LOGROÑO DEL 6 AL 8 DE SEPTIEMBRE DE 2023

Investigación en Educación Matemática XXVI

Edición:

Clara Jiménez Gestal

Ángel Alberto Magreñán Ruiz

Edelmira Badillo Jiménez

Pedro Ivars Santacreu



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Investigación en Educación Matemática XXVI



UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Investigación en Educación Matemática XXVI

Clara Jiménez-Gestal, Ángel Alberto Magreñán, Edelmira Badillo y Pedro Ivars (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Logroño, 6, 7 y 8 de septiembre de 2023

Investigación en Educación Matemática XXVI

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de Cartuja, s/n 18071 Granada (España)

Dra. Clara Jiménez-Gestal
Dr. Ángel Alberto Magreñán
Dra. Edelmira Badillo
Dr. Pere Ivars

Comité Científico

Dra. Edelmira Badillo Jiménez(coordinadora)
Dr. Pere Ivars Santacreu (coordinador)
Dra. Nuria Climent Rodríguez
Dra. Clara Jiménez Gestal
Dr. José María Marbán Prieto
Dr. Antonio M. Oller Marcén
Dra. Irene Polo Blanco

© de los textos: los autores
Diseño del logo, cartel y portada: Julia Gavela Berbel / Lorenzo A. Sedano Cadiñanos
Maquetación de la portada: Jorge Roldán

ISBN: 978-84-09-54401-1
ISSN: 2952-0045
Investigación en educación matemática (Internet)

Cítese como:
C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.) (2023). *Investigación en Educación Matemática XXVI*. SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

La publicación de estas actas ha contado con la ayuda del PID31 de los Proyectos de Innovación Docente de la Universidad de La Rioja y la ayuda AOCYRC2023 del Vicerrectorado de Investigación e Internacionalización de la Universidad de La Rioja.

Índice

Seminario de investigación I: Una panorámica de investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico **1**

UNA PANORÁMICA DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE PENSAMIENTO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Cañadas, M. C. 3

TREINTA AÑOS DE INVESTIGACIONES SOBRE DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Adamuz-Povedano, N. 11

INVESTIGACIONES SOBRE EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN EL AULA DE SECUNDARIA
Bruno, A. y Almeida, R. 27

PRÁCTICAS ALGEBRAICAS EN LOS PRIMEROS CURSOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Brizuela, B. M. 43

Seminario de investigación II: Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos **59**

RETOS DE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO ANTE LAS EXIGENCIAS DE LOS NUEVOS CURRÍCULOS
Rodríguez-Muñiz, L. J. 61

HACIA UNA FORMACIÓN COMUNITARIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Coles, A., Helliwell, T. y Malkin, E. 69

CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN CUALITATIVA Y SUS IMPLICACIONES EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Mellone, M., Baccaglini-Frank, A. y Di Martino, P. 79

PRÁCTICAS CON TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS PARA AFRONTAR NUEVAS DEMANDAS CURRICULARES
Branco, N. 89
EXPLORANDO EL HUECO ENTRE EL CURRÍCULO PRETENDIDO Y EL IMPLEMENTADO: PERCEPCIONES DE DOCENTES EN FORMACIÓN Y EN ACTIVO
Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano. J. M. 97

Comunicaciones **113**
PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: VINCULANDO PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y ALGEBRAICO
Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. 115
ACTITUDES HACIA LA PROBABILIDAD DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIŃ SECUNDARIA
Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. 123
ESTRUCTURAS EN UN CONTEXTO FUNCIONAL CON NIÑOS DE 5 AÑOS
Anglada, L., Cañadas, M. C., Fuentes, S. y Brizuela, B. M. 131
COMPORTAMIENTOS DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO AL ENUNCIAR RAZONAMIENTOS ABDUCTIVOS
Arce, M. y Conejo, L. 139
DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA RÚBRICA PARA CARACTERIZAR LA MIRADA PROFESIONAL SOBRE LA GESTIÓN COMUNICATIVA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS
Arriagada, V., Fernández, C. y Solar, H. 147
INVENCIÓN DE PROBLEMAS Y SENTENCIAS COMO MEDIO PARA EVIDENCIAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. 155
LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN ESTUDIANTES DE 3 AÑOS
Buforn, À. y Bernabeu, M. 163
CREACIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL. UNA EXPERIENCIA CON MAESTROS EN FORMACIÓN
Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. 171
RUTA PARA IDENTIFICAR, RECONSTRUIR Y TIPIFICAR ARGUMENTOS MATEMÁTICOS QUE SURGEN EN CLASE DE GEOMETRÍA
Camargo, L., Molina, O., Perry, P. y Samper, C. 179

CONEXIONES MATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE ÁREA POR ESTUDIANTES DE 13-14 AÑOS
Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. 187

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN POR UN ALUMNO DE 5º DE PRIMARIA CON SÍNDROME DE ASPERGER
Chico, A., Climent, N., Gómez-Hurtado I. y Polo-Blanco, I. 195

¿QUÉ INTENCIONES DIDÁCTICAS MUESTRAN LOS FUTUROS MAESTROS CUANDO TRANSFORMAN PROBLEMAS?
Chico, J., Martín-Díaz, J. P., Montes, M. y Badillo, E. 203

EL MODELO DE DEMANDA COGNITIVA PARA IDENTIFICAR ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA
Contreras, D. A., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. 211

ERRORES EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE FRACCIONES Y EFECTOS DE LA VARIABLE SITUACIÓN EN FUTUROS DOCENTES DE PRIMARIA
Embid, S., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. 219

COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE UN GRUPO DE PROFESORES EN FORMACIÓN
Espinoza-González, J., Buforn, À. y Llinares, S. 227

COMPETENCIAS DE INDAGACIÓN Y MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN CONTEXTOS HISTÓRICOS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA
Falcó Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Ledezma, C. y Font, V. 235

CAMBIO EN VARIABLES CUANTITATIVAS POR ALUMNOS DE 4 AÑOS DESDE UN ENFOQUE FUNCIONAL
Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. 243

LOS PARADIGMAS DIDÁCTICOS COMO COMPONENTES ESENCIALES DE LA INFRAESTRUCTURA DEL ESTUDIO DE CLASES
García, F. J., Gascón, J., Nicolás, P. y Sierra, T. A. 251

USO DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PARA CONTRASTAR EL ESTADO HIPOTÉTICO E IMPLEMENTADO DE LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA
Garcia-Mora, E. y Díez-Palomar, J. 259

COMPETENCIA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA PARA IDENTIFICAR PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS MATEMÁTICOS
Giacomone, B. y Verón, M. A. 267

¿QUÉ CARACTERÍSTICAS DEBE TENER UN FORMADOR DE PROFESORADO DE MATEMÁTICAS? LA PERSPECTIVA DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz,. L. J. 275
TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS NO ESPECIALISTAS
Gonzales, C. y Wilhelmi, M. R. 283
UNA PAUTA ESPECIALIZADA PARA REFLEXIONAR SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EN SECUNDARIA
Inglada, N., Breda, A. y Sala-Sebastià, G. 291
ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE Y RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS EN ALUMNADO DE ESCUELAS RURALES: ESTADO INICIAL EN UN PROYECTO STEM
Jiménez-Alcázar, A., Solano-Pinto, N. y Fernández-Cézar, R. 299
FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA QUE MUESTRAN FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL ORDENAR FRACCIONES
Cid-Cid, A., Joglar-Prieto, N., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano, E. 307
REFLEXIONES DE FUTUROS PROFESORES SOBRE LA INCLUSIÓN DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LOS CONTEXTOS DE ENSEÑANZA VIRTUAL Y PRESENCIAL
Ledezma, C., Hidalgo-Mocada, D, Vargas, J. P. y Font, V. 315
COMPRENSIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DERIVADA: DE PROCESO A OBJETO
Lillo, E., Moreno, M., Orts, A. y Llinares, S. 323
RECOMENDACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA PRENSA PARA MUJERES DEL SIGLO XIX: MATERIALES Y RECURSOS
Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Maz-Machado, A. 331
ACTIVIDAD CEREBRAL COMO RESPUESTA A DIFERENTES TIPOS DE TAREAS ARITMÉTICAS
García-Monge, A., Marbán, J. M., Rodríguez-Navarro, H. y Escudero, A. 339
LA TAREA PROFESIONAL DE DEFINIR DESDE EL MODELO MTSK
Martín-Díaz, J. P., Codes, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C. yCliment, N. 347
OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE SOBRE ISOMETRÍAS EN UNA REPRESENTACIÓN NO DINÁMICA
Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. 355
LA COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE UNA DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA
Milanesio, B. y Markiewicz, M. E. 363

SIGNIFICADOS PRAGMÁTICOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS
Milanesio, B., Burgos, M. y Markiewicz, M. E. 371
RACIONALIDAD DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS SUBYACENTE EN EL DISEÑO DE TAREAS SOBRE ARGUMENTACIÓN
Molina, O., Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. 379
ANÁLISIS DE MODELOS PARA LA ESTIMACIÓN DE CANTIDADES IRREGULARMENTE DISTRIBUIDAS
Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E. y Adamuz-Povedano, N. 387
DESCRIPTORES PARA ANALIZAR LA FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO INDICADOR DE TALENTO MATEMÁTICO
Mora, M., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. 395
CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA MAESTRA DE EDUCACIÓN INFANTIL: LA DESCOMPOSICIÓN ADITIVA DEL NÚMERO 6
Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., Joglar-Prieto, N. y Ramírez-García, M. 403
ANÁLISIS DE LA PRODUCCIÓN CIENTÍFICA SOBRE PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA EN SCOPUS
Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. 411
CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN INFANTIL (0-3 AÑOS) PARA PROMOVER LOS INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO
Olmos-Martínez G. y Alsina, Á. 419
CARACTERIZACIÓN DE TAREAS DE INECUACIONES PROPUESTAS EN TEXTOS ESCOLARES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. 427
UNA MIRADA A TRAVÉS DE GRÁFICOS FUNCIONALES DEL ALUMNADO DE QUINTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. 435
UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO DEL FORMADOR DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL
Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. A. 443
¿QUÉ CONOCIMIENTO DE ÁLGEBRA TEMPRANA MOVILIZAN LAS TAREAS QUE DISEÑA EL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL?
Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. 451
INVENCIÓN DE SITUACIONES ADITIVAS CON NÚMEROS ENTEROS
Quevedo Gutiérrez, E., Zapatera Llinares, A. y Lijó Sánchez, R. 459

ESTRATEGIAS, TÉCNICAS, TAREAS Y EJEMPLOS DE PATRONES UTILIZADAS EN PLANIFICACIONES DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA
Reyes-Escobar, M. y Moreno, A. 467
CREENCIAS EN MATEMÁTICAS, INTELIGENCIA FLUIDA Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO
Rubio-Sánchez, A., Gómez-Chacón, I. M. y Gómez-Veiga, I. 475
PERCEPCIONES DE FUTUROS MAESTROS SOBRE LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS LÓGICO-MATEMÁTICAS MEDIANTE ACTIVIDADES CONSTRUCTIVISTAS
Saá-Rojo, M. D., Carrillo-Gallego, D., Dólera-Almaida, J., Sánchez-Jiménez, E., Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. 483
PERCEPCIONES DEL PROFESORADO SOBRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL. ESTUDIO DE UNA FORMACIÓN
Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. 491
SILOGISMOS Y DIAGRAMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UNA PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE
Sanz-Herranz, H., Marbán, J. M. y Frápolli, M. J. 499
MICRO DESARROLLO DE LAS CONCEPCIONES DE DISTRIBUCIÓN MUESTRAL SIMULADA DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO
Sepúlveda, F. y Sánchez, E. 507
CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA DOCENTE AL SELECCIONAR PROBLEMAS PARA INTRODUCIR EL TEMA DE FUNCIÓN
Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. 515
DEL ARRASTRE VERTICAL A LA PERPENDICULARIDAD: ELABORACIÓN DE UNA PROPIEDAD GEOMÉTRICA EN 3D AL RESOLVER PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA
Sua, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. 523
DISEÑO DE TAREAS GEOMÉTRICAS EN LA FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA
Vargas, J. P., Vanegas, Y. y Giménez, J. 531
TAREAS PROPUESTAS POR FUTUROS DOCENTES SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN
Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. 539
CAMBIOS EN LOS PROCEDIMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO CURSO EN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA
Zorrilla, C., Fernández, C. e Ivars, P. 547

Pósteres **555**

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO PARA LA PREVENCIÓN DEL FRACASO ESCOLAR EN MATEMÁTICAS
Aguayo Cornejo, A. R. y Sáez-Maestro, E. 557

CREENCIAS SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS ESENCIALES DE UN BUEN PROFESOR DE MATEMÁTICAS
Aguilar-González, Á. y Muñiz-Rodríguez, L. 558

PROCESOS EN LA CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. 559

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO EN TAREAS PROBABILÍSTICAS
Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., y López-Martín, M. M. 560

DIFICULTADES EN TAREAS DE IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES
Campos-González, C., González-Calero, J. A., Arnau, D. y García-Moreno, M. A. . . 561

SENTIDO DE LA ESTRUCTURA REQUERIDO EN LAS TAREAS DE CÁLCULO
Cancec-Murillo, G., Rojano, T., Montoro, A. B. y Flores, P. 562

EVALUACIÓN DEL TEARFM PARA EL ANÁLISIS DE LA ALFABETIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESTADÍSTICOS
Casas-Rosal, J. C., León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. 563

LA INCORPORACIÓN DE LA METODOLOGÍA ACTIVA GAMIFICACIÓN EN LAS UNIDADES DIDÁCTICAS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA
Cortés, A., Breda, A. y Sánchez, A. 564

ALFABETIZACIÓN COMPUTACIONAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Dolz, A. y Gómez-Chacón I. M. 565

LA LATITUD DE LAS FORMAS COMO PRELUDIO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA
Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T. y Fuertes-Prieto, M. A. 566

ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS EN ALUMNADO CON AUTISMO MÍNIMAMENTE VERBAL
Fernández-Cobos, R., Polo-Blanco, I., Lebeña Cagigas, A. L. y Rodríguez-Candelero, P. 567

INTRODUCCIÓN DEL DISEÑO E IMPRESIÓN 3D EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS FUTUROS MAESTROS
Fuertes-Prieto, M. A., Alonso-Ruano, B. M., Rodríguez-Sánchez, M. M. y Rodríguez-Muelas, D. 568

¿UN AULA INTELIGENTE? CÓMO LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS OPTIMIZAN EL ESTUDIO DE FUNCIONES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA
García-Martínez X., Gutiérrez-Rodríguez I. y Martiñán Otero D. 569
GRAFOS: CONECTANDO MATEMÁTICAS REALISTAS
García-Alonso, I. y Hernández-Córdoba, E. 570
INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS POR ESTUDIANTES CON AUTISMO
García-Alonso, I., Bruno, A., Polo-Blanco, I. y González-Sánchez, J. 571
UN ESTUDIO SOBRE EL USO DE ESQUEMAS Y AYUDAS VISUALES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS MONITORIZADO CON SEGUIMIENTO OCULAR
García-Bayona, I., Pérez-Suay, A., Van Vaerenbergh, S. y Pascual-Venteo, A. B. . . . 572
VALIDACIÓN DE UN DECÁLOGO PARA LA ADAPTACIÓN DE APPLETS MATEMÁTICOS PARA ALUMNADO CON AUTISMO
García-Gómez, A., Van Vaerenbergh, S. y Polo-Blanco, I. 573
FORMANDO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA AL FUTURO PROFESORADO EN EDUCACIÓN INFANTIL
Garcia-Marques, M. E., Melchor-Borja, C. y Pla-Castells, M. 574
AJUSTE O REELABORACIÓN DEL PLAN EN SITUACIONES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMERAS EDADES
Garcia-Marques, M. E., Diago, P. D. y Arnau, D. 575
DE SEXTO A PRIMERO: INVENCIÓN DE PROBLEMAS
Garrido-Martos, R., De la Fuente, A., Rodríguez-Miravalles, J., Benito, A. y Nolla, A. 576
CÓMO INTEGRAN TECNOLOGÍA LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS
Gavilán-Izquierdo, J. M. y Gallego-Sánchez, I. 577
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LENGUAJE INCONSISTENTE POR UN ALUMNO CON AUTISMO
Goñi-Cervera, J., Jacinto, H. y Polo-Blanco, I. 578
DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN. UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE MATEMÁTICAS
Herrera-Dévora, K. y Camacho-Machín, M. 579
EL DOCENTE COMO CLAVE EN EL DESEMPEÑO DEL ESTUDIANTADO EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Herreros-Torres, D., Sanz, M. T., y Gómez-Ferragud, C. B. 580

IDENTIDAD MATEMÁTICA DE DOCENTES REFLEJADA A TRAVÉS DE UNA EXPERIENCIA DE PROBABILIDAD
Irigoyen-Carrillo, M. E., González-Astudillo, M. T. y Alvarado-Monroy, A. 581
ORGANIZACIÓN DE DATOS EN EDUCACIÓN INFANTIL EN EL CONTEXTO DEL CUENTO "EL MONSTRUO DE COLORES"
Izagirre, A. y López, A. 582
AUTORREGULACIÓN Y APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ALUMNADO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA
Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. 583
APORTACIONES DE LAS PRIMERAS MUJERES DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN ESPAÑA
León-Mantero, C., Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y Casas-Rosal, J. C. 584
EL USO DE LA REGLA A TRAVÉS DE ACTIVIDADES EN CONTEXTOS DE MEDIDAS NO ENTERAS EN UN PROGRAMA DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD
López-Iñesta, E., Gómezescobar, A. y Sanz, M. T. 585
ANÁLISIS DE LOS REGISTROS DE LA PLATAFORMA MOODLE EN UNA ASIGNATURA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
López-Iñesta, E., Sanz, M. T., Garcia-Costa, D. y Grimaldo, F. 586
EL CONCEPTO DE PERÍMETRO Y ÁREA SEGÚN FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA
López-Serentill, P. y De la Fuente, A. 587
ELEMENTOS DE EUCLIDES EN EL SIGLO DE ORO ESPAÑOL
Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Rodríguez-Baiget, M. J. 588
CARACTERÍSTICAS DEL DISCURSO MATEMÁTICO DE UN PROFESOR DURANTE LA ENSEÑANZA
Múnera, N. 589
CONEXIONES MATEMÁTICAS INTERDISCIPLINARES EN EDUCACIÓN INFANTIL
Novo, M. L., Sanz, P. y Cuida, A. 590
ACTITUDES AFECTIVAS DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA ANTE UNA INSTRUCCIÓN BASADA EN EJEMPLOS USANDO UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE
Osorio-Utiel, L., del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y Arnau-González, P. 591

BRECHA DE GÉNERO EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO SOBRE LA GESTIÓN DEL ERROR
Pérez-Suay, A., Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D., García-Bayona, I. y González-Calero, J. A. 592
ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA: PRIMEROS PASOS PARA COMPRENDER EL TEOREMA DE PITÁGORAS
Pizarro, N., Guede-Cid, R., Belmonte, J. M. y Mendez-Coca, M. 593
MODELACIÓN PROBABILÍSTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Rifo, L. 594
ANÁLISIS DE SOLUCIONES A PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE UNA HERRAMIENTA DE PROGRAMACIÓN POR BLOQUES EN ALUMNADO CON TALENTO MATEMÁTICO
Rotger, L. y Ribera, J. M. 595
PROPUESTA INTERDISCIPLINAR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL
Sáez-Maestro, E. y Rubio-Sánchez, A. 596
ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS CON ALUMNOS DEL PROGRAMA DE DIVERSIDAD CURRICULAR
Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. 597
RELACIÓN ENTRE LA ANSIEDAD SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA REALIZACIÓN DEL PRÁCTICUM EN DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN
Santágueda-Villanueva, M., Lluch-Peris, A., Lorenzo-Valentín, G. y Roig-Albiol, A. . . 598
ENSEÑANZA DE LA ENCRIPTACIÓN Y EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN UN ENTORNO VIRTUAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO
Sanz-Herranz, H. y Cuida, A. 599
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE UNA HERRAMIENTA DE RETROALIMENTACIÓN
Sanz-Ruiz, M., Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y Blanco, T. F. 600
FINES, OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LAS MATEMÁTICAS PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA (1970-2020)
Soto-Uruñuela, M. P. 601
PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y SU RELACIÓN CON VARIABLES COGNITIVAS EN EL ÁMBITO UNIVERSITARIO
Ventura-Campos, N., Pérez-Suay, A. y Melchor-Borja, C. 602

EL PAPEL DEL ÁLGEBRA TEMPRANA COMO POSIBLE INDICADOR DEL ERROR DE INVERSIÓN
Ventura-Campos, N., Moreno-Rus, A. y Pérez-Suay, A. 603

Índice de autores **605**

Palabras Clave **609**

Keywords **613**

Seminario de investigación I: Una panorámica de investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico

Coordina: Dra. María C. Cañadas Santiago (Universidad de Granada)

Ponentes:

- Dra. Natividad Adamuz Povedano (Universidad de Córdoba): *Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria.*
- Dra. Alicia Bruno Castañeda (Universidad de La Laguna): *Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria.*
- Dra. Bárbara M. Brizuela (Tufts University, EEUU): *Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria.*

UNA PANORÁMICA DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE PENSAMIENTO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

An overview of research on numerical thinking and algebraic thinking

María C. Cañadas[a]

[a]Universidad de Granada

Resumen

En este seminario presentamos una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. Nuestros objetivos son: (a) mostrar una visión general de la investigación en pensamiento numérico y pensamiento algebraico, (b) visibilizar ejemplos de estudios concretos y (c) identificar líneas de investigación en las cuales avanzar en el futuro. Tras mostrar algunas ideas generales sobre ambos constructos, introducimos las principales líneas temáticas relacionadas de investigadores españoles. Finalmente introducimos las tres ponencias que constituyen el seminario, que estarán a cargo de tres expertas investigadoras. Las dos primeras ponentes se centran en el pensamiento numérico. Natividad Adamuz aborda el pensamiento numérico en educación primaria y Alicia Bruno el pensamiento numérico en educación secundaria. La tercera, Bárbara Brizuela, pone el foco en el pensamiento algebraico en educación primaria.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, pensamiento numérico, educación primaria, educación secundaria.*

Abstract

In this seminar we present an overview of research on numerical thinking and algebraic thinking. Our objectives are: (a) to show an overview of research in numerical thinking and algebraic thinking, (b) to show examples of specific studies, and (c) to identify future lines of research. After presenting some general ideas about both constructs, we introduce the main related thematic lines among Spanish researchers. Finally, we introduce the three papers that constitute the seminar, led by three expert researchers. The first two speakers focus on number thinking. Natividad Adamuz addresses number thinking in primary education and Alicia Bruno number thinking in secondary education. The third, Bárbara Brizuela, focuses on algebraic thinking in elementary education.

Keywords: *algebraic thinking, elementary education, numerical thinking, secondary education.*

En este seminario presentamos una panorámica de las investigaciones que se vienen desarrollando en las últimas décadas en el grupo Pensamiento Numérico y Pensamiento Algebraico (PNA) de la SEIEM. Existen diferentes aproximaciones válidas e interesantes para organizar un seminario sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico en el contexto de la SEIEM. Aunque hay aspectos compartidos con otros grupos, nuestro objetivo ha sido centrarnos en elementos específicos que forman parte de la agenda de investigación de PNA. Abordamos temáticas en las que se está trabajando en la actualidad en este grupo y que están dando lugar a publicaciones en revistas de reconocido prestigio.

Nos planteamos tres objetivos con este seminario: (a) mostrar una visión general de la investigación en las temáticas de nuestro grupo, (b) visibilizar ejemplos de estudios concretos y (c) evidenciar líneas de investigación en las que avanzar a medio plazo.

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.

Este documento tiene tres partes diferenciadas. En primer lugar, presentamos algunas ideas generales sobre los marcos conceptuales en los que nos ubicamos para abordar el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. En segundo lugar, introducimos las principales líneas temáticas relacionadas con ambos tipos de pensamiento en las que han trabajado investigadores españoles. Finalmente, introducimos las tres ponencias que constituyen el seminario, que estarán a cargo de tres expertas investigadoras: las doctoras Natividad Adamuz-Povedano (Universidad de Córdoba, España), Alicia Bruno (Universidad de la Laguna, España) y Bárbara Brizuela (Tufts University, Estados Unidos).

PENSAMIENTO NUMÉRICO

El pensamiento numérico trata de aquello que la mente puede hacer con los números: pensar sobre ellos, razonar a través de ellos, aplicarlos para resolver problemas, entre otros. Desde la investigación en Didáctica de la Matemática, se considera que el pensamiento numérico está presente en todas aquellas actuaciones que realizan los seres humanos y que tienen relación con los números. Si bien el concepto de número es un concepto abstracto, los números naturales nos resultan bastante familiares. De entre todos los conjuntos numéricos, este es con el que estamos más familiarizados y sobre el que mayor número de investigaciones existen (Castro, 2008).

El pensamiento numérico está estrechamente relacionado con otros constructos que permiten su desarrollo y lo potencian, entre ellos están el pensamiento relacional, el pensamiento cuantitativo flexible y el sentido numérico.

Las dos ponencias que abordan el pensamiento numérico en este seminario se centran en el sentido numérico, del que se comenzó a hablar a finales de los años 80, entendiéndolo como una forma no algorítmica de pensar sobre los números, que conlleva una profunda comprensión de su naturaleza, así como de las operaciones que se pueden realizar con ellos (Arcavi, 1994; Resnick y Ford, 1991; Sowder, 1992).

No hay una definición consensuada de sentido numérico, pero las ideas de que se "desarrolla gradualmente como resultado de explorar los números, visualizarlos en variedad de contextos y relacionarlos de manera que no se limiten por los algoritmos tradicionales" (Howden, 1989, p. 11) y que "implica la comprensión de los números de un modo flexible para tomar decisiones matemáticas y desarrollar estrategias útiles para manipular números y operaciones" (McIntosh et al., 1992) son comúnmente aceptadas (Almeida et al., 2014).

Históricamente, los aspectos numéricos han estado contemplados en el currículo español. En la actualidad siguen incluyéndose bajo la terminología de "sentido numérico" en la educación obligatoria. Una de las ponentes realiza un estudio bibliométrico sobre el sentido numérico en educación primaria (Adamuz, 2023).

El sentido numérico no solo tiene cabida en la educación primaria. Para mostrar evidencia de esto, la segunda ponencia (Bruno, 2023) aborda el sentido numérico en educación secundaria.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Existen diferentes definiciones sobre pensamiento algebraico, algunas de ellas con diferencias sutiles que hacen que no haya un consenso a nivel internacional (Cañadas et al., 2012). Sí existe acuerdo en que el pensamiento algebraico es un proceso cognitivo que proporciona herramientas a los estudiantes para explorar, establecer y construir relaciones matemáticas generales, y que puede emerger en ausencia de la notación algebraica (Carraher y Schliemann, 2007).

Desde nuestra perspectiva teórica, el pensamiento algebraico puede entenderse a través de cuatro prácticas esenciales: (a) generalizar; (b) representar; (c) justificar y (d) razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Además, estas cuatro prácticas deben estar presentes en la actividad algebraica, independientemente del enfoque del álgebra escolar que

se considere. Existen varios enfoques que reconocen la multidimensionalidad del álgebra escolar: patrones, aritmética generalizada, funciones, igualdades, desigualdades, ecuaciones e inecuaciones suelen estar presentes en la bibliografía consultada (e.g., Blanton et al., 2011; Drijvers et al., 2011; Kieran, 2004, 2022; Mason et al., 1985; Usiskin, 1999). La tercera de las ponentes se centrará en dos de las prácticas mencionadas (generalizar y representar) y en el enfoque focalizado en las funciones (Brizuela, 2023).

En diferentes foros, en los inicios de la investigación en esta temática en España hace ahora diez años, encontramos cierta reticencia a hablar de "álgebra" en los primeros niveles educativos, siendo contenidos que se solían asociar más a educación secundaria y niveles superiores. La justificación era principalmente curricular, ya que el álgebra ha aparecido históricamente en educación secundaria y no antes (Cañadas, 2022). En cambio, el sentido algebraico forma parte del currículo de educación primaria en la actualidad (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022b). De ahí que hayamos seleccionado este nivel educativo para mostrar algunos ejemplos en la tercera de las ponencias.

Existen conexiones importantes entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Esta razón fue la que hizo que se fundara un grupo de investigación denominado "Pensamiento Numérico y Algebraico" en la SEIEM. Tradicionalmente ha sido uno de los grupos más numerosos de la SEIEM (https://www.seiem.es/org/prospectiva.shtml) y sus miembros cuentan con publicaciones de reconocido prestigio a nivel nacional e internacional. Existen diferentes núcleos de investigadores en universidades en España que han venido trabajando en estas temáticas. Menciono a continuación algunos de los más destacados a través de sus publicaciones.

LÍNEAS TEMÁTICAS DE INVESTIGADORES ESPAÑOLES EN PENSAMIENTO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El actual currículo español, que estructura los saberes básicos en seis sentidos (socioemocional, numérico, de la medida, espacial, algebraico y pensamiento computacional y sentido estocástico) recoge un nuevo planteamiento, a nivel curricular, de las matemáticas. El sentido numérico plasma algunas ideas que se vienen trabajando en investigación desde hace décadas en el contexto de la SEIEM. El sentido algebraico es la primera vez que se recoge de forma explícita en un documento curricular de educación primaria en España. En ambos casos estamos esperanzados en que las investigaciones que se desarrollan desde hace años en nuestra disciplina (tanto a nivel nacional como internacional) puedan tener repercusión a nivel curricular en España. Destaco algunos de estos estudios a continuación.

En Andalucía hay un grupo de investigación desde 1988, del Plan Andaluz de Investigación llamado "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico", dirigido durante décadas por Luis Rico, de la Universidad de Granada. En él se han tratado temas de esta agenda de investigación (https://fqm193.ugr.es/). Sus investigadores han publicado trabajos desde diferentes enfoques (e.g., González-Marí et al., 2009). Enrique Castro ha liderado una línea sobre cálculo aritmético y estimación (Segovia y Castro, 2009) y problemas aritméticos (Castro y Frías, 2013). Sobre problemas aritméticos también encontramos publicaciones indexadas en las universidades de Extremadura (Gil et al., 2006) y Valencia (Gómez y Puig, 2014). Los aspectos numéricos no se centran únicamente en el conjunto de los naturales. En la Universidad de Alicante, por ejemplo, se han abordado los números racionales en diferentes estudios (e.g., González-Forte et al., 2022).

A partir de Encarnación Castro (1995) surge otra línea de investigación centrada en patrones y generalización que se desarrolla a través de varios proyectos de investigación hasta 2013 (Cañadas et al., 2009; Molina et al., 2008). Desde 2014, destacamos tres proyectos I+D con financiación del Ministerio competente, sobre pensamiento algebraico con niños de 3 a 12 años (https://pensamientoalgebraico.es/es). Estos proyectos se centran en diferentes aproximaciones al pensamiento algebraico (Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Pinto et al., 2021; Ramírez et al., 2022;

Torres et al., 2021). De forma paralela, investigadores de estos proyectos han abordado aspectos algebraicos en educación secundaria, en concreto: la invención de problemas en álgebra (Cañadas et al., 2018; Fernández-Millán y Molina, 2016), y los errores y dificultades de los estudiantes (Castro et al., 2022; Molina et al., 2017). Cabe mencionar a De Castro (2018) y Alsina (2016), con una trayectoria reconocida a través de sus trabajos con niños de 3 a 6 años sobre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Además, en la Universidad de La Laguna se han realizado investigaciones relevantes sobre errores y dificultades de los estudiantes en álgebra (Socas, 2007) y sentido numérico (Almeida et al., 2014).

En la Universidad de Valencia ha habido una tradición de investigación sobre estudios históricos, análisis de libros de texto, y resolución de problemas, como por ejemplo Puig (2018) o los diferentes libros y capítulos de libros de Gómez (e.g., Gómez, 2013).

Como parte de la agenda española de investigación, algunos grupos se han centrado en los procesos de aprendizaje de niños con necesidades educativas especiales, como el síndrome de Down o el autismo (TEA) y el aprendizaje de la aritmética (Bruno y Noda, 2019; Polo-Blanco et al., 2021), o los alumnos con talento matemático y pensamiento algebraico (Gutiérrez et al., 2018).

Los trabajos citados en las líneas anteriores de diferentes universidades españolas surgen de un esfuerzo por sintetizar muchos años de trabajo en temáticas relacionadas con el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico desarrolladas por diferentes investigadores que han liderado líneas de trabajo a nivel nacional, aunque son muchos más los autores y publicaciones que ameritan su reconocimiento.

TRES PONENCIAS EN ESTE SEMINARIO

Este seminario está constituido por tres ponencias que abordan tres intereses de investigación. Las dos primeras se centran en el sentido numérico. La primera presta atención a la educación primaria y la segunda a la educación secundaria. La tercera pone el foco en el pensamiento algebraico en educación primaria. Presentamos un breve resumen de cada una a continuación.

Natividad Adamuz, en su trabajo titulado “Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria” (Adamuz-Povedano, 2023) realiza un estudio bibliométrico de las investigaciones en desarrollo del sentido numérico en la etapa de educación primaria a través de la revisión de la producción científica publicada en SCOPUS. La autora describe las corrientes temáticas de investigación en sentido numérico, con el fin de orientar futuras investigaciones.

Alicia Bruno, a través de la contribución titulada “Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria” (Bruno, 2023) aborda unas temáticas particulares sobre sentido numérico que no se han abordado hasta la fecha y presenta dos investigaciones concretas sobre sentido numérico en educación secundaria. La autora destaca la importancia de desarrollar un sentido numérico creativo y flexible en este nivel educativo y presenta algunas líneas potenciales de investigación para el futuro.

Bárbara Brizuela presenta un trabajo titulado “Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria” (Brizuela, 2023). Con base en años de investigaciones en Estados Unidos y desde el enfoque funcional del *early algebra*, ejemplifica cómo dos de las cuatro prácticas algebraicas (representación y generalización) pueden unificar la educación matemática escolar. La autora enfatiza la relevancia e importancia de enfocarnos en el desarrollo de las prácticas algebraicas en niños en los primeros cursos de educación primaria.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11-25). SEIEM.

Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 9-34. https://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997

Alsina, Á. (2016). El currículo del número en educación infantil. Un análisis desde una perspectiva internacional. *PNA, 10*(3), 135-160.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271-1291. https://dx.doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Brizuela, B. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI*. (pp. 43-57). SEIEM.

Bruno, A. y Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 27-41). SEIEM.

Bruno, A. y Noda, A. (2019) The concept of tens and hundreds in students with down syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education, 66*(2), 171-185. https://dx.doi.org/10.1080/1034912X.2018.1530343

Cañadas, M. C. (2022). *Proyecto investigador*. Documento no publicado.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2009). Using a model to describe students' inductive reasoning in problem solving. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 261-278.

Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, R. (2012). CERME7 Working Group 3: Algebraic thinking. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 189-190. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2012.694284

Cañadas, M. C., Molina, M. y Del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 19-37. https://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Comares.

Castro, E. (2008). Pensamiento numérico y Educación Matemática. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas* (pp. 23-32). Departamento de Didáctica de la Matemática y Thales.

Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. y Rodríguez-Domingo, S. (2022). Difficulties in semantically congruent translation of verbally and symbolically represented algebraic statements. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 593-609. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10088-3

Castro, E. y Frías, A. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1,2), 37-64. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1272

De Castro, C. (2018). El papel de las imágenes en el proyecto "¡A contar!" para el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil. *Unión, 53*, 138-157.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011a). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Sense Publishers.

Fernández-Millán E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 340*, 551-569.

Gómez, B. y Puig, L. (2014). *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Universidad de Valencia.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022) Profiles in understanding operations with rational numbers, *Mathematical Thinking and Learning, 24*(3), 230-247. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287

González-Marí, J. L., Rico, L. y Gallardo, J. (2009). Diversidad estructural y semiótica en el proceso didáctico de ampliación de los naturales a los enteros: un estudio sobre comprensión en el campo de la relatividad aditiva. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 309-340.

Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169-198). Springer.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 26*(6), 6-11.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM-Mathematics Education, 54*(6), 1131-1150. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Open University Press.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-8.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Third graders' strategies and use of relational thinking when solving number sentences. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, pp. 399-406). Cinvestav-UMSNH.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137-1156. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9739-5

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 1183-1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Polo-Blanco, I., González, M. J., Bruno, A. y González, M. J. (2021). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly*, Online first. https://doi.org/10.1177/07319487211061421

Puig, L. (2018). Dos errores famosos en la Arithmetica Algebratica de Marco Aurel reconsiderados. En D. Ruiz-Berdún (Ed.), *Ciencia y técnica en la universidad: trabajos de historia de las ciencias y de las técnicas* (Vol II, pp. 215-228). Universidad de Alcalá-Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas.

Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. (2022). Kindergarten and first-grade students' understandings and representations of arithmetic properties. *Early Childhood Education Journal, 50*, 357. https://doi.org/10.1007/s10643-020-01123-8

Resnick, L. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*, 7, 499-536.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). SEIEM.

Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Routledge.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*, 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). NCTM.

TREINTA AÑOS DE INVESTIGACIONES SOBRE DESARROLLO DE SENTIDO NUMÉRICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Thirty years of research on number sense development in primary education

Adamuz-Povedano, Natividad[a]

[a]Universidad de Córdoba

Resumen

El presente trabajo forma parte del seminario de investigación "Una panorámica de investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico". De forma más específica, el objetivo de este estudio es ofrecer una visión general de las investigaciones en desarrollo del sentido numérico en la etapa de educación primaria a través de la revisión de la producción científica publicada en SCOPUS en ese ámbito. Se han seleccionado 219 publicaciones (artículos, libros y capítulos de libros) y se han analizado desde tres perspectivas: contexto, impacto y contenido de las publicaciones. Del análisis se extrae que la investigación en este ámbito se ha centrado fundamentalmente en medir el sentido numérico manifestado por los estudiantes para vincularlo con el rendimiento académico o con posibles dificultades posteriores en matemáticas, más que en el desarrollo e implementación de programas formativos que promuevan el desarrollo del sentido numérico.

Palabras clave: *educación primaria, revisión sistemática, sentido numérico.*

Abstract

This paper is part of the research seminar "An overview of research on number thinking and algebraic thinking". More specifically, the aim of this study is to provide an overview of research on the development of number sense in primary education through a review of the scientific production published in SCOPUS in this field. A total of 219 publications (articles, books and book chapters) have been selected and analysed from three perspectives: context, impact and content of the publications. The analysis shows that research in this area has focused mainly on measuring students' number sense in order to link it to academic performance or to possible later difficulties in mathematics, rather than on the development and implementation of training programmes that promote the development of number sense.

Keywords: *number sense, primary education, systematic review.*

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre el desarrollo del sentido numérico (SN) tiene importantes implicaciones para la enseñanza de las matemáticas. Quizás por eso, es un concepto que ha generado gran interés desde distintos ámbitos, principalmente desde la Educación Matemática y desde la Psicología Cognitiva. No obstante, ambas corrientes conciben el SN de forma distinta, llegando a definiciones diferentes. Según Reynvoet et al. (2016), los científicos cognitivos podrían llegar ya a una definición de SN que aunara bastante consenso. En cambio, dentro de la investigación en Educación Matemática todavía divergimos en la definición. Este hecho puede tener una doble lectura. Por un lado, la ausencia de definiciones precisas puede debilitar la relevancia de los hallazgos de la investigación y dificultar la comunicación académica generando confusión respecto a la naturaleza del SN (Ghazali et al., 2021). Por otro lado, la segmentación de la definición de SN en función del tema concreto que se aborda permite una inmensa riqueza conceptual. Así, para Carroll et al. (2000), las diferentes representaciones numéricas son una estrategia importante para el sentido numérico, mientras que Howell y Kemp (2010) lo ven como la habilidad de componer y descomponer números. Kerschen et

Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo del sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11–25). SEIEM.

al. (2018), por su parte, destacan la importancia del sentido numérico para identificar magnitudes relativas y absolutas de los números. Otros autores, como Yang et al. (2008) y Kim, Shin y Lee (2013), consideran la comprensión conceptual de las operaciones y la estimación como elementos clave del sentido numérico, mientras que Lee y Lembke (2016) se refieren a la habilidad para realizar cálculos mentales y juzgar la razonabilidad de un cálculo. Otros autores incorporan conceptualizaciones más amplias basándose en aspectos que denotan posesión de SN (Resnick, 1989; Sowder, 1992).

A través de una revisión bibliográfica realizada sobre el término, Andrews y Sayers (2015) encontraron tres perspectivas interconectadas sobre el SN. La primera, el sentido numérico preverbal, se refiere a la capacidad innata de todos los seres humanos para comprender pequeñas cantidades y compararlas. La segunda, el sentido numérico fundacional, incluye los conocimientos numéricos que se adquieren durante los primeros años escolares a través de la instrucción. La tercera, el sentido numérico aplicado, es un conjunto de conocimientos básicos relacionados con los números que son necesarios para cualquier adulto, independientemente de su profesión, en línea con la definición de McIntosh et al. (1992). Por tanto, el objetivo de la etapa de educación primaria en relación con el desarrollo del sentido numérico es promover aprendizajes que hagan que los niños adquieran ese sentido numérico fundacional y transiten hacia el sentido numérico aplicado. Veamos, entonces, con más detalle ambas perspectivas.

Andrews y Sayers (2015) establecen 8 dimensiones o componentes del sentido numérico fundacional (FoNS8) de sus siglas en inglés) que permiten analizar las oportunidades de aprendizaje relacionadas con dicho sentido que surgen en las aulas. Estas son: (a) reconocimiento de números, (b) conteo sistemático, (c) conciencia de la relación entre número y cantidad, (d) discriminación de la cantidad, (e) comprensión de las diferentes representaciones de los números, (f) estimación, (g) competencia aritmética simple y (h) conciencia de los patrones numéricos. Además, conforman un marco con gran potencial para analizar libros de texto (Andrews y Sayers, 2015; Sayers et al., 2021) y para caracterizar la práctica docente (Fernández-Ahumada et al., in press).

En el caso del sentido numérico aplicado encontramos de utilidad las componentes de SN establecidas por McIntosh et al. (1992), a saber: conocimiento y habilidad sobre los números, conocimiento y habilidad sobre las operaciones, y aplicación del conocimiento y habilidad con los números y las operaciones a distintos contextos. En estudios posteriores, como el de Yang y Li (2008), se perfilaron estas componentes ampliándolas a 5: comprender el significado de los números y las operaciones, reconocer el tamaño relativo de los números, ser capaz de componer y descomponer números, reconocer el efecto relativo de las operaciones sobre los números y desarrollar estrategias flexibles y juzgar la razonabilidad de los resultados.

Considerando esto, el objetivo de este estudio es examinar la documentación existente acerca de SN en el ámbito de la educación primaria durante las últimas décadas y evaluar las corrientes temáticas de investigación a través del análisis de las publicaciones. Mediante esta revisión, se busca ofrecer una visión precisa acerca de esta temática, con el fin de orientar futuras investigaciones.

METODOLOGÍA

El análisis bibliométrico tiene un gran potencial para hacer revisiones de la literatura, ya que nos proporciona un proceso de revisión transparente y replicable. Además, nos facilita un análisis estructurado de una gran cantidad de información, permite inferir tendencias a lo largo del tiempo en una disciplina, mostrar a las personas que trabajan en ese ámbito y, en definitiva, presentar el panorama general de la investigación existente basándonos en la evidencia (Aria y Cuccurullo, 2017). La mayoría de los análisis bibliométricos se hacen desde tres enfoques: (a) análisis del contexto de estudio, (b) del impacto y (c) del contenido. En este trabajo, abordaremos esos tres enfoques, comenzando por la descripción del contexto de estudio con la producción diacrónica, autores y autoras más productivas y países más destacados. Continuaremos con el impacto de la producción,

mostrando resultados vinculados con el número de citas de autores y documentos. Por último, abordaremos el análisis de contenido, que será el que pondrá en evidencia las tendencias temáticas en relación con el desarrollo del SN en educación primaria en los años de estudio.

La base de datos escogida para el análisis ha sido SCOPUS por considerar que cubre un espectro más amplio de revistas y volumen de citación (Martín-Martín et al., 2021; Singh et al., 2021). La primera búsqueda se hizo con el término clave *number sense*. De ella, se obtuvieron 872 registros. Posteriormente, se añadió a la búsqueda el condicionante de la etapa educativa, ya que nuestra revisión de la literatura pretende encontrar documentos que aborden el SN en la etapa de educación primaria. Por tanto, se añadió a la cadena de búsqueda, con el operador booleano "AND" una serie de términos clave que identifican esta etapa. La cadena de búsqueda final fue:

> "number sense" AND ("primary mathematics" OR "Elementary school" OR "primary school" OR "1th graders" OR "2nd graders" OR "3rd graders" OR "4th graders" OR "5th graders" OR "6th graders" OR "1th-grade" OR "2nd-grade" OR "3rd-grade" OR "4th-grade" OR "5th-grade" OR "6th-grade" OR "First graders" OR "Second graders" OR "Third graders" OR "Fourth graders" OR "Fifth graders" OR "Sixth graders" OR "First-grade" OR "Second-grade" OR "Third-grade" OR "Fourth-grade" OR "Fifth-grade" OR "Sixth-grade" OR "Grade one" OR "Grade two" OR "Grade three" OR "Grade four" OR "Grade five" OR "Grade sixth" OR "young children" OR "year one " OR "year two" OR "year three" OR "year four" OR "year five" OR "year six")

Esto arrojó un total de 245 documentos y aplicando los criterios bibliométricos de inclusión mostrados en la Tabla 1, se obtuvo el total de la muestra a analizar, 219 documentos. La descarga final de datos se hizo el día 8 de mayo de 2023. Este proceso de selección de documentos se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Proceso de selección de documentos

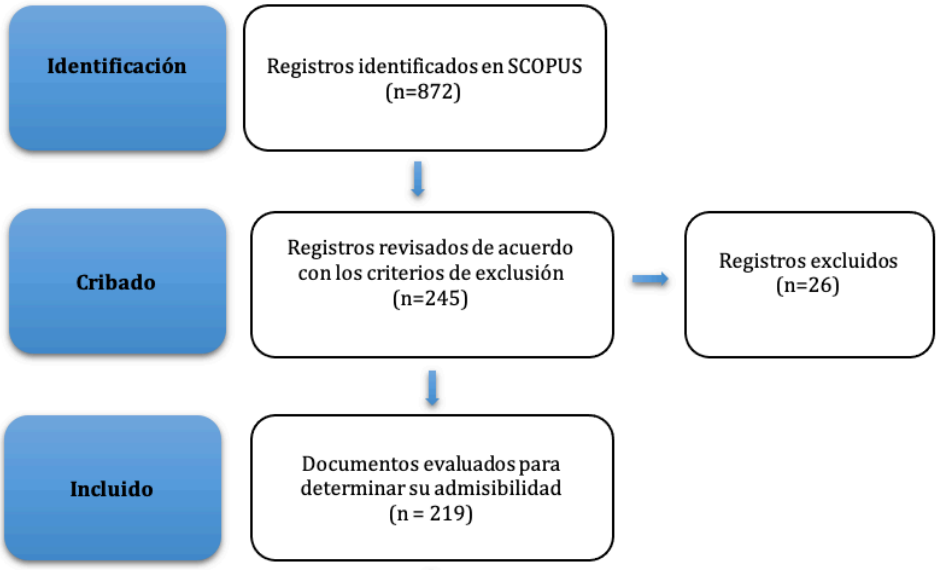


Tabla 1. Criterios bibliométricos de inclusión de documentos en el análisis

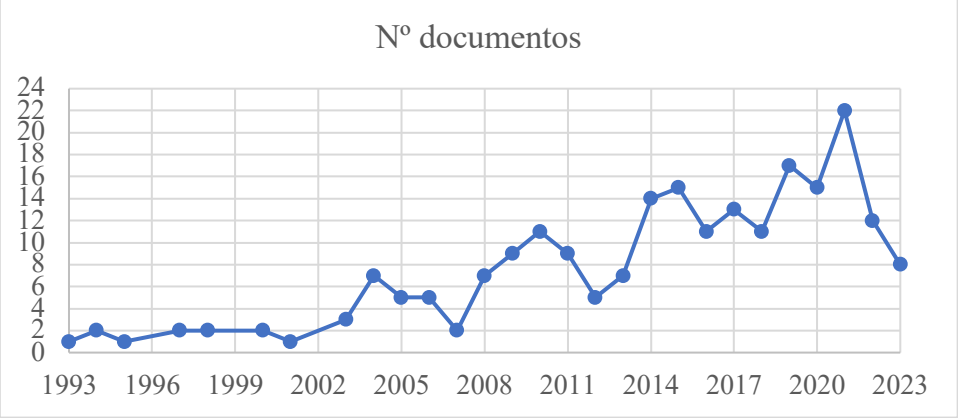
Criterio	Inclusión
Tipo de documento	Artículos, libros, capítulos de libros y revisiones
Áreas	Matemáticas, Psicología y Ciencias Sociales
Estado de la publicación	Final y en prensa

Una vez hecha la descarga de la base de datos, el análisis bibliométrico se llevó a cabo usando el paquete de R bibliometrix (Aria y Cuccurullo, 2017).

RESULTADOS

En relación con la producción diacrónica, en la Figura 2, podemos distinguir tres periodos o fases. La fase inicial, de 1993 a 2002, en la que apenas hay producción científica sobre SN en educación primaria; una fase intermedia, de 2003 a 2013, en la que se observa una mayor producción y, por tanto, se considera que hay un mayor interés en el área de estudio, y por último, de 2014 hasta la actualidad, donde se produce un aumento de la producción alcanzándose el máximo en el año 2021, con 22 publicaciones. En esta década se acumula el 63% de la producción científica publicada en SCOPUS sobre SN en educación primaria. Por tanto, podemos considerar que en este periodo se produce una consolidación de la temática.

Figura 2. Producción diacrónica



Como dato curioso, podemos ver que el primer artículo que aparece indexado en la base de datos es de 1993 y se trata del artículo de Nira Hativa (1993) *Constructing conceptual knowledge and promoting "number sense" from computer-managed practice in rounding whole numbers* publicado en *Mathematics Education Research Journal*. En él se examinó el proceso de aprendizaje de estudiantes de alto rendimiento al desarrollar actividades basadas en ordenador para aprender nuevos conceptos de aritmética, específicamente el redondeo de números naturales.

En la muestra analizada han participado 160 autores y autoras, de los cuales, destaca Der Ching Yang con 23 documentos, que suponen algo más del 10% del total, como puede observarse en la Tabla 2. Este autor y sus colaboradores han analizado ampliamente distintos aspectos del desarrollo del SN en la educación primaria de Taiwan. En Yang (2003), el primero de sus artículos en la muestra, compara dos clases de quinto curso de educación primaria; en la experimental, implementa una metodología específica para el desarrollo del SN y en la de control, se desarrolla la metodología habitual, obteniendo diferencias significativas en favor del grupo experimental. En Yang et al. (2004) se presenta un estudio similar, pero en sexto de educación primaria. Sus publicaciones van evolucionando hasta llegar a la creación de varios instrumentos (test que se aplican con el ordenador) que miden el desarrollo del SN en los últimos cursos de la etapa de educación primaria (e.g., Cheung y Yang, 2018; Sianturi et al., 2023; Yang, 2022).

Tabla 2. Autores más productivos en SN en educación primaria

Nombre autor/a	N.º documentos	Porcentaje
Yang, D. C.	23	10,50%
Aunio, P.	7	3,20%
Jordan, N. C.	7	3,20%
Clarke, B.	6	2,74%
De Smedt, B.	5	2,28%
Glutting, J.	5	2,28%
Kroesbergen, E. H.	5	2,28%
Reynvoet, B.	5	2,28%

Nombre autor/a	N.º documentos	Porcentaje
Van Luit, J. E. H.	5	2,28%
Hautamäki, J.	4	1,83%

El segundo autor en número de documentos publicados es Pirjo Aunio, con 7 trabajos desde 2004 hasta 2023. Los estudios de este autor y colaboradores han indagado en el SN desarrollado por estudiantes en países como Finlandia, Hong Kong, Singapore o China. En tercer lugar, se encuentra Nancy Jordan, con 6 trabajos, en los que analiza, fundamentalmente, el desarrollo del SN en los primeros cursos de educación primaria en escuelas de Estados Unidos, como predictor del dominio de las matemáticas en cursos posteriores, prestando especial atención al estatus socioeconómico. Los trabajos de Ben Clarke se centran en el uso del SN como predictor de futuras dificultades en matemáticas y en la medición de la eficacia de programas de intervención en el área de matemáticas, poniendo el foco en la posible relación entre el grado de desarrollo del SN de los estudiantes y el estado de riesgo de alfabetización temprana. Son investigaciones con estudiantes de último curso de infantil y primer curso de primaria. Bert de Smedt es el primer autor que nos encontramos con investigaciones de corte más psicológico, que indagan en el papel de las funciones ejecutivas y la metacognición, y el procesamiento de magnitudes simbólicas en la aritmética, o en la utilidad de los datos de seguimiento ocular para investigar el desarrollo del SN. Bert Reynvoet, investigador del área de psicología cognitiva, analiza el desarrollo de los procesos numéricos simbólicos y no simbólicos, y la cognición numérica. Los 5 trabajos de Joseph Glutting son en co-autoría con Nancy Jordan, de modo que ya están incluidos en los trabajos de esta autora. Nos encontramos en la misma situación con Johannes Van Luit y Jarkko Hautamäki, ya que sus trabajos son en co-autoría con Aunio. De manera sintética, vemos que, de los 10 autores más productivos, 8 son investigadores del ámbito de la Educación Matemática y 2 del ámbito de la Psicología.

Por otro lado, tanto o más importante que el número de artículos que publica un autor, es el impacto de sus publicaciones en el resto de la comunidad científica. En la Tabla 3 se muestran los 5 autores con más impacto dentro de la muestra de estudio. Así, podemos observar que, en líneas generales, Nancy Jordan es la autora más influyente, a pesar de tener, aproximadamente, un tercio de las publicaciones del autor más productivo en este campo. Esto pone de manifiesto que, dentro de la comunidad científica recogida en este estudio, hay un especial interés por las implicaciones que puede tener el desarrollo del SN en los primeros años de aprendizaje en el éxito matemático posterior.

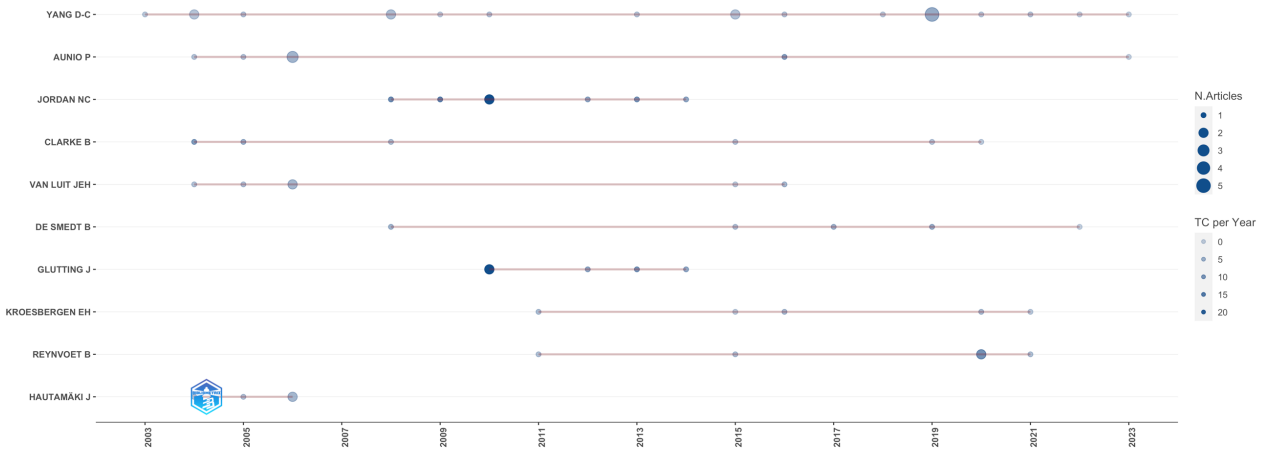
Tabla 3. Impacto local de los autores

Autor/a	h_index	TC	NP	PY_start
Yang, D. C.	11	309	22	2003
Jordan, N. C.	7	964	7	2008
Aunio, P.	6	257	7	2004
Van Luit, J. E. H.	6	215	6	2004
Clarke, B.	5	391	6	2004

Nota: h_index se refiere al índice h, TC es el número total de citas, NP es el número de artículos y PY_start es el primer año en el que publica un artículo.

Analizando la producción de los autores a lo largo del tiempo, podemos obtener información cruzada entre el número de publicaciones y el impacto de los autores. Así, en la Figura 3, vemos que, a pesar del gran impacto que tienen los trabajos de Jordan, esta autora no tiene publicaciones relacionadas con este tema desde 2014. En cambio, Yang, se presenta como un autor muy consolidado en este ámbito de estudio, ya que ha permanecido activo desde que publicó su primer artículo en esta temática en 2003.

Figura 3. Producción de autores a lo largo del tiempo



Nota: Realizada con bibliometrix

A continuación, analizamos el impacto que tienen los documentos, de forma que podamos ver son artículos o capítulos de libros más influyentes en la temática. Para ello, en la Tabla 4 mostramos los 15 documentos con más citas dentro de la muestra analizada. En ella se presenta tanto la citación local (número de citas a ese documento dentro de los 219 documentos que componen nuestra muestra de estudio), como el número de citas globales (total de citas recibidas por ese documento dentro y fuera de la muestra). Con estos valores podemos obtener la ratio entre ambos, de modo que este valor indica cómo es la influencia de ese documento. Cuanto más alto es el porcentaje, la influencia de ese trabajo es mayor dentro de la muestra analizada. Por el contrario, cuanto más bajo es el porcentaje quiere decir que es un documento que influye menos en nuestra muestra, pero sí tiene gran impacto a nivel global.

El primer documento de la tabla es el artículo *The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades*, de Nancy Jordan, Joseph Glutting y Chaitanya Ramineni (2010), publicado en la revista *Learning and Individual differences*. En este documento se evaluó el SN de 454 niños y niñas al inicio del primer curso. Posteriormente, se midió su rendimiento en matemáticas al final del primer y tercer curso. Encontraron que el SN se relacionó significativamente con el rendimiento en matemáticas en ambos cursos, observándose que su capacidad predictiva no disminuyó con el tiempo. Este documento, a pesar de ser el que más citas acumula a nivel global, parece que no ha presentado demasiado interés dentro de los trabajos centrados en SN en educación primaria. Una situación similar se encuentra en el trabajo de Ben Clarke y Mark R. Shinn (2004), titulado *A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement*, publicado en *School Psychology Review*. La situación problemática de la que parten son los bajos niveles en matemáticas alcanzados en Estados Unidos. Los autores, a través del marco teórico, argumentan que una de las claves para prevenir futuras dificultades en matemáticas es la detección e intervención precoz en aquellos estudiantes que corren el riesgo de fracasar en esta área. En ese trabajo prueban la fiabilidad, validez y sensibilidad de varios instrumentos para la identificación temprana y la evaluación formativa en matemáticas: cuatro de carácter experimental, vinculados al SN (conteo oral, identificación de números, discriminación de cantidades y números que falta) y tres test estandarizados. Estos últimos son utilizados para examinar la validez concurrente y predictiva de las medidas experimentales. Se trata de un trabajo de corte muy psicológico que pretende ser un punto de partida para el diseño de un instrumento eficaz que detecte, de forma temprana, posibles dificultades en el área de matemáticas. Este documento presenta una ratio de 10,16%, lo que implica que es de gran interés a nivel global en investigaciones sobre SN, pero de escasa influencia en los trabajos centrados en la educación primaria. En cambio, encontramos el trabajo de Elisabeth Dunphy (2007) titulado *The primary mathematics curriculum: enhancing its*

potential for developing young children's number sense in the early years at school y publicado en *Irish Educational Studies*, que tiene algo más de la tercera parte de las citas que el documento de Jordan y colaboradores, dentro de la muestra de estudio, pero presenta una ratio de 68,42%. Esto indica que es un trabajo de mucho interés para otros investigadores que estudian el desarrollo del SN en la etapa de educación primaria. En este trabajo la autora parte de la idea de que el SN es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas y que la normativa curricular no ha quedado ajena a ello. Por tanto, analiza el currículo de matemáticas de Irlanda para ver cómo se define el SN. Para ello la autora define un marco sociocultural relacionado con el SN que contempla 4 aspectos: placer e interés por los números, pensamiento cuantitativo, conciencia numeral y comprensión del propósito de los números. En su análisis, detecta algunas deficiencias en las orientaciones para el profesorado y perfila algunas vías de mejora.

Si nos fijamos en los trabajos de Yang, uno de los autores más presentes en nuestra muestra, vemos que aparecen 4 trabajos suyos dentro de los 15 más citados y todos ellos con un porcentaje de citación que ronda el 50%. Esto indica que aproximadamente la mitad de sus citas son de autores dentro de nuestra muestra de estudio y la otra mitad son de autores de fuera de la muestra. Por tanto, ese puede considerar un autor muy influyente en la temática analizada.

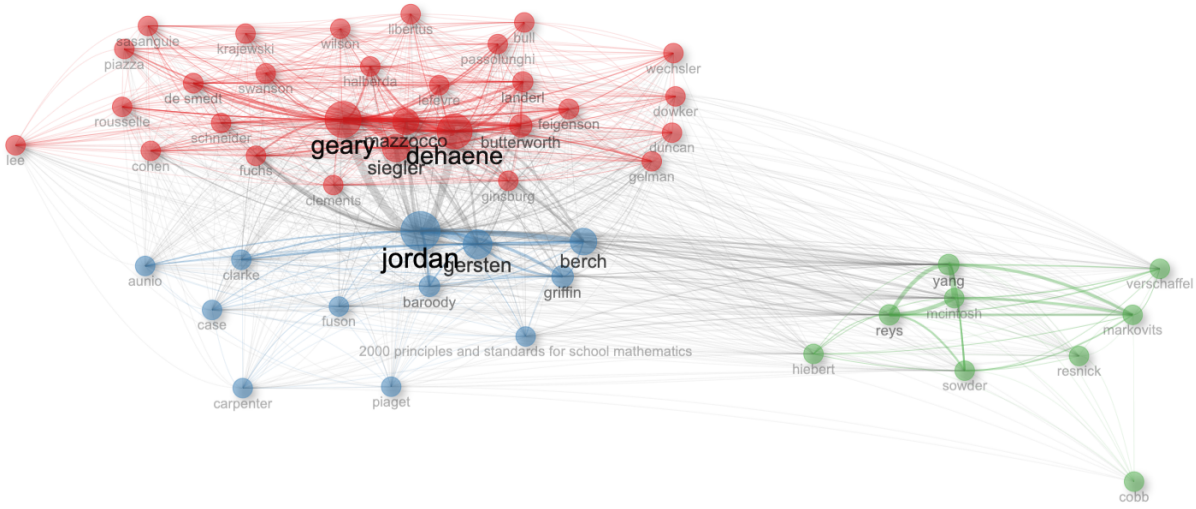
Tabla 4. Documentos más citados

Autor, año, revista	*Año*	*Citación local*	*Citación global*	*Ratio CL/CG (%)*
Jordan, N. C., 2010, Learning and Individual Differences	2010	36	246	14,63
Clarke, B., 2004, School Psychology Review	2004	19	187	10,16
Yang, D. C., 2008, International Journal of Science and Mathematics Education	2008	17	33	51,52
Dunphy, E., 2007, Irish Educational Studies	2007	13	19	68,42
Locuniak, M. N., 2008, Journal of Learning Disabilities	2008	13	186	6,99
Yang, D. C., 2010, Journal of Educational Research	2010	12	25	48,00
Griffin, S., 2004, Early Childhood Research Quarterly	2004	11	153	7,19
Chard, D. J., 2005, Assessment for Effective Intervention	2005	10	116	8,62
Jordan, N. C., 2009, Developmental Disabilities Research Reviews	2009	10	201	4,98
Jordan, N. C, 2010, School Psychology Review	2010	9	66	13,64
Yang, D. C., 2004, International Journal of Science and Mathematics Education	2004	9	22	40,91
Dyson, Ni, 2013, Journal of Learning Disabilities	2013	8	113	7,08
Sood, S., 2007, Journal of Special Education	2007	8	44	18,18
Yang, D. C., 2013, Educational Technology and Society	2013	8	18	44,44

Por último, en relación con las autorías, mostramos la estructura intelectual de la muestra de estudio, lo cual se visualiza en las redes de co-citación, ya que cuando dos trabajos aparecen en el mismo listado de referencias se considera que se establece entre ellos una conexión intelectual. Así, en la Figura 4 observamos tres clústeres. En el clúster rojo podemos ver la red cuyos nodos principales los constituyen autores como Geary, Dehaene, Mazzoco o Siegler. Esto significa que hay muchos trabajos de nuestra muestra que citan a estos autores simultáneamente, siendo todos ellos trabajos de corte más psicológico. Si analizamos los estudios que contribuyen a esta red, encontramos que predominan las investigaciones que se centran en analizar el rendimiento matemático en estudiantes con problemas de aprendizaje; también hay investigaciones que analizan componentes cognitivos en el procesamiento matemático. En el clúster azul, se identifican 3 autores muy influyentes: Jordan, Gersten o Berch. Fundamentalmente, sus investigaciones están centradas en la predicción de dificultades en matemáticas a través de diferentes mediciones de componentes de SN. Por último,

encontramos el clúster verde, que es menos influyente que los otros dos. Aglutina trabajos que han citado a Yang, McIntosh, Reys Swoder, Resnick o Markovits. Son investigaciones centradas en la evaluación de programas de intervención para el desarrollo del sentido numérico y la evaluación de componentes del SN en distintos cursos de la educación primaria.

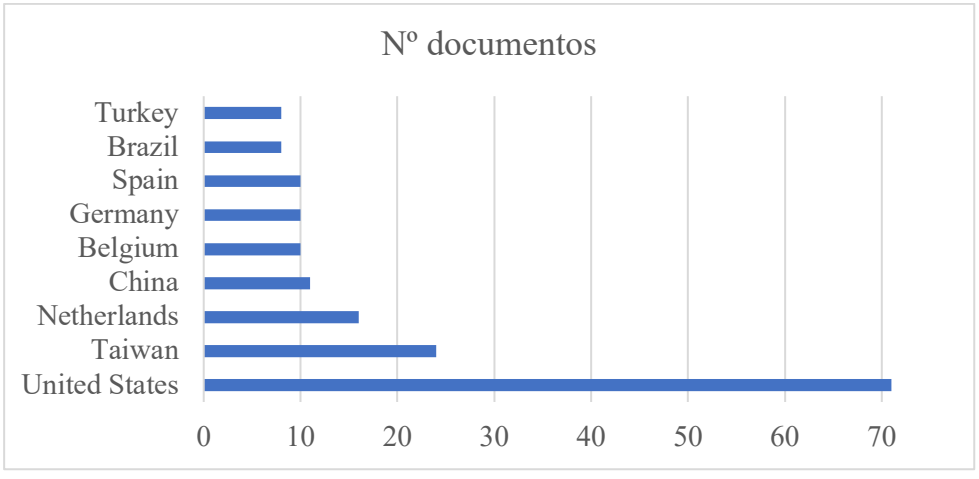
Figura 4. Red de co-citación de autores



Nota: Realizada con bibliometrix

Centrándonos ahora en la producción por países, se observa que 43 países son responsables de toda la producción analizada. En la Figura 5 se muestran los 10 primeros países, destacando Estados Unidos con el 26,6% de la producción, seguida de Taiwan (debido a los trabajos de Yang y colaboradores, fundamentalmente). También se observa que España aparece en séptima posición con 10 trabajos (igualada con Bélgica y Alemania). De ellos, podemos destacar como más relevantes los de De León y colaboradores, en los que se usa el SN como una medida de detección de estudiantes con riesgo de fracaso en matemáticas (de León et al., 2021, 2022). También encontramos trabajos en los que se relaciona el SN en educación primaria con el pensamiento algebraico y pensamiento relacional (Adamuz-Povedano et al., 2021; Molina y Castro, 2021).

Figura 5. Documentos por países



Una lectura interesante de la producción es la que nos ofrece el impacto de las revistas donde se publica. Esto nos muestra cuáles son las revistas donde más se publica y, por lo tanto, las que presentan más impacto en esta temática. Así, en la Tabla 5 vemos que la revista en la que más artículos de esta temática se han publicado es *Frontiers in psychology*. Sin embargo, no es la más influyente. Podemos decir que, teniendo en cuenta el índice h, las revistas *Journal for research in mathematics*

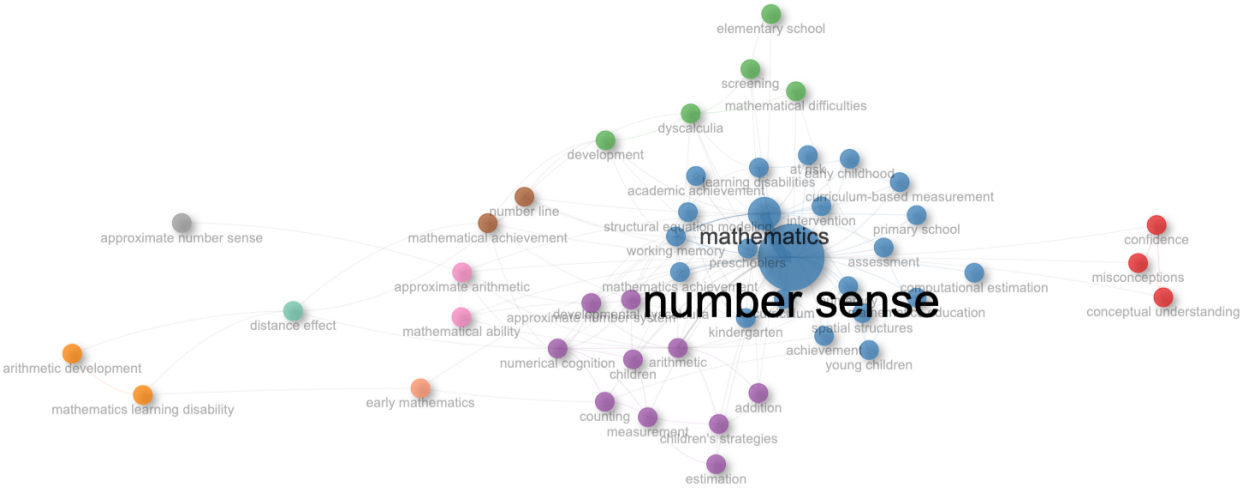
education, *International journal of science and mathematics education* y *Educational studies in mathematics* son las que tienen mayor impacto y, por tanto, son las más influyentes en la temática analizada.

Tabla 5. Impacto de las revistas en las que se publica sobre SN en educación primaria

Revista	h_index	TC	Nº documentos	Año 1ª publicación
Journal for Research in Mathematics Education	7	356	8	1998
International Journal of Science and Mathematics Education	6	121	9	2003
Educational Studies in Mathematics	5	184	5	1994
Developmental Science	4	302	4	2008
Educational Studies	4	92	4	2004
Frontiers in Psychology	4	156	11	2013
Journal of Educational Psychology	4	250	4	2009
Journal of Experimental Child Psychology	4	261	4	2011
Journal of Learning Disabilities	4	349	6	2008
Journal of Mathematical Behavior	4	85	5	1995

A continuación, centramos el análisis en la estructura conceptual de la muestra de estudio, es decir, de qué se habla en este frente de investigación. Para ello, comenzamos mostrando la red de co-ocurrencia de las palabras de autor en la Figura 6.

Figura 6. Red de co-ocurrencia de términos en los resúmenes



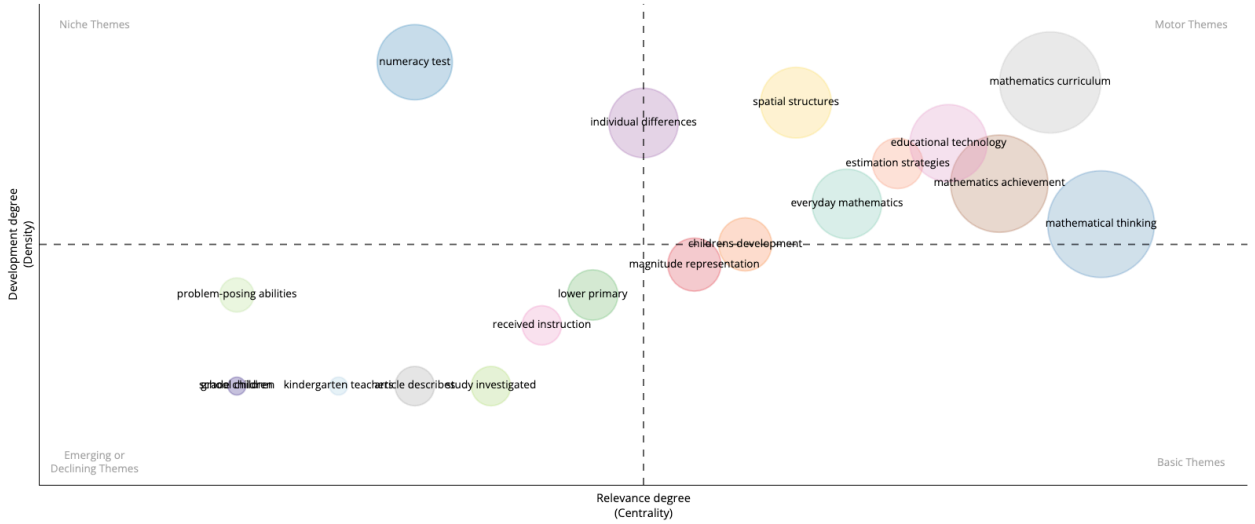
Nota: Red representada con bibliometrix

Vemos que de lo que más se habla en esos trabajos se representa con los clústeres más grandes. Así, en el clúster azul vemos que aparecen términos como *working memory* (memoria de trabajo), *academic achievement* (rendimiento académico), *assessment* (evaluación), *learning disabilities* (problemas de aprendizaje) o *at risk* (en riesgo). Se puede decir que en la muestra de estudio los trabajos que más abundan son los que abordan temas más transversales al SN. El clúster morado, que sería el siguiente en orden de importancia, engloba términos como *estimation* (estimación), *counting* (conteo), *arithmetic* (aritmética), *children's strategies* (estrategias de los niños) o *numerical cognition* (cognición numérica). Son términos muy relacionados con algunas de las componentes de SN descritas en el FoNS8. Aunque también podemos ver algunos términos muy vinculados a las componentes del SN como *approximate arithmetic* (cálculo aproximado) o *number line* (recta numérica), que no están conectados con esta red. Por último, encontramos clústeres más pequeños,

como el verde, que agrupa términos relacionados con dificultades de aprendizaje o el rojo que tiene que ver con comprensión conceptual.

Como comentamos en el análisis de la producción diacrónica, el periodo de consolidación de la investigación sobre desarrollo del SN en la etapa de educación primaria era del 2013 en adelante. Será, por tanto, interesante analizar cómo ha sido la evolución de temáticas. Para ello, establecemos dos periodos, el que va desde 1993 hasta 2013 y el periodo que va de 2014 hasta la actualidad. En las figuras 7 y 8 se representa una visualización distinta de la red de palabras de la Figura 6, consistente en tomar pequeños clústeres de la red completa, asignar una palabra que caracteriza los términos de ese clúster y representarlo como un círculo en uno de los cuadrantes del gráfico, atendiendo al grado de relevancia y grado de desarrollo de los términos de ese clúster. Así, en el cuadrante 1 tenemos los temas motores, es decir, los temas principales de nuestro campo de estudio. En el cuadrante 2, tenemos los temas periféricos, que son temas vinculados a los temas principales, pero que aparecen poco. En el cuadrante 3 tenemos temas que, o bien son emergentes, o están en declive. Y, por último, en el cuadrante 4 aparecen los temas transversales.

Figura 7. Mapa temático de documentos publicados entre 1993 y 2013



Nota: Extraída de bibliometrix

En la Figura 7, se observa que, en el periodo de 1993 a 2013, aparece como uno de los temas principales el clúster de *mathematics curriculum* (currículo de matemáticas). Los trabajos más relevantes en este clúster son 5 artículos de Yang y colaboradores (Yang, 2003, 2005; Yang et al., 2004, 2008; Yang y Huang, 2004), por lo que va a tener un claro sesgo geográfico porque todos ellos son estudios centrados en Taiwan. Llama la atención que aparezca el término *spatial structures* (estructuras espaciales) como una de los temas motores relacionados con SN en educación primaria. En él influyen fundamentalmente los trabajos de Fenna van Nes y colaboradores en los que diseñan una trayectoria de aprendizaje hipotética para favorecer la capacidad de estructuración de los participantes. Para ello, parten de la premisa de que la comprensión de las estructuras espaciales influye positivamente en el desarrollo del SN a través del aprendizaje de procedimientos numéricos como determinación, comparación y operar con cantidades. Sus hallazgos refuerzan otras investigaciones previas que asocian la capacidad de estructuración espacial con el desempeño en matemáticas como una componente más a tener en cuenta en el desarrollo del SN (van Nes y Doorman, 2011; van Nes y van Eerde, 2010).

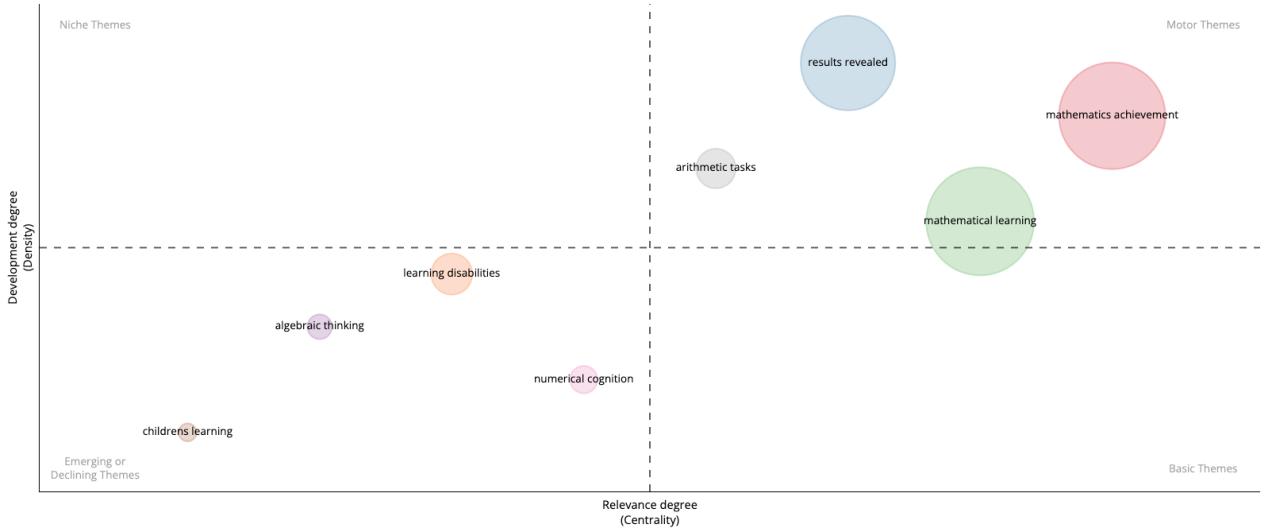
También vemos que el clúster representado por *mathematics achievement* (rendimiento en matemáticas) está entre los temas motores. Este clúster engloba términos como pensamiento matemático, dificultades en matemáticas o habilidades matemáticas. Los artículos más influyentes en

esta temática son trabajos centrados en la medida del SN como predictor del rendimiento matemático (Geary et al., 2009; Keijzer y Terwel, 2003; Locuniak y Jordan, 2008; Raches y Mazzocco, 2012; Rotem y Henik, 2013).

Otro de los temas motores de este periodo es *estimation strategies* (estrategias de estimación) del que podemos destacar el trabajo de Star y colaboradores (2009), que diseñaron intervenciones en el aula con estudiantes de quinto y sexto de primaria para promover la flexibilidad de estrategias de estimación computacional.

Centrándonos en la última década del periodo analizado, se observa que, a pesar de haber mucha más producción que en el periodo anterior, los temas principales parece que están más definidos apareciendo solo 4 clústeres: *result revealed* (resultados obtenidos), *mathematics achievement* (rendimiento en matemáticas), *mathematical learning* (aprendizaje matemático) y *arithimetic tasks* (tareas aritméticas) (ver Figura 8). Dentro del clúster de *result revealed* (parece que la etiqueta elegida por el programa no es muy apropiada) aparecen términos como *conceptual understanding* (comprensión conceptual), *low performance* (bajo desempeño), *three-tier test* (test de tres fases) y *student performed* (desempeño de estudiantes). Los trabajos más influyentes en esta temática son prácticamente todos los trabajos de Yang y colaboradores publicados en este periodo y los trabajos de Sinclair (2015) y Pareto (2014). En la temática de *arithmetic tasks* podemos destacar como más influyente el trabajo de Joonkoo Park y Elizabeth Brannon (2014) en el que diseñan varios experimentos para ejercitar a los participantes en el uso de actividades con operaciones no simbólicas, encontrando que este tipo de entrenamiento mejora el rendimiento en aritmética simbólica. El clúster de *mathematical learning* es el más grande, pero también es el que aborda temas más transversales.

