción de sentidos para los objetos algebraicos de número, variable y función al resolver problemas de variación continua. Evidencias empíricas sobre nuevos sentidos de uso del número negativo. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XI. XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM*) pp. 239-247. Universidad de La Laguna, Tenerife. ISBN: 84-7984-261-5.

Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE–G–80–0144). MIT, Cambrigde, MA.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM. pp. 41–52.

Valdivia Ureña y García Roca (1969). *Matemáticas 3º curso*. Bello. Valencia.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas (Reimp. 1997).

Yamaguchi, T. y Jwasaki, H. (1999). La división de fracciones no es una división, sino una multiplicación. *Proceedings of the 23 Conference of PME,* Vol. IV, pp.337–344.