Figura 8. Mapa temático de documentos publicados entre 2014 y 2023



Nota: Extraída de bibliometrix

Por último, vemos que en esta última década aparece como un tema emergente el clúster de pensamiento algebraico donde aparecen los trabajos que relacionan SN con pensamiento algebraico y patrones. En él influyen especialmente trabajos muy recientes como son los de Adamuz-Povedano et al. (2021), Somasundram (2021), Somasundram et al. (2019) y Thinwiangthong et al. (2021).

CONCLUSIÓN

El estudio presenta un análisis de la producción científica sobre SN en la etapa de educación primaria en los últimos 30 años. Los datos revelan un crecimiento significativo en el tema de estudio en la última década duplicando el número de trabajos publicados en los primeros 20 años. Se podría inferir

que este crecimiento está muy vinculado con la aparición del SN en los currículos de muchos países a partir del comienzo del siglo XXI.

En cuanto al análisis de autoría, encontramos que Der Ching Yang es el autor más productivo con 23 documentos publicados desde 2003. Además, teniendo en cuenta el impacto de sus publicaciones, ese puede considerar el autor más influyente dentro de la muestra de estudio. Por tanto, sus trabajos deberían ser tenidos en cuenta antes de iniciar una investigación dentro de esta temática.

En la visualización de redes de co-citación, hemos perfilado la estructura intelectual de los documentos de la muestra, encontrando tres grandes grupos: trabajos del ámbito de la psicología cognitiva y problemas de aprendizaje, investigaciones centradas en el uso del sentido numérico como predictor de dificultades de aprendizaje y estudios focalizados en medir diferentes componentes del SN y en la evaluación de programas de intervención.

En relación con la estructura conceptual, la visualización de la red de co-ocurrencia de palabras clave nos ha permitido detectar que aunque aparecen términos vinculados con las componentes de Andrews y Sayer (2015) y de Yang y Li (2008), no llegan a abarcarse todos, además aparecen disgregados, lo que refleja la falta de un listado de componentes estables. Otra conclusión a destacar es que, a pesar de que hemos visto que hay numerosas investigaciones vinculan positivamente el desarrollo del SN con el éxito en matemáticas, hay pocas investigaciones que se centren en la implementación de programas formativos o metodologías que promuevan un mayor desarrollo de SN en los primeros años de aprendizaje y muchas más las que se centran en medir el sentido numérico manifestado por los estudiantes para vincularlo con el rendimiento académico o con posibles dificultades posteriores en matemáticas. Lo que abre una posible continuación de este trabajo, incluyendo un nuevo nivel de concreción, rescatando los trabajos que se centran en el diseño de propuestas metodológicas o programas formativos con el objetivo de promover el desarrollo del SN.

El análisis presentado en este trabajo nos ofrece una panorámica general de las temáticas abordadas, lo que nos facilita detectar ámbitos por los que debería avanzar la investigación sobre sentido numérico en la etapa de primaria. En ese sentido la investigación debería avanzar tendiendo puentes entre la investigación educativa y la escuela, diseñando, implementando y evaluando el impacto de actividades que promuevan eficazmente el desarrollo del sentido numérico.

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., García-Pérez, M. T. y Montejo-Gámez, J. (2021). Developing number sense: An approach to initiate algebraic thinking in primary education. *Mathematics*, *9*(5), 518. https://doi.org/10.3390/math9050518

Andrews, P. y Sayers, J. (2015). Identifying opportunities for grade one children to acquire foundational number sense: Developing a framework for cross cultural classroom analyses. *Early Childhood Education Journal*, *43*(4), 257-267. https://doi.org/10.1007/s10643-014-0653-6

Aria, M. y Cuccurullo, C. (2017). bibliometrix : An R-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics*, *11*(4), 959-975. https://doi.org/10.1016/j.joi.2017.08.007

Carroll, W. M., Fuson, K. C. y Diamond, A. (2000). Use of student-constructed number stories in a reform-based curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*(1), 49-62. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00038-9

Cheung, K. L. y Yang, D.-C. (2018). Examining the differences of Hong Kong and Taiwan students' performance on the number sense three-tier test. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(7), 3329-3345. https://doi.org/10.29333/ejmste/91682

Clarke, B. y Shinn, M. R. (2004). A preliminary investigation into the identification and development of early

mathematics curriculum-based measurement. *School Psychology Review*, *33*(2), 234-248. https://doi.org/10.1080/02796015.2004.12086245

de León, S. C., Jiménez, J. E., García, E. y Gutiérrez, N. (2021). Identification of Spanish third graders at risk of math problems: Usefulness of number sense based screening measures. *Psychology in the Schools*, *November 2020*. https://doi.org/10.1002/pits.22525

de León, S. C., Jiménez, J. E. y Hernández-Cabrera, J. A. (2022). Confirmatory factor analysis of the indicators of basic early math skills. *Current Psychology*, *41*(2), 585-596. https://doi.org/10.1007/s12144-019-00596-0

Dunphy, E. (2007). The primary mathematics curriculum: Enhancing its potential for developing young children's number sense in the early years at school. *Irish Educational Studies*, *26*(1), 5-25. https://doi.org/10.1080/03323310601125088

Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N., Montejo-Gámez, J. y Martínez-Jiménez, E. (en prensa). Investigating teaching practices in relation to the development of number sense in the first year of primary education: A case study. *Proceedings of the Thirteen Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Geary, D. C., Bailey, D. H. y Hoard, M. K. (2009). Predicting mathematical achievement and mathematical learning disability with a simple screening tool: The number sets test. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27*(3), 265-279. https://doi.org/10.1177/0734282908330592

Ghazali, M., Mohamed, R. y Mustafa, Z. (2021). A systematic review on the definition of children's number sense in the primary school years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(6), em1968. https://doi.org/10.29333/ejmste/10871

Hativa, N. (1993). Constructing conceptual knowledge and promoting «number sense» from computer-managed practice in rounding whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *5*(2), 124-151. https://doi.org/10.1007/BF03217191

Howell, S. C. y Kemp, C. R. (2010). Assessing preschool number sense: Skills demonstrated by children prior to school entry. *Educational Psychology*, *30*(4), 411-429. https://doi.org/10.1080/01443411003695410

Jordan, N. C., Glutting, J. y Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82-88. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Keijzer, R. y Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparative study on modelling. *Learning and Instruction*, *13*(3), 285-304. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00003-8

Kerschen, K., Cooper, S., Shelton, R. y Scott, L. (2018). The impact of a summer mathematics academy on rising kindergartners' understanding of early number concepts. *Journal of Research in Childhood Education*, *32*(4), 419-434. https://doi.org/10.1080/02568543.2018.1497738

Kim, D., Shin, J. y Lee, K. (2013). Exploring latent class based on growth rates in number sense ability. *Asia Pacific Education Review*, *14*(3), 445-453. https://doi.org/10.1007/s12564-013-9274-9

Lee, Y.-S. y Lembke, E. (2016). Developing and evaluating a kindergarten to third grade CBM mathematics assessment. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(7), 1019-1030. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0788-6

Locuniak, M. N. y Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*, *41*(5), 451-459. https://doi.org/10.1177/0022219408321126

Martín-Martín, A., Thelwall, M., Orduna-Malea, E. y Delgado López-Cózar, E. (2021). Google Scholar, Microsoft Academic, Scopus, Dimensions, Web of Science, and OpenCitations' COCI: a multidisciplinary comparison of coverage via citations. *Scientometrics*, *126*(1), 871-906. https://doi.org/10.1007/s11192-020-03690-4

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For*

the learning of Mathematics, *12*(3), 2-8.

Molina, M. y Castro, E. (2021). Third grade students' use of relational thinking. *Mathematics*, *9*(2), 187. https://doi.org/10.3390/math9020187

Pareto, L. (2014). Mathematical literacy for everyone using arithmetic games. En *Virtual Reality: People with Special Needs*. Nova Science Publishers, Inc.

Park, J. y Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: An investigation of underlying mechanism. *Cognition*, *133*(1), 188-200. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.06.011

Raches, D. y Mazzocco, M. M. M. (2012). Emergence and nature of mathematical difficulties in young children with barth syndrome. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, *33*(4), 328-335. https://doi.org/10.1097/DBP.0b013e31824c4090

Resnick, L. B. (1989). Defining, assesing, and teaching number sense. En J. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 35-39). National Science Foundation.

Reynvoet, B., Smets, K. y Sasanguie, D. (2016). "Number sense": What's in a name and why should we bother? En *Continuous issues in numerical cognition* (pp. 195-214). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-801637-4.00009-3

Rotem, A. y Henik, A. (2013). The development of product parity sensitivity in children with mathematics learning disability and in typical achievers. *Research in Developmental Disabilities*, *34*(2), 831-839. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2012.11.001

Sayers, J. y Andrews, P. (2015). Foundational number sense: summarising the development of an analytical framework. *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *February*, 361-367.

Sayers, J., Petersson, J., Rosenqvist, E. y Andrews, P. (2021). Opportunities to learn foundational number sense in three Swedish year one textbooks: Implications for the importation of overseas-authored materials. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *52*(4), 506-526. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1688406

Sianturi, I. A. J., Ismail, Z. y Yang, D.-C. (2023). Examining fifth graders' conceptual understanding of numbers and operations using an online three-tier test. *Mathematics Education Research Journal*, *0123456789*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00452-2

Sinclair, N. (2015). What kind of thing might number become? En *Mathematics, Substance and Surmise* (pp. 347-363). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-21473-3_17

Singh, V. K., Singh, P., Karmakar, M., Leta, J. y Mayr, P. (2021). The journal coverage of Web of Science, Scopus and Dimensions: A comparative analysis. *Scientometrics*, *126*(6), 5113-5142. https://doi.org/10.1007/s11192-021-03948-5

Somasundram, P. (2021). The role of cognitive factors in year five pupils' algebraic thinking: A structural equation modelling analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(1). https://doi.org/10.29333/ejmste/9612

Somasundram, P., Akmar, S. N. y Eu, L. K. (2019). Year five pupils' number sense and algebraic thinking: The mediating role of symbol and pattern sense. *New Educational Review*, *55*(1), 100-111. https://doi.org/10.15804/tner.2019.55.1.08

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). Macmillan Publishing Co.

Star, J. R., Rittle-Johnson, B., Lynch, K. y Perova, N. (2009). The role of prior knowledge in the development of strategy flexibility: The case of computational estimation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*(5), 569-579. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0181-9

Thinwiangthong, S., Chatathicoon, S., Ya-Amphan, D., Somumchan, V. y Jahanian, K. (2021). Early

childhood students' mathematical ability in highscope and lesson study context. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, *42*(3), 550-557. https://doi.org/10.34044/j.kjss.2021.42.3.15

van Nes, F. y Doorman, M. (2011). Fostering young children's spatial structuring ability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 27-39. https://doi.org/10.29333/iejme/259

van Nes, F. y van Eerde, D. (2010). Spatial structuring and the development of number sense: A case study of young children working with blocks. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*(3), 145-159. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.08.001

Yang, D.-C. (2003). Teaching and learning number sense – an intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(1), 115-134. https://doi.org/10.1023/A:1026164808929

Yang, D.-C. (2005). Number sense strategies used by 6th-grade students in Taiwan. *Educational Studies*, *31*(3), 317-333. https://doi.org/10.1080/03055690500236845

Yang, D.-C. (2022). Investigating the differences between confidence ratings in the answer and reason tiers in fourth graders via online four-tier test. *Studies in Educational Evaluation*, *72*(January), 101127. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2022.101127

Yang, D.-C., Hsu, C.-J. y Huang, M.-C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(3), 407-430. https://doi.org/10.1007/s10763-004-6486-9

Yang, D.-C. y Huang, F.-Y. (2004). Relationships among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade students in Taiwan. *Educational Studies in mathematics*, *30*(4), 373-389. https://doi.org/10.1080/0305569042000310318

Yang, D.-C., Li, M. y Lin, C.-I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 789-807. https://doi.org/10.1007/s10763-007-9100-0

Yang, D.-C. y Li, M. N. (2008). An investigation of 3rd-grade Taiwanese students' performance in number sense. *Educational Studies in mathematics*, *34*(5), 443-455. https://doi.org/10.1080/03055690802288494

INVESTIGACIONES SOBRE EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN EL AULA DE SECUNDARIA

Research on the development of number sense in the secondary school

Bruno, A., Almeida, R.

Universidad de La Laguna

Resumen

El sentido numérico se ha utilizado en la educación matemática desde diferentes perspectivas y actualmente tiene especial importancia en el currículo español por ser un elemento de la organización curricular de la Educación Primaria y Secundaria. En este trabajo se presentan, en primer lugar, las componentes que organizan el sentido numérico. A parir de ellas, se detallan dos investigaciones realizadas en la Universidad de La Laguna con alumnado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). En la primera, se analizan y comparan respuestas de estudiantes de 2.º (13-14 años) y 4.º de ESO (14-16 años) a tareas numéricas en las que ponen en uso componentes del sentido numérico relacionadas con la estimación y los puntos de referencia. Los resultados indican mejores resultados en 4.º de ESO frente a 2.º de ESO, si bien no se consideran lo suficientemente adecuados en ninguno de los niveles, dadas las características de las tareas. En la segunda parte, se presenta una investigación realizada en 2º de ESO en la que se establecen perfiles de estudiantes en cuanto al uso de las componentes del sentido numérico, y cómo estos perfiles se modificaron, después de una intervención de aula centrada en fomentarlas. Se reflexiona sobre la importancia de desarrollar un pensamiento numérico creativo y flexible en la educación secundaria.

Palabras clave: sentido numérico, estimación gráfica, puntos de referencia, perfiles de estudiantes, educación secundaria.

Abstract

Number sense has been used in mathematics education from different perspectives and is currently of special importance in the Spanish curriculum as it is an element of the curricular organisation of Primary and Secondary Education. In this paper we first present the components that structure number sense. Based on these, two research studies carried out at the Univesidad de La Laguna with secondary school students are detailed. In the first one, we analyse and compare the responses of second (13-14 years old) and forth (14-16 years old) year of secondary school students to numerical tasks in which they use components of number sense related to estimation and reference points. The results indicate better results in forth than in second, although they are not considered adequate enough at either of the two levels given the characteristics of the tasks. In the second part, an investigation is presented in which student profiles were established in terms of the use of number sense components and how these profiles were modified after a classroom intervention focused on fostering number sense. Finally, we discuss the importance of developing creative and flexible number thinking in secondary education.

Keywords*: number sense, graphical estimation, benchmarks, student profiles, middle school.*

Bruno, A. y Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 27–41). SEIEM.

INTRODUCCIÓN

El término *sentido numérico* (en inglés *number sense*) aparece en la década de los 80 del siglo XX en documentos curriculares de diferentes países, así como en publicaciones de innovación y de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de los números (Greeno, 1991; Howden, 1989; NCTM, 1989; Sowder, 1992). Entre las primeras aproximaciones a esta expresión destaca la aportada por Howden (1989, p.11) quien indicó que: "*El sentido numérico puede describirse como una buena intuición sobre los números y sus relaciones. Se desarrolla gradualmente como resultado de explorar los números, visualizarlos en diversos contextos y relacionarlos de formas que no están limitadas por los algoritmos tradicionales".* Veamos un ejemplo de una conversación, narrada por Carraher et al. (1985), entre un niño-vendedor de 12 años (llamado *M*), que vendía productos en mercados callejeros en Brasil y un cliente.

Cliente: ¿Cuánto cuesta un coco?

M.: 5.

Cliente: Quiero diez. ¿Cuánto cuesta?

M.: Tres serán 105: con tres más, serán 210. (Pausa) Necesito cuatro más. Son...(pausa) 315...creo que son 350.

El niño-vendedor podría haberse limitado a añadir un 0 al 35, un método muy sencillo si has recibido instrucción tradicional escolar, lo que no era este caso. A lo mejor para *M* el precio de tres cocos era un cálculo frecuente en su día a día, por lo que se había convertido en una "cantidad de referencia"; o *M* pudo haber reconocido que el precio de tres cocos estaba cerca de 100, separando las sumas de 100 y las sumas de 5 para conjuntos de tres cocos. El ejemplo recuerda que el sentido numérico se manifiesta de formas muy diversas, dependiendo de las personas y de las circunstancias en las que se aplica. Este aspecto se refleja perfectamente en la definición de Sowder (1992) al señalar que *el sentido numérico es una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas numéricos de una forma creativa y flexible* (p.381). Sin duda, son los rasgos de creatividad y flexibilidad los que ha llevado a otorgar importancia a esta forma de entender el aprendizaje numérico. Lo cierto es que somos capaces de reconocer el sentido numérico, aunque no tengamos su definición precisa. Greeno (1991) señala que una persona posee sentido numérico cuando manifiesta un cálculo mental flexible, realiza buenas estimaciones numéricas y hace juicios e inferencias basándose en cantidades numéricas. Simultáneamente, McIntosh et al. (1992) desarrollaron el marco que más influencia ha tenido en el desarrollo curricular y en la investigación sobre sentido numérico, al describirlo a través de diferentes componentes. Estas componentes tuvieron una primera aproximación en la publicación curricular del NCTM (1989), y que se desglosan de la siguiente forma:

- *Conocer y tener facilidad con los números*: comprender el sentido del orden de los números; reconocer el tamaño relativo y absoluto de la magnitud de los números; usar puntos de referencia; usar múltiples representaciones de los números.
- *Conocer y tener facilidad con las operaciones*: comprender el efecto de las operaciones; comprender las propiedades matemáticas; comprender las relaciones entre las operaciones.
- *Aplicar el conocimiento y mostrar facilidad con los números y las operaciones en la resolución de problemas numéricos*: comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; ser consciente de que existen múltiples estrategias (cálculo mental, escrito, estimación…); a utilizar una representación y/o un método eficiente*;* revisar los datos y los resultados.

Aunque estas componentes se presenten separadas, están fuertemente relacionadas, siendo habitual que en una misma tarea matemática se vean involucradas varias de ellas. Además, sería complejo delinear las componentes del sentido numérico de manera estricta, pues sus ramificaciones son muy amplias. El sentido numérico que construye una estudiante crece y se expande a lo largo de la enseñanza primaria, secundaria e incluso, más allá del ámbito académico. Es probable que el conjunto del sentido numérico sea mayor que sus partes. Diferentes investigaciones han modificado estas componentes del sentido numérico, en ocasiones desglosándolas o agrupándolas, en función de sus objetivos (NCTM, 1989; McIntosh, et al., 1992; Reys y Yang, 1998; Yang y Sianturi, 2021).

El currículo actual en España, presenta el aprendizaje matemático en la ESO organizado en diferentes "sentidos" (Real Decreto 217/ 2022) (al igual en la Educación Primaria). Así, el *Sentido numérico* aglutina el conocimiento numérico a desarrollar en esta etapa educativa caracterizándose por: *"…la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones*". Se sitúa en una visión del sentido numérico próximo al indicado por Sowder (1992). A su vez, entre las competencias específicas en secundaria se hace referencia a que el alumnado debe ser capaz de "*analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global"*, que coincide con la última componente referenciadas anteriormente (McIntosh et al., 1992).

El reflejo de que el sentido numérico ha sido considerado un constructo importante en la educación matemática son las numerosas publicaciones e investigaciones realizadas bajo esta expresión, las cuales se agrupan en diferentes intereses: una perspectiva psicológica asociado al inicio del concepto de número por parte de los niños en la etapa infantil o con alumnado con dificultades de aprendizaje (Berch, 2005; Gersten et al. 2005; Greeno, 1991); el desarrollo de sus componentes de forma que sea aplicable curricularmente (NCTM, 1989; McIntosh et al., 1992; 1997; Sowder, 1992; Reys, 1994); el diseño de actividades orientadas a fomentar el desarrollo del sentido numérico en el aula (Anghileri, 2006; Markovits y Sowder, 1994; Reys y Barger, 1991); y la indagación sobre cómo los estudiantes emplean y comprenden las diferentes componentes (Almeida y Bruno, 2019; Cheung y Yang, 2020; Yang, 2019a; 2019b; Yang y Sianturi, 2021; Yang, et al., 2008). En esta última línea nos situamos en nuestras investigaciones de los últimos años en la Universidad de La Laguna. Así, hemos realizado diversas investigaciones sobre al sentido numérico focalizadas en futuro profesorado de secundaria (Almeida, et al., 2014; 2016; 2017), en alumnado de Educación Primaria (Sanfiel et al., 2022) y en alumnado de Educación Secundaria (Almeida y Bruno, 2014; 2017; 2019; Fariña y Bruno, 2021). En el presente trabajo mostramos algunos de los resultados obtenidos con alumnado de secundaria.

¿SE DESARROLLA EL SENTIDO NUMÉRICO A LO LARGO DE LA SECUNDARIA?

Las investigaciones sobre sentido numérico se han realizado principalmente con alumnado de educación primaria (Alsawaie, 2011; Mohamed y Johnny, 2010; Sengul y Gulbagci, 2012; Yang, 2019a; 2019b; Yang, et al., 2008), y menos de educación secundaria (Akkaya, 2016; Markovits y Sowder, 1994; Purnomo, et al. 2014; Reys y Yang, 1998; Veloo, 2010). En ambos grupos, los resultados coinciden en que los estudiantes se inclinan por seguir procedimientos rutinarios, aplicar reglas y resolver con algoritmos, en tareas en las que podrían aplicar más fácilmente otras estrategias numéricas. Por otra parte, los estudios no muestran consenso sobre si los estudiantes incrementan su sentido numérico a medida que avanzan en los niveles educativos. Akkaya (2016), en un estudio realizado en Turquía con 576 estudiantes de 5.º (10-12 años) a 8.º grado (13-14 años), muestra que el rendimiento de los estudiantes en diferentes componentes del sentido numérico es

muy bajo para lo que se esperaba en estos niveles educativos. Observó que la componente relacionada con saber *usar múltiples representaciones de los números*.

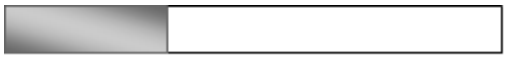
En esta línea nos planteamos evaluar, en el contexto español, dos componentes del sentido numérico: *usar puntos de referencia* y *usar múltiples representaciones de los números*, por parte de estudiantes de secundaria en actividades de estimación, principalmente. Nos planteamos observar si alumnado de los niveles de 2.º (13-14 años) y 4.º de ESO (15-16 años) muestra un uso efectivo de estas componentes, y si cambian las estrategias numéricas en ambos cursos.

Para realizar el análisis planteamos a los estudiantes tareas en las que no era necesario seguir reglas y algoritmos, pudiendo realizarse con estimación numérica, estimación gráfica o uso de propiedades numéricas. Se diseñó una prueba con 12 tareas cuyo contenido numérico correspondía, como máximo, a 1.º de ESO (12-13 años), referidas a distintos tipos de números (naturales, fracciones y decimales), en las que se pedía: ordenar números, estimar el número dado con diferentes representaciones (elementos discretos, recta numérica, barra y diagrama de sectores), estimar el resultado de una operación, todo ello en contextos abstracto o cotidiano. Las tareas se presentaron en hojas separadas y se les indicó que para resolverlas no era necesario realizar cálculos exactos, sino que podían recurrir a otras estrategias que conocieran. Además, se les pidió escribir todo lo que pensaran, aunque no formara parte de su respuesta final. La prueba la contestaron 447 estudiantes: 248 de 2.º de ESO y 199 de 4.º de ESO, de 7 centros públicos de Tenerife (España) en un hora.

Figura 1. Tareas 1, 2 y 3 de la prueba escrita

Tarea 1. *Señala en cada caso qué número representa mejor la cantidad sombreada.*

a. ¿Qué porcentaje representa mejor la porción sombreada?



A. 20% B. 33% C. 50% D. 80%

b. Si consideramos que el rectángulo es la unidad



A. 0,018 B. 0,4 C. 0,15 D. 0,81

c. Si consideramos que el rectángulo es un millón



A. 20 000 B. 40 000 C. 200 000 D. 400 000

d. Si consideramos que el rectángulo es la unidad



A. ½ B. 2/5 C. ¾ D. 2/7

Tarea 2. *Estimar los números decimales que indica la flecha en la recta numérica:*

a.



b.



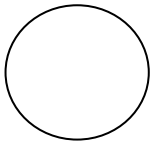
Tarea 3. Aproximadamente *¿qué porcentaje dedicas a las siguientes actividades durante un día completo? Represéntalo gráficamente.*

Dormir ____%

Estar en clase ___%

Comer ___%

Resto de actividades___%



Los resultados están publicados parcialmente en Almeida et al. (2017) y Fariña et al. (2017) y, a continuación, los complementamos con las respuestas a tres tareas que tienen un objetivo común: el uso de la estimación gráfica (barras, recta numérica y diagrama de sectores) con diferentes tipos de números (naturales, fracciones, decimales y expresión en porcentajes). En ellas los estudiantes

podían poner de manifiesto dos componentes de sentido numérico objeto de estudio. Las tareas se muestran en la Figura 1 y las denominamos de la siguiente forma:

Tarea 1. Estimación a partir de una representación gráfica de barras.

Tarea 2 Estimación de decimales en la recta real.

Tarea 3. Uso de los porcentajes y representación en sectores en una situación contextual.

Se presenta el análisis de las tres tareas observando las diferencias en el éxito entre 2.º y 4º. de ESO, destacando las principales dificultades de los estudiantes.

Resultados de la Tarea 1. Estimación a partir de una representación gráfica de barras

La Tabla 1 muestra los resultados de las cuatro preguntas de la Tarea 1 en la que, a partir de una representación de barras, debían estimar numéricamente la zona sombreada, expresando: a) porcentajes, b) decimales, c) números naturales y d) fracciones.

Tabla 1. Porcentajes de éxito en la Tarea 1 (a, b, c y d)

		Tarea 1-a		Tarea 1-b		Tarea 1-c		Tarea 1-d	
	Curso	2.º	4.º	2.º	4.º	2.º	4.º	2.º	4.º
Opción elegida	A	14,1	12,7	18,5	11,5	7,3	2,5	16,5	3,5
	B	**82,7**	**85,5**	12,5	12,5	26,3	17,6	30,3	32,2
	C	2,8	1,6	**61**	**71,3**	9,4	5,0	24,6	16,6
	D	0,40	0,2	8,0	4,52	**56,9**	**74,9**	**25,8**	**45,2**
	Blanco							2,8	2,5

Nota: En negrita se ha señalado la respuesta correcta.

Se observa que el éxito cambia considerablemente entre los cuatro apartados y en ambos cursos la tendencia es similar. La estimación numérica de la representación con porcentajes es la más sencilla de interpretar (82,7% y 85,5%), siendo la siguiente opción más elegida la A (20% de la barra), con el porcentaje más próximo al correcto. Es un resultado razonable dado que los números son manejables (enteros menores que 100) y es una representación con la que están habituados por la tecnología (descargas, grabaciones, etc.). Las tareas 1-b y 1-c tienen una dificultad media (entre 61% y 56,9% en 2.º de ESO y 71,3% y 74,9% en 4.º de ESO). No por ello responde al éxito que se espera para estos niveles educativos. Parece que para muchos estudiantes no es fácil estimar números "grandes" o "pequeños" en la barra. Sin lugar a duda, los resultados que llaman la atención, por su bajo nivel de éxito (incluso con respuestas en blanco), son los referidos a la estimación gráfica asociada a la fracción 2/7. En ambos niveles, muchos estudiantes optaron por la fracción más cercana a la correcta (2/5), pero sorprende que otros optaran por las dos fracciones que claramente no podían ser el resultado (1/2 y ¾). Se podría pensar que interpretaron la zona blanca y no la sombreada, pero no parece ser esto así, puesto que se comprobó que en los otros apartados daban muestras de haber respondido teniendo en cuenta la zona sombreada en gris.

Los resultados en 4.º de ESO son superiores en los cuatro apartados a los de 2.º de ESO, siendo esta diferencia casi el doble en la Tarea 1-d. Parece que el tamaño de los números y su expresión tienen una influencia importante en la realización de buenas estimaciones a partir de un gráfico tan habitual como el de barra y que no se logran altos niveles de dominio al finalizar la secundaria.

Resultados de la Tarea 2. Estimación de decimales en la recta real

En la Tabla 2 se muestran los resultados de la tarea 2 en la que los estudiantes debían estimar un número decimal indicado en la recta numérica, dadas referencias diferentes (1 y 0,1). Al tratarse de

una estimación, establecimos como intervalos de respuesta correcta [0,05, 0,08] para la tarea 2-a y [0,005, 0,008] para tarea 2-b.

Tabla 2. Porcentajes de éxito en la Tarea 2 (a y b)

Resultado	Tarea 2-a		Tarea 2-b	
	2.º	4.º	2.º	4.º
Éxito	**60,9**	**73,9**	**53,6**	**72,4**
Fracaso	32,3	21,1	38,7	22,6
Blanco	6,9	5,0	7,7	5,0

En 2.º de ESO, el porcentaje de éxito en la tarea 2-a fue superior a la tarea 2-b (60,9% y 53,6%), mientras que en 4.º de ESO la dificultad fue similar (73,9% y 72,4%). Aunque más de la mitad de los estudiantes de 2.º de ESO y casi tres cuartas parte de 4.º de ESO respondieron correctamente, cabría esperar mejores resultados, teniendo en cuenta que la representación de números decimales en la recta numérica es tratada en el currículo español desde final de la Educación Primaria y durante la Educación Secundaria.

Las representaciones dadas en ambos apartados contienen varias informaciones: los extremos de un intervalo concreto, las divisiones de dicho intervalo en partes iguales y el número que ocupa la primera de esas divisiones. A priori podría pensarse que, cuanta más información se incluya en una representación, más fácil resultará utilizarlas, lo cual no siempre es cierto (Siegler y Thompson, 2014). Hemos observado dos tipos de errores cuyas frecuencias se muestran en la Tabla 3:

1) Escribir un número decimal fuera del rango considerado correcto, pero perteneciente al primer intervalo señalado (es decir, 0-0,1 en la Tarea 2-a y 0-0,01 en la Tarea 2-b). Por ejemplo, en la Tarea 2-a algunos estudiantes escribieron 0,01 ó 0,02.
2) Escribir un número decimal no perteneciente al primer intervalo señalado, por una interpretación incorrecta de los puntos de referencia indicados o por haber obviado dichas referencias. Por ejemplo, en ambas tareas escribir 0.15, 0.16, 0.5, 0.6.

En ambos niveles el segundo tipo de error fue ligeramente superior.

Tabla 3. Porcentajes de errores en la Tarea 2 (a y b) respecto al total de alumnos

Tipo de error	Tarea 1-a		Tarea 1-b	
	2.º	4.º	2.º	4.º
Decimal en el intervalo, con estimación fuera del rango correcto	14,1	8,0	12,1	8,0
Decimal fuera del intervalo	18,1	13,1	25,8	14,6

Resultados de la Tarea 3. Uso de los porcentajes y representación en sectores de una situación real

En las tablas 4 y 5 mostramos los resultados a la Tarea 3 para 2.º y 4.º de ESO, respectivamente. En este caso, se ha distinguido en los éxitos y fracasos en la estimación del tiempo empleado en sus actividades diarias, lo cual se solicitaba en porcentajes, y el éxito para representarlo en un diagrama de sectores. Dado que era una estimación personal, se estableció un rango amplio de porcentajes para dar por correcto cada una de las tareas (dormir: 25-50, estar en clase 20-35, comer 5-20, resto hasta completar 100).

Se observa que en las dos partes de la tarea los resultados son superiores en 4.º de ESO (45,2% y 42,7%), siendo casi el doble que en 2.º de ESO (27,8% y 29,8%). También es así el porcentaje de

alumnado que responde correctamente a las dos partes de la tarea, siendo este muy bajo en ambos cursos (12,5% en 2.º de ESO y 27,1% en 4.º de ESO).

Tabla 4. Porcentajes de éxito en la Tarea 3 de 2.º de ESO

		Estimación de porcentajes en las actividades diarias			
	Resultado	Éxito	Fracaso	Blanco	Total
Estimación en el gráfico de sectores	Éxito	**12,5**	14,9	0,4	**27,8**
	Fracaso	16,5	48	1,6	66,2
	Blanco	0,8	2,5	2,4	6,0
	Total	**29,8**	65,7	4,4	100

Tabla 5. Porcentajes de éxito en la Tarea 3 de 4.º de ESO

		Estimación de porcentajes en las actividades diarias			
	Resultado	Éxito	Fracaso	Blanco	Total
Estimación en el gráfico de sectores	Éxito	**27,1**	15,6	0	**42,7**
	Fracaso	17,1	33,7	0	50,8
	Blanco	1,0	3,5	2,0	6,5
	Total	**45,2**	52,8	2	100

Las mayores dificultades para estimar las actividades diarias las encontramos en situarlas con porcentajes adecuados (Tabla 6). Por ejemplo, algunos estudiantes otorgaron alto porcentaje para comer, escaso porcentaje para dormir y, muchos de ellos, establecieron el porcentaje de estar en clase justamente como 50% del día, entendemos que el tiempo en el instituto lo sienten largo e intenso, o simplemente piensan que "están la mitad del día en clase" (Figura 2). Los otros tipos de errores se refieren a que la suma de los porcentajes se queda por encima o por debajo de 100%.

Tabla 6. Errores en la distribución de porcentajes de las actividades diarias en la Tarea 3

Tipo de error	2.º	4.º
Los porcentajes de las tareas diarias suman 100 y fuera de los rangos	33,1	29,6
Los porcentajes de las tareas diarias suman más de 100	19	7,5
Los porcentajes de las tareas diarias suman menos de 100	9,3	5
Otros	6,4	5

La representación gráfica en el diagrama se sectores resultó especialmente compleja para el alumnado de 2.º de ESO, realizando representaciones que no cumplían los requisitos. Por ejemplo, se marcaban porciones de círculo que no eran sectores circulares (Figura 3) o no partían del centro. Quizás en algunos grupos de los encuestados no habían trabajado lo suficiente la construcción de estos diagramas. En ambos niveles los errores se basaban en estimaciones incorrectas de los sectores que les llevó a representar más de cuatro sectores, pues sobraba una parte del círculo (Figura 2). En algunos casos, los porcentajes los estimaron como si fuera grados.

Siegler y Booth (2005) indican que la estimación de cantidades es un importante proceso en la educación matemática, ya que muchas veces requiere ir más allá de los razonamientos rutinarios y aplicar conocimiento matemático de forma flexible. Es por eso que forma parte de las componentes del sentido numérico. El estudio presentado, parte de uno más amplio, pone el énfasis en el uso de estimaciones a partir de representaciones, apoyándose en puntos de referencia (numéricos o contextuales). Tal y como se esperaba, los porcentajes de éxito en 4.º de ESO son superiores a los de 2.º de ESO en las tres tareas presentadas, lo cual es positivo porque indica que la formación matemática que se recibe durante esta etapa contribuye a mejorar las estrategias propias del sentido numérico. Sin embargo, difícilmente pueden considerarse resultados adecuados para alumnado de

secundaria, dado el nivel curricular de las tareas planteadas, lo que es consecuente con investigaciones realizadas en otros contextos educativos (por ejemplo, Akkaya, 2016).

Figura 2. Representación de diagrama de sectores incorrecto (alumno de 4.º de la ESO)

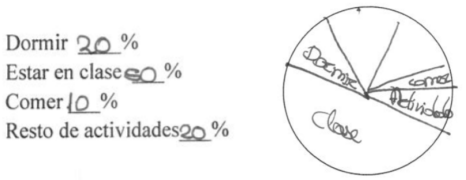


Figura 3. Representación de diagrama de sectores incorrecto (alumno de 2.º de la ESO)



PERFILES DE SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

La investigación descrita en el apartado anterior basa sus resultados en las respuestas a pruebas escritas de los estudiantes de secundaria, al igual que se había realizado en otros países (Akkaya, 2016; Veloo, 2010, Yang y Sianturi, 2021). Aunque las pruebas escritas son útiles para diferenciar el grado de adquisición de ciertas habilidades asociadas al sentido numérico, no nos permiten tener certeza de si los estudiantes tienen otros modos de razonar. Muchos estudiantes se sienten cómodos o seguros con procedimientos basados en reglas (Sengul y Gulbagci, 2012) o piensan que eso es lo que el profesor espera de ellos y de ahí que sean sus respuestas más frecuentes. Por otra parte, es notorio que se ha realizado menos investigación respecto a intervenciones de aula efectivas que promuevan un aprendizaje numérico con estrategias flexibles y creativas (Markovits y Sowder, 1994; Swoder, 1992). Por ello, nos planteamos focalizar nuestra investigación en estos dos aspectos. Por un lado, profundizar a través de entrevistas, si los estudiantes conocen estrategias diferentes, aunque solo muestren una inicial, y por otro lado, si hay cambios en sus modos de razonar numéricamente cuando siguen intervenciones de aula que fomentan componentes del sentido numérico. Ello se plasmó a través de los siguientes objetivos de investigación, recogidos en Almeida y Bruno (2016, 2017 y 2019):

1. Establecer perfiles de alumnado de secundaria ante tareas que pueden abordarse con componentes de sentido numérico.
2. Analizar cambios en los perfiles de los estudiantes después de una secuencia de enseñanza en la que se trabajan componentes del sentido numérico, a través de la búsqueda de diferentes estrategias.

Para ello se realizó una investigación con 47 estudiantes de dos grupos de 2.º de ESO (de 25 y 22 estudiantes, respectivamente), de un centro público de Tenerife (España), situado en un entorno semiurbano. Nos centramos principalmente en tres componentes concretas del sentido numérico: usar puntos de referencias; usar múltiples representaciones de los números y las operaciones; y revisar los datos y resultados. Todo ello en actividades sobre números decimales y fracciones que correspondían con los contenidos y el momento del curso escolar del alumnado objeto de estudio. El estudio tuvo diferentes fases:

- *Prueba inicial escrita*. Se realizó una prueba escrita a los 47 estudiantes, al inicio del estudio con tareas numéricas que podían ser resueltas haciendo uso del sentido numérico (tareas semejantes a las del estudio expuesto en el apartado anterior).
- *Entrevista inicial*. La prueba escrita permitió seleccionar a 11 estudiantes (E1, E2,…E11) en función del tipo de estrategias utilizadas y/o uso de sentido numérico mostrado. Se establecieron perfiles de estudiantes según sus respuestas.

- *Desarrollo de una secuencia de aprendizaje*. Se diseñó e implementó una secuencia de aprendizaje con los 47 estudiantes, con actividades numéricas que fomentaban las componentes numéricas implicadas en el estudio.
- *Entrevistas finales*. Al finalizar la secuencia de aprendizaje se entrevistó de nuevo a los 11 alumnos de la entrevista inicial, con el objetivo de determinar si observaban los mismos perfiles y si la intervención había producido cambios en cada estudiante, en particular.

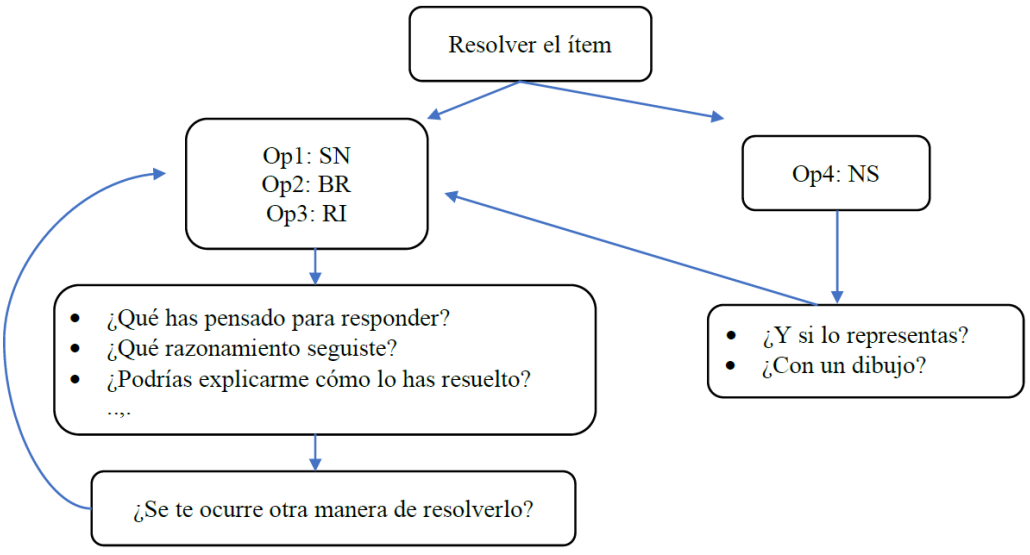
Desarrollo de una secuencia de aprendizaje

Se diseñó e implementó una secuencia de aprendizaje sobre números decimales y fracciones que promovía el uso del sentido numérico. Las tareas numéricas presentaban diferentes objetivos: valorar la razonabilidad de los datos y las respuestas, usar puntos de referencia (para comparar racionales, para estimar magnitudes y para estimar operaciones), usar diferentes representaciones gráficas (recta numérica, barras, áreas de rectángulos…) para comparar números, estimar operaciones, todo ello en problemas abstractos o contextualizados en situaciones reales. La intervención tuvo lugar durante once sesiones de 50 minutos, en la hora habitual de Matemáticas. La metodología de aula, siguiendo las propuestas de Reys y Barger (1991), se basaba en un aprendizaje colaborativo en el que predominaba el debate y la discusión de las diferentes estrategias que podían seguirse para una misma tarea numérica. Los alumnos resolvieron tareas en pequeños grupos de modo que podían compartir su conocimiento, posteriormente, con la toda la clase.

Entrevistas inicial y final

El objetivo de la realización de las entrevistas inicial y final era detectar las estrategias de resolución de las tareas numéricas que pudieran manifestar los estudiantes, más allá de su primera respuesta, con el fin de establecer tendencias en función del uso (o no) de componentes de sentido numérico. Durante las entrevistas se siguió el mismo esquema con cada alumno (Figura 4).

Figura 4. Esquema seguido en las entrevistas inicial y final para cada tarea numérica



Se les presentaron cinco tareas numéricas en hojas independientes. Una vez que acabaron las cinco tareas, se realizó un recorrido por cada una de ellas, observando su opción de respuesta (Op):

Op1: SN, razonamiento basado en sentido numérico; Op2: BR, razonamiento basado en reglas; Op3: RI, razonamiento incorrecto; Op4: NS, no sabe responder o explicar.

A continuación, se les pidió una explicación de su respuesta y se les solicitó que buscasen otra justificación o resolución para llegar al resultado. En el caso de que no supiesen responder (Op4), se

les animó a hacer uso de representaciones gráficas, por ser una de las componentes objeto de estudio. De forma esquemática, se repetía el esquema de la Figura 4 en cada tarea, hasta que no hubiese más respuestas por parte del entrevistado.

Perfiles de alumnado de secundaria en tareas numéricas

En las entrevistas iniciales se establecieron cuatro perfiles de estudiantes en función de sus estrategias en la resolución de cuestiones numéricas. El perfil lo hemos entendido como una "inclinación" o "tendencia", es decir, no significa que el estudiante responda con una única estrategia en todas las tareas propuestas, pero sí en la mayoría ellas. En lo que sigue describimos los perfiles encontrados, ejemplificándolos con la respuesta a una tarea de la entrevista inicial. En ella se les pedía ordenar de menor a mayor los siguientes números: 2/5, 4/3 y 7/8.

Perfil 1 (P1): Tendencia al uso de estrategias de sentido numérico

Los estudiantes de este perfil tienden a hacer uso de estrategias de sentido numérico en su primera opción de respuesta y cuando se les solicita estrategias alternativas a la inicial. Demuestran flexibilidad para buscar distintas estrategias. Aunque en alguna ocasión intentan hacer uso de reglas, se muestran capaces de evitarlas cuando conoce una estrategia de sentido numérico. En el ejemplo que sigue el estudiante E2 muestra conocer dos estrategias adecuadas sentido numérico comparando los numeradores y los denominadores, y a través de una representación gráfica.

A: [Escribe la respuesta de la Figura 5]

Figura 5. Primera respuesta del estudiante E2



Miré todo, y como que el 4 se pasa, la fracción da más de 1 (haciendo referencia a la fracción 4/3), el 7 se aproxima casi al 8 (haciendo referencia a la fracción 7/8) y el 2 está separado del 5 (haciendo referencia a la fracción 2/5).

I: O sea, ¿tú miraste si eran mayores que 1?

A: Sí.

I: ¿Y en la fracción 7/8?

A: Estaba casi en uno.

I: ¿Y en esta (señalando la fracción 2/5)?

A: Era más pequeño.

I: ¿Conoces otra forma de hacerlo?

A: ¿Con una tarta?

I: Como a ti se te ocurra…

A: Yo haría un círculo y lo partiría.

I: A ver, enséñamelo.

A: [Dibuja la Figura 6]

Figura 6. Segunda respuesta del estudiante E2



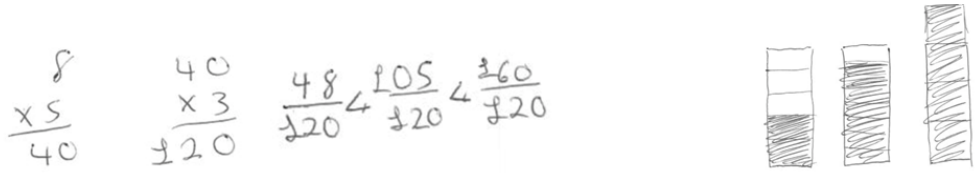
I: Entonces con el dibujo, ¿sabrías también ordenarlo?

A: ¡Claro! Aquí ya son 2 (señalando los dos últimos círculos para 4/3), aquí ocupa todo, casi todo (refiriéndose al segundo círculo para la fracción 7/8) y aquí no ocupa casi nada (señalando el primer círculo para la representación de la fracción 2/5).

Perfil 2 (P2): Tendencia a uso de reglas y algoritmos. Conoce estrategias de sentido numérico.

Se caracterizan por tomar como primera opción de respuesta, una regla y/o algoritmo, en general correctos, y cuando se les solicita otras respuestas, demuestran conocer y ser capaz de utilizar estrategias de sentido numérico, también correctas. Muestran apego a las reglas o los algoritmos, argumentando que para justificar sus razonamientos necesita "escribir algún tipo de cálculo". En el ejemplo que se muestra en la Figura 7, el estudiante E3 ordena las fracciones después de calcular un denominador común, a pesar de ser muy costoso en este caso. Al solicitarle otro método dibuja correctamente las barras para cada una de las tres fracciones y ratifica su respuesta.

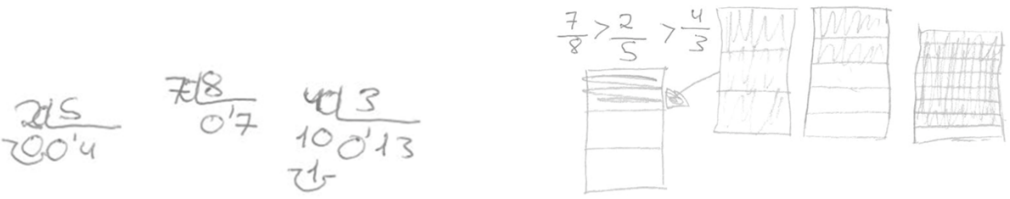
Figura 7. Primera respuesta (izda.) y segunda respuesta (dcha.) del estudiante E3



Perfil 3 (P3): Tendencia a uso de reglas y algoritmos. No conoce estrategias de sentido numérico

Se caracterizan porque contestan principalmente haciendo uso de reglas y/o algoritmos, pero al solicitarle un método alternativo demuestra no conocer otras estrategias. En ocasiones, las respuestas basadas en reglas pueden ser incorrectas. En su intento de hacer uso de otras estrategias, muestran dificultades conceptuales que les lleva a la elección de respuestas incorrectas y razonamientos erróneos. El apego a utilizar reglas puede deberse a sus escasa seguridad en aspectos conceptuales, pues estas no les requieren una justificación más allá del propio proceso. En el ejemplo de la Figura 8 el estudiante E8, en su primera respuesta, ordena de forma incorrecta porque se equivoca en las divisiones y al realizar una representación gráfica poco precisa para 7/8, esta no le ayuda a corregir su error.

Figura 8. Primera respuesta (izda.) y segunda respuesta (dcha.) del estudiante E8



Perfil 4 (P4): Dificultades con el contenido matemático. No conoce estrategias de sentido numérico

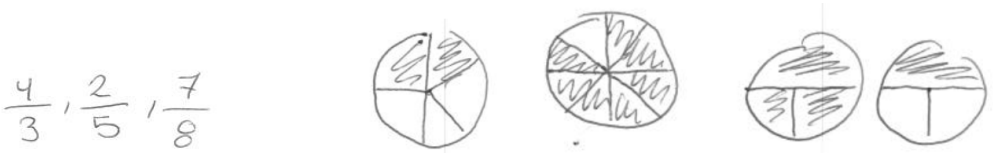
Como primera estrategia, no tienen una tendencia determinada al uso de reglas y/o algoritmos, pero tampoco al uso otras estrategias. Sus respuestas se caracterizan por una falta de dominio de los conceptos matemáticos, que les lleva a hacer uso de razonamientos incorrectos, cuando se les pide otros métodos. En muchas ocasiones, sus razonamientos son difícilmente clasificables y en ellos se observan dificultades numéricas conceptuales. En el ejemplo de la Figura 9, el estudiante E10 llega a su primera repuesta con razonamientos incorrectos (como se puede leer en el extracto de entrevista) y en la segunda respuesta ordena correctamente a pesar de una representación incorrecta de 4/3, sin conectar ambas respuesta.

A: [Escribe 4/4, 2/5 7/8]

I: ¿Por qué las ordenaste así?

A: Porque yo de cuando dimos esto,… me parece que me acuerdo, que no tenía nada que ver que el número de debajo fuese más pequeño que el de arriba, o sea, que el de arriba no tenía que ser más pequeño que el de abajo. Entonces te fijabas más en el de abajo.

Figura 9. Primera respuesta (izda.) y segunda respuesta (dcha.) del estudiante E10



I: ¿En el denominador?

A: Como 3 es más pequeño que 4, entonces es 4/3 es el más pequeño. 5 es mayor que 2, pero como aquí (señalando la fracción 4/3) son más pequeños entre sí, pues yo los coloqué así, por el número de abajo y no por el de arriba.

I: O sea, tú tienes claro que 4/3 es el más pequeño porque el 3 es más pequeño que el numerador…mmm ¿Y los otros 2 por qué?

A: Porque el de abajo…5 es más pequeño que 8.

I: ¿Sabrías hacerlo de otra forma?, ¿con un dibujo?

[La alumna representa las fracciones de la Figura 10, dcha.].

I: Entonces ahora según los dibujos, ¿cuál es el más pequeño?

A: Este (señala el primer círculo).

I: Vale, ¿que ese se corresponde con…?

A: Con este (señalando la fracción 2/5)

I: Y el siguiente ¿cuál sería?

A: Este (señala la representación de 4/3), no,…este (señala la representación de 7/8).Y después este (señala 4/3).

Cambios en los perfiles de los estudiantes

En la Tabla 7 se muestran los perfiles de los estudiantes en las entrevistas inicial y final. En las entrevistas finales se ratificaron los perfiles y se observó cómo algunos estudiantes se movieron hacia otros después de la intervención de aula. Estos cambios fueron, en su mayoría, positivos, es decir, pasaron de un perfil menor a uno mayor, en cuanto a uso de sentido numérico.

Tabla 7. Perfiles de los estudiantes en las entrevistas inicial y final

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11
Entrevista inicial	P1	P1	P2	P2	P2	P3	P3	P3	P3	P4	P4
Entrevista final	P1	P1	P1	P1	P2	P1	P2	P2	P4	P4	P4

Se observa que los estudiantes que se encontraban clasificados en el perfil P1 en la entrevista inicial (E1 y E2), continuaron haciendo uso de estrategias de sentido numérico en la entrevista final, demostrando mucha flexibilidad en la búsqueda de estrategias de este tipo. Los estudiantes E3 y E4, de perfil inicial P2, y el E6, de perfil inicial P3, cambiaron hacia el P1, pues en ningún momento de la entrevista final recurrieron a reglas memorizadas o cálculos escritos. Por otra parte, el estudiante E5, que en la entrevista inicial se encontraba en el perfil P2 permanece en este perfil. Los estudiantes E7 y E8 que en la entrevista inicial se situaron en un perfil P3, demostraron hacer uso,

en ocasiones, de estrategias de sentido numérico, sin abandonar como primera opción, aquellas en las que predominan los algoritmos (perfil P2). Los alumnos E10 y E11 de perfil P4 en el inicio, caracterizado por una carencia de conocimientos numéricos, intentan en las entrevistas finales hacer uso de las representaciones gráficas para responder a las cuestiones, pero sus errores conceptuales seguían presentes. Las mismas dificultades encontramos para el caso de E9, cuya evolución fue negativa en los términos de esta investigación. Los tres estudiantes del perfil final P4 necesitan mejorar en sus ideas conceptuales, en este caso sobre los números racionales, y el tiempo dedicado a la instrucción no fue suficiente para desarrollar estrategias de sentido numérico.

Los resultados de esta investigación son congruentes con las investigaciones previas. Así, Reys y Yang (1998) concluyeron que los estudiantes de secundaria tendían a usar principalmente técnicas computacionales, pero los que tenían capacidades matemáticas más altas eran más propensos a separarse de los métodos basados en reglas. También observaron que esas rupturas se producían solo cuando se les daba la oportunidad a través de preguntas como: "¿Puedes hacerlo de otra manera? Por otra parte, Markovits y Sowder (1992) afirman que el sentido numérico es una habilidad que se desarrolla a largo plazo y que está íntimamente vinculada al aspecto conceptual de los números y el significado de las operaciones. Establecer perfiles de estudiantes tiene una repercusión en el aprendizaje, ya que ayuda a desarrollar secuencias de aprendizaje que tenga en cuenta estas características. La enseñanza debe permitir que los alumnos que prefieren las reglas puedan valorar las estrategias alternativas que ya conocen y las pongan en juego, no limitando las respuestas a las puramente algorítmicas, y en general, debe ayudar a todos a ampliar sus razonamientos numéricos, apoyándose en los aspectos conceptuales.

REFLEXIONES FINALES

Es necesario continuar con investigaciones que profundicen en cómo usan los estudiantes componentes del sentido numérico, más aún, en cómo desarrollarlas en el aula. Por nuestra parte, seguimos investigando en procesos de enseñanza que fomentan la evaluación de los datos o de las repuestas en tareas numéricas, lo que se ha denominado *razonabilidad numérica* de la solución (Fariña y Bruno 2021). A pesar de los esfuerzos curriculares por incluir el sentido numérico en el aprendizaje de los números, se sigue dedicando un porcentaje muy alto de la instrucción a la práctica de algoritmos y reglas. Se valoran menos las respuestas basadas en representaciones gráficas, en estimaciones o en el uso de relaciones numéricas. Ello implica que los estudiantes sientan que no pueden desviarse de procedimientos estándares que por otro lado, les resultan más cómodos, pues no requieren razonamientos costosos. En la actualidad, tenemos una oportunidad importante de cambio del aprendizaje numérico, a través del currículo de Matemáticas que ha entrado en vigor en España (Real Decreto, 217/2022), el cual recoge características del sentido numérico expuestas en la investigación educativa. Sin embargo, todavía hay un amplio camino que recorrer para alcanzar los objetivos que se plantean desde los documentos oficiales en términos de habilidades y competencias relacionadas con el sentido numérico. No debemos olvidar que esto debe ir acompañado de cambios metodológicos en el aula. Se trata de crear ambientes colaborativos que propicien el compartir con los iguales las estrategias de pensamiento. La formación del profesorado de los niveles obligatorios puede contribuir a ello, así como los materiales curriculares y libros de texto que se diseñen. Creemos que hay un amplio trabajo por realizar en términos de investigación, pero también de innovación.

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Akkaya, R. (2016). An Investigation into the Number Sense Performance of Secondary School Students in Turkey. *Journal of Education and Training Studies, 4*(2), 113-123.

Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). Salamanca: SEIEM.

Almeida, R. y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *REDIMAT, 6*(1), 56-84. doi: 10.17583/redimat.2017.1910

Almeida, R. y Bruno, A. (2019). Perfiles de sentido numérico en estudiantes de secundaria. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemáticas Española*, *22*(3), 563-579.

Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico de estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 9-34. doi: 10.5565/rev/ensciencias.997

Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(5), 959-978.

Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2017). Evaluación de sentido numérico en tareas de fracciones. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática XII*, 9-30.

Alsawaie, O. N. (2011). Number sense- based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 26*, 1-27.

Anghileri J. (2006). *Teaching Number Sense*. London: Continuum.

Berch, D. (2005). Making sense of number sense. *Journal of learning disabilities, 36*(4), 333-339. doi:10.1177/00222194050380040901

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE núm. 76, de 30 de marzo de 2022. España.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21-29. doi: 10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x

Cheung, K.L., y Yang, D.C. (2020). Performance of sixth graders in Hong Kong on a number sense three tier test. *Educational Studies, 46*(1), 39-55. doi: 10.1080/03055698.2018.1516631

Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261 – 268). Valencia: SEIEM.

Fariña, M., Almeida, R., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2017). Evaluación de resultados en tareas de estimación numérica-gráfica. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Libro de* Actas (pp. 66-76). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP).

Gersten, R.; Jordan, N.C. y Flojo, J. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difculties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 293-304.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. Journal for *Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218. doi: 10.2307/749074

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6-11.

Markovits, Z. y Sowder J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29. doi: 10.2307/749290

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-8.

Mohamed, M. y Johnny, J. (2010). Investigating number sense among students. *Procedia Social and Behavioral Science, 8*, 317-324. doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.044

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Purnomo, Y. W., Kowiyah, K., Alyani, F. y Assiti, S. S. (2014). Assessing number sense performance of Indonesian elementary school students. *International Education Studies, 7*(8), 74‑84.

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217

Reys B. y Barger R. (1991). *Developing number sense in the middle grades*. Reston Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B. J. y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237. doi: 10.2307/749900

Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2021). Relaciones numéricas establecidas por alumnado de Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 563 – 570). Valencia: SEIEM.

Sengul, S. y Gulbagci, H. (2012). An investigation of 5th grade Turkish students' performance in number sense on the topic of decimal numbers. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 46*, 2289-2293. doi:10.1016/j.sbspro.2012.05.472

Siegler, R.S. y Booth, J.L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Siegler, R.S. y Thompson, T.A. (2014). Numerical landmarks are useful—except when they're not. *Journal of Experimental Child Psychology, 120*, 39-58.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouw (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). New York: MacMillan Publishing Company.

Veloo, P.K. (2010). *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intevention study with secondary one students in Brunei Darussalam*. Unpublished master'thesis, University of Otago, Dunedin, New Zealand.

Yang, D.C. (2019a). Performance of fourth graders when judging the reasonableness of a computational result. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 197-215.

Yang, D.C. (2019b). Development of a three-tier number sense test for fifth-grade students. *Educational Studies in Mathematics, 101*(3), 405‑424. doi: 10.1007/s10649-018-9874-8

Yang, D.C., Li, M.N. y Lin, C.I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*, 789-807. doi: 10.1007/s10763-007-9100-0

Yang, D.C. y Sianturi, I.A.J. (2021). Sixth Grade Students' Performance, Misconception, and Confidence on a Three-Tier Number Sense Test. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*, 355-375. doi: 10.1007/s10763-020-10051-3

Yang D.C. y Wu W.R. (2010). The Study of Number Sense: Realistic Activities Integrated into Third-Grade Math Classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research, 103*(6), 379-392. doi: 10.1080/00220670903383010

PRÁCTICAS ALGEBRAICAS EN LOS PRIMEROS CURSOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Algebraic Practices in Early Elementary School

Brizuela, B.M.

Tufts University

Resumen

En el presente trabajo comparto ejemplos de estudios anteriores, así como también de estudios en curso donde investigamos el uso de prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria en escuelas en el noreste de Estados Unidos. Específicamente, en este trabajo me centraré en dos prácticas clave en estas edades tempranas: la representación y la generalización. Argumento que, así como hemos identificado a las funciones como contenido unificador para el álgebra escolar, las prácticas algebraicas también funcionan como unificadoras para la educación matemática escolar.

Palabras clave: *educación primaria, generalización, prácticas algebraicas, representación.*

Abstract

In this paper I share examples of previous as well as ongoing studies where we have investigated the use of algebraic practices in the first grades of primary education in schools in the Northeast of the United States. Specifically, in this paper I will focus on two key practices in these early ages research: representation and generalization. I argue that in the same way that we have identified functions as a unifying content thread for school algebra, algebraic practices also function as a unifying thread for Kindergarten-Grade 12 school mathematics education.

Keywords: *algebraic practices, elementary education, generalization, representation.*

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo compartiré ejemplos de estudios anteriores, así como también de estudios en curso y futuros donde investigamos e investigaremos el uso de prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria en escuelas en el noreste de Estados Unidos. Específicamente, en este trabajo me centraré en dos prácticas clave en estas edades tempranas: la representación y la generalización. En respuesta al efecto perjudicial de "guardabarrera" de un enfoque tradicional al álgebra, argumentamos que los estudiantes necesitan experiencias sostenidas y a largo plazo con los contenidos y las prácticas algebraicas a lo largo de su escolaridad, desde el comienzo de su educación formal, aprovechando sus intuiciones naturales.

CONTENIDO Y PRÁCTICAS ALGEBRAICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Durante las últimas cuatro décadas distintas investigaciones han apuntado a la importancia de incluir y resaltar tanto el contenido como las prácticas algebraicas desde los primeros cursos de la escolaridad (e.g., Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Kaput et al., 2008). Estas investigaciones en las últimas décadas han resaltado los efectos tanto a corto como a largo plazo de integrar el contenido y las prácticas algebraicas con los contenidos que típicamente identificamos como aritméticos (e.g., Blanton et al., 2019; Brizuela et al., 2013; Schliemann et al., 2012). Esta área de investigación ha sido llamada *early algebra* en inglés, o álgebra temprana en castellano.

Siguiendo el marco establecido por Kaput (2008) y luego detallado por Blanton et al. (2011), entendemos que el contenido algebraico incluye: (1) la aritmética generalizada; (2) la equivalencia,

Brizuela, B. M. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 43–57). SEIEM.

las expresiones, las ecuaciones y las desigualdades (o simplemente las ecuaciones); (3) el razonamiento cuantitativo y (4) el pensamiento funcional. La aritmética generalizada implica generalizar las relaciones aritméticas, incluidas las propiedades del número y las operaciones y razonar explícitamente con estas generalizaciones. Implica razonar sobre la estructura de las expresiones aritméticas más que sobre su valor computacional. Los conceptos asociados con las ecuaciones incluyen una comprensión relacional de la igualdad que permite interpretar las ecuaciones como una expresión matemática que indica la equivalencia de dos cantidades o expresiones. Otros conceptos incluyen, por ejemplo, representar y razonar con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica. El razonamiento cuantitativo implica describir relaciones entre cantidades generalizadas que pueden o no ser equivalentes. El pensamiento funcional es el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones. Incluye la generalización de relaciones entre cantidades covariantes; representar esas relaciones de múltiples maneras usando lenguaje natural, notación algebraica, tablas y gráficos; y razonar con fluidez con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función. Todos estos dominios de contenido representan vías significativas y fructíferas para el pensamiento algebraico temprano y, de hecho, tienen importantes puntos de intersección entre ellos.

De los cuatro dominios de contenido de la investigación en *early algebra*, en este trabajo me enfoco en el pensamiento funcional. Las funciones, consideradas durante mucho tiempo por los matemáticos como un concepto poderoso en matemáticas, también pueden servir como un hilo unificador en el currículo (Freudenthal, 1982; Hamley, 1934; Schwartz, 1990). Sin embargo, hasta hace pocas décadas, el estudio de las funciones, cuya comprensión históricamente se pensaba que requería el pensamiento formal y abstracto por parte de los alumnos, se trataba en gran medida dentro del dominio del álgebra en los cursos superiores de la educación primaria y en la educación secundaria. Sin embargo, junto con la reconceptualización del álgebra como una rama curricular a lo largo de todos los cursos de la escolaridad (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), la investigación en *early algebra* ha contribuido a llevar el estudio de las funciones a la educación primaria y a entender *early algebra* como una parte importante de la enseñanza del álgebra. De hecho, el pensamiento funcional en los primeros cursos de la educación primaria es considerado por los primeros investigadores de *early algebra* como una ruta importante hacia el álgebra (Carraher y Schliemann, 2007).

Además de lo que podría describirse como el contenido matemático del *early algebra*, hay cuatro prácticas matemáticas significativas que caracterizan el pensamiento algebraico (temprano): (1) generalizar relaciones y estructuras matemáticas, (2) representar relaciones generalizadas de diversas maneras, (3) justificar relaciones generalizadas y (4) razonar con relaciones generalizadas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Estas prácticas han servido como un marco para la investigación del álgebra en educación primaria. Una característica importante de estas prácticas es que no ocurren de forma aislada, sino que están fundamentalmente integradas en las dimensiones del contenido alrededor de las cuales se ha fusionado gran parte de la investigación temprana del álgebra y que representan una extensión de los conocimientos matemáticos (ver, por ejemplo, Cai y Knuth, 2011; Kaput et al., 2008).

Generalizar es el corazón del razonamiento algebraico (Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008) y el núcleo mismo de la actividad matemática (Mason, 1996). Como un proceso de darse cuenta de la estructura y las relaciones, su desarrollo en los cursos de primaria es fundamental porque desvía la atención de los niños de los detalles de las instancias aritméticas hacia las relaciones y la estructura que definen cómo se relacionan las instancias particulares (Blanton, 2008). Es una forma crítica de razonamiento y sentido debido a que requiere que los estudiantes comprendan una situación, la conecten con su conocimiento existente y saquen conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas.

Aunque la generalización podría describirse como el corazón del razonamiento algebraico, el proceso de generalización permanece oculto sin sistemas de *representación* que saquen a la luz el pensamiento de los niños (e.g., Fuentes y Cañadas, 2021, 2022). Los niños están razonando algebraicamente mientras representan generalizaciones matemáticas—ya sea a través de palabras, tablas, gráficos, imágenes o través de la notación algebraica (simbólica) — y cuando navegan entre estas representaciones. Además, sus representaciones no son sólo evidencia de las generalizaciones que observan en situaciones en problemas matemáticos, sino que la acción de representar ayuda a moldear la naturaleza misma de su razonamiento. Morris (2009) señala, por ejemplo, que el acto de representar cantidades generalizadas ayuda a desarrollar la comprensión de los niños de que una acción se aplica a un conjunto infinito de objetos, y no a un solo caso. Esto, a su vez, puede ayudar a fortalecer la comprensión de los niños de la naturaleza generalizada de una afirmación, un atributo importante de la generalización.

Quizás la más compleja de estas prácticas matemáticas sea el *razonamiento* algebraico, que implica actuar sobre, o razonar con, generalizaciones como objetos en sí mismos. Si bien las cuatro prácticas reflejan razonamiento algebraico, el razonamiento que actúa sobre una generalización es único en el sentido de que implica razonar con una generalización como objeto. Es decir, una vez que los niños han notado y representado una generalización de un problema matemático, es importante que sean capaces de usar esta generalización como un objeto en su pensamiento cuando resuelven nuevos problemas. Cognitivamente, esto significa una orientación hacia los objetos que es muy avanzada y en la que la generalización ha sido cosificada en el pensamiento del niño (Sfard, 1991). Así, cultivar esta práctica de pensamiento representa un objetivo importante en el aprendizaje del álgebra.

Justificar generalizaciones también es una práctica fundamental del pensamiento algebraico. Nuestra experiencia con esta práctica es que la inversión requerida para desarrollar el pensamiento de los estudiantes más allá de los argumentos empíricos y los argumentos no simbólicos como las pruebas basadas en representaciones (Schifter, 2009) es significativa.

La importancia de estas prácticas de pensamiento algebraico se ejemplifica aún más dadas sus conexiones con las prácticas matemáticas establecidas en los Estándares Estatales Básicos Comunes en Estados Unidos (*Common Core State Standards Initiative* [CCSSI], National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO], 2010), o *Standards for Mathematical Practice* en inglés—en particular, las prácticas de razonar de manera abstracta y cuantitativa, modelar con matemáticas, buscar y hacer uso de estructuras, y buscar y expresar la regularidad en razonamientos repetidos. Las prácticas matemáticas suelen pensarse como *hábitos mentales* que son relevantes más allá del contenido y del curso de escolaridad. Otros investigadores se refieren a las prácticas matemáticas como similares a las prácticas que utilizan los profesionales en su quehacer diario. En nuestro caso diríamos entonces que los matemáticos profesionales utilizan las prácticas de representar, generalizar, razonar y justificar en su quehacer matemático diario y que estas mismas prácticas son las que queremos que los niños de educación primaria desarrollen.

Las dimensiones de contenidos y prácticas algebraicas que aquí describo no deben tomarse como únicas. Hay otras caracterizaciones que se han identificado y que considero como consistentes con las que aquí utilizo. La elección de unas sobre otras es en gran medida pragmática (por ejemplo, ver Blanton et al., 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Cooper y Warren, 2011).

GENERALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN

En este trabajo me centraré en las dos prácticas algebraicas en las que nos hemos enfocado mayormente en nuestra investigación: la generalización y la representación. Ambas pueden considerarse como el corazón del álgebra en los primeros cursos de educación primaria. Ambas también pueden considerarse como totalmente integradas a las otras dos prácticas de razonamiento

y de justificación. Me atrevería incluso a decir que sin generalización y sin representación no hay álgebra.

Asimismo, entre las representaciones algebraicas me centraré en la notación algebraica, las tablas y los gráficos de coordenadas cartesianas (o simplemente gráficos). Estas tres representaciones también pueden considerarse como las representaciones de tipo algebraico más distintivas. Es decir, estas tres representaciones son también parte del corazón del álgebra y se distinguen de otras posibles representaciones como el dibujo, las expresiones verbales y los diagramas, por ejemplo, por ser específicamente algebraicas y por su capacidad de expresar la generalización de relaciones y estructuras matemáticas.

Notación algebraica

De particular interés para nosotros es la comprensión y el uso de la notación algebraica por parte de niños en los primeros cursos de educación primaria, especialmente la notación algebraica para representar generalizaciones, las dos prácticas algebraicas en las que me enfoco en este trabajo. Los enfoques tradicionales hacia la enseñanza del álgebra retrasan la introducción de la notación algebraica hasta cursos más avanzados de educación primaria o cursos de secundaria. Esos enfoques tradicionales sufren de trampas similares al enfoque de "álgebra tardía", que ha excluido a muchos estudiantes, en particular a los de grupos marginados (e.g., Kaput, 2008; Moses y Cobb, 2001), ejemplificando el efecto de "guardabarrera" mencionado anteriormente. Trabajos más recientes indican que la notación algebraica está al alcance de los niños pequeños (e.g., Brizuela et al., 2015; Dougherty, 2008, 2010; Torres et al., 2018), y que los tipos de interpretaciones que tienen los niños pequeños sobre la notación algebraica no son tan diferentes a las interpretaciones de los estudiantes de cursos más avanzados. Esto nos ha llevado a considerar a la notación algebraica como una herramienta potencialmente poderosa a través de la cual los niños pueden representar la generalización.

Un hallazgo importante en nuestros estudios (e.g., Brizuela et al., 2015) es que en sus entrevistas individuales 4 semanas después del comienzo de un experimento de enseñanza, los estudiantes de primer curso de primaria buscaban identificar cantidades específicas como ejemplos cuando no usábamos notación algebraica. Sin embargo, cuando introdujimos la notación algebraica en estas mismas entrevistas, los estudiantes dejaron de tratar de identificar cantidades específicas. Esto provee evidencia en favor de nuestro argumento de que la introducción de notación algebraica antes de lo habitual podría facilitar la reflexión de los estudiantes sobre cantidades indeterminadas y asimismo su construcción de generalizaciones.

Aquí comparto datos de un trabajo publicado en 2015 (Brizuela et al., 2015) en el cual documentamos los tipos de comprensiones sobre la notación algebraica de niños de seis años, en primer curso de educación primaria. Habíamos trabajado en una escuela pública en una zona urbana en la región noreste de los Estados Unidos. Implementamos 16 sesiones de clase durante un experimento de enseñanza en un aula con 22 niños. Durante las entrevistas individuales llevadas a cabo con cuatro niños de esta clase, obtuvimos evidencia de las compresiones detalladas en la Tabla 1.

Asimismo, al comparar las comprensiones que pudimos documentar con aquellas informadas en estudios anteriores con niños en los cursos más avanzados de escolaridad primaria y en la escuela secundaria (e.g., Knuth et al., 2011; Küchemann, 1981; MacGregor y Stacey, 1997) pudimos observar que las comprensiones expresadas por estos niños de seis años también suelen ser expresadas por niños mayores (ver Tabla 2). Adicionalmente, algunas de las comprensiones menos sofisticadas expresadas por niños adolescentes (e.g., la letra no se evalúa, recurrir inmediatamente a un valor numérico, la letra no se usa, la letra se ignora) no fueron expresadas por los niños de seis años con los que trabajamos.

Tabla 1. Comprensiones sobre la notación algebraica expresada por estudiantes de primer curso de primaria en entrevistas individuales (Brizuela et al., 2015, p. 51).

Comprensiones sobre la notación algebraica	**Zyla**	**Nyah**	**Tia**	**Leo**
Notación algebraica como una etiqueta u objeto	X			
Notación algebraica como representación de una cantidad indeterminada	X	X	X	X
Usan el orden alfabético de las letras para expresar relaciones entre cantidades, aunque la variable independiente no se especifique		X		X
Evitan combinar letras y números en una misma ecuación	X			

Tabla 2. Comprensiones sobre la notación algebraica expresada por estudiantes de primer curso de primaria y estudiantes adolescentes.

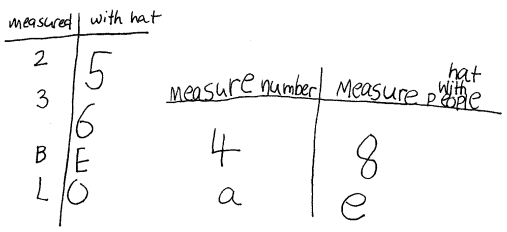
Küchemann 1981 niños de 14 años	**Knuth et al. 2011 niños de 11 años**	**MacGregor y Stacey 1997 niños de 11-12 años**	**Brizuela et al. 2015 niños de 6 años**
La letra se evalúa		Valor numérico	
La letra no se usa	Ninguna respuesta/no se	La letra se ignora	
La letra se usa como objeto	Objeto	Palabra abreviada	La notación algebraica se usa como etiqueta u objeto
		Valor alfabético	Usan el orden alfabético de las letras para expresar relaciones entre cantidades, aunque la variable independiente no se especifique
La letra como cantidad desconocida específica	número específico	Cantidad desconocida	La notación algebraica se usa como una cantidad desconocida específica
La letra como número generalizado	valores múltiples	Cantidad desconocida	
La letra como variable			
		Uso de una letra diferente para cada cantidad desconocida	
	Otro		
			Evita combinar letras y números en una misma ecuación

Ahora comparto, como ejemplo, el caso de Leo en una entrevista individual después de haber participado en el experimento de enseñanza durante cuatro semanas. Se le presentó una situación en la cual había una persona de una altura desconocida que se ponía sombreros de copa de distintas alturas y tenía que representar la altura de la persona sin el sombrero y con el sombrero. La Figura 1

muestra su trabajo escrito cuando trabajaba con una situación en la cual el sombrero medía 3 pies de alto (izquierda) y otra situación en la cual el sombrero medía 4 pies de alto (derecha).

Vemos el trabajo de Leo en la Figura 1, cómo representa y también utiliza la representación, específicamente la notación algebraica, para expresar la relación general entre cantidades en la situación bajo consideración. Por ejemplo, usamos B en la izquierda (usando la primera letra de mi nombre, Bárbara, ya que yo lo entrevistaba) para representar la altura de una persona, no importa qué altura fuera esta. Para representar la altura de la persona con el sombrero de copa de 3 pies de alto, Leo podría haber utilizado cualquier otra letra o podría haber escrito B+3. Sin embargo, representó la altura con el sombrero como E ya que es "3 letras más que *B*": después de B viene C, D y luego E. Asimismo, y utilizando la misma estrategia, utilizó la notación algebraica para generalizar la relación entre cantidades cuando la altura de la persona era representada con *L*: 3 letras más que L es O (M, N, O). Continuó utilizando la misma estrategia de representación para generalizar cuando el sombrero medía 4 pies: si una persona mide *a* pies, entonces su altura total con un sombrero de 4 pies es *e* (4 letras más allá de a: b, c, d, e). Argumentamos que en estos ejemplos del caso de Leo el uso de la notación algebraica le facilitó la representación de la generalización. Al utilizar solo números, como vemos en la Figura 1, la generalización de la relación entre las cantidades no es tan explícita como cuando usó letras.

Figura 1. Trabajo escrito de Leo al trabajar con un sombrero de 3 pies de alto (izquierda) y de 4 pies de alto (derecha). (Brizuela et al., 2015, p. 50)



La evidencia de que la notación algebraica podría haber estado actuando como una herramienta mediadora (Kaput, 1991; Kaput et al., 2008) que facilitó este tipo de reflexiones y generalizaciones entre los estudiantes está alineada con nuestra posición teórica de que las comprensiones conceptuales no necesariamente tienen que preceder a la introducción de símbolos, que los significados y los símbolos pueden co-emerger (e.g., Sfard, 2000) y las formas y funciones de las notaciones pueden cambiar con el tiempo (e.g., Saxe, 1999, 2005; Saxe y Esmonde, 2005). El trabajo de estos estudiantes en los primeros cursos de escolaridad primaria con la notación algebraica nos recuerda al trabajo de Cusi et al. (2011) que hablan del "balbuceo algebraico" (o el "proceso de construcción/interpretación/refinamiento de fórmulas en 'borrador'" [p. 492]). Nuestra posición es que los entornos de enseñanza y aprendizaje pueden brindar a los niños períodos de tiempo prolongados y sostenidos durante los cuales puedan adquirir mayor fluidez y comodidad con la notación algebraica, un aspecto esencial del lenguaje matemático.

Tablas

Entre las representaciones que incluimos en nuestros estudios con niños en los primeros cursos de educación primaria, además de la notación algebraica también utilizamos las tablas. Algunos estudios previos han explorado los usos y la comprensión de las tablas por parte de niños de entre primer y quinto curso de educación primaria (e.g., Brizuela y Alvarado, 2010; Brizuela y Lara-Roth, 2002; Martí, 2009; Schliemann et al., 2007; Torres et al., 2021, 2022). Otros investigadores también han estudiado las comprensiones de los niños sobre las funciones cuando utilizan tablas. Tanisli (2011), por ejemplo, investigó el pensamiento funcional de estudiantes de quinto curso de primaria mientras usaban tablas y concluyó que los estudiantes podían explorar relaciones

funcionales y generalizarlas mientras usaban tablas. De manera similar, Schliemann et al. (2001) encontraron que estudiantes de tercer curso de primaria que participaban en actividades que involucraban completar una tabla con artículos y precios para ayudarlos a comprender la multiplicación como una relación funcional, eran capaces de organizar datos en tablas. Además, Blanton y Kaput (2011) encontraron que niños de primer curso de primaria pueden comprender las tablas y también determinar las relaciones funcionales subyacentes a los datos en las tablas.

Al mismo tiempo, las investigaciones sugieren que, aunque las tablas parecen simples, su comprensión no lo es y que aprender sobre tablas es especialmente complejo para los niños pequeños (Martí, 2009). Los estudiantes de segundo y quinto curso de primaria en el estudio de Martí (2009) tendieron a crear listas en lugar de aprovechar la información coordinada de las tablas. Además, Martí (2009) señaló que no es lo mismo la capacidad de interpretar información y datos en tablas que la capacidad de construir y utilizar tablas. Incluso entre los adultos, comprender las tablas no es una tarea sencilla. Ehrenberg (1986) señala que leer una tabla no es fácil de enseñar ni siquiera para los adultos.

En nuestros estudios hemos explorado cómo los niños pueden utilizar la representación de las tablas para generalizar relaciones entre cantidades. Aquí comparto datos de un trabajo publicado en 2021 (Brizuela et al., 2021) en el que presentamos el caso de un niño en educación infantil (5 años), y nos concentramos en los datos de sus entrevistas individuales a lo largo de un experimento de enseñanza en el que participó durante unos dos meses.

En la primera entrevista individual con Max, que tuvo lugar antes de que comenzara el experimento de enseñanza en su salón de clase en una escuela pública en el noreste de Estados Unidos, la entrevistadora y Max trabajaron sobre la relación entre cantidades de perros y cantidades de narices. La entrevistadora dibujó una línea vertical y otra horizontal para documentar distintos pares de valores (ver Figura 2, izquierda). Max fácilmente pudo decir que si hay 1 perro, hay 1 nariz; si hay 2 perros, hay 2 narices; y así sucesivamente para los distintos pares hasta 6. En ese momento la entrevistadora preguntó a Max qué mostraba cada columna en la tabla y él señaló su dibujo de un perro para el lado izquierdo y respondió verbalmente “cuántas narices” para la columna derecha. Sin embargo, cuando la entrevistadora le preguntó a Max si veía algún patrón en los números en la tabla, Max respondió que los números eran los mismos, haciendo un gesto horizontal a lo largo de cada fila de la tabla (ver Figura 2, izquierda):

Entrevistadora (E): ¿Ves alguna relación aquí? ¿Algo que esté diciendo que esté pasando, algún patrón en estos números? Cuéntame sobre ellos.

Max (M): [Mueve el lápiz a lo largo de cada fila.]

E: ¿Qué significa eso?

M: Son iguales...

E: ¿Son iguales?

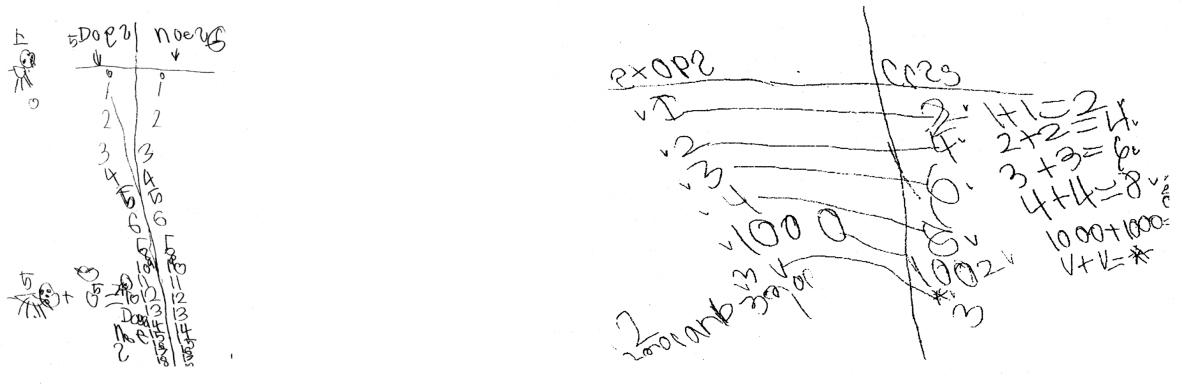
M: …números.

Argumentamos que la tabla actuó como una herramienta representacional que facilitó para Max la generalización entre las cantidades. Visualmente, la tabla despliega los pares de datos y se muestra explícitamente cómo los pares de cantidades de perros y de narices son siempre los mismos.

Después de 16 sesiones de trabajo con nosotros en el experimento de enseñanza, en la entrevista final Max empezó a dibujar una tabla inmediatamente, solo, tan pronto como escuchó el escenario del problema (ver Figura 2, derecha).

E: En la primera parada, [el tren] recoge dos vagones. En la segunda parada, recoge dos vagones más. En la tercera parada, recoge dos vagones más y sigue así. Entonces, en la parada número uno, ¿cuántos vagones recoge?

Figura 2. Izquierda: la primera tabla de Max en la primera entrevista (Brizuela et al., 2021, p. 179). Derecha: la tabla de Max en la entrevista final (Brizuela et al., 2021, p. 184).



Max primero dibujó una línea vertical y luego una línea horizontal para dividir el espacio. Luego, escribió "paradas" (*stops* en inglés) en el lado izquierdo y "vagones" (*cars* en inglés) en el lado derecho (ver Figura 2, derecha). Max se refirió a "número de paradas" y "número de vagones" a lo largo de la entrevista, y entendemos su referencia a "paradas" y "vagones" como abreviaturas de cantidades, no de objetos (Blanton et al., 2017).

E: Bien, aunque no tengo suficientes vagones aquí para mostrarte [usando un tren de juguete], supongamos que se detuvo cuatro veces. ¿Puedes decirme cuántos vagones tendría después de cuatro paradas?

M: [Escribe 4 en la columna de la izquierda y 8 en la columna de la derecha.]

E: Bueno, cuéntame sobre esto.

M: Uno, dos; dos, cuatro; tres, seis; cuatro, ocho [señalando cada una de las filas en la tabla].

En resumen, durante la primera entrevista, Max recibió apoyo considerable por parte de la entrevistadora para construir su tabla. Cuando llegó el momento de la entrevista final, 8 semanas más tarde, Max construyó una tabla por su cuenta. Además, en esta entrevista, Max pudo escribir una ecuación para representar las relaciones funcionales usando notación algebraica, y articuló las relaciones generales, describiéndolas como "duplicación". Argumentamos que Max utilizó la representación tabular que él construyó para representar la función de manera general, usando una ecuación que incluía notación algebraica para expresar la generalización.

Gráficos de coordenadas cartesianos

Por último, aquí comparto datos inéditos sobre una investigación en curso en la cual incluimos gráficos en el trabajo con niños en infantil y primer y segundo curso de primaria. No hemos encontrado estudios que trabajen los gráficos con niños de 5-7 años. Schliemann et al. (2013) usaron gráficos con niños de 8-10 años en su trabajo sobre funciones y proporcionaron ejemplos de sus comprensiones. En su trabajo, comenzaron el experimento de enseñanza con rectas numéricas en tercer curso de primaria (8 años) e introdujeron el espacio cartesiano a niños de cuarto curso de primaria representando primero las relaciones en rectas numéricas paralelas y luego colocándolas en ángulos rectos para construir el plano cartesiano, con un fuerte enfoque en los intervalos a lo largo de la recta numérica y a lo largo de los ejes del espacio cartesiano. Después de tres años de trabajo con estudiantes que habían sido introducidos al espacio cartesiano de esta manera, los estudiantes que pertenecían al grupo de intervención del experimento de enseñanza se desempeñaron tan bien como sus compañeros en el grupo control en la identificación de puntos en el plano, pero mostraron una comprensión significativamente mejor de los elementos que involucran representaciones funcionales lineales en el espacio cartesiano. La intervención que

describen Schliemann et al. (2013) ayudó a los niños a explorar cuestiones de covariación y promovió la comprensión de las relaciones entre los intervalos a lo largo de los dos ejes en el espacio cartesiano y, aunque la mayoría de los niños preferían concentrarse en los puntos en el gráfico, en lugar de los intervalos a lo largo de la recta numérica, podían usar un enfoque de un punto a otro punto para determinar cómo un intervalo en un eje corresponde a un intervalo en el otro. Al concluir la intervención al finalizar quinto curso de primaria, los estudiantes del grupo de intervención superaron a los estudiantes del grupo control en preguntas de la evaluación escrita que requerían la consideración de intervalos y en la interpretación y comparación de gráficos de funciones lineales.

Recogimos los datos del estudio en curso en una escuela en el noreste de Estados Unidos, en un salón de segundo curso de primaria (en el cual los niños tienen aproximadamente 7 años). En los siguientes ejemplos me enfoco en cómo Mia, una de las niñas que entrevistamos individualmente, usó los gráficos para generalizar relaciones funcionales. En la primera entrevista individual con Mia, antes de que comenzara el experimento de enseñanza en su curso, se le presentó una situación en la cual se consideraba la cantidad de pájaros y la cantidad de alas de pájaro.

Entrevistadora 1 (E1): Vamos a hablar de pájaros. Digamos que tengo un pájaro. ¿Cómo podríamos saber cuántas alas tenemos en total?

Mia (M): Dos.

De ahí, la entrevistadora presentó los casos de dos, tres, cuatro y cinco pájaros y Mia rápidamente pudo responder cuántas alas había en total. Luego, se le pidió que organizara los pares de valores en una tabla (ver Figura 3, izquierda).

Figura 3. Trabajo de Mia en la primera entrevista.



Al finalizar la tabla, la entrevistadora le preguntó sobre la relación entre la cantidad de pájaros y la cantidad de alas, buscando que Mia intentara generalizar la relación. Mia contestó de la siguiente manera: “Porque estamos contando de dos en dos, porque en cada pájaro hay dos alas. Así que estamos contando de dos en dos”. Aunque no podemos recurrir a ningún argumento de tipo causal, fue luego del trabajo con la tabla y de su interacción con la representación tabular que Mia generalizó la relación entre la cantidad de pájaros y la cantidad de alas. Luego, la entrevistadora le mostró a Mia el gráfico que se muestra en la Figura 3 (derecha) y las dos tuvieron el siguiente diálogo:

E1: ¿Habías visto esto antes?

M: Nunca en mi vida.

E1: Bien.

M: Sólo como el sexto curso o algo así. … Creo que, como, creo que los estudiantes de séptimo curso hacen esto.

E1: Sí, creo que guardan esto para la secundaria. Hablemos de ello un poco.

La entrevistadora continuó con el diálogo con Mia de la siguiente manera:

E1: ¿Puedes decirme por qué estos puntos están en el gráfico?

M: ¿Qué puntos?

E1: Estos.

M: Ah, los puntos.

E1: Puntos. Sí, llamamos a esos puntos. ¿Puedes decirme por qué están ahí?

M: No sé.

E1: ¿O qué significan?

M: No sé, ¿por qué no lo hacemos (ininteligible) en secundaria? Todavía estoy en segundo grado.

La entrevista parecía haber terminado, pero una segunda investigadora intervino en este momento:

Entrevistadora 2 (E2): Mia qué te parece-, mira-, si miras el primer punto, el primer punto- [E1 señala el punto 1;2].

M: Es un número 2. Está en la línea número 2. Y está en la línea número 1 en la parte inferior.

E2: ¿Qué crees que significan el 1 y el 2?

M: Tres. No sé.

E2: Entonces, ¿crees que tomas, crees que tomas el 1 y el 2 y los sumas?

M: Sí. Espera, ¡eso era como la tabla! [Señala la tabla en la Figura 3.] ¡La tabla de allí! Estamos sumando otro 1 al 2. [E1 le entrega la tabla.] Es como lo hicimos aquí. 1 es igual a 2 [apunta a la tabla y señala la primera fila]. 1 es igual a 2 [señala el gráfico y el punto 1;2]… ¡Es como el gráfico! ¡Estos son como el gráfico! [Apunta a ambos pedazos de papel.]

Mia estaba realmente sorprendida y emocionada al darse cuenta de las conexiones entre la tabla y el gráfico. La entrevista continuó del siguiente modo:

E1: Detengámonos y analicemos uno de estos puntos [apuntando al 5;10 en el gráfico, Figura 3 derecha]. ¿Puedes mostrarme dónde está en la tabla?

M: Número 10 y eso es 5 [usando el gráfico]. El 5 está justo aquí [señala la tabla], hasta el 10.

E1: Número 10 es 5. ¿De qué... de qué estamos hablando? ¿5 que? ¿Y 10 qué?

M: Bueno, si esto dice alas de pájaro, entonces eso equivaldrá a 10 alas de pájaro. Y esto dice número de pájaros, entonces serán 5 pájaros. [Leyendo las leyendas en la tabla.]

E1: Está bien.

M: Es como en el gráfico [señala el gráfico].

E1: Sí, lo veo, ahora que me lo señalas, lo veo-

M: Es sólo-, es así, pero en una versión diferente-

M: Porque, porque estamos haciendo esto: en cada pájaro, hay 2 alas [señala la tabla]… En cada pájaro, no hay 1 ala. …

Aquí, al conectar los datos en la tabla con los datos en el gráfico, Mia volvió a expresar la generalización sobre la relación entre cantidad de pájaros y cantidad de alas: “en cada pájaro hay 2 alas, en cada pájaro no hay 1 ala”. Luego, la entrevistadora y Mia continuaron mirando otros pares de valores y pasaron a enfocarse en el par 7;14. Mia pasó a explicarle a la entrevistadora que había que duplicar el número de pájaros para saber el número de alas. La entrevista siguió del siguiente modo:

E1: ¿Por qué se duplican los números?

M: ¿Números dobles?

E1: ¿Por qué duplicamos?

M: Estamos duplicando porque... no sé.

E1: Este dibujo [señalando un dibujo de un pájaro] te recuerda quizás, ¿por qué estamos duplicando?

M: Tal vez porque hay 2 alas en cada pájaro, así que nos estamos saltando, estamos saltando los números impares a los números pares.

En la segunda entrevista con Mia, ella afianzó sus comprensiones sobre los gráficos. Mia compartió con la entrevistadora, por ejemplo, que el gráfico: "Es exactamente lo mismo que la tabla, pero se muestra de una manera diferente". También compartió que veía un patrón en el gráfico a la derecha de la Figura 4: "Veo un patrón. Es un doble, tal como dijimos aquí [señala la tabla a la izquierda de la Figura 4]. El número de pájaros y alas de pájaro siempre será el doble [lee su regla]". Luego, Mia observó que había notado lo siguiente en el gráfico:

M: Es 2, 2, 2, 2 [señalando las coordenadas de cada punto en el gráfico a la derecha de la Figura 4]. Sigue subiendo de a dos.

E1: ¿Qué sube en 2?

M: Sigue siendo un espacio de un 2 [indicando a lo largo de las líneas y el eje vertical, *y*].

E1: Y que-

M: En los bloques. Y se hace más y más y más grande, hasta el 14 y el 7.

E1: ¿Crees que siempre crecerá de a 2?

M: [Asiente.]

E1: ¿Y por qué siempre crecerá de a 2?

M: Porque estamos contando de 2 en 2.

E1: ¿Y por qué contamos de 2 en 2?

M: Porque los pájaros tienen 2 alas.

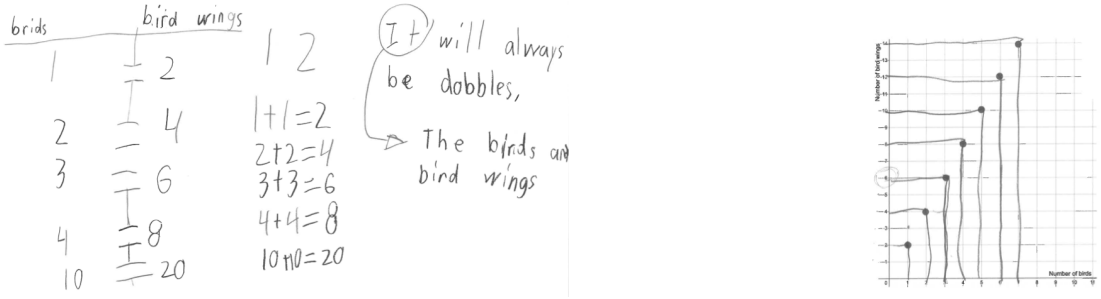
Finalmente, la entrevistadora y Mia acabaron la entrevista del siguiente modo:

E1: ¿Cuál te gusta más [la tabla o el gráfico]?

M: Este [señala el gráfico a la derecha de la Figura 4) porque es igual a este [señala la tabla a la izquierda de la Figura 4]. Hicimos esto [la tabla] mucho tiempo. Quiero probar-, me gusta probar algunas cosas que son nuevas.

Similar a lo que indiqué sobre el uso de la notación algebraica y de las tablas, Mia pudo generalizar con el gráfico como representación algebraica de la relación $y = 2x$. El uso que hizo Mia de los gráficos indica que están a su alcance y que, como ejemplo de la práctica algebraica de la representación, pueden ser utilizados por los niños en los primeros cursos de escolaridad primaria para generalizar relaciones funcionales.

Figura 4. Trabajo de Mia en la segunda entrevista.



Discusión y Conclusiones

A través de los datos compartidos en este trabajo mi objetivo ha sido enfatizar la relevancia e importancia de enfocarnos en el desarrollo de las prácticas algebraicas en niños en los primeros cursos de educación primaria. Especial y particularmente en las prácticas algebraicas de la representación y la generalización. Tal como lo indicaron en sus trabajos Blanton et al. (2011) y Kaput (2008), estas prácticas están interconectadas.

Las tres representaciones en las que me enfoqué en este trabajo—la notación algebraica, las tablas y los gráficos—han sido consideradas por muchos autores como dominio de los grados superiores de la educación primaria o incluso como dominio de la educación secundaria. Sin embargo, en este trabajo enfaticé la importancia de brindar acceso a los niños a estas representaciones lo más pronto que sea posible. Utilizando el ejemplo paralelo del aprendizaje de la lengua o lengua extranjera como hemos hecho en trabajos anteriores (e.g., Brizuela y Earnest, 2008), cuando consideramos el aprendizaje de la lengua o de una lengua extranjera, jamás nos atreveríamos a pensar en postergar el aprendizaje o a esperar hasta que los niños estén "listos". Imaginen el furor que podría llegar a causar que planteáramos esperar a enseñar a los niños a hablar su primera lengua, o una segunda lengua, hasta que estén listos, y negarles acceso a dichas lenguas hasta ese momento. Sin embargo, esa es la actitud que tomamos cuando consideramos el acceso que damos a los niños a las representaciones que están en el corazón del álgebra como la notación algebraica, las tablas y los gráficos. Como indicaron Cusi et al. (2011), de la misma manera que fomentamos el balbuceo en los niños cuando están aprendiendo a hablar, así debemos fomentar su balbuceo algebraico con distintas representaciones algebraicas.

En nuestros próximos trabajos planeamos detallar las trayectorias de aprendizaje sobre tablas y sobre gráficos en niños en estos primeros cursos de primaria, similar a lo que hemos hecho con la notación algebraica (e.g., Blanton et al., 2017; Ventura et al., 2021). Nuestro objetivo es mostrar de qué son capaces los niños, así como su proceso gradual de aprendizaje. O sea, sus primeros balbuceos con las tablas y los gráficos.

En conclusión, no solo debemos enfocarnos en el contenido matemático que incluimos en la escolaridad de nuestros niños, sino también en su desarrollo de prácticas algebraicas. El desarrollo de hábitos mentales a través de las prácticas es tan importante como el aprendizaje del contenido. Asimismo, tal como ciertos contenidos algebraicos como las funciones pueden pensarse como conectando la totalidad de la escolaridad de los niños, también las prácticas algebraicas como la representación y la generalización, como también la justificación y el razonamiento, pueden servir como hilos conectores para la educación matemática de los niños, desde los primeros grados de su escolaridad.

Agradecimiento

Las investigaciones fueron llevadas a cabo con el apoyo de DRK-12 DRL #1154355 y DRK-12 #2201095 de la National Science Foundation de Estados Unidos. Agradezco a Susanne Strachota, Sophia Raymond, Mary Caddle, Maria Blanton y Angela Gardiner, colaboradoras en el proyecto DRK-12 #2201095.

Referencias

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, Transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*, 181–202. DOI: 10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as route into algebra in elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5–23). Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I. y Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal, 56*(5), 1930–1972. DOI: 10.3102/0002831219832301

Brizuela, B. M. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE Nueva Época, 21*, 37–43. https://doi.org/10.35305/revistairice.v21i21.506

Brizuela, B. M., Blanton, M. y Kim, Y. (2021). A Kindergarten student's uses and understandings of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults: teaching and learning from an interdisciplinary approach* (pp. 171-190). Springer International Publishing.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30. DOI: 10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 273-301). Lawrence Erlbaum and Associates.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309–319. DOI: 10.1016/S0732-3123(02)00076-7

Brizuela, B. M., Martinez, M. V. y Cayton-Hodges, G. A. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education/Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (REDIMAT), 2*(2), 209-241. DOI: https://doi.org/10.4471/redimat.2013.28

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 669–706). Information Age Publishing.

Cooper, T. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations, and theory. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 187-214). Springer.

Cusi, A., Malara, N. A. y Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teachers to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 483-510). Springer.

Dougherty, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389-412). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Dougherty, B. J. (2010). A DavydovaApproach to early mathematics. En Z. Usiskin, K. Andersen y N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in algebra and geometry* (pp. 63–69). Information Age Publishing.

Ehrenberg, A. S. C. (1986). Reading a table: An example. *Applied Statistics, 35*(3), 237–244.

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. En G. V. Barneveld y H. Krabbendam (Eds.), *Proceedings of conference on functions* (pp. 7-20). National Institute for Curriculum Development.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones f(x)=3x y f(x)=5x en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269–277). SEIEM.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hamley, H. R. (1934). *Relational and functional thinking in mathematics: The 9th Yearbook of NCTM*. Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kaput, J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-56). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kaput, J., Carraher, D. y Blanton, M. (Eds). (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 259-276). Springer.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 102-119). Murray.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133–148). Sense Publishing.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Morris, A. K. (2009). Representations that enable children to engage in deductive arguments. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), Teac*hing and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 87-101). Routledge.

Moses, R. y Cobb, C. (2001). *Radical equations: Civil rights from Mississippi to the algebra project*. Beacon Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Council of Chief State School Officers. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Saxe, G. B. (1999). Cognition, development, and cultural practices. *New Directions for Child and Adolescent Development, 83*, 19-35. DOI: 10.1002/cd.23219998304

Saxe, G. B. (2005). Practices of quantification from a sociocultural perspective. En A. Demetriou y A. Raftopoulos (Eds.), *Cognitive developmental change: Theories, models, and measurement* (pp. 241–263). Cambridge University Press.

Saxe, G. B. y Esmonde, I. (2005). Studying cognition in flux: A historical treatment of fu in the shifting structure of oksapmin mathematics. *Mind, Culture, and Activity, 12*(3-4), 171-225. DOI: 10.1207/s15327884mca123&4_2

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective* (pp. 71–86). Taylor & Francis Group.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. En M. van der H.-P. (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the PME* (vol. 4, pp. 145-152). Freudenthal Institute.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. En Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. y Robert, A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 103-118). La Pensée Sauvage.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. y Caddle, M. (2013). From seeing points to seeing intervals in number lines and graphs. En B. Brizuela y B. Gravel (Eds.) *Show me what you know: Exploring representations across STEM disciplines* (pp. 223-243). Teachers College Press.

Schwartz, J. (1990). Getting students to function in and with algebra. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Mathematics Associations of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, K. E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Erlbaum.

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206–223. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.08.001

Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Primeras experiencias con una tabla en segundo de Educación Primaria. Aproximación funcional al pensamiento algebraico. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 603 – 611). SEIEM.

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*, 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M. Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' understanding of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *Journal of Mathematical Behavior, 62*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

Seminario de investigación II: Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos

Coordina: Dr. Luis José Rodríguez Muñiz (Universidad de Oviedo)

Ponentes:

- Dr. Alf Coles (Universidad de Bristoll): *Hacia una formación comunitaria de profesores de matemáticas.*
- Dra. Maria Melone (Universidad de Huelva): *Características de la investigación cualitativa y sus implicaciones en la investigación en Educación Matemática.*
- Dra. Neusa Branco (Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém): *Prácticas con tecnología en la formación del profesorado de matemáticas para afrontar nuevas demandas curriculares.*
- Dr. Pablo Beltrán-Pellicer (Universidad de Zaragoza): *Explorando el hueco entre el currículo pretendido y el implementado: percepciones de docentes en formación y en activo.*

INTRODUCTION TO THE RESEARCH WORKSHOP II: CHALLENGES OF TEACHER TRAINING IN THE FACE OF THE DEMANDS OF THE NEW CURRICULA

Introducción al seminario de investigación II: retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos

Rodríguez-Muñiz, L. J.

Universidad de Oviedo

Resumen

Este seminario de investigación indaga sobre la respuesta que la investigación en educación matemática está dando o puede dar a los retos que plantean los cambios curriculares en la formación del profesorado. Si bien la situación es de máxima actualidad en España, la mayor parte de los currículos escolares a nivel mundial están evolucionando hacia una matemática donde los procesos matemáticos y la comprensión conceptual priman sobre lo procedimental. En este contexto, surge la exigencia de que el profesorado transforme la práctica docente de acuerdo con los nuevos planteamientos curriculares. En este seminario veremos ejemplos de cuatro países (España, Italia, Portugal y el Reino Unido—concretamente, Inglaterra) sobre cómo llevar a cabo esta transferencia de la investigación en educación matemática a la formación inicial y continua del profesorado haciéndolas coherentes con las nuevas exigencias curriculares.

Palabras clave: *currículo de matemáticas, formación del profesorado, investigación en educación matemática.*

Abstract

This research workshop investigates the response that research in mathematics education is providing or can provide to the challenges posed by curricular changes in teacher training. While the situation is highly relevant in Spain, most school curricula worldwide are evolving towards a mathematics education where mathematical processes and conceptual understanding take precedence over procedures. In this context, there is a demand for teachers to transform their teaching practices in accordance with the new curricular approaches. In this seminar, we will examine examples from four countries (Spain, Italy, Portugal, and the United Kingdom—specifically, England) of how this transfer of research in mathematics education to initial and ongoing teacher training can be carried out, ensuring coherence with the new curricular requirements. These examples will illustrate effective strategies and practices to address the aforementioned challenges.

Keywords: *mathematics curriculum, research in mathematics education, teacher training.*

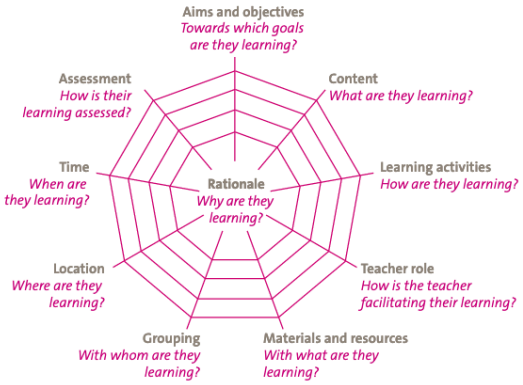
INTRODUCTION

The original Latin noun *curriculum* was used to denote both a type of carriage and the path or road it travelled on, hence the origin of the meaning of curriculum as a learning journey. Although the curriculum is an institutional proposal designed to plan and implement (mathematical) education in a specific educational stage (Rico, 1997), the Spanish educational tradition has frequently identified curriculum with the conceptual dimension, specifically contents, and even established the identity between curriculum and study plan. However, mathematics curricula increasingly include not only contents, but processes descriptions, methodological guidelines, assessment indications, and tips about the use of resources, particularly, technology. In this sense, following van den Akker (2013), we prefer the meaning of curriculum as a learning plan or learning journey. This meaning allows us

Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 61–68). SEIEM.

to appreciate different levels of concreteness (van den Akker, 2003): supra (e.g., international assessments frameworks), macro (national or regional mathematics curricula), meso (mathematics curriculum in a certain school), micro (classroom-level) and nano (personal mathematics learning journey for one student). When we talk about new curricula, the novelty uses to come in a top-down process, but we must keep in mind that changes should reach the nano level. This global view of the curriculum reveals the true magnitude of the challenge of adapting teacher training to curricular changes, that should cover the different dimensions of the curriculum as shown in Figure 1, and prevent from *syllabusitis*, a *disease* that 'puts the teachers in a position where they struggle to cover the prescribed subject matter' (Højgaard & Sølberg, 2019, p. 3).

Figure 1. The curricular spider web (van den Akker, 2013, p. 59).



One of the research workshops at the last SEIEM Symposium specifically focused on the development of the new mathematics curriculum (Moreno, 2022), analysing the case of Portugal (Canavarro, 2022) and experiences in an integrated STEAM approach (Diego-Mantecón et al., 2022), as well as an initial study on the relationship between the new Spanish curriculum and mathematics teacher training (Contreras, 2022). The research perspective on mathematics curriculum development has also been the subject of a recent book by SEIEM (Blanco Nieto et al., 2022). In this workshop, our aim is to present and analyse various approaches and strategies for transferring educational research to mathematics teacher training, addressing the needs arising from curricular changes. The recent book edited by Shimizu and Vithal (2023) provides a synthesis of different factors that influence the successful implementation of a mathematics curricular reform, considering all levels from nano to supra, with teacher training playing a crucial role. Thus, in this workshop, we delve deeper into this analysis by focusing on three experiences that encompass both initial and ongoing teacher training, examining their relationship with curricular reform and exploring the role of research in mathematics education within these processes.

THE ROLE OF THEORETICAL MODELS

One of the emergent themes from the three communications in the workshop is the role of theoretical models of mathematical learning and teachers' knowledge in shaping reflections on the organization of teacher training. Coles et al. (2023a) explore how different theoretical perspectives influence the design of teacher training programs in English universities. For example, the University of Cambridge adopts the Knowledge Quartet framework (Rowland et al., 2005) as the conceptual basis for their training, while the University of Oxford emphasizes the notion of practical theorizing (McIntyre, 1995). In contrast, at the University of Bristol, Coles, Heliwell, and Malkin's working institution, they draw on enactivism (Reid, 2014; Varela et al., 1993) to inform the organization of their teacher training program.

To the best of my knowledge, this type of institutional commitment to a specific theoretical approach is rarely found in Italian or Spanish universities, where there is a tendency to be more fragmented

among different teaching departments, and sometimes even within them. However, the influence of teacher knowledge models can be found in the communications from Spain and Italy.

In the case of Italy (Mellone et al., 2023), there is explicit mention of the MTSK model (Carrillo-Yañez et al., 2018), which is enriched with the paradigm of Interpretative Knowledge (Mellone et al., 2021; Ribeiro et al., 2016) when designing tasks for initial teacher training. Mellone et al. (2023) also highlight the role of Design-Based Research (Bakker & van Eerde, 2015) in the core of PerContare and PerContarePRO projects, which constitute a large-scale continuous teacher training program in Italy.

In Branco's (2023) approach to the use of technology in Portugal, no explicit theoretical framework is mentioned. However, there is an underlying presence of the distinction between content and pedagogical content knowledge in the sense of Shulman (1986). Additionally, the prominent role of technology as a catalyst for teachers' knowledge bears a relation to other non-mathematical models that consider technology in a leading role as another knowledge subdomain, such as T-PACK (Koehler & Mishra, 2009).

On the other hand, apart from the explicit reference to the DMKC model (Godino et al., 2016), in Beltrán-Pellicer et al. (2023) there is another mention to teachers' knowledge of curriculum, which also aligns with the Knowledge of Mathematics Learning Standards in the MTSK model or the Knowledge of Content and Curriculum in the MKT model (Ball et al., 2008). The research documented by Beltrán-Pellicer et al. (2023) focuses on curriculum as a subject of study itself, enhancing teachers' knowledge in various facets, as depicted in Figure 1. It is worth noting the role of learning activities, teachers' role, and materials and resources in the Aragonese curriculum, influenced by the research group in Mathematics Education from the University of Zaragoza (to which Beltrán-Pellicer, Martínez-Juste, and Muñoz-Escolano belong), which significantly contributed to the detailed and comprehensive exposition of methodological guidelines (linked to specific contents) in the regional concretion of the recent Spanish education law. This has been, in my opinion, a clear example of what we mean when we talk about research transfer.

Beyond the (implicit or explicit) considered model, the three papers highlight the relevance of the necessary conscious practice, illuminated in the light of the mathematics curriculum. Thus, elements from different theoretical frameworks, such as enactivist awareness, interpretive knowledge, or deep reflection on all dimensions of the curriculum, are serving, under different paradigms, the same purpose: developing a professional vision of teaching. These relationships lead us to wonder, as Llinares (2020) did, what is the connection of conscious awareness with other paradigms, as noticing, or how the development of the professional vision of students' task and classroom activity is framed within the MTSK and IK (Mellone et al., 2023) model; following M. A. Montes (intervention in TWG20, during CERME11, February 2019): is MTSK + IK = Noticing? Furthermore, as suggested by J. M. Muñoz-Escolano (personal communication): what is the knowledge to describe a competence-based approach as Noticing?

From examining the models in England and Italy, another question that arises is the role of subject matter knowledge (SMK) and pedagogical-content knowledge (PCK) when considering different approaches such as focusing on learning to teach and analyzing students' difficulties and errors. In my opinion, the model presented in Coles et al. (2023a) blurs the boundaries between SMK and PCK, which poses a challenge for training approaches that, by historical tradition, originally subordinated PCK to SMK, as it is the case in Italy or Spain.

Turning our attention back to the Spanish case, even though explicit institutional theoretical commitments may be lacking, it seems clear initial teacher training programs are strongly influenced by practical theorising (McIntyre, 1995), often falling into an unintentional dichotomy, projecting a separation between theory and practice among prospective teachers. However, despite this lack of institutional commitment, there is evidence in the initial training programs of mathematics and its

didactics courses regarding their design based on different theoretical or praxeological approaches, as, for instance, noticing (Llinares, 2012; Llinares & Fernández, 2021), DMKC (Godino et al., 2016), didactic analysis in mathematics education (Rico et al., 2013; Ruiz-Hidalgo et al., 2019), lesson study (García et al., 2019), or MTSK (Montes et al., 2019). There also arises a need, when comparing the approaches of Spain and Portugal, to consider what computational thinking is, how and why it has been included in the mathematics curriculum in both countries, or how it relates to mathematical thinking, and where its knowledge could fit within the models of mathematics teacher's knowledge: as an example, in Branco (2023) it is established a clear relationship to early algebra, so that analyses like the one in Pincheira and Alsina (2021) make sense.

CONTEXTUAL DIFFERENCES

In addition to differences in design approaches, we also encounter variations arising from the context in which the three papers of this seminar unfold. The theoretical approach to teacher training design, itself is not, and cannot be, disconnected from the cultural context in which it operates. Therefore, in contrast to the Bristol model, which emphasizes theoretical-practical embedding, the Spanish and Italian models of initial training are more rooted in a university tradition that placed greater emphasis on subject matter knowledge. This cultural context shapes and influences the design of teacher training programs, highlighting the different priorities and approaches in each country.

But contextual differences go further than design. For example, in Mellone et al. (2023), we observe how scientific societies (such as UMI, in this case, through its CIIM) have spearheaded various nationwide initiatives in continuous teacher training. While there are scientific societies in Spain that promote in-service training, it is important to acknowledge and commend the commendable efforts of professional societies of mathematics teachers who play a leading role in offering continuous teacher training activities (Beltrán-Pellicer et al., 2023). This fact highlights the commitment and dedication of these professional societies to support and improve in-service teacher training, although this commendable set of activities may result in a slight loss of direct connection with research in mathematics education. On the other hand, in Spain, several members of scientific societies such as SEIEM or RSME are actively engaged in informal activities for continuous teacher training through social networks, especially Twitter (e.g., Alsina & Rodríguez-Muñiz, 2021). This phenomenon is comparable to the situation in the United Kingdom or the USA, but not so much to Italy (Carpenter et al., 2022). This use of social media is generating highly productive debates and enriching discussions regarding the implementation of the new Spanish curriculum, enabling active teachers to interact with mathematics education researchers.

In another recent work, Coles et al. (2023b) emphasized the role of assessment in mathematics curricular reforms from an international perspective. In the case of Spain, assessment has been a prominent issue in previous curricular reforms and continues to be a challenge with the upcoming external assessment for Baccalaureate/High School students entering university, as noted by Beltrán-Pellicer et al. (2023). The influence of the Spanish University Entrance Exams (EBAU or EvAU, in the Spanish acronym) extends to impact teachers' practices, implemented curriculum, and the selection of resources, thereby constraining the intended curriculum and undermining the expertise of mathematics teachers, as described by Rodríguez-Muñiz et al. (2016) as "washback". This difference is likely significant when compared to Italy, where there is a stronger culture of external assessment, primarily due to INVALSI (e.g., Bolondi, 2021; Coles et al., 2023b; Vaccaro et al., 2022). Despite some discrepancies, Italy and Portugal demonstrate a better alignment between assessment and the curricular perspective compared to Spain.

Differences are also observed in the articulation of a novel element in the curriculum, such as computational thinking. While in Spain it has been introduced without providing a clear explanation of what is meant by the term, even confusing it with educational robotics (see, for example, Palop et al., 2022), in Portugal, based on Branco (2023), it can be observed how a more detailed analysis has

been made of the dimensions that are considered when talking about computational thinking in school, which results in a more coherent fit with the literature in mathematics education by linking it, for example, to pattern recognition and generalization (e.g., Pinto & Cañadas, 2021).

I remark another difference that, although not explicit, arises implicitly when comparing the presented continuous and initial teacher training programs in England and Italy with the situation we know in Spain: the described programs in Coles et al. (2023a) and Mellone et al. (2023) frequently utilize peer observation, something that we also had the opportunity to see in Portugal the last year (Canavarro, 2022). These types of observation practices are not as common in the initial and continuous teacher training in mathematics in Spain. Although there are experiences (we pointed out lesson study-based programs as García et al., 2019), it would be very interesting to promote peer observation, either through live observation or through video recordings. This can be implemented on a large scale (as recently highlighted in Rodríguez-Muñiz et al., 2023) or through platforms that showcase real mathematics classroom fragments and observation guidelines carried out by groups of active teachers in programs internationally supported by the OECD (Muñiz-Rodríguez et al., 2023), so that they can be embedded in our initial or continuous training programs.

There is another international contextual difference I would like to highlight: the flexibility introduced in the organization of training at the University of Bristol, where there are alternating periods of longer and shorter durations spent at both the university and schools. Although this is partially implemented in some master's degree courses in Spain, such as the Catalonian master's program for secondary mathematics teachers, it is not common across all programs. While the enactivist approach serves as the foundation, I believe there are also contextual nuances in the ability of universities and schools to organize internships in a more flexible manner, which is not typically seen in our bachelor's degree programs for early childhood or primary education.

EMERGING QUESTIONS

To conclude this introduction to the workshop, I would like to highlight other emerging questions that could be engaging for discussion, during or after the presentation:

- What are the specific challenges faced in the (initial and/or continuous) training process of mathematics teachers, when new curricular demands are introduced at the national or international level?
- How can research in mathematics education help to identify good practices in teacher training programs that can be applied globally to support teachers in meeting new curricular demands?
- How can research in mathematics education inform curricular reforms at the national and international level to better prepare mathematics teachers for new curricular demands?
- What are the key factors that determine the success of mathematics teacher training programs in the face of new curricular demands?
- How can teacher training programs be designed to address the needs of mathematics teachers who are resistant to change in response to new curricular demands?

References

Alsina, A., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Hilos de estadística y probabilidad en Twitter: una nueva herramienta para el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa*, *23*(4), 21–53. https://doi.org/10.23925/983-3156.2021v23i4p001-007

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 429–466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S., & Muñoz-Escolano, J. M. (2023). Exploring the gap between intended and enacted curriculum: Perceptions of future and in-service teachers. In C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 97-112). SEIEM.

Blanco Nieto, L., Climent Rodríguez, N., González Astudillo, M. T., Moreno Verdejo, A., Sánchez-Matamoros García, G., de Castro Hernández, C., & Jiménez Gestal, C. (Eds.). (2022). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*. EUG & SEIEM.

Bolondi, G. (2021). What can we learn from large-scale surveys about our students learning of Maths? *Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti-Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, *99*(S1), A4. https://doi.org/10.1478/AAPP.99S1A4

Branco, N. (2023). Practices with technology in mathematics teacher education to face new curricular demands. In C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 89-96). SEIEM.

Canavarro, A. P. (2022). El desarrollo del nuevo currículo en Matemáticas para la Educación Básica en Portugal. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 53–61). SEIEM.

Carpenter, J., Tani, T., Morrison, S., & Keane, J. (2022). Exploring the landscape of educator professional activity on Twitter: an analysis of 16 education-related Twitter hashtags. *Professional Development in Education, 48*(5), 784–805. https://doi.org/10.1080/19415257.2020.1752287

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Coles, A., Helliwell, T., & Malkin, E. (2023a). Towards a communal mathematics teacher education. In C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 69-78). SEIEM.

Coles, A., Rodríguez-Muñiz, L. J., Mok, I. A. C., Ruiz, A., Karsenty, R., Martignone, F., Osta, I., Ferretti, F., & Nguyen Thi Tan, A. (2023b). Teachers, Resources, Assessment Practices: Role and Impact on the Curricular Implementation Process. In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World* (291–322). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_18

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63–79). SEIEM.

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., & Blanco, T. F. (2022). Reflexiones del Open STEAM Group sobre el impacto del enfoque integrado del contenido en el aprendizaje de las matemáticas. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 81–94). SEIEM.

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E. M., & Lerma, A. M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 137–156. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2512

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P.Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285–294). SEIEM.

Højgaard, T., & Sølberg, J. (2019). Competencies and curricula: Danish experiences with a two- dimensional approach. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6–10, 2019)*. Utrecht University & ERME.

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60–70.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53–70. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.18

Llinares, S. (2020). Indicators for the development of noticing. *For the Learning of Mathematics, Monograph 1*, 38–42.

Llinares, S., & Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME, 24*(1), 185–205.

McIntyre, D. (1995). Initial teacher education as practical theorising: A response to Paul Hirst. *British Journal of Educational Studies*, *43*(4), 365–383. https://doi.org/10.1080/00071005.1995.9974045

Mellone, M., Baccaglini-Frank, A., & Di Martino, P. (2023). The needs and the hopes for the secondary teachers' development in Italy. In E. Badillo, P. Ivars & C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 79-87). SEIEM.

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., & Pacelli, T. (2021). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education, 22*(2), 154–167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. In E. Badillo Jiménez, N. Climent Rodríguez, C. Fernández Verdú & M. T. González Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 157–176). Ediciones Universidad de Salamanca.

Moreno, A. (2022). Introducción seminario de investigación II: el desarrollo del nuevo marco curricular en matemáticas. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 49–51). SEIEM.

Muñiz-Rodríguez, L., Ferrando, I., Ramos, P., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). La observación de aula como herramienta de desarrollo profesional: el caso del OCDE Global Teaching Insights. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 67*, 1–12.

Palop B., Santaengracia J. J., & Rodríguez-Muñiz L. J. (2022). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 623). SEIEM.

Pincheira, N. G., & Alsina, À. (2021). Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching Early Algebra: A Systematic Review from the MKT Perspective. *Mathematics, 9*(20), 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*(1), 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Reid, D. A. (2014). The coherence of enactivism and mathematics education research: A case study. *AVANT. The Journal of the Philosophical-Interdisciplinary Vanguard*, *V*(2), 137–172.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpretation students' non-standard reasoning: Insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics, 36*(2), 8–13.

Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Síntesis.

Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (Eds.). (2012). *Análisis didáctico en Educación Matemática.* Comares.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Díaz, P., Mier, V., & Alonso, P. (2016). Washback effect of university entrance exams in applied mathematics to social sciences. *PloS One*, *11*(12), e0167544. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0167544

Rodríguez-Muñiz, L. J., Aguilar-González, A., Alonso-Castaño, M., García-Honrado, I., Lorenzo-Fernández, E., & Muñiz-Rodríguez, L. (2023). Explorando nuevas estrategias de formación del profesorado de matemáticas: un enfoque ampliado del Lesson Study para el desarrollo profesional en la Escuela Andorrana. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 98*(37.2), 71–90. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99131

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores Martínez, P., Ramírez-Uclés, R., & Fernández-Plaza, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación Matemática*, *31*(1), 121–143. https://doi.org/10.24844/EM3101.05

Shimizu, Y., & Vithal, R. (Eds.). (2023). *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Vaccaro, V., Aguilar-González, Á., Bolondi, G., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). An exploratory study on the difficulty perceived by primary school teachers on a mathematics INVALSI item. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12, February 2–5, 2022)*. Free University of Bolzano & ERME.

van den Akker, J. (2003). Curriculum perspectives: An introduction. In J. van den Akker, W. Kuiper & U. Hameyer (Eds.), *Curriculum Landscapes and Trends* (pp. 1–10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1205-7_1

van den Akker, J. (2013). Curriculum perspectives: An introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 52–71). The Netherlands Institute for Curriculum Development.

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1993). *The embodied mind: Cognitive science and human experience* (14 print). MIT Press.

HACIA UNA FORMACIÓN COMUNITARIA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Towards a communal mathematics teacher education

Coles, A., Helliwell, T. y Malkin, E.

University of Bristol, School of Education, UK

Resumen

Este trabajo propone una conceptualización de la formación comunitaria de profesores de matemáticas, relevante para apoyar a los docentes en la adaptación a las nuevas demandas del currículo. Basándose en una teoría enactivista de la cognición, en el trabajo se argumenta la importancia de las nociones de conciencia educativa, análisis deliberativo y subordinación de la enseñanza (de los profesores) al aprendizaje (de los profesores). Estas nociones tienen como objetivo subvertir la supuesta dicotomía entre teoría y práctica en algunas concepciones de la formación docente. Después de describir los elementos centrales de nuestro enfoque, se presentan experiencias de un curso de formación docente en Inglaterra como ejemplo. El trabajo concluye que podría ser necesario contar con una formación docente comunal si nuestro currículo pretende avanzar hacia un enfoque más socioecológico.

Palabras clave: *formación del profesorado de matemáticas; comunitaria; enactivismo; cambio curricular*

Abstract

This paper proposes a conceptualisation of a communal mathematics teacher education, as relevant to supporting teachers adapt to new curriculum demands. Drawing on an enactivist theory of cognition, the paper argues for the salience of the notions: educating awareness, deliberate analysis and subordinating teaching (of teachers) to learning (of teachers). Such notions aim to subvert the perceived binary of a theory-practice divide in some conceptualisations of teacher education. Having described core elements of our approach, experiences from one teacher education course in England are offered, by way of exemplification. The paper concludes that a communal teacher education may be needed if our curriculum is to move towards a more socio-ecological framing.

Keywords: *mathematics teacher education; communal; enactivism; curriculum change*

INTRODUCTION

In this theoretical contribution, we want to propose a conceptualisation of a communal mathematics teacher education, to help think through questions relating to how mathematics teachers can be supported in adapting to new curriculum demands. The context of this paper is our experiences working in England on a one-year postgraduate teacher education course at the University of Bristol. During the course, prospective teachers spend around 2/3rd of their time on placement in a school (where they take responsibility for teaching some classes), and 1/3rd at the university. We are conscious that the UK is unlike some other countries, in that school and university-based elements of teacher education weave together in patterns set by each institution. For example, at Bristol, prospective teachers spend an initial 3 weeks at university, then 3 weeks partly in university and partly in school, then 5 weeks just in school, 2 weeks back at university, then 10 weeks in school, 2 more weeks at university, a final 5 weeks in school and then just under 2 weeks in a final university element.

Coles, A., Helliwell, T. y Malkin, E. (2023). Hacia una formación comunitaria de profesores de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 69–78). SEIEM.

In some conceptualisations of teacher education, school-based, practicum work is viewed as "practice" and university-based work is viewed as "theory" (Burn et al., 2022). Having separated out practice and theory, questions them emerge as to their relationship (e.g., uni-directional or bi-directional). It is commonly found, for example, at the beginning of a teacher education course in England, that prospective teachers act in the classroom in spontaneous ways which are ineffective (Brown & Coles, 2011). At the end of the course, for most of them, they act in the classroom in spontaneous ways which are effective. It seems a valid question to ask what role "theory" has in such development.

To foreshadow the overall argument, we will be suggesting that the separation of theory from practice leads to conceptual tangles that cannot be unravelled. Instead, from an enactivist position, ways of working within mathematics teacher education ("educating awareness", "deliberate analysis" and "subordination", which we will elaborate below) capture how prospective teachers can learn to become effective, in a manner that is sensitive to their needs, particularly during a time of curriculum change, without a separation of theory from practice. We will then argue that, together, these practices constitute a "communal" approach to teacher education and that such an idea is relevant to adaptations needed in face of impending socio-ecological crisis. In considering teacher education in this writing, we have prospective teachers in mind, however, we believe the ideas extend to work with in-service teachers.

In the next section we consider briefly debates around conceptualising teacher learning, which have influenced thinking in England. We then set out the enactivist theory of cognition, which implies a quite different way of thinking about teacher learning, before exemplifying these ideas with examples of ways of working, drawn from the University of Bristol.

CONCEPTUALISING TEACHER EDUCATION

Until relatively recently, in England, the majority of secondary mathematics teachers qualified to become teachers through taking a "Postgraduate Certificate of Education" (PGCE), which is a one-year course. To gain entry onto a PGCE course requires a Bachelor's degree, in mathematics, or a mathematics related subject. There are "Subject Knowledge Enhancement" courses available (up to 28 weeks long) allowing someone with a degree not related to mathematics (but who usually studied and succeeded at mathematics to 18) to work on their subject knowledge and take up a PGCE place to teach mathematics. The PGCE course includes subject specific and general pedagogical components (however, the distinction between didactics and pedagogy is not one that is often used, or well-known, in the UK). The balance of these varies (in Bristol around 2/3rds of university time is subject based, 1/3rd general). We note there are also Bachelor's degrees which lead to a teaching qualification. These are more common at primary than secondary level in England. There are also one-year primary PGCE routes, for those with a degree not relating to the study of education.

In the last five years a variety of different routes into teaching have emerged, but the detail is not of concern to the argument in this paper. PGCE courses were historically based at universities, usually in Schools or Departments of Education. The staff in those Departments were free to set up their courses in whatever way they wanted (with the caveats that the proportion of time in school was set at 2/3rds and that there were inspections every 4 or so years, when the standard of provision was graded and made public). The result of this context was a relatively rich diversity of approaches, in some cases drawing theoretically on researchers from that institution.

For example, at the University of Cambridge, the primary PGCE centred around the knowledge quartet (Rowland, et al., 2005), whose authors taught on the course. At the University of Birmingham, there was a strong influence on the secondary mathematics PGCE from the Science of Education (Gattegno, 2010), driven by staff who had been influenced by working personally with Gattegno (we will be drawing on Gattegno's ideas later in this paper). The Institute of Education, in

London, was known for its "critical" approach to primary and secondary teacher education (White & White, 2022). At the University of Bristol (where we work) a key influence on the secondary PGCE was Stenhouse (1991) and the notion of teachers as researchers (into their own practice); the course for secondary mathematics teachers evolved (influenced by enactivism) in ways we will set out in the next section.

We want to focus here on the University of Oxford, since their conceptualisation is one that both has been re-thought recently (Burn et al., 2022) and, also, offers a contrast (conceptually) to the approach we will be proposing. McIntyre (1995) wrote about the notion of "practical theorising" as the guiding idea behind the Oxford PGCE course. Practical theorising suggests there is a bi-directional influence between theory and practice, in learning to teach. McIntyre argued that what prospective teachers need to do is to take ideas from university (theory) and take what they observe in schools (practice) and, in their own work, find a way of bringing them together. And this work is the work of practical theorising. When these ideas were introduced, teachers in school were seconded to work on the teacher education course and university staff seconded to work in schools. As can be seen in a recent publication (Burn et al., 2022), practical theorising continues to be an idea that drives the practice of teacher educators at Oxford.

Hirst (1990) published a critique of the notion of practical theorising. Two arguments were: (a) that engaging in practical theorising was simply too hard to expect the majority of prospective teachers to be able to do; and (b) that there was a danger of relativism, as there are no established criteria by which to judge competing theories. There is not space to delve into these arguments, but what we want to point out is that Hirst's critique agrees with McIntyre (1995) in the separation of theory and practice. In other words, both theorists take this separation as unquestioned.

One of the reasons for wanting to bring into question the separation of theory from practice is that such a framing seems go along with reports of tensions between school-based and university-based elements of teacher education courses (Todd et al., 2022). Anecdotally, it is a relatively common refrain among teacher educators in England to report on such tensions and a sense that universities can be seen to be advocating for classroom practices (such as group work and discovery) which are impractical to implement in schools. We want to work through whether there might be alternative conceptualisations and whether such ideas might support a teacher education which was not experienced as in tension with work in schools. In order to discuss an alternative, there is a need to set out some of the underlying enactivist theory of cognition and this is the focus of the next section.

AN ENACTIVIST THEORY OF COGNITION

The School of Education at the University of Bristol has been referred to as the "Bristol School" of enactivism in mathematics education (Reid, 2014) and enactivist ideas (Varela et al., 1993) have influenced the design and teaching of the secondary mathematics PGCE course. One key idea is that "knowing is doing, doing is knowing" (Maturana & Varela, 1992, p. 29), in other words, knowing is not associated purely with self-conscious or propositional statements. There is knowing in any unconscious skilful behaviour. In fact, enactivism views unconscious and effective behaviours as a better model for thinking about the nature of cognition in general than more self-conscious, linguistic reflections.

The notion of effective action is made quite precise by Maturana and Varela (1992, p. 29) as meaning to operate in a manner which sustains relationships within a domain of living beings. If my actions allow key relationships to persist, they are effective. Brown and Coles (2000) discuss the complex decision-making required of a teacher. The action in a classroom happens too quickly for deliberation to be of much use. Those authors combined enactivist insights with the proposal of Damasio (2006) that, as humans, we develop somatic markers of our past decisions and actions. Decisions with positive outcomes accrue positive somatic markers and those with negative

outcomes accrue negative somatic markers. According to Damasio, those somatic markers determine what arises in any moment, as a possible action, thereby simplifying the decision-making process. What is not effective does not even arise as a possibility.

We want to recognise that there are now several strands of enactivist thinking. We have drawn on some of its older roots and pointed to just three key ideas (knowing as doing, effective action, somatic markers) out of a great many we could have chosen. For reasons of space and coherence, we have chosen to elaborate just those concepts we use to help think about teacher education.

In terms of those concepts, the issue we are grappling with in this paper could be framed as, how can effective action at university support effective action in school? We very deliberately are not viewing what is learnt in university as theory and what is learnt in school as practice. From an enactivist perspective, the question is, what does a university course need to do, so that what sustains relationships in a university setting (i.e., what makes for effective action) helps to sustain relationships in a school setting? In both settings we conceive of the work as crossing any imagined theory-practice divide.

Having set out, in quite theoretical terms, an enactivist view of cognition and learning, in the next sections we describe three related notions, which draw on enactivism and the writings of Gattegno (2010), whose ideas we elaborate below, and which we take as coherent with enactivism. These notions are: educating awareness; deliberate analysis; and subordinating the teaching of teachers to the learning of teachers. We offer these three sets of ideas in a spirit of inquiry – seeking what resonance they may have with others. All three relate to the non-separation of theory and practice. The notion of educating awareness is, for us, a way of conceptualising learning. Deliberate analysis is a key mechanism for learning (not separating theory and practice) and subordination relates to our roles as teacher educators in setting up contexts for learning where theory and practice are not separated.

Educating awareness

This section draws on the writings of Gattegno (2010). Although Gattegno would not have used the descriptor of being an enactivist, his work has strong links, through his focus on dynamics and actions in learning mathematics. Gattegno (1998) offered insights into human cognition and developed curriculum materials. He had a focus on visible and tangible approaches to learning and, in one of his most famous aphorisms, suggested that *only awareness is educable*. Mason (2002) extended the aphorism to: "only awareness is educable, only emotion is harnessable, only behaviour is trainable" (p.141). It is not straight-forward to pin down what Gattegno meant by awareness. It is worth noting here that Gattegno collaborated with Piaget in the 1950s and was a translator (from French to English) of some of Piaget's writing. "La prise de conscience" is a phrase used by Piaget that can be translated as awareness, and also as "realisation". Mason offers a definition (distilled from Gattegno's writing) of awareness as "that which enables action" (2011, p.12). The non-separation of thought and action or knowing and doing (or theory and practice) is evident in these formulations.

In terms of our concerns in this article, we are interested in how the framing of educating awareness might help us conceptualise our work as mathematics teacher educators, and in particular, in supporting teachers navigate new curriculum demands and the different agenda of university and school settings. If we think about learning to teach in terms of developing more and more layers of awareness about the classroom and about mathematics, then a key question is whether and how, what prospective teachers are becoming aware of in university links to what they are becoming aware of in school. When we, as teacher educators, hear reports about prospective teachers finding university and school messages conflict (e.g., "my university is advocating particular forms of pedagogy that are unrealistic in my school") then this says to us that the aims, in terms of awareness, at both university and school, are similar. In other words, for there to be a conflict or

tension across school and university settings, then the agenda of both places need to be about the same kind of thing (e.g., approaches to teaching particular topics).

Our own approach to this potential dilemma, at the University of Bristol, is that the "content" of university sessions is at a meta-level to the "content" of likely school advice and guidance. What we mean by this is that university sessions are *about* school experiences, i.e., at university, prospective teachers are supported in developing awareness *about* learning to teach and at school they are engaged in the direct process of learning to teach. Or another way of framing this is that in schools, prospective teachers develop awarenesses about teaching and at university they develop awarenesses about awarenesses about teaching. What is significant for us in framing the task of teacher education in the way we have done here, is that teacher education practices can then be relatively stable even through curriculum changes (Brown et al., 2021) – a point we return to in the conclusion.

Deliberate analysis

A second key idea for us is the enactivist notion of *deliberate analysis* (Varela, 1999). Varela discusses deliberate analysis in the context of how experts learn. Varela characterises the behaviour of experts and novices as involving spontaneous actions, undertaking without deliberation. The difference, however, is that for the expert, those spontaneous actions can be reflected on and deconstructed, to get back to the "intelligent awareness" which led to that action, whereas, typically for the novice, it is not possible to access the reasons for particular actions. The link between deliberate analysis and educating awareness is apparent from this definition.

In Brown and Coles (2011), the authors describe how deliberate analysis can be used in the process of learning to become a mathematics teacher – as a way of learning from the very start of a PGCE course. In other words, engaging in deliberate analysis is a way for novices to learn like experts. A key aspect of the use of deliberate analysis is that of "staying with the detail". We view one feature of university sessions on a PGCE course as developing with prospective teachers the skills to engage in deliberate analysis about their own teaching.

In Brown et al. (2021) there was a description of the use of the heuristic *experiences to issues to actions* which captures the way in which deliberate analysis is operationalised through our work as teacher educators. We engage prospective teachers in successive cycles of analysis, involving acting; reflecting on action to identify issues; reflecting on issues to identify strategies; acting … and so on. Within these cycles it is crucial that the reflection on action begins with the detail of experience and that the identifying of strategies gets to "action targets", i.e., things which can be done/tried by the prospective teacher. The role of somatic markers appears here. We use emotional markers of events to help prospective teachers locate those moments from lessons they have taught that hold the potential for new learning. A negative somatic marker will point to an issue where new actions are needed. A positive somatic marker will point to an issue where it may be helpful to articulate the actions which were taken and which could be repeated.

Subordinating teaching (of teachers) to learning (of teachers)

The last of our three elaborations returns us to the work of Gattegno. Gattegno (2010) proposed that his teaching approach implied *the subordination of teaching to learning*. What we interpret this to mean is that the progress of lessons needs to be led by the needs and responses of those learning, not by the agenda of those teaching. Gattegno wrote about the need to stay in continual contact with what learners are learning and he developed the use of materials such as Cuisenaire rods, that allow learners to be active and their responses to tasks visible to the teacher.

A key element of the subordination of teaching to learning is also that teachers make use of learners' powers of the mind. The powers were summarised (Coles, 2011, p. 50) as:

- the power of extraction - finding "what is common among so large a range of variations" (Gattegno, 2010, p. 10)
- the power to make transformations – e.g., my Dad ~ my Mum's partner ~ my sister's Dad ~ my uncle's brother
- handling abstractions – e.g., any noun is a label for a general set of objects
- stressing and ignoring – e.g., focusing on one aspect of perception to the exclusion of others.

Gattegno's approach to teaching mathematics was to design a curriculum which allowed learners to use those powers – and which expected learners to use those powers – in becoming confident in doing mathematics. As far as we are aware, Gattegno's ideas of subordination and powers of the mind have not, to date, been written about in relation to learning to teach.

What the subordination of teaching to learning means (to us) in the context of teacher education, relates to the ideas expressed in the Educating Awareness section, namely, that the content of university sessions is the teaching of prospective teachers. In other words, as teacher educators, subordinating our teaching (of teaching) to the learning (of teachers) necessitates that we provide tasks that allow the focus to be on the learning of the teachers about teaching. In the next section, we elaborate on what some of these tasks might look like and how they allow teachers to engage the powers of their minds.

We note here that while subordination implies we do not have one model of teaching, which we want prospective teachers to adopt, it does imply that we have conviction in our model of teacher education. We are not arguing against having models of teaching (and indeed like to work with prospective teachers so they have conviction about their own models). But our model of teacher education is at a meta-level to any model of teaching in schools.

EXAMPLES FROM A MATHEMATICS TEACHER EDUCATION COURSE

In this section, we offer some details about practices on our teacher education course, influenced by the three ideas set out above. In conclusion, we will be pointing to the "communal" nature of each practice and why this may be significant. We have chosen three practices to describe and analyse, which are all examples from the first few weeks of the course, as we try to set up ways of working with our prospective teachers. We begin each one with a description (indented) of the practice and then we reflect on the practice in light of the ideas set out above.

Mini-teaching

In the first week of the PGCE course, prospective teachers have to teach each other something non-mathematical for 10 minutes. We usually split the prospective teachers (usually 30 in a cohort) into two groups and they do their mini-teaching just to that group. In a letter they receive before the course, they are told to prepare for this "mini-teaching".

A teacher educator organises the mini-teaching session, which includes ensuring that precisely 10 minutes are taken. If prospective teachers finish before the 10 minutes, they need to fill the time and, the teacher educator will cut off any activity in mid-flow if needed, when the time gets to 10 minutes. Immediately following this teaching, the rest of the group are then invited to say what they learnt and anything that got in the way. They are asked to engage in a professional dialogue – potentially saying things that might appear negative but offering them from their own experience. Having heard the feedback, the last word is with the person who gave the mini-teaching, to reflect on how it went compared to their plan.

The key idea of the mini-teaching is to give prospective teachers an experience, at the very start of the course, of teaching in a safe environment. As teacher educators we want to set up a cycle of teaching, getting feedback, identifying "action-targets" (i.e., things to do next time) and then

teaching again. The mini-teaching allows us to set up this cycle. The feedback offered by the group supports a form of deliberate analysis, as the person doing the teaching is able to reflect on decisions made and their impact. Examples of such feedback are: “when you stood in front of the board, I could not see what was on the screen”. Other issues that can arise are, for example, that handing out resources can take up 4 or 5 of the 10 minutes, leaving little time for any activity. As teacher educators, we have no control over what issues are discussed or what feedback is given. The mini-teaching is also, for us, an important moment in establishing ways of working together and a professional dialogue, that may include challenge as well as support.

Three-way discussions

After each time of being in school, when prospective teachers return to the university, the first session we run with them is a three-way discussion. A teacher educator will arrange desks so that prospective teachers are sitting in groups of 3 (some 4s if needed). The 3s are invited to act as “reflective teams” for each other. In turn, one person has “time”, to share experiences they have had in school. The teacher educator will usually invite everyone to think back over their time in school and locate any moments of discomfort, or comfort, any moments that stay with them. When it is a person’s “time” then the other 2 in the group aim to listen actively, not thinking about what to say next, not offering solutions or similar experiences, but rather helping the person elaborate on their experience and get to new action-targets. After each person has had their “time” (usually 10 to 15 minutes each) the teacher educator then invites a group to share an issue they discussed which still feels unresolved. These issues are then discussed as a whole group, where we share a range of strategies for addressing the issue. An example might be an issue being raised of how to deal with not knowing the prior knowledge of students. Strategies suggested by the group might include, for example, doing a diagnostic assessment, speaking to their teacher from last year, looking at student records, having a range of questions for students to try at the start.

As teacher educators we are often struck by the power of the three-way discussions, which we sense from the energetic nature of the conversations taking place. The sessions are examples of subordinating teaching to learning, as we cannot know what issues will arise. Again, our focus as teacher educators is on supporting prospective teachers to get to new awarenesses about their teaching. We invite them to use their power of stressing and ignoring, to isolate specific moments from their experiences in school. We make use of emotion, or affect, in the belief that moments which retain some emotional hue (which may relate to somatic markers), indicate something that can usefully be worked on further. These are likely to be either moments of discomfort where there is still something unresolved which can be discussed, or something relating to how that prospective teacher would like to be in a classroom and where, this time, actions taken that could be repeated can be discussed.

From our perspective, as teacher educators, we take the process of identifying “issues” and then planning potential “strategies” to address those issues, as acts which cut across theory-practice divides. Our prospective teachers do not appear to experience a disjunction between school and university; university sessions are *about* school and support reflection on school experiences.

Working on mathematics

In the first week of the course, prospective teachers engage in a series of “workshops” with a mathematics focus. In one workshop, prospective teachers spend 4 minutes working in pairs on 15 different tasks. They move around the room so that they work with a different partner on each task. The tasks were originally aimed at students of age 14 (being based on a workshop created by prospective teachers many years ago). The tasks have changed over time, and now aim at appealing to different images of mathematics, i.e., some tasks are pure number or algebra tasks, some involve estimation, some involve technology. After each task, prospective teachers are invited to note down

what they liked or did not like, what they thought the task was assessing, and any reflections on working as a pair.

We are conscious, in an English context, that many people coming on to the course speak in interview, about enjoying the solitary nature of doing mathematics. We are therefore keen to set up expectations about working together. We want prospective teachers to be curious about each other's approaches to the subject and to supplement their own ways of working with alternatives. After the 15 workshop tasks have been done by each person, we form a large circle of chairs to discuss and de-brief on the experience. We want prospective teachers, at this stage, to hear how what one person likes, another one does not (this always happens in reflection) and to begin the process of opening themselves to alternative images of what mathematics is about. We invite reflections about working together also, and typically there will be comments that some people have found this hard and prefer to work alone. We simply note to the prospective teachers, that working together on mathematics is a skill they need to learn over the year and is something they will be asked to do repeatedly – and so we invite a reflection on developing awareness about what strategies have made this successful.

TOWARDS A COMMUNAL MATHEMATICS TEACHER EDUCATION

We have offered, so far, a conceptualisation of teacher education as involving processes of: educating awareness, deliberate analysis and subordinating teaching (of teachers) to learning (of teachers). In exemplifying these processes with three practices on the teacher education course at the University of Bristol, we have pointed to how teacher education need not be caught in dilemmas about the connection between theory and practice. If university sessions are *about* school experiences, they can support the processes of developing awareness of teaching in school, and prospective teachers need not experience a sense of disjuncture between the two settings. Indeed, we propose the notion of educating awareness as one that escapes the practice-theory dichotomy, or the knowledge-action divide. Our perspective of enactivism refuses such dualisms, equating knowing and doing.

In looking across what we have offered so far, we are struck by how the practices we are proposing, and that we have exemplified, seem to move away from an individualistic or compartmentalised approach to mathematics teacher education. In the "mini-teaching", as prospective teachers reflect back to each other what they learnt and what got in the way, the process of learning to teach becomes distributed across the group. They become entangled in each other's' journeys of learning to teach. We each (including teacher educators) have a responsibility to share our own experience, allowing the "teacher" to reflect on the implications of their actions (an example of deliberate analysis). Similarly, with the "three-way discussions", prospective teachers are involved in each other's developing awareness and again support processes of deliberate analysis through their listening and probing. The reflecting team and wider group play a crucial role in developing plans for next actions in each other's teaching. And, in working on mathematics and setting up paired work, we begin a process of prospective teachers developing what might be new ways of being, in the doing of mathematics.

Scheiner and Bower (2023), in offering a critique of metaphors of unpacking mathematics, point to the colonial force behind processes of individualisation and compartmentalisation, in our education systems. We view the separation of theory from practice (or university knowledge from school knowledge, or knowledge from action) as one example of such compartmentalisation. In proposing the idea of a communal mathematics teacher education, we are wanting to offer ways of working that act against assumptions such as the individualised nature of knowing. In the discussions of teaching issues that we observe on the PGCE course (e.g., during three-way discussions) there is a palpable sense of learning to teach being a group endeavour.

The recent ICMI Study on Curriculum Reform (Shimizu & Vithal, 2023) highlighted the vital importance of adequate teacher training and support, for any new initiative, particularly when this initiative involves technology. There are growing calls for a move to a more socio-ecological conception of mathematics teaching (Coles et al., 2022). The socio-ecological captures ideas such as not taking nature as a fixed background for research concerns and moving away from viewing the individual as the unit of learning. The notion of a communal approach to teacher education is, therefore, particularly relevant to such a socio-ecological framing.

Scholars working towards the inclusion of the socio-ecological in mathematics education (e.g., see the ICMI Symposium on Mathematics Education and the Socio-Ecological, from 20th March 2023) are convinced that curriculum change is coming. And, indeed, not linked to socio-ecological ideas, many countries are already engaging in curriculum reform (as noted in the ICMI Study). The images we have tried to offer of a teacher education at a meta-level to the concerns of prospective teachers offers one response of how teacher education can adapt to changing curricula. In other words, in the face of new curriculum demands, practices supporting educating awareness, deliberate analysis and subordination, may be able to stay relative steady, since the content is provided by the teachers and their experience of any new curriculum.

References

Brown, J., Brown, L., Coles, A., & Helliwell, T. (2021). Working with Awareness as Mathematics Teacher Educators: Experiences to Issues to Actions. In M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators* (pp. 187–204). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_10

Brown, L. & Coles, A. (2000). Complex decision making in the classroom: the teacher as an intuitive practitioner. In T. Atkinson & G. Claxton (Eds.), *The intuitive practitioner: On the value of not always knowing what one is doing* (pp. 165–181). Open University Press.

Brown, L., & Coles, A. (2011). Developing expertise: How enactivism re-frames mathematics teacher development. *ZDM*, *43*(6–7), 861–873. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0343-4

Burn, K., Mutton, T., & Thompson, I. (Eds.). (2022). *Practical theorising in teacher education: Holding theory and practice together*. Routledge.

Coles, A. (2011). Gattegno's 'powers of the mind' in the primary mathematics curriculum: Outcomes from a NCETM project in collaboration with "5x5x5=Creativity". In C. Smith (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *31*(1), 49–54. BSRLM.

Coles, A., le Roux, K., & Solares, A. (2022). Towards a socio-ecological perspective of mathematics education. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 171–178). PME.

Damasio, A. R. (2006). *Descartes' error: Emotion, reason and the human brain* (rev. ed. with a new preface). Vintage.

Gattegno, C. (1988). *The Science of Education. Part 2B: The awareness of mathematization*. Educational Solutions Worldwide Inc.

Gattegno, C. (2010). *What we owe children: The subordination of teaching to learning*. Educational Solutions Worldwide Inc.

Hirst, P. H. (1990). Internship: A view from outside. In P. Benton (Ed.), *The Oxford Internship Scheme: Integration and Partnership in Initial Teacher Education*. Calouste Gulbenkian Foundation.

McIntyre, D. (1995). Initial teacher education as practical theorising: A response to Paul Hirst. *British Journal of Educational Studies*, *43*(4), 365–383. https://doi.org/10.1080/00071005.1995.9974045

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. In M. G. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing* (pp. 35–50). Routledge.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed). Shambhala.

Reid, D. A. (2014). The coherence of enactivism and mathematics education research: A case study. *AVANT. The Journal of the Philosophical-Interdisciplinary Vanguard*, *V*(2), 137–172. https://doi.org/10.26913/50202014.0109.0007

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255–281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Scheiner, T., & Bowers, D. (2023). Problematizing the metaphors of unpacking, deconstructing, and decompressing mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *45*(1), 9–13.

Shimizu, Y., & Vithal, R. (2023). *Mathematics Curriculum Reforms Around the World: The 24th ICMI Study*. Springer International.

Stenhouse, L. (1991). *An introduction to curriculum research and development*. Heinemann.

Todd, J., Thomas, E., & Bateman, C. (2022). Practical theorising in learning to teach history. In K. Burn, T. Mutton, & I. Thomson (Eds.), *Practical theorising in teacher education: Holding theory and practice together*. Routledge.

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1993). *The embodied mind: Cognitive science and human experience* (14 print.). MIT Press.

White, J. & White, P. (2022) Richard Peters and his legacy. *London Review of Education, 20*(1). https://doi.org/10.14324/LRE.20.1.20

LA NECESIDAD Y LA ESPERANZA DE UN CAMINO INSTITUCIONAL PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN ITALIA

The need and the hope of an institutional path for an initial secondary school teacher training in Italy

Mellone, M.[1], Baccaglini-Frank, A.[2], Di Martino, P.[2]

[1] Università di Napoli Federico II, [2]Università di Pisa (Italy)

Resumen

En esta contribución intentaremos esbozar el estado de la situación italiana con respecto a la formación inicial de profesores de secundaria junto con algunas consideraciones de investigación. En particular hablaremos del conocimiento especializado del docente para la enseñanza de las matemáticas, refiriéndonos al constructo de conocimiento interpretativo en el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Profundizaremos en las especificidades del contexto italiano en la educación matemática, a partir de algunas coordenadas históricas, mostrando algunas luces y sombras que lo han caracterizado y lo caracterizan. En particular, nos referiremos a algunas experiencias pasadas y presentes de proyectos. Estas reflexiones nos ayudarán a explicar mejor nuestra principal preocupación sobre la situación italiana actual en la que no tenemos ninguna formación inicial institucional de profesores de secundaria (grados 6-13).

Palabras clave: *formación de profesores de matemáticas, relaciones con instituciones, innovaciones curriculares, perspectivas locales.*

Abstract

In this contribution we will try to outline the current Italian situation regarding initial training of secondary teachers, and we will also provide some research considerations. Specifically, we will talk about specialized teacher knowledge for mathematics teaching, referring to the construct of interpretative knowledge in the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model. We will deepen the specificities of the Italian context in mathematics education, starting from some historical coordinates, and pointing out some lights and shadows that have characterized it and that still characterize it. We will refer, in particular, to some past and present project experiences. These reflections will help us to better explain our main concern about the current Italian situation, in which there is no institutional initial training of secondary school teachers (grades 6-13).

Keywords: *mathematics teacher education, relationships with institutions, curricular innovations, local perspectives.*

INTRODUCTION

The current time, troubled by pandemics, wars and natural catastrophes, is not only worrisome, but also obviously challenging for all the people involved in education. The hope for a better world also comes through fostering a good education for all future adult citizens. In this scenario, mathematics education has to consider the current and the future educational needs, and, as we will argue, teachers' professional development plays a crucial role in this difficult challenge.

Looking at the current Italian situation, we can highlight two controversial starting points.

Mellone, M., Baccaglini-Frank, A. y Di Martino, P. (2023). Características de la investigación cualitativa y sus implicaciones en la investigación en Educación Matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 79–87). SEIEM.

On the one hand, in Italy the mathematics community took care of teachers' professional development since World War II. Indeed, in 1954 the Italian Mathematical Union Italian nominated an internal permanent commission specifically appointed to deal with issues concerning the teaching of mathematics: the Commission for Mathematical Instruction (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica, CIIM, https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/). The CIIM sinks its roots in the Italian subcommittee born inside ICMI (the International Commission on Mathematical Instruction) in 1908 and then it was converted into a subcommittee of the UMI. From the very beginning, the CIIM debated all the issues related to the teaching and learning of mathematics in Italy, taking also into consideration many positive experiences documented in other countries where proposals were made to the Institutions (such as the Ministry of School and University). Moreover, the CIIM, organizes conferences and events devoted to mathematics teachers, and it supervises an editorial series of publications specialized in mathematics education.

On the other hand, despite the significant activities carried out by the CIIM, currently Italy is one of the few European countries without a national pre-service education program for secondary teachers (grades 6-13).

MATHEMATICS TEACHER EDUCATION

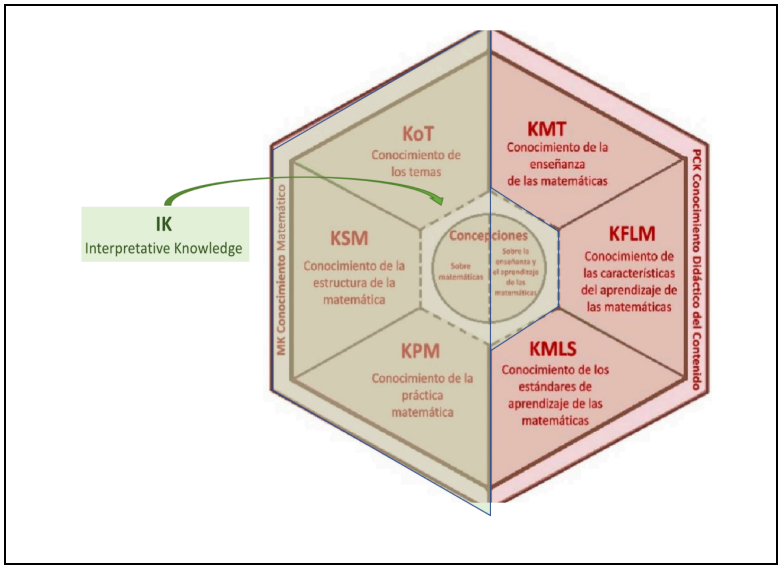
The seminal work of Lee Shulman, in the '80s, brought international attention to the need to look at the knowledge needed to teach a discipline not simply as a disconnected set of disciplinary knowledge and pedagogical knowledge. According to Shulman (1986), to promote effective teaching and learning processes, teachers also need specific disciplinary knowledge for teaching which allows them to have an integrated vision of the disciplinary content and of the issues connected to its teaching (methodologies for that specific disciplinary content, possible difficulties of the students for that specific disciplinary content, etc.). In other words, teachers need what Shulman calls Pedagogical Content Knowledge. Over the years there have been many developments of the research initiated by Shulman, in particular for mathematics education various conceptualizations and models of specialized mathematical knowledge for teaching have been proposed, such as the Mathematical Knowledge for Teaching model developed by a group research model of the University of Michigan (Ball et al., 2008), or the most recent model of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) of the Spanish group of the University of Huelva (Carrillo-Yañez et al., 2018) that considers all the mathematical knowledge for teaching as specialized and, places teachers' beliefs at the core of the model.

Starting from the MTSK model, research in mathematics teacher education in Italy has contributed to the field of research on teachers' professional development with the theoretical construct of Interpretative Knowledge (IK). Such a construct actually first emerged from an international collaboration between researchers coming from different countries (see, e.g., Di Martino et al, 2019, Mellone et al. 2020, Ribeiro et al., 2016,); the term IK refers to breadth and depth of teachers' mathematical knowledge that allows them to consider the potential of students' productions, exploiting their ambiguities, intuitions, differences, and errors (etc.) and using them in the classroom as an opportunity for learning. It comprises all the three subdomains of the MK part of the MTSK model, but it also includes in the core the beliefs on Maths and Teaching and Learning of Maths. In fact, it is not only specialized mathematical knowledge "alone" that determines teachers' interpretative attitude towards students, but it is rather the whole of its knowledge and beliefs that predisposes teachers to interpret students' productions (highlighted by the blurry lines in Fig. 1).

Indeed, although research has shown that the opportunity of making mistakes and learning from them is an important aspect of the teaching and learning of mathematics (see e.g., Borasi, 1996), still a great part of mathematics teaching practice in school has mostly focused on students' correct performance of procedural exercises. While the importance of making mistakes, learning from

them, and exploring different strategies in problem-solving activities are crucial aspects in developing a more effective teaching practice, valuing mistakes and building on them is also important from an inclusive perspective. Recent research has shown how the development of a particular form of IK, the Semiotic Interpretative Knowledge, in teachers emerges as a necessary condition for implementing inclusive teaching practices (Asenova et al., 2023).

Figure 1. Interpretative Knowledge in the MTSK model



To develop PTs' IK, a particular type of task called *interpretative tasks* has been used. In such tasks PTs are asked to interpret students' mathematical productions and to design possible feedback and suitable classroom assignments centred on these productions (Mellone et al., 2020). Over the years a particular methodological approach, called the Small group−Collective−Small group (SCS) cycle (Jakobsen et al., 2022), was used to develop PT's IK. During the SCS-cycle approach, the PTs first work on the interpretive task in small groups (of two or three), after which the task is discussed by all the participants in a collective mathematical discussion orchestrated by the educator and, finally, the small groups return to work on the same interpretative task after about one/two months. Central in the SCS-cycle methodology is the discussion orchestrated by the educator, conceived as a generator of new specialized mathematical knowledge for all the group of PTs and the educator him/herself (see e.g., Jakobsen et al., 2022). Mathematics teacher education centred on IK also has the aim of triggering an initial development in the teachers' beliefs on the Teaching and Learning of Maths.

Precisely starting from the role of beliefs in mathematics teachers' training and practice, it is important to stress how the development of knowledge in mathematics teachers is a complex and holistic process and, in this sense, some advice seems to be particularly precious in a country like Italy that is preparing to re-design initial mathematics education teacher programs:

> Mathematics teacher education programs should be deliberately designed in an integrated fashion to support teachers in blending insights from various disciplines including, but not limited to, mathematics, education, and psychology, thereby creating novel styles of knowing that empower teachers to reshape the way they view their own profession. It is reasonable to assume that such styles of knowing develop gradually, rooted in authentic activities and within a community of individuals engaged in inquiry and practice (Scheiner et al., 2019, p. 170).

SOME HISTORICAL COORDINATES ON THE INTERACTIONS BETWEEN INSTITUTIONS AND THE COMMUNITY OF MATH EDUCATORS

Between the late 1800s and early 1900s Federigo Enriques, an important Italian scholar and mathematician, introduced the term “mathematics education” for the first time in Italy (“didattica della matematica” in Italian) to bring to the attention of the mathematicians of the time a concerning phenomenon that was already beginning in those years: the difficulties that students encountered in learning mathematics. The interest in learning difficulties, a phenomenon that we now recognize as being deeply intertwined with that of teaching difficulties, has therefore been one of the generative engines of research in mathematics education. Working on the difficulties to include, but also to integrate differences has been a main direction of many of the efforts of educational research which has led to the development of specially designed methodologies and artifacts, also for the teaching of mathematics, born in Italy and exported all over the world, such as those conceived by Maria Montessori or Emma Castelnuovo (niece of Federigo Enriques).

In the wake of these visionary precursors, since the '80s research in mathematics education has developed and continues to develop innovative proposals that have been validated in the field and supported by scientific research. In this direction it is important to underline the strategic work developed by the CIIM as a connecting hinge between the community of mathematicians with the community of mathematics educators, creating a valuable partnership in the dialogue with the institutions. For example, the CIIM (under the aegis of the Italian Mathematical Union) in collaboration with the Ministry, led the national project “Mathematics for the citizen”, started in 2000 in which, capitalizing on the scientific results in mathematics education, a team of mathematics educators developed materials for a new mathematics curriculum (UMI Curriculum 2001-2003-2004) with suggestions for activities and assessment materials for schools. Here, for the first time in the country, the following fundamental idea of "mathematical laboratory" appeared: the mathematical laboratory is not a physical place different from the classroom, it is rather a structured set of activities aimed at constructing the meanings of mathematical objects. The laboratory, therefore, involves people (students and teachers), structures (classrooms, tools, organization of spaces and times), ideas (projects, educational activity plans, experiments). The construction of meanings, in the mathematical laboratory, is closely linked, on the one hand, to the use of the tools (analog and digital) used in the various activities, on the other, to the interactions between people that develop during the exercise of such activities (Anichini et al., 2023). Afterwards, the CIIM, thanks also to a particularly constructive dialogue with the institutions in those years, developed a mathematics teacher education project, M@t.abel, to disseminate the innovations developed in “Matematica 2001”. Then the CIIM also launched a national in-service mathematics teacher training program, based on a waterfall model, through the construction of communities of practice, centred around the key figure of the *teacher-researcher* (see, e.g., Jaworski & Goodchild, 2006). This project unfortunately came to an end too early because of political instability and the subsequent difficulty of dialogue between research and institutions. Nevertheless, these experiences showed the strategic roles played by the dialogue between the research community and institutions and the need for an agreement between human and economic resources to make things work.

Moreover, these experiences showed that to scale up an innovative waterfall training model is an extremely crucial goal, considering that the mathematics educator community is limited and that it cannot directly carry out alone a large-scale mathematics teacher education project. To guarantee widespread teacher training throughout the territory, an effective approach seems to be that of training groups of trainers (possibly from communities of people already involved in educational efforts).

THE EXPERIENCE OF PERCONTARE PROJECT AND A FIRST ATTEMPT AT SCALING-UP THROUGH A WATERFALL MODEL

In the current Italian panorama there are projects that represent a little oasis in the desert, and that express the vivacity and skills of Italian researchers, and that yet, unfortunately, struggle to get recognition within the well-established political plans. An important example in this direction is the PerContare project. It is a design-based research project that was first funded by a private Foundation, Fondazione per la Scuola della Compagnia di San Paolo, to a team of mathematics educators and psychologists, coordinated by the non-profit organization ASPHI (Avviamento e Sviluppo di Progetti per ridurre l'Handicap, Start-up and Development of Projects to reduce the Handicap) supporting the use of technology for educational inclusion, in Italy from 2011 to 2014 with the goal of designing and experimenting inclusive practices in mathematics education for primary school grades 1 and 2 (children ages 6-8), that would reduce the number of children who develop persistent difficulties in learning mathematics. The online teacher guides developed during the first funding period of the project remained available online for free (and they still are today at https://www.percontare.it) and in a few years over 10,000 teachers created accounts on the platform to access them (today over 30,000 teachers have accounts on the online resource platform). Many of such teachers asked for professional development courses and even more insisted that the teacher guides were "completed" to cover the whole range of primary school (to grade 5; children of 10-11 years of age).

Therefore, the same private funding Foundation decided to fund three more years of design-based research to reach the completion of the teacher guides between 2019 and 2022. During this second phase of the project only the mathematics education team (under the scientific leadership of the second author of this paper) was active, and collaborated again with ASPHI for organizational aspects, the web design and app development. The second objective of the project, during these years was to design and experiment, cyclically, through design-based research, inclusive curricular activities in mathematics (not only arithmetic) for grades 3, 4 and 5. These teacher guides stem from the hypothesis that many students stop participating in mathematical discourse either because they are not able to memorize routines or because they are not willing to do so, because such routines do not allow them to understand the "whys" behind the algorithm procedures (see, for example, Baccaglini-Frank et al., 2023).

PerContare is a design-based research project, which means that it aims both at developing knowledge or theory about how to enact innovative ideas, using design as an essential part of the research, and it develops educational materials that are "effective" with respect to certain design principles and educational goals (Bakker & van Eerde, 2015, Bakker & Smit, 2017). The key design principles (especially for grades 3, 4 and 5) are the following:

- the mathematical notions are not dropped "out of the blue", but discovered, whenever possible through exploratory activities;
- such discoveries take place in the "mathematical laboratory" (see the previous section of this paper);
- the language that is developed in class, initially, is situated, tightly related to the artifact context in which is emerges;
- the role of the teacher is key in promoting the generation and generalization of situated meanings through processes such as: conjecture generation, argumentation, and orchestration of mathematical discussions;
- procedures for solving certain types of mathematical tasks are discovered, where possible, and/or compared to bring out the "hidden" mathematical meanings;

- the focus is on fundamental “big ideas” in mathematics.

These overarching design principles subtend a socio-cultural approach to mathematics education, situated within a Vygotskian line of research that takes into account the role of cultural artifacts in the teaching and learning of mathematics (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Studies on the effect of the implementation of the materials involved about 50 teachers in five Italian regions (Baccaglini-Frank & Bartolini Bussi, 2015, Baccaglini-Frank et al., 2023). Both in these studies and in implementing the activities the researchers on the project frequently had a very active role. Moreover, they started noticing from various informal interactions with other teachers that in many classrooms where teachers declared to be “using PerContare”, the activities (and especially the mathematical discussions to be orchestrated by the teachers) were missing some of the key points, that were fundamental, especially from a mathematical point of view. So, through such observations the team concluded that without proper guidance (or previous professional development) from the team, the wealth of activities available online was wasted.

Such an awareness led to attempts by the scientific coordinator of the project at the University of Pisa and by ASPHI to find new funding opportunities for setting up the necessary training of trainers, in what was conceived as a waterfall model project, PerContarePRO (PRO stands for “propagation” of the good teaching practices), that should take a first step in scaling-up an effective use of the research-based teacher guides. The proposing partners found allies in local and national agencies concerned with teachers' professional development and determined to contribute to the new 3-year project: the National Institute for Documentation and Innovation of Educational Research (INDIRE), the Regional School District of Tuscany (Ufficio Scolastico Regionale della Toscana) and the Institute of Research and Educational Experimentation of the Province of Trento (IPRASE). PerContarePRO was recently funded (in January 2023) by a different private foundation, UNISER (a consortium company, linked with the University of Florence -UNI-, and oriented to offer services rendered -SER-), of the Cassa di Risparmio di Pistoia e Pescia.

We conclude this section with a presentation of the main goal and actions planned in PerContarePRO. The main objective is to train a set of educators from all over Italy, taking into account the complexity of knowledge described by the MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018), who will become “expert trainers”; they have been selected from a pool of teachers and educators (some are young researchers or educators involved in afterschool activities and other projects), and by the end of the project they should be able to respond to some of the numerous training requests from schools by proposing ad hoc projects (again taking into account the MTSK to plan actions that strengthen weaker aspects of such knowledge) that include consulting, implementing workshops for teachers and providing support and guidance to local communities of teachers interested in learning how to use the PerContare teacher guides.

The first planned action in training the to-be expert trainers (here trainees) is working together during a series of face-to-face workshops. The second planned action is continued support to the trainees using an online platform where materials used during the workshops will be collected, as well as additional support materials that will be created as the need arises (for example explanatory videos about certain key points or aspects that create difficulties in learning about the teacher guides), and a forum with threads in which exchanges between the researchers and the trainees will be documented. The third action is a set of 8 webinars, open to teachers, university students, school principals that document the progress of the project.

THE URGENCY OF QUALITY MATHEMATICS EDUCATION FOR CITIZENSHIP SKILLS IN INITIAL TRAINING OF SECONDARY SCHOOL TEACHERS

All over the world, there is a shared consensus in recognizing the key role played by mathematics education in forming citizens prepared to face the challenges of our era, in which climate, ecological, political, and economic changes require, among other things, to be able to make decisions based on a scientific basis. In particular, following the emergency caused by the COVID-19 pandemic, the importance of widespread quality literacy and mathematical competence has become even more evident in interpreting numerical data, tables, and graphs and having the tools to make responsible decisions, also based on scientific considerations. Therefore, the need for quality mathematics education for everyone is evident and, in many countries, various indicators seem to show that this goal is still a long way away: from the data provided by standardized international surveys and to the studies showing the incidence of rejection of mathematics among students and adults, to the proliferation of anti-scientific opinions in the national and international media. Institutions around the world, also pressed by international comparative assessment evaluations, are called upon to improve school education through various initiatives such as curriculum reforms and massive teacher professional development programs. These initiatives are not always directly linked or informed by mathematics education research. For example, as mentioned in the introduction, in Italy there is a very critical situation in terms of the initial training and recruitment of secondary mathematics teachers. After some past experiences of different kinds of secondary teacher education, for almost ten years in Italy we have not had any institutional secondary teacher training program for secondary teachers. This situation suggests the falling back onto the naïve idea that the knowing the content (mathematics) automatically implies being able to teach it (well), denying years of research results, such as the ones recalled in the previous section. The Italian situation becomes even more serious when compared to the complexity and constant evolution of the educational objectives that to the challenges that our time has posed to us, such as providing an adequate level of mathematical literacy to every citizen, encouraging the study of STEM disciplines, etc. Furthermore, there is extreme variability in the generations of students to whom the educational paths are addressed (digital natives, the variety and mix of cultural contexts of origin, etc.) and the variety of contexts in which these paths will be developed (distance education, outdoor education, new school architectures).

In such a scenario, therefore, the role of teacher training and enhancement becomes fundamental to share tools that help students manage this complexity. Valuing also means clarifying the training and recruitment steps that are necessary to become a secondary school teacher, in order to intercept, welcome and take care of those who feel a vocation for the teaching profession. This organization is also crucial to avoid creating a culture of the teaching profession as a “cheap” profession: teaching is the key profession in which to invest for the future of our societies. The current lack of clarity, discourages people from choosing this profession, or worse, they choose it as a fallback after other (usually unrelated) unsatisfactory experiences. This is what is happening in Italy where there is a de facto lack of mathematics teachers (Fig. 2).

On the other hand, if there is no initial training for secondary school teachers, there is no coherence in the request for continuous training. Instead, we firmly believe that an institutional initial training for prospective mathematics secondary teachers, supported by researchers in mathematics educators, would guide new teachers into their profession, integrating research results into practice, and hopefully creating in them the need of lifelong learning within community of practice. Indeed, the research underlines the importance of creating communities of practice and inquiry as an essential part of teacher training, i.e. collaborative and co-learning contexts between educators and future teachers in which to develop a reflection on practice and the intertwining of theory and practice (Jaworski & Goodchild, 2006). These communities could also help to relieve the sense of isolation and frustration of mathematics teachers and educators who find themselves pressed by

constant shifts from ever-changing educational needs and requests (see, e.g., Ramploud et al., 2022).

Figure 2. From a well-known Italian newspaper, a headline that appeared last January "Mathematics: the numbers don't add up: schools without teachers"



CONCLUSIVE REMARKS

As mathematics educators, we are concerned about the state of Italy as one of the few, or perhaps the only, country in Europe that currently and for several years does not have an initial training course for secondary school teachers. Without adequate training, novice teachers will most likely offer the same methods and tools that they encountered in their own experience as students, a phenomenon already highlighted over a hundred years ago by Felix Klein (Kilpatrick, 2019): this cyclical process blocks any process of innovation in schools, and it robs the school reality of the innovations produced by education research, which instead should permeate school contexts.

At the end of the past year the previous Italian government published the Law decree D.L. n. 36 of 2022. D.L. concerning a reform that provides for the training of future secondary school teachers through an education path consisting of 60 formative credits. As of today there has not been any implementation decrees or factual planning, that are necessary to convert the D.L. into concrete actions and law.

Our wishes and hope are to have soon an institutional initial training of secondary school teachers developed through a coherent path, in which the contributions of disciplinary, didactic-disciplinary, pedagogical-didactic teachings and reflection on internships are integrated into a dialectical relationship between theory and practice. Such a path should be capable of intercepting and carefully welcoming the vocation of future teachers and which brings into play the skills, knowledge, and points of view of the world of schools and universities in planning and its development. The belief is that such a path and the synergy between school and university are necessary to provide future teachers with qualified entry-level professionalism, adequate for the complex educational challenges posed by our society.

References

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico. L., & Robutti, O. (2023). *Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Scuola primaria. Scuola secondaria di primo grado.* Matteoni Stampatore

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). Unfolding teachers' interpretative knowledge into semiotic interpretative knowledge to understand and improve mathematical learning in an inclusive perspective. *Education Sciences*, *13*(65). https://doi.org/10.3390/educsci13010065

Baccaglini-Frank, A., & Bartolini Bussi, M. G. (2015). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: Il progetto PerContare. *Form@re-Open Journal per la formazione in rete, 15*(3), 170–184. https://bit.ly/3DrKzcy

Baccaglini-Frank, A., Funghi, S., Maracci, M., & Ramploud, A. (2023). Learning about multiplication by comparing algorithms: "One times one, but actually they are ten times ten". *The Journal of Mathematical Behavior, 70*, 101024. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101024

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An Introduction to design-based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education* (pp. 429–466). Springer.

Bakker, A., & Smit, J. (2017). Theory Development in Design-Based Research: An Example about Scaffolding Mathematical Language. In S. Doff & R. Komoss (Eds.), *Making Change Happen* (pp. 111–126). Springer.

Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed.,pp. 746–783). Routledge.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Greenwood Publishing Group.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores,P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2019). Interpretative Knowledge. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1

Jaworski, B., & Goodchild, S. (2006) Inquiry community in an activity theory frame. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 353–360). PME.

Kilpatrick J. (2019). A double discontinuity and a triple approach: Felix Klein's perspective on Mathematics Teacher Education. In H. G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G.Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein. ICME-13 Monographs*. Springer.

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., & Pacelli, T. (2021). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education, 22*(2), 154–167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Ramploud, A., Funghi, S., & Mellone, M. (2022). The time is out of joint. Teacher subjectivity during COVID-19. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25*, 533–553. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09506-3

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2016). Interpretation students' non-standard reasoning: Insights for mathematics teacher education. *For the Learning of Mathematics, 36*(2), 8–13.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., & Pino-Fan. L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Educaction, 17*, 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(4), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

PRÁCTICAS CON TECNOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS PARA AFRONTAR NUEVAS DEMANDAS CURRICULARES

Practices with technology in mathematics teacher education to face new curricular demands

Branco, N.

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém

Resumen

La importancia de utilizar la tecnología para promover el aprendizaje de las matemáticas ha sido señalada por la investigación en educación matemática y se ha expresado en el currículo de matemáticas del siglo XXI. La tecnología debe usarse para ampliar los contextos y la meta para el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Los docentes deben estar bien preparados para realizar la enseñanza con tecnología potenciando el estudio de los conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades. Este artículo se enfoca en dos contextos de formación docente, un curso en la licenciatura y la práctica de futuros docentes en prácticas durante la maestría, con el objetivo de comprender cómo los futuros docentes valoran las prácticas con tecnología enfocadas en la enseñanza de las matemáticas. Se presentará el trabajo realizado por los futuros docentes y sus reflexiones para discutir los aportes que la formación docente puede hacer para un desarrollo docente que enfrente las nuevas demandas.

Palabras clave: *aprendizaje, currículo, formación docente, matemáticas, tecnología.*

Abstract

The importance of using technology to promote mathematics learning has been pointed out by research in mathematics education and been expressed in mathematics curriculum of the 21st century. The technology should be used to enlarge the contexts and goal for students' mathematics learning. Teachers must be well prepared to conduct teaching with technology enhancing the study of mathematical concepts and the development of skills. This paper focus on two contexts of teacher education, a course in the bachelor and the preservice teachers' practice in the internship during the master's degree, with the aim of understanding how future teachers value practices with technology focusing on teaching mathematics. The work done by future teachers and their reflections will be presented to discuss contributes that teacher education could do to a teacher development that faces the new demands.

Keywords: *curriculum, leaning, mathematics, teacher education, technology.*

INTRODUCTION

The importance of using technology to promote mathematics learning highlight by research in mathematics education and this relevance is pointed to mathematics curriculum of the 21st century (Golding, 2023). NCTM (2014) pointed out to the integration of technology in the curriculum with the aim of assisting students learning, reasoning and communicate that reasoning. This document highlights that the technology in the classroom must be used to an effective mathematics teaching where students are involved in an active learning, solving problems and expanding their understanding. In 2022, in Portugal, a new curriculum for basic education comes (grades 1-9) with three main principles: "Mathematics for all", "The mathematics is unique but not the only one", and

Branco, N. (2023). Prácticas con tecnología en la formación del profesorado de matemáticas para afrontar nuevas demandas curriculares. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 89–96). SEIEM.

"Mathematics for 21st century" (Canavarro et al., 2021). This new curriculum clearly pointed to the use of technology in mathematic lessons. In this context, technology should be used to enable deeper analysis and exploration that would otherwise not be possible, and to encourage the exploration of multiple representations. Teachers must be well prepared to conduct teaching with technology enhancing the study of mathematical concepts and the development of skills. This paper focus on two contexts of teacher education, a course in the bachelor and the preservice teachers' practice in the internship during the master's degree, with the aim of understanding how future teachers value practices with technology focusing on teaching mathematics.

BACKGROUND

The technology should be used to enlarge the contexts and goal for students' mathematics learning. The use of digital resources should focus on providing students with an active role in learning and the development of knowledge, skills, values and attitudes, and not only on appealing aspects (Huang et al., 2020), nor be an end in itself (Canavarro et al. 2021). Huang et al. (2019) present four types of educational use technology that could be considered by teacher education: (1) for inquiry; (2) for communication; (3) for construction and problem solving; (4) for knowledge representation. So, the digital technology should be used to enhance mathematics learning with meaning for the student (NCTM, 2014), engaging them to explore mathematical idea in a more meaningful way for students, promoting their mathematical reasoning and commutation. Technology can foster the use of multiple representations (Artigue, 2021), helping to create meaning and connection between representations and concepts (Golding, 2023). Golding also highlights the role of technology in bringing out external connections: "digital technologies can bring external expertise into the classroom, and build wider digital literacy, potentially enhancing both curriculum coherence and its relevance to current wider issues" (p. 185).

The curriculum in Portugal express that the use of technology can also be linked to the development of computational thinking, which is consistent with what Golding (2023) express. Such articulation should focus on problem solving, in particular those related to programming. Portuguese curriculum guidelines are based on five practices: abstraction (seeing a problem at different levels of detail), algorithms (predisposition to see tasks as smaller interconnected steps), decomposition (solving a problem involves solving a set of smaller problems), pattern recognition (seeing a problem as related to previously encountered problems) (Hoyles & Noss, 2015), and debugging (ensuring that the solution works without errors and successfully responds to the given task) (Ng & Cui, 2021). In recent years, several digital tools have emerged that are suitable for working with students from elementary school, such as visual programming environments, by reusing and remixing projects, extending existing codes to create new or more complex projects, as mentioned by Ng and Cui (2021), and the robotics and programming contexts, as state by Sáez-López et al. (2019).

Regarding technology for teaching mathematics, the professional development should provide a deep understanding of how to use it to enable students to investigate mathematical ideas, solve problems, have a better understanding and are to link multiple representations (NCTM, 2014). Clark-Wilson et al. (2020) reported that research is needed to understand what professional development can support teachers in integrating technology in their lessons, as teachers felt that the opportunities they have had were not relevant to their experience in classroom, claiming the need of practical and adaptable resources. So, is important to include and strengthen the use of technological resources and related pedagogical strategies in teacher education (Varela & Desiderio, 2021). Teacher education should include approaches that enable teachers and future teachers to respond to the different learning needs of students (Nasri et al., 2020; Varela & Desiderio, 2021) and the existence of limited digital learning resources, such as devices or internet access (Nasri et al., 2020). With new curriculum, it's important that teacher development focus on subject and resources consistently with the values and approaches of the curriculum (Golding, 2018). For teachers it could be meaningful to know more about technological resources for teaching and also specific software to be used by students. Thurm and

Barzel (2022) identified teachers' beliefs about teaching mathematics with technology in a study involving 198 secondary school teachers in Germany. The results present three clusters of sub-dimensions: i) more integrated and constructivist implementation of technology, with self-efficacy; ii) use of technology to support multiple representations, and iii) teachers' beliefs about the detrimental effects of teaching with technology. This third group is less central, showing a greater importance of beliefs about the potential benefits of technology. Their results could inform approaches to teacher professional development. They reported that group two can be considered at an early stage. However, what concerns group one should be understood as an evolutionary process, being integrated in a gradual way in the teacher's professional development with implications in their teaching practice, since lesson design and implementation are central aspects.

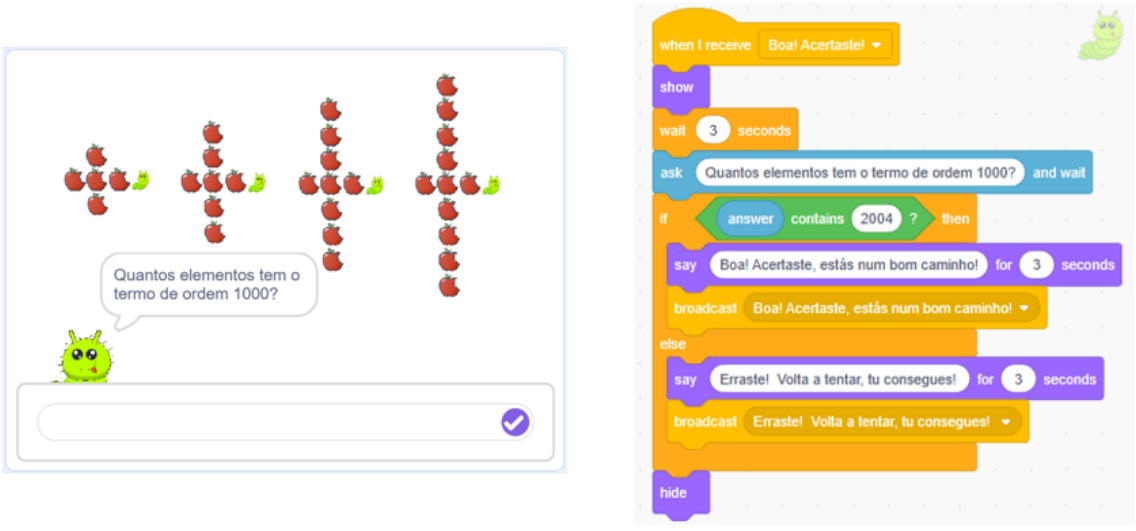
SCRATCH AND EARLY ALGEBRA IN TEACHER EDUCATION

The bachelor on basic education of Higher School of Education of Santarém has a course that integrates topics of early algebra. Considering the new curriculum demands, a group work to carrying out a Scratch project that integrated some of the topics covered in the course was proposed to prospective teacher. They were organized in 13 small groups (identified as PTG1 to PTG13) and each one defined the topic and the aim of the project. In a class, each group presented the Scratch Project, the main mathematical ideas that were involved and a collective reflection about the work developed. The groups prepared a written document that support their presentation. That document and observation of that presentation moment were the instruments to collect the data. The main objective is that prospective teachers develop their skills in Scratch and recognize the potential of the tool to be used by students to develop their algebraic thinking from the early years. It's important that prospective teachers recognize the mathematical ideas and mathematical skills that are involved in the construction of a Scratch project related with topics of early algebra.

Examples of Scratch projects developed

All groups selected the topic of sequences, focusing seven groups on repetitive sequences and six groups on pictorial growth sequences (with a linear growth). The tasks proposed in the projects were essentially the following: i) Ask the player to enter the term that is in an order given by the project and the project return if the answer is or is not correct. Some ask for a near term and others for a distance term (Figure 1); ii) Ask the player to enter the order of the term they want to know, and the project returns the term of the sequence that is in that order (Figure 2 and Figure 3).

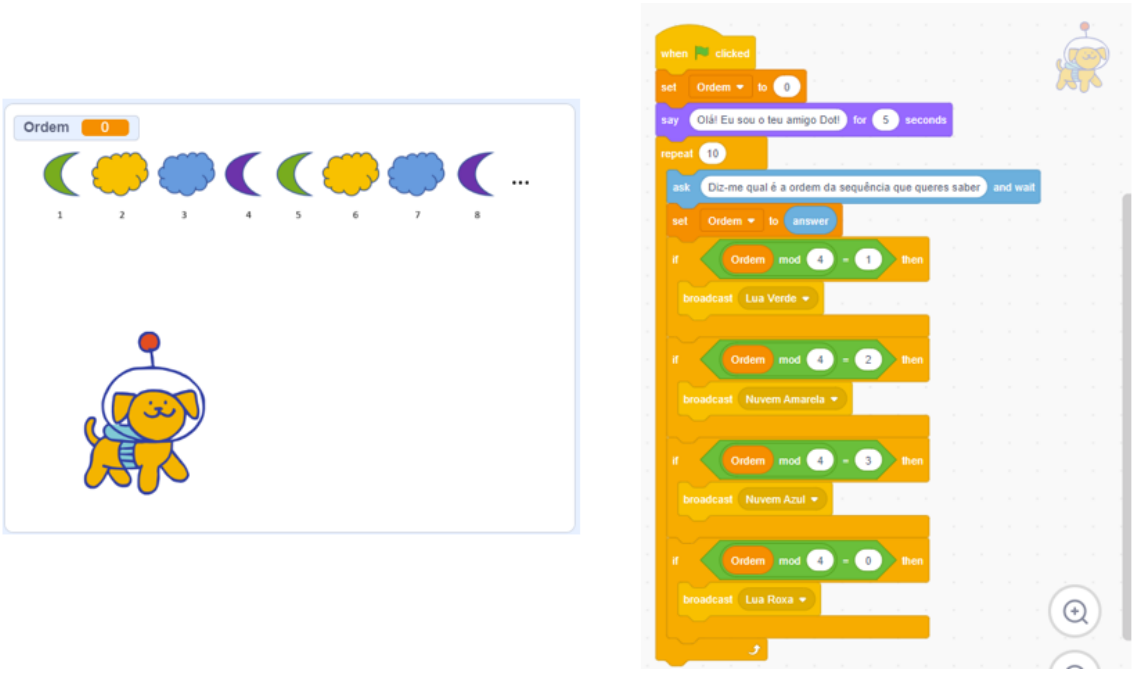
Figure 1. Task of a Scratch project to identify a specific term of the sequence (PTG13).



To construct the project the prospective teacher need to understand the sequence previously to correctly introduce the code to verify if the answer entered by the player is or is not correct.

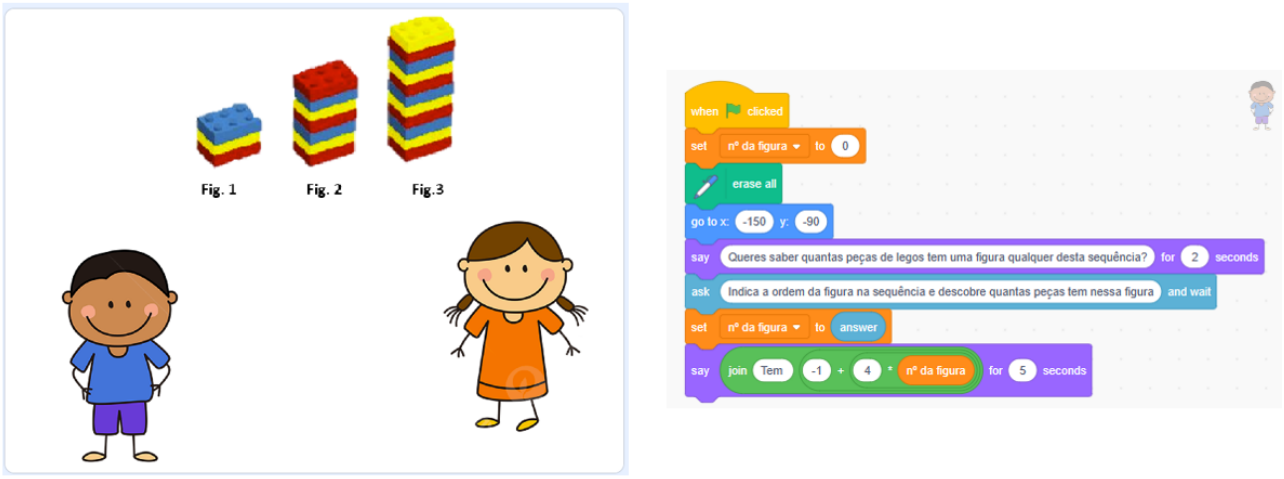
The next two projects exemplify programs created by PTG related with repetitive sequences and pictorial growth sequences. When they work with repetitive sequences emerge the knowledge about division and the role of the rest (Figure 2). The divisor is the number of elements of the repetitive set. For each possible rest of the division one element of the first set of elements is associated. In an order that the rest is 1 the term of the sequence is equal to the first one, in an order that the rest is 2 the term is equal to the second term of the sequence, and continuing to an order that the rest is 0, the order is a multiple of the cardinal of the repetitive set, and the term is equal to the lest term of the set.

Figure 2. Task of a Scratch project with a repetitive sequence (PTG11).



In the Figure 3 it's possible to see that the PTG1 introduced a variable to associate the number given by the player to the order (fig. number). Then they used the variable in a general expression that directly calculate the number of pieces in that order.

Figure 3. Task of a Scratch project with a pictorial growth sequence (PTG1).



In both situations, Scratch enhances pattern recognition and generalization and other practices of computational thinking were essential to correctly complete the project.

Prospective teachers view about their experience

The different PTGs identify several contributes of this proposal for their development as future teachers. Some are related with their own knowledge, content knowledge, pedagogical knowledge and also curriculum knowledge, and others with students learning, involvement and motivation. Some groups analyzed the primary school curriculum to better understand the link between the work they did and primary students learning. Table 1 presents some ideas expressed by PTGs:

Table 1. Contributes identified by PTGs.

Main ideas	*PTGs*	
Improve their skills in using Scratch	PTG2, PTG3, PTG8, PTG10.	"We also improved our game programming skills." (PTG8) "This project allowed us to learn how to work and explore the Scratch program. By exploring the software we were able to better understand its operation, its commands and with this we were able to overcome those challenges." (PTG10)
Recognize the potential of the digital platform in teaching-learning and specific course content that can be worked with Scratch.	PTG1, PTG2, PTG5, PTG6, PTG7, PTG9, PTG10, PTG11. PTG12, PTG13.	"The development of this project allowed the group to explore and create a game on the Scratch platform, understanding the potential of digital platforms for teaching mathematical and computational concepts." (PTG1). "It made us explore contents that we will teach and recognize the importance in the development of algebraic thinking, the stimulation of creativity and the opportunity to work on different mathematical concepts." (PTG5) "With this project we also worked on the themes related to multiples of 4, and consequently, the issues related to divisions, because to obtain the dinosaur of the order we want we have to perform a division and, according to the rest we obtain, it corresponds to a respective dinosaur." (PTG7)
Knowing a tool that brings greater dynamics in class	PTG3, PTG8, PTG12, PTG13.	We learned a new strategy to work mathematical contents in a more dynamic way, using the Scratch platform. (PTG8) This platform is an advantage, because we can approach the subject in a more dynamic way and that captures the attention of the students better. (PTG12)

The PTGs considered very relevant this experience, valuing the opportunity to develop their own project as a game to promote mathematics learning. They value aspects related with their knowledge about the tool, and the opportunity the develop their knowledge related with some topic of the course, content that they will teach in their future practice. So, globally they expressed better understand the potential of the Scratch for teaching and learning mathematic and the challenge of creating tasks related with the specific topics: "The choice of questions was somewhat laborious, since it was for a specific age group. The exercises provided by the teacher and carried out in the classroom were a strong help and made it easier to choose them" (PTG10).

In general, several PTGs (PTG2, PTG4, PTG5, PTG11, PTG12.) recognized the contribute of the experience for their practice: "Knowing that, professionally, it will be an asset as future teachers and educators" (PTG2) and "This learning will be useful in our professional future, because in this we

can create different types of games, thus approaching different [mathematical] themes, as this is an interactive and intuitive platform" (PTG4).

DIGITAL RESOURCES IN MATHEMATICS TEACHING DURING PANDEMIC

In 2020, during COVID-19, several schools in Portugal were organized to continue the lessons online. The internship is integrated in initial teacher education and is a requirement to become a teacher. So, during that period, in my institution, the Higher School of Education of Santarém, the standard internship model (presential at the schools) was adapted to an online internship process (Branco et al., 2022). This section focuses the particular work in mathematics teaching of two preservice teachers (PSTs), identified as PSTA and PSTB, that performed their internship in pair during the emergency remote teaching. PSTs enrolled in the master's degree with the purpose of becoming primary and middle school teachers of mathematics and sciences (6- to 12-year-old students). That internship was developed in a grade 6 class (11- and 12-years-old students). The data were collected from PSTs' collaborative written reflections on the practice, PSTs' individual reflections and an interview in the end of the internship.

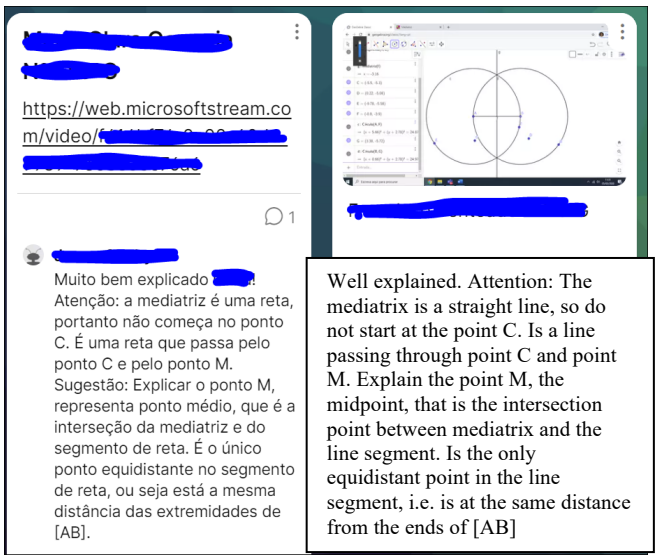
Example of GeoGebra usages

PSTs used GeoGebra in mathematics lessons for knowledge construction and problem solving. Initially they promote students' learning on how the features of this digital educational resource should be used, and then proposed tasks for student learning about geometry.

> The GeoGebra application was used either by the students or by us. Students were challenged to use this resource to understand the properties of the mediatrix…. We used this application during the internship to demonstrate the properties and characteristics of geometrical figures. (PSTs; Collaborative reflection)

PSTs explained the use of GeoGebra to explore isometries, such the rotation of a figure, and the construction of a mediatrix of a line segment. All students made videos using GeoGebra and explaining what they did to solve each task proposed. The students shared their work on Padlet and PST gave them feedback, as illustrated in figure 4 for mediatrix construction task.

Figure 4. Padlet with GeoGebra students' work and PST feedback.



PSTs feedback focused on vocabulary and the correction of the concepts involved. Being a dynamic environment, GeoGebra helped students to visualize the geometric properties in several situations, as PSTs identified.

Preservice teachers view about the use of GeoGebra

The PST recognized that the context of online teaching encouraged them to use a greater number of and more diversified resources. About the GeoGebra, PSTs identified the important role for visualization, mentioned that "it had become essential in Mathematics classes, in the field of Geometry and Measurement, more specifically in isometries" (PSTA; Individual Reflection).

This experience made the PSTs increase their pedagogical knowledge regarding the creation and use of digital resources to explore mathematical ideas, to promote an active participation of students and to diversify assessment instruments, from a formative perspective. One of the PST identify in her individual reflection that had the opportunity to: "learn new applications, their purpose and how they work. This learning is central to my future practice, with technologies increasingly present in our lives, and in teaching" (PSTA; Individual Reflection).

They used resources that they already knew form previous courses in teacher education program and, also, new resources. The PSTs had the support of the in-service teacher and the teacher educators who supervised the internship, and who discussed ideas, shared resources, and helped them in the initial approach during the planning. They appreciated the diversity of resources suggested to them to address specific content and the availability of supervising teachers to support their exploration. They report that support:

> They [supervisors] support with new resources and, also, with applications that we had already used, such as GeoGebra, they help with the use itself. . . [A teacher educator] spent a lot of time to help make a simple demonstration that would last about fifteen minutes of a class" (PSTB; Interview).

The time they needed to spend on resource preparation was a constraint they identified. The internship was an important context for PSTs developed their knowledge about different digital resources and recognized their contribution for students learning.

CONCLUSION

Teacher education has an important role to play in enabling teachers to meet the challenges of mathematics education for the 21st century, particularly regarding teaching mathematics with technology. The nature of the two examples presented is clearly different. The first one highlights the role of prospective teachers in the exploitation of a specific tool. They recognize the importance of creating a project in Scratch to deepen their knowledge of the tool and the relevance of using the tool to explore specific mathematical ideas, in this case involving sequences and computational thinking. The second example, even though it took place during the period of remote emergency teaching due to the COVID-19 pandemic, shows a great involvement of preservice teachers in using digital resources to promote students' mathematical learning. In this internship context the creation of digital resources, planning and implementation was very relevant. They used several new tools and valued the knowledge they had of tools they had worked on throughout their teacher education program, which they now used in their practice. In both examples, they recognize that the work supported during their training can be useful in their future practice and can give them more confidence in their practice because there is a greater knowledge of technology and its potential for learning mathematics. In future work, it would be pertinent to continue to accompany these future teachers and understand what use they make of technology in their practice over time. The experience that can be provided to future teachers during their teacher education should consider the curricular demands and involve them in experiences that contribute to deepening their knowledge of the use of technology in mathematics teaching.

References

Artigue, M. (2021). Some Reflections on ICMI Study 22. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 321–335). New ICMI Study Series, https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_12

Branco, N., Colaço, S., & Cavadas, B. (2022). Online teaching practices of science and mathematics preservice teachers in middle schools. In P. Bull & G. Patternson (Eds.), *Redefining Teacher Education and Teacher Preparation Programs in the Post-COVID-19 Era* (pp. 195–228). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-7998-8298-5.ch011

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Clark-Wilson, A., Robutti, O. & Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM- Mathematics Education, 52*, 1223–1242. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01196-0

Golding, J. (2018). What price coherence? Challenges of embedding a coherent curriculum in a market-driven and high-stakes assessment regime. In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities. Proceedings of the twenty-fourth ICM1 study conference* (pp. 237–244). International Commission on Mathematical Instruction. https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10097142/3/Golding_ThemeB_Golding.pdf

Golding, J. (2023). Coherence and relevance of materials and technologies to support Mathematics curriculum reforms. In Y. Shimizu, & R. Vithal (Eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*, New ICMI Study Series (pp. 173–191). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_12

Hoyles, C., & Noss, R. (2015). *Revisiting programming to enhance mathematics learning. Math + coding symposium* (paper presentation). Western University. https://researchideas.ca/coding/proceedings.html

Huang, R., Spector, J. M., & Yang J. (2019). *Educational technology: A primer for the 21st century*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-6643-7

Huang, R.H., Liu, D.J., Amelina, N., Yang, J.F., Zhuang, R.X., Chang, T.W., & Cheng, W. (2020). *Guidance on Active Learning at Home during Educational Disruption: Promoting student's self-regulation skills during COVID-19 outbreak*. Smart Learning Institute of Beijing Normal University. https://iite.unesco.org/wp-content/uploads/2021/01/Guidance-on-Active-Learning-at-Home-in-COVID-19-Outbreak-SLIBNU-V2.0_2020501.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* National Council of Teachers of Mathematics.

Nasri, N. M., Husnin, H., Mahmud. S., & Halim, L. (2020). Mitigating the COVID-19 pandemic: A snapshot from Malaysia into the coping strategies for pre-service teachers' education. *Journal of Education for Teaching, 46*(4), 546–553. https://doi.org/10.1080/02607476.2020.1802582

Ng, O., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education, 53*(4), 847–860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

Sáez-López, J. M., Sevillano-García, M. L., & Vazquez-Cano, E. (2019). The effect of programming on primary school students' mathematical and scientific understanding: Educational use of mBot. *Educational Technology Research and Development, 67*(6), 1405–1425. https://doi.org/10.1007/s11423-019-09648-5

Thurm, D. & Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: a multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 41–63. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10072-x

Varela, D.G., & Desiderio, M.F. (2021). Perceptions of COVID-19 pandemic impact on the student teaching experience. *Research in Higher Education Journal, 39*, 1–12.

EXPLORANDO EL HUECO ENTRE EL CURRÍCULO PRETENDIDO Y EL IMPLEMENTADO: PERCEPCIONES DE DOCENTES EN FORMACIÓN Y EN ACTIVO

Exploring the gap between intended and enacted curriculum: perceptions of future and in-service teachers

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J.M.

Universidad de Zaragoza

Abstract

The arrival of new curricula has reignited questions such as 'Why should mathematics be learnt in school?' and 'What kind of mathematics should be learnt?'. Although the answers are similar to those traceable in curricula from much older laws, not necessarily explicitly competence-based, the new curricula incorporate significant innovations. However, as pointed out by other authors with whom we agree, the change in teaching practice is not yet fully realised. In this seminar, we explain the process of creating these curricula in Spain, with a specific focus on Aragon, whose design is inspired by other international curricula. We also examine the associated teacher training. Subsequently, we present some results that illustrate the reflections of future teachers upon reading this new curriculum and how they compare with the concerns of in-service teachers.

***Keywords**: mathematics education, classroom culture, curriculum, teacher training.*

Resumen

La llegada de los nuevos currículos ha vuelto a poner sobre la mesa cuestiones como ¿para qué hay que aprender matemáticas en la escuela? o ¿qué matemáticas hay que aprender? Aunque las respuestas son similares a las que se pueden rastrear en currículos de leyes muy anteriores, no necesariamente competenciales de forma explícita, los nuevos currículos incorporan importantes novedades. Ahora bien, tal y como señalan otros autores con los que coincidimos, el cambio en la práctica docente no termina de producirse. En este seminario exponemos cómo ha sido el proceso de elaboración de estos currículos en España y el caso particular de Aragón, cuyo diseño se inspira en el de otros currículos internacionales. Además, analizamos cómo ha sido la formación al respecto. A continuación, presentamos algunos resultados que ilustran las reflexiones de futuros maestros al leer este nuevo currículo y cómo se comparan con las inquietudes de docentes en ejercicio.

***Palabras clave**: educación matemática, cultura de aula, currículo, formación de profesorado.*

INTRODUCTION

The mathematics curriculum holds significant importance in the field of Mathematics Education research. This importance is evidenced by its presence in academic Handbooks such as those by Bishop et al. (1996) and Clements et al. (2013), as well as the recent specialised publication (Shimizu & Vithal, 2023) emerging from the 24th ICMI Study Conference School Mathematics Curriculum Reforms. Moreover, at international conferences like ICME or CERME, the existence of dedicated workgroups focusing on the research and development of mathematics curriculum and curriculum resources is a common feature. Whilst there is no standalone entry titled "Curriculum" in the Encyclopedia of Mathematics Education (Lerman, 2020), explicit references can be found within ten of its entries, both in their titles and in their associated keywords.

The recent curricular reform in Spain has once again foregrounded research into aspects of curriculum implementation, the objectives of education, and how focusing on these objectives necessitates a

Beltrán-Pellicer, P., Martínez-Juste, S. y Muñoz-Escolano. J. M. (2023). Explorando el hueco entre el currículo pretendido y el implementado: percepciones de docentes en formación y en activo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 97–112). SEIEM.

competence-based approach. While not the first "competence-based" curriculum, the new regulation introduces significant innovations concerning curricular organisers and represents "the first significant change of the 21st century in the Spanish educational field" (Contreras, 2022, p. 64). Motivated by this challenge, the topic was addressed at the 2022 SEIEM symposium held in Santiago, with a seminar entitled "The development of the new curricular framework in mathematics", coordinated by Antonio Moreno (2022) and featuring presentations from Ana Paula Canavarro, Luis Carlos Contreras and José Manuel Diego-Mantecón. It is worth noting that this interest is not at all new to our society, as curricular documents and regulations also had explicit representation in various presentations at previous symposium seminars, such as in De Castro (2016) or Puig (2008).

The concept of curriculum has evolved, now encapsulating more than just a syllabus or list of teaching topics. Today, it encompasses textbooks, instructional methods, the pedagogical philosophy informing teaching materials and practices, teacher training, and assessment guidelines (Osta, 2020). Research, as a result, offers varied theoretical curriculum models. One frequently used in maths education posits three levels: intended (system level), implemented (class level), and attained (student level) curricula (Valverde et al., 2002). Some, like Osta (2020, pp. 576-577), include an "assessed curriculum", referring to content and processes assessed in tests.

Remillard and Heck (2014) reflect upon the curriculum enactment process across different cultures and educational realities, refining the model from Valverde et al. (2002). They incorporate the aforementioned assessment aspects and distinguish between different instructional materials of the intended curriculum. These authors distinguish at the first level the *official curriculum*, involving the educational administration, and the *operational curriculum*, involving the teacher and students. In the official curriculum, they identify three elements:

- *Curricular aims and objectives*: these are the specified learning expectations and outcomes often set or adopted by the administration, which may include, for instance, the content, specific competencies, or various learning standards present in ministerial orders.
- *Curricular content of consequential assessments*: this refers to the content of official evaluations that have consequences for students, teachers, or schools. In the Spanish system, this would be determined by external tests, such as the University Entrance Examination (*Prueba de Acceso a la Universidad*, PAU).
- *Designated curriculum*: this is the set of instructional plans specified by an authorised governing body. It is generally informed by the official curricular aims and objectives and is intended to offer guidance towards addressing these goals. It provides a level of instructional specificity that curricular objectives and assessment items do not. This can also include certain "instructional materials" that are developed or endorsed by the administration. In the Spanish case, the instructions and recommendations for the development of course planning documents (an official document called "programación didáctica") provided by the educational inspection service, as well as repositories with different learning situations, can serve as clear examples of this.

These three elements, along with others such as instructional materials that may be external to the educational administration (e.g., commercial textbooks), directly influence the operational curriculum, specifically the interpretations and decisions teachers make in order to envision and plan instruction (*teacher-intended curriculum*), the interactions between teachers and students around the tasks of each lesson and accumulated lessons in a unit of instruction (*enacted curriculum*), and ultimately, the learning achieved by the students (*student outcomes*).

Thus, as reflected in these models, teachers emerge as key agents in the implementation of these levels of the curriculum, being responsible for interpreting and transforming the official curriculum into an operational curriculum, proposing and managing different instructional tasks in the classroom.

Llinares et al. (2020) note that the gap between the official and operational curriculum, regardless of the level of detail and prescription of the curriculum description, markedly affects the relationship between teachers and curricula, as the curriculum implemented by teachers in their teaching practice always tends to be a gradual composition of the old and the new. In this regard, we can assert that knowledge of the curriculum and mastery of the professional competencies required for its articulation are essential, as pointed out by various models of teacher knowledge and skills, such as the Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC) (Godino et al., 2017).

Contreras (2022) compares the objectives and elements of the new national curriculum with those of the 90s LOGSE Basic Curricular Development, concluding that the changes are heading in the right direction. However, he emphasises the need for teachers to embrace curriculum principles and for initial training to align with derived professional competences. Canavarro (2022) pinpoints critical issues for new curricula development, such as teachers adapting to a curriculum challenging dominant teaching conceptions and educational administrations' commitment to curriculum development and teacher collaboration. Similarly, Diego-Mantecón et al. (2022) underline the need for collaborative working groups among different discipline teachers to effectively integrate STEM subjects as proposed in new curricular guidelines.

Over the last two academic years, the authors have actively participated in Aragon in the construction of the official curriculum and in the implementation processes of the new regulations. In this paper, we try to answer some of the questions posed by the seminar coordinator. For this, we briefly address in the first section the process of drafting the official curriculum, considering the three elements pointed out by Remilliard and Heck (2014). Secondly, we indicate some measures directed towards teachers and their training that have been carried out by educational administrations, societies, or teachers' groups for the development of the new curriculum in Aragon and the rest of Spain. Thirdly, we try to identify and analyse different perceptions and concerns of teachers in training and in practice regarding the new curricular regulations through the analysis of the productions and reflections of teachers in training who make an active reading of the curriculum and the questions asked by in-service Aragonese teachers addressed to the educational administration about the new regulations. We conclude by suggesting some actions that we consider fundamental for curriculum development.

THE PROCESS OF DEVELOPING THE OFFICIAL CURRICULUM

The development of the national curriculum and the analysis of the new national framework, its objectives, and its elements were already the subjects of the presentations at the previous seminar (Canavarro, 2022; Contreras, 2022). In this paper, we will describe the process of developing the curricular document in the Autonomous Community of Aragon, where elements distinct from those of the official curriculum, specific to the designated curriculum, have been developed. For example, the clarification around learning situations and teaching guidelines. Subsequently, we explore elements inherent to the *curricular content of consequential assessments* through a review of the tasks from the pilot tests of the PAU.

The curricular development process in the Autonomous Communities

In Spain, Autonomous Communities have the authority to develop their curricula based on the national framework. In this sense, regional governments can make decisions to complete, specify, or reorganise the national curriculum and introduce methodological guidelines. We present the case of the Autonomous Community of Aragon, in whose development the authors have been involved at various levels of the process.

In the initial phase, the national curriculum (MEFP, 2022a, 2022b), the document prepared by CEMAT (2021), and different international curricula were reviewed, particularly the Portuguese curriculum (Canavarro, 2022). To facilitate the implementation of a curriculum with greater technical complexity, Aragon opted for a curricular architecture that would bring the normative document

closer to the reality of practising teachers. In this way, while maintaining the prescriptive curricular elements of the national regulations, the attempt was made to clarify and expand the explanations about these, provide more information on the evolution of assessment criteria throughout the stages, introduce practical guidelines for working in the classroom with the core contents, introduce didactic and formative assessment guidelines, and specify the design of learning situations, providing real examples of situations that mobilise the specific competencies experienced in the classroom. All of the above is supported by references to research in mathematics education that could assist teachers in delving deeper into the issues raised in the curriculum.

Thus, in the first instance, a curricular document was proposed that presented an original architecture and incorporated new curricular elements. The curricular documents of the area of mathematics for Primary Education, Compulsory Secondary Education (ESO, in the Spanish acronym) and Baccalaureate (DECD, 2022) are structured as shown in Table 1:

Table 1. Structure of the Aragonese Curriculum Document

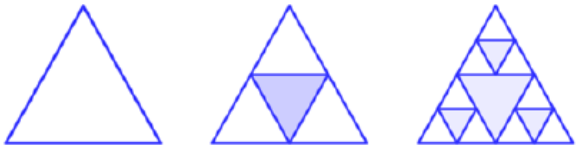
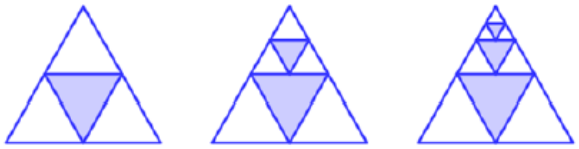
Document section	Description
Introduction	An introductory section that includes, for example, the purposes of mathematics education and other general aspects.
I. Specific competencies	Each competency is detailed, linked with other specific competencies, and aligned with the student profile upon completion of compulsory education.
II. Assessment criteria	Explicit links are carefully established with the specific competencies and clarifications are introduced on the evolution of the criteria throughout the stage, especially in primary education.
III. Core contents	In the first part, a detailed description of each of the senses that structure the core contents is carried out. In the second part, the tables of core contents are introduced by cycle/course, distinguishing for each of the sub-blocks a column with the contents (knowledge, skills and attitudes) and another with "Guidelines for Teaching".
IV. Recommended methodological approaches	This section is structured from greater to lesser complexity in subsections: 4.1 General didactic and methodological suggestions for the teaching of mathematics. 4.2 Assessment of learning, with special attention to the formative character of assessment, adding suggestions on how to effectively implement this approach. 4.3 Design of learning situations. The subsection addresses the general characteristics of the design of learning situations within the discipline. 4.4 Examples of learning situations. The design and implementation of different learning situations are exemplified, which have been extracted from the literature in mathematics education research or have been developed and experimented by the people who made up the working groups.

The "Guidelines for Teaching" column within the Core Contents section includes (see Figure 1): internal connections between blocks of the subject, more detailed descriptions of the contents of the different blocks, types of activities within each block of senses, justifications for possible timetables by course, connections with other subjects, concretization, explanation and exemplification of the items contained in the core contents, types of tasks that can be proposed for different core contents, materials and resources specifically associated with certain core contents, etc. This characteristic of the Aragonese curriculum, clearly inspired by the Portuguese curriculum (Canavarro, 2022), is one of the features that distinguish it from other regional curriculum developments and represents one of its main strengths. It is worth noting that although the Early Childhood Education stage does not have a specific area or subject of mathematics, the curriculum development also followed a similar structure (DECD, 2022).

To be able to develop such an ambitious document as the described one within the limited time available in the autonomous community, mixed working groups were set up that combined practicing teachers with extensive experience and recognized prestige (experts in mathematics education, active members recommended by mathematics teachers' societies, etc.) and university teachers from the

area of Mathematics Education at the University of Zaragoza. For the mathematics subjects, these mixed groups developed high-quality, specific guidelines, accessible to teachers and based on updated scientific literature.

Figure 1. Excerpt from a table of core contents with the column "guidelines for teaching" (DECD, 2022)

<table>
<tr><th colspan="2">A. Sentido numérico</th></tr>
<tr><td colspan="2">El sentido numérico acompaña siempre, en los quehaceres diarios y en la vida académica. En este curso se realiza una síntesis de todo lo trabajado durante la primera etapa de la secundaria. Aparecerán nuevas tareas, pero los procedimientos son similares. Por tanto, los razonamientos se esperan más maduros y críticos. El alumnado debe ser capaz de expresarse matemáticamente con la terminología adecuada tanto para escribir las secuencias del cálculo como para expresar sus razonamientos y conclusiones de forma verbal.</td></tr>
<tr><th>Conocimientos, destrezas y actitudes</th><th>Orientaciones para la enseñanza</th></tr>
<tr><td>A.2. Cantidad:
- Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora.
- Realización de estimaciones con la precisión requerida.
[...]</td><td>En lo que se refiere al manejo de las cantidades, estimaciones y uso de los diferentes sistemas numéricos, no hay mucha variación respecto de los dos primeros cursos de la ESO.
En este curso, cuando estudian los conjuntos numéricos, además de la relación de contenido entre ellos, se debe reflexionar acerca de qué acciones se relacionan con cada campo numérico (Calvo et al., 2016): contar (N), situar (Z, Q, R), expresar variaciones (Z, Q), expresar partes o razones (Q), medir (Q, R), ordenar (N, Z), codificar (N).
[...]</td></tr>
<tr><td>[...]</td><td>[...]</td></tr>
<tr><td>A.4. Relaciones:
- Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema.
- Patrones y regularidades numéricas.</td><td>Una posible actividad a realizar en este bloque sería la siguiente: En cada una de las dos series, los triángulos se obtienen uniendo los puntos medios de los lados. Calcula el área de los triángulos sombreados, así como de los triángulos que ocupen los lugares 4, 10 y 15 de la serie (Gairín y Sancho, 2002):
Serie 1:

Serie 2:
</td></tr>
</table>

In addition to the ESO subjects defined in the national regulations, it should be noted that the curricular development team fully designed the optional 4th ESO subject, *Mathematics for Decision Making*, which is articulated around knowledge related to modular arithmetic and cryptography, graph theory, and game theory and collaborated in the design of the *Key Competence Reinforcement Laboratory* subject for 1st and 2nd ESO.

Curricular content of consequential assessments: the pilot tests of the PAU

The PAU, conducted at the end of the second year of Baccalaureate, are the external assessment tests that most influence the teaching and learning processes of mathematics in Baccalaureate, particularly in that final year (Contreras et al., 2010; Rodríguez-Muñiz et al., 2016). Currently, the Ministry of Education, through the National Institute of Educational Evaluation, is working on the design of a new PAU that adheres to the competency learning of the new curriculums through various working groups. To this end, during this school year, new tests have been carried out as a pilot, where the statements of the tasks and the assessment rubrics have been released (https://bit.ly/3oOwu5H).

The pilot test's conditions differ from the current ones, extending the completion time from 90 to 105 minutes and allowing graphic calculators. Unlike the current PAU, the test proposes thematic evaluation units comprising various student tasks. It particularly emphasises competencies like modelling, representation, and extramathematical connections. Conversely, competencies like conjecture formulation, reasoning, and communication processes aren't as prominent. Moreover, the test's nature does not address collaborative work, and restrictions on dynamic geometry systems limit the evaluation of some key curriculum competencies.

Societies, such as the RSME (https://bit.ly/3OPlYWn) or the CRUE (https://bit.ly/3OSjKFQ), have pointed out potentialities and limitations of these tests. However, it is worth noting that this attempt

at alignment between the PAU and the Baccalaureate curriculum is not free from difficulties and tensions due to the social function of these tests in which the responsibility of organisation corresponds to the universities.

INITIAL AND CONTINUOUS TRAINING AROUND THE NEW CURRICULA IN SPAIN AND IN ARAGON

As we have seen, these new curriculums pose a challenge. Thus, with the arrival of these new curriculums, it would be desirable to have initial training structures and professional development programs that integrate theory and practice in line with Coles et al. (2023). Administrations and associations at both the national and regional level have proposed training or dissemination initiatives for the new framework.

Various training initiatives were carried out in the past academic year. Nationally, the INTEF (National Institute of Educational Technologies and Teacher Training) organised generalist courses and conferences, including "From curriculum to classroom practice", "Learning situations for the development of competencies", "Assessment of competencies through performance" and "National conferences on the curricular, competency-based and inclusive model". Specific to mathematics, courses like CEMAT's "Foundations for a mathematics curriculum in non-university education" were developed. Notable contributions include a book titled "Contributions to the development of the curriculum from research in mathematics education" by the SEIEM and seminars by the FESPM (Spanish Federation of Mathematics Teachers' Societies), such as: "Mathematical senses in the new non-university curriculums" and "Learning situations in the mathematics classroom".

During the 2022-2023 academic year, a "pyramidal" training programme was developed in Aragon, focusing on new curricula. Primarily providing generalist training, it differentiated mostly by educational stages, with a few exceptions targeting specific knowledge areas or subjects. It began within a small administrative group, later extended to the educational inspection service, and then to management and educational guidance services. The training, covering the new regulatory framework, curriculum organisers, competency-based assessment, learning situations, and teaching programming design, also included teaching advisors from the Teacher Centres (CP, in Spanish acronym).

From that moment on, the CPs organized generalist courses on new curricula in their area of action where teachers could register voluntarily. These courses (between 10 and 12 hours of training) replicated the initial structure incorporating sessions on curriculum regulation, competency-based assessment, design of course planning and learning situations. Again, this training mostly overlooked the specificity of each subject or area of knowledge, even more so if we consider the differences that are generated between subjects with the incorporation of the new curriculum elements, especially with the incorporation of the specific competencies of each subject. For example, only one of the CPs organized the session on learning situations differentiated by specialities.

Aside from this institutional program, some individual initiatives from some CP advisors, mathematics education research groups, groups of private teachers from a centre, the Aragonese Society of Mathematics Teachers, or private entities, have promoted the implementation of continuous training courses related to the new curriculum, but focused on mathematics. Notable courses include "LOMLOE Mathematics", "Mathematics for Decision Making" organized by teacher centres, individual initiatives such as those of Educaixa HelloMath! Program (https://bit.ly/3P76P3d) and attempts to create communities and groups of teachers who collaborate for their professional development (Llinares et al., 2020) from various projects based on the development of Lesson Studies (Martínez-Juste, 2020) or the use of social networks such as Twitter or Telegram. Additionally, it is worth noting that, as has probably happened in other autonomous mathematics teachers' conferences, the program of the V JEMA (Mathematics Education Conference in Aragon) has been marked by lectures, courses and workshops related to the implementation of the new mathematics curriculum.

However, in addition to these specific training activities, it would be interesting to have a stable and ambitious ongoing training plan from the Spanish scientific societies, similar to the one outlined by Mellone et al. (2023).

PERCEPTIONS OF TEACHERS IN INITIAL TRAINING AND IN PRACTICE ABOUT THE NEW CURRICULA

An interesting issue that arises in the context of implementing a new curriculum regulation is to explore the challenges faced by both pre-service and in-service teachers. Once these challenges are identified, it will be possible to design and implement training processes that address the demands of bringing these curriculums to the classroom. With this objective, in this section we present some results of two experiences that illustrate the different perceptions of pre-service teachers and in-service teachers about the regulations.

An experience with future teachers

The study plans comprising the initial training of teachers include, in one way or another, an understanding of the curriculum. In this way, future teachers must not only know the current curriculum that will govern their professional practice but also develop the necessary skills to interpret it and connect it with the rest of the didactic-mathematical content they acquire throughout their training. In this time of curricular change, it is particularly interesting to gain an understanding of how future teachers approach the reading of curricular documents (Drake et al., 2014; Wilson, et al. 2010). What do they focus on? What catches their attention? Do they relate their reading of the curriculum to their experience as students within the educational system? Do they relate it to what they learn in their university training as future teachers?

To answer these questions, we have designed a training device that is framed within the subject Didactics of Geometry, in the third year of the degree in Primary Education Teaching at the Faculty of Education in Zaragoza. Additionally, this is the last compulsory didactic mathematics subject of the degree, so at the time the device is implemented these students have a complete view of the area (within the framework of initial training).

The experience, in which 57 students participated, consisted of the “active reading” of the new Mathematics curriculum for Primary Education developed in Aragon. This reading was carried out through the online platform Perusall, which offers an environment that invites users to make shared highlights and annotations in the document. These annotations sometimes lead to interactions between users, as they can ask questions, answer them, and rate comments. In addition, the platform keeps a record of the time each participant spends on each page and calculates metrics of the quality of comments and interactions. These metrics, set by the course teacher, consider various factors such as interaction time, comments, words, received responses and votes, and full document reading. The default configuration in the training device led to an average score of 2.75 out of 3. Most participants (73.3%) achieved full marks, while 23.3% completed the task without full marks, and only 3.3% didn't interact. Participants made 1321 comments and asked 123 questions, with 53 remaining unanswered. On average, it took about one hour and 56 minutes to complete the task.

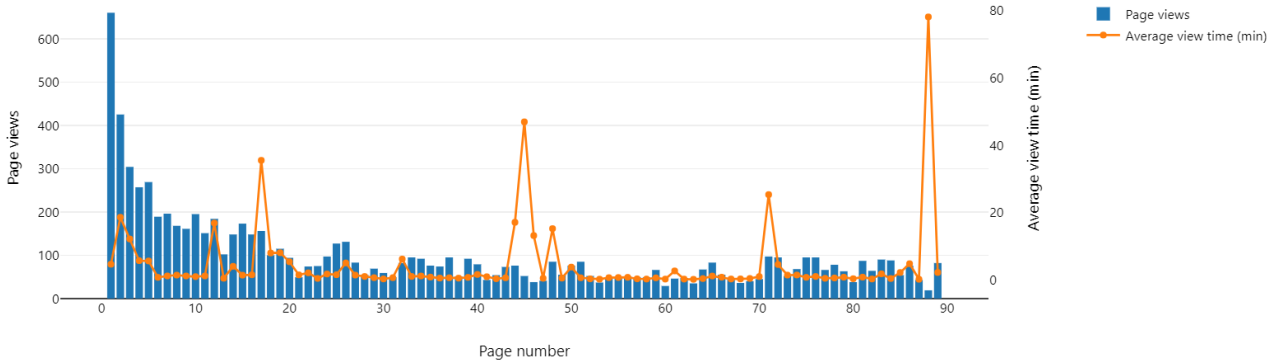
The instructions for the activity were as follows (this statement and students’ productions have been translated to English by the authors):

> This last homework counts double. It involves actively reading the document corresponding to the new Mathematics curriculum of Aragon through Perusall. Paying special attention to everything related to geometry, of course, but don't just stick to that.
>
> Perusall is a social network where interactions are valued with its measurement system. It will invite you to underline, comment, pose doubts, and answer those of other classmates (this is the sui generis definition of active reading in this case). Greater relevant participation, greater score.

If you need to take a look at any definition or article from the regulatory part (key competences, specific competences, learning situations, etc.), here it is in pdf and docx format. All the curriculum development is here: https://educa.aragon.es/en/-/normativa-primaria

Figure 2 shows the number of views per page of the document and the average time spent reading each of them. Leaving aside the issue that there are probably outliers for the average time (perhaps by leaving the browser window open), the trend is that there is a significantly higher number of views on the first pages of the document, decreasing until stabilizing around 50-100 views from page 20 onwards. Let us note that page 20 begins the section dedicated to basic knowledge, while the initial pages revolve around the preamble, specific competences, and assessment criteria.

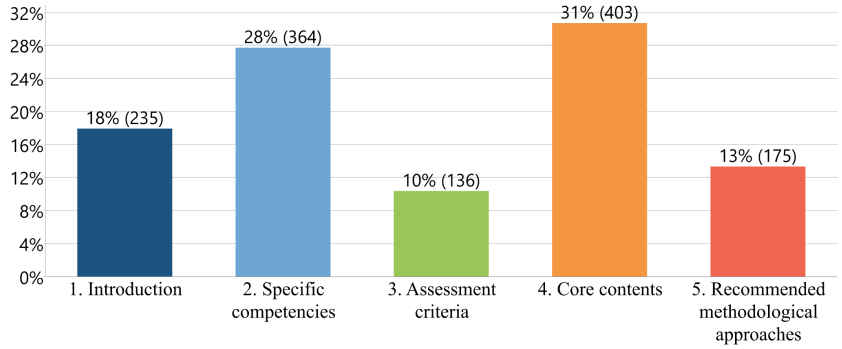
Figure 2. The number of views and time spent reading each page.



A total of 1313 interactions were collected, of which 1190 were catalogued by the platform as comments and 123 as questions. It is worth noting that the application separated the participants into four groups (default option), so that each interaction group was made up of about 15 students. Among the comments, annotations about something believed to be important, such as mathematics or certain teaching methodology, reflections that relate what was experienced in the degree subjects with what is developed in the curriculum, and annotations and value judgments based on their experience as Primary and Secondary students are distinguished. As for the questions, some are aimed at clarifying what a certain concept that is not clear is and others at seeking the opinion of the rest of the group. For the analysis of these interactions, a qualitative methodology of content analysis has been followed, following an inductive-deductive coding scheme (Braun & Clarke, 2021).

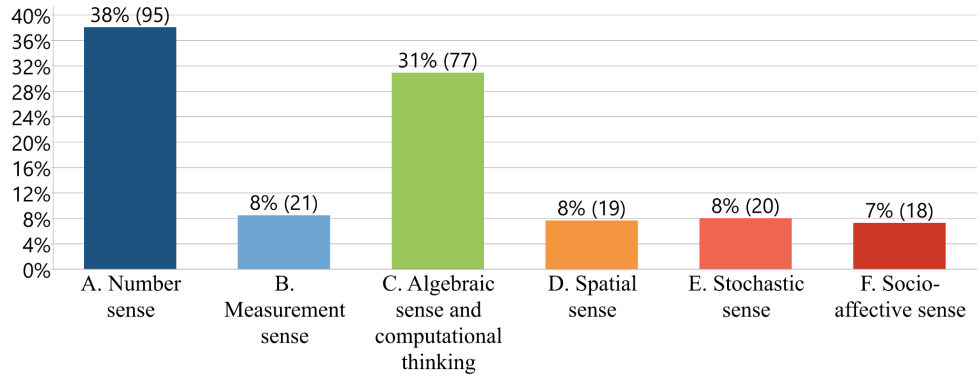
In the first place, the section of the document in which they made the underlining and annotations was coded. It is observed that, even though the introduction receives attention with comments and annotations, in line with the time dedicated to its reading (Figure 3), students training to be teachers are much more interested in the part of knowledge, followed by the specific competences. It is worth mentioning that the recommendations of Figure 3 refer to the final section of recommendations (they are not the Guidelines for teaching within the Core Contents).

Figure 3. Number of annotations made by future teachers in each section of the curriculum.



As for the Core Contents, we observe two clear results. On the one hand, the fact that, when they make annotations in the Core Contents section, these are mainly concentrated on the column of Guidelines for teaching (14% versus 86%). On the other hand, even though the task invites to focus on aspects of geometry (typical of the subject), we find many comments that address other types of core contents (reading beyond what is asked in the task of the subject arouses interest). Now, the senses that receive the most comments are the numerical sense and spatial sense (Figure 4). We dare to suggest that this distribution of the number of annotations is due to the importance they attach to the different core contents in the learning of Primary Education students.

Figure 4. Distribution of annotations in the Core Contents section.



In this way, the participants had taken Didactics of Arithmetic II during the previous semester. This subject revolves around the didactics of rational number and the processes of continuous magnitudes measurement are greatly worked on. However, the sense of measure receives very few annotations and underlines, being at the same level as algebraic sense and computational thinking, stochastic sense, and socio-affective sense.

Regarding the final section of Recommendations, which should not be confused with the column "Guidelines for teaching" of the section dedicated to the core contents, an uneven attention is also noted for each of the subsections. In this way, half of the 175 annotations of the participants refer to the subsection "5.1. Didactic and methodological suggestions" (50%), followed by "5.4. Learning situation examples" (26%). "5.2. Assessment" receives 17% of the annotations and "5.3. Learning situations design" the other 7%.

The underlining and annotations made during the active reading activity denote that this experience promotes reflection on the training received in the Degree in Primary Education Teaching. For example, in the sense of the measure we observe that there are students who connect with what was learned in Didactics of Arithmetic II:

> This concept must be clear in the teaching-learning process of Mathematics in Primary Education. The sense of measurement begins with the observation, comparison, analysis, and understanding of the objects that surround us. We have worked on this concept during the Didactics of Arithmetic II course and, thanks to the use of tangible material, students can better understand this term.

Other comments relate the experience lived in Primary or Secondary Education with the experience lived as students in the Teaching subjects. Thus, we find reflections like the following, which point out a common theme: the mistreatment of geometry in the enacted curriculum, which comes to illustrate some of the difficulties they have in the subject Didactics of Geometry, where their content knowledge is the source of difficulties:

> Guys, the same thing happened to me, I don't have much memory of having studied geometry in class. I suppose the reason is what you all are saying. This has also made the current course at the university, the didactics of geometry, difficult for me. I guess it has happened to all of us. In the didactics of arithmetic, I didn't have as many problems.

We also identify reflections that connect elements of the new curricula, such as learning situations, with what was learned in the subjects of the area: “Often when reading these lines, we struggle to understand their application. However, the development of the 'Didactics of Geometry' course clearly exemplifies the application of all these learning situations”.

In addition to the novelties in terms of curricular architecture, the new curricula incorporate novelty content, such as computational thinking. This is something that catches the attention of the participants, some of whom did not relate it a priori as something proper to the subject of Mathematics: “This concept seems very curious and interesting to me within the field of Mathematics”. However, other participants acknowledge having worked on the processes of computational thinking in the ongoing subject (Didactics of Geometry): “We have carried out the recognition of certain patterns in class where we have formulated our conjectures and learned about some theorems (Pick, Euler...)”

This comment is illustrative of the threads that are generated from interactions with other participants. Thus, another one replies: “That’s right, moreover we have done it recognizing patterns and establishing regularities without having any idea about the theorem we were facing.” And, finally, another participant agrees with his classmates, although he indicates that he is not entirely clear about what exactly computational thinking is:

> I believe so, I agree with you, as I deduce that when working in this area, the conjecture with primary school students is mainly focused on problem-solving through logic, which is essentially the definition (in a brief and clear way) of computational thinking (I think).

Outside of this thread, there is also some confusion regarding what computational thinking entails and what processes it involves in the Mathematics classroom: “It should be noted that the process of problem-solving in mathematics and the computational resolution process have certain similarities. What steps does each process have?”.

The emergence of a socio-affective competency axis, as well as a sense, also catches the attention of the participants, who recognise its importance in teaching and learning processes: “Emotion management is important in the arithmetic field, as many students feel frustration and reject this subject without even managing their emotions to continue trying.”.

Frequently Asked Questions in Aragon

Following the trainings carried out in Aragon, the Directorate of Educational Inspection prepared a Frequently Asked Questions (FAQ) document titled “FAQs regarding the curriculum, assessment, promotion and qualification in the different educational stages” (updated on February 28, 2023) (Government of Aragon, 2022). This is a 30-page document available on the website of the Department of Education, Culture and Sports of the Government of Aragon and is structured in eight sections, as indicated in Table 2. These questions reflect the concerns and anxieties of teachers regarding the implementation of the new curriculum regulations. We have conducted a content analysis on this document, identifying several thematic focuses, which we present below and which condense the feelings of practicing teachers.

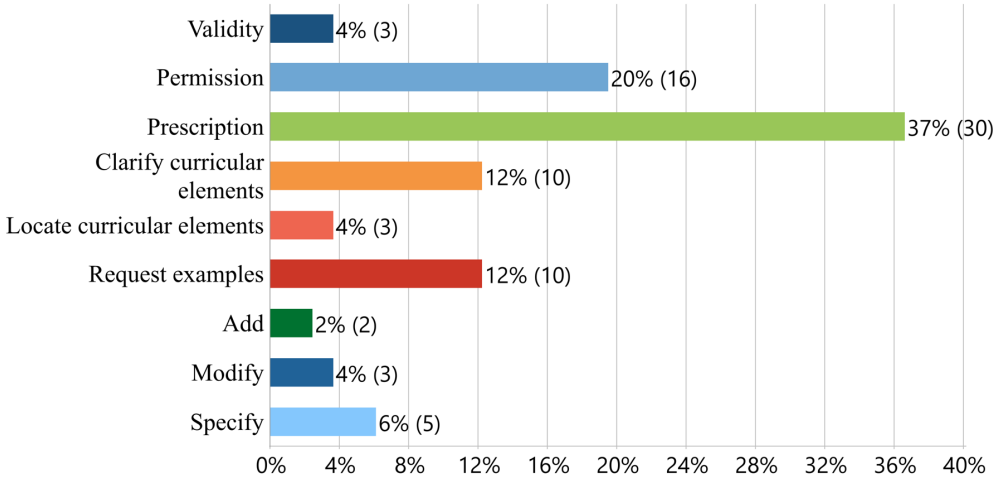
The initial section contains no questions, as it simply enumerates, by courses and stages, the current curriculum regulations. Otherwise, from the structure itself (Table 2), it is already clear that assessment and the development of the course planning document are some of the aspects of the regulations that generate the most doubts and concerns. In this sense, it is also worth noting that the seven pages dedicated to “Comparative Assessment Charts” mainly address technical issues such as promotion, permanence, qualification or simultaneity of studies. In addition, the document reserves a significant space for the Aragonese bilingualism model Brit-Aragon, which we will not consider in our study. However, we note that assessment and grading within this model is also a central element. The rest of the document includes 69 questions that we analyse in our study.

Table 2. Structure of the FAQ document from the Government of Aragon.

Section	Pages	Questions
Application of the current curriculum and evaluation regulations	2	0
General	6	PG1-PG34
Stage: Early Childhood Education	1	PEI1-PEI2
Stage: Primary Education	2	PEP1-PEP11
Stage: Compulsory Secondary Education	1	PESO1-PESO8
Stage: Baccalaureate	1	PBA1-PBA2
Brit-Aragon Model	4	PMBA1-PMBA17
Course planning document	5	PPD1-PPD12
Comparative Assessment Charts	7	0

First, what we observe is that the questions can be classified according to their purpose (Figure 5), even though some may address several of them. Thus, the majority of the issues express doubts about the compulsory nature of certain aspects of the regulations. For example: "Is it compulsory to program learning situations?" (PG4) or "Are the guidelines for teaching that appear in a column associated with core contents compulsory?" (PESO6). This illustrates a certain difficulty in interpreting the regulations, in particular, to discern the prescriptive wording from what is not. There are also many questions (20%) whose purpose is to ascertain whether permission or authority is given for certain actions, an example being "Can a learning situation cover different subjects?" (PG6) or "Can the wording of the assessment criteria be modified?" (PPD11). In particular, PPD11 and others are related to the difficulty, mentioned earlier, in discerning the prescriptiveness of the wording from other optional elements. PPD11 well illustrates the fact that some questions ask whether certain curricular elements can be added, modified, or specified.

Figure 5. Purposes of the questions in the FAQ document.



There is also a significant percentage of issues that request clarification of the meaning or implications of a curricular element, such as "What do I associate the grading criteria with?" (PG25) or "How is it checked whether the students have reached the key competencies given that at this stage they have no associated operational descriptors?" (PEI1). There is a particularly striking confusion regarding learning situations, as shown by the question "Is a learning situation the same as a teaching unit?" (PG2). In some cases, some questions express difficulties in locating curricular elements in the regulations: "Where are the specific competencies?" (PG10). Finally, 12% of the questions are essentially requests for models or examples, such as "Is there an official model for elaborating the course planning document in the Autonomous Community of Aragon?" (PPD2).

In analysing the focus of these questions, a 34% of queries concern curricular elements (key competences, exit profile, specific competencies, core contents, etc.). Given the substantial changes

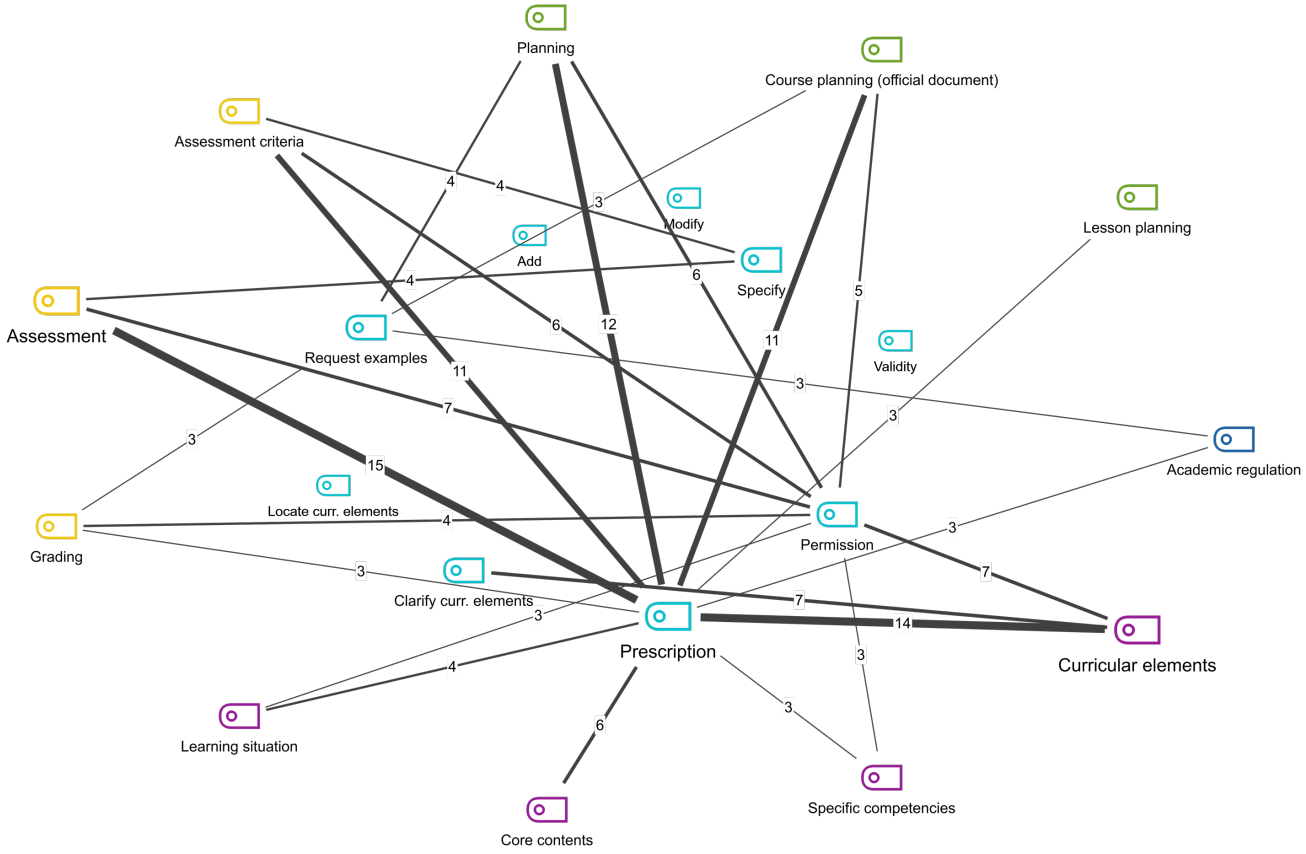
in the new curricula, such queries are understandable, for instance, "Are the assessment criteria associated with core contents?" (PG11).

Interestingly, 29% of FAQs tackle assessment-related topics (assessment criteria, assessment instruments, etc.), and an additional 8% explicitly discuss grading (grading criteria, weighting, etc.). Although grading is part of evaluation and assessment, we made a distinction during coding when grading was explicitly mentioned. For instance, "Can the assessment instruments related to the assessment criteria be weighted?" (PG13) was tagged as both assessment and grading, as it pertains to criteria (assessment) but also clearly concerns grading by asking about weighting. Conversely, "Can different weight be given to specific competences?" was coded as grading but not as assessment.

The high frequency of assessment and grading queries suggests that these are key concerns for practising teachers aiming to align with regulations. Authors like Ohlsen (2007) highlight the difficulty of changing classroom practices due to contentious grading demands and ingrained assessment practices. Questions also encompass academic organisation, including promotion, graduation conditions, planning, and interdisciplinary approaches.

To better interpret these FAQs, we can correlate the purpose and the object of the questions. Figure 7 displays the co-occurrence map of codes within each question, revealing high concern about prescriptive elements in assessment, particularly relating to assessment criteria. Uncertainty around prescriptiveness of curricular elements and course planning document preparation is also prevalent.

Figure 7. Co-occurrence map of codes (3 or more matches) in the FAQs.



CONCLUSIONS

The official curriculum represents a significant change from the previously implemented curriculum. On this occasion, educational administrations have tried to incorporate new elements into curricular purposes, the designated curriculum, and assessment to guide teaching practice in the classroom and to influence the processes of curriculum enactment (Remilliard & Heck, 2014).

Training plans from educational administrations, apart from exceptional initiatives, focus on general aspects of the new curricula. Given the difficulties observed in interpreting curricular elements in the experience with future teachers, as well as in the questions collected in the FAQ document, we believe that a greater presence of specific didactics in the Teacher and Master's Degree plans is necessary. Likewise, the ongoing training of practicing teachers should be framed within professional development plans, which are currently non-existent. The difficulties we have observed regarding the meaning of curricular elements coincide with what we have noticed in the trainings we have conducted. Not only that, but novelties such as computational thinking present challenges even in their definition (Weintrop et al. 2016). In any case, a future line of work should explore the perceptions of these specific innovations in mathematics with in-service teachers. The experience with future teachers has shown that, for example, the socio-affective competency axis, sparks interest and almost all the participants who made annotations agreed on its importance, even though its impact on the cognitive plane, as well as on the rest of the facets of the teaching and learning processes, was not clear (Beltrán-Pellicer & Godino, 2020).

Active reading of curricular materials is a rewarding task, facilitating engagement with curricular regulations. Specifically, the "Guidelines for teaching" column has sparked considerable interest among prospective teachers. These guidelines, while not prescriptive, form part of the designated curriculum (Remilliard & Heck, 2014), akin to curricular materials proposed by administrations in other international curricula such as Portugal or Ontario. Land et al. (2015) explored how pre-service elementary mathematics teachers engage with educative curriculum materials, marking an emerging research line in mathematics education. They concluded that these materials should incorporate uncommon design features. Hence, the inclusion of the guidelines column in the curriculum, alongside core contents, appears to promote thorough and formative reading.

As for teachers' perceptions, the analysis of the FAQs has revealed that one of the major concerns of practicing teachers facing the implementation of the new curricula has to do with prescriptiveness. This suggests that the official curriculum is not so much understood as an element that characterizes teaching practice, but as something merely administrative. The interest in the prescriptive elements of the curriculum in the FAQs, as well as the demand for specific guidelines and examples from the administration, highlight the tensions experienced by practising teachers regarding their autonomy in curriculum implementation. Flores (2005) and Hong and Youngs (2016) have identified these concerns in interviews with teachers facing new curricular changes across different educational cultures, where teachers may not welcome more curricular autonomy, as it requires them to make their own decisions on complex issues instead of following external guidelines. Besides, there is also concern about assessment and, in particular, grading. As we have already pointed out, this is consistent with observations from authors like Canavarro (2022) and Ohlsen (2007), who identify assessment as one of the key aspects of curricular change.

In any case, we cannot expect that curricular change alone will bring about a change in classroom practice (Gimeno, 1982; Stigler & Hiebert, 2009) unless it is through the promotion of ongoing and initial training activities so that teachers become part of this change and bring it to the classrooms (Llinares et al., 2020). We hope that this curriculum will mark a turning point and be the origin of an improvement in initial and ongoing training.

Acknowledgments

Project PID2019-105601GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033 and Group S60_23R - Research in Mathematics Education (Government of Aragon and European Social Fund).

References

Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education, 50*(1), 1–20.

Bishop, A. J., Clements, M. K., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.). (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0

Blanco Nieto, L. N., Climent Rodríguez, N., González Astudillo, M. T., Moreno Verdejo, A., Sánchez-Matamoros García, G., de Castro Hernández, C., & Jiménez Gestal, C. (Eds.) (2022). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática.* EUG.

Braun, V., & Clarke, V. (2021). *Thematic analysis. A practical guide*. Sage.

Canavarro, A. P. (2022). El desarrollo del nuevo currículo en Matemáticas para la Educación Básica en Portugal. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 53–61). SEIEM.

CEMAT (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no universitaria*. Comité Español de Matemáticas. https://bit.ly/3ytlGg1

Clements. M. A., Bishop, A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2

Coles, A., Helliwell, T., & Malkin, E. (2023). Towards a communal mathematics teacher education. In C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 69-78). SEIEM.

Contreras, Á., Ordóñez, L., & Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367–384.

Contreras, L. C. (2022). La nueva propuesta curricular y la formación del profesor. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 63–79). SEIEM.

De Castro, C. (2016). El estudio de documentos curriculares como organizador de la investigación en educación matemática infantil. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 39–52). SEIEM.

Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón (DECD) (2022). *Ordenación curricular*. https://educa.aragon.es/en/ordenacion-curricular1

Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z., & Blanco, T. F. (2022). Reflexiones del Open STEAM Group sobre el impacto del enfoque integrado del contenido en el aprendizaje de las matemáticas. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 81–94). SEIEM.

Drake, C., Land, T. J., & Tyminski, A. M. (2014). Using educative curriculum materials to support the development of prospective teachers' knowledge. *Educational Researcher, 43*(3), 154–162. https://doi.org/10.3102/0013189X14528039

Flores, M. A. (2005). Teachers' views on recent curriculum changes: Tensions and challenges. *The Curriculum Journal, 16*(3), 401–413. https://doi.org/10.1080/09585170500256479

Gimeno Sacristán, J. (1982). *La pedagogía por objetivos*. Ediciones Morata.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113.

Hong, W.-P., & Youngs, P. (2016). Why are teachers afraid of curricular autonomy? Contradictory effects of the new national curriculum in South Korea. *Asia Pacific Journal of Education, 36*(sup1), 20–33. https://doi.org/10.1080/02188791.2014.959471

Land, T. J., Tyminski, A. M., & Drake, C. (2015). Examining pre-service elementary mathematics teachers' reading of educative curriculum materials. *Teaching and Teacher Education, 51*, 16–26. https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.05.009

Lerman, S. (Ed.) (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., ... & Chapman, O. (2009). Components of mathematics teacher training. In R. Even & D.L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI study*, (pp. 25–33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_4

Llinares, S., Krainer, K., & Brown, L. (2020). Mathematics Teachers and Curriculum. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 600–604). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_111

Martínez-Juste, S. (2020). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. *Libro de actas de CIMIE19*. AMIE.

Mellone, M., Baccaglini-Frank, A., & Di Martino, P. (2023). The needs and the hopes for the secondary teachers' development in Italy. In C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 79-87). SEIEM.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. MEFP.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. MEFP.

Moreno, A. (2022). Introducción seminario de investigación II: el desarrollo del nuevo marco curricular en matemáticas. In T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 49–51). SEIEM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Ohlsen, M. T. (2007). Classroom assessment practices of secondary school members of NCTM. *American Secondary Education, 36*(1), 4–14.

Osta, I. (2020). Mathematics Curriculum Evaluation. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 576–577). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_168

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. Blanco (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 93–112). SEIEM.

Remillard, J. T., & Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education, 46*, 705–718. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4

Rodríguez-Muñiz, L. J., Díaz, P., Mier, V., & Alonso, P. (2016). Washback effect of university entrance exams in applied mathematics to social sciences. *PloS One, 11*(12), e0167544. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0167544

Shimizu, Y., & Vithal, R. (Eds.). (2023). *Mathematics Curriculum Reforms Around the World: The 24th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2009). *The teaching gap*. Free Press.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127–147. https://doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5

Wilson, S., & McChesney, J. (2010). “I always feel more confident when I know where things are going”: How do pre-service teachers engage with Mathematics curriculum documentation? In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 649–656). MERGA.

Comunicaciones

PATRONES EN EDUCACIÓN INFANTIL: VINCULANDO PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y ALGEBRAICO

Patterns in early childhood education: Connecting computational and algebraic thinking

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N.

Universitat de Girona

Resumen

Se estudia, por un lado, las oportunidades de comprensión de los patrones de repetición en el marco de una enseñanza asistida mediante el uso de robots programables y, por otro lado, el tipo de justificación que utilizan 24 escolares de 5 años para evidenciar la comprensión de dicha enseñanza. Se analiza de manera cualitativa y cuantitativa transcripciones de vídeos y representaciones escritas de los participantes. Los resultados arrojan que más del 50% de la muestra es capaz de representar de manera correcta los patrones de repetición; y que más del 70% de los escolares explica el por qué y explica el qué de su acción sobre el robot programable. Se concluye que a través de los robots programables se pueden ofrecer oportunidades en la comprensión tangible del reconocimiento de patrones y establecer vínculos entre el pensamiento computacional y el pensamiento algebraico.

Palabras clave: *Pensamiento algebraico, pensamiento computacional, reconocimiento de patrones, robots programables, educación infantil.*

Abstract

We study, on the one hand, the opportunities for understanding the repetition patterns in the framework of an assisted teaching using programmable robots and, on the other hand, the type of justification used by 24 5-year-old schoolchildren to demonstrate their understanding of this teaching. Qualitative and quantitative analyses are made of video transcripts and written representations by the participants. The results show that more than 50% of the sample is able to correctly represent the repetition patterns; and that more than 70% of the schoolchildren explain why and explain what of their action on the programmable robot. It is concluded that programmable robots can provide opportunities for tangible understanding of pattern recognition and establish links between computational and algebraic thinking.

Keywords: *Algebraic thinking, computational thinking, pattern recognition, programmable robots, early childhood education*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento computacional y las matemáticas están relacionados de manera natural (English, 2018). No en balde, la *Organisation for Economic Co-operation and Development* [OECD] (2018) incluye el pensamiento computacional (PC) en la prueba PISA sobre competencia matemática. Sin embargo, diversos autores coinciden en que se requiere de una mayor atención en las agendas de investigación para así garantizar una conexión fructífera (Bråting y Kilhamn, 2021; Lv et al., 2022; Ye et al., 2023).

Bajo esta mirada, este estudio muestra los primeros vínculos entre el pensamiento computacional (PC) y el pensamiento algebraico (PA) en educación infantil. Desde el escenario de los robots programables, adoptamos el reconocimiento de patrones como una habilidad tangencial para ambos tipos de pensamiento: por un lado, la identificación de patrones implica reconocer regularidades o

Acosta, Y., Alsina, Á. y Pincheira, N. (2023). Patrones en educación infantil: vinculando pensamiento computacional y algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 115–122). SEIEM.

secuencias iterativas en objetos o datos, que es una de las habilidades del PC que puede ser introducida en infantil (Hsu et al., 2018); por otro, la conciencia sobre los patrones permite avanzar en el desarrollo estructural, la comprensión relacional y la generalización desde una edad temprana, sentando así las bases del PA. Para Bråting y Kilhamn (2021), tanto el PC como el PA se ocupan de la estructura, la descomposición y el reconocimiento de patrones para avanzar hacia la generalización y la simbolización. Desde esta perspectiva, nos planteamos los siguientes objetivos: 1) Analizar la comprensión de los patrones de repetición en el marco de una enseñanza asistida mediante el uso de robots programables; 2) Describir el tipo de justificación que utilizan los escolares de 5 años para evidenciar la comprensión de la enseñanza de patrones de repetición articulada con robots.

MARCO TEÓRICO

El PC se nutre de procesos de pensamiento intrínsecamente relacionados como la formulación de problemas y la búsqueda de soluciones ejecutables de manera eficiente (Wing, 2011). Desde esta óptica, el principal proceso del PC es la abstracción, de gran utilidad para definir patrones, avanzar en la generalización desde contextos específicos y modelizar, incidiendo en el trabajo de estas habilidades desde la primera infancia. Es así como la *International Society for Technology in Education* [ISTE] (ISTE, 2016) plantea cuatro habilidades del PC apostando por la implementación de propuestas que las contemplen: 1) descomposición; 2) abstracción; 3) reconocimiento de patrones; y 4) diseño de algoritmos.

El PA se refiere a un modo de pensamiento multimodal que, mediante las relaciones y el cambio, facilita el análisis, la representación, la justificación y la comprensión de la estructura. Desde el ámbito de las matemáticas, las regularidades se consideran en ocasiones patrones o estructuras (Supply et al., 2022). Mulligan y Mitchelmore (2013) definen el patrón como cualquier regularidad predecible; y la estructura, como la forma interna en que los diversos elementos de una regularidad se organizan y relacionan. Por tanto, un patrón matemático es una secuencia de elementos con una regularidad abstracta predecible, donde se combinan relaciones numéricas, espaciales o lógicas (Mulligan y Mitchelmore, 2013).

Respecto a la relación entre el PC y PA, Lv et al. (2022) señalan que, de los 22 estudios analizados en su revisión sistemática, tres de ellos realizados en primaria centran su atención en contenidos ‘numéricos y algebraicos’ de manera específica. Los estudios que se desarrollan en infantil (5-6 años) evidencian la integración del PC y las matemáticas basándose en las categorías de ‘números y operaciones’ y ‘geometría’. Sin embargo, el reconocimiento de patrones estuvo presente en el 73,73% (n=16) de estudios analizados, aunque sin abordar su representación concreta ni vincularlo directamente con el PA.

Bers et al. (2002) indican que los entornos tecnológicos pueden contribuir a la comprensión de fenómenos abstractos a través de prácticas educativas basadas en el juego y en procesos de metacognición. Desde esta óptica, Chua (2017) considera que las tareas de justificación son un elemento integral para aprender matemáticas con comprensión, señalando cuatro tipos de justificación: 1) la “elaboración”, que requiere exponer la estrategia o enfoque utilizado; 2) la “validación”, que implica usar argumentos para apoyar o refutar una conclusión matemática; 3) la “inferencia”, que precisa conectar e interpretar el resultado matemático; y 4) la “predicción o toma de decisiones”, que requiere encontrar evidencias y generalizaciones para apoyar una afirmación matemática. De esta manera, se consigue organizar, comprender, comunicar y justificar la naturaleza matemática de acciones previamente realizadas en el plano educativo, social, creativo y tecnológico. Por tanto, asumimos que los entornos tecnológicos como juegos en línea, programación infantil de animaciones, robots educativos, etc., permiten aprender y a la vez aplicar y comprender de manera lúdica conceptos abstractos, como pueden ser los patrones de repetición. El carácter tangible y materializable de los robots otorga una manera concreta, motivadora y auténtica de acceder y consolidar conocimientos matemáticos abstractos (Berciano-Alcaraz et al., 2022), así como promover

el pensamiento computacional, a través del reconocimiento de patrones, facilitando la comprensión, el razonamiento y la justificación cuando se plantean tareas desde el reto y las conexiones.

MÉTODO

Este estudio forma parte de una investigación basada en el diseño que consta de tres ciclos iterativos longitudinales, con los mismos participantes durante sus tres años de escolarización en el 2º ciclo de infantil. En cada ciclo anual, se realizan microanálisis transversales que permiten reajustar el diseño de la intervención. Los datos de este estudio corresponden al tercer ciclo de iteración. En consonancia con nuestros objetivos, se ha optado por emplear un método mixto que combina de manera intencionada análisis cuantitativos y cualitativos (Creswell y Plano Clark, 2018), considerando que "no pretenden generalizar intrínsecamente los hallazgos a universos más grandes" (Hernández et al., 2010, p. 16), sino aportar evidencias que permitan iniciar y avanzar en la vinculación entre el PC y el PA en la primera infancia

Participantes

Han participado 24 escolares españoles con una edad media de 5 años y 9 meses (DE= 5 meses). Se ha seleccionado este grupo a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Fernández et al., 2014), puesto que los criterios de selección han sido determinados por la posibilidad de acceder a este grupo; por la continuidad y seguimiento longitudinal de la maestra tutora; y por estar considerado un centro con baja movilidad de matrícula en cursos preescolares. Antes de iniciar el trabajo de campo se obtuvo el consentimiento informado de las familias. Cabe destacar que es un grupo que tiene conocimientos previos en relación con la manipulación de robots, como las Bee-bots (Alsina y Acosta, 2018) y con la enseñanza de patrones de repetición (Acosta y Alsina, 2019).

Diseño y procedimiento

Se ha diseñado e implementado una tarea con el robot programable "Cubettos". Dicho robot se basa en una interfaz de programación tangible a través de piezas manipulables que se colocan en el tablero de control para dar órdenes. Cada pieza responde a una acción: avanzar, giro a la derecha, giro a la izquierda y función (conjunto de acciones), permitiendo la creación de secuencias encadenadas que hacen posible el movimiento del robot.

Se realizan dos sesiones de 50 minutos, una de familiarización y otra de interacción (Tabla 1). Con la intención de garantizar una atención personalizada e individualizada, el grupo se divide en dos de manera aleatoria. La sesión de interacción, donde se obtienen los datos, tiene las siguientes fases: I) presentación de la propuesta; II) interacción y desarrollo de la tarea; y III) representación y reflexión. En la fase III, los escolares representan el patrón, sin tener el modelo, para observar y analizar si se inician en la comprensión de la estructura del patrón y son capaces de representarlo con un dibujo. Durante el transcurso, los escolares movilizan habilidades como copiar, extender, abstraer o traducir, e identificar la unidad de repetición, dando la oportunidad de crear secuencias con la finalidad de resolver un reto o problema utilizando como medio, y no como fin, robots programables.

Adicionalmente, se aplica el Test de Competencia Matemática Básica 3 (Test of Early Mathematics Ability -TEMA3-) de Ginsburg y Baroody (2003), para evidenciar los conocimientos matemáticos previos, constatándose que el grupo presenta un nivel "medio" de ICM de 89.

Tabla 1. Intervención diseñada para escolares de 5 años con el robot Cubettos

Sesiones	Propuesta	Material necesario
1. Familiarización	Se inicia un diálogo con el alumnado sobre qué son los robots y se les invita a imitarlos en el patio de la escuela. Algunos escolares adoptan el rol de robot y otros de programadores.	No se requiere material específico

2. Interacción	Se crean patrones con piezas de lego duplo y a partir de la interacción con las fichas de programación del robot "Cubetto", se asocian secuencias de acciones con las seriaciones creadas con el material manipulativo. Seguidamente, se comprueba el recorrido diseñado y se coloca al final del trayecto el edificio construido que sigue el mismo patrón que se ha usado con las fichas de programación.	

Técnicas de recogida de información y análisis de los datos

Se han empleado: i) esquemas metodológicos etnográficos de observación participante, usando el diario de campo para registrar expresiones espontáneas; ii) documentación pedagógica, a través del registro audiovisual, fijo y móvil; y iii) representaciones escritas, en formato dibujo, de las producciones de los escolares como muestra de la formalización de los conocimientos adquiridos.

Desde la vertiente cualitativa, se utilizan las transcripciones de los vídeos y las notas de campo para analizar de forma interpretativa las aportaciones de los escolares y describir el tipo de justificación que utilizan (Tabla 2).

Tabla 2. Instrumento utilizado para categorizar las respuestas de los escolares

Tipo de justificación	Finalidad de la justificación	Elementos que complementan
Elaboración	Explica como…	Una descripción de lo realizado
Validación	Explica por qué…	Una evidencia para aceptar o refutar una afirmación
Inferencia	Explica que…	Uso de un discurso matemático con palabras clave de la tarea o reto abordado
Predicción/toma de decisiones	Explica si…	Una decisión generalizada con evidencia para apoyar o refutar la afirmación matemática

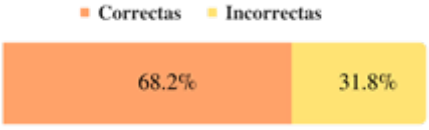
Este análisis comporta revisiones cíclicas y deductivas, a través del Atlas.ti, donde se triangulan y discuten los desacuerdos de la categorización hasta establecer un consenso.

Desde la vertiente cuantitativa, se categorizan las representaciones en 'correcto', cuando el dibujo no presenta errores; e 'incorrecto', cuando la producción presenta error en su estructura y no se logra identificar el patrón de repetición. Para reforzar los datos, se establece una inferencia estadística con un nivel de confianza del 95%. Antes, se utilizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para evaluar la distribución de las variables. En función de los resultados de las pruebas, se utilizan pruebas paramétricas (ANOVA y test de Bonferroni).

RESULTADOS

Considerando los objetivos del estudio, por un lado, se analiza la comprensión de patrones de repetición a través de su representación; y por otro, se describe el tipo de justificación de acuerdo con la categorización de Chua (2017). En la Figura 1 se muestra la categorización de los casos válidos de la muestra de análisis (N=22), puesto que el día de la intervención faltaron dos niños.

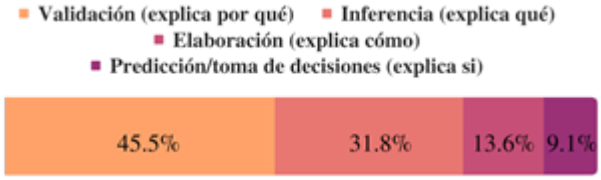
Figura 1. Representaciones en formato dibujo de patrones de repetición



Los datos de la Figura 1 muestran que más del 50% de los participantes (n=15) son capaces de representar de manera correcta los patrones de repetición abordados durante la programación del robot. De las 15 representaciones categorizadas como 'correctas', el 60% (n=9) esbozan un patrón ABC; el 20% (n=3) un patrón AAB; el 13.3% (n=2) un del tipo AB y el 6.7% (n=1) un patrón ABB.

A continuación, se exponen los resultados obtenidos de acuerdo con la categorización deductiva de Chua (2017): 1) Elaboración; 2) Validación; 3) Inferencia; y 4) Predicción/toma de decisiones.

Figura 2. Categorización deductiva de las respuestas de los escolares



Los datos de la Figura 2 muestran que más del 70% de escolares es capaz de explicar el por qué (n=10) y el qué (n=3) de su acción sobre el robot programable; mientras que el 13.6% (n=3) explica el cómo y solo el 9.1% (n=2) muestran un tipo de justificación más sofisticada para argumentar la regla subyacente que rige el patrón de repetición en las tareas desarrolladas con Cubettos.

Seguidamente, en la Tabla 3 se correlaciona el tipo de justificación (Chua, 2017) y el ICM (Ginsburg y Baroody, 2003) aplicando el test de Bonferroni después de haber rechazado la hipótesis nula de la Anova de igualdad de mediana entre variables.

Tabla 3. Correlación ICM vs Justificación

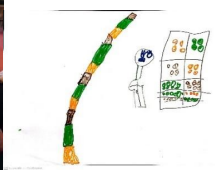
5 años	N	Media	Desviación Estándar	P-valor
1. Elaboración (explica cómo)	3	66.7	1.155	0.000
2. Validación (explica por qué)	10	83.5	10.047	
3. Inferencia (explica qué)	7	99.1	16.965	
4. Predicción/toma de decisiones (explica si)	2	125.0	7.071	

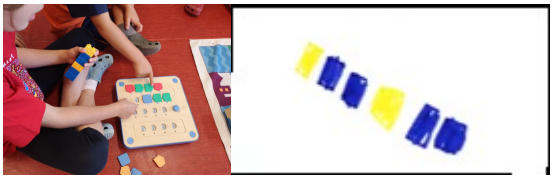
P-valor calculado mediante el estadístico de Bonferroni con un nivel de confianza del 95%.

Tal como se muestra en la Tabla 3, se categorizan dos respuestas en el subgrupo de 'predicción/toma de decisiones' observándose un recorrido entre medias de 58.3, 41.5 y 25.9 puntos con los subgrupos de 'elaboración', 'validación' e 'inferencia', respectivamente. Se describe una relación estadísticamente significativa entre el ICM y el tipo de justificación, siendo el P-valor de 0.000, lo que permite interpretar que cuanto mayor es el ICM, mayor es el nivel de sofisticación

A continuación, se muestran ejemplos de los dos tipos de justificación con mayor presencia.

Tabla 4. Ejemplos de 'Validación' e 'Inferencias'

	Documentación	Representaciones	Notas de campo
Validación			Alumno 1: El Cubettos avanza, gira a un lado, y gira al otro, avanza, gira a un lado y gira al otro. Alumno 2: ¿Y la ficha azul? Alumno 1: La azul repite todo. Docente: Entonces, ¿cuántos colores utilizaremos para el edificio de Lego? Alumno 1: tres colores. Docente: ¿Por qué tres colores? Alumno 1: Porque avanza, gira a un lado, y gira al otro. Son 3 cosas diferentes. Mi edificio será amarillo-verde-azul, amarillo-verde-azul.

Inferencia		Docente: ¿Me explicas lo que has hecho? Alumno 1: El robot gira a un lado, avanza dos pasos y vuelve a girar, avanza dos pasos y… Alumno 2: Luego con la azul se repite todo. Docente: ¿Qué es lo que se repite? Alumno 1: girar y avanzar dos pasos, girar y avanzar dos pasos. El amarillo y dos azules (señalando su construcción con pieza de legos).

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se han analizado, por un lado, las oportunidades de comprensión de los patrones de repetición en el marco de una enseñanza asistida mediante el uso de robots programables y, por otro, el tipo de justificación para evidenciar la comprensión.

En relación con la comprensión de los patrones de repetición a través de su representación, se observa que los robots programables pueden influenciar de manera positiva en la comprensión de dichos patrones, puesto que permiten manipular de forma concreta la estructura abstracta de una seriación, descomponiéndose en unidades de iteración. En este sentido, más del 50% de respuestas correctas representaron un patrón del tipo ABC identificando la unidad de repetición. De acuerdo con Lüken y Sauzet (2020), la dificultad del patrón con una estructura de repetición radica en la complejidad del núcleo que se repite de manera periódica. Estos autores consideran que los patrones simples AB son los más fáciles y que la dificultad aumenta de manera proporcional con el incremento de elementos que conforman dicha unidad de repetición. Sarama y Clements (2009) sostienen, además, que la repetición de elementos individuales del núcleo de repetición (por ejemplo, AAB) también aumenta la complejidad del patrón. Involucrar a los escolares en el pensamiento algebraico de manera temprana implica diseñar tareas y oportunidades de aprendizaje que promuevan la abstracción y la generalización fomentando a su vez la capacidad de pensar estructuralmente (Anglada et al., 2023; Cañadas et al., 2019). La finalidad que se persigue, pues, es aprovechar la oportunidad que brindan los robots programables cuando se enseñan patrones de repetición con alumnos de infantil para construir una base sólida de aprendizajes y procesos concretos que favorezcan la adquisición y tratamiento de un conocimiento más sofisticado en etapas posteriores de la enseñanza-aprendizaje. En esta línea, el estudio he evidenciado cómo los escolares, en el marco de una enseñanza asistida mediante el uso de robots programables y la interacción entre pares, comienzan a percibir una seriación no como la alternancia de elementos, sino como una estructura que se rige por una norma de repetición que es posible descomponer en unidades de repetición. De esta manera, nuestro estudio refuerza las aportaciones de Bråting y Kilhamn (2021), que señalan que la tangente entre el PC y el PA se produce en el estudio de la estructura, la descomposición y el reconocimiento de patrones. Para Ye et al. (2023), la integración entre el PC y dominios matemáticos aumenta la accesibilidad de las ideas abstractas para los niños pequeños, favoreciendo así un aprendizaje desde la comprensión. En este marco de relación entre el PC y el PA, el reconocimiento de patrones emerge como nexo de unión para los dos tipos de pensamiento abordados. Desde el contexto del PA el reconocimiento de patrones permite avanzar de manera consolidada hacia el pensamiento funcional (Acosta et al., 2022; Pincheira et al., 2022). Lo mismo ocurre desde el terreno del PC, donde el reconocimiento de patrones juega un papel esencial en la resolución de problemas (ISTE, 2016). Todas estas cuestiones se abordan en la legislación educativa española vigente, en la que se apuesta por el desarrollo de habilidades del pensamiento computacional a través de la observación, manipulación, exploración, descomposición... para adquirir la capacidad de abstracción y las competencias básicas ante retos y situaciones que requieran soluciones creativas (Real Decreto 95/2022).

En relación al tipo de justificación, el modo mayoritario se concentra en el subgrupo de 'validación' con un 45.5% y el subgrupo de 'predicción/toma de decisiones' emerge con un 9.1%. Cabe destacar que los dos alumnos que se sitúan en este tipo de justificación, obtienen un ICM superior a la media en el TEMA 3 (Ginsburg y Baroody, 2003). Como resultado destacable, nuestro estudio aporta que el nivel de sofisticación de la justificación está directamente relacionado con el índice de competencia matemática (ICM), evidenciando un P-valor estadísticamente significativo. En esta línea, los conocimientos compartidos entre iguales que se han generado desde el escenario de la robótica se han consolidan como una oportunidad para favorecer la construcción de un discurso matemático cada vez más sofisticado y significativo, tanto entre los que protagonizan la justificación, como la audiencia que se nutre de dicha justificación (Staples et al., 2012).

La sociedad del siglo XXI requiere ciudadanos con capacidad crítica y resolutiva para ofrecer soluciones creativas a problemas contemporáneos. Aunque aún queda camino por recorrer, en este estudio se ha evidenciado cómo los robots programables pueden también contribuir en la comprensión de conceptos matemáticos abstractos y al reconocimiento de patrones, para así promover el fomento de dos tipos de pensamiento que pueden coexistir de manera fusionada: el algebraico y el computacional.

Agradecimientos

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856); por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447; y por el Departamento de Didácticas Específicas de la Universitat de Girona.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2019). La representación de patrones en Educación Infantil: una primera aproximación con alumnos de 4 años. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 153-162). Valladolid: SEIEM.

Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Alsina, Á. y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *UNIÓN - Revista Iberoamericana De Educación Matemática*, *14*(52).

Anglada, M. L., Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del sentido algebraico en Educación Infantil a través de tareas con patrones. *Epsilon*, *113*, 9-19.

Berciano-Alcaraz, A., Salgado-Somoza, M. y Jiménez-Gestal, C. (2022). Alfabetización computacional en educación infantil:Dificultades y beneficios en el aula de 3 años. *Revista Electrónica Educare*, *26*(2), 1-21. https://doi.org/10.15359/ree.26-2.15

Bers, M. U., Ponte, I., Juelich, K., Viera, A. y Schenker, J. (2002). Teachers as designers: Integrating robotics into early childhood education. *Information Technology in Childhood Education Annual*, *1*, 123-145.

Bråting, K. y Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(2), 170-185. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1779012

Cañadas, M. C., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking / *Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano*. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 469-478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Chua, B. L. (2017). *A framework for classifying mathematical justification tasks*. CERME 10. https://hal.science/hal-01873071

Creswell, J. W. y Plano Clark, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (Vol. 3). Sage.

España. Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. (BOE [en línea], núm. 28, 02-2-2022, pág. 14561-14595). https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/02/01/95. [Consulta: 17 de mayo de 2023].

Fernández, C., Baptista, P. y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2003). *Test of Early Mathematics Ability-Third Edition*. Pro Ed.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (Vol. 5). McGraw-Hill.

Hsu, T.-C., Chang, S.-C. y Hung, Y.-T. (2018). How to learn and how to teach computational thinking: Suggestions based on a review of the literature. *Computers y Education*, *126*, 296-310. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.07.004

International Society for Technology in Education. (2016). *ISTE National Educational Technology Standards (NETS)*. https://www.iste.org/iste-standards

Lüken, M. M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 28-48. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452

Lv, L., Zhong, B. y Liu, X. (2022). A literature review on the empirical studies of the integration of mathematics and computational thinking. *Education and Information Technologies*. https://doi.org/10.1007/s10639-022-11518-2

Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 29-45). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_3

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework (draft) [Electronic version]*. PISA.

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2022). Habilidades para hacer patrones en tareas diseñadas por futuras maestras de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 471-478). SEIEM.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Staples, M. E., Bartlo, J. y Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 447-462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001

Supply, A.-S., Wijns, N., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2022). It is probably a pattern: Does spontaneous focusing on regularities in preschool predict reasoning about randomness four years later? *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10187-9

Wing, J. M. (2011). Research Notebook: Computational Thinking—What and Why. *The link Magazine, 6*, 20-23.

Ye, H., Liang, B., Ng, O.-L. y Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K-12 mathematics education: A systematic review on CT-based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education*, *10*(1), 3. https://doi.org/10.1186/s40594-023-00396-w

ACTITUDES HACIA LA PROBABILIDAD DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Attitudes towards probability of secondary school mathematics teachers

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Resumen

Esta comunicación analiza la dimensión Actitudes hacia la Probabilidad mediante la escala Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (ASPT). La muestra se compone de 185 docentes en activo de Educación Secundaria de la Comunidad Autónoma Vasca a los que se les facilitó el cuestionario de forma telemática. Mediante una metodología cuantitativa descriptiva se examinaron las Actitudes hacia la Probabilidad del profesorado en una escala Likert de 1 a 5 puntos. Se concluye que el profesorado considerado en este estudio presenta, en general, una buena Actitud hacia la Probabilidad con una puntuación media alta (cercana a 4) para la dimensión analizada y los tres componentes, y una puntuación media para cada ítem superior a la posición de indiferencia (3). Aun así, hay un porcentaje de la muestra con puntuaciones negativas.

Palabras clave: *actitudes, probabilidad, profesorado en activo, educación secundaria.*

Abstract

This paper analyses the Attitudes towards Probability dimension using the Attitudes towards Probability and its Teaching (ASPT) scale. The sample consisted of 185 in-service Secondary Education teachers in the Basque Autonomous Community who were provided with the questionnaire telematically. Using a descriptive quantitative methodology, teachers' Attitudes towards Probability were examined on a Likert scale of 1 to 5 points. It is concluded that the teachers considered in this study present, in general, a good Attitude towards Probability with a high average score (close to 4) for the dimension analysed and the three components, and an average score for each item above the indifference position (3). Even so, there is a percentage of the sample with negative scores.

Keywords: *attitudes, probability, in-service teachers, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

A la hora de enseñar contenidos de probabilidad, y en general las matemáticas, todo docente, además de poseer el conocimiento especializado de la materia, debe atender otros aspectos para poder desarrollar satisfactoriamente su labor. En los distintos modelos que analizan y explican los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, encontramos multitud de estudios como los recogidos en McLeod y McLeod (2002) que ponen de manifiesto el importante papel del dominio afectivo tanto para el alumnado como para el profesorado; dentro del Enfoque Onto-Semiótico (EOS), encontramos el concepto de idoneidad afectiva, el cual suele considerarse inexorablemente interconectado con la cognición (Beltrán-Pellicer, 2018). En el modelo de Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (MTSK en inglés), también se intenta relacionar el núcleo central del modelo, la dimensión afectiva, con los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas (Gómez-Chacón et al., 2017). A pesar de dichas relaciones, tal como indica Marbán (2016), el dominio afectivo se ha venido definiendo en los últimos años como un constructo que une diversos subdominios claramente diferenciados de los puramente cognitivos. Dentro de este dominio, y centrándonos en el profesorado, aparecen aspectos como las actitudes hacia las matemáticas o las actitudes hacia la docencia de las matemáticas, aspectos que consideramos especialmente relevantes

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. (2023). Actitudes hacia la probabilidad del profesorado de matemáticas de educaciń secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 123–130). SEIEM.

cuando consideramos dicha actividad puesto que las dificultades que implica cambiar el desempeño docente están conectadas, tanto con lo que saben, como con lo que creen (Thompson, 1992).

Analizando la literatura relativa a las actitudes del profesorado hacia la probabilidad, hemos encontrado estudios que toman como muestra, en general, a futuros docentes. Así, encontramos estudios con futuros docentes de Educación Primaria (Estrada y Batanero, 2020; Estrada et al, 2016), futuras maestras de Educación Infantil (Vásquez et al., 2019) y futuros docentes de Educación Secundaria de matemáticas (Ruz et al., 2020). En el estudio de Alvarado et al. (2018), parte de la muestra sí considera docentes en activo, concretamente, 70 docentes de la enseñanza media. Creemos que es importante profundizar en el profesorado en activo puesto que, en muchas ocasiones, los futuros docentes se consideran competentes para trabajar contenidos matemáticos con independencia de su competencia profesional (Escolano et al., 2012), y ello también se refleja en sus actitudes. Además, considerando que el desarrollo de los contenidos probabilísticos como los experimentos compuestos o el uso de herramientas tecnológicas para cálculos más complejos se recogen en el currículo a partir de secundaria (Ley Orgánica 3/2020), creemos que el estudio del profesorado de dicha etapa educativa puede ofrecernos información más concreta respecto a las Actitudes hacia la Probabilidad. Es por ello que, enmarcado dentro de una investigación más amplia que pretende investigar las Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza, el objetivo de esta comunicación se centra en analizar las Actitudes hacia la Probabilidad del profesorado en activo de Educación Secundaria (ES) de la Comunidad Autónoma Vasca.

FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

La medición del dominio afectivo y de las actitudes hacia las matemáticas han dado lugar a innumerables escalas e instrumentos recogidos ampliamente por Palacios-Picos (2016). En lo referente a la actitud que tiene el profesorado hacia la probabilidad y su enseñanza, dados los escasos estudios, Estrada y Batanero (2015) diseñaron y validaron la denominada Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (ASPT), partiendo de los instrumentos para evaluar la actitud hacia la estadística, los cuales ya han sido validados y puestos en práctica con anterioridad. La ASPT está compuesta por siete componentes agrupados en tres dimensiones que se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Descripción de los componentes de la escala ASPT.

Dimensión	Componente	Ítems
1. Actitudes hacia la Probabilidad	Afectiva (AP)	Sentimientos del sujeto, positivos o negativos, hacia la probabilidad.
	Competencia cognitiva (CCP)	Autopercepción de la capacidad intelectual hacia la probabilidad.
	Comportamental (BP)	Tendencia a usar herramientas de probabilidad cuando sea conveniente.
2. Actitudes hacia la Enseñanza de la Probabilidad	Afectiva (AT)	Sentimientos personales, positivos o negativos, hacia la enseñanza de la probabilidad.
	Competencia didáctica (CT)	Percepción del futuro profesorado sobre su propia capacidad para enseñar probabilidad.
	Comportamental (BT)	Tendencia a la acción didáctica en la enseñanza de la probabilidad.
3. Valor a la Probabilidad y su Enseñanza	Valor (VPT)	Utilidad y relevancia que el profesorado concede a la probabilidad y su enseñanza en la vida personal y profesional.

Fuente: Ruz et al., (En prensa, pp. 5-6).

Tal como hemos indicado, en este estudio limitamos el análisis a la primera de las tres dimensiones que componen la escala, Actitudes hacia la Probabilidad, de modo que prestaremos especial atención a dicha dimensión a la hora de exponer los resultados de los estudios realizados hasta la fecha. En la Tabla 2, se recogen las puntuaciones medias y desviaciones típicas obtenidas para la dimensión y las tres componentes en los diferentes estudios que han utilizado la escala ASPT, así como las características de cada muestra. La baja dispersión sugiere homogeneidad para todos los estudios.

Estrada et al. (2016) presentan los resultados recogidos en el estudio piloto donde consideran 71 futuros docentes de Educación Primaria (EP); amplían dichos resultados con una muestra de 232 futuros docentes de EP (Estrada et al., 2018). Concluyen que las Actitudes hacia la Probabilidad son positivas, puesto que, no solo el valor medio de todos los ítems es positivo (mayor que 3) sino que también el valor medio de los tres componentes es positivo (mayor que 3); de los tres componentes el Comportamental (BP) registra mayor puntuación media, 3.5. No obstante, sugieren que los futuros maestros no se sienten lo suficientemente bien preparados en el contenido matemático.

Estrada y Batanero (2020) amplían la muestra a 416 futuros docentes de EP obteniendo conclusiones similares. La componente con puntuaciones más bajas es la Cognitiva (CCP) y, destacando la dificultad que este tipo de contenidos tiene para el futuro profesorado, interpretan que no se sienten bien preparados para la docencia y no les gusta este tipo de contenido. También analizan si hay diferencias en cuanto al sexo, concluyendo que hay diferencias significativas en ciertos componentes, justamente en los tres componentes que conforman la dimensión de Actitudes hacia la Probabilidad (AP, CCP y BP), siendo los resultados del sexo femenino inferiores.

Tabla 2. Resultados de la Dimensión 1 de la escala ASPT en estudios previos.

Estudio	**Muestra**	**Total**	**AP**		**CCP**		**BP**	
		Dim.	**Media**	**D.E.**	**Media**	**D.E.**	**Media**	**D.E.**
Vásquez et al. (2019)	124 (fut. EI)	**2.72**	2.99		1.78		3.39	
Estrada et al. (2016)	71 (fut. EP)	**3.64**	3.525	.85	3.725	.725	3.675	.825
Estrada et al. (2018)	232 (fut. EP)	**3.36**	3.3	.725	3.275	.65	3.5	.65
Estrada y Batanero (2020)	416 (fut. EP)	**3.418**	3.355	.723	3.33	.033	3.57	.663
Ruz et al. (2020)	126 (fut. ES)	**3.576**	3.545	.795	3.468	.685	3.718	.753
Alvarado et al. (2018)	70 (EM) 51 (fut. EM)	**3.778**	3.785	.718	3.745	.665	3.8	.655

Vásquez et al. (2019) analizan los datos de 124 futuras maestras de Educación Infantil (EI) destacando que todas las participantes son mujeres. Los resultados indican una baja puntuación respecto a las Actitudes hacia la Probabilidad con más de la mitad de los ítems y dos de los tres componentes con un valor medio negativo (menor que 3). Concretamente, los datos revelan que las futuras maestras de EI tienen una autopercepción negativa respecto a su capacidad y conocimientos, destacando en la componente CCP una puntuación (1.78) considerablemente inferior a la posición de indiferencia (3).

Ruz et al. (2020) consideran una muestra de 126 futuros docentes de Educación Secundaria (ES) que presentan actitudes positivas siendo el valor medio de todos los ítems y componentes positivo.

La investigación de Alvarado et al. (2018) es la única sobre Actitudes de la Probabilidad y su Enseñanza que considera docentes en activo, en concreto, son 70 docentes de matemáticas de la Enseñanza Media (EM). Además, también consideran 51 docentes de matemática en formación. El análisis descriptivo revela nuevamente una actitud positiva para el total de la muestra, aunque es ligeramente mejor entre el profesorado en activo y mejora con la experiencia docente.

MÉTODO

Las Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza, al igual que ocurre con otras variables educativas, no son directamente observables. Así, para poder dar respuesta a nuestro objetivo de investigación, nuestro estudio adopta un paradigma positivista, de modo que dichas actitudes son inferidas a partir de indicadores empíricos (Godino, 2010); concretamente, a partir de las respuestas dadas por las personas participantes a un test compuesto de una batería de ítems, con una escala Likert de 1 a 5.

Participantes

En el presente estudio se ha enviado el cuestionario a todos los centros de ES de la CAV que son 398. Por lo tanto, se ha considerado toda la población que se estima que la componen alrededor de 1600 docentes. Se han tenido en cuenta todas las respuestas recibidas, por lo que la muestra final consta de 185 docentes: 110 mujeres (59.5%), 72 hombres (38.9%) y tres personas (1.6%) eligen *otra opción*. La edad media de los participantes es de 44.51 años (D.T.=10.72 años).

El cuestionario ha sido respondido por profesorado del 28.6% de los centros de Álava, del 34.56% de los centros de Guipúzcoa y del 24.88% de los centros de Vizcaya (las tres provincias de la CAV). En cuanto al curso que imparten matemáticas, las respuestas obtenidas son heterogéneas abarcando toda la etapa de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Instrumento

El instrumento utilizado es la escala Attitudes towards Probability and its Teaching (ASPT) diseñado por Estrada et al. (2016). Mencionar que la versión en castellano se ha adaptado ligeramente para dirigirnos al profesorado en activo e incluir un lenguaje más inclusivo. Además, se ha traducido el cuestionario al euskara, el cual se ha validado por personas bilingües expertas en el área de didáctica de la matemática. Los pasos seguidos han sido los siguientes: 1) Dos especialistas, de modo independiente, han traducido el cuestionario al euskara. 2) Se han comparado las dos versiones y unificado. 3) Otra persona ha traducido el cuestionario del euskara al castellano. 3) Estas tres personas han comparado las dos versiones del cuestionario en castellano (adaptación de Estrada y adaptación euskara-castellano), detectando pequeñas diferencias entre ambas, lo que ha llevado a revisar la traducción en euskara del mismo (adaptación de Estrada). 4) Los integrantes del equipo de investigación han comprobado que las diferencias se debían a algunas polisemias del lenguaje, que se han corregido dando lugar a la versión final.

El instrumento consta de 28 ítems a los que se debe dar respuesta mediante una escala Likert entre 1 (muy en desacuerdo) y 5 (muy de acuerdo) de los cuales la mitad está redactada en sentido positivo y la otra mitad en sentido negativo. Los ítems se agrupan de cuatro en cuatro dando lugar a una estructura de siete componentes que se reúnen en tres dimensiones, como se ha explicado en el apartado de Fundamentos de la Investigación (ver Tabla 1). Concretamente, este trabajo se centra en el análisis de los resultados de la Dimensión 1: Actitudes hacia la Probabilidad.

Procedimiento

El cuestionario ha sido facilitado telemáticamente a través de un formulario de *Google forms* que se envió al equipo de dirección de cada centro educativo y este lo distribuyó entre el profesorado de la asignatura de matemáticas. Estos respondieron el cuestionario de forma anónima y voluntaria.

Ética

Este artículo forma parte de una investigación más amplia, que cuenta con la autorización del comité de Ética para la Investigación y Docencia (CEID/IIEB) de la UPV/EHU (M10_2021_200).

Análisis de datos

En este artículo se ha realizado un análisis descriptivo de los datos con el programa estadístico SPSS 28. Para el análisis de datos se han invertido los resultados obtenidos en los ítems con carácter

negativo permitiéndonos, así, tratar todos los ítems en el mismo sentido, es decir, cuanto mayor puntuación, mejor valoración. En el análisis de la Dimensión y Componentes se ha calculado la puntuación media; de esta manera, obtenemos una puntuación media de entre 1 (muy en desacuerdo) y 5 (muy de acuerdo) siendo 3 el valor neutro.

RESULTADOS

Se analiza, por un lado, la fiabilidad de la dimensión Actitudes hacia la Probabilidad para la muestra descrita y, por otro lado, las puntuaciones de la dimensión considerada y los tres componentes, y las puntuaciones obtenidas en los ítems. Cabe destacar que los resultados que se presentan son las medias de las puntuaciones obtenidas en el cuestionario siendo siempre 1 el valor mínimo posible y 5 el valor máximo posible.

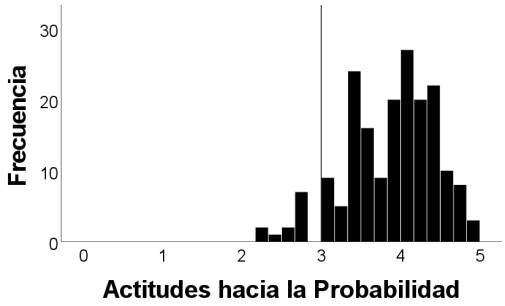
Fiabilidad del cuestionario

La fiabilidad interna del cuestionario es alta con Omega de McDonald de 0.905. A pesar de que para la dimensión analizada (Actitudes hacia la Probabilidad) el valor de Omega de McDonald disminuye a 0.812, este se considera adecuado. La prueba de esfericidad de Bartlett confirma con un p-valor inferior a 0.001 y Chi-cuadrado aproximado a 612.185 que la matriz de correlaciones es diferente a la identidad. Así, se ha calculado la medida Kaiser-Meyer-Olkin obteniendo el valor 0.823.

Puntuaciones de la dimensión Actitudes hacia la Probabilidad y los respectivos componentes

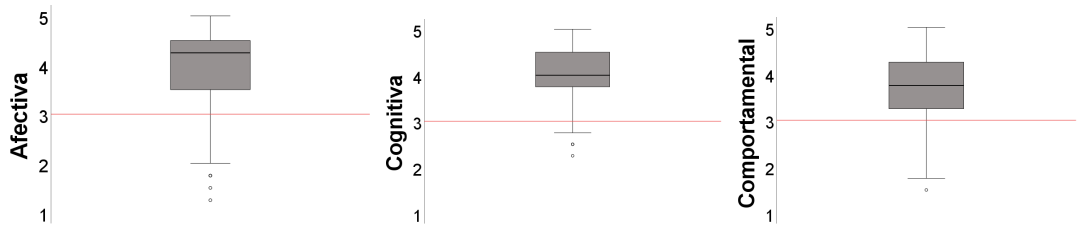
Analizando los resultados de forma global observamos que la puntuación media de la Dimensión Actitudes hacia la Probabilidad es de 3.91 con una desviación estándar de 0.57, siendo 2.25 y 5 las puntuaciones medias mínima y máxima registradas, respectivamente.

Figura 1. Distribución de la Dimensión 1: Actitudes hacia la Probabilidad.



Si nos centramos en la distribución de los resultados (Figura 1), estos se apilan cerca del 4. Concretamente, el 53.51% de los participantes manifiesta actitudes positivas (entre 4 y 5). A pesar de los resultados, aparentemente buenos, hay un 6.49% con actitudes negativas (inferior a 3).

Figura 2. Diagrama de cajas de las componentes Afectiva, Cognitiva y Comportamental



Desgranando los resultados por componentes, obtenemos que el Cognitivo (media=4.02, D.T.=0.58) es el mejor valorado, mientras que el Comportamental (media=3.75, D.T.=0.75) es el peor. Esto se aprecia en los diagramas de cajas de la Figura 2 donde se observan muy pocos resultados inferiores a 3 (marcado con una línea horizontal) para el Cognitivo; solamente 5 participantes (2.7%) obtienen

una puntuación media inferior a 3. En cambio, los Componentes Afectivo y Comportamental toman unos valores mucho más heterogéneos siendo el 11.35% y 11.89% de los participantes los que obtienen una puntuación media inferior a 3, respectivamente.

Puntuación de los ítems

Las puntuaciones medias de los ítems varían desde 3.1 hasta 4.35, por lo tanto, todos los ítems tienen una media superior a 3, la posición neutra. Hay siete ítems con una puntuación media superior a 4 que son el 7* (Nunca he usado la probabilidad fuera de las matemáticas; media=4.25, D.T.=.9), 8 (Domino los principales contenidos de probabilidad; media=4.14, D.T.=.8), 16* (Me siento intimidado o intimidada ante datos probabilísticos; media=4.18, D.T.=1.1), 17* (La probabilidad sólo la entienden la gente de ciencias; media=4.2, D.T.=.9), 18* (Evito leer las informaciones donde aparecen términos de probabilidad; media=4.35, D.T.=.96), 22* (No me siento preparada o preparado para resolver cualquier problema básico de probabilidad; media=4.3, D.T.=1.1) y 27* (No me agrada resolver problemas de probabilidad; media=4.1, D.T.=1.1), lo cual significa, por un lado, que han utilizado alguna vez la probabilidad fuera del aula y afrontan sin miedo información que contenga datos probabilísticos y, por otro lado, que se sienten capacitados para entender y resolver problemas de probabilidad. Es más, disfrutan haciéndolo. Sin embargo, hay tres ítems con una puntuación media inferior a 3.5 que son el 2 (Utilizo información sobre probabilidad a la hora de tomar decisiones; media=3.3, D.T.=1.1), 6 (La probabilidad es fácil; media=3.4, D.T.=.9) y 15 (Uso la probabilidad en la vida cotidiana; media=3.1, D.T.=1.1), dando a entender que no consideran que la probabilidad sea fácil y hacen poco uso de la probabilidad a la hora de tomar decisiones en su vida diaria.

Si hacemos un análisis más minucioso de los ítems conforme a los componentes, comenzando por el componente mejor valorado que es la Cognitiva, observamos que hay tres ítems con una puntuación alta. El ítem 22* es el mejor valorado con el 80% de las participantes sintiéndose preparados para resolver problemas de probabilidad y, en cambio, un 10.27% advierte no sentirse preparado. Los resultados del ítem 8 revelan que el 80% domina los contenidos de probabilidad, habiendo un 3.24% que no lo siente así. El ítem 17* indica que el 75% no considera que la probabilidad solo la entienda la gente de ciencias, mientras que hay un 4.86% que sí piensa así. Por último, los resultados del ítem 6 señalan que solamente el 40% considera que la probabilidad es fácil y un 11.89% difícil.

En cuanto a los ítems del Componente Afectivo, ninguno destaca con un resultado especialmente positivo ni negativo, variando la media desde 3.6 a 4.18. El ítem 16* (Me siento intimidado o intimidada ante datos probabilísticos; media=4.2, D.T.=1.1) es el mejor valorado con el 75% de los participantes confiados ante datos probabilísticos y solamente el 9.12% sintiéndose intimidado. Los resultados del ítem 27* (No me agrada resolver problemas de probabilidad; media=4.1, D.T.=1.1) muestran que mientras al 70% le agrada resolver problemas de probabilidad, al 11.89% no le gusta. El ítem 1 (Me divierto en las clases en las que se explica probabilidad; media=3.9, D.T.=.9) indica que el 60% se divierte en las clases donde se explica probabilidad, en contra de un 7% que sugiere no disfrutar. Por último, el ítem 5 (Me gusta la probabilidad; es un tema que siempre me ha interesado; media=3.6, D.T.=.9) es el peor valorado señalando que solamente al 50% le gusta la probabilidad y a un 15.14% le desagrada.

Por último, el Componente Comportamental ha sido el peor valorado habiendo dos ítems con una puntuación baja. El ítem 15 (Uso la probabilidad en la vida cotidiana; media=3.1, D.T.=1.1) es el peor valorado (entre los 12 ítems) habiendo un 27.03% que señala no utilizar la probabilidad en la vida cotidiana, mientras que solamente un 30% indica utilizarla. Los resultados del ítem 2 (Utilizo información sobre probabilidad a la hora de tomar decisiones; media=3.3, D.T.=1.1) indican que el 25% ha insinuado no utilizar la probabilidad a la hora de tomar decisiones en contra de solamente un 40% que revela sí utilizarla. Sin embargo, las respuestas del ítem 7* (Nunca he usado la probabilidad fuera de las matemáticas; media=4.3, D.T.=.9) y 18* (Evito leer las informaciones donde aparecen términos de probabilidad; media=4.4, D.T.=.96) revelan que el 82.2% ha usado la probabilidad fuera

de las matemáticas y el 83.8% lee información donde aparecen términos de probabilidad, respectivamente, en contra de solamente 11 respuestas para cada ítem (5.95%) que indican no haber utilizado nunca la probabilidad fuera de las matemáticas y evitar leer información probabilística. Sorprendentemente, el ítem 18*, a pesar de estar en el componente peor valorado, es el ítem con mayor puntuación media.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados a las Actitudes hacia la Probabilidad obtenidos en este estudio y en los recogidos en la Tabla 2 coinciden en que el profesorado en formación y los pocos docentes en activo que participan en ellos presentan, salvo en el caso de las de EI, actitudes positivas hacia la probabilidad. Así, la muestra considerada en este estudio ha obtenido los resultados más altos tanto para la dimensión en global como para cada uno de los tres componentes, a excepción del Comportamental en Alvarado et al. (2018) que justamente también considera como muestra profesorado de educación media en activo; la puntuación lograda en dicho componente es muy parecida en los dos estudios: 3.8 en uno y 3.75 en el nuestro. Los datos analizados en este estudio y comparados con estudios previos que han aplicado el ASPT, nos pueden llevar a pensar, por un lado, que las Actitudes hacia la Probabilidad son mejores entre el profesorado en activo que en formación y, por otro lado, que las Actitudes hacia la Probabilidad son mejores a medida que se avanza en las etapas educativas, llegando en la Educación Secundaria a los niveles más altos. Una predisposición más favorable hacia dichos contenidos puede estar motivada tanto por la formación inicial de cada tipo de profesorado como por su perfil profesional. Tal como señalan Anasagasti et al. (2022), los futuros docentes relacionan este tipo de contenidos probabilísticos y estadísticos con etapas de Secundaria y Bachillerato, ubicándolos fuera de los estudios de Primaria e Infantil. Respecto a las diferencias entre el profesorado en activo y en formación, sería interesante aplicar el ASPT a profesorado de EP en activo, de modo que puedan compararse sus actitudes tanto con futuro profesorado de EP como con profesorado de ES en activo.

En cuanto a los componentes, en este estudio el Cognitivo es el mejor valorado y el Comportamental el peor valorado, precisamente, lo opuesto a lo obtenido en el resto de investigaciones, exceptuando la de Estrada et al. (2016). Este hecho podría deberse a que el profesorado en activo siente más confianza que el futuro profesorado respecto a los contenidos probabilísticos, pero estos últimos tienen más interés que el profesorado en activo en aplicarlo en problemas.

A modo de conclusión queremos destacar las buenas Actitudes hacia la Probabilidad mostrada por el profesorado en activo de ES de la CAV. Creemos necesario realizar un análisis más pormenorizado de los resultados obtenidos atendiendo a la perspectiva de género o a otras variables como la antigüedad en el puesto de trabajo que, por el límite de la extensión de esta comunicación, no hemos podido desarrollar. Tampoco se debe olvidar ese 6.49% que ha manifestado tener actitudes negativas; como se ha mencionado en la introducción, el dominio afectivo tiene un papel primordial en la enseñanza-aprendizaje pudiendo conllevar incluso a la exclusión de la probabilidad de las aulas de esas y esos docentes. Por esta razón, también sería interesante averiguar, tal vez desde un enfoque más interpretativo, las razones por las que parte del profesorado presenta esa baja actitud.

Referencias

Alvarado, H., Andaur, G. y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: Un estudio exploratorio con profesores de matemáticas en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma*, *39*(2), 36-64.

Anasagasti, J., Berciano, A. y Murillo, J. (2022). Estadística por proyectos en el grado de Educación Primaria: un estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(1), 125-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3235

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema, 32*(61), 526-548.

Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). SEIEM.

Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' Attitudes towards Probability and its Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1). https://doi.org/10.29333/iejme/5941

Estrada. A., Batanero, C., Comas, C. y Díaz, C. (2016). *Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching*. 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Alemania.

Estrada, A., Batanero, C., y Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 313-332). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Departamento de Didáctica de la Matemática: Universidad de Granada. Recuperado el 27 de marzo de 2023 de: https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Gómez-Chacón, I. Mª, García-González, M., Carmona, K. y Fernández-Gago, J. (2017). El dominio afectivo en el MTSK. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK* (pp. 26-28).

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 340, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953. https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf

Marbán, J. M. (2016). Matemáticas y Dominio Afectivo. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 69-74). SEIEM.

McLeod, D. y McLeod, S. (2002). Synthesis: Beliefs and mathematics education: implications for learning, teaching, and research. En G. C. Leder, E. Pehkonen, y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (115-123). Kluwer Academic Publishers.

Palacios-Picos, A. (2016). Estrategias y técnicas cuantitativas para el estudio del dominio afectivo en matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 115-134). SEIEM.

Ruz, F., Berciano Alcaraz, A., Martínez-Ortiz, F., Contreras García, J.M. (2023). Perspectiva de género en actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza en futuro profesorado chileno, *Revista Educação e Pesquisa*, 49, e254527, 1-23, https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349254527es.

Ruz, F., Molina-Portillo, E., Vásquez, C. y Contreras, J.M. (2020). Attitudes towards probability and its teaching in prospective mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, *22*(2), 48-66. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5489

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D.A, Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127-146). Macmillan.

Vásquez, C., Alvarado, H. y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. *Educación Matemática, 31*(3), 177-202. https://doi.org/10.24844/EM3103.07

ESTRUCTURAS EN UN CONTEXTO FUNCIONAL CON NIÑOS DE 5 AÑOS

STRUCTURES IN A FUNCTIONAL CONTEXT WITH 5-YEAR-OLDS

Anglada, L[a]., Cañadas, M. C[b]., Fuentes, S[b]. y Brizuela, B. M[c].

[a]Centro Universitario María Inmaculada de Antequera, [b]Universidad de Granada,

[c]Universidad de Tufts

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia sobre el pensamiento algebraico en educación infantil (www.pensamientoalgebraico.es). Analizamos aquí parte de la información recogida en una clase de 20 niños de 5 años en la que promovimos el pensamiento funcional. Observamos y describimos cómo identificaron estructuras cuando trabajaron en tareas que involucraban las funciones f(n)=n+1 y f(n)=n+2. El contexto fue una máquina de funciones. Los participantes identificaron estructuras en el trabajo con casos particulares. Para casos generales, algunos niños identificaron la estructura como un aumento en la cantidad. Algunos niños dieron una expresión correcta de la generalización. Los niños que generalizaron, la expresaron de forma verbal.

***Palabras clave**:* educación infantil, estructuras, máquina de funciones, pensamiento funcional

Abstract

This paper is part of a wider research on algebraic thinking in early childhood education (www.pensamientoalgebraico.es/en). We analyze here part of the information collected in a classroom of 20 5-year-old children, in which we promoted functional thinking. We observe and describe how they identified structures when working on tasks involving the functions f(n)=n+1 and f(n)=n+2. The context was a function machine. Participants in our study identified structures when working with particular cases. For general cases, some children identified the structure as an increase in quantity. Some children gave a correct expression of the generalization. The children who generalized, expressed it verbally.

Keywords: early childhood education, function machine, functional thinking, structures.

INTRODUCCIÓN

La introducción del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad despierta cada vez mayor interés para la investigación en Didáctica de la Matemática. Gran parte de este interés se ha alimentado de la propuesta curricular *early algebra* que, desde su inicio, se ha enmarcado como una forma de promover contenido y prácticas algebraicas desde edades tempranas. Existe cada vez un mayor acuerdo entre los investigadores en que esta es la vía a través de la cual los niños pequeños pueden alcanzar el éxito matemático en los grados posteriores (Blanton y Kaput, 2011).

En esta investigación nos centramos en una de las aproximaciones al álgebra escolar recomendada para el alumnado en edad temprana: el pensamiento funcional (Carraher y Schliemann, 2007). El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultanea (Blanton y Kaput, 2004). Establecer estas relaciones supone identificar la regularidad en el comportamiento entre variables (Torres et al., 2021b). En este contexto funcional, la forma en que se organiza esta regularidad se conoce como estructura.

Anglada, L., Cañadas, M. C., Fuentes, S. y Brizuela, B. M. (2023). Estructuras en un contexto funcional con niños de 5 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 131–138). SEIEM.

Los trabajos de Pinto y Cañadas (2017) con niños de 3º de educación primaria y de Torres el al. (2021b) con niños de 2º de educación primaria son dos ejemplos de estudios sobre estructuras en el contexto funcional en educación primaria. A la vista de los resultados obtenidos en este nivel educativo, y no habiendo estudios en educación infantil, Anglada et al. (2022) realizaron un estudio sobre la identificación de estructuras con niños de cinco años al trabajar en una tarea que involucraba a las funciones lineales f(n)=n, f(n)=n+2 y f(n)=n-1 y f(n)=2n, trabajando con casos particulares. En el presente trabajo pretendemos reforzar y ampliar los resultados obtenidos en esa investigación, abordando tanto casos particulares como la generalización.

El objetivo de este trabajo es analizar qué estructuras identifican los niños de último curso de educación infantil (5 años) al abordar tareas contextualizadas que involucran a las funciones lineales f(n)=n+1 y f(n)=n+2.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional es uno de los enfoques del pensamiento algebraico, y se concibe como "la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

La generalización y la forma de expresarla constituyen elementos centrales del enfoque funcional (Kaput, 2008). La generalización incluye establecer relaciones generales entre cantidades que covarían, expresar dichas relaciones mediante diferentes representaciones (verbal, simbólica, tabular, gráfica, entre otras), así como razonar y justificar con esas representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). Partimos de que estudios previos con niños de educación infantil (Anglada y Cañadas, 2021; Blanton y Kaput, 2004; Castro et al., 2017; Fuentes y Cañadas, 2022; Warren et al., 2013) muestran que estos son capaces de generalizar cuando resuelven problemas contextualizados que implican funciones lineales (f(n)=n, f(n)=n+1, f(n)=n+2, f(n)=2n.

La noción de estructura tiene diferentes significados en los enfoques del *early algebra* (Molina y Cañadas, 2018). En el enfoque funcional, la estructura se corresponde con la forma en que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Warren et al., 2013).

Diferentes autores abordan las estructuras en educación primaria (Mulligan y Mitchelmore, 2009; Pinto y Cañadas, 2017; Torres et al., 2018). Torres et al. (2018, 2021b) realizaron dos estudios con niños de segundo de educación primaria (7-8 años) con tareas que involucraban las funciones lineales f(n)=n+3 en el primer estudio, y f(n)=n+4 en el segundo. En ambos estudios la mayoría de los niños evidenciaron estructuras adecuadas para las formas directa e inversa de las funciones correspondientes. En educación infantil, Anglada et al. (2022) realizaron un estudio con ocho niños de 5 años similar al que presentamos en este trabajo. Propusieron a los niños una tarea que involucraba las funciones f(n)=n, f(n)=n+2, f(n)=n–1 y f(n)=2n, trabajando con casos particulares. La mayoría de los niños identificaron una estructura adecuada, tanto para la forma directa como para la inversa de las tres primeras funciones. Para f(n)=2n, dos de los ocho estudiantes participantes identificaron una estructura correcta, para las funciones directa e inversa con casos particulares.

En el presente trabajo, usamos el contexto de la máquina de funciones (*function machine*) de Willoughby (1997). Autores como Dienes (1976) y Canals (1989) utilizaban estas máquinas para realizar operaciones aritméticas y transformaciones de atributos cualitativos. Algunos autores las han usado en estudios de educación primaria (e.g., Moss, y McNab, 2011; Torres et al., 2018) y de educación infantil (Warren et al., 2013; Willoughby, 1997). Willoughby (1997) y Warren et al. (2013) trabajaron estas máquinas con niños de cinco años. Ambos trabajaron con la función f(n)=n+2, y Willoughby (1997), además, trabajó con f(n)=n+3, f(n)=n+1 y f(n)=n-1. En ambos estudios los niños identificaron las estructuras prediciendo qué ocurría en otros casos particulares diferentes a los dos

que se les presentaron e identificaron y describieron verbalmente la regla que seguía la máquina, llegando a generalizar.

En el contexto funcional, la variable independiente es el número de elementos que entran en la máquina y la variable dependiente los elementos que salen. Consideramos que un niño generaliza si da una expresión de la regla de funcionamiento de la máquina.

METODOLOGÍA

Desarrollamos una investigación de tipo exploratorio, ya que son escasos los estudios realizados sobre pensamiento funcional en educación infantil, y descriptiva porque especifica características de un grupo (niños de cinco años) que se somete a análisis (Hernández et al., 2010).

La recogida de datos se llevó a cabo con un grupo de 20 niños de una clase de 5 años. Los niños pertenecían a un centro educativo público de Granada. La selección del centro educativo fue intencional, según la disposición del centro y de los docentes. Los estudiantes no habían recibido instrucción previa sobre generalización.

Este estudio es parte de un experimento de enseñanza de cuatro sesiones. Estas sesiones se desarrollaron en cuatro semanas consecutivas, una sesión por semana, en el curso académico 2022/2023. En la Tabla 1 podemos ver cómo se organizan las sesiones. Las sesiones que analizamos en este estudio son la segunda y la tercera, porque en ellas introdujimos el trabajo con las funciones lineales.

Tabla 1. Organización de sesiones

Sesiones	Descripción
Primera sesión	Toma de contacto y familiarización con el contexto
	Cambio cualitativo: Tamaño
Segunda sesión	Función f(n)=n+1
Tercera sesión	Función f(n)=n+2
Cuarta sesión	Función f(n)=n+2
	Tablas con cambio de registro del franelograma al papel y viceversa

El diseño inicial de las tareas se realizó por el grupo de investigadores que forman parte del proyecto de investigación (https://www.pensamientoalgebraico.es). Las tareas se contextualizaron en un cuento sobre una niña que viaja al espacio, algo atractivo para los niños.

Tres investigadoras entraron al aula. Dos de las autoras de este trabajo actuaron como investigadoras docentes y otra se metió en la máquina (un cohete del tamaño de los niños), grabó y sirvió de apoyo en toda la sesión. La tutora de la clase permaneció y ayudó en la gestión del aula pero no se implicó desde el punto de vista investigador.

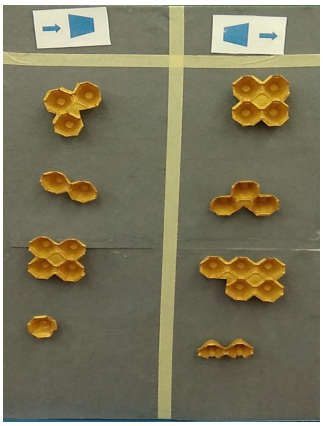
Las sesiones duraron aproximadamente una hora y cada una de ellas se dividió en tres fases: (a) ambientación (repaso de la sesión anterior e introducción de la tarea), (b) trabajo con la máquina y (c) reflexión.

Grabamos las sesiones en vídeo y registramos nuestras observaciones del aula por escrito. Utilizamos una cámara fija, ubicada al fondo del aula; y una cámara móvil para situaciones particulares relevantes para la investigación.

Con base en nuestros antecedentes, decidimos trabajar con las funciones lineales f(n)=n+1 (Castro et al., 2017; Willoughby, 1997) y f(n)=n+2 (Anglada y Cañadas, 2021; Anglada et al., 2022; Warren et al., 2013; Willoughby, 1997), con dominios y codominios en los números naturales.

En las segunda y tercera sesiones trabajamos con las funciones f(n)=n+1 y f(n)=n+2, respectivamente. En la zona de asamblea situamos un cohete de cartón en el que se metió una de las investigadoras. Los niños se sentaron alrededor del cohete. En el cohete metíamos piedras lunares en una bolsa y salía otro número de piedras lunares. Para que recordaran el número de piedras que entraban, utilizamos un material inspirado en las tarjetas de Herbinière Lebert que consistía en hueveras recortadas para los números del 1 al 10 (J. M. Belmonte, comunicación personal, 28 de octubre de 2022), a las que llamamos cápsulas del espacio. Este material permitía subitizar, sin necesidad de contar. Les damos así una herramienta adicional a la del conteo para saber cuántos hay. Con esto evitamos en lo posible errores derivados del conteo, minimizando así otros elementos que pudieran interferir en el desarrollo del pensamiento funcional. Además, esta característica del material aporta facilidad a la hora de observar e interpretar los datos de la tabla. Estas hueveras se pegaban en un franelograma, en el que había una estructura de tabla, como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Cápsulas del espacio.



Los niños, por parejas, hacían de entrada y salida del cohete: uno metía las piedras y el otro las recibía. Mientras, el resto estaba atento a lo que sucedía y participaba respondiendo preguntas que formulaban las investigadoras (ver Tabla 2). Inicialmente eran preguntas sobre casos particulares, hasta que llegábamos a preguntar por la generalización, siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Prestamos mucha importancia al diseño de las preguntas. Por ejemplo, tuvimos cuidado de no usar en las preguntas palabras que se refirieran a lo indeterminado, por ejemplo, evitamos la palabra “siempre” o “cada vez”, para no condicionar las respuestas de los niños y observar si ellos las usaban espontáneamente.

Tabla 2. Tipos de preguntas planteadas

Tipos de preguntas	Ejemplos de preguntas
Casos particulares	¿Qué creéis que va a salir del cohete?¿Qué pasa cuándo entran las piedras lunares de esta cápsula? ¿Qué pasa cuando entran dos piedras lunares? ¿Qué va a parar cuando metamos las piedras lunares de esta cápsula? ¿Qué cápsula vamos a necesitar para las piedras lunares que salgan? ¿Qué pasaría si metiésemos 10 piedras lunares? ¿Y 20?
Generalización	¿Qué ha ocurrido en el cohete? ¿Qué ocurriría si metiésemos muchas piedras lunares, no sé cuántas, pero muchas? ¿Y con muchas? ¿Y con tropecientas?

El niño que hacía entrada debía buscar la cápsula correspondiente a la cantidad de piedras que le dábamos, comprobaba con las piedras que era la huevera adecuada y se la mostraba al resto de alumnos, que aprobaban o no la elección. Luego el niño vaciaba las piedras en una bolsa, pegaba la cápsula en la tabla y metía la bolsa en el cohete. En el interior del cohete se producía una transformación del número de piedras, que se teatralizaba con ruidos. Al sonar un timbre salían las piedras que recogía el segundo niño. En la segunda sesión salía una piedra más de las que entraban; y en la tercera sesión, dos más. El niño debía buscar la cápsula correspondiente a esa cantidad, los compañeros confirmaban la elección y la pegaba en el franelograma. Así íbamos representando en la tabla parejas de valores para la función, como se observa en la Figura 1.

Al principio no preguntábamos nada para ver qué expresaban los niños de forma espontánea. A partir del tercer niño que jugó con la máquina, cuando este metía la bolsa preguntábamos si sabían lo que iba a pasar y cuál iba a ser la cápsula que necesitarían cuando salieran las piedras. Cuando la tabla estaba llena, pasábamos a la tercera fase. Sentábamos a los niños en asamblea y les pedíamos que nos contaran qué había pasado. Preguntamos sin usar ya el cohete, pero teniendo delante la tabla con las cápsulas.

Para el análisis de datos, transcribimos las grabaciones y realizamos un análisis preliminar de los datos para definir las categorías de análisis dado el objetivo de investigación, el marco conceptual y los antecedentes. Tomamos como unidad de análisis las respuestas de cada uno de los niños en cada sesión. Para ambas funciones, las categorías son: (a) no hay evidencias de que identifiquen estructuras; (b) evidencian una estructura con casos particulares; (c) evidencian una estructura con casos particulares y la generalizan.

Para considerar que un estudiante identifica una estructura para una función , este debe responder a dos o más casos particulares siguiendo la misma regularidad o dar una expresión de la generalización. Este criterio ha sido considerado en estudios anteriores (e.g., Pinto y Cañadas, 2017; Torres et al., 2021a). Consideramos que no hay evidencias de que identificaran estructuras en el caso de que los niños no participaran de forma espontánea ni respondieran cuando se les preguntaba, cuando no quedaba claro si su respuesta estaba influenciada por la de otros compañeros o bien cuando no identificaban ninguna estructura. Para referirnos a los niños los simbolizaremos por An, n=1, ...,20, para salvaguardar su identidad.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Con base en las categorías definidas, en la Tabla 2 presentamos las estructuras identificadas por los niños para casos particulares y para el caso general.

Tabla 2. Estructuras identificadas por los niños.

	$f(n)=n+1$		$f(n)=n+2$	
	Casos particulares	Caso general	Casos particulares	Caso general
A1	-	-	-	-
A2	$f(n)=n+1$	$f(n)=n+1$	$f(n)=n+1$	$f(n)= n+1$, $f(n)>n$
A3	$f(n)=n+1$	-	-	-
A4	$f(n)=n+1$	-	$f(n)=n+2$	-
A5	-	$f(n)>n$	-	-
A6	$f(n)=n+1$	-	$f(n)=n+2$	$f(n)=n+2$
A7	$f(n)=n+1$	-	-	-
A8	-	-	-	-
A9	-	-	$f(n)=n+2$	-
A10	-	$f(n)>n$	$f(n)=n+2$	$f(n)=n+2$
A11	$f(n)=n+1$	-	$f(n)=n+2$	-
A12	-	$f(n)>n$	-	-
A13	-	-	-	-
A14	$f(n)=n+1$	$f(n)=n+1$	$f(n)=n+2$	-

Tabla 2. Estructuras identificadas por los niños.

	f(n)=n+1		f(n)=n+2	
	Casos particulares	Caso general	Casos particulares	Caso general
A15	-	-	-	-
A16	-	-	-	f(n)>n
A17	-	-	-	-
A18	-	-	-	-
A19	-	-	f(n)=n+1	-
A20	-	-	f(n)=n+2	-

Nota. - no hay evidencia de estructuras.

Para f(n)=n+1 siete niños identificaron una estructura correcta al preguntarles por casos particulares. En el resto de los casos no hay evidencia de estructura. Para preguntas sobre generalización, A2 llegó a una expresión de la generalización diciendo: "El cohete lo que hace es que falte una" y se mantuvo en esta afirmación cada vez que preguntábamos. Incluso la aclaró diciendo: "Lo que hace es que haya una piedra que se quede sin huevera". A continuación, podemos observar un fragmento con la respuesta de A14 a una pregunta sobre el caso general. Con I1 nos estamos refiriendo a la investigadora 1 y con I2 a la investigadora 2.

I1: A14, ¿qué hace el cohete?
A14: Sale otra piedra de luna.
I2: Lo que dices es muy interesante, ven y me cuentas.
A14: Cuando entra una piedra y pasa por el cohete sale otro número.
I1: Si entran tres, ¿cuántas salen?
A14: Pues cuatro.
IS: ¿Por qué sabes eso?
A14: Porque el cohete lo hace.

En la transcripción observamos que A14 cuando se le pregunta qué hace el cohete, responde "sale otra piedra de luna", podríamos considerar esta respuesta como una regla general la transformación, para confirmarlo seguimos preguntando, entonces dice que cuando entra una piedra sale otro número. Esta respuesta es un condicional que da idea de generalidad. Además, A14 responde correctamente a la pregunta sobre la salida dada la entrada en un ejemplo concreto.

Para f(n)=n+2, nueve niños identificaron una estructura, siete de ellas correctas. En el resto de los casos no hay evidencia de que identificaran estructuras. En cuanto al caso general, A2 expresa la generalización como "el siguiente", y A6 y A10 dijeron "cuando metes las piedrecitas salen dos más".

Algunos niños identificaron la estructura como un aumento en la cantidad, tres en la primera función y dos en la segunda. Esto puede considerarse como una forma de generalización incipiente (Torres et al., 2021b). A5 dijo: "las cosas se hacen más grandes", A10 dijo: "el cohete ha hecho que sea más grande", A12: "el cohete hace más piedras", A2: "que las piedras se hagan más" y A16: "que salgan más piedras".

Los resultados son similares para las dos funciones, aunque para f(n)=n+2 en los casos particulares hubo más niños que identificaron la estructura adecuada y uno que identificó la estructura de la tarea anterior, cuando en la correspondiente no lo había hecho adecuadamente. Para f(n)=n+1 todas las estructuras identificadas fueron correctas, para f(n)=n+2 no todas lo fueron. Los niños que llegaron a una generalización correcta con una función no fueron los mismos que llegaron a una generalización con la otra función.

CONCLUSIONES

Nuestro objetivo de investigación era analizar las estructuras que identifican los niños de último curso de educación infantil al abordar tareas contextualizadas que involucran a las funciones lineales f(n)=n+1 y f(n)=n+2. Podemos considerar que este objetivo se ha conseguido a pesar de encontrarnos

con algunas limitaciones. Una limitación se este trabajo es que el hecho de observar a todo el grupo a veces nos impidió que tengamos evidencia de si un niño identificaba una estructura, bien porque no participaba, porque no respondía cuando se le preguntaba o porque no podíamos saber si respondía por imitación.

Para expresar la generalización utilizaron el lenguaje verbal, un lenguaje bastante limitado porque sus descripciones carecían de precisión y solían ir acompañadas de gestos y movimientos. Esta limitación en las expresiones verbales dificultó a veces reconocer si una expresión correspondía o no a una generalización. Esto es habitual en este grupo etario. Por ejemplo, cuando A14 nos dijo: "Sale otra piedra de luna", recurrimos a respuestas de este niño a casos particulares y a sus gestos para considerar que quería decir realmente que salía una piedra más. En el diseño de las preguntas tuvimos cuidado de no usar palabras que se refirieran a lo indeterminado. La intención fue ver si algún niño utilizaba alguno de estos términos, pero ninguno lo hizo.

El principal aporte de esta investigación respecto a nuestros antecedentes en educación infantil es el estudio de la generalización y su expresión. También es novedoso el uso de tablas de funciones. Cuando en la literatura hablan de representación tabular, normalmente hacen referencia a una tabla dibujada. En nuestro caso, se usaba un manipulativo en la representación tabular. Cuando preguntábamos por casos particulares en la asamblea, muchos niños recurrían a la tabla manipulativa. Este es un aspecto novedoso respecto a los estudios de este tipo que encontramos en la literatura. Dejamos como línea de investigación abierta para el futuro el uso de tablas de funciones, con material manipulativo y dibujadas en tareas de este tipo.

Otra línea de investigación podría ser la importancia del contexto y el diseño de tareas. En este caso el alumnado estuvo muy motivado, la mayoría participó y mantuvo la atención durante un período de tiempo prolongado. Ha sido motivador el contextualizar la tarea, el uso de material manipulativo y el juego.

Esta tarea podría ayudar a los maestros a trabajar el pensamiento funcional en el aula, sobre todo por el hecho de haberla implementado en un aula ordinaria con todo el alumnado.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Española de Investigación.

REFERENCIAS

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer.

Canals, M. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola*. I. Parvulari. Eumo.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia, 6*(2) 1-13.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores.(Vol. 1): operadores aditivos*. Teide.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y represen- taciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación, 5° edición*. McGraw Hill.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Moss, J. y London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 277-301). Springer

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

National Council Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática. National Council of Teachers of Mathematics* (traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES).

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021a). Primeras experiencias con una tabla en segundo de educación primaria. Aproximación funcional al pensamiento algebraico. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 603- 611). SEIEM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021b). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*(10), 1109.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

Willoughby, S. S. (1997). Functions from Kindergarten through Sixth Grade. *Teaching Children Mathematics, 3*(6), 314-318.

COMPORTAMIENTOS DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO AL ENUNCIAR RAZONAMIENTOS ABDUCTIVOS

Preservice teachers' behaviours when stating abductive reasonings

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

Los profesores de matemáticas han de tener un adecuado conocimiento sobre los procesos de razonamiento y prueba, lo que hace necesario diseñar e implementar tareas, durante su formación inicial, que les permitan revisarlo y desarrollarlo. Se presentan resultados vinculados a la implementación con estudiantes para maestro de un experimento de enseñanza sobre la conjetura y demostración del teorema del ángulo inscrito. Se usan como marcos analíticos el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y los esquemas de prueba. Varias parejas enunciaron hipótesis, en forma de razonamientos abductivos, de por qué se cumplía la relación angular, pero su comportamiento tras ello resultó muy diferente. Se analiza y caracteriza aquí el trabajo de dos parejas, donde el modo de comportarse de una de ellas nos lleva a sugerir la existencia de esquemas de prueba de tipo abductivo.

Palabras clave: *Estudiantes para maestro, experimento de enseñanza, conjeturar y demostrar, razonamientos abductivos, MTSK.*

Abstract

Mathematics teachers must have an adequate knowledge of the processes of reasoning and proof. That makes necessary to design and implement tasks during their initial training that allow them to review and develop it. Results of the implementation of a teaching experiment designed to promote reasoning and proving processes about the inscribed angle theorem with preservice teachers are presented. The MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) model and proof schemes are used as analytical frameworks. Several pairs of students stated hypothesis, in the form of abductive reasoning, to justify the validity of the angle relation, but they have different behaviours after that. The work of two pairs of preservice teachers is analysed and characterised, and the behaviour of one of them leads us to suggest the existence of abductive proof schemes.

Keywords: *Preservice teachers, teaching experiment, conjecturing and proving, abductive reasonings, MTSK.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La publicación e influencia de los principios y estándares para la educación matemática del NCTM estadounidense (NCTM, 2000) ha provocado una mayor concienciación sobre la importancia de los procesos clave en matemáticas, que va teniendo progresivamente su reflejo en los currículos. Un ejemplo es el currículo asociado a la LOMLOE, con las competencias específicas introducidas en matemáticas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Uno de esos procesos clave, tomado como un eje de las competencias específicas, son los procesos de razonamiento y prueba. La importancia de estos procesos en educación matemática está ampliamente reconocida, teniendo en cuenta que hay muchas acciones y subprocesos involucrados en ellos, tanto en la indagación para detectar y establecer conjeturas como en el desarrollo de una cadena lógica de razonamientos que permita validar (si es el caso) la conjetura (Arzarello, 2008; Jeannotte y Kieran, 2017). En estos procesos tienen importancia los razonamientos tanto abductivo, como inductivo y como deductivo.

Arce, M. y Conejo, L. (2023). Comportamientos de estudiantes para maestro al enunciar razonamientos abductivos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 139–146). SEIEM.

El papel del docente es clave en el diseño, implementación y gestión de actividades vinculadas con los procesos de razonamiento y prueba, para lo cual es imprescindible (aunque no suficiente) que el docente tenga un adecuado conocimiento de estos. Modelos como el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) destacan la necesidad de un adecuado conocimiento de las prácticas propias del quehacer matemático. Así, surge la necesidad de diseñar e implementar tareas formativas que permitan revisar y desarrollar el conocimiento sobre estos procesos de profesores en formación. Se presentan resultados de la implementación de una tarea basada en conjeturar y demostrar el teorema del ángulo inscrito con estudiantes para maestro (en adelante, EPM). El objetivo de la comunicación es describir y caracterizar diferentes comportamientos de EPM en el desarrollo de la tarea formativa después de que detectaran y enunciaran, a modo de razonamiento abductivo, una posible relación entre el ángulo inscrito y su central correspondiente que pudiera justificar la relación angular existente.

MARCO TEÓRICO

El conocimiento que ha de tener un profesor de matemáticas para poder desarrollar su labor docente es una línea de investigación con alta presencia en la actualidad. Tras el trabajo seminal de Shulman (1986), se han desarrollado diferentes modelos de conocimiento. Un ejemplo es el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018), que, como otros modelos, considera una distinción en dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático. Este trabajo está focalizado en el dominio del conocimiento matemático. El modelo MTSK considera tres subdominios dentro del mismo que se caracterizan en términos de las propias matemáticas, estando los procesos de razonamiento y prueba incluidos en uno de los subdominios, lo que nos hace elegir este modelo como marco analítico del conocimiento movilizado por los EPM al desarrollar la tarea. Se explican a continuación los dos subdominios del conocimiento matemático con presencia en los datos.

El conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) comprende el conocimiento disciplinar de los contenidos matemáticos curriculares (Carrillo et al., 2018), y distingue cuatro categorías de conocimiento: definiciones, propiedades y fundamentos matemáticos; procedimientos asociados a los contenidos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones de los contenidos.

El conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM) está asociado al conocimiento de cualquier actividad matemática que, llevada a cabo de forma sistemática, supone un pilar para hacer y construir conocimiento matemático y que conforma una base lógica de la que se pueden extraer reglas (Carrillo et al., 2018). Delgado-Rebolledo et al. (2022) proponen cuatro categorías de conocimiento en este subdominio, basadas cada una en diferentes prácticas matemáticas: razonar y demostrar, definir, resolver problemas y el papel del lenguaje matemático. Dentro de la categoría de las prácticas de razonar y demostrar, se reconoce la importancia tanto del proceso de indagar y formular conjeturas como de construir cadenas de razonamientos que las validen (Arzarello, 2008), puesto que se incluye tanto el conocimiento sobre cómo desarrollar demostraciones (detección de regularidades y patrones, construcción de conjeturas, rol de ejemplos y contraejemplos), como el conocimiento de métodos y tipos de demostración (y su validez), y de funciones de la demostración (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

Es habitual distinguir tres grandes tipos de razonamiento en matemáticas como parte de estos procesos (Jeannotte y Kieran, 2017): abductivo, inductivo y deductivo. La caracterización del razonamiento inductivo (comprobación del cumplimiento de una conjetura en uno o varios casos particulares) y deductivo (construcción de una cadena lógica de razonamiento que vincule conocimiento validado con la conjetura que trato de justificar) está bastante consensuada. No sucede lo mismo con el razonamiento abductivo, por su propia evolución histórica y las diferentes aproximaciones al mismo (Pedemonte y Reid, 2011; Reid, 2018). Este razonamiento se vincula a los procesos de explicar y descubrir (Komatsu y Jones, 2022) y, aquí, lo entenderemos como el

proceso de formulación de posibles hipótesis que pudieran explicar y justificar una conjetura. Cada tipo de razonamiento juega un rol distinto, pero esencial, en tareas de conjeturar y demostrar (Reid, 2018). El razonamiento abductivo ayuda a encontrar posibles hipótesis que puedan permitir iniciar un razonamiento deductivo (Pedemonte y Reid, 2011), aunque el paso de uno a otro pueda resultar especialmente complejo en entornos de geometría dinámica (Baccaglini-Frank, 2019), y poder generar conocimiento matemático (Komatsu y Jones, 2022). El razonamiento inductivo ayuda a aumentar el convencimiento de la certeza de una conjetura o refutarla (en caso de encontrar un contraejemplo). El razonamiento deductivo es el que permite validar conocimiento en matemáticas.

Otra idea para analizar los procesos de razonamiento y prueba es la de *esquemas de prueba* (en adelante, EP). El EP de una persona es aquello que constituye convencimiento y persuasión para esa persona sobre la validez de un enunciado matemático (Harel y Sowder, 2007). Se distinguen tres tipos: a) EP de convicción externa (donde el convencimiento y persuasión proviene de elementos ajenos al razonamiento), b) EP empíricos (donde proviene de percepciones o manipulaciones físicas —EP experimentales—, o de ejemplos o comprobaciones en casos concretos —EP inductivos—) y, finalmente, c) EP analíticos (en los que proviene de razonamientos de tipo deductivo).

El EP de una persona se relaciona con el conocimiento que tiene sobre qué constituye una prueba válida en matemáticas y las funciones de esta, teniendo en cuenta que las formas de generar conocimiento en cada disciplina son diferentes (Reid, 2018). Varios estudios apuntan que tanto estudiantes como profesores en formación tienen diferentes esquemas de prueba, incluyéndose una presencia enraizada importante de EP inductivos (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009). Hechos como este son factores limitantes muy importantes para el diseño y la gestión de oportunidades de aprendizaje vinculadas a estos procesos de razonamiento y prueba en su futuro profesional. Así, es importante detectar cuáles son los EP de los EPM, y diseñar e implementar tareas formativas que puedan promover avances hacia los EP analíticos. Para esa detección, en esta tarea formativa usaremos preguntas similares a *pilares de conciencia conceptual* (*conceptual awareness pillars,* Stylianides y Stylianides (2009), para dirigir la atención de los estudiantes hacia el grado de convencimiento sobre sus conjeturas y el carácter probado, o no, de las mismas.

MÉTODO: TAREA FORMATIVA, CONTEXTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

La investigación en la que está inmersa esta comunicación ha seguido una metodología de investigación basada en el diseño (Molina, 2021), caracterizada por la interdependencia existente entre el diseño instruccional, que sirve de contexto para la investigación; y la investigación, que informa el diseño instruccional en cada ciclo iterativo. En concreto, ha adoptado la forma de experimento de enseñanza, al constar de una tarea formativa con una secuencia de episodios de enseñanza donde pueden participar un docente-investigador, estudiantes e investigadores-observadores. La tarea formativa se centra en conjeturar y demostrar la relación angular del ángulo inscrito en una circunferencia con su ángulo central correspondiente. Estas relaciones suelen ser desconocidas o no recordadas por los EPM, lo que favorece verdaderos procesos de indagación, conjetura y prueba. Para su diseño, se siguieron los principios de Lin et al. (2012) para actividades con foco en los procesos de conjeturar y demostrar, tanto para el proceso de conjeturar, como para la transición adecuada entre conjeturar y probar, y para el proceso de probar.

El proceso de conjeturar estaba dividido en dos fases. En la primera, los EPM trabajaron de forma individual con papel, lápiz y útiles de dibujo y medición dibujando ángulos inscritos y sus centrales correspondientes para, a través de la construcción indagatoria y observación (principio de Lin et al., 2012), poder establecer una conjetura sobre la relación de sus amplitudes. Tras ello, se plantearon preguntas para que reflexionen sobre su conjetura (principio de Lin et al., 2012), inspiradas en las hechas por Stylianides y Stylianides (2009), para obtener información sobre los EP de los EPM:

- ¿En qué grado estás convencido (estás seguro de que es así) de que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?

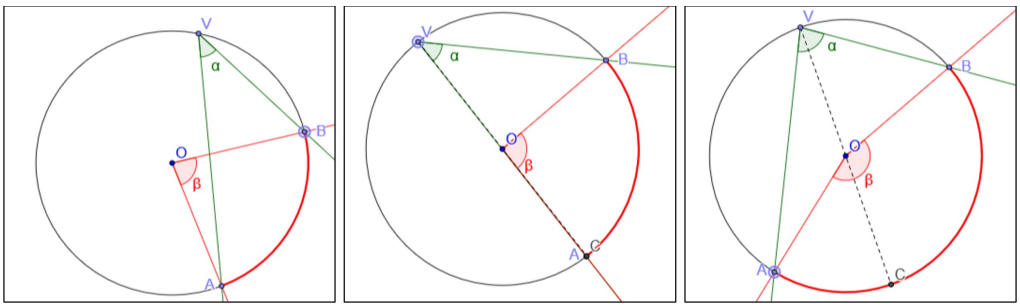
- ¿Crees que está suficientemente probado que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?
- Si crees que podrías estar más convencido y/o que se podría probar mejor que la conjetura que has hecho es cierta, ¿qué habría que hacer para lograrlo?

En la segunda fase, los EPM trabajaron por parejas y debían contestar las mismas cuestiones de la fase anterior, pero ahora trabajando con un applet GeoGebra con un ángulo inscrito y su central correspondiente construidos (https://www.geogebra.org/m/ukrfyber, Figura 1, izda.). En él, los EPM pudieron dinamizar la construcción y ayudarse de la barra de herramientas para indagar la relación existente y ratificarse o cambiar la conjetura anterior, así como contestar las mismas preguntas anteriores asociadas a sus EP. En estas fases el proceso de conjetura está basado en la comprobación con casos particulares (razonamiento inductivo), pero aparecieron, al contestar las preguntas, posibles hipótesis de por qué era cierto el resultado (razonamiento abductivo).

La fase tercera, por parejas, se inició con una transición entre conjeturar y probar, buscando generar una necesidad en los estudiantes de realizar dicha transición (principio de Lin et al., 2012). En este caso, se trató de generar una necesidad intelectual, solicitándoles que explicaran por qué creían que esa conjetura de la relación de amplitudes era cierta y qué relaciones entre ambos ángulos podían propiciar que la conjetura se cumpliera siempre. A través de estas preguntas se pretendía generar una reflexión que propiciara avances desde EP inductivos, y la emergencia de posibles hipótesis (razonamiento abductivo) que pudieran servir para construir una prueba de este.

Posteriormente, en el proceso de probar, se buscaba que desarrollaran sus propias pruebas con el apoyo de diferentes representaciones para expresar sus argumentos (principios de Lin et al., 2012). Para ello se usó otro applet (https://www.geogebra.org/m/zc8xdx3z) con la construcción y donde se planteaban varias preguntas para movilizar los conocimientos necesarios y guiar la construcción de una prueba. Primero, se considera el caso más sencillo (Figura 1, centro), en el que uno de los lados del ángulo contiene al centro de la circunferencia, con estas preguntas: ¿Cómo es este triángulo atendiendo a sus lados y por qué (razona sin recurrir a medir los lados)? ¿Cuál es la amplitud de los tres ángulos de VOB (razona sin medirlos)? ¿Qué relación hay entre los ángulos del triángulo VOB y el ángulo central correspondiente? A continuación, se les preguntó cómo justificar los otros dos casos (Figura 1, dcha.) a partir del anterior, finalizando la tarea formativa con las mismas preguntas asociadas a obtener información sobre sus EP tras la tarea.

Figura 1. Imágenes de los applets GeoGebra usados en el experimento de enseñanza



Esta tarea formativa fue planteada a un grupo de 55 EPM, en una asignatura del Grado en Educación Primaria sobre geometría y su didáctica (2.º curso). Esta tarea se situó en la primera parte del curso y abarcó 90 minutos. Los EPM participantes conocían y habían usado GeoGebra y se había trabajado ya en la asignatura con las definiciones de los diferentes tipos de ángulos en la circunferencia, pero no sus relaciones angulares. En esta asignatura no hubo instrucción específica previa sobre los procesos de razonamiento y prueba.

En la tarea se recogieron los datos de las producciones de los EPM (en papel o en GeoGebra Classroom), así como notas de campo durante su desarrollo. Se aplicó una metodología de análisis de contenido para el análisis y la verificación de los contenidos de datos escritos. Las producciones

de cada EPM fueron analizadas por ambos autores, para identificar elementos de conocimiento movilizados en cada etapa del experimento de enseñanza (usando los subdominios y categorías del MTSK, y la clasificación de EP). Tras ello, se compartieron los resultados hasta llegar a un consenso en la descripción, caracterización e interpretación de lo desarrollado por cada EPM.

RESULTADOS: COMPORTAMIENTOS DE EPM TRAS ENCONTRAR UNA HIPÓTESIS PARA LA CONJETURA

Varios EPM, tras enunciar la conjetura de la relación angular, escribieron posibles hipótesis o razones que podrían explicar o justificar por qué la conjetura es cierta (razonamientos de tipo abductivo). La más repetida, en cinco grupos de EPM, fue que la distancia entre el vértice del ángulo central correspondiente al arco de la circunferencia subtendido por el ángulo inscrito es la mitad que la distancia entre el vértice del ángulo inscrito y ese arco subtendido. Es decir, aludieron a una proporcionalidad inversa entre la distancia del vértice al arco subtendido y la amplitud del ángulo (que no es cierta). Se describe y caracteriza a continuación (usando el marco MTSK y los EP) el comportamiento diferente en el desarrollo de la tarea formativa de dos parejas de EPM que verbalizaron esta posible hipótesis, destacando la influencia de esta en el desarrollo de la tarea.

Caso de Jerónimo y Enrique (pseudónimos)

En la primera fase, cada estudiante dibujó un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente, añadiendo sus nombres (Figura 2, izda.), y midió sus amplitudes (KoT movilizado: definiciones, procedimientos), enunciando ambos la conjetura de que el ángulo central mide el doble que el inscrito (KPM movilizado: cómo construir demostraciones —detección de regularidad, formulación de conjetura—). Ambos se mostraron convencidos de la conjetura y la consideran suficientemente probada, pero no con el mismo grado de seguridad: Jerónimo sí estaba seguro; Enrique indicó que estaba "convencido prácticamente al 100%" y que "cree que sí" está suficientemente probada. Al justificar por qué cree que está suficientemente probado, añadió la hipótesis de las distancias (KoT movilizado: propiedad detectada en ejemplo entre distancia y amplitud del ángulo):

> Enrique: Yo creo que sí, debido a que el ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito siempre está en el centro de la circunferencia, es decir, transportas el ángulo inscrito a una distancia que es la mitad de la inicial, por lo que su amplitud será el doble.

Es decir, Enrique pareció mostrar la necesidad de encontrar una razón general que justifique la conjetura, pero en la última pregunta, al igual que Jerónimo, aludió a la necesidad de comprobarlo en más ejemplos midiendo con el transportador, lo que es más cercano a un EP inductivo (debilidad del KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez).

En la segunda fase, la pareja hizo uso del applet GeoGebra, dinamizando la figura y añadiendo las medidas de ambos ángulos, para enunciar la misma conjetura. Añadieron que estaban cada vez más convencidos de la relación, porque "no varía aunque cambiemos la posición del ángulo inscrito", y suficientemente seguros de su validez, evidenciando que en esta fase movilizaron los mismos elementos de KPM que en la fase anterior y mostrando unas respuestas propias de un EP inductivo.

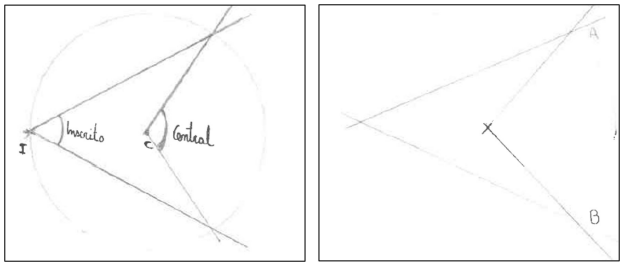
En la tercera fase, en las preguntas de transición de conjeturar a probar, la pareja escribió que creía que la conjetura se cumplía "debido a que el vértice del ángulo central se encuentra situado a la mitad de distancia que el vértice del ángulo inscrito, por lo que al ser el central correspondiente al inscrito, su amplitud será el doble", volviendo a enunciar la hipótesis antes detectada por Enrique. Posteriormente, y a partir de las preguntas guía, la pareja movilizó los conocimientos necesarios (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración) para construir una demostración de la relación angular en el caso más sencillo:

> Jerónimo y Enrique: Según sus lados este triángulo es isósceles, ya que dos de sus lados (VO, OB) son iguales, ya que corresponden al radio de la circunferencia. α y el ángulo con vértice en B tienen que ser el mismo ángulo, y entonces el ángulo con vértice en O tiene que ser el

> doble de α. Respecto a la relación del ángulo central con los del triángulo VOB, el ángulo central tiene que ser 180 menos el ángulo del triángulo VOB con vértice en O y como hemos visto antes, también será el doble del ángulo α.

Sin embargo, no se apoyaron en este resultado ya probado para probar los otros dos casos, al indicar tan solo que pasaba lo mismo (debilidad del KPM movilizado: funciones de la demostración). Al final, indicaron que esta fase "no ha mejorado nuestro convencimiento, pero sí ha reforzado nuestra conjetura" y mencionaron pruebas empíricas variando la apertura y la posición del centro con respecto al ángulo para indicar que la conjetura ya estaba probada, lo que evidencia el EP inductivo de esta pareja. Este EP inductivo se muestra enraizado (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009), puesto que, aunque Enrique detectó una posible hipótesis a modo de razonamiento abductivo (al ver la Figura 2, izda.) que podría justificar la conjetura, no la testaron ni hicieron uso real de ella en todo el desarrollo de la tarea, y tampoco llegaron a dar sentido a las implicaciones de construir una prueba deductiva (del caso más sencillo) de la relación angular.

Figura 2. Dibujos de Enrique (izda.) y Alicia (dcha.) que les permitieron enunciar la hipótesis



Caso de Alicia y Diana (pseudónimos)

Cada alumna dibujó un ángulo inscrito y su central correspondiente en papel (Figura 2, dcha.), midió sus amplitudes (KoT movilizado: definiciones, procedimientos) y enunció la conjetura de forma correcta (KPM movilizado: cómo construir demostraciones —detección de regularidad, formulación de conjetura—). En los dos casos expresaron su convencimiento de que la conjetura era cierta y que ya estaba suficientemente probada, aunque por motivos diferentes. Diana esgrimió que se debía a la medición con el transportador en el ejemplo, mostrando un EP empírico inductivo. Sin embargo, Alicia indicó que estaba "muy convencida porque a parte [sic] de medirlo con el transportador, para alcanzar el punto A y el punto B del vértice central se encuentra a la mitad de distancia del que tiene el inscrito", razón que también esgrime como forma suficiente de probar la conjetura. Parece que Alicia ya obtiene convencimiento solo enunciando una posible hipótesis que justifique la relación, es decir, con un razonamiento de tipo abductivo (debilidad del KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez).

En la segunda fase, por parejas y con GeoGebra, siguen manteniendo la conjetura inicial, aunque, al preguntarles acerca de su grado de convencimiento sobre ella, manifiestan que no es mucho, y vuelven a indicar la relación con las distancias de los vértices al ángulo: "El vértice del ángulo central al estar a la mitad de la distancia que el vértice del ángulo inscrito, la amplitud es el doble". Sin embargo, a la pregunta de si creen que está suficientemente probado el resultado, indican que "Sí, porque es el doble" (inferimos que pudiendo referirse a la relación de distancias). En esta parte no usaron GeoGebra para comprobar la conjetura con más ejemplos, sin considerar un razonamiento inductivo para convencerse de la veracidad de la relación angular o la dinamización de la posición del vértice del ángulo inscrito para detectar que la relación de distancias es variable.

En la tercera fase, las alumnas mantienen como explicación de la relación angular que "porque el vértice del ángulo central al estar a la mitad de la distancia que el vértice del ángulo inscrito, la amplitud es el doble". En la construcción de la demostración, las alumnas justifican adecuadamente que el triángulo es isósceles y las amplitudes de los tres ángulos de este (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración),

pero no lo usan para deducir la relación angular. Sin embargo, y como continuación de la propia demostración, incluyen la relación entre distancias y amplitudes como hipótesis de la que se deriva el cumplimiento de dicha relación angular. Más aún, cuando se les solicita demostrar el caso del centro de la circunferencia fuera del ángulo inscrito, afirman que "la relación vista anteriormente aquí no se da, porque el ángulo central no se encuentra dentro del inscrito", inferimos que, fijándose en la relación de distancias como una hipótesis necesaria para el cumplimiento de la relación angular, y aquí aprecian que no se cumple dicha relación de distancias. Con este reenunciado del teorema incluyendo esta hipótesis necesaria, esta pareja es consciente de las implicaciones de disponer de un teorema, al aplicarlo solo cuando se cumple dicha hipótesis (KPM movilizado).

El comportamiento de esta pareja, que muestra convencimiento de la conjetura a partir de un razonamiento abductivo (sin llegar a conectar lógicamente la hipótesis con la relación angular), e incluso llega a aplicar la hipótesis como condición para que se cumpla la relación angular, nos lleva a sugerir que esta pareja muestra un EP diferente de los propuestos por Harel y Sowder (2007). Así, planteamos la existencia, ya sugerida en Arce y Conejo (2019), de un EP abductivo, caracterizado por la obtención de convencimiento y persuasión solo a partir de encontrar y enunciar una posible hipótesis de por qué es cierta la conjetura, pero sin llegar a conectarla lógicamente con esta.

CONCLUSIONES

La inclusión en la tarea formativa de preguntas similares a los *pilares de conciencia conceptual* de Stylianides y Stylianides (2009) y preguntas para transitar del proceso de conjeturar al de demostrar ha favorecido que emergieran razonamientos abductivos con posibles hipótesis que justifiquen la relación angular, lo cual es relevante dada la dificultad para generar este tipo de razonamientos (Pedemonte y Reid, 2011) y su rol para generar conocimiento matemático (Komatsu y Jones, 2022).

En el caso de Alicia y Diana, sus respuestas nos llevan a sugerir la existencia de un EP de tipo abductivo, que se añadiera a la clasificación de Harel y Sowder (2007), donde el convencimiento y la persuasión sobre la validez de un enunciado la obtienen a partir de un razonamiento abductivo. Este EP movilizaría un conocimiento de los temas (KoT) necesario para formular una conjetura, así como un conocimiento de cómo comenzar a construir una demostración matemática (KPM), que no existe en los EP de convicción externa, pero sin desarrollar razonamientos deductivos propios de EP analíticos. En Arce y Conejo (2019) hipotetizábamos la existencia de este EP abductivo, mostrando ahora en esta comunicación evidencias más concretas. Como sugiere Baccaglini-Frank (2019), construir y dinamizar configuraciones usando geometría dinámica puede generar aparentes relaciones de causalidad entre hipótesis y conjetura, que hagan emerger EP abductivos. Con todo, se hace necesario seguir desarrollando investigaciones para confirmar su existencia y caracterizarlo.

En el estado actual de la tarea, puede no estar aprovechándose el potencial de estos razonamientos abductivos generados, como muestran también Enrique y Jerónimo. Estos casos nos llevan a valorar la necesidad de revisar la tarea para gestionar las posibles hipótesis movilizadas (su comprobación, su relación lógica con la conjetura…) y generar mejores oportunidades del desarrollo del KPM en los EPM. Todo ello siendo conscientes de la necesidad de intervenciones continuadas para poder evolucionar los EP de los profesores en formación (Harel y Sowder, 2007), superando dificultades comunes como la amplia presencia de EP inductivos enraizados (Stylianides y Stylianides, 2009), que limita que los EPM reconozcan los procesos llevados a cabo en la tercera fase de la tarea (a pesar de movilizar el conocimiento necesario para construir bien parte de la demostración, como es el caso de Jerónimo y Enrique) y su rol necesario para validar el conocimiento construido.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo está vinculado a la red MTSK, red de investigación de la AUIP, y ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Referencia PID2021-122180OB-I00).

Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163–172). SEIEM.

Arzarello, F. (2008). The proof in the 20th century. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history to epistemology and cognition to classroom practices* (pp. 43–64). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901691_005

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM, 51*, 779-791. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01046-8

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P. Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57–69). Dykinson. http://doi.org/10.14679/1454

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Information Age.

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96,* 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Komatsu, K. y Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 567-591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Lin, F-L., Yang, K-L., Lee, K-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Autor.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educative: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83–97). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Autor.

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281–303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Reid, D. A. (2018). Abductive Reasoning in Mathematics Education: Approaches to and Theorisations of a Complex Idea. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9), em1584. https://doi.org/10.29333/ejmste/92552

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.2307/1175860

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314–352. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0314

DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA RÚBRICA PARA CARACTERIZAR LA MIRADA PROFESIONAL SOBRE LA GESTIÓN COMUNICATIVA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Design and validation of a rubric to characterize the professional noticing about communication orchestration in the mathematics classroom.

Arriagada, V.[a], Fernández, C.[b] y Solar, H. [a]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Los estudios realizados hasta el momento para caracterizar la mirada profesional del profesor de matemáticas se han enfocado principalmente en el pensamiento matemático del estudiante. Diseñamos y validamos un instrumento para caracterizar la mirada profesional sobre la gestión comunicativa del aula cuando se trabaja la competencia de argumentación. Dado que la argumentación es promovida por el docente, hemos puesto el foco en la gestión que realiza el maestro. El instrumento está formado por actividades de análisis de vídeo, una rúbrica y unas lentes teóricas. En esta comunicación presentamos la rúbrica, la cual consta de dos dimensiones: qué atienden (identifican) los docentes sobre la gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas y gestión del error y cómo atienden (interpretan). La rúbrica se diseñó para caracterizar la mirada profesional del docente sobre la gestión comunicativa del aula.

Palabras clave: *componentes comunicativos, argumentación, desarrollo profesional, mirar profesionalmente, rúbrica.*

Abstract

Studies and instruments to characterize professional noticing have focused mainly on students' mathematical thinking. We designed and validated an instrument to characterize the professional noticing on the communicative orchestration of the classroom when developing argumentation competence. Since argumentation is promoted by the teacher, we focused on the teacher's orchestration. The instrument consists of video analysis activities, a rubric and theoretical lens. In this paper we present the rubric, which consists of two dimensions on what teachers attend to on orchestration of opportunities for participation, on orchestration through questions and on orchestration of error and how they attend (interpret). The rubric was designed to characterize the teacher's professional noticing of communicative orchestration of the classroom.

Keywords: *communicative components, argumentation, professional development, professional noticing, rubric.*

INTRODUCCIÓN

La competencia mirar profesionalmente se ha conceptualizado desde diferentes perspectivas. En desarrollo profesional docente, se ha abordado desde la identificación, identificación e interpretación y desde la identificación, interpretación y respuesta a los eventos de clase (Lee, 2021). La literatura ha identificado cuatro perspectivas: una perspectiva cognitiva-psicológica, una perspectiva sociocultural, una perspectiva disciplinar y una perspectiva de la percepción de los profesores relacionada con la experiencia (König et al., 2022; Santagata et al., 2021). Nosotros nos situamos en una perspectiva cognitiva psicológica, ya que la mirada profesional la conceptualizamos respecto de los procesos cognitivos asociados al *qué* atiende el docente (qué

Arriagada, V., Fernández, C. y Solar, H. (2023). Diseño y validación de una rúbrica para caracterizar la mirada profesional sobre la gestión comunicativa en el aula de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 147–154). SEIEM.

identifica) y *cómo* le da sentido a lo que atiende (interpreta). En este trabajo concreto, el foco lo situamos en qué atiende (identifica) un profesor sobre la gestión de la comunicación en el aula de matemáticas y cómo lo atiende (interpreta).

La mayoría de los estudios previos sobre la competencia mirar profesionalmente se han centrado en cómo miran los docentes y futuros docentes profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y en cómo desarrollar esta competencia en los programas de formación inicial y continua (Dindyal et al., 2021; Fernández y Choy, 2020; Fernández et al., 2018). Estos estudios han aportado información sobre herramientas y contextos que permiten el desarrollo de la competencia, por ejemplo, han concluido que el uso de lentes teóricas, el uso de preguntas guía o el uso de representaciones de la práctica ayudan a desarrollar la competencia. Sin embargo, no conocemos estudios que se centren en cómo los docentes miran profesionalmente la gestión comunicativa en el aula, en particular, en situaciones de aula diseñadas para favorecer el desarrollo de la competencia de argumentación de los estudiantes de matemáticas.

La argumentación es una competencia matemática caracterizada por su intencionalidad de convencer a otros de la validez de un razonamiento (Ayalon y Hershkowitz, 2018; Krummheuer, 1995; Van Eemeren et al., 2013). Promueve una cultura donde la construcción del conocimiento se genera a través de la discusión y reflexión, lo que muchas veces ocurre de manera grupal (Conner et al., 2014). En este sentido, la argumentación colectiva requiere del apoyo docente a través de intervenciones que promueven el proceso argumentativo en sus estudiantes (Conner et al., 2014), así como también de acciones comunicativas (Lee, 2010; Solar y Deulofeu, 2016) que apoyen el desarrollo de la argumentación. Es por ello, que en este caso no podemos centrarnos únicamente en la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante, sino que es vital ampliar el foco a la gestión que realiza el docente al interactuar con el estudiante.

Para caracterizar la mirada profesional se han utilizado diferentes instrumentos (Gold y Holodynski, 2017; Seidel y Sturmer, 2014; van Es, 2011). Uno de los más utilizados, es la escala de van Es (2011) conformada por cuatro niveles sobre qué y cómo los docentes atienden el pensamiento matemático del estudiante. Sin embargo, esta escala, así como otros instrumentos no incorpora la gestión de componentes comunicativos como parte de la mirada profesional. Es por eso que este estudio tiene como objetivo diseñar y validar un instrumento para caracterizar la mirada profesional de docentes de matemática sobre la gestión comunicativa del aula cuando están trabajando la argumentación.

Componentes comunicativos para apoyar el desarrollo de la argumentación

Hemos puesto el foco de atención en la gestión comunicativa en el aula cuando se está trabajando la competencia de argumentación considerando los componentes comunicativos que propone Lee (2010) y que fueron adaptados por Solar y Deulofeu (2016) a través de un listado de acciones docentes que apoyan la promoción de la argumentación. Estas componentes se utilizarán para establecer los focos sobre qué atender e interpretar de la gestión comunicativa en el aula. Definimos a continuación dichos componentes:

Gestión de oportunidades de participación: Acción del docente para asegurar que todos los estudiantes tengan la oportunidad de aportar, lo que se puede reflejar a través de una o más de las siguientes acciones: Pasear por la sala de clases observando los desarrollos de los estudiantes, para así reconocer procedimientos distintos, respuestas erradas o errores frecuentes. Promover el debate de diferentes procedimientos, preguntas o respuestas utilizados para resolver un problema. Promover la intervención de todos los estudiantes, y no tan sólo a aquellos que desean intervenir. Gestionar con flexibilidad que los alumnos puedan interrumpir al profesor e intervenir en la clase. No validar ni invalidar las preguntas realizadas por los estudiantes, respuestas, ni procedimientos utilizados para resolver un problema.

Gestión a través de preguntas: Acción del docente para formular preguntas adecuadas a la actividad o para interactuar en base a buenas preguntas, lo que se puede reflejar a través de una o más de las siguientes acciones: Realizar preguntas que favorezcan la descripción y explicación de ideas/procedimientos. No hacer preguntas retóricas, es decir no hacer la pregunta y responder inmediatamente. Realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de las respuestas dadas por ellos. Devolver buenas preguntas planteadas por alumnos al resto del grupo. Plantear preguntas que inviten a la reflexión y profundización.

Gestión del error: Acción del docente para transmitir a sus estudiantes que sus ideas/respuestas/procedimientos equivocados son importantes para construir el conocimiento matemático, lo que se puede reflejar a través de una o más de las siguientes acciones: Promover que alumnos con respuestas correctas e incorrectas expongan, sin validar antes la calidad de éstas. Gestionar el error socializando de manera colectiva los conocimientos matemáticos que van mejorando la respuesta inicial. Gestionar el error con foco en las explicaciones incorrectas, y no en las respuestas correctas. Anticipar las posibles respuestas incorrectas de los estudiantes que se relacionan con el contenido matemático. Promover entre los estudiantes una discusión asertiva y constructiva sobre las respuestas incorrectas. Utilizar el error para resolver dudas.

Por tanto, nuestro objetivo se particulariza en diseñar y validar un instrumento para caracterizar cómo los docentes miran la gestión comunicativa en el aula cuando están trabajando la argumentación con foco en: (i) gestión de oportunidades de participación, (ii) gestión a través de preguntas, (iii) gestión del error.

MÉTODO

El diseño y validación del instrumento se llevó a cabo en varias fases. En la primera fase, tras una revisión de instrumentos utilizados para caracterizar la mirada profesional, se determinó que el instrumento de observación constaría de: actividades de análisis de vídeo (representación de la práctica) para desarrollar en los docentes la mirada profesional, lentes teóricos que apoyen el desarrollo de la mirada profesional sobre la gestión comunicativa en el aula, y una rúbrica como pauta de observación para los docentes que analizan los videos. El foco de esta comunicación es mostrar el diseño y validación de la rúbrica.

En la segunda fase, se seleccionaron seis vídeos que mostraban episodios de aula (6-8 minutos) entre sexto curso de educación primaria y segundo curso de educación secundaria, donde se observa a una docente interactuando con sus estudiantes durante una actividad para promover la argumentación. A través de juicio de expertos (n=3) únicamente se seleccionaron tres de estos seis vídeos ya que mostraron ser los más apropiados para analizar la gestión de oportunidades de participación, la gestión a través de preguntas y la gestión del error.

En la tercera fase, a través de un muestreo intencionado de máxima variación (Creswell, 2011) se solicitó a siete docentes de primaria y secundaria que participaran voluntariamente en entrevistas grupales donde visualizaron estos vídeos y contestaron a tres preguntas sobre la gestión de la maestra del vídeo en relación con los tres focos: (i) ¿Qué te llama la atención respecto de cómo el docente del vídeo gestiona las oportunidades de participación? (ii) ¿Qué te llama la atención respecto de cómo el docente del vídeo gestiona la discusión con sus estudiantes a través de preguntas? (iii) ¿Qué te llama la atención respecto de cómo la docente del vídeo gestiona el error con sus estudiantes? Para contestar las preguntas disponían como lente teórica de un documento con información sobre los componentes comunicativos para apoyar el desarrollo de la argumentación. Se transcribieron todas las respuestas de los participantes y fueron analizadas por dos investigadores. Se realizó un análisis deductivo-inductivo. Deductivo generando categorías sobre qué identificaban los docentes y cómo lo identificaban teniendo en cuenta los componentes comunicativos de Solar y Deulofeu (2016) e inductivo de refinamiento y generación de las categorías cuando se requería. Tras el análisis se generaron cuatro categorías sobre qué atendían

(identificaban) los docentes en cada foco (gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas o gestión del error), que evidenciaban niveles que van desde una identificación de aspectos generales y no vinculados con el foco (nivel 1) a aspectos más específicos (nivel 4). También se generaron cuatro categorías sobre cómo atendían (interpretaban), que evidenciaron niveles que van desde comentarios evaluativos y descriptivos (nivel 1) a comentarios interpretativos (nivel 4).

En la cuarta fase, participaron tres expertos quienes tuvieron que puntuar entre 1 y 4 los siguientes aspectos sobre los niveles y sus descriptores generados en la rúbrica: coherencia, en qué grado los niveles se relacionan con la dimensión; relevancia, en qué grado los niveles son muy relevantes y deben ser incluidos; claridad en qué grado los niveles son claros, tienen semántica y sintaxis adecuada; y suficiencia, en qué grado los niveles son suficientes para medir las dimensiones completamente. Los valores promedio obtenidos en cada nivel fluctuaron entre 2,7 y 4. Además, los expertos codificaron una selección de intervenciones de los docentes participantes en la tercera fase y agregaron comentarios para los ajustes de la rúbrica.

RÚBRICA: DESCRIPTORES Y EJEMPLOS

La rúbrica elaborada, por tanto, tiene dos dimensiones. La primera consta de cuatro niveles por cada foco (gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas y gestión del error) sobre *qué* atienden los docentes y la segunda dimensión de cuatro niveles sobre *cómo* interpreta el docente. En la parte de interpretación los niveles identificados son en general para los tres focos.

En la siguiente sección se muestra una parte de esta rúbrica: (i) los niveles sobre qué atienden en el foco de gestión a través de preguntas y (ii) los niveles sobre cómo atienden (interpretan).

Qué atienden. Foco: gestión a través de preguntas

Nivel 1

En el Nivel 1, los docentes identifican aspectos generales de la gestión de la maestra del vídeo que no se vinculan con la gestión a través de preguntas. Esto significa que cuando se les pregunta por la gestión de la maestra del vídeo al realizar preguntas para favorecer la comunicación con sus estudiantes, la atención de los docentes se sitúa en aspectos no relacionados con ello como, por ejemplo, el clima de aula, la motivación, conducta, etc. Por ejemplo, el siguiente docente identifica que la maestra que aparece en el vídeo interviene para que los estudiantes no copien, pero no se centra en qué tipo de preguntas realiza la profesora para favorecer la comunicación con sus estudiantes, por tanto, la docente atiende aspectos generales no relacionados con la dimensión.

> En este caso me estoy acordando de un ejemplo de una niñita con unos moñitos, que estuvieran concentradas en lo que estaban haciendo, que no pusieran números por poner, típico que pasa cuando una persona del grupo resuelve y la otra copia ¿cierto?, la profe dice no, "¿por qué pusiste eso, 5?, ¿qué representa ese? ¿qué representa el 8?", el mantener la motivación de los estudiantes fue tarea ahí de la profesora *(Israel).*

Nivel 2

En el Nivel 2, los docentes identifican aspectos generales de la gestión a través de preguntas, sin mencionar los indicadores de los componentes comunicativos para la gestión a través de preguntas (Solar y Deulofeu, 2016):

- Realizar preguntas que favorezcan la descripción y explicación de ideas/procedimientos.
- No hacer preguntas retóricas, es decir, hacer la pregunta y responder inmediatamente.
- Realizar contra-preguntas a los estudiantes a partir de las respuestas dadas por ellos.
- Devolver buenas preguntas planteadas por alumnos al resto del grupo.

- Plantear preguntas que inviten a la reflexión y profundización.

Por ejemplo, el siguiente docente sí se refiere a preguntas realizadas por la maestra. Sin embargo, su intervención es general al indicar la calidad de las preguntas sin evidenciar el uso de los indicadores.

> Siento como que estoy super de acuerdo con lo que decías tú, en cuanto a la calidad de las preguntas ¿cierto?... y en dirigir a quién, en este caso el grupo de estudiantes entendiera qué era lo que tenía que resolver o cómo podía seguir avanzando *(Israel)*.

Nivel 3

En el Nivel 3, los docentes identifican acciones específicas de la maestra que aparece en el vídeo con foco en la gestión a través de preguntas, manifestándolo con la presencia (o ausencia) de alguno de los indicadores (mostrados en el Nivel 2) de los componentes comunicativos.

La siguiente docente se refiere al foco gestión a través de preguntas de manera específica a través del indicador "No hacer preguntas retóricas, es decir hacer la pregunta y responder inmediatamente". Esto se evidencia cuando dice que iba tratando de darle facilidades a los estudiantes, pero sin indicarles la respuesta correcta, dándoles la oportunidad de pensar.

> Interesante porque en ningún momento iba validando lo que decía el estudiante u otro, sino que iba a ratos como tratando de llegar a la respuesta correcta pero no validando, entonces como que les daba a los niños muchas facilidades para llegar, pero sin decirles cuáles eran las respuestas, entonces les dejaba como oportunidad para pensar también *(Ángela)*.

Nivel 4

En el Nivel 4, los docentes identifican acciones específicas de la maestra que aparece en el vídeo con foco en la gestión a través de preguntas, manifestándolo a través de la presencia (o ausencia) de alguno de los indicadores (mostrados en el nivel 2) y además indican el efecto que genera esa gestión en los estudiantes:

Por ejemplo, la siguiente docente se refiere explícitamente a las preguntas realizadas por la maestra del video ("ya explícame qué significa ese número", "explícame por qué hiciste eso", "explícame de dónde sacaste esta tabla, de dónde sacaste esta fórmula"), lo que se refleja a través del indicador "Realizar preguntas que favorezcan la descripción y explicación de ideas/procedimientos". Además, al final indica que, debido a esas preguntas, el estudiante tuvo que "explicar por qué había hecho cada una de las acciones (matemáticas)".

> Mira me llamó la atención la calidad de las preguntas, más que en el caso anterior, porque acá la profesora preguntaba desde el detalle más mínimo, y en el caso anterior, como que la profe preguntaba ya, daba un poco de pistas ¿cierto? Acá en este caso la profe ni siquiera asumió nada, así como porque sí, sino que le decía "ya explícame qué significa ese número", "explícame por qué hiciste eso", "explícame de dónde sacaste esta tabla, de dónde sacaste esta fórmula", versus, en el caso anterior la profe como que asumió muchas cosas como "ya, está bien" y no le hacía que el estudiante explicara por qué lo había hecho, sino que la profe veía, "ah ya está correcto" y seguía, avanzaba, como que esa gestión por medio de esas preguntas la encontré muy bien, preguntar hasta el más mínimo detalle, que el estudiante tuviera que explicar por qué había hecho cada una de las cosas. *(Israel)*

Cómo atienden los docentes

Se caracteriza en cuatro niveles y funciona para los tres focos de atención. El cómo notan los docentes, se refiere a cómo el docente interpreta lo que observa. A continuación, describimos estos niveles y presentamos evidencias de ellos.

Nivel 1

En el Nivel 1, los docentes mencionan aspectos fuera del foco correspondiente, ya sea gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas o gestión del error. Por ejemplo, la siguiente docente cuando se le preguntó por la gestión del error del maestro que aparece en el vídeo, no se refiere a este foco. Al inicio de su intervención se refiere evaluativamente al diseño del problema, aspecto que no corresponde a la gestión del error. Además, posteriormente comienza a hablar de su propia práctica no centrándose en el foco de la gestión de la maestra del vídeo.

> En este caso elaboró bien la pregunta, o sea el problema en realidad... Creo que a lo mejor ella, bueno no siempre pasa, pero algunas veces nosotros planteamos un problema y pensamos que el alumno tiene que hacer esto, esto, esto… los chicos van a tener una pregunta un signo de interrogación, pero algunas veces pasa otro tipo de cosas y al final resolvemos otro tipo de problemas. Entonces yo concuerdo con Israel, que al final todo pasa por el tema de la elaboración del problema. *(Nicolete)*

Nivel 2

En el Nivel 2, los docentes mencionan aspectos dentro del foco correspondiente, ya sea gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas o gestión del error. Sin embargo, sus intervenciones son generales sin mostrar evidencias desde los vídeos analizados. Además, los comentarios proporcionados son descriptivos y/o evaluativos. Por ejemplo, la siguiente docente se refiere a las preguntas que hace el maestro del vídeo. Sin embargo, se refiere más bien a la preparación de las preguntas que al detalle de preguntas que realiza, por lo que su intervención la consideramos general pero dentro del foco específico. Al mismo tiempo, su intervención describe cómo el maestro del vídeo va realizando las preguntas a lo largo de la clase (intervención descriptiva).

> Creo que son preguntas bien gestionadas en el sentido de que los chicos inmediatamente se enganchan y empiezan a responder. Yo creo que quizás son preguntas bien pensadas antes, me da esa sensación, de cómo que él tenía claro cuál eran las preguntas que iban a ir, entonces las dice muy confiado y se va dando *(Charly).*

Nivel 3

En el Nivel 3, los docentes mencionan aspectos dentro del foco correspondiente, ya sea gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas o gestión del error. Sus intervenciones son específicas aportando detalles de lo ocurrido y proporcionan comentarios interpretativos desde los indicadores de los componentes comunicativos para los tres focos (Solar y Deulofeu, 2016).

La siguiente docente cuando fue consultada sobre la gestión a través de preguntas del maestro que aparece en el vídeo se refiere a las preguntas que hace el maestro del vídeo de una forma más detallada, incorporando comentarios del tipo "iba dando como preguntas específicas y orientadoras".

> Él iba dando como preguntas específicas y orientadoras a lo que él quería que ellos llegaran. Entonces encuentro que fueron súper útiles sus intervenciones grupo a grupo para que fueran llegando y en ningún momento como dije anteriormente, les da la respuesta, sino que quiere que ellos lo vayan descubriendo y solamente él los va apoyando. *(Keila)*

Al mismo tiempo, su intervención indica el tipo de preguntas que realiza el maestro a sus estudiantes y lo que cree que el maestro del vídeo quiere lograr, por lo consideramos que hace un comentario interpretativo desde los indicadores.

Nivel 4

En el Nivel 4, los docentes mencionan aspectos dentro del foco correspondiente, ya sea gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas o gestión del error. Sus intervenciones

son específicas proporcionando detalles y ejemplos de lo ocurrido. Además, proporcionan comentarios interpretativos.

La siguiente docente cuando fue consultada sobre la gestión a través de preguntas del maestro a diferencia del nivel 3, además de incorporar detalles agrega evidencias específicas ocurridas en el vídeo (ejemplos) como "qué opinas de la respuesta de esto". Una evidencia es:

> Que las preguntas las hace de forma abierta, no le pregunta solamente a un niño, sino que va abriendo el marco ¿no? Y como que la respuesta, "qué opinas de la respuesta de esto", "qué crees de esto", "¿cambiaste el valor?", entonces se va generando también como un ping-pong sincronizado entre todos. *(Charly)*

IMPLICACIONES

El objetivo es diseñar un instrumento para caracterizar cómo los docentes miran profesionalmente la gestión comunicativa en el aula en tres focos específicos de la argumentación: gestión de oportunidades de participación, gestión a través de preguntas y gestión del error.

La rúbrica diseñada permite caracterizar a través de niveles la mirada profesional sobre la gestión comunicativa en el aula que promueve la argumentación. Este instrumento contribuye a la extensa literatura en la competencia mirar profesionalmente ya que la mayoría de los estudios previos se centran en la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (e.g. Dindyal et al., 2021). Sin embargo, desde nuestra revisión, no hay estudios que se hayan centrado en la gestión comunicativa en el aula con foco en la competencia de argumentación.

La rúbrica generada tiene implicaciones importantes para los programas de desarrollo profesional con foco el desarrollo de la argumentación en el aula, ya que se puede utilizar como pauta de observación del futuro profesorado o profesorado en ejercicio con el objetivo de desarrollar la competencia mirar profesionalmente en los programas de formación. Por otra parte, también puede ser utilizada como rúbrica para el formador de profesorado, ya que permite caracterizar la mirada profesional del profesorado sobre la gestión comunicativa en el aula.

Esta ampliación de la mirada profesional sobre el pensamiento matemático del estudiante pone de manifiesto la importancia de mirar profesionalmente otras situaciones desafiantes que existen en las aulas de matemática de manera más integrada, como, por ejemplo, cómo se desarrolla la mirada profesional de docentes durante situaciones de modelamiento matemático.

Agradecimientos

Este estudio ha sido realizado gracias a la Beca de Doctorado Nacional de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo folio 21201121, Chile.

Referencias

American Educational Research Association, American Psychological Association y National Council on Measurement in Education (2018). Estándares para pruebas educativas y psicológicas American Educational Research Association.

Ayalon, M. y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior,* 49, 163–173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A. y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429.

Dindyal, J., Schack, E., Choy, B.H. y Gamora-Sherin, M. (2021). Exploring the terrains of mathematics noticing. *ZDM Mathematics Education, 53*(1), 1-16, https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. y Choy, B.H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological and social perspectives. En S. Llinares, O. y Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 337–360). Brill.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM), 13*, 39–6. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Gold, B., y Holodynski, M. (2017). Using digital video to measure the professional vision of elementary classroom management: Test validation and methodological challenges. *Computers & Education*, *107*, 13-30.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, 100453.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum.

Kvale, S. (2012). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas.* Ediciones Morata.

Lee, M. Y. (2021). Improving preservice teachers' noticing skills through technology-aided interventions in mathematics pedagogy courses. *Teaching and Teacher Education*, *101*, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103301

Santagata, R., König, J., Scheiner, T., Nguyen, H., Adleff, A. K., Yang, X. y Kaiser, G. (2021). Mathematics teacher learning to notice: a systematic review of studies of video-based programs. *ZDM - Mathematics Education*, *53*, 119-134. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01216-z

Seidel, T. y Stürmer, K. (2014). Modeling and Measuring the Structure of Professional Vision in Preservice Teachers. *American Educational Research Journal*, *51*(4), 739–771. https://doi.org/10.3102/0002831214531321

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En Sherin, M. G., Jacobs, V., Philipp, R. (Eds.*), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge.

Van Eemeren, F. H., Grootendorst, R., Johnson, R. H., Plantin, C. y Willard, C. A. (2013). *Fundamentals of argumentation theory: A handbook of historical backgrounds and contemporary developments.* Routledge.

INVENCIÓN DE PROBLEMAS Y SENTENCIAS COMO MEDIO PARA EVIDENCIAR EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Invention of Problems and Sentences as a Means of Evidence of Algebraic Thinking in Elementary Education

Ayala-Altamirano, C.[a], Pinto, E.[b], Molina, M.[c] y Cañadas, M.C.[d]

[a]Universidad de Málaga (España), [b]Universidad de O'Higgins (Chile), [c]Universidad de Salamanca (España), [d]Universidad de Granada (España)

Resumen

El objetivo de este trabajo es describir, desde las perspectivas estructural y analítica, los saberes algebraicos que manifiestan niños de 9-10 años cuando resuelven tareas de invención de sentencias y problemas en el contexto del algebra temprana. Para esto estudiamos los resultados de un experimento de enseñanza implementado durante dos semanas. Analizamos las discusiones orales y las producciones escritas de los niños asociadas a dos tareas: inventar sentencias numéricas e inventar historias matemáticas. Los resultados muestran que, en ambas tareas, ellos representan con letras las cantidades desconocidas y operan con estas como si las conocieran. Además, razonan sobre las estructuras involucradas en las sentencias o historias creadas. Concluimos que la invención tiene un gran potencial para observar y fomentar el pensamiento algebraico. Los niños no centraron su atención en el cálculo, lo que ayudó a evidenciar su comprensión sobre contenidos algebraicos.

Palabras clave: *cantidades desconocidas, invención, pensamiento estructural, pensamiento analítico, sentido algebraico.*

Abstract

The aim of this paper is to describe, from the structural and analytical perspectives, the algebraic knowledge manifested by 9-10 years-old children when solving sentence and problem invention tasks in the context of early algebra. For this purpose, we study the results of a teaching experiment implemented for two weeks. We analysed the children's oral discussions and written productions associated with two tasks: inventing number sentences and inventing mathematical stories. The results show that, in both tasks, they represent unknown quantities with letters and operate with these as if they knew them. In addition, they reason about the structures involved in the sentences or stories created. We conclude that invention has a great potential for observing and fostering algebraic thinking. Children did not focus their attention on computation which helped to evidence their understanding of algebraic content.

Keywords: *unknown quantities, invention, structural thinking, analytical thinking, algebraic sense*

INTRODUCCIÓN

La invención en el aula de matemáticas ha sido ampliamente estudiada desde la perspectiva de la invención de problemas. De modo general, la invención se ha considerado como una oportunidad para fomentar el pensamiento flexible y conducir a una comprensión profunda de los contenidos matemáticos (Baumanns y Rott, 2022). Desde la perspectiva de los docentes, la invención puede ser un medio para evaluar las concepciones y capacidades de los estudiantes con respecto a un tópico en particular (Ayllón, et al., 2010; Cai y Hwang, 2020; Cañadas et al., 2018; Castro, 2011) y permite conocer las capacidades de los estudiantes para utilizar sus conocimientos matemáticos. En esta comunicación abordaremos la idea de invención desde la perspectiva del pensamiento algebraico; nuestro interés va más allá de la invención de problemas. Buscamos indagar cómo estudiantes de

Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Invención de problemas y sentencias como medio para evidenciar el pensamiento algebraico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 155–162). SEIEM.

primaria inventan sentencias numéricas e historias matemáticas[1] al interactuar con contenidos algebraicos.

Kieran (2022) señala que el pensamiento algebraico suele ser estudiado desde tres perspectivas: el pensamiento analítico, el pensamiento estructural y el pensamiento funcional; siendo la generalización el hilo conductor de las tres. El pensamiento analítico, entre otras cosas, se centra en tratar las cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Radford, 2018). El pensamiento estructural se centra en ver y expresar la estructura y las propiedades de los números, las operaciones y las expresiones (Mason et al., 2009). El pensamiento funcional implica generalizar las relaciones entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2018).

Diferentes currículos incluyen al pensamiento algebraico desde los primeros cursos. Por ejemplo, en la actualización del currículo español de educación primaria (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022), el sentido algebraico engloba saberes directamente relacionados con el pensamiento analítico y estructural. Estos están asociados con la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas. Desde el primer ciclo se espera que los estudiantes expresen relaciones de igualdad entre expresiones que incluyan operaciones. Por otra parte, diferentes investigaciones han estudiado el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria, dando cuenta de su importancia y las diversas formas de promoverlo en el aula (Kieran, 2022). A pesar de los esfuerzos, todavía quedan desafíos sobre cómo introducirlo.

El objetivo de este trabajo es describir qué saberes algebraicos manifiestan niños de 9-10 años cuando inventan expresiones que involucran relaciones de igualdad y propiedades aritméticas y cuando inventan historias para expresiones que implican igualdades expresadas con simbolismo algebraico. En este estudio nos centramos en la invención para discutir su rol en el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria, centrándonos en el pensamiento analítico y el pensamiento estructural.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO E INVENCIÓN

En este trabajo concebimos el pensamiento algebraico como aquel que refiere a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables, parámetros o números generalizados), y trata dichas cantidades de forma analítica, es decir, aunque las cantidades sean desconocidas, se suman, restan, multiplican o dividen, como si fueran conocidas (Radford, 2018). Al pensar algebraicamente, se razona sobre la generalidad, se percibe una estructura algebraica a partir del estudio de relaciones en las operaciones y se estudian los cambios entre las cantidades involucradas (Kieran, 2004).

El pensamiento algebraico puede ser abordado desde distintos enfoques (Blanton et al. 2018). En este trabajo nos centramos en dos enfoques: (a) el de la aritmética generalizada, donde las operaciones aritméticas se usan como contenido para desarrollar pensamiento algebraico, y se focalizan en sus propiedades; y (b) en el enfoque de las igualdades, expresiones, ecuaciones e inecuaciones, donde se busca desarrollar una comprensión relacional del signo igual, así como razonar y establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales, y plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones (Blanton et al., 2018). Además, en el estudio de estos enfoques se pretende fomentar el pensamiento relacional, lo que implica considerar las expresiones desde una perspectiva estructural, en lugar de como procesos que se deben seguir paso a paso (Molina, 2009).

Stoyanova y Ellerton (1996) describen la invención como un proceso por el cual, sobre la base de la experiencia matemática, los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos. Basándonos en las ideas de Stoyanova (2000) distinguimos tres categorías de tareas de invención: (a) situaciones libres, (b) situaciones semi-estructuradas y (c) situaciones estructuradas. En la primera, los estudiantes no tienen

[1] Inventar una historia lo entendemos como el proceso de contextualización de una expresión simbólica empleando lenguaje natural (escrito o hablado).

restricciones para inventar y se les presenta una situación amplia como, por ejemplo, pedir que inventen problemas que sean fáciles o difíciles. En las situaciones semiestructuradas hay una situación en la que se propone explorar una estructura y completarla aplicando su experiencia matemática previa como, por ejemplo, pedir que propongan una situación que se resuelva con un cálculo dado. Por último, las situaciones estructuradas, son aquellas en las que se reformulan situaciones dadas o se cambia alguna condición de la misma o se pide que se complete dadas ciertas alternativas. Dado el alcance de esta comunicación, en este estudio nos centramos en la primera y segunda categoría de invención.

Desde la perspectiva del pensamiento algebraico, Molina (2006) analiza la invención de sentencias numéricas por estudiantes de tercero de primaria. Los estudiantes ponen de manifiesto los significados que asignan al signo igual (operador, expresión de una acción, equivalencia numérica, o similitud numérica) tras haber trabajado con sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas de la suma y la resta. También se observa que los alumnos inventan sentencias basadas en las propiedades trabajadas y asocian la magnitud de los números con la dificultad, aunque el número tuviera muchas cifras que fueran ceros. Investigaciones relacionadas con situaciones semiestructuradas, tales como la traducción del simbolismo algebraico al lenguaje natural en el contexto de la invención, concluyen que este tipo de tarea lleva asociada una alta demanda cognitiva; el inventor del problema debe reflexionar sobre la estructura de la situación más que sobre los procedimientos de resolución del problema (Cai et al., 2013). Se ha demostrado que plantear problemas a partir de ecuaciones o cálculos matemáticos dados requiere comprender el significado de las operaciones (Christou et al., 2005). Además, en este tipo de tareas los alumnos tienden a seguir un proceso algorítmico centrado en la estructura operativa más que semántica de los problemas (English, 1998).

METODOLOGÍA

Los datos que aquí presentamos proceden de una actividad extraescolar realizada en verano, durante dos semanas del periodo de vacaciones y de manera virtual (dada la COVID-19). Esta actividad estuvo compuesta por 10 sesiones. El objetivo de la actividad fue promover que los niños expresaran y justificaran las ideas matemáticas generales encontradas al trabajar con diferentes contenidos de carácter algebraico. Las sesiones las diseñaron e implementaron los autores de este trabajo con el apoyo de los profesores de matemática habituales de los niños y profesores colaboradores. La actividad extraescolar está descrita en detalle en Pinto et al. (2023).

Asistieron 21 niñas y niños chilenos que acababan de terminar 4º de primaria (9-10 años). Los asistentes pertenecían a dos colegios diferentes y fueron seleccionados con la ayuda de sus profesores de matemáticas, bajo los siguientes tres criterios (a) paridad de género (10 niñas y 11 niños); (b) disposición a trabajar durante el verano; y (c) diferentes ritmos de aprendizaje.

Diseño general de las sesiones

La expresión y justificación de ideas matemáticas generales fue el eje transversal de la actividad extraescolar. En la primera y la última sesión evaluamos los conocimientos de los alumnos relativos a las prácticas del pensamiento algebraico: generalizar, representar, justificar y razonar sobre la generalización. Las sesiones 2 a la 9 abordamos diferentes enfoques al pensamiento algebraico: aritmética generalizada (sesiones 2, 3 y 4); equivalencia, expresiones y ecuaciones (sesiones 5 y 6); y pensamiento funcional (sesiones 7, 8 y 9). Organizamos cada sesión en tres bloques: (a) búsqueda de regularidades y desarrollo de una conjetura; (b) articular una afirmación general a través de diferentes representaciones; y (c) extender lo aprendido a otros casos. Una de las razones por las que seguimos esta organización fue proporcionar distintos espacios de cooperación, confrontación y discusión de ideas y para esto nos inspiramos en las ideas de Russell et al. (2017).

Tareas de invención

Las tareas de invención tenían el objetivo de evaluar la comprensión de los niños sobre las temáticas asociadas a los enfoques de aritmética generalizada y equivalencia, expresiones y ecuaciones.

La primera tarea de invención la propusimos en el tercer bloque de la última sesión de aritmética generalizada. Les pedimos que inventaran sentencias (no se dijo de qué tipo) fáciles y difíciles. Previamente, los niños habían generalizado en lenguaje natural lo que sucede al sumar números pares e impares (sesión 2). Luego, en las sesiones 3 y 4 se discutió sobre el significado del signo igual a partir del análisis de diferentes sentencias numéricas y algebraicas. La diferencia entre ambas sesiones fue el tipo de representación matemática trabajada. En la sesión 3 abordamos las sentencias numéricas solo con representaciones simbólica-numérica (p. ej., 14 + 5 = 5 + 12 y 450 + 20 = 320 + 450), mientras que en la sesión 4 se introdujo, por primera vez, la letra como una representación útil para expresar la generalización de propiedades aritméticas (p. ej., a + 23 = 23 + a y a + b = b + a). En este caso, la letra fue introducida explicando que se empleaba para representar un número natural cualquiera. Las propiedades aritméticas de la adición involucradas en ambas sesiones fueron las mismas (conmutativa, asociativa, compensación[2] y complementaria de la suma y la resta[3]).

La segunda tarea de invención se presentó al cierre de las sesiones relativas a equivalencia, expresiones y ecuaciones. En las sesiones 5 y 6, los niños habían analizado diversos textos en los que se describían historias matemáticas que ellos debían relacionar con ecuaciones dadas. Por ejemplo: "Había 32 personas en una sala. Algunas personas estaban sentadas y otras 12 estaban de pie". Los niños debían escoger cuál de las siguientes expresiones se relacionaba con la historia: 32=m+12; 32+m=12; 32+12=m. En el último bloque de la sesión 6, les pedimos a los niños que inventaran una historia matemática que se asociara con la expresión 25+u=45. Luego compartieron las historias y entre ellos evaluaron su pertinencia.

Análisis

Analizamos las respuestas de los niños a ambas tareas de invención (de sentencias e historias matemáticas) desde las perspectivas estructural y analítica (Kieran, 2022). Lo estructural tiene distintos significados según el enfoque del álgebra con el que se relacione (Molina y Cañadas, 2018). En el caso de las sentencias, nos centramos en la estructura sintáctica de las mismas. Fueron analizadas considerando la propiedad subyacente, las operaciones implicadas, la cantidad de términos de las expresiones, el uso del signo igual y la representación de cantidades desconocidas. En el caso de las historias matemáticas, la estructura se relaciona con el significado de las operaciones implicadas (las estructuras semántica y sintáctica del problema) (Molina y Cañadas, 2018). Más específicamente, para analizar las historias inventadas, las tradujimos al simbolismo algebraico manteniendo una congruencia de izquierda a derecha siempre que fue posible (p. ej., "Tengo una bolsa con 25 manzanas rojas y algunas verdes, en total tengo 45 manzanas", se traduce como 25+u=45. Luego comparamos la traducción obtenida con la ecuación propuesta. También identificamos si los niños proponían un contexto nuevo o adaptaban las historias propuestas en los bloques anteriores. Para analizar la estructura semántica de las historias con estructura aditiva empleamos la propuesta por Carpenter y Moser (1983) y clasificamos las historias como: cambio creciente, cambio decreciente o combinación.

La perspectiva analítica la asociamos al modo como se refieren a cantidades desconocidas y razonan refiriéndose a estas. Para esto, analizamos las discusiones orales que tuvieron lugar en las puestas en común y los registros escritos de las historias que inventaron. Buscamos términos que los niños usaron para referirse a cantidades desconocidas como, por ejemplo, adjetivos indefinidos (e.g. poco,

[2] P. ej., $a + b = (a - c) + (b + c)$ siendo a, b y c números naturales con $a > c$. Esta propiedad también se denomina invarianza (Molina, 2006).

[3] $a + b - b = a$ y $a - b + b = a$, siendo a y b números naturales y, en la segunda expresión, $a > b$ (Molina, 2006).

mucho, un, otro, demasiadas, misma, algún, ninguna, cualquiera) y frases claves como "es número que no conocemos", "es el número que quieras", entre otras.

RESULTADOS

Presentamos resultados generales de dos tareas de invención, incluyendo algunos fragmentos de entrevistas. Usamos nombres ficticios de los niños para resguardar su anonimato.

Tarea 1: inventar sentencias numéricas

Los niños propusieron sus propias sentencias numéricas, clasificándolas como fáciles o difíciles. Desde una perspectiva estructural, observamos que todos los ejemplos inventados, tanto fáciles como difíciles, son expresiones que contienen el signo igual, operaciones en ambos miembros y cantidades desconocidas. En la tarea no se especificó el uso de letras, no obstante, todos la emplearon. Doce de 18 sentencias involucraron una única letra (a, b, c, d, x), 5 de 18, emplearon dos letras y un caso, clasificado como difícil, empleó cuatro letras. En la mayoría de las expresiones inventadas (12 de las 18) identificamos estructuras asociadas alguna propiedad aritmética. En este caso fueron: propiedad conmutativa de la adición (2 de 18), propiedad asociativa de la adición (8 de 18) y compensación (2 de 18). En la tabla 1, mostramos ejemplos para cada caso.

Tabla 1. Ejemplos de sentencias inventadas

Propiedad	Clasificación	
	Fácil	Difícil
Conmutativa	$a+23=23+a$	$30+40+25+c=40+25+30+c$
Asociativa	$a+14=a+10+4$	$1234+a=10000+200+40+3+a$
	$80+b=a+40+40$	$x+1.200+145=145+1.000+200+x$
Compensación	$b+32=a+31$	
	$63+a=62+a$	
No se observa	$a+1+35=34+8+x$	$a+342+24+2+4+=x2+3343+42+4+n+e$

Observamos que algunas sentencias involucran la descomposición canónica de algún número, por tanto, están haciendo alusión a la estructura de los números naturales, por ejemplo: $a+14=a+10+4$ y $x+1.200+145=145+1.000+200+x$. Sobre el grado de dificultad, observamos que este no tiene relación con la propiedad involucrada, más bien con la cantidad de sumandos y con el rango numérico.

Desde la perspectiva analítica del álgebra, observamos que los niños se refieren a las letras como cantidades desconocidas y operan con estas como si las conocieran. Esto lo ejemplificamos en un fragmento de la entrevista en la que se pregunta si la sentencia 29+a=30+b es verdadera o falsa.

1. José: Yo opino que es falso, porque, aunque los números son cercanos, las letras no son iguales y los números tampoco, así que es falso.
2. Investigadora: ¿Estás de acuerdo Hugo?
3. Hugo: Si estoy de acuerdo, porque está todo… así como diferente. Entonces… al estar diferente le pasa eso. Aunque si la A o la B fueran la misma, igual sería falsa porque el 29 y el 30 no son iguales.
4. Investigadora: ¿Qué dices Alonso?
5. Alonso: Depende de cuánto valga el número. Por ejemplo, si la A vale uno más que B, entonces sería verdadera. Pero como no sabemos, yo puse que es falsa, aunque puede estar bien.

Observamos que los niños lograron establecer la equivalencia entre las expresiones en términos generales. José y Hugo argumentaron que es falsa, estableciendo relaciones entre los términos de cada expresión. Luego Alonso dice que "depende", que también puede ser verdadera (línea 5). Alonso nota que 30 es uno más que 29, por lo que, si las letras también están relacionadas de esa forma, la relación sería verdadera. Observamos que los niños manifestaban pensamiento relacional.

Tarea 2: inventar historias matemáticas

Esta tarea consistió en contar una historia que se relacionara con la ecuación 25+u=45. Desde la perspectiva estructural sintáctica, observamos que la mayoría de los niños crearon historias matemáticas coherentes con la estructura de la ecuación dada (14 de 21). De los seis que respondieron incorrectamente, dos niños inventaron historias cuyas ecuaciones involucraban dos operaciones (p.ej. (45+25):20=u), tres crearon historias cuya ecuación incluía una suma, pero las cantidades involucras no eran las dadas (p.ej. 25+20=u) y un niño inventó una historia cuya ecuación incluía una resta y no representaba la cantidad desconocida (45–20=25). Un niño no respondió.

Sobre la estructura semántica de los problemas, seis niños adaptaron los problemas que previamente los investigadores habían presentado (todos correctos) y 14 niños presentaron contextos nuevos (ocho correctos). Quienes respondieron correctamente propusieron problemas de combinación y problemas de cambio creciente (Ver tabla 2).

Tabla 2. Clasificación de las historias inventadas

Tipo de invención	Nº	Tipo de problema						
		Cambio creciente			Cambio decreciente	Combinación		Otros
		Incógnita en cantidad inicial	Incógnita en cambio	Incógnita en cantidad final	Sin incógnita	Incógnita en una parte	Incógnita en el total	
Correcta	14	3	4			7		
Incorrecta	6				1	2	1	2

Desde la perspectiva analítica, todos los que inventaron historias correctas se refirieron a cantidades indeterminadas. A diferencia de la tarea previa, en este caso el desafío estaba en expresar el significado de la cantidad desconocida en contexto cotidiano y llegar a verbalizarlo. Las niñas y niños emplearon diferentes expresiones, tales como: no sabe cuántos tiene, un número indefinido de, otros, algunos, una y hartos. Un ejemplo de historia es el siguiente: "Tengo una caja con 45 queques[magdalenas]. Unos de vainilla y 25 de chocolate. ¿Cuántos queques de vainilla tengo?". A Martín le preguntamos si la historia contaba lo mismo que la ecuación. Él dijo que sí. En su argumento reconoce que la letra debe estar asociada a un número desconocido. Él dijo: "trae el número que no sabemos, que es la *u*, trae el 25 y el 45 que son los números que conocemos".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue describir qué saberes algebraicos manifiestan niños de 9-10 años cuando inventan expresiones que involucran relaciones de igualdad y propiedades aritméticas, y cuando inventan historias para expresiones que involucran igualdades. Nos centramos en la invención para discutir su rol en el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria, desde las perspectivas del pensamiento analítico y estructural.

En nuestro caso observamos que los niños participantes, sin importar los contenidos algebraicos abordados, evidenciaron pensamiento algebraico al referirse a cantidades desconocidas (números generalizados e incógnitas), y tratar dichas cantidades de forma analítica. También percibieron una estructura algebraica al inventar sentencias de igualdad e inventar un contexto para la ecuación dada.

Las tareas de invención fueron presentadas al final del trabajo de cada enfoque, con el objetivo de evaluar la comprensión de los niños sobre las temáticas tratadas. Investigaciones previas notan que los contenidos o la tipología de tarea previamente trabajadas afectan a los problemas inventados por los estudiantes (Ayllón, et al., 2010; Torregrosa et al., 2021). En este trabajo observamos que los participantes inventaron sentencias empleando las mismas propiedades propuestas en ejemplos previos y que algunos niños adaptaron las historias matemáticas propuestas previamente. Esto

evidencia que la invención se basa en casos previos, por lo que destacamos la importancia de presentar variedad de casos en las propuestas de intervención en el aula.

También la invención proporcionó información sobre la percepción del grado de dificultad que tienen los niños sobre las tareas de crear sentencias. En este caso, lo fácil o difícil no venía dado por la propiedad empleada o el empleo o no de cantidades desconocidas. Para este grupo de niños, la dificultad estaba determinada por el rango numérico y el número de sumandos, de modo similar que los resultados de Molina (2009). La mitad de las historias que crearon estaban asociadas a problemas de cambio creciente cuya incógnita está en la cantidad inicial o en la cantidad de cambio, investigaciones previas señalan que este tipo de problemas supone una mayor dificultad para los estudiantes (Alsina et al., 2018), no obstante, en este estudio no se les preguntó a los estudiantes sobre su percepción de la dificultad de sus historias. Por lo tanto, una línea futura de investigación es indagar sobre esta percepción. Ayllón et al. (2011) señala que la dificultad puede estar relacionada con la capacidad para entender el enunciado, el conocimiento de los conceptos involucrados, los datos (muchos números o números altos) o a la cantidad de etapas necesarias para obtener la respuesta.

También destacamos que en las tareas los niños no centraron su atención en el cálculo. Según los hallazgos previos, los estudiantes suelen seguir un proceso algorítmico centrado en la estructura operativa de la ecuación (Cai et al., 2013; English, 1998). Atender a la estructura y generalizarla, más que centrarse en el cálculo, ayuda a ser matemáticamente exitoso (Blanton et al., 2018).

Concluimos que la invención tiene un gran potencial para fomentar el pensamiento algebraico y evidenciar la comprensión de los estudiantes sobre contenidos algebraicos. Nuestra contribución muestra una forma de analizar las respuestas de los estudiantes, centrándonos en las perspectivas estructural y analítica. También evidenciamos razonamientos sofisticados cuando abordan la generalidad en dos contextos algebraicos distintos.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto FONDECYT Iniciación 11220843, financiado por ANID, Chile; y Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/, España.

Referencias

Alsina, A., Liñán-García, M. M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). El número y las operaciones matemáticas en Educación Infantil. En M. de la C. Muñoz y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 81-144). Paraninfo Universidad.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). SEIEM.

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema "difícil" por alumnos de Educación Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, M. M. Palarea, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 277-286). SEIEM.

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). Developing a framework for characterising problem-posing activities: A review. *Research in Mathematics Education*, *24*(1), 28-50. https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 101391. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B. y Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 57-69. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9429-3

Cañadas, M. C., Molina, M. y Del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 19-37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Carpenter, T. y Mosser, J. (1983). The adquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp.7-44). Academic Press.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-15). Universidad de Granada.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM–Mathematics Education*, *37*(3), 149-158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

English, L. D. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(1), 83-106. https://doi.org/10.2307/749719

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32. https://doi.org/10.1007/BF03217543

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2022). Real Decreto 157/2022 de 01 de marzo, por el que se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 24386-24504.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*.[Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: Integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3(3), 135-156.*

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in Primary School. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer.

Russell, S. J., Schifter, D., Kasman, R., Bastable, V. y Higgins, T. (2017). *But why does it work? Mathematical argument in the elementary grades.* Heinemann.

Stoyanova, E. (2000). Empowering students' problem solving via problem posing: The art of framing "good" questions. *Australian Mathematics Teacher*, *56*(1), 33-37.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in Mathematics Education*, *4*(7), 518-525.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: La estrategia de resolución con relación al problema inventado. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595-602). SEIEM.

LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN ESTUDIANTES DE 3 AÑOS

Polygon concept formation in students of 3 years old

Buforn, À. y Bernabeu, M.

Universidad de Alicante

Resumen

La formación de los conceptos geométricos es compleja debido a las dificultades que los estudiantes presentan para reconocer atributos relevantes de las figuras geométricas. Por ello, el objetivo de este estudio es implementar una instrucción sobre la formación del concepto de polígono combinando lo perceptual y lo conceptual para ayudar a los estudiantes de Educación Infantil (3 años) a progresar entre los diferentes niveles del desarrollo del pensamiento geométrico (pre-reconocimiento, visualización, sincrético y análisis). Los participantes de esta instrucción han sido 21 estudiantes de Educación Infantil que no habían recibido instrucción alguna sobre geometría previamente. Los resultados han mostrado que, tras la instrucción convenientemente dirigida hacia la formación del concepto de polígono, los estudiantes han podido pasar de un nivel pre-reconocimiento y/o visualización a un nivel sincrético y/o análisis.

Palabras clave: *concepto de polígono, Educación Infantil, niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, instrucción guiada, formación del concepto*

Abstract

The geometric concept formation is complex due to the difficulties students have in recognising relevant attributes of geometric figures. Therefore, the aim of this study is to implement an instruction on polygon concept formation combining perceptual and conceptual data to help young children (3 years old) to progress among the different levels of geometric thinking development (pre-recognition, visualisation, syncretic and analysis). The participants in this instruction were 21 Early Childhood Education students who had not previously received any instruction in geometry. The results have shown that, after instruction suitably directed towards the polygon concept formation, the students have been able to move from a pre-recognition and/or visualisation level to a syncretic and/or analysis level.

Keywords: *polygon concept, Early Childhood Education, developmental levels of geometric thinking, guided instruction, concept formation*

INTRODUCCIÓN

La geometría es una de las áreas básicas de las matemáticas que deben ser desarrolladas en la primera infancia (Aslan y Arnas, 2007; Clements et al., 2022). Para ello, desde edades tempranas se debe ayudar a los estudiantes a la formación de los conceptos geométricos. De acuerdo con Hershkowitz (1990), la formación del concepto consiste en saber discriminar qué atributos son relevantes y no-relevantes en una figura para poder clasificarla como un ejemplo o no-ejemplo del concepto. Así, ante un no-polígono parecido a un cuadrado en posición prototípica (Figura 1), reconocer este como un no-ejemplo de cuadrilátero por tener curvas en lugar de vértices. Para saber realizar dicha discriminación, se debe ampliar la imagen del concepto de los estudiantes a partir de un amplio abanico de ejemplos y no-ejemplos de los conceptos geométricos tratados (Tall y Vinner, 1981; Tsamir et al., 2008). Entendemos imagen del concepto como el conjunto de figuras, dibujos o

Buforn, À. y Bernabeu, M. (2023). La formación del concepto de polígono en estudiantes de 3 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 163–170). SEIEM.

representaciones que se evocan en la mente de un individuo, vinculados a un determinado concepto geométrico, y por el conjunto de propiedades asociadas al concepto (Tall y Vinner, 1981).

Figura 1. No-ejemplo de cuadrilátero



Diversas investigaciones (Bernabeu et al., 2017; Halat y Yesil-Dagli, 2016; Verdine et al., 2016) han mostrado que la formación de los conceptos geométricos es compleja debido a las dificultades que los estudiantes presentan para reconocer atributos relevantes de las figuras geométricas. Una de estas dificultades es el no diferenciar los ejemplos de los no-ejemplos de un concepto, debido al peso de los atributos no-relevantes (posición, regularidad, simetría,…) asociados a los ejemplos prototípicos de las figuras geométricas que presentan en su imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981; Tsamir et al., 2008). Estudios previos han afirmado que el uso de ejemplos y no-ejemplos prototípicos y no-prototípicos de figuras geométricas puede ayudar a solventar las dificultades que presentan los estudiantes en relación con estas (Bernabeu et al., 2022).

En Educación Infantil, diversas investigaciones se han centrado en cómo los estudiantes reconocen figuras geométricas de manera general (círculos, cuadrados, triángulos, rectángulos, pentágonos, estrellas,…) (Clements et al., 1999; Verdine et al., 2016) o ciertas figuras geométricas como los triángulos (Tsamir et al., 2008) o cuadrados (Halat y Yesil-Dagli, 2016). Sin embargo, falta información sobre investigaciones que estudien la base de esas figuras geométricas, es decir, el concepto de polígono.

Por otro lado, diversas investigaciones han resaltado la importancia de la intervención, tanto el rol del maestro como la secuencia de tareas, para caracterizar el desarrollo de la comprensión de los conceptos geométricos a través de los niveles del pensamiento geométrico de van Hiele (Berciano et al., 2017; Clements et al., 1999; Gutiérrez y Jaime, 2012). Por ejemplo, Berciano et al. (2017) concluyeron que la intervención de la maestra, a través de diferentes tareas para favorecer un acercamiento al concepto de cilindro en estudiantes de infantil, fomentó que un estudiante de educación infantil desgranara y argumentara en mayor medida las propiedades del cilindro, incrementando su nivel de razonamiento geométrico de van Hiele (mostrando en algunas ocasiones características del nivel 2, nivel poco frecuente en Educación Infantil). Así mismo, Gutiérrez y Jaime (2012) afirmaron que es necesario que las actividades propuestas que se vayan a trabajar con los estudiantes para poder pasar de un nivel a otro estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos o propiedades que se quieren trabajar y estas se presenten de manera progresiva.

Por ello, este estudio se centra en cómo los estudiantes de infantil reconocen progresivamente los atributos relevantes del concepto de polígono para la formación de la definición de este tras una instrucción diseñada ad hoc.

MARCO TEÓRICO

El modelo de razonamiento de van Hiele sobre el pensamiento geométrico está caracterizado por diferentes niveles. De acuerdo con Gutiérrez (2012), en Educación Infantil solo se alcanza el Nivel 1, sin embargo, Berciano et al. (2017) afirman y corroboran en su investigación que son alcanzables los niveles 1 y 2. En el Nivel 1 (visualización) los estudiantes perciben las figuras geométricas de manera global, sin reconocer partes o propiedades de las figuras, haciendo descripciones visuales, táctiles, etc., y comparándolas con objetos de su entorno (Gutiérrez, 2012). De este modo, un estudiante podría decir que un rectángulo “se parece a una puerta” al compararlo con un objeto de su entorno; o también podría reconocer que un triángulo equilátero (figura prototípica) es un triángulo, pero no podría justificar su pertenencia, ya que no reconoce partes o propiedades. En el Nivel 2 (análisis) los estudiantes son capaces de reconocer y analizar las partes y propiedades de las

figuras geométricas a través de la manipulación y la experimentación (Gutiérrez, 2012). Así, por ejemplo, un estudiante reconocería que una figura es un triángulo porque tiene tres lados.

Sin embargo, algunos autores consideran que los niveles de van Hiele no están tan claros cuando se trata de estudiantes de infantil (Clements y Battista, 1992; Clements et al., 1999). Por ejemplo, algunos estudiantes de esta etapa no pueden distinguir unas figuras geométricas de otras que no están en la misma clase (Aslan y Arnas, 2007; Clements y Battista, 1992). Es decir, un estudiante no distinguiría un cuadrado de otra figura geométrica como la de la Figura 1, y consideraría que ambas figuras pertenecen a la misma clase. Por ese motivo, consideran que estos estudiantes se encuentran en una fase de transición hacia el Nivel 1 (visualización), que llaman nivel *pre-reconocimiento* (Clements y Battista, 1992). Por otro lado, Aslan y Arnas (2007) afirman que la transición del Nivel 1 (visualización) al Nivel 2 (análisis) tampoco está clara, y corroboran el nivel propuesto por Clements et al. (1999), nivel *sincrético*, el cual consiste en una *síntesis de conocimiento verbal declarativo e imaginario* (p. 206). Por ejemplo, cuando los estudiantes, ante actividades de clasificar figuras geométricas, consideran a los triángulos isósceles "figuras alargadas", y a las figuras que presentan lados curvos como "figuras con un puente". Por lo tanto, en este estudio vamos a considerar cuatro niveles para el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes de Educación Infantil: pre-reconocimiento; visualización; sincrético; y análisis.

El recorrido de estos niveles se caracteriza por asociar paulatinamente lo perceptual y lo conceptual. Esta asociación requiere interacciones adecuadas entre las imágenes y la definición del concepto. Fischbein (1993) estableció la idea del *concepto figural* para describir la relación entre lo perceptivo, como el reconocimiento de ciertos atributos, y las condiciones lógicas que rigen el concepto, como las propiedades matemáticas que definen el concepto. Por lo que el paso del nivel pre-reconocimiento al nivel análisis conlleva el desarrollo del concepto figural de los estudiantes.

Asimismo, la instrucción guiada ayuda a establecer esta asociación entre las figuras geométricas y sus propiedades (Berciano et al., 2017; Gutiérrez y Jaime, 2012). Por ello, el objetivo de este estudio es implementar una instrucción sobre la formación del concepto de polígono combinando lo perceptual y lo conceptual para ayudar a los estudiantes de Educación Infantil a progresar entre los diferentes niveles del desarrollo del pensamiento geométrico. De este modo, las cuestiones de investigación son las siguientes:

- ¿En qué nivel se encuentran los estudiantes de Educación Infantil previo a la instrucción?
- ¿Cómo construyen el concepto de polígono los estudiantes de Educación Infantil a partir de una instrucción diseñada ad hoc?

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

Los participantes de este estudio fueron 21 estudiantes de Educación Infantil de 3 años. En relación con el contexto curricular, las investigaciones que han tratado la geometría plana (Clements et al., 1999; Verdine et al., 2016) solo tratan los conceptos de círculo, cuadrado, rectángulo y triángulo. Sin embargo, la Competencia específica 2 del Decreto 100/2022 expone la necesidad de "Llevar a cabo investigaciones sencillas, individuales y grupales, orientadas a explorar objetos, seres vivos, fenómenos y sucesos del entorno próximo utilizando destrezas lógicomatemáticas, científicas y tecnológicas elementales" (p. 41129). Por ello, en esta investigación nos centraremos en dotar de sentido el concepto de polígono (figura geométrica plana cerrada con lados rectos y no-cruzados) a partir de la exploración de objetos de manera grupal y, a partir de este concepto, generar otros conceptos referentes a diferentes clases de polígonos (sin particularizar casos como el cuadrado o rectángulo). Los estudiantes que participaron en esta investigación no habían recibido instrucción alguna sobre geometría durante el curso 2021-2022 salvo los que ellos conocían por su propia experiencia extraescolar.

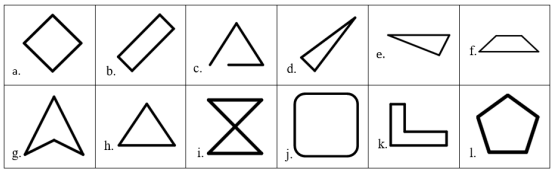
Instrumento y procedimiento

Para llevar a cabo este estudio, se diseñó una instrucción convenientemente dirigida hacia la formación del concepto de polígono (Gutiérrez y Jaime, 2012). La instrucción se llevó a cabo por una miembro del grupo de investigación la cual pasará a llamarse maestra-investigadora. La instrucción constó de 4 sesiones cuyo objetivo fue (a) conocer las ideas previas de los estudiantes en relación con la geometría plana (prueba inicial) (sesión 1); y (b) ayudar a la formación del concepto de polígono (sesión 1 y 2) y las clases de polígonos según el número de lados (triángulos, cuadriláteros y pentágonos) (sesión 2 y 3). La sesión 4, fue una sesión de repaso tanto del concepto de polígono, como de las clases de polígonos según el número de lados. Las sesiones fueron grabadas en vídeo. En concreto, en este estudio nos vamos a centrar en la prueba inicial y la formación del concepto de polígono. Además, decir que las figuras que usamos en esta investigación fueron diseñadas para tener un amplio abanico de figuras no-prototípicas (Tsamir et al., 2008), aunque considerando alguna prototípica, y haciendo que algunas prototípicas fueran no-ejemplos de la clase a la que pertenecían (figura abierta parecida al triángulo equilátero (Figura 2c); o la figura con lados curvos en lugar de vértices parecida al cuadrado (Figura 2j).

(a) Prueba inicial

La prueba inicial estaba formada por un conjunto de 12 figuras (9 polígonos y 3 no-polígonos) (Figura 2) que se presentaron a los estudiantes de forma progresiva para saber qué conocían sobre esas figuras (imagen del concepto). En esta tarea no se realizó ningún tipo de corrección a los estudiantes, simplemente la maestra-investigadora repetía lo que los estudiantes decían.

Figura 2. Figuras de la prueba inicial



(b) Formación del concepto de polígono

Para la formación del concepto de polígono nos basamos en la idea de Hershkowitz (1990) de que la estructura de los conceptos puede ser considerada como la conjunción de los atributos relevantes: (i) figura plana, (ii) estar cerrada, (iii) tener lados rectos; y (iv) no tener lados cruzados. Por ello, realizamos tareas por cada uno de los atributos relevantes para que los estudiantes vieran las diferencias entre: figuras planas y no-planas; líneas rectas y curvas; figuras cerradas y abiertas; figuras con lados cruzados y no-cruzados. Primeramente, realizábamos una tarea de reconocer diferencias entre los atributos mostrando una imagen con un atributo y otra con el opuesto (p. ej. una figura con algún lado curvo y otra con lados rectos) (Figura 3), donde la maestra-investigadora guiaba la resolución si los estudiantes no resolvían correctamente la tarea. Posteriormente, se presentaban un conjunto de figuras (Figura 4) y los estudiantes tenían que clasificarlas y explicar el porqué de su pertenencia (p. ej. ante un polígono, clasificarlo en figuras con lados rectos y explicar que tiene lados rectos porque no tiene curvas o ante un no-polígono, clasificarla como figura con lados curvos porque tiene un lado curvo (o en forma de "C").

Figura 3. Ejemplo de figura con algún lado curvo y figura con lados rectos

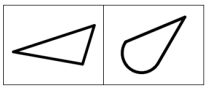
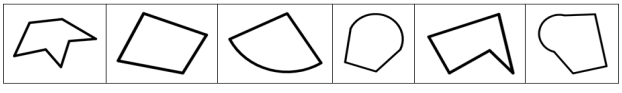


Figura 4. Ejemplos de figuras con lados rectos y figuras con lados curvos



Después de realizar las tareas de reconocer y clasificar para cada atributo relevante por separado, se realizaron dos tareas con la misma estructura, para el concepto de polígono (conjunción de todos los atributos relevantes). En la tarea de reconocer diferencias se colocaron ejemplos de polígonos en un lado de la pizarra y ejemplos de no-polígonos en otro lado. De este modo, los estudiantes llegaron a la conclusión (con ayuda de la maestra-investigadora) que todas las figuras de un conjunto eran planas, estaban cerradas, con lados rectos y no-cruzados. La maestra-investigadora concluyó proporcionando el término de *polígono* a las figuras que cumplieran esos cuatro atributos. Por el contrario, se dedujo que, si alguna figura no cumplía alguno de estos atributos relevantes, no se podía considerar polígono (formación del concepto de polígono). Posterior a esto, se realizó la tarea de clasificar polígonos y no-polígonos para reforzar el concepto de polígono.

Análisis

Para determinar las características de la comprensión de las figuras geométricas analizamos cualitativamente los discursos producidos en las dos primeras sesiones al realizar las diversas tareas. Este análisis se llevó a cabo en dos fases. En la primera fase se visualizaron los vídeos y se transcribieron para tener los discursos entre la maestra-investigadora y los estudiantes. En la segunda fase se codificaron las respuestas en relación con los diferentes niveles considerados en esta investigación. En la Tabla 1 mostramos un ejemplo de este análisis.

Tabla 1. Ejemplos de la codificación de las respuestas

Niveles	Ejemplo del discurso
Pre-reconocimiento	"Es un cuadrado" (refiriéndose a la Figura 1)
Visualización	"Es una rampa" (refiriéndose a un triángulo obtusángulo)
Sincrético	"No es un polígono porque tiene un arcoíris" (refiriéndose a un lado curvo)
Análisis	"No es un polígono porque está abierta"

RESULTADOS

A partir del análisis, se observó que cuando se realizó la prueba inicial y la tarea de reconocer diferencias para cada uno de los atributos relevantes del concepto de polígono, los estudiantes aportaron un vocabulario menos matemático, ya que todavía no habían recibido la instrucción y no conocían los términos de estos atributos. En las tareas de clasificar ejemplos y no-ejemplos de los atributos dados y de los polígonos, los estudiantes ya podían usar algunos términos de los atributos del polígono aprendidos en las tareas de reconocer diferencias. Por ello, en relación con los objetivos de este estudio, los resultados se van a mostrar en dos bloques: (a) resultados previos a la instrucción (procedentes del cuestionario inicial y tareas de reconocer diferencias entre los atributos del polígono); y (b) durante la instrucción (procedentes de las tareas de clasificar ejemplos y no-ejemplos de los atributos del polígono y de polígonos).

Resultados previos a la instrucción

Los resultados obtenidos antes de la instrucción han mostrado que los estudiantes se encontraban en el nivel pre-reconocimiento y en el nivel visualización. A continuación, se muestran las respuestas de algunos estudiantes referentes a estos niveles.

Respuestas de nivel pre-reconocimiento

En el cuestionario inicial, los estudiantes no fueron capaces de distinguir unas figuras geométricas de otras que no están en la misma clase. Por ejemplo, reconocieron la figura abierta (Figura 2c) y el triángulo equilátero (Figura 2h, figura prototípica) como ejemplos de "triángulos". Es decir, los estudiantes reconocieron ambas figuras geométricas como figuras de la misma clase (la clase de los triángulos) cuando realmente una si lo era y la otra no. De forma similar, los estudiantes reconocieron una figura con curvas (Figura 2j) como un "cuadrado", cuando esta figura geométrica no pertenece a la clase de los cuadriláteros.

En las tareas de reconocer las diferencias entre los atributos del polígono también encontramos respuestas de este nivel. Por ejemplo, ante la tarea de reconocer diferencias entre las figuras planas y no-planas, reconocieron el cubo como "un cuadrado", cuando un cuadrado no pertenece a la clase de los poliedros.

Respuestas de nivel visualización

En relación con el cuestionario inicial, en algunas figuras geométricas que se les mostraron a los participantes, se observó que los estudiantes las percibían de manera global, sin reconocer partes o propiedades, y las comparaban con objetos de su entorno. Por ejemplo, cuando se les mostró el hexágono (Figura 2k), los estudiantes lo reconocieron como "una L"; el cuadrilátero cóncavo (Figura 2g) lo reconocieron como "una A", "un avión" o "una U si la giramos"; y el trapecio isósceles (Figura 2f) como "una corona" o "una montaña". Por otro lado, también se encontraron ejemplos de cómo los estudiantes sí que reconocían figuras geométricas por su nombre, pero las percibían de forma global, como un todo. Por ejemplo, cuando se les mostró el cuadrado (en posición no-prototípica) (Figura 2ª), algunos estudiantes sí que dijeron "cuadrado" y otros estudiantes dijeron "diamante" (objeto de su entorno). Sin embargo, cuando la maestra-investigadora giró la figura para ponerla en posición prototípica, los estudiantes dijeron "cuadrado".

En cuanto a las tareas de reconocer las diferencias entre los atributos del polígono también se observaron respuestas de este nivel. Por ejemplo, cuando tuvieron que diferenciar entre figura plana y no-plana al mostrarles una caja de bombones en forma de prisma hexagonal y un triángulo obtusángulo, reconocieron el triángulo como una "rampa"; y al mostrarles un pentágono irregular y un cilindro, reconocieron el pentágono como una "corbata".

Todos estos ejemplos, muestran cómo los estudiantes definieron o reconocieron estas figuras geométricas comparándolas con objetos de su entorno, y, además, muestran la incapacidad de los estudiantes de reconocer las partes de la figura, así como el peso que presentan las figuras prototípicas en la imagen del concepto de los estudiantes.

Resultados durante la instrucción

En este apartado encontramos respuestas de nivel visualización, sincrético y análisis. Cabe comentar que, aunque se encontraron respuestas de nivel visualización, los estudiantes iban cambiando su vocabulario y empezaban a justificar según el atributo (aunque no fuera con un lenguaje completamente matemático).

Respuestas de nivel visualización

En cuanto a las respuestas de este nivel observamos que los estudiantes seguían comparando las figuras que no eran conocidas con objetos de la vida cotidiana. Por ejemplo, cuando se clasificaron las figuras con lados curvos o rectos, reconocieron un heptágono cóncavo (con dos concavidades) como un "barco de papel"; un pentágono cóncavo como "una bota de agua"; o un no-polígono de dos lados rectos y uno curvo como "una cobertura" (refiriéndose al símbolo del Wifi).

Respuestas de nivel sincrético

Respecto a las respuestas de este nivel, se observó cómo los estudiantes reconocían algunas propiedades o atributos de las figuras mostradas, usando un vocabulario verbal declarativo e imaginario. En concreto, se observó que los estudiantes usaban algunos términos matemáticos y algunos términos no matemáticos, relativos a lo visual (vocabulario mixto). Por ejemplo, ante la figura de clasificar figuras abiertas o cerradas, justificaron que las figuras estaban abiertas al decir "abierta porque tiene un trozo ahí" (señalando con el dedo la parte abierta) o "abierta porque le falta una pieza" (refiriéndose a un lado). Es decir, los estudiantes usaron el término matemático "abierto", pero para justificarlo usaron un vocabulario no matemático (trozo o pieza). Ante una tarea de clasificar polígonos y no-polígonos, los estudiantes clasificaron un polígono cóncavo como

un ejemplo de polígono "porque está cerrada […], no tiene X, no está curva, […] planita". En esta respuesta se observa que los estudiantes reconocieron las partes o atributos de las figuras, pero usando un vocabulario mixto. En este caso usaron la idea de X para referirse a "cruzado".

Se observó, por tanto, que los estudiantes fueron cambiando sus justificaciones y pasaron de reconocer las figuras como un todo, a reconocer algunas propiedades o atributos de las figuras mostradas. Sin embargo, a pesar de empezar a reconocer algunos atributos, los estudiantes todavía no usaban un vocabulario matemático apropiado.

Respuestas de nivel análisis

En cuanto a las respuestas de este, se observó que los estudiantes fueron capaces de reconocer y analizar las partes y propiedades de las figuras geométricas. En la tarea de clasificar polígonos y no-polígonos, un estudiante justificó que una figura abierta "no es un polígono […] porqué está abierto", o ante una figura abierta con un lado curvo un estudiante reconoció que "no es polígono […] porqué está abierta […] y tiene lados curvos".

Las respuestas de este nivel aparecieron en menor medida, pero sí se observó un cambió antes y durante la instrucción en la combinación de lo perceptual y lo conceptual, al hacer referencia a las partes de las figuras en vez de al todo.

DISCUSIÓN

El objetivo de este estudio era implementar una instrucción sobre la formación del concepto de polígono combinando lo perceptual y lo conceptual para ayudar a los estudiantes de Educación Infantil (3 años) a progresar entre los diferentes niveles del desarrollo del pensamiento geométrico. Los resultados muestran que los estudiantes en un primer momento están en un nivel pre-reconocimiento y visual y que conforme se va avanzando en la instrucción sobre el concepto de polígono, los estudiantes avanzan a un nivel sincrético, y en algunos casos, a un nivel análisis. Esta progresión evidencia la asociación paulatina de lo perceptual con lo conceptual (Fischbein, 1993) y que los estudiantes de Educación Infantil con el apoyo de una maestra pueden llegar a reconocer atributos de las figuras geométricas (nivel análisis) (Berciano et al., 2017).

En lo que respecta al momento previo a la instrucción, las respuestas de los estudiantes se basaron en reconocer figuras como ejemplos de clases a las que no pertenecían (Nivel pre-reconocimiento); y reconocer figuras que sí que pertenecen a una clase porque eran ejemplos prototípicos o reconocer estas comparándolas con objetos de su entorno (Nivel visualización). Como los estudiantes no habían recibido instrucción alguna, las respuestas proporcionadas en los momentos del cuestionario inicial y en las tareas de reconocer las diferencias entre los atributos del polígono procedían de su experiencia extraescolar. En concreto, cuando se presentaban figuras prototípicas (o no-polígonos parecidos a figuras prototípicas) los estudiantes las reconocían por su nombre (aunque no fueran ejemplos de esa clase) (Tsamir et al., 2008), pero cuando estas eran no-prototípicas las comparaban con objetos de su entorno, ya que no eran capaces de fijarse en sus partes (Bernabeu et al., 2017; Halat y Yesil-Dagli, 2016).

En cambio, durante la instrucción, tras ver las diferencias entre los atributos del concepto de polígono y haber proporcionado los términos de estos, los estudiantes fueron fijándose cada vez más en las partes de las figuras. Intuimos que esto se debe al diseño de la instrucción llevado a cabo en esta investigación, ya que usamos un amplio abanico de ejemplos y no-ejemplos de atributos de los polígonos y de polígonos para que se fijaran en las partes de las figuras y no en el todo (Bernabeu et al., 2022). Esto amplió la imagen del concepto de los estudiantes de una centrada en ejemplos rígidos (basándose en ejemplos prototípicos), a una más amplia (Tall y Vinner, 1981).

Por otro lado, en cuanto a las respuestas de nivel análisis, los ejemplos encontrados eran de cuando reconocían no-polígonos como no-ejemplos de polígonos. Esto puede ser porque los estudiantes

solamente tenían que reconocer uno o dos de los atributos relevantes que no se cumplían para la definición de polígono. Sin embargo, no encontramos ninguna respuesta de nivel análisis para justificar la pertenencia de una figura a la clase de los polígonos, ya que tenían que hacer la conjunción de cuatro atributos (plano, cerrado, lados rectos y no-cruzados), solamente si la maestra-investigadora les guiaba. Los resultados mostraron que, o bien los estudiantes solamente se fijaban en alguno de los atributos, o bien usaban un vocabulario mixto (nivel sincrético).

Referencias

Aslan, D. y Arnas, Y. (2007) Three- to six-year-old children's recognition of geometric shapes, *International Journal of Early Years Education*, *15*(1), 83-104, https://doi.org/10.1080/09669760601106646

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). SEIEM.

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M. (2017). Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 157-166). SEIEM.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(2), 49-70. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Clements, D. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for research in Mathematics Education*, *30*(2), 192-212. https://doi.org/10.2307/749610

Clements, D. H., Sarama, J. y Joswick, C. (2022). Learning and teaching geometry in early childhood. En A. Sharif-Rasslan y D. Hassidov (Eds.), *Special Issues in Early Childhood Mathematics Education Research* (pp. 95-131). Brill.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics, 24*(2), 139–162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Gutiérrez, A. (2012). Investigar es evolucionar. Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Graó.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 55-70.

Halat, E. y Yesil-Dağli, Ü. Y. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 830-848. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a25

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En Nesher y Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge University Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9133-5

Verdine, B. N., Lucca, K. R., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K. y Newcombe, N. S. (2016). The shape of things: The origin of young children's knowledge of the names and properties of geometric forms. *Journal of Cognition and Development*, *17*(1), 142-161. https://doi.org/10.1080/15248372.2015.1016610

CREACIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL. UNA EXPERIENCIA CON MAESTROS EN FORMACIÓN[i]

Probability problem posing and proportional reasoning. An experience with trainee teachers

Burgos, M.[a], Tizón-Escamilla, N.[a] y Chaverri, J. [b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Costa Rica

Resumen

La invención de problemas es una competencia fundamental que potencia los conocimientos didáctico-matemáticos del docente de matemáticas, por lo que debe ser un objetivo en los planes de desarrollo profesional. En la acción formativa descrita en este trabajo, los maestros en formación deben elaborar problemas que involucren el razonamiento proporcional a partir de una situación dada en un contexto probabilístico. Los participantes deben identificar el nivel de razonamiento algebraico elemental (RAE) implicado y después crear, mediante variación del problema, nuevos problemas cuya resolución implique niveles superiores de RAE. Los resultados muestran que menos de la mitad de los participantes fueron capaces de diseñar problemas adecuados. Sin embargo, en un porcentaje elevado, crearon nuevos problemas que implicaban niveles de RAE superiores, aunque exhibieron dificultades para reconocer los objetos y procesos algebraicos en su resolución.

Palabras clave: *creación de problemas, niveles de algebrización, razonamiento proporcional, probabilidad, formación de profesores.*

Abstract

Problem-posing is a fundamental competence that enhances the didactic-mathematical knowledge of the mathematics teacher, so it should be a goal in professional development plans. In the formative action described in this work, trainee teachers must pose problems involving proportional reasoning from a given situation in a probabilistic context. Participants must identify the algebraic reasoning levels involved and then create, by varying the original problem, new problems whose solution involves higher levels of algebraic reasoning. The results show that less than a half of the participants were able to design appropriate problems. However, high percentage created new problems involving higher levels of algebraic reasoning, although they exhibited difficulties in recognising the algebraic objects and processes in their solution.

Keywords: *problem posing, algebraization levels, proportional reasoning, probability, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

Mientras que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas se ha situado en el centro de los programas curriculares y la práctica educativa, la creación de problemas ha recibido menor atención. Sin embargo, invención y resolución de problemas deben verse como propuestas complementarias que coordinadas permiten incrementar las competencias matemáticas de los estudiantes (Espinoza et al., 2014).

Para que los profesores puedan diseñar tareas de creación de problemas adecuadas para sus estudiantes, también ellos deben estar familiarizados con esta tarea. Los docentes, además de resolver problemas de forma flexible, deben ser capaces de elegirlos, modificarlos o crearlos con una finalidad

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023). Creación de problemas de probabilidad y razonamiento proporcional. Una experiencia con maestros en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 171–178). SEIEM.

didáctica (facilitar o profundizar en el aprendizaje de sus alumnos y estimular su razonamiento), así como de evaluar críticamente la calidad de la actividad matemática que promueven (Malaspina et al., 2019). A pesar de esto, la investigación sobre creación de problemas en la formación de profesores muestra que, incluso profesores con años de experiencia tienen dificultades para proponer problemas que potencien el aprendizaje de sus estudiantes (Mallart et al., 2018).

En esta investigación se describe por medio de un estudio de caso, el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con futuros maestros de Educación Primaria, con la que se pretende desarrollar su competencia para crear problemas matemáticos con un fin didáctico: involucrar el razonamiento proporcional y algebraico en el contexto de la probabilidad. El razonamiento proporcional es considerado como un componente básico del razonamiento probabilístico pues forma parte integrante de los componentes de análisis del espacio muestral, de la cuantificación proporcional de las probabilidades y de la comprensión y uso de las correlaciones (Bryant y Nunes, 2012). La falta de razonamiento proporcional en la resolución de problemas elementales de comparación de probabilidades se encuentra no sólo en estudiantes, sino también en futuros maestros (Vásquez y Alsina, 2015), que además muestran un conocimiento matemático y didáctico insuficiente sobre la proporcionalidad (Buforn et al., 2017; Weiland et al., 2019).

En la experiencia que se describe en este trabajo, los maestros en formación deben elaborar un problema, que llamamos problema Pre, que involucre el razonamiento proporcional a partir de una situación dada en un contexto probabilístico. Los participantes deben identificar los niveles de razonamiento algebraico implicado (Godino et al., 2014). Después, los futuros docentes crean, por variación del problema Pre, uno o varios problemas Pos, cuya solución implique niveles de razonamiento algebraico superiores. Así, planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- *¿qué tipo de problemas crean los maestros en formación para involucrar el razonamiento proporcional en el contexto de la probabilidad?,*
- *¿reconocen los aspectos algebraicos implicados en sus soluciones?*
- *¿cómo los consideran para elaborar nuevos problemas que motiven niveles superiores de razonamiento algebraico?*

MARCO TEÓRICO

En este trabajo aplicaremos algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2019).

Significado pragmático y niveles de algebrización

Desde la concepción antropológica de la matemática asumida por el EOS, la noción de práctica matemática ocupa un lugar central (Godino et al., 2019). Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Las entidades materiales o inmateriales que intervienen en las prácticas matemáticas, sustentando y regulando su realización, son los objetos matemáticos, clasificados en el EOS según su naturaleza y función en: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. En Godino et al. (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria, estableciendo criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de los progresivos niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE). Los criterios utilizados para delimitar los distintos niveles se basan en la clase de objetos y procesos matemáticos involucrados: tipos de representaciones usadas, procesos de generalización implicados y cálculo analítico puesto en juego en la actividad matemática correspondiente. Dichos niveles son:

- *Nivel 0*. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.

- *Nivel 1*. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de los naturales y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2*. Se usan representaciones simbólico – literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma Ax + B = C.
- *Nivel 3*. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas; se resuelven ecuaciones de la forma Ax+B=Cx+D.

En el EOS, se dice que un objeto es extensivo si interviene en la práctica matemática como un caso particular, mientras que es intensivo si interviene como una clase o tipo de objetos. Los niveles de RAE se proponen para modelizar el conocimiento institucional y personal que se pone en juego en las prácticas operativas y discursivas implicadas en la resolución de problemas matemáticos, esto es, para describir la actividad matemática que se hace bajo la perspectiva de los objetos y procesos característicos del álgebra (relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructuras; generalización, unitarización, cálculo sintáctico). Los niveles se atribuyen a la actividad matemática que desarrolla el sujeto que resuelve un problema, no a la tarea matemática en sí, que puede ser resuelta de distintas maneras, poniendo en juego una actividad algebraica diferente.

Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor

El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor desarrollado en el marco del EOS articula las categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas, por medio de las facetas y componentes de los procesos de estudio matemático consideradas en dicho marco (Godino et al., 2017). Así, se acepta que el profesor debe tener *conocimiento matemático per se,* que le permita resolver los problemas y tareas propuestas en el currículum del nivel educativo donde imparte su docencia, y *ampliado*, para articularlo con los niveles superiores. A medida que se ponga en juego algún contenido matemático el profesor debe tener un *conocimiento didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan el proceso educativo: *epistémica*, *ecológica*, *cognitiva*, *afectiva*, *mediacional* e *interaccional*. Además de disponer de estos conocimientos, el modelo CCDM propone que el profesor debe ser *competente* para abordar los problemas didácticos básicos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En particular, la *competencia de análisis e intervención didáctica* permite al profesor describir, explicar y juzgar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y hacer propuestas de mejora. Dicha competencia contempla, entre otras, la identificación de las situaciones-problemas y las prácticas implicadas en su resolución, el reconocimiento de la configuración de objetos y procesos intervinientes y emergentes de las prácticas matemáticas, y la identificación de los grados de razonamiento algebraico implicado.

La competencia en creación de problemas

De acuerdo con Malaspina et al. (2019) la creación de problemas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, el cual está determinado por cuatro elementos fundamentales: la *información*, es decir, los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema; el *requerimiento,* esto es, lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones; el *contexto*, que puede ser intra matemático o extra-matemático, y el *entorno matemático* en el que se ubican los objetos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema. La creación de nuevos problemas puede darse a través de dos procedimientos: a) la *variación* de un problema dado, por el que se construye un nuevo problema modificando uno o más de los cuatro elementos de un problema inicial, o b) la *elaboración* de un nuevo problema *de forma libre*, *a partir de una situación* (dada o configurada por el autor), o bien, *por un requerimiento específico*, que puede tener énfasis matemático o didáctico. El conocimiento didáctico-matemático sobre el contenido, en nuestro caso la proporcionalidad, es especialmente importante para responder adecuadamente al requerimiento.

Las competencias matemáticas y de análisis e intervención didáctica del profesor (Godino et al., 2017) son fundamentales en la creación de problemas con fines didácticos. De forma recíproca, la creación de problemas sirve de medio para desarrollarlas, pues se requiere: reflexionar sobre la estructura global del problema, los objetivos que persigue, si la información facilitada es suficiente para resolver el problema y de qué forma puede abordarse, y analizar los objetos y procesos matemáticos que intervienen y cómo se relacionan para dar solución al problema propuesto.

MÉTODO

Se trata de un experimento de enseñanza concebido en el marco de las investigaciones de diseño aplicando el EOS como teoría base. Por razones de espacio, solo mostramos los resultados de la evaluación de un primer ciclo de experimentación, aplicando un método mixto, cuantitativo y cualitativo (Castro y Godino, 2011).

La población en la que se centra la investigación son estudiantes de sexto semestre del grado de Educación Primaria en la Universidad de Granada. Uno de los focos fundamentales de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en que se desarrolla la experiencia es el análisis, diseño y secuenciación de tareas matemáticas según unos contenidos específicos y determinadas expectativas de aprendizaje. La tarea se propuso como parte de las actividades voluntarias de clase en dicho contexto. Participaron 17 maestros en formación (MF, en adelante) que resolvieron la tarea durante una sesión de clase (una hora). Los participantes recibieron formación sobre las características del modelo de RAE (tipos de objetos y procesos algebraicos y niveles) aplicado al análisis de prácticas desde el punto de vista institucional y personal (ejemplificadas con respuestas de alumnos de primaria a tareas de proporcionalidad). La Figura 1 incluye la consigna planteada.

Figura 1. Tarea propuesta sobre creación de problemas a los maestros en formación.

Crea a partir de la siguiente situación un problema en el contexto de la probabilidad que involucre el razonamiento proporcional en su solución.

Situación
En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras.

A este problema lo llamaremos problema Pre. Resuélvelo. Identifica los objetos y procesos matemáticos y asigna de manera justificada el nivel de razonamiento algebraico implicado.

A partir del problema Pre que has elaborado, propón justificadamente y resuelve nuevos problemas (Pos1, Pos2,…) cuya solución implique niveles de razonamiento algebraico superiores.

En la primera parte de la tarea, se persigue la creación de un problema a partir de una situación para responder a un requerimiento didáctico-matemático, a saber, involucrar el razonamiento proporcional. Por este motivo, se establecieron las siguientes categorías de pertinencia: un problema se considera *pertinente* si partiendo de la situación propuesta, se añaden una o varias preguntas significativas (no tiene ambigüedad en su formulación y se puede responder a la pregunta con la información dada) de manera que en su solución aparece involucrado el razonamiento proporcional (Figura 2). Cuando el problema no cumple alguna de estas condiciones se considera *no pertinente*. Un problema no pertinente puede ser: *significativo* si todas las preguntas están bien formuladas, pero altera la situación propuesta (modificando, por ejemplo, el número de bolas en cada caja de la situación inicial) o no involucra el razonamiento proporcional (error en el entorno, como se observa en la Figura 3); *parcialmente significativo*, si las preguntas están bien formuladas, pero altera la situación propuesta y no involucra el razonamiento proporcional o presenta varias preguntas, algunas de las cuales no son significativas (por ejemplo, MF10 pregunta "¿en qué caja es más probable que salga una bola blanca?" pero también "¿qué diferencia de probabilidad hay entre las dos cajas?" que no es adecuada), o *no significativo* cuando las preguntas no están correctamente formuladas. Además, se establece una categorización *a posteriori* atendiendo al tipo de requerimiento que plantea.

El análisis de los niveles de RAE en las soluciones propuestas por los MF se realiza identificando las prácticas, objetos y procesos y aplicando los criterios establecidos en el modelo. Este análisis previo permite determinar el grado de corrección en la asignación de nivel de RAE por parte de los MF.

A continuación, los MF debían crear problemas por variación de su problema Pre, según el modelo de Malaspina et al. (2019), esto es, modificando contexto, entorno, información o requerimiento, para responder a una finalidad didáctico-matemática: modificar el nivel de RAE implicado. Un problema Pos se considera *pertinente* si es significativo, variación del problema Pre y requiere un nivel de RAE superior en su solución. Cuando el problema no cumple alguna de estas condiciones se considera *no pertinente*. Un problema *no pertinente* puede ser: *significativo* si está correctamente formulado, pero no es variación del problema Pre o la solución propuesta no implica aumento del nivel de RAE; *parcialmente significativo*, si no es variación del problema Pre y no cambia el nivel de RAE, o bien *no significativo* si las preguntas no están bien formuladas. En este caso también se lleva a cabo una categorización *a posteriori* de los problemas atendiendo a su requerimiento.

RESULTADOS

Formulación y análisis del problema Pre

Un 47,06% de los MF formularon un problema Pre pertinente que requiere (explícita o implícitamente) la comparación de las probabilidades (véase la Figura 2).

Figura 2. Problema Pre pertinente (MF4). Escoger la caja que garantice mayor posibilidad de éxito.

> En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras. Si consigues sacar una bola blanca obtienes un punto extra en matemáticas. ¿Cuál de las dos cajas escogerías para intentar sacar una bola blanca? Razona tu respuesta.

También se aprecia un porcentaje elevado (41,18%) de MF cuyo problema Pre requiere explícitamente el cálculo de la probabilidad de extraer una bola de un color determinado de una o de las dos cajas, sin necesidad de ser comparadas, por lo que se consideran significativos, pero no pertinentes, pues no involucran el razonamiento proporcional (Figura 3).

Figura 3. Problema Pre significativo no pertinente (MF16). Cálculo sin comparación de probabilidades.

> Sobre una mesa tenemos dos cajas con bolas de colores. Una de ellas, la caja A contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras, y la caja B contiene 4 bolas blancas y 7 bolas negras. En esta situación, si sacamos una bola de la caja B, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea negra?

En varios de los problemas de este tipo se plantean más de una cuestión referentes al cálculo de la probabilidad (Figura 5), cambiando en cada cuestión la caja seleccionada y/o el color de la bola. No se ha encontrado ningún problema no significativo entre los propuestos.

Una vez propuesto y resuelto el problema, los MF debían indicar los objetos y procesos y finalmente asignar el nivel de RAE implicado en la solución. En un 76,47% de los casos, los MF resolvieron correctamente los problemas. En aquellos problemas que involucraban el razonamiento proporcional (52,94%), este viene identificado por medio de la relación multiplicativa entre casos favorables y desfavorables en ambas cajas, la comparación entre fracciones o el cálculo de porcentajes como razón entre casos favorables y casos totales. Sin embargo, el número de MF que identifican objetos propios del razonamiento proporcional (comparación de fracciones/razones, porcentajes o relación de proporcionalidad directa) en su posterior análisis es considerablemente menor (23,53%).

En relación con la asignación del nivel de RAE, en un 58,83% de los casos los MF no identifican correctamente el nivel de RAE implicado (todas de niveles 0 o 1 de RAE): un 41,18% de ellos asigna un nivel de RAE superior a resoluciones que se corresponden con un nivel 0, un 5,88% asignan nivel superior a las de nivel 1 y un 11,77% consideran aritméticas aquellas de nivel 1. Por el contrario, el

17,65% de los MF detectan adecuadamente la ausencia de actividad algebraica en su resolución (Figura 4) y un 23,53% asignan adecuadamente nivel 1 de RAE a la solución propuesta (Figura 5).

Figura 4. Solución al problema Pre (izquierda) de MF4 (Figura 2) y asignación correcta de nivel 0 RAE (derecha).

En la caja B encontramos el doble de bolas blancas y más del doble de bolas negras, por lo que al haber más del doble de bolas negras en la caja B la probabilidad de sacar una bola negra es mayor en la caja A que en la B.	Intervienen los valores numéricos particulares, es decir, número de bolas blancas y negras que encontramos en la caja. Justificación apoyada en el conocimiento de las operaciones aritméticas (doble de una cantidad) Aritmética: Nivel 0 RAE

En este caso, con los objetos intensivos de primer grado en la Figura 5, MF10 se refiere a "fracciones, porcentajes y relación de proporcionalidad" reconocidos previamente en su análisis.

Figura 5. Problema Pre, solución y asignación correcta de nivel 1 RAE (MF10)

¿Qué probabilidad hay de que salga una bola blanca en la caja A? Exprésala en forma de fracción y de porcentaje. 2 bolas blancas 3 bolas negras Total=2+3=5 bolas Probabilidad de que salga una bola blanca=2/5=40% *¿Qué probabilidad hay de que salga una bola blanca en la caja B? Exprésala en forma de fracción y de porcentaje.* 4 bolas blancas 7 bolas negras Total=4+7=11 bolas Probabilidad de que salga una bola blanca=4/11=36% *¿En qué caja es más probable que salga una bola blanca?* 40% > 36% Es más probable que salga una bola blanca en la caja A.
El razonamiento algebraico implicado es de **nivel 1** ya que se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado.

Dado que en su mayoría los MF no justifican su asignación de nivel de RAE, no es posible conocer cómo han tenido en cuenta el análisis de objetos y procesos algebraicos emergentes en esta decisión.

Formulación y análisis del problema Pos

Se propusieron 30 problemas Pos, de los cuales solo cuatro fueron no significativos. Los tipos de problemas Pos creados respondían a una de estas categorías: 1) determinación de la composición de una caja a partir de una probabilidad conocida (34,62%, 7 pertinentes, 2 no pertinentes significativos) (Figura 6); 2) determinación o modificación de la composición de las cajas conocida la razón de bolas blancas a negras o a totales (23,08%, 3 pertinentes, 3 no pertinentes significativos) (Figura 7); 3) comparación de probabilidades de sacar una bola en las dos cajas (15,38%, 1 pertinente, 3 no pertinentes: 2 significativos, 1 parcialmente significativo) (similar a Figura 2), 4) cálculo explícito de la probabilidad simple o compuesta (26,92%, 5 pertinentes, 2 no pertinentes significativos).

Figura 6. Problema Pre (izquierda) y problema Pos (derecha) propuestos por MF1.

Tenemos dos cajas. La caja A contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Y la caja B contiene 4 bolas blancas y 7 negras. ¿Qué probabilidad hay de q salga una bola blanca en cada caja?	Tenemos dos cajas. La caja A contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Y la caja B contiene 4 bolas blancas y 7 negras. ¿Cuántas bolas negras quitarías a una de las cajas para que en ambas la probabilidad de sacar una bola blanca fuese la misma? ¿A qué caja le quitarías?

En lo que respecta a cómo se realiza la variación del problema Pre, el 46,15% de los MF modifican sólo el requerimiento, planteando una pregunta diferente derivada de la situación original (véase Figura 6). Cambian el requerimiento junto con la información en un 19,23% y requerimiento junto a información y entorno en un 23,08% de los problemas, proponiéndose en estos casos una situación que lleva a determinar la composición de una nueva caja o modificar la de una de las cajas dadas conocida la proporción de bolas blancas/negras.

Figura 7. Problema Pos. Determinación de la composición de la caja con razón (MF9).

En la caja hay 5 bolas negras por cada 8 blancas, si en total tenemos 20 bolas negras ¿Cuántas bolas blancas hay en la caja ? ¿Y en total?

Un 69,23% de los problemas Pos propuestos conllevan en su resolución una actividad algebraica de nivel superior a la involucrada en el problema Pre de origen. En particular, el 30,77% de los problemas implican un nivel 1 de RAE, pues recurren al uso de los números racionales. Este carácter proto-algebraico es identificado correctamente por la mitad de los MF. Los problemas cuya solución implica un nivel 2 de RAE, la segunda categoría más frecuente (19,23%), son aquellos que requieren determinar o modificar la composición de una caja conocida la razón de bolas blancas a bolas negras o totales, pues sus resoluciones llevan a plantear y resolver una ecuación proporcional (tipo Ax=B). Esto ocurre en la solución propuesta por MF1 (Figura 8) a su problema Pos (Figura 6), si bien no identifica de forma adecuada el nivel de RAE implicado. En este caso corresponde a un nivel 2, pues se plantea y resuelve una ecuación del tipo A*x*+B=C.

Figura 8. Resolución problema Pos (nivel 2 RAE) propuesta por MF1. Identificación errónea de nivel RAE.

P(bola blanca en A)= $\frac{2}{5} = 0{,}4$ P(bola blanca en B) = $\frac{4}{11} = 0{,}36$

En la caja A hay más probabilidad de sacar bola blanca. $\frac{3}{10} < \frac{2}{5}$

Por lo que hay que quitar bolas negras a la caja B para que tenga la misma probabilidad de sacar bola blanca en ambas cajas.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{11-x} = 2(11-x) = 20 => 11-x = 10$$
$$=> -x = 10-11 => -x = -1 => x = 1$$

P(bola blanca en A)= $\frac{2}{5} = 0{,}4$ P(bola blanca en B) = $\frac{4}{10} = 0{,}4$

Solución habría que quitar 1 bola negra a la caja B para que ambas cajas tengan la misma probabilidad de sacar una bola blanca.

Nivel de RAE 1. Operación con números particulares, aplicando propiedades de la estructura algebraica del conjunto de números naturales y la igualdad como equivalencia.

El resto de problemas Pos cuya resolución implica una actividad algebraica de nivel superior al problema Pre original se sitúan en niveles de RAE mayores que 2, si bien ningún MF fue capaz de identificar dicho nivel de manera correcta. Estos problemas plantean situaciones de modificación de la composición de las cajas o creación de nuevas cajas conocida la razón entre bolas de diferentes colores. Tres de estos problemas movilizan en su resolución el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se resuelven por sustitución, lo cual supone un nivel 3 de RAE.

CONCLUSIONES

La creación de problemas es una actividad ampliamente reconocida para mejorar la competencia matemática de los futuros docentes de educación primaria (Mallart et al., 2018; Malaspina et al., 2019). En respuesta a las preguntas que nos planteamos en este trabajo, hemos observado que el tipo de problema creado por los MF con mayor frecuencia se fundamenta en la comparación de probabilidades. Sin embargo, podemos concluir que, en general, los MF tuvieron dificultades para crear problemas que involucraban el razonamiento proporcional en el contexto de la probabilidad, ya que menos de la mitad de los MF fueron capaces de introducir elementos propios del razonamiento proporcional en sus tareas partiendo de la situación dada. Este resultado concuerda con aquellos que muestran las dificultades encontradas por MF al resolver tareas que involucran el razonamiento proporcional en contexto aritmético (Buforn et al., 2017; Burgos y Godino, 2022; Weiland et al., 2019), o probabilístico (Ortiz et al., 2006; Vásquez y Alsina, 2015; Burgos et al., 2022). Además, en relación a la segunda pregunta de investigación planteada, los MF no reconocieron de forma adecuada la actividad algebraica presente en sus resoluciones. Por el contrario, Tuvieron mayor éxito a la hora de proponer problemas por variación del problema Pre. A pesar de no haber identificado de manera correcta los niveles de RAE implicados en la solución del problema Pre, o de no haber podido justificar su asignación, más de la mitad de los problemas Pos propuestos movilizan un razonamiento algebraico superior al problema Pre. Los MF tampoco identifican adecuadamente el nivel de RAE involucrado en la resolución de estos problemas. Este hecho nos conduce a pensar que, en respuesta a la tercera pregunta de investigación de este trabajo, los MF reconocen la existencia de una mayor demanda cognitiva a nivel algebraico, si bien presentan dificultades a la hora de establecer cuáles son los objetos y procesos algebraicos concretos involucrados en su resolución. Este hecho concuerda con investigaciones previas donde remarcan las dificultades que presentan los futuros docentes de educación primaria en entornos algebraicos (Blanton y Kaput, 2005). De esta forma, el modelo de RAE se podría emplear para reforzar el discurso profesional sobre los objetos y procesos algebraicos

una vez identificados los niveles, de manera que la discusión permita reflexionar más sobre la naturaleza de las entidades que sobre la complejidad de resolución que parecen vincular al nivel.

Referencias

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36* (5), 412-446.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012*). Children's understanding of probability: A literature review* (full report). The Nuffield Foundation.

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 167-176). SEIEM

Burgos, M. y Godino J. D. (2022). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20,* 367–389.

Burgos, M., López-Martín, M.M., Aguayo-Arriagada, C.G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia, 36*(1), 588-611.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). SEIEM.

Espinoza, J., Lupiáñez, J.L. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 14*(2), 1–12.

Godino, J.D., Aké,L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Malaspina, U., Torres, C., y Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133–151). Springer.

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1465–1481

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J.D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Bolea, M.P.; Moreno, M.; González, M.J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 267-276). Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Vásquez, C., y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática,7*, 27-48.

Weiland, T., Orrill, C., Brown, R. y Nagar, G. G. (2019). Mathematics teachers' ability to identify situations appropriate for proportional reasoning. *Research in Mathematics Education, 21*(3), 233–250.

[i] Este trabajo se desarrolla en el marco del proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/0.13039/501100011033, con apoyo del Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

RUTA PARA IDENTIFICAR, RECONSTRUIR Y TIPIFICAR ARGUMENTOS MATEMÁTICOS QUE SURGEN EN CLASE DE GEOMETRÍA[i]

Route to identify, reconstruct, and typify mathematical arguments produced in geometric classrooms.

Camargo, L. [a], Molina, O. [a], Perry, P. y Samper, C. [a]

[a]Universidad Pedagógica Nacional

Resumen

Presentamos una ruta analítica para identificar, reconstruir y tipificar argumentos matemáticos que surgen en clases de geometría durante la interacción entre estudiantes o entre profesor y estudiantes en el contexto de resolución de tareas que promueven la argumentación. Es resultado parcial de una investigación en curso relacionada con el diseño de tareas para impulsar el conocimiento didáctico matemático sobre argumentación, de profesores en formación. Ilustramos el uso de la ruta con el análisis de la transcripción de un intercambio comunicativo entre estudiantes universitarios de un curso inicial de geometría plana.

Palabras clave: *argumentación, argumento, ruta analítica, geometría euclidiana, formación de profesores.*

Abstract

We present an analytical route to identify and reconstruct mathematical arguments that arise in geometry classes during interaction between students or between teacher and students in the context of solving open conjecturing problems. It is a partial result of an ongoing investigation related to the design of professional tasks to promote preservice teachers' mathematical didactic knowledge about argumentation. We illustrate the use of the route with the analysis of a transcription of the communicative exchanges between university students of an initial plane geometry course.

Keywords: *argumentation, argument, analytic route, Euclidean geometry, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

La argumentación es un asunto que interesa a profesores de matemáticas e investigadores. A profesores porque las directrices curriculares actuales en varios países proponen, como una meta educativa para el área de matemáticas, que los niños y jóvenes aprendan a argumentar (MEN, 2006; NCTM, 2000). Además de considerarse como un aprendizaje escolar esencial, la argumentación se ve como un proceso fundamental en la construcción de conocimiento: los estudiantes aprenden matemáticas al argumentar en actividades que conllevan a la interacción social en clase. A investigadores porque la línea de argumentación y demostración, cuyos orígenes se remontan a las décadas del 80 y 90 del siglo pasado, está vigente y todavía hay muchos asuntos por estudiar (de Sá Ibraim y Justi, 2016; Knipping y Reid, 2019; Lin et al., 2012; Molina, 2019; Stylianides y Ball, 2008).

Pese a los diversos desarrollos de la línea, hace falta material de apoyo para profesionales interesados en identificar y caracterizar argumentos que surgen en interacciones comunicativas en la clase de matemáticas. Cómo proceder para ello, a partir de la transcripción de un intercambio

Camargo, L., Molina, O., Perry, P. y Samper, C. (2023). Ruta para identificar, reconstruir y tipificar argumentos matemáticos que surgen en clase de geometría. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 179–186). SEIEM.

verbal en el aula, es un asunto que preocupa a la comunidad (Boero et al., 2018; Knipping y Reid, 2015, 2019; Krummheuer, 2015; Larios et al., 2017; Metaxas, 2015).

La investigación que nos ocupa desde 2020 tiene entre sus objetivos diseñar tareas para que estudiantes para profesor de matemáticas aprendan un discurso especializado sobre la argumentación. Es en ese escenario en el que desarrollamos una ruta, fundamentada en nuestra aproximación conceptual de argumento y argumentación matemáticos, para identificar, reconstruir y tipificar argumentos esbozados en una interacción entre estudiantes o estudiantes y profesor, usando la transcripción de una videograbación. El propósito de la ponencia es presentar la ruta y ejemplificar su uso, destacando el potencial que tiene como herramienta formativa e investigativa.

MARCO DE REFERENCIA

Enseguida, presentamos la conceptualización de argumentación y argumento que hemos usado; esta es cercana a lo que Durand-Guerrier et al. (2012) entienden por argumentación y a la interpretación que Knipping y Reid (2019) hacen de la estructura funcional de argumento propuesta por Toulmin. Exponemos también una tipificación de argumentación.

Argumento es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La *aserción* se expone de tres maneras: en una proposición (es decir, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; en una oración en la que se plantea una postura; o en una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea propuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. *Justificación* es un conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de la aserción. Así, una justificación no es un argumento porque no incluye la aserción. Las *razones* se pueden expresar en oraciones (sean o no proposiciones) o acciones. *Argumentación* es un proceso discursivo y sociocultural en el que surgen argumentos.

Argumento simple es un argumento conformado por tres elementos[ii] –dato, aserción, garantía– relacionados funcionalmente así: el dato es una razón que fundamenta la aserción, es evidencia que justifica la aserción; la garantía es una razón que da soporte a la relación entre el dato y la aserción; justifica con un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. Si la garantía no está explícita, hablamos de argumento simple incompleto.

Argumento matemático es un argumento que surge durante alguna actividad relevante en la práctica matemática (i.e. generalizar, visualizar, explorar, representar, clasificar); la aserción versa sobre un objeto matemático (e. g., propiedades o relaciones entre propiedades) y las razones aducidas pueden referirse o no a condiciones de índole matemática. Está asociado a una argumentación acompañada de acciones como generalizar, visualizar, explorar, representar, abstraer, clasificar.

En el proceso de producir un argumento, lo que se infiere y la manera de hacerlo a partir de información con la que se cuenta determina si la argumentación es inductiva, deductiva o abductiva. Describimos someramente los tipos de argumentación. Por extensión y abusando del lenguaje, le asignamos al argumento el mismo nombre del tipo de argumentación de la que surge.

Argumentación inductiva: se hace en el marco de un conjunto referencial. Se inicia con la información de que varios casos comparten otro atributo (además del que comparten por ser elementos del mismo conjunto referencial) determinado empíricamente. Al tomar uno o varios casos del referencial aún no considerados, la argumentación expone que estos también tienen el otro atributo. En el *argumento inductivo*, el dato expresa el hecho de que varios elementos del conjunto comparten un atributo, empíricamente encontrado, diferente al que define al conjunto; la aserción expresa, a manera de inferencia, que al menos otro elemento del conjunto referencial podría tener el otro atributo; la garantía resulta ser el patrón de generalización supuesto (expresión de que todos los elementos del conjunto referencial comparten el segundo atributo) que permite hacer la inferencia.

Argumentación deductiva: se inicia con información que se acepta como verdadera y cuenta como dato; sobre este se aplica, tácita o explícitamente, una garantía considerada válida para inferir una aserción, la cual se considera, además de válida, necesaria. En el *argumento deductivo*, la aserción (proposición o idea que resulta de aplicar una regla general a un caso) es el elemento que se puede inferir de manera necesaria a partir de un dato (enunciado en el que se presenta el caso al cual se aplica la regla) y una garantía (la regla general).

Argumentación abductiva: se inicia con una enunciación en la que se expone una aserción, que se asume como verdadera o aceptable, sobre la cual se opera para inferir un dato o un dato y una garantía, en calidad de posibles y resultado de una exploración teórica o empírica. En el *argumento abductivo*, el dato o el dato y la garantía son los elementos que se infieren a partir de la aserción.

RUTA PARA IDENTIFICAR, RECONSTRUIR Y TIPIFICAR ARGUMENTOS

Como parte del conocimiento especializado sobre argumento y argumentación que consideramos debería tener un profesor de matemáticas, en nuestra investigación vimos pertinente que ellos cuenten con un procedimiento para identificar argumentos en transcripciones. Dado que no disponíamos de una propuesta de ruta, ajustada a nuestro marco de referencia, para satisfacer el interés citado, nos concentramos en proponer una. Esta se construyó mediante un esfuerzo investigativo cíclico de diseño – experimentación – análisis, tal como es caracterizado por Llinares (2014). La discusión con la comunidad puede ser vista como una forma de triangulación para evaluar su pertinencia.

La ruta consta de seis pasos (Tabla 1). A partir del Paso 4, la ruta puede repetirse varias veces, según el número de argumentos encontrados.

Tabla 1. Propuesta de ruta para identificar y caracterizar argumentos en una transcripción

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6
Delimitar el episodio y darse una idea de la argumentación	Contextualizar el episodio	Relatar la argumentación	Reconstruir el argumento en un fragmento	Determinar el tipo de argumento	Explicitar los elementos básicos del argumento

El *Paso* 1 comienza con delimitar el episodio de una transcripción[iii] en el que se entrevé la ocurrencia de argumentación en torno a un asunto bien determinado; sigue con la lectura completa y cuidadosa de la transcripción con miras a formarse una idea de lo sucedido en la interacción en lo que concierne a la argumentación.

En el *Paso* 2 se hace una contextualización, sustancial y sintética, que sirva como introducción del episodio extraído. La contextualización puede aludir, por ejemplo, a la situación o intención que motivó la interacción que constituye el episodio (solución de un problema, justificación de una idea, discusión en torno a algo), o a información específica que se tiene al comenzar el intercambio (una construcción, condiciones dadas en un problema, un resultado previo sobre el que se habla, etc.).

En el *Paso* 3 se escribe un relato corto que hace ostensivo lo que se ha interpretado del episodio en relación con la idea panorámica de la argumentación presente en él (e.g., presentación de ideas que sustentan posturas, presentación de acciones para inferir información). Tiene una doble finalidad: dar sentido como un todo a lo leído, seleccionando lo que se considera más relevante, y establecer un referente útil para dilucidar posibles diferencias de interpretación.

En el *Paso 4* se reinicia la lectura del episodio con miras, esta vez, a delimitar el fragmento de transcripción en el que se encuentra el primer argumento, esbozado o explícito en la argumentación. En las intervenciones se identifican con letras consecutivas las frases o expresiones de interés. Para dicho fragmento se escribe una interpretación sintética de lo que sucede en él. Se arma un párrafo

conformado por frases de la transcripción que son clave para reconstruir el argumento incluyendo la letra que las identifica. Se pueden editar frases en aras de dejar el texto lo más limpio y claro posible. Parte de esa edición es usar letra negrilla para destacar palabras que son indicadores de la presencia de una intención justificativa.

Como *Paso 5* se determinan los elementos básicos del argumento y se tipifica. El tipo de argumento depende de la dupla fragmento-síntesis: (i) Si en esta es evidente la intención de inferir algo de unas condiciones iniciales, empírica o teóricamente, se puede vislumbrar la presencia de un argumento inductivo o deductivo. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de los elementos en estos tipos de argumento se presentan enseguida. Para argumentos deductivos, las frases que le siguen a palabras como "por", "porque", "puesto que", "ya que", podrían ser garantía o dato; las expresiones que le siguen a palabras como "tenemos", "dado", "las condiciones son", podrían ser dato; las expresiones que le siguen a palabras como "luego", "por ende", "entonces", "se obtiene", podrían ser la aserción. Para los argumentos inductivos las expresiones "en estos casos pasa que…", "acá ocurre siempre que…" pueden indicar, respectivamente, tanto el dato como la aserción. (ii) Si en la dupla se evidencia la intención de inferir un dato que probablemente dio lugar a un hecho que se tiene, se puede vislumbrar la presencia de un argumento abductivo. Ejemplos de palabras que pueden ayudar en la identificación de lo que se infiere (dato) en este tipo de argumento son: "debería ser", "es necesario tener que", "siempre que".

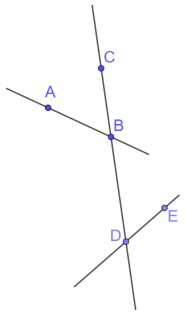
En el *Paso 6* se explicitan los elementos básicos del argumento y se rescriben según la interpretación del analista (en caso de necesidad), siempre referenciando la(s) frase(s) que se usa(n) (para ello sirve la letra con el que se etiqueta la frase). En este punto vale la pena precisar que son usuales los fragmentos en los que no todos los elementos de un argumento se han verbalizado. En este caso, se sugiere acudir a los insumos que permitan inferir el elemento no explícito. La contextualización (*Paso 2*), puede ser uno de tales insumos; por su contenido, puede proveer los datos o la aserción de un argumento. Cuando una garantía no la enuncia quien argumenta, esta usualmente se establece a partir de una mera interpretación; el dato y la aserción identificados se usan para conformar una proposición condicional que se indica como "garantía implícita".

Cuando la garantía es explícita puede ser enunciada de varias formas, todas ellas equivalentes desde un punto de vista semántico. Así las cosas, se puede enunciar de forma categórica (e.g., el punto de intersección de las mediatrices de dos segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales están también en la mediatriz del tercer segmento que se puede determinar con dichos tres puntos), no categórica (e.g., si están dados un triángulo y las mediatrices de dos de sus lados, entonces la intersección de tales mediatrices pertenece a la mediatriz del tercer lado), con nombres específicos, pero que aluden a objetos genéricos (e.g., si m y n son las mediatrices de los lados AB y BC del triángulo ABC y la intersección de las rectas m y n es el punto T, entonces T pertenece a la mediatriz del segmento AC) o con el nombre del teorema o de la definición correspondiente (e.g., Definición de mediatriz).

EJEMPLO DE ANÁLISIS

A continuación, ejemplificamos la ruta con dos argumentos que encontramos en sendos fragmentos de la trascripción de un diálogo entre los estudiantes Hans, Juan y Lina, ocurrido en un curso de geometría plana de primer semestre universitario cuando realizaban una tarea propuesta por el profesor. El enunciado es el siguiente: En la figura, la medida del ángulo ABC es 57° y los ángulos ABC y BDE son congruentes. ¿Por qué la recta BD no es perpendicular a la recta DE? (Figura 3).

Figura 3. Representación que acompaña el enunciado de la tarea



Paso 1: Delimitamos un episodio de transcripción, con sentido completo, en el que entrevemos la presencia de argumentos. Comienza con la primera reacción de un estudiante ante una pregunta y termina con una respuesta que satisface a todos.

1. Hans: Pues… la figura lo muestra así, miren las esquinas… no forman una cruz.
2. Lina: ¿Qué es lo que quiere decir que una recta sea perpendicular a otra?
3. Juan: Que en su intersección se forma un ángulo recto… Pero lo que tenemos que decir es por qué la recta *BD* no (enfatiza la voz) es perpendicular a la recta *DE*.
4. Lina: Pues… porque los ángulos eeehh… *BDE, ED…F, FDG* y *GDB* no son rectos (al referirse a los cuatro ángulos de vértice *D*, ha nombrado *F* y *G*, dos puntos que no están marcados en la figura).
5. Juan: ¿Y así no más? ¿Por qué el ángulo *BDE* no es recto?
6. Lina: ¡Fácil! Por ser congruente al ángulo *ABC*, mide lo mismo, mide 57, ya que ángulos congruentes tienen la misma medida.
7. Juan: Sí… ahora, nos falta decir por qué los otros tres ángulos no son rectos.
8. Lina: Porque se ve… No, mentiras. El opuesto por el vértice al ángulo *BDE* también mide 57.
9. Juan: Y los otros… cada uno, 180 menos 57.
10. Lina: Como los ángulos miden 57 y 123, no son rectos; para ser rectos, tendrían que medir 90.

Paso 2: Como contextualización, acompañamos el episodio con la pregunta del enunciado de la tarea propuesta por la profesora, que incluye una representación geométrica. Los estudiantes deben justificar que una recta no es perpendicular a otra, considerado ciertas condiciones dadas, información contenida en la representación y una norma del curso según la cual deben sustentar las afirmaciones con hechos geométricos o definiciones aceptados en clase.

Paso 3: Como resultado de una lectura completa y cuidadosa de la transcripción, con miras a formarnos una idea lo más clara posible de lo sucedido en la interacción en lo que concierne a la argumentación, proponemos el siguiente relato que, aunque no tiene detalles, esboza el episodio:

> En la interacción se presenta una argumentación encaminada a justificar que dos rectas no son perpendiculares. Esta comienza por explicitar lo que entienden por rectas perpendiculares y se configura mediante acciones para justificar que ninguno de los cuatro ángulos determinados por la intersección de las dos rectas en cuestión es recto.

Paso 4a: Una nueva lectura cuidadosa nos permite identificar la presencia de un primer argumento conformado por partes de las intervenciones [3] y [4]. Armamos un párrafo con las frases de la transcripción que son clave para reconstruirlo. Esto hace que suprimamos las descripciones propuestas por el transcriptor y hayamos unido en un solo texto las dos intervenciones, para enfocarnos en las verbalizaciones clave: "[…] lo que tenemos que decir es **por qué** la recta *BD* no es perpendicular a la recta *DE*. [3b] Pues **porque** los ángulos *BDE, EDF, FDG* y *GDB* no son rectos. [4]"

Sin duda hay una aserción para la cual se pretende dar un por qué ("tenemos que decir […] por qué […]") y está expresada de manera explícita; a menudo, nos toca conformamos con inferir la aserción a partir del contexto del intercambio. El uso de la expresión "Pues porque" nos indica la conexión entre la oración en la que aparece y la anterior; así, vemos que en [4] se dan datos respecto a los ángulos determinados por las rectas consideradas, como razones para la aserción. No es explícita la garantía que respalda la conexión de la aserción con los datos que la justifican.

Paso 5a: Estamos ante un argumento abductivo simple incompleto. Los estudiantes infieren una posible razón para sustentar la no perpendicularidad, a partir de las condiciones dadas.

Paso 6a: Los elementos del argumento son: *Dato*: Los ángulos *BDE, EDF, FDG* y *GDB* no son rectos. *Aserción:* La recta *BD* no es perpendicular a la recta *DE*. *Garantía:* implícita, aunque podemos entreverla: definición de rectas perpendiculares.

Paso 4b: Una nueva lectura del episodio, permite identificar otro fragmento conformado por frases de las intervenciones [5-6], en el que entrevemos lo que podría ser un segundo argumento. Puesto que el dato aportado como razón de la no perpendicularidad de las rectas no es considerado suficiente como evidencia, se cuestiona y, en consecuencia, se abre la oportunidad para hacer un argumento que sustente por qué dicho dato es verdadero. Los términos "por" y "ya que" presentes en la expresión discursiva de la intervención [6] juegan un papel importante en el momento de hacer el análisis funcional; ambos nos indican la presencia de sendas razones. Centramos la atención en las siguientes frases: "¿**Por qué** el ángulo *BDE* no es recto?" [5b] **Por ser** congruente al ángulo *ABC*, mide lo mismo [que el ángulo *ABC*] […] **ya que** ángulos congruentes tienen la misma medida" [5b].

Paso 5b: Estamos ante un argumento deductivo simple. A partir de una información con la que se cuenta (los ángulos *ABC* y *BDE* son congruentes), Lina afirma que tales ángulos miden lo mismo, exponiendo la definición de congruencia que conforma el puente entre la información dada y lo que afirma

Paso 6b: Con base en lo anterior, los elementos del argumento son: *Dato*: Los ángulos *BDE* y *ABC* son congruentes. *Aserción:* el ángulo *ABC* mide lo mismo que el ángulo *BDE*. *Garantía:* Ángulos congruentes tienen la misma medida.

Aun cuando la intención de los estudiantes, al parecer, era argumentar por qué el ángulo *BDE* no es recto, la aserción a favor de la cual argumentaron es que los ángulos *BDE* y *ABC* miden igual. En ese sentido, si bien la línea 5 explícitamente no indica que el ángulo *BDE* no es recto, sí genera información clave para poder inferirlo.

Por razones de espacio no podemos explicitar la ruta seguida para identificar y caracterizar los demás argumentos presentes en el fragmento que van en esa dirección. Pero resumimos el resultado obtenido al seguirla. Para llegar a concluir que el ángulo *BDE* no es recto se valen de dos datos incontrovertibles –los ángulos *BDE* y *ABC* tienen la misma medida (obtenido como conclusión en el argumento simple expuesto antes) y el ángulo *ABC* mide 57 (proporcionado en el enunciado de la tarea)– para justificar la aserción "el ángulo *BDE* mide 57" [6b]. La garantía que permite el paso de los datos a la aserción es la transitividad de la relación de igualdad. Luego construyen otro argumento en el que se valen de dos datos –el ángulo *BDE* mide 57 (aserción que acaban de obtener [6b]) y 57 es diferente a 90– para justificar la aserción no explícita: el ángulo *BDE* no mide 90. Después, usan como dato la aserción que acaban de obtener (el ángulo *BDE* no mide 90), para sustentar la aserción "el ángulo *BDE* no es recto" [5b]; la garantía que autoriza el paso del dato a la aserción es "la definición de ángulo recto".

Los estudiantes se proponen justificar que los otros tres ángulos de vértice *D* no son rectos. Se centran en establecer las medidas de tales ángulos con miras a contrastarlas con la medida que deberían tener si fueran rectos. (Para hacer más fácil referirse a los ángulos vamos a tener en cuenta

la intervención [4]; así, los ángulos *BDE* y *EDF* son par lineal y por tanto suplementarios y los ángulos *FDG* y *GDB* son par lineal.) Dicen que el ángulo *FDG* mide 57, el ángulo *EDF* mide 123, el ángulo *GDB* mide 123. Esto les permite sustentar que dichos ángulos no son rectos. Se refieren a la definición de ángulo recto como garantía.

COMENTARIOS FINALES

Como señalamos previamente, hemos implementado la ruta descrita en tareas formuladas a estudiantes que se forman como profesores de matemáticas y la vemos como promisoria para apoyarlos en su formación profesional, pues les permite seguir en detalle la argumentación presente en una interacción en clase de geometría, a partir de la transcripción. De hecho, los análisis realizados ejemplifican aspectos discutidos con los profesores, principalmente sobre claves discursivas que dan indicios de argumentos, sobre la relación entre lo expuesto en el dato y en la aserción con la enunciación de la garantía y sobre el tipo de argumentación matemática, constituyéndose en indicios del cumplimiento del objetivo investigativo y un aporte importante del estudio El ejercicio de identificar argumentos es una oportunidad para que los profesores hagan operativa la definición de argumento que les proponemos, así como la tipología de argumentación/argumento. Adicionalmente, al reconocer argumentos emitidos en clase, podrán ayudar a sus estudiantes a desarrollarlos completa y correctamente y a darse cuenta si la tarea les permitió argumentar.

La propuesta guarda alguna familiaridad con la sugerida por Knipping y Reid (2015; 2019); estos autores intentan capturar, en esquemas complejos, encadenamientos de argumentos; sin embargo, aunque proponen un procedimiento en tres pasos, que puede apoyar el ejercicio, no entran en detalles sobre cómo identificarlos en una interacción comunicativa, a partir de indicadores discursivos, asunto que consideramos un paso previo necesario para tipificar argumentos. Alsina, et al. (2021) también se ocupan de esquematizar un procedimiento de identificación de argumentos. Pero, debido a que la investigación se hace con niños de primera infancia, los autores centran los análisis en la "situación argumentativa", más que en la caracterización específica de los argumentos formulados por los niños; proponen, entonces, identificar en las transcripciones quiénes hablan, sobre qué, qué dicen, para qué lo dicen, por qué lo dicen y cómo lo dicen, dejando en segundo plano la búsqueda de indicios discursivos de aserción y razones en los argumentos que proponen los estudiantes.

Otras investigaciones se valen de marcos de referencia sobre la argumentación, que guardan relación al propuesto en nuestro trabajo; en esos reportes se expone el resultado de la identificación de argumentos que los autores hacen como analistas, sin entrar en detalles sobre cómo procedieron para identificar fragmentos con visos argumentativos y cómo los reconstruyeron para ser analizados. Este es el caso de los estudios de Krummheuer (2015), Metaxas (2015), Boero et al., (2018) y Larios et al., (2017), quienes centrar sus comunicaciones en la tipificación de argumentos, más que en la identificación. La explicitación del procedimiento seguido para identificar e interpretar los argumentos seguramente apoyaría a profesores e investigadores nóveles. Es por esta razón por lo que en la ponencia ponemos el foco en explicitar el ejercicio analítico, más que en discutir los resultados.

Referencias

Alsina, A., Cornejo-Morales, C. y Salgado, M. (2021). Argumentación en la matemática escolar infantil: Análisis de una actividad STEM usando la situación argumentative en conexión interdisciplinar. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 141-159. https://doi.org/10.35763/aiem20.3999

Boero, P., Fenaroli, G. y Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. En A. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving. ICME-13 Monographs* (pp. 49-67). Springer.

de Sá Ibraim, S. y Justi, R. (2016). Teachers' knowledge in argumentation: Contributions from an explicit teaching in an initial teacher education program. *International Journal of Science Education.* DOI: 10.1080/09500693.2016.1221546.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. y Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-368). Springer.

Knipping, C. y Reid, D. A. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.) *Compendium for early career researchers in mathematics education*. (pp. xx-xx). Springer.

Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing Argumentation Structures: A Perspective on Proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 75-101). Springer.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, y N. Presmeg, *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 51-74). Springer.

Larios, V., Pino-Fan, L. R. y González. N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 39-57. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i12.143

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. En G. Hanna, *Proof and proving in mathematics* (pp. 305–325). Springer.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, nº extraordinario marzo, 31-51.

Metaxas, N. (2015). Mathematical Argumentation of students participating in a mathematics – information technology project. *International Research in Education*, *3*(1), 82 – 92.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas, lenguaje, ciencias y ciudadanas.* Autor.

Molina, O. (2019). *Sistemas de normas que favorecen la producción de argumentos: un curso de Geometría del Espacio como escenario de investigación*[Tesis de Doctorado no publicada]. Universidad de Los Lagos.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Autor.

Stylianides, A. y Ball, D. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 307-332. DOI: 10.1007/s10857-008-9077-9.

---

[i] Este documento es producto de la investigación financiada por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia (Proyectos DMA-587-22 y DMA-615-23)

[ii] Toulmin incluye seis posibles componentes de un argumento: los tres básicos y otros tres –respaldo de la garantía, matizador modal y condición de excepción a la aserción–. Aquí nos concentramos en los básicos.

[iii] La transcripción debe exponer, de la manera más fiel posible, las verbalizaciones y acciones no verbales ocurridas en la interacción. Nosotros, por ejemplo, usamos los paréntesis redondos "( )" principalmente para relatar acciones no verbales; los paréntesis angulares "[ ]" para hacer precisiones o elisiones cuando lo vemos relevante o conveniente (e.g., indicar a qué refiere un deíctico, completar una expresión con la que se designa un objeto pero no se explicita de qué objeto se trata).

CONEXIONES MATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE ÁREA POR ESTUDIANTES DE 13-14 AÑOS[i]

Mathematical connections in solving an area tasks by 13-14 year-old students

Caviedes, S[a]., De Gamboa, G[b]. y Badillo, E[b].

[a] Universidad de Los Lagos, [b]Universitat Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio busca identificar las conexiones matemáticas que establecen estudiantes de secundaria cuando resuelven tareas de área. Siguiendo un enfoque de tipo cualitativo y, mediante el uso de métodos mixtos, se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver una tarea de área de un cuestionario. Los resultados muestran que los estudiantes que logran resolver con éxito la tarea establecen conexiones intra-matemáticas entre distintos objetos matemáticos, lo que les permite coordinar de manera simultánea diferentes representaciones, propiedades y procedimientos.

Palabras clave: *conexiones matemáticas, área de figuras planas, métodos mixtos*

Abstract

This study seeks to identify the mathematical connections that secondary school students establish when solving area tasks. Following a qualitative approach and using mixed methods, the written justifications, and procedures that students use to solve an area task from a questionnaire are analyzed. The results show that students who manage to successfully solve the task establish intra mathematical connections between different mathematical objects, allowing them to simultaneously coordinate different representations, properties, and procedures.

Keywords: *mathematical connections, area of flat figures, mixed methods*

INTRODUCCIÓN

El término conexión matemática puede hacer referencia a una relación entre ideas matemáticas, una relación que construye el alumno, o a un proceso que forma parte de la actividad de hacer matemáticas en el aula (Businskas, 2008), entre otras. Al establecer conexiones matemáticas, los estudiantes desarrollan competencias clave, por ejemplo, vincular el conocimiento conceptual y procedimental (Hiebert y Carpenter, 1992) o reconocer múltiples representaciones de un mismo concepto (Businskas 2008; De Gamboa et al., 2022), competencias fundamentales para resolver con éxito tareas de área. Diversos estudios han enfatizado los aspectos conceptuales a desarrollar para mejorar la forma en que los estudiantes resuelven tareas de área y su abanico de estrategias, (p.e., Clements et al., 2018; Zacharos, 2006), sin embargo, aún no está claro cómo se establecen las conexiones matemáticas en un proceso de resolución. Así, este estudio es una aproximación hacia aquellas conexiones matemáticas necesarias para resolver con éxito tareas de área y busca responder a la pregunta ¿qué tipo de conexiones matemáticas establecen los estudiantes para resolver con éxito tareas de área? Para responder a esta pregunta, se busca caracterizar las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes en la resolución exitosa de una tarea de área.

MARCO TEÓRICO

Conexiones matemáticas

Existe consenso en la literatura al identificar dos grandes tipos de conexiones: las conexiones intra-matemáticas y las conexiones extra-matemáticas. Las conexiones intra-matemáticas se forman

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2023). Conexiones matemáticas en la resolución de tareas de área por estudiantes de 13-14 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 187–194). SEIEM.

dentro del contexto de las matemáticas y, en concordancia con De Gamboa y Figueiras (2014) se diferencian dos tipos: conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual y conexiones intra-matemáticas relacionadas con procesos. Las primeras se refieren a una relación entre diferentes objetos matemáticos. Las segundas son conexiones que enfatizan explícitamente procesos transversales a la actividad matemática (p.e., heurísticas de resolución de problemas). Debido al objetivo de este estudio, nos centramos en las conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual. Para esto, tomamos en consideración el modelo propuesto por Rodríguez-Nieto et al. (2022) y refinado por De Gamboa et al. (2022), quienes introducen la noción de conexión elemental. En términos generales, las conexiones intra-matemáticas pueden entenderse como relaciones entre dos objetos matemáticos O_1 y O_2. En muchos casos, estas conexiones son desencadenadas por otras conexiones, y la coordinación entre ellas puede entenderse, a su vez, como una conexión más compleja (De Gamboa et al., 2022). Por tanto, las conexiones intra-matemáticas pueden entenderse como una red de conexiones más simples entre dos objetos O_1 y O_2, que llamamos conexiones elementales (De Gamboa et al., 2022). Se toman en consideración las siguientes categorías de conexiones elementales:

Representación equivalente: La conexión elemental se establece entre dos representaciones de un mismo objeto matemático ($R_1 \rightarrow R_2$). Relaciona representaciones equivalentes (tratamientos dentro de un mismo registro de representación). Por ejemplo, cuando un alumno conecta el trazado auxiliar de líneas con la visualización de unidades figurales que componen una figura para resolver una determinada tarea (Businskas, 2008).

Representación alternativa: La conexión elemental se establece entre dos representaciones del mismo objeto matemático ($R_1 \rightarrow R_2$). Relaciona representaciones alternas (cambio de registro de representación). Por ejemplo, representar el área geométrica y simbólicamente. Es propuesta por Businskas (2008) en relación con la noción de transformación de conversión (Duval, 2017).

Procedimiento: La conexión elemental se establece entre un concepto y un procedimiento ($C \rightarrow P$) que puede utilizarse al tratar el concepto. Por ejemplo, el uso de la descomposición en unidades congruentes para trabajar el concepto de superficie (Dolores-Flores y García-García, 2017; Businskas, 2008).

Implicación: La conexión elemental se establece entre dos proposiciones ($PR_1 \rightarrow PR_2$), se refiere a implicaciones o argumentos *si-entonces*. Por ejemplo, si un rectángulo tiene una longitud l y una anchura w, entonces su área es $l \times w$. Así, si una forma es un cuadrado, entonces su área se puede encontrar multiplicando la longitud de un lado por sí misma (Businskas, 2008).

Justificación: La conexión elemental se establece entre dos proposiciones ($PR_1 \rightarrow PR_2$), donde (PR_1) representa una premisa y (PR_2) una conclusión que justifica prácticas matemáticas. Por ejemplo, dos polígonos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes. Por lo tanto, dos polígonos congruentes tienen áreas iguales (De Gamboa et al. 2022).

Elementos que intervienen en la resolución de tareas de área

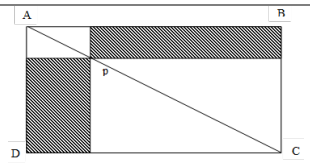
Sarama y Clements (2009) señalan que la enseñanza y construcción del área y sus procesos de medición implican el aprendizaje y construcción de diversos conceptos, propiedades y procedimientos, tales como el área como atributo, la unidad de medida, la conservación, la acumulación y aditividad, la transitividad, la estructuración espacial, y la partición equitativa. La comprensión y coordinación de los elementos mencionados, podría potenciar una comprensión más sólida en los estudiantes (Barret et al., 2017). En este sentido, Sarama y Clemens (2009) señalan que el desarrollo de conceptos, propiedades y procedimientos es de naturaleza interactiva, esto es, que se refuerzan mutuamente (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009). Así, Clements et al. (2018) sostienen que los procedimientos pueden aprenderse de manera significativa si están vinculados al conocimiento conceptual, o de memoria si son de naturaleza mecánica. En este

sentido, diversos estudios reportan que los estudiantes de los primeros años de Educación secundaria presentan dificultades al resolver tareas de áreas (Caviedes et al. 2020; Douady y Perrin-Glorian, 1989; Kamii y Kysh, 2006), relacionadas con una comprensión limitada de los elementos que subyacen al uso de fórmulas, y a escasas estrategias de resolución. Atendiendo dichas dificultades, Caviedes et al. (2021) proponen una caracterización de distintos significados parciales del área, a fin de identificar aquellos objetos que deben ser coordinados en los procesos de medición de áreas. Otros estudios ponen en evidencia las dificultades de los estudiantes con la propiedad de conservación del área (Kospentaris et al., 2011, Zacharos, 2006), cuyo estudio implica un conocimiento amplio sobre la variedad de procedimientos que puede admitir una tarea, además del estudio y análisis de otras propiedades geométricas (Sarama y Clements, 2009), así como el uso de diferentes registros de representación y sus transformaciones (Duval, 2017).

MÉTODO

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque mixto exploratorio y confirmatorio (Rocco et al., 2003). Se utiliza un enfoque cualitativo y un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) para identificar las conexiones matemáticas que se establecen en las resoluciones de los estudiantes. Además, se utiliza un enfoque cuantitativo y un análisis estadístico implicativo (Gras et al., 2008) para profundizar en las relaciones entre los objetos matemáticos definidos en el análisis cualitativo. Se realiza la recogida de datos en el tercer trimestre del curso escolar 2018-2019. Los participantes fueron 83 estudiantes de 13-14 años de un centro concertado de España. Se diseñó un cuestionario semiestructurado con siete tareas de medida y comparación de áreas de figuras planas que debían resolverse de forma anónima, individual y por escrito, en una única sesión de 90 minutos. Se pidió a los estudiantes justificar por escrito sus resoluciones. Con el fin de comprobar la claridad del cuestionario, y eliminar ambigüedades, se llevó a cabo una prueba piloto que permitió realizar mejoras en los enunciados de las tareas y en el formato global del cuestionario. Las tareas del cuestionario se ordenaron desde aquellas que admiten un tratamiento únicamente cualitativo (sólo procedimientos de naturaleza geométrica), hacia aquellas que admiten un tratamiento cualitativo y cuantitativo, con procedimientos de naturaleza numérica y geométrica de forma complementaria (Douady y Perrin-Glorian, 1989). Así, el uso de fórmulas se incorpora gradualmente y como último paso. En esta comunicación se presenta el análisis de las resoluciones a la Tarea 6 (Tabla 1).

Tabla 1. Tarea propuesta al grupo de estudiantes.

Enunciado	**Representación gráfica de la tarea**
Tarea 6: Por el punto *p* **de la diagonal** AC **del rectángulo** ABCD **se trazan las paralelas de los lados de esta figura.** Así, se obtienen dos rectángulos sombreados. **¿Cuál de los dos rectángulos sombreados tiene mayor área? ¿cómo los sabes?**	 (Adaptado de Castelnuovo, 1981)

Análisis cualitativo de las resoluciones de los estudiantes

Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) para identificar las conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual que establecen los estudiantes. Se utilizan categorías de análisis previamente definidas y adaptadas. Dichas categorías se corresponden con los objetos matemáticos de Caviedes et al. (2021) y que presentan una reinterpretación de elementos matemáticos señalados por Sarama y Clements (2009) -Tabla 2-. Las resoluciones de los estudiantes se codifican deductivamente utilizando el software MAXQDAplus. Cada objeto matemático de la Tabla 2 contiene códigos diferentes. Un grupo de códigos forma una categoría. Por ejemplo, la categoría procedimiento (P) contiene seis códigos (P1... P6) que detallan diferentes procedimientos utilizados

por los estudiantes. Además, se consideran las aportaciones de Duval (2017). Dado que el objetivo del estudio es identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes necesitan establecer para resolver con éxito la tarea, el énfasis está en aquellas resoluciones que responden con éxito a la demanda de la tarea. En total se analizaron los protocolos escritos de 41 estudiantes (27 estudiantes responden con dificultad y 15 estudiantes no responden la Tarea). En esta comunicación ejemplificamos el proceso de análisis con los protocolos de dos estudiantes, pues sus resoluciones se consideran representativas del conjunto de estudiantes que resuelve con éxito la Tarea 6 (41 estudiantes).

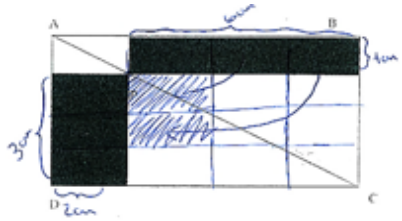
Tabla 2. Categorías de análisis para la Tarea 6.

Categorías	Descriptor
Procedimientos (P)	(P1) Comparar dos o más superficies de manera directa e indirecta
	(P2) Descomponer dos o más superficies de manera conveniente, gráfica o visualmente
	(P3) Ejecutar movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras
	(P4) Estructurar superficies en filas y columnas considerando las medidas de longitud
	(P5) Calcular áreas de manera aditiva contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie
	(P6) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas
Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación
	(Pp2) Transitividad
	(Pp3) Acumulación y aditividad
	(Pr1) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo
	(Pr2) Dos figuras equivalentes tienen áreas iguales
Conceptos (C)	(C1) Estructuración espacial
	(C2) Unidades de medida no estándar
	(C3) Cantidad de superficie
Representaciones (R)	(R1) Escrita: uso de adjetivos como ‘igual’, ‘más delgada’ ‘más ancha’, ‘el doble’, ‘la mitad’, en relación a las superficies.
	(R2) Manipulativa: uso de objetos físicos (tangram, recortables)
	(R3) Geométrica: uso del trazado auxiliar de líneas para comparar y/o estimar cantidades de superficie.
	(R4) Simbólica: conjunto de los números reales para comparar dos o más superficies o calcular su área. Uso de expresiones algebraicas como el teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo $h^2 = a^2 + b^2$

La Figura 1 muestra el proceso de resolución seguido por la estudiante 12 (E.12) y el estudiante 13 (E.13). El E.13 establece diferentes conexiones elementales de procedimiento. La primera conexión se establece entre el concepto de estructuración espacial (C1) y el procedimiento de estructuración en filas y columnas en relación con las medidas de longitud (obtenidas por medición directa) del rectángulo grande (P4), pues E.13 utiliza las dos dimensiones de los rectángulos negros como base para la división del rectángulo grande en rectángulos de 2 cm alineados en 4 filas y 4 columnas. La segunda conexión se establece entre el concepto de unidades de medida no estándar (C2) y el procedimiento de obtención del área aditivamente (P5). Una conexión elemental de implicación entre un proceso de visualización y una proposición (Pr2) permite a E.13 concluir una equivalencia de áreas para los rectángulos negros. Esta última también está asociada a una conexión elemental de justificación entre la propiedad de conservación (Pp1) y el procedimiento de comparación de áreas que dicha propiedad justifica. Por su parte, la E.12 establece tres conexiones elementales de procedimiento. La primera conexión se establece entre el concepto de cantidad de superficie (C3) y

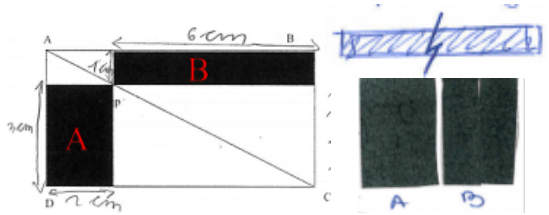
el procedimiento de medida directa e indirecta -mide dimensiones lineales y pone en correspondencia los valores utilizando la fórmula- (P6). La segunda conexión se establece entre el concepto de cantidad de superficie (C3) y el procedimiento de descomponer la superficie de forma conveniente (P2). La tercera conexión se establece entre el concepto de cantidad de superficie (C3) y el procedimiento que involucra movimientos de rotación y traslación (P3). Esto con el fin de concluir la equivalencia de superficies mediante una conexión elemental de implicación entre un proceso de visualización y una proposición (Pr2). Como en el caso del E.13, la E.12 establece una conexión elemental de justificación entre la propiedad de conservación (Pp1) y el contexto de comparación de áreas al que se aplica. Además, ambos estudiantes establecen una conexión elemental de representación equivalente entre un proceso de visualización (R3) y la posterior descomposición de las figuras (R3). Se trata de una transformación de tratamiento dentro de un registro de representación de tipo geométrico, mediado por las líneas auxiliares de las representaciones gráficas de las figuras y el trazado auxiliar de líneas que permite realizar descomposiciones estrictamente homogéneas sobre los rectángulos. El uso del registro de representación de tipo geométrico (R3), escrito (R1) y simbólico de tipo numérico (R4), permite a los estudiantes realizar una transformación de conversión y, por tanto, una conexión elemental de representación alternativa. En el caso del E.13, la conexión se establece cuando utiliza el trazado auxiliar de líneas (R3) para descomponer el rectángulo grande y obtener su área mediante un proceso aditivo (R4). En el caso de la E.12, la conexión se establece cuando utiliza, además, el trazado auxiliar de líneas (R3) para descomponer el rectángulo negro y la fórmula del área (R4), para comprobar la equivalencia de áreas.

Figura 1. Resoluciones para la Tarea 6 del cuestionario.



E.13 *"Sus áreas son iguales porque si dividimos los rectángulos negros en rectángulos iguales hay la misma cantidad de estos rectángulos. También uno es el doble de ancho y otro el doble de largo, su área es 6cm²".*

E.12 *"Sus áreas son iguales, he calculado lo que mide cada uno y luego he calculado el área que es 6 cm². He llegado a la conclusión que son exactamente iguales, lo que pasa es que su forma es diferente. He cortado el rectángulo, por la mitad y lo he puesto encima y al lado del otro".*



Análisis cuantitativo de las resoluciones de los estudiantes

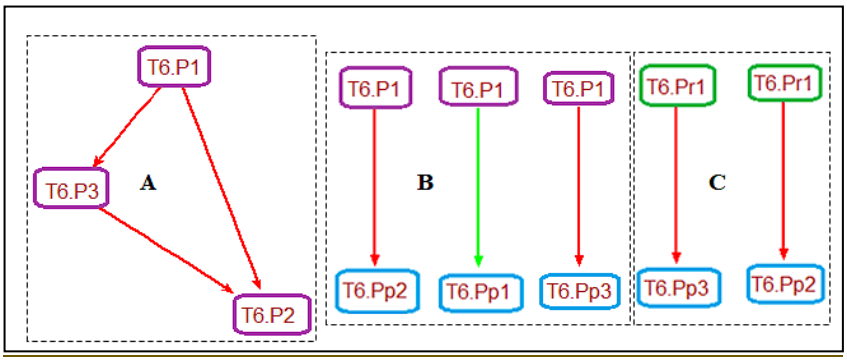
Para profundizar en el análisis de las conexiones se realiza un análisis estadístico implicativo -SIA- (Gras et al., 2008). Este análisis permite identificar y organizar las relaciones de cuasi implicación mediante un gráfico con flechas que relaciona las variables con las implicaciones más fuertes. La cuasi implicación entre las variables A → B indica que, si los estudiantes responden afirmativamente a A, es probable que respondan a B. En este estudio, se utiliza la flecha → para indicar una relación de cuasi implicación según el significado descrito anteriormente. La doble flecha ↔ indica una relación de cuasi implicación recíproca. En lo sucesivo, se utiliza el término implicación en lugar de cuasi implicación, en aras de la simplicidad. Las variables consideradas para el análisis implicativo son de tipo binario y coinciden con las presentadas en la Tabla 2. Se asigna un valor de 1 a cada variable movilizada en las respuestas de los estudiantes y un valor de 0 a cada variable no movilizada. Se utiliza el paquete C.H.I.C versión 0.27 en la consola R versión 3.5.2. Para diferenciar cada variable movilizada se utilizan colores. Así, los procedimientos (P) se ilustran en morado, las propiedades en celeste (Pp), las proposiciones (Pr) en verde y las

representaciones (R) en naranja. Los gráficos presentados contemplan la totalidad de estudiantes que resuelve con éxito la Tarea 6 (41 estudiantes). Los resultados se focalizan en este análisis.

RESULTADOS

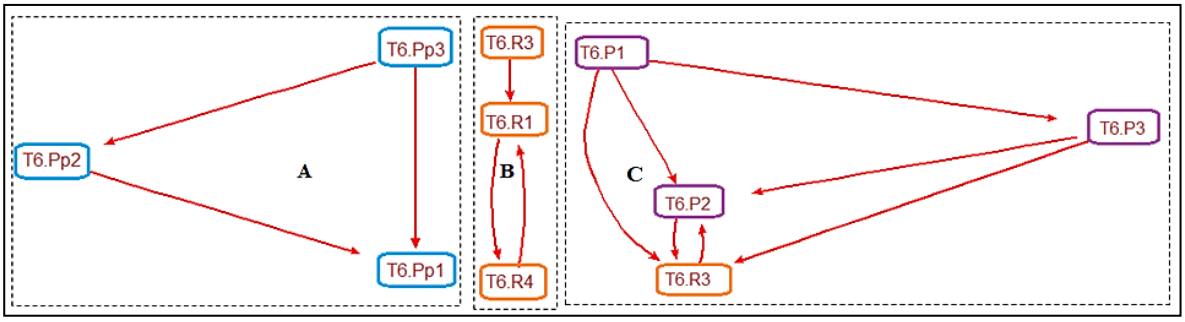
Los gráficos implicativos de la Figura 2 muestran diferentes relaciones con un 98% de significancia indicada por las flechas rojas y 95% por la flecha verde. La Figura 2A muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de implicación entre los procedimientos de comparación, descomposición y reorganización de superficies (P1→P2/P1→P3). Los estudiantes que utilizan este último procedimiento establecen una conexión elemental de implicación con el procedimiento de descomposición de superficies (P3→P2). La Figura 2B muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de justificación entre el procedimiento de comparación de superficies y las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad (P1→Pp1/ P1→Pp2/ P1→Pp3), lo que indica que dicho procedimiento desencadena el uso de las propiedades implicadas en la medición de áreas. La Figura 2C muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de justificación entre una proposición (todo triángulo es equidescomponible con un paralelogramo) y las propiedades de transitividad y acumulación y aditividad (Pr1→Pp2/ Pr1→Pp3), indicando que el uso de dicha proposición justifica ciertas propiedades.

Figura 2. Relaciones implicativas entre procedimientos, propiedades y proposiciones para la Tarea 6.



Los gráficos implicativos de la Figura 3 muestran relaciones con un 98% de significancia indicada por las flechas rojas. La Figura 3A muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de implicación entre la propiedad de acumulación y aditividad, y la propiedad de conservación y transitividad (Pp3→Pp1/Pp3→Pp2). Así, se evidencia que el uso de la propiedad de acumulación y aditividad (Pp3) es un aspecto clave, y precursor, para que los estudiantes sean capaces de utilizar la conservación (Pp1) y la transitividad (Pp2) al resolver tareas de medición de áreas.

Figura 3. Relaciones implicativas entre propiedades, representaciones y procedimientos para la Tarea 6.



La Figura 3B muestra que los estudiantes establecen una conexión elemental de representación alternativa entre el registro de representación de tipo geométrico y de tipo escrito (R3→R1). Esto indica que aquellos estudiantes que utilizan el trazado de auxiliar de líneas en sus resoluciones justifican por escrito lo que hacen en la Tarea 6. El registro de representación de tipo escrito y simbólico se conectan recíprocamente mediante una conexión elemental de representación

alternativa. La Figura 3C muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de implicación entre los procedimientos de comparación, descomposición y reorganización de superficies, y el registro de representación de tipo geométrico (P1→R3/P2→R3/R3→P2/P3→R3). Así, para que estos procedimientos se ejecuten los estudiantes necesitan visualizar las unidades figurales que componen una figura, y realizar el trazado auxiliar de líneas para descomponerla.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados sugieren que los estudiantes que logran responder con éxito a la demanda de la Tarea 6 establecen diferentes conexiones elementales. El establecimiento de conexiones elementales de representación equivalente/alternativa permite la coordinación de los registros de representación de tipo geométrico y simbólico, lo que se presenta como un aspecto clave en la resolución de las tareas, pues permite a los estudiantes realizar descomposiciones y transformaciones sobre las figuras. Esto último permitiría a los estudiantes comparar áreas y calcularlas (Caviedes et al., 2021). Así, el establecimiento de estas conexiones elementales posibilita a los estudiantes reconocer y coordinar múltiples representaciones de un mismo concepto (Businskas 2008; De Gamboa et al., 2022), y hacer más robustas sus resoluciones (Barret et al., 2017). Los procedimientos relacionados con la comparación, descomposición y reorganización de superficies están conectados entre sí mediante conexiones elementales de implicación, lo que subraya la importancia del uso coordinado de procedimientos de naturaleza geométrica y numérica para resolver con éxito tareas de área (Caviedes et al., 2020, 2021; Douady y Perrín-Glorian, 1989). El análisis implicativo permite ilustrar la manera en que los procedimientos se coordinan en un proceso de resolución, evidenciado que hay procedimientos que anteceden a otros. Los procedimientos mencionados, a su vez, se asocian a conexiones elementales de justificación, específicamente, cuando las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad se aplican a contextos de comparación y descomposición de superficies. Esto sugiere que las conexiones elementales de justificación permiten a los estudiantes visualizar figuras geométricas y realizar descomposiciones sobre ellas. El análisis implicativo ilustra la manera en que las distintas propiedades se conectan, evidenciando que la acumulación y aditividad, en este tipo de tareas, desencadena el uso de la conservación del área y la transitividad. Esto sugiere que las propiedades geométricas deben abordarse de manera conjunta en la resolución de tareas de área (Sarama y Clements, 2009). Aunque diversas investigaciones abordan las dificultades de los estudiantes en la comprensión de la propiedad de conservación del área (Kospentaris et al., 2011, Zacharos, 2006) no lo hacen relacionando dicha propiedad con otras, lo que pone de manifiesto la relevancia de este estudio. Estos resultados son un ejemplo de la importancia de las conexiones en el aprendizaje de los procesos de medición de áreas, y apuntan a la necesidad de seguir explorando cómo dichas conexiones pueden ayudar a los estudiantes a resolver con éxito tareas complejas.

Referencias

Barrett, J. E., Clements, D. H., y Sarama, J. (2017). Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume. En B. Herbel-Eisenmann (Ed.), *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 16, pp. 254). National Council of Teachers of Mathematics.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished dissertation, Faculty of Education, Simon Fraser University.

Castelnuovo, E. (1981). *La geometría*. Ketres.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Mathematical objects that configure the partial area meanings in task-solving. *International Journal in Mathematics Education, Science and Technology*. 1-20. https://10.1080/0020739X.2021.1991019

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(68), 1015-1035. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a09

Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A., y Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 23-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.004

De Gamboa, G., Caviedes, S., y Badillo, E. (2022). Mathematical connections and the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. *Mathematics, 10*(21), 1-24. https://doi.org/10.3390/math10214010

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). SEIEM.

Dolores-Flores, C., y García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Douady, R., y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387–424.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., y Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). Macmillan.

Kamii, C., y Kysh, J. (2006). The difficulty of "length x with": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior, 25,* 105-115. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001

Kospentaris, G., Spyrou, P., y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 105-127. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.

Rocco, T., Bliss, L., Gallagher, S., Pérez, A., y Perez-Prado, A. (2003). Taking the next step: Mixed methods taking the next step: Mixed methods research in organizational systems research in organizational systems. *Information Technology, Learning, and Performance Journal, 21*(1), 19-29.

Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2364-2390. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Smith, J., Males, L. y Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of 546 area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 239–270. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930 548

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 224-239. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003

[i] Estudio financiado por ANID- Chile/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 y GIPEAM, SGR-2017-101.

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN POR UN ALUMNO DE 5º DE PRIMARIA CON SÍNDROME DE ASPERGER

Solving a generalisation problem by a 5th grade student with Asperger Syndrome

Chico, A[a]., Climent, N.[a], Gómez-Hurtado[a] y Polo-Blanco, I.[b]

Universidad de Huelva[a], Universidad de Cantabria[b]

Resumen

El presente estudio describe la resolución de un problema de generalización por un alumno de 5º de educación primaria diagnosticado con Trastorno del Espectro Autista - Síndrome de Asperger. A partir de la observación y videograbación de la resolución del estudiante, se analiza el proceso seguido atendiendo a la relación funcional en la que se enfoca, el material TEACCH (organizador gráfico y piezas de gomaeva) que emplea y el nivel de sofisticación al generalizar que manifiesta, así como posibles relaciones entre estos elementos. El análisis de los resultados evidencia distintos niveles de sofisticación a medida que se va abordando cada término de la secuencia, encontrándose más evidencias del uso del organizador gráfico en los niveles superiores. Se reflexiona, además, sobre cómo las necesidades y habilidades vinculadas al Síndrome de Asperger pueden estar condicionando las fases de resolución.

Palabras clave: *generalización, resolución de problemas, Síndrome de Asperger, material TEACCH, inclusión.*

Abstract

This study reports the generalisation problem-solving process carried out by a primary education student diagnosed with Austism Spectrum Disorder- Asperger Syndrome. Through observation and videorecording, the student's solving process is analysed regarding the functional relationships addressed, the TEACCH material employed (graphic organiser and Eva foam pieces) and the level of sophistication in generalisation deployed. The results evidence differentiated levels of generalisation as each sequence term are tackled, finding more evidence of the use of the organiser in the higher levels. The discussion reflects on the associated characteristics to the Asperger Syndrome might be conditioning the solving process and solving phases.

Keywords: *generalisation, problem-solving, Asperger Syndrome, TEACCH material, inclusion.*

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación se enmarca en el desarrollo de una tesis doctoral dirigida a ahondar en las estrategias pedagógicas que benefician al alumnado con Síndrome de Asperger en la resolución de problemas. Con objetivo de trasladar los resultados de la investigación al aula ordinaria, colaborando con docentes de educación primaria, se puso en marcha un taller de resolución de problemas heurísticos. A través de 12 sesiones se empleó material TEACCH para trabajar los diversos heurísticos (ensayo y error, marcha atrás, submeta y generalización). Este estudio se centra en un problema de generalizar llevado a cabo por uno de los niños del taller.

Los niveles de sofisticación, que han sido foco de estudio en investigaciones previas, permiten analizar la generalización a partir de funciones lineales de estudiantes de primaria con desarrollo típico (Hunter y Miller, 2021; Stephens et al., 2017) y autismo (Goñi-Cervera et al., 2022). Nuestra investigación pretende contribuir a describir el desarrollo del álgebra temprana analizando los niveles

Chico, A., Climent, N., Gómez-Hurtado I. y Polo-Blanco, I. (2023). Resolución de un problema de generalización por un alumno de 5 de primaria con Síndrome de Asperger. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 195–202). SEIEM.

de sofisticación al generalizar que evidencia un estudiante de tercer ciclo de educación primaria diagnosticado con Síndrome de Asperger cuando se emplean organizadores gráficos y material manipulativo. Estudiamos el papel de la generalización considerando su importancia en el desarrollo del sentido algebraico en estudiantes de esta etapa educativa (Real Decreto 157/2022), contextualizando el aprendizaje en una situación de resolución de problemas.

MARCO TEÓRICO

Generalizar refiere el proceso de descubrir las regularidades observadas entre un conjunto de casos (Callejo y Zapatera, 2017). Nos interesa describir cómo el alumnado de educación primaria generaliza de distintas formas, expresando de manera verbal o simbólica las relaciones funcionales que conectan dos o más variables (Torres et al., 2018). Esta expresión no solo hace referencia al lenguaje algebraico (Radford, 2002), sino también a gestos, movimientos o dibujos. Es posible, pues, considerar diversos métodos de comunicación y representación que beneficien las habilidades de los estudiantes y reduzcan las dificultades y obstáculos.

El alumnado con Síndrome de Asperger, dentro del espectro autista, suele ver afectado su uso del lenguaje y comprensión (Bae et al., 2015), lo que puede condicionar la verbalización del proceso de generalización. Además, aunque se pueden beneficiar de la secuenciación de los procesos, la reducida memoria de trabajo y dificultades de atención continuada y sostenida pueden ser un obstáculo a la hora de recordar y focalizar una estrategia de generalización (Root et al., 2018). En contraposición, suelen demostrar una habilidad para centrarse en los detalles (de Giambattista et al., 2019), muy significativa a la hora de buscar regularidades dentro de un conjunto. Estas características nos llevan a preguntarnos por cómo se da el proceso de generalización en estudiantes con Síndrome de Asperger, dadas tanto las posibles limitaciones como fortalezas esperadas.

Puede propiciarse el proceso de generalización del alumnado con Síndrome de Asperger empleando material TEACCH (Treatment and Education of Autistic and related Communication Handicapped Children) siguiendo los principios de Diseño Universal de Aprendizaje (Rose y Gravel, 2010). En la enseñanza y aprendizaje de resolución de problemas, el medio visual puede facilitar la comprensión de los enunciados y organización de la resolución dotando de mayor autonomía al estudiante (de Giambattista et al., 2019). Así, usar distintas formas de representación como organizadores gráficos y material manipulativo favorece el desglose de los datos del enunciado y la identificación de las variables de cada caso de la secuencia (Chico et al., 2022). Esto favorece la observación de patrones y el poder establecer relaciones funcionales de manera visual (Duval, 2016).

Para estudiar la manera de generalizar de los estudiantes de educación primaria tomamos como referencia a Blanton et al. (2015), quienes aportan una clasificación de distintas formas de pensamiento al generalizar describiendo niveles de sofisticación. Los niveles se alejan del concepto de estadíos fijos y limitados; los estudiantes pueden avanzar o retroceder por ellos según la tarea que se les presenta (Stephens et al., 2017), pudiendo manifestar distintos niveles en una misma resolución. En el nivel pre-estructural (nivel 1), el estudiante continúa una secuencia sin llegar a establecer relaciones matemáticas entre las variables o aplica estrategias de conteo. En los niveles recursivos, establece vínculos basados en la adición para casos concretos (nivel 2, recursivo particular) o extrapolando a una regla más general (nivel 3, recursivo general). En el nivel 4 (funcional particular), se evidencian argumentos basados en las relaciones funcionales entre casos concretos. El estudiante alcanza el nivel funcional general utilizando representaciones incompletas que no refieren la relación matemática (nivel 5, funcional general primitivo) o reflejando la regla general sin mencionar todas las variables (nivel 6, funcional general emergente). Finalmente, distinguimos si utiliza lenguaje simbólico (nivel 7, funcional general condensado) o si es capaz de manipular la norma descubierta para generar otras generalizaciones (nivel 8, función como objeto).

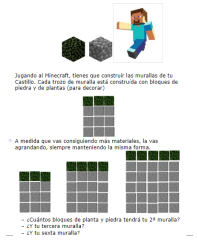
METODOLOGÍA

Partimos de dos preguntas de investigación: ¿Qué niveles de sofisticación manifiesta un estudiante de tercer ciclo de primaria con diagnóstico Síndrome de Asperger al resolver un problema de generalización? ¿Cómo interviene el uso del material TEACCH en su proceso de generalización?

Recogida de información

Se ha seguido una metodología de tipo exploratorio y descriptivo mediante un estudio de caso con un estudiante con TEA-Síndrome de Asperger, dado que nuestro objetivo es hacer un seguimiento y describir con detalle el proceso de generalización de un estudiante con Síndrome de Asperger. Este estudio de caso se centra en el desarrollo del problema del Minecraft, un problema de generalización llevado a cabo durante un taller de resolución de problemas en el curso 2021-2022 en la Universidad de Huelva, colaborando con la Asociación Onubense de Síndrome de Asperger, AOSA, y el proyecto INCLUREC, un proyecto de creación y adaptación de recursos para alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo. El problema del Minecraft involucra cuatro relaciones funcionales (Figura 1) y se abordó empleando material TEACCH (Figura 2), de manera que los niños debían relacionar las tres variables del problema, número de la muralla (M), bloques de hierba (H) y bloques de piedra (P). El problema se llevó a cabo en la sesión octava del taller, coincidiendo con la última sesión antes de las sesiones finales de evaluación. El enunciado muestra ejemplos de murallas con distintos bloques de hierba y piedra y se utilizaron recursos que los participantes habían empleado previamente, con lo que el grado de instrucción se vio reducido.

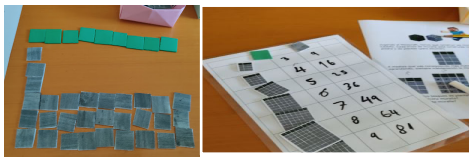
Figura 1. Problema del Minecraft: Enunciado, ficha que se entregó a los estudiantes y funciones involucradas



$F_1 : H^2 = P$
$F_2 : M+2=H$
$F_3 : (M+2)^2 = P$
$F_4 : (M+2)^2+(M+2)=P+H$
H: nº bloques de hierba
P: nº bloques de piedra
M: nº de la muralla

Jugando al Minecraft, tienes que construir las murallas de tu castillo. Cada muralla tiene bloques de hierba y de piedra. A medida que consigues más materiales la vas agrandando, siempre manteniendo la misma forma. ¿Cuántos bloques de hierba y piedra tendrá tu 2ª muralla? ¿Y tu 3ª muralla? ¿Y tu 6ª muralla?

Figura 2. Material TEACCH empleado durante la resolución del problema del Minecraft: piezas de gomaeva y organizador gráfico con pictos de muralla



El taller se diseñó y desarrolló siguiendo los principios de enseñanza de acuerdo a la literatura sobre autismo. Desde la perspectiva de la enseñanza estructurada (Mesibov y Shea, 2010), el problema se vincula a los intereses de los niños (videojuegos) y se propicia una resolución basada en material manipulativo y visual. Las órdenes y guías para la resolución son claras y concisas (Klaren et al., 2017), y las docentes (de 2 a 4 por sesión) gradúan su instrucción según las necesidades de cada participante: (a) repartir el material), (b) guiar la resolución con preguntas o comentarios o (c) utilizar el material con el estudiante para resolver el problema. Durante el taller hay además interacciones espontáneas entre los 4 participantes que, aunque trabajaron inicialmente de manera individual, comparten algunas de sus estrategias y dudas con sus compañeros.

El participante, Iván (cuyo nombre corresponde a un pseudónimo), tenía 11 años y un diagnóstico TEA-nivel 1 Síndrome de Asperger (DSM-V). Cursaba quinto de primaria y asistía periódicamente al aula de Pedagogía Terapéutica para reforzar habilidades sociales. De acuerdo con su informe clínico y psicopedagógico, aunque no presentaba desnivel de competencia curricular, tenía afectada algunas funciones ejecutivas, con un estilo cognitivo impulsivo y monitorización afectada, que le

dificultaba razonar o reflexionar sus ideas. En la resolución de problemas no tenía dificultades para crear asociaciones entre los datos, pero sí alenlazar unas fases de resolución con otras. Mostraba un nivel muy alto de vocabulario y revelaba un buen nivel de procesamiento.

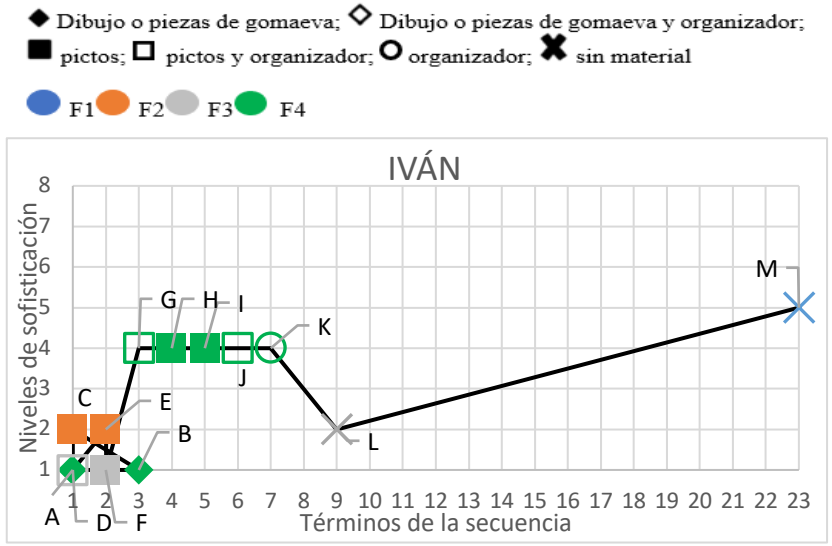
Análisis del proceso de resolución

La videograbación de la resolución del problema del Minecraft se transcribe, y junto con las producciones de Iván, se obtienen unidades de información que se analizan atendiendo a los descriptores de un sistema de categorías de acuerdo al marco teórico y las preguntas de investigación: el material TEACCH empleado (Polo-Blanco et al., 2018; Goñi-Cervera et al., 2022) (distinguiendo si usa (a) el dibujo o las piezas de gomaeva, (b) el organizador gráfico con o sin pictos, (c), el dibujo o gomaeva junto con el organizador o (d) no usa material); las relaciones funcionales a las que hace referencia en cada término; y los niveles de sofisticación al generalizar (Blanton et al., 2015) que se manifiestan (nivel 1 pre-estructural, nivel 2 recursivo particular, nivel 3 recursivo general, nivel 4 funcional particular, nivel 5 funcional general primitiva, nivel 6 funcional general emergente, nivel 7 funcional general condensada y nivel 8 función como objeto).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la figura 3, representamos el proceso de resolución de Iván, indicando la secuencia temporal de los pasos que siguió (A, B, C…), con avances y retrocesos en la consideración de los términos de la secuencia, la función de la que se ocupa en cada momento (F1, F2, F3 o F4), el material del que hace uso y el nivel de sofisticación que muestra en relación con la generalización (nivel 1 al 8). Aunque las preguntas del enunciado solo hacen referencia a los términos 2, 3 y 6, de manera verbal y a modo de entrevista semi-estructurada surgieron otros términos, recogidos en el gráfico.

Figura 3. Proceso de resolución de Iván



Paso	Símbolo	Función	Nivel
A	◆	F4	1
B	◆	F4	1
C	■	F2	2
D	□	F3	1
E	■	F2	2
F	■	F3	1
G	□	F4	1
H	■	F4	4
I	■	F4	4
J	□	F4	4
K	○	F4	4
L	✖	F3	2
M	✖	F1	5

Como se observa en la figura, la resolución de Iván se caracteriza principalmente por no ser lineal. Una primera aproximación al problema consiste en utilizar los dibujos del propio enunciado para discutir el número de bloques de hierba y de piedra que tenía cada muralla, haciendo referencia a F4 al considerar la muralla como un todo. Utilizar el dibujo como referente le orienta hacia una estrategia de conteo, consecuentemente manifestando un nivel prestructural en los términos 1, y 3 (A y B en la Figura 3). Iván trata entonces de aplicar una estrategia recursiva modificando la estructura de la muralla, posiblemente debido a dificultades de visualizar la globalidad de una figura asociada al Síndrome de Asperger (Klaren et al., 2017).

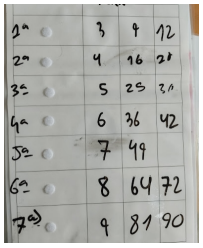
I (Iván): Tengo que añadirle una línea… si aquí (en el dibujo de la tercera muralla del enunciado, H=5, P=25) hay una línea de 1,2,3,4,5 y 6, tendríamos que añadirle una línea un poco más grande. De 7. Así que a 25 le sumo 7 y hacemos la cuarta. Serían 32. A 32 le sumo 8 y serían 40. A 40 le sumo... ya vamos por la 5ª, ¿no?

P (Profesora): 1, 2, 3, 4…sí

I: Y la última, 40+9. Pues 49. (Comienza a contestar las preguntas del enunciado) En la sexta tendremos 49. En la tercera, 5 y de piedra 25, y en la segunda 3 de plantas y 9 de piedras.

Ante este error, la docente le propone utilizar los pictos de las murallas. Iván vuelve a los términos 1 y 2 de la secuencia, utilizando estos materiales para hallar el número de bloques de hierba de estas dos murallas y completar las filas correspondientes del organizador gráfico. Aunque observa cómo aumentan los bloques de plantas (nivel recursivo particular en F2) (pasos C y E en la Figura 3), para hallar el número de piedras recurre al conteo (nivel prestructural) (pasos D y F). Tras completar las dos filas del organizador, en los términos 3, 4, 5 y 6 la argumentación de Iván evidencia el nivel funcional particular en F4 (pasos G, H, I, y J), al apoyarse en el término anterior (nivel 3: "En la cuarta, siguiendo lo que hay aquí serían 6, que lo multiplicamos por 6 veces (apoyándose en el picto) 6x6… 36. y se quedarían 42"). Sin embargo, Iván necesita contar el lado de la muralla para aplicar la relación funcional, ante lo que la docente le propone añadir al organizador una columna adicional donde registrar el número de la muralla junto con las otras dos variables (Figura 4). Empleando esta nueva estrategia Iván se reta a sí mismo a resolver el término 7 (paso K), esta vez sin necesitar apoyarse visualmente en el picto de la muralla (escribe 7ª en el lateral del organizador). "Serían 9 (verdes) 9x9, 81. Y serían 90") (Figura 4).

Figura 4: Modificación del organizador para añadir una columna referente al número de muralla (izquierda) a las columnas de hierba (2ª), piedra (3ª) y total de bloques (4ª)



Finalizado el problema, otro estudiante propone a Iván nuevos retos que hacen referencia a términos lejanos: ¿Cuáles son las murallas con 100 (M=10), 121 (M=11) y 500 piedras (M=22,5)?

Ante el primer reto (100 piedras), encontramos dos errores. El primero va asociado a la comprensión del concepto de potencia, contenido no trabajado en 5º de primaria. Iván confunde multiplicar por dos con multiplicar por sí mismo ("Son 200, 100 dos veces"). Además, formular el reto de manera verbal y sin indicar qué variable sería el valor 100 ("¿Y si te pongo 100?") provoca que Iván no sea capaz de invertir la función. En el segundo reto (121 piedras), la docente explicita las variables de la pregunta e Iván aplica la inversa a F3. Sin embargo, al preguntarle por la variable hierba de esa muralla para comprobar que la respuesta no es fruto del azar (paso L), no muestra recordar su estrategia, posiblemente debido a sus dificultades de memoria de trabajo.

P: ¿Cuál sería la muralla que tendría 121 piedras?

I: Es la novena muralla.

P: Es la novena muralla que tiene ¿cuánto de hierba?

I: 10 de plantas…

P: ¿10x10?

I: Si son 121 serían 21 de plantas y 100 de piedras. Hablemos con términos matemáticos.

Para resolver el reto de las 500 piedras, Iván argumenta en base a la relación entre el número de bloques de hierba y piedra, pero de nuevo su proceso de resolución se ve afectado posiblemente por las dificultades asociadas a la memoria de trabajo. Por un lado, retrocede al punto de necesitar visualizar los bloques de hierba para resolver la muralla ("Pero es que tengo que ver cuántos (bloques de hierba) serían"). Al plantearle usar de nuevo el organizador con objetivo de recordar su propia estrategia, Iván evidencia un nivel funcional primitivo (nivel 5) describiendo la relación funcional sin mencionar las variables, pero vuelve a confundirlas como en el primer reto (paso M).

P: ¿Tú cómo sabes que estos son 81? (señala sobre el organizador de Iván).

I: Porque lo multiplico por el número de verdes. Ah, claro, 500x500.

P: 500 tiene que estar aquí (en la columna de piedras), porque nos dice la pregunta que son las piedras totales de la muralla.

Esta rigidez de pensamiento se sigue manifestando a pesar de que Iván rehace verbalmente varios registros del organizador ("el 36 sale de 6x6; […] el 49 sale de 7x7"), motivado por la docente para recordar su estrategia. A esta dificultad se le añade el desviar la atención al resultado (Root et al., 2018), conseguir 500 piedras, olvidando los pasos a seguir y sin mantener la estrategia de multiplicar por sí mismo que segundos antes habían reforzado.

P: Entonces, ¿el 500 de dónde saldrá?

I: ¡¡De la tabla del 10!!

P: Venga, pues prueba la tabla del 10. ¿10x10 cuánto es?

I: No, no, 10x100. ¡Entonces sería 100x5! Y así da 500

P: Pero ten en cuenta que aquí (va señalando el organizador de Iván), siempre es por sí mismo, entonces no puede ser 5x100.

I: ¡Ah, no! Serían 10x500.

Tras repasar de nuevo los ejemplos del organizador, Iván comienza una estrategia de ensayo y error probando los términos 11, 20, 40, 30, 21, 22, 23 para hallar las 500 piedras. Los continuos errores de cálculo motivados por querer acelerar la obtención de la respuesta hacen que Iván acabe frustrándose y rechace buscar la lógica a los resultados que ha obtenido.

I: Con el 23 me paso…

P: Entonces si con el 22 no llegas y con el 23 te pasas, ¿qué? ¿Hay algún número entre el 22 y 23 para que me dé 500?

I: No… No se puede… ¡No se puede hacer! ¡El reto es ilógico, mal hecho y mal calculado!

La resolución de Iván muestra una tendencia a la función F4, que podríamos considerar la más compleja al involucrar 3 variables. Las funciones F2 y F3 se mantienen en los niveles recursivos, mientras que alcanza los niveles funcionales en F4 cuando hace uso conjunto del organizador y los pictos, que ayudan a fijar la estructura de la muralla; y en F1 cuando aborda términos no consecutivos en el reto de la muralla de 500 piedras. El proceso de generalización de Iván muestra además dos saltos de nivel ascendente en G y descendente en M, coincidiendo con un cambio de función (de F3 a F4 y viceversa) y de material (picto-organizador y organizador-sin material).

CONCLUSIONES

Este estudio describe la manifestación de distintos niveles de sofisticación al generalizar de un niño de 5º de primaria con Síndrome de Asperger y su posible relación con el uso de material TEACCH. Los niveles son herramientas para comprender la forma de pensar del estudiante (Stephens et al., 2017), puesto que a la complejidad de esta tarea hay que añadirle las dificultades relacionadas con la memoria de trabajo, la atención y las habilidades de comunicación (Ingelin et al., 2021). Atendiendo

a los niveles evidenciados durante la resolución del problema, la docente guiaba el proceso de resolución o del uso del material para responder a las formas de pensamiento de Iván. En consonancia con la investigación previa con niños con desarrollo típico (Hunter y Miller, 2021; Pinto y Cañadas, 2021), introducir un abanico de formas de representación posibilita la aparición de distintas estrategias en el estudiante. Comenzar desde lo pictórico permite al estudiante percibir progresivamente las relaciones entre las variables del problema (Cañadas et al., 2016), hasta construir las cuatro relaciones funcionales ayudándose de la representación tabular del organizador.

Aunque las 4 funciones se emplean para en los términos de la secuencia, F4 está principalmente presente en la argumentación de Iván, al considerar cada muralla como un conjunto de hierba y piedra. Iván afronta la resolución utilizando el dibujo y los pictos, evidenciando los niveles 1 y 2. No es hasta incluir el uso del organizador a partir del término 4 que manifiesta un nivel funcional en F4. Destacamos el papel de F2 y F3 en algunos términos de la resolución (M=1, 2 y 9), aunque se vinculan a niveles recursivos y pre-estructurales. La generalización de términos cercanos evidencia niveles de sofisticación inferiores (Goñi-Cervera et al., 2022) quizá influidos por el uso del dibujo o los pictos. Sería interesante haber ahondado en los términos lejanos y no consecutivos, como el ejemplo del reto de 500 piedras, pero los persistentes errores de cálculo influidos por la falta de atención sostenida y rigidez mental (de Giambattista et al., 2019) dificultaron la tarea.

En comparación con investigaciones previas, Iván alcanza el nivel funcional con argumentos basados en la multiplicación, en consonancia con el estudio de generalización con estudiantes de quinto grado de Pinto y Cañadas (2021). En la línea de lo evidenciado por tres de los participantes de la misma edad del estudio de Goñi-Cervera et al. (2022), el participante de este estudio mostró una transición desde estrategias de modelación a las operaciones. Además, evidenció un nivel 5, solo alcanzado por dos de los 26 participantes del estudio de Goñi et al. (2022).

Esta investigación pretende continuar el estudio sobre resolución de problemas de generalización con alumnado con Síndrome de Asperger trasladando el foco a las estrategias pedagógicas que ponen en marcha docentes en aulas de educación primaria en las que el Trastorno del Espectro Autista es parte de la diversidad del alumnado.

Agradecimientos

Este estudio ha sido realizado en el marco de un contrato predoctoral FPU20-05070 del Gobierno de España, del Centro de Investigación COIDESO de la Universidad de Huelva y del grupo de investigación DESYM (HUM-168) y el proyecto de investigación PID2019-105677RB-I00.

Referencias

Bae, Y.S., Chiang, H.M., y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 45*(7), 2200-2208. https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A.M., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalising functional relationships. J*ournal for Research in Mathematics Education, 46,* 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 309–333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41,* 87–103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Chico, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (2022). Problem-solving by students with Asperger's Syndrome. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12) (pp.1–8). ERME.

de Giambattista, C., Ventura, P., Trerotoli, P., Margari, M., Palumbi, R., y Margari, L. (2019). Subtyping the autism spectrum disorder: Comparison of children with high functioning autism and asperger syndrome. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 49*(1), 138–150. https://doi.org/10.1007/s10803-018-3689-4

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y Aprendizaje en Matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas* (pp. 61-94). Énfasis.

Goñi-Cervera, J., Cañadas, M.C. y Polo-Blanco, I. (2022). Generalisation in students with autism spectrum disorder: an exploratory study of strategies. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1333–1347. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01415-w

Hunter, J. y Miller, J. (2021). The use of cultural contexts for patterning tasks: supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1349–1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Ingelin, B. L., Intepe-Tingir, S., Y Hammons, N. C. (2021). Increasing the number sense understanding of preschool student with ASD. *Topics in Early Childhood Special Education*. https://doi.org/10.1177/02711214211006190

Klaren, M., Pepin, B., y Thurlings, M. (2017). Autism and mathematics education. En A. Bikner-Ahsbahs, M. Haspekian, A. Bakker, y M. Maracci (Eds.), *Proceedings of the CERME 10* (pp. 629–636). ERME.

Mesibov G.B., y Shea V. (2010). The TEACCH program in the era of evidence-based practice. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, *40*(5), 570-579. https://doi.org/10.1007/s10803-009-0901-6

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal of Mathematics Education Research, 33*(1), 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M.J., y Olivera, B. (2018). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con Trastornos del Espectro Autista: Un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva, 11*(2), 161–180.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14–23.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Rose, D.H. y Gravel, J.W. (2010). *Universal Design for Learning.* En P. Peterson, E. Baker y B. McGaw (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (Third Edition) (pp. 119–124). Elselvier.

Root, J. R., Browder, D. M., Saunders, A. F., y Lo, Y. Y. (2018). Schema-based instruction with concrete and virtual manipulatives to teach problem solving to students with autism. *Remedial and Special Education*, *38*, 42–52. https://doi.org/10.1077/0741932516653251664359 2

Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., y Murphy-Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(3), 143–166.

Torres, M. D., Cañadas, M. C., y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574–583). SEIEM.

¿QUÉ INTENCIONES DIDÁCTICAS MUESTRAN LOS FUTUROS MAESTROS CUANDO TRANSFORMAN PROBLEMAS?

What didactic intentions do prospective preservice teachers display when transforming problems?

Chico, J.[a], Martín-Díaz, J. P.[b], Montes, M.[b] y Badillo, E.[c]

[a]Universitat de les Illes Balears, [b]Universidad de Huelva, [c]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Este estudio tiene por objetivo caracterizar las intenciones didácticas de futuros maestros cuando resuelven una tarea basada en la formulación de problemas. Para ello se propuso a 159 estudiantes del grado de Educación Primaria transformar un problema multiplicativo bajo la consigna promover la comprensión de los contenidos matemáticos. Mediante métodos de comparación constante, emergieron cinco categorías que corresponden a las intenciones que los futuros maestros declaran en las justificaciones de las transformaciones que realizan. Estas son: focalizar el contenido, variar la complejidad, facilitar la comprensión del enunciado, evaluar la compresión y variar la orientación de la práctica matemática que promueve el problema.

Palabras clave: *intención didáctica, formulación de problemas, formación de maestros, tareas para la formación de profesorado.*

Abstract

This study aims to characterize the didactic intentions of prospective preservice teachers when they solve a task based on problem posing. For this purpose, 159 preservice teachers were asked to transform a multiplicative problem under the prompt to 'promote the understanding of mathematical contents'. Applying constant comparison methods, five categories related to the didactic intentions of prospective preservice teachers when they perform a problem, emerged from data. These are: focusing the content, varying the complexity of the problem, facilitating understanding of the word problem, evaluating understanding and varying the orientation of the practice in mathematics that promotes the problem.

Keywords: *didactics intention, problem posing, teacher education, tasks in teacher education.*

INTRODUCCIÓN

La formulación de problemas ha sido considerada por la literatura desde hace algunos años como una herramienta para construir conocimiento matemático (Cai et al., 2022; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Singer et al., 2015). Es común encontrar investigaciones relacionadas con aspectos inherentes a la formulación de problemas desde un punto de vista matemático y sobre las implicaciones y características que posee (Baumans y Rott, 2022; Bicer et al., 2020; Cai et al., 2022; Matsko y Thomas, 2015; Silver, 1994; Singer y Voica, 2015). Estos estudios tienen como foco común la formulación de problemas por parte de estudiantes en diferentes niveles educativos. Sin embargo, existe una escasez de investigaciones y un interés creciente que atiende a conocer cómo formula problemas el profesorado para ser resueltos por sus alumnos (Carrillo et al., 2021; Crespo, 2003; Koichu, 2020; Leavy y Hourigan, 2022). En esta investigación, abordamos esta perspectiva.

Desde esta perspectiva, asumimos que el profesorado debe ser competente en la formulación de problemas, ya que es el principal responsable de proponer este tipo de tareas a sus estudiantes. Dentro de esta competencia se identifican tres destrezas: crear nuevos problemas; seleccionar

Chico, J., Martín-Díaz, J. P., Montes, M. A. y Badillo, E. (2023). ¿Qué intenciones didácticas muestran los futuros maestros cuando transforman problemas?. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 203–210). SEIEM.

problemas de diferentes fuentes de recursos; y, transformar problemas ya existentes (Carrillo et al., 2021). Esta última destreza implica modificar uno o varios elementos del enunciado de un problema con una intención didáctica (Carrillo et al., 2021) que orienta la toma de decisiones a la hora de transformarlo. Estas intenciones son el objeto de estudio de esta comunicación. Concretamente, el objetivo que abordamos es caracterizar las intenciones didácticas de futuros maestros cuando transforman un problema multiplicativo bajo la consigna "promover la comprensión de contenidos". Para ello, se propone a estudiantes del grado de Educación Primaria de la Universidad de Huelva transformar un problema multiplicativo bajo la consigna promover la comprensión de los contenidos que identificaran, y justificar sus transformaciones. Realizamos un análisis emergente de las respuestas para identificar las distintas intenciones que reflejan la interpretación que los futuros maestros asumen de la consigna de la tarea.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

Las investigaciones sobre formulación de problemas han arrojado resultados relacionados, entre otros, con la evaluación de los conocimientos de los estudiantes (Brown y Walter, 2005; Lin y Leng, 2008); con las características de los problemas propuestos (Montes et al., 2022), con la gestión tanto de errores como de la demanda cognitiva de la tarea (Crespo, 2003; Leavy y Hourigan, 2022); con atender a un contenido determinado, por ejemplo, la estadística (English y Watson, 2015); o, para poder dar respuesta a una operación concreta (Koichu et al., 2012). Algunas de las investigaciones mencionadas anteriormente también guardan relación con la labor docente, sin embargo, ninguna atiende a qué motivos o qué intenciones tienen los docentes a la hora de formular o transformar problemas matemáticos para sus estudiantes. Estas intenciones guardan una relación directa con la profesión docente y con aspectos didácticos de la formulación de problemas en lo que al profesorado respecta.

La formulación de problemas escolares no es una tarea trivial para los futuros profesores (Montes et al., 2022). Además de las habilidades y los recursos cognitivos necesarios, en el caso de los profesores, la transformación de problemas debe estar ligada a una determinada intención didáctico-matemática que orienta cómo el profesorado se aproxima al aprendizaje de sus alumnos. Al respecto, varios autores señalan la necesidad de proponer tareas de formulación de problemas en contextos de formación inicial de profesores (Leavy y Hourigan, 2022). En el contexto de la SEIEM, se han presentado diversos trabajos centrados en el profesor como formulador de nuevos problemas o reformulador de problemas ya existentes. Pincheira et al. (2022) informaron sobre las habilidades de futuros maestros de Educación Infantil para proponer problemas de patrones a partir del análisis de las tareas propuestas. Por otro lado, García-Alonso et al. (2022), presentaron un trabajo centrado en la formulación de problemas de fracciones por parte de futuros maestros de Educación Primaria. Ambos trabajos tienen por objetivo evaluar los conocimientos y habilidades de los futuros maestros para formular problemas centrados en un cierto contenido a partir del análisis de los problemas propuestos. Aunque es importante estudiar el producto final en las tareas de formulación de problemas, también lo es indagar en el proceso de formulación de problemas y las variables que emergen (Cai et al, 2022). En esta investigación nos centramos en la intención didáctica de los futuros maestros como variable que influye en la toma de decisiones en el proceso de transformación de problemas existentes.

Las tareas con foco en la transformación de problemas, además de proporcionar una situación problemática que proporcione el contexto y los datos que pueden ser modificados, debe incorporar alguna indicación (consigna) que permita a los formuladores de problemas saber qué se espera de ellos (Cai et al., 2022). Las consignas (nuestra traducción de prompts en Cai et al., 2022) y los efectos de éstas en la formulación de problemas son, por lo tanto, objeto de estudio que requiere de mayor atención. Por ejemplo, en el trabajo de Pincheira et al. (2022) la consigna de la tarea es "promover la enseñanza de patrones", mientras que en el trabajo de García-Alonso et al. (2022) la consigna se basa en formular tres problemas de diversa dificultad que incorporen las fracciones 1/4

y 3/8. En ambos casos, es esperable que los futuros maestros movilicen conocimiento sobre patrones o fracciones. Sin embargo, por el tipo de consigna, en el primer caso es más probable que también movilicen conocimiento pedagógico en el proceso de formular el problema. Por otro lado, en ambas consignas encontramos aspectos susceptibles a interpretaciones, cómo interpretan los futuros maestros la consigna "promover la enseñanza" o "formular problemas de diversa dificultad" son variables a tener en cuenta a la hora de investigar el papel de las consignas en la formulación de problemas. Al respecto, en este estudio realizamos una primera aproximación a las diferentes intenciones didácticas que muestran futuros maestros al transformar un problema bajo la consigna "promover la comprensión de contenidos". Para promover el aprendizaje de sus estudiantes, el profesorado toma decisiones con una serie de recursos, metas, y orientaciones (Schoenfeld, 2010). Así, entendemos que la intención didáctica en una acción viene determinada por la meta final, es decir, el objetivo final que persigue el profesor con esa acción, y por las orientaciones que la concretan y que dan forma a las metas y a la articulación de los elementos cognitivos (recursos) que determinan sus características y la forma de acercase a ella.

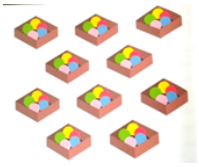
METODOLOGÍA

Diseñamos un protocolo con cuatro tareas para futuros maestros donde se les pide transformar diversos problemas de estructura multiplicativa seleccionados de un libro de texto de Educación Primaria usado en España. Los futuros maestros dispusieron de una semana para realizar el protocolo, de forma individual y por escrito. En la primera tarea del protocolo se les pidió transformar los enunciados de dos problemas bajo la consigna 'promover la comprensión de los contenidos matemáticos' que identificaran (Figura 1). En esta comunicación nos centramos en el análisis de las respuestas relativas a uno de los problemas de la primera tarea (Figura 1). El problema para transformar corresponde a una estructura de isomorfismos de medida (Vergnaud, 1983) y proporciona, a los futuros maestros, distintos elementos susceptibles de ser transformados: aspectos numéricos; de la sintaxis y semántica del problema; o, la imagen del enunciado (Chico et al., 2022a, 2022b). Se propuso la tarea a 159 estudiantes para maestro de la Universidad de Huelva, al final de su formación del segundo curso del año académico 2020-2021, habiendo cursado una asignatura de contenido didáctico-matemático que contempla el pensamiento multiplicativo. En total, propusieron 220 transformaciones, ya que algunos de ellos realizaron más de una.

Figura 1. Enunciado de la tarea propuesta a futuros maestros

Modifica los dos enunciados para que promuevan la comprensión de los contenidos matemáticos que identificas. Para cada cambio que realices indica en la tabla: qué tipo de cambio es; por qué lo harías; y, qué aporta al aprendizaje matemático de los alumnos.

Bruno tiene 10 cajas con canicas. Cada caja contiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Bruno en total?



Siguiendo una metodología cualitativa, este estudio se ha desarrollado desde un paradigma interpretativo, ya que persigue el propósito de explorar, describir, y explicar (McMillan y Schumacher, 2005) las intenciones que los futuros maestros (en adelante FMs) exponen cuando transforman el enunciado de un problema bajo la consigna "promover la comprensión de contenidos". Para la categorización de las intenciones se realiza una codificación inductiva de las justificaciones dadas por los FMs para cada transformación que proponen en respuesta a la tarea de la Figura 1. Empleamos métodos de comparación constante (Strauss y Corbin, 1998) en el proceso inductivo de codificación de las intenciones que se realizó en tres fases: 1) Codificación independiente: dos investigadores codifican de forma independiente los datos; 2) Comparación de interpretaciones: estos dos investigadores comparan sus resultados, negociando significados e interpretaciones que se van anotando en memos (Strauss y Corbin, 1998); y, 3) Triangulación de los

datos: los cuatro autores discuten los casos de la fase anterior en los que no se llegó a consenso. También se negocian las relaciones entre códigos y las categorías principales. Una vez establecidas las categorías empíricas (Flick, 2007) correspondientes a las intenciones, se realizó un recuento de cada una de ellas en el conjunto de los datos.

RESULTADOS

Del análisis de las respuestas de los futuros maestros a la tarea de la Figura 1, emergieron 5 categorías que corresponden a las intenciones didácticas declaradas por los FM: i) focalizar el contenido; ii) variar la complejidad; iii) facilitar la comprensión; iv) evaluar la comprensión; y, v) variar la orientación de la práctica matemática que promueve el problema. A continuación, describimos y mostramos la frecuencia de cada una de ellas y sus variantes. Cabe destacar, que en el 37% de las respuestas analizadas los futuros maestros orientan sus transformaciones con dos o más intenciones, siendo los pares más frecuentes: contenido-complejidad (15%), contenido-comprensión (8%) y contenido-evaluación (7%).

Focalizar el contenido

El 66% de las respuestas analizadas muestran la intención de focalizar el nuevo problema en ciertos contenidos. Mayoritariamente, los nuevos contenidos están relacionados con aspectos del pensamiento multiplicativo (53%). También encontramos respuestas (13%) que buscan centrar el problema exclusivamente en nuevos contenidos como el pensamiento aditivo, los porcentajes, las fracciones o las potencias. Este es el caso del FM 3 que propone la siguiente transformación: "Explicaría que Bruno mete todas las canicas dentro de una caja más grande y preguntaría cuál es la probabilidad que hay de que coja alguna canica azul o verde", para "explicar los conceptos básicos de la probabilidad y que el alumnado sea capaz de prever sucesos que dependen del azar mediante cálculos matemáticos".

Esta intención didáctica engloba respuestas que i) persiguen la comprensión de significados de ciertas operaciones o propiedades en función del contexto en el que se presentan, o ii) se centran en promover el uso y el cálculo de una o diversas operaciones combinadas. Respecto al primer caso, encontramos FMs que transforman el problema con la intención de fomentar la comprensión de ciertos significados de la multiplicación o la división: la división partitiva, la división medida, el significado del resto en una división, la multiplicación como suma repetida, la propiedad multiplicativa, o el significado de ciertas operaciones en contextos cotidianos. Por ejemplo, el FM 140 (Figura 2) propone modificar las cantidades del problema original para fomentar la comprensión de la multiplicación como una suma reiterada.

Figura 2. Respuesta del FM 140

Enunciado del problema: Marina usa varias marcas para vestir, por ello, tiene chándals de 4 marcas distintas: Nike, Puma, Converse y Vans. Si de cada marca posee 5 chándals, ¿cuántos chándals tiene en total Marina? ¿Y si en lugar de 5 chándals nike posee el doble de estos?
Justificación: Cambio realizado para que el problema tenga una mayor comprensión por parte del alumnado, ya que, si utilizamos números o cantidades más inferiores, estas se podrán calcular (según lo que pide el enunciado) a través de una suma reiterada, entendiendo esta de una mejor forma. He optado también por realizar una segunda pregunta para que entiendan que un resultado puede variar y que en un problema se puede llevar a cabo más de una cuenta. Intento que el alumnado comprenda que un problema no solo se basa en la realización de una sola operación, sino que se puede dar más de una dentro del mismo haciendo que varíe, de este modo, el resultado final.

Respecto al segundo caso, encontramos respuestas donde se transforma el problema original con la intención de fomentar el uso y cálculo de operaciones, mayoritariamente la multiplicación o la división. Por ejemplo, el FM 119 propone "Dejar solo una caja con las cinco canicas" para que el

alumnado "llegue a la conclusión de que deben multiplicar y no ir sumando las canicas de cada caja". Así, la intención que declara el FM 119 es promover el uso de la multiplicación en la resolución del problema obstaculizando estrategias de conteo al no mostrar en la imagen el total de elementos (Barmby et al., 2009). En otras ocasiones los FMs persiguen que los alumnos de primaria realicen diversas operaciones para resolver el nuevo problema, lo que conlleva añadir etapas al problema original. Este es el caso del FM 26 (Figura 3) que añade una etapa al problema para que los alumnos combinen dos operaciones matemáticas, la multiplicación y la suma.

Figura 3. Respuesta FM 26

Enunciado del problema: Bruno tiene 10 cajas con canicas. En cinco cajas hay 4 canicas, en tres cajas 2 canicas y en dos cajas 8 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Bruno en total?
Justificación: He realizado este cambio para combinar dos operaciones matemáticas, la suma y la multiplicación, lo que ha llevado a un mayor nivel de razonamiento por parte del alumno. Practicar la multiplicación y reforzar la suma de manera que comprendan la relación un hay entre ambas operaciones para conseguir el resultado.

Variar la complejidad del problema

Otra intención que muestran los FMs en el 35% de las respuestas se basa en variar la complejidad del problema. Esta intención engloba transformaciones realizadas con la intención de aumentar (22%) o disminuir (13%) la complejidad del problema dado. Para aumentar la complejidad los FM usan distintas estrategias: variar las cantidades involucradas en el problema, añadir etapas, modificar la imagen del problema dado para evitar el conteo de las canicas o introducir datos irrelevantes en el enunciado escrito del problema. Por ejemplo, el FM 27 (Figura 4) realiza su transformación con la intención de aumentar la complejidad del problema. Para ello transforma diversos elementos del problema original: la imagen, las cantidades y las etapas.

Figura 4. Respuesta del FM 27

Enunciado del problema: A Bruno le encantan las canicas y cada vez que puede ir a la tienda de juguetes compra una caja. Cada caja que compra en la tienda contiene 5 canicas en su interior. Bruno tiene en su casa 3 cajas de canicas y su abuelo le regaló 2 cajas más. Su padre fue también a la tienda y le regaló 2 más. Además, su tío le regaló por su cumpleaños 2 cajas y, la última vez que fue a la tienda de juguetes le regalaron 1. Ahora Bruno está super contento porque tiene un montón de canicas, ¿Sabrías decir cuántas tiene en total?
Justificación: Considero que es más fácil para los niños realizar problemas que tengan un contexto cercano y bastante similar a situaciones de la vida cotidiana que podrían tener. A veces, es más fácil imaginarse un problema si los datos tienen más sentido. He decidido incrementar los datos para aumentar dificultad del problema, ya que lo considero muy simple. El resultado o la finalidad del problema es el mismo que antes, pero de esta manera, los niños/as tienen que hacer un mayor esfuerzo en comprender los datos y entender qué operaciones realizar para llegar al resultado. (…) podría quitarse la imagen para que los alumnos/as no se limiten a contar las bolas en el dibujo y hagan una representación ellos mismos de su interpretación del problema.

En cambio, en las respuestas donde se disminuye la complejidad del problema, todos los FMs varían las cantidades del problema original, ya sea para facilitar la comprensión de un contenido o exponer una situación problemática más sencilla. Por ejemplo, el FM 14 propone: "Pedro, Juan y Luis tienen 2 lápices de colores cada uno ¿Cuántos lápices hay en total?", afirmando que el cambio "pretende aportar de una manera sencilla la comprensión de los contenidos matemáticos que se tratan en este problema. Aportando al alumnado una problemática más sencilla".

Facilitar la comprensión del enunciado del problema

Esta intención didáctica aparece en el 20% de las respuestas analizadas, y agrupa aquellas respuestas de los FMs que persiguen facilitar la comprensión del enunciado del problema. Con esta intención, encontramos respuestas que transforman: i) el contexto, acercándolo a las experiencias de alumnos de primaria para facilitar su inmersión en el problema (14%); o, ii) aspectos sintácticos del enunciado del problema, introduciendo conectores en la redacción del problema, cambiando el orden de la información, o modificando la imagen (8%). Vemos un ejemplo en la respuesta del FM 27 (Figura 4) que además de combinar diversas transformaciones con la intención de aumentar la complejidad del problema, propone modificar el contexto con la intención de facilitar la comprensión del enunciado.

Evaluar la comprensión

Esta intención didáctica se basa en orientar la resolución del problema hacia una tarea de evaluación para los futuros resolutores. Aparece en el 20% de las respuestas y, diferenciamos dos variantes, la intención de que los alumnos de primaria repasen o refuercen ciertos contenidos (18%); y, en menor grado, la intención de comprobar la comprensión de los alumnos respecto de los contenidos involucrados en el nuevo problema (2%). De forma habitual, los FMs añaden una etapa al problema para involucrar una suma o una resta en la resolución del problema y así repasar el cálculo de estas operaciones (ver respuesta del FM 26 en la Figura 3). De la misma manera, en otras ocasiones, los FMs añaden etapas, pero, esta vez, con la intención de hacer un seguimiento de la comprensión que tiene el alumnado respecto de ciertos contenidos. Por ejemplo, el FM 41 propone distribuir las cajas entre dos personajes "6 cajas de Ana y 4 cajas de Bruno. Las cajas de Bruno tienen 5 canicas y las de Ana traen 4" afirmando que este cambio permite "saber si el alumnado capta el concepto de multiplicación. Demostrará la compresión de la multiplicación en más de un número".

Variar la orientación de la práctica matemática que promueve el problema

Por último, identificamos en los datos respuestas que persiguen proponer un cambio en la orientación de la práctica matemática —elementos sintácticos según Schwab (1978)— que promueve el enunciado del problema. Esta intención es muy poco frecuente en los datos apareciendo tan solo en el 3% de las respuestas analizadas. En las respuestas donde identificamos esta intención, los FMs buscan proponer un problema que no contribuya a generar una práctica matemática donde los problemas siempre se resuelven mediante una única operación y tiene una única solución. Así, se busca orientar la práctica a problemas que requieren combinar varias operaciones o que tienen más de una solución. Por ejemplo, el FM 140 (Figura 2), propone añadir una segunda pregunta para que los alumnos comprendan que un problema se puede resolver con más de una operación.

REFLEXIONES FINALES

Si bien en esta investigación asumimos que es necesario tanto tener habilidades, como recursos cognitivos para formular problemas matemáticos, la formulación de problemas se encuentra también ligada a una intención didáctica por parte del profesorado. Este trabajo, supone una aportación en términos de una primera categorización emergente para las intenciones didácticas en la transformación de problemas con la consigna "promover la comprensión de contenidos". Distinguimos cinco intenciones no excluyentes: focalizar el problema en diferentes contenidos a trabajar por futuros resolutores, variar la complejidad del problema dado, facilitar la comprensión del enunciado, orientar la resolución del problema hacia una tarea de evaluación, o variar la orientación de la práctica matemática que promueve el problema.

Las intenciones didácticas reflejan diferentes metas finales que los futuros maestros se plantean al transformar el problema dado y, por consiguiente, las diversas interpretaciones que asumen de la consigna "promover la comprensión de contenidos". Así, observamos que la mayoría de FMs

orientan sus transformaciones a aspectos del contenido, ya sea seleccionando unos contenidos determinados como foco del nuevo problema, variando la complejidad o facilitando el acceso a los contenidos subyacentes en el problema dado. Por otro lado, encontramos FMs que realizan sus transformaciones con la intención de usar el problema que proponen como una tarea de evaluación o para orientar la práctica matemática de resolver problemas. Para ello, los FMs movilizan diversos recursos cognitivos articulando conocimiento del contenido, como las estructuras multiplicativas o modelos visuales de la multiplicación, y conocimiento pedagógico del contenido, como formas de aprendizaje de los alumnos o recursos para la enseñanza de la multiplicación. En este sentido, nos planteamos analizar en detalle el conocimiento profesional que usan los futuros maestros cuando formulan problemas en relación con las intenciones didácticas que orientan sus transformaciones.

Los FMs proponen una variedad de transformaciones de aspectos semánticos y sintácticos del problema dado, modificando para ello diversos elementos del enunciado como el contexto, las etapas, las cantidades, la imagen, etc. (Chico et al., 2022a, 2022b). Como línea de continuidad, nos proponemos explorar las relaciones entre las diversas características de las transformaciones propuestas por los FMs y las intenciones didácticas que asumen en la resolución de la tarea propuesta. Con ello buscamos estudiar la coherencia entre la intención didáctica que declaran los FMs al transformar un problema y la transformación final que realizan.

La variedad de intenciones que los futuros maestros asumen de la consigna de la tarea plantea la necesidad de considerar las interpretaciones que hacen de estas, como variable a incluir en el diseño de instrumentos de investigación que requiere una mayor atención.

Agradecimientos

A los grupos de investigación GIPEAM (SGR2017-101) y DESYM (HUM-168), los proyectos PID2021-122180OB-I00 (MINECO) y RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, al centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva y a la Red MTSK financiada por AUIP.

Referencias

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2009) The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 217–241.

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 110*(2), 251–269.

Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M. M. y Capraro, R. M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics 105*(3), 457–485.

Brown, S. y Walter, M. (2005). *The art of problem posing (3rd edition)*. Erlbaum

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.

Carrillo, J., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la Educación Matemática* (pp. 162–183). Compobell.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243–270.

Chico, J., Montes, M. y Badillo (2022a). Teachers' professional competence to pose school problems: the case of transformation of existing problems. In Hodgen, J., Geraniou E., Bolondi, G. y Ferreri, F. (Eds.), *Proceedings of the 12th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12) (pp. 3527–3534). Free Uniersity of Bozen-Bolzano and ERME.

Chico, J., Montes, M. y Badillo (2022b). Transformaciones de la información en la formulación de problemas: una mirada hacia los futuros maestros. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 219–227). SEIEM.

English, L. D. y Watson, J. M. (2015). *Statistical literacy in the elementary school: Opportunities for problem posing*. En F. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), Mathematical problem posing. Springer.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J. (2022). Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: algunas características. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 295–304). SEIEM.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123–147). Lawrence Erlbaum Associates.

Koichu, B., Harel, G. y Manaster, A. (2012). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problem posing in the context of division of fractions. *Instructional Sciences, 41*, 681–698. https://doi.org/10.1007/s11251-012-9254-1

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research, 102*. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001

Leavy, A. y Hourigan, M. (2022). Balancing competing demands: Enhancing the mathematical problem posing skills of prospective teachers through a mathematical letter writing initiative. *Journal of Mathematics Teacher Education 25*(3), 293–320.

Lin, K. M. y Leng, L. W. (2008). Using problem-posing as an assessment tool*. Paper presented at the 10th Asia-Pacific Conference on Giftedness.*

Matsko, V. J. y Thomas, J. (2015). Beyond routine: fostering creativity in mathematics classrooms. En F. M. Singer, N. F. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing from research to effective practice* (pp.125–139). Springer.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa (5ª Ed.).* Pearson Educación.

Montes, M., Pascual, I., Carrillo, J. y Martín-Díaz, J. P. (2022). Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros. *Educaçao e Pesquisa, 47*, 1–19.

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2022). Habilidades para hacer patrones en tareas diseñadas por futuras maestras de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 471–478). SEIEM.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.). (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.

Singer, F. M. y Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? En F. M. Singer, N. F. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 141–174). Springer.

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think.* Routledge.

Strauss, A. L. y Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques (second edition).* SAGE.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N.J. Wilkof (Eds). *Science, curriculum and liberal education* (pp. 229–272). University of Chicago Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 127–174). Academic Press.

EL MODELO DE DEMANDA COGNITIVA PARA IDENTIFICAR ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

The cognitive demand model to identify mathematically gifted students

Contreras, D.A., Jaime, A. y Gutiérrez, Á.

Universitat de València

Resumen

Este texto se enmarca en el contexto de un proyecto de investigación sobre identificación y caracterización de estudiantes de educación secundaria con alta capacidad matemática en el sistema escolar chileno. Proponemos la utilización de los niveles de demanda cognitiva con dos objetivos: diseñar problemas que exijan un alto nivel de esfuerzo cognitivo e identificar posibles estudiantes con alta capacidad matemática. En esta comunicación, analizamos el diseño de uno de los problemas y las respuestas al mismo, lo cual nos permitió identificar distintos niveles de demanda cognitiva para un mismo problema y la presencia de características propias del talento matemático puestas de manifiesto en el proceso de resolución del problema. Eso nos lleva a considerar la demanda cognitiva como una herramienta matemática válida para identificar alta capacidad matemática.

Palabras clave: *alta capacidad matemática, demanda cognitiva, diseño de problemas, resolución de problemas, educación secundaria*

Abstract

In the context of a research project on the identification and characterization of secondary school mathematically gifted students in the Chilean school system. We propose the use of the levels of cognitive demand with two aims: to design problems requiring a high level of cognitive effort, and to identify possible cases of mathematically gifted students. In this paper we analyse the design of one of the problems and the answers to this problem, which allowed us to identify different levels of cognitive demand for the same problem and the presence of characteristics of mathematical talent revealed in the process of solving the problem This results in the consideration of the cognitive demand as a valid tool to identify mathematical talent.

Keywords: *mathematical giftedness, cognitive demand, design of problems, problem solving, secondary school*

INTRODUCCIÓN

El sistema educativo chileno en su Ley General de Educación (2009) reconoce que todos los estudiantes deben tener la oportunidad de recibir una educación de calidad y promueve que se preste atención a quienes requieran apoyo especial. En particular, se busca que cada centro educativo promueva la inclusión de sus estudiantes mediante diversas estrategias que permitan reconocer la diversidad del alumnado presente en el aula. Por este motivo, estamos desarrollando una investigación centrada en la identificación de estudiantes con alta capacidad matemática (en adelante ACM) en centros escolares chilenos mediante la resolución de problemas de matemáticas, ya que actualmente no existen materiales disponibles que les permitan a los profesores identificar y atender a este grupo de estudiantes.

En relación con la detección de estudiantes con ACM, Jaime y Gutiérrez (2014) describen distintos modelos teóricos que permiten caracterizar a estos estudiantes. Autores como Krutetskii (1976), Greenes (1981) y Miller (1990) han descrito diversas características que presentan los estudiantes con ACM, destacando particularmente, para el contexto de este artículo, las habilidades de construir nexos e identificar relaciones matemáticas.

Contreras, D. A., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2023). El modelo de demanda cognitiva para identificar estudiantes con alta capacidad matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 211–218). SEIEM.

La literatura también muestra que existen discrepancias en la identificación de estudiantes con ACM cuando se comparan los resultados de test psicométricos versus instrumentos basados en la resolución de problemas, mostrándose estos últimos como un mejor caracterizador de la ACM (Pasarín et al., 2004; Benavides, 2008). Algunas investigaciones han puesto de manifiesto la necesidad de identificar y caracterizar a estudiantes con ACM mediante el análisis de sus procesos de aprendizaje y de razonamiento en la resolución de problemas (Benedicto et al., 2015; Jaime y Gutiérrez, 2017; Ruiz-Socolado y Lupiáñez, 2022). De la misma forma, existen investigaciones en educación matemática que destacan la importancia de diseñar, para los estudiantes con ACM, tareas matemáticas que les supongan un reto y que promuevan pensamiento de orden superior (Castro et al., 2015; Diezmann y Watters, 2002).

Por otra parte, Smith y Stein (1998) propusieron el modelo de los niveles de demanda cognitiva (DC en adelante), estableciendo un conjunto de criterios para analizar las tareas de matemáticas y clasificarlas en cuatro niveles de DC, según el grado de complejidad o reto que suponga su resolución para los estudiantes. Dicho modelo fue reformulado por Benedicto (2018), con el objetivo de cubrir algunas lagunas e inconsistencias del planteamiento original y dotarlo de una estructura uniforme para todos los niveles, mostrando también la utilidad de los niveles de DC para analizar respuestas de estudiantes e identificar características cognitivas puestas de manifiesto durante el proceso de resolución de la tarea propuesta. Manero et al. (2021) utilizan el modelo de DC para diseñar problemas de alta demanda y observan que estos pueden ser adecuados para estudiantes con ACM.

El trabajo presentado en este texto se enmarca en el desarrollo de una investigación doctoral cuyo objetivo general es diseñar y validar un cuestionario basado en la resolución de problemas que permita identificar la alta capacidad matemática en alumnos de 7º básico del sistema educativo chileno (1º de ESO del sistema educativo español).

El objetivo específico de la parte de dicha investigación que presentamos en este texto es doble: utilizar los niveles de DC i) para diseñar problemas con demanda cognitiva alta y ii) para identificar posibles estudiantes con ACM mediante la evaluación de los niveles de DC de las resoluciones de los problemas diseñados por los estudiantes de la muestra.

Nuestro estudio proporciona nueva información sobre la utilización de los niveles de DC para analizar las respuestas de estudiantes, ya que nos permite desarrollar un instrumento de evaluación de la resolución de problemas con la finalidad de identificar estudiantes con ACM. Además, en el contexto chileno, esta investigación supone un aporte novedoso, porque permite evaluar las capacidades de los estudiantes en los cuatro ejes temáticos curriculares, mientras que los instrumentos chilenos publicados que conocemos solo incluyen algunos ejes (p. ej., Benavides, 2008).

MARCO TEÓRICO

Los niveles de demanda cognitiva

El modelo de los *niveles de demanda cognitiva* propuesto por Smith y Stein (1998) distingue cuatro niveles que permiten valorar el esfuerzo cognitivo que deben realizar los estudiantes para resolver tareas matemáticas (ejercicios, problemas, actividades, etc.). Este modelo permite clasificar las tareas según su grado de complejidad. En este contexto, entendemos por *algoritmo* cualquier secuencia organizada de pasos que se sigue de manera rutinaria y mecánica para obtener un determinado resultado. Ejemplos de algoritmos son los procedimientos de realización en papel de las operaciones aritméticas, los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la forma de calcular, con un transportador, la suma de los ángulos de un polígono dibujado en papel o los criterios de derivación, entre otros. Las características básicas asociadas a cada nivel de DC por Smith y Stein (1998) son:

- *Memorización*: tareas que se resuelven a partir de la repetición de una serie de datos, fórmulas, definiciones, etc. tomados directamente del enunciado o previamente memorizados. Los contenidos implícitos no tienen conexión con la información que se reproduciendo.
- *Algoritmos sin conexiones*: tareas que se resuelven aplicando un algoritmo anteriormente estudiado o siguiendo instrucciones dadas en el enunciado, sin necesidad de considerar los contenidos matemáticos implícitos subyacentes en su resolución.
- *Algoritmos con conexiones*: tareas que se resuelven aplicando un algoritmo general que se puede seguir solamente si se establecen conexiones estrechas con los contenidos matemáticos implícitos en la resolución del problema.
- *Hacer matemáticas*: tareas que se resuelven haciendo uso de un razonamiento complejo y no algorítmico, por lo que se debe acceder a conocimientos y experiencias relevantes y usarlos adecuadamente durante la resolución de la actividad.

Benedicto (2018) completó y mejoró la caracterización de Smith y Stein (1998) definiendo seis categorías que se centran en diferentes aspectos de la actividad cognitiva durante la resolución de una tarea matemática y que poseen características diferenciadoras en cada nivel de DC. Dichas categorías son: finalidad de la tarea; procedimiento de resolución; esfuerzo cognitivo necesario; contenidos implícitos; explicaciones; y formas de representación de la resolución. En esta investigación usamos como referente teórico a Benedicto (2018). Por limitación de espacio, no es viable incluir aquí las descripciones generales de las seis categorías, pero en las Tablas 1 y 2 presentamos descripciones particularizadas, necesarias en diferentes momentos de la investigación para el análisis del problema que hemos seleccionado y de las resoluciones de estudiantes que presentamos.

METODOLOGÍA

Diseño del experimento, pilotaje, muestra, recogida de información y tipo de análisis

Para el diseño de los problemas de la investigación, consideramos los Objetivos de Aprendizaje de 7º básico (Ministerio de Educación, 2020), elaborando ocho problemas que tuviesen como criterio principal la utilización de uno o más de los cuatro ejes temáticos explicitados en el currículum escolar chileno (números, álgebra y funciones, geometría, probabilidad y estadística). Hicimos estas consideraciones curriculares con el fin de que todos los estudiantes participantes en el estudio, independientemente del centro educativo de origen, pudieran tener los conocimientos mínimos necesarios para abordar la resolución de los problemas. Una vez elaborada la primera versión de los problemas, los sometimos a dos procesos de pilotaje, en cada uno de los cuales analizamos las respuestas de los estudiantes para mejorar los enunciados que necesitaran modificación y adecuar el nivel de exigencia de sus apartados, obteniendo después del segundo pilotaje la versión definitiva de los problemas.

La muestra de esta experimentación está formada por 82 estudiantes de 7º básico (1º ESO), de entre 12 y 13 años de edad, pertenecientes a tres centros educativos chilenos, uno público (27 estudiantes), uno concertado (29 estudiantes) y uno privado (26 estudiantes). Esta muestra de conveniencia corresponde a la mitad de la población total involucrada en la investigación, dado que, por motivos de disponibilidad horaria de los centros educativos, consideramos que cada problema fuese respondido por la mitad de la población total, distribuyendo los cuestionarios de manera intercalada según los rendimientos académicos de los estudiantes. La recogida de información se hizo en sesiones ordinarias de clase de matemáticas, donde los estudiantes dispusieron de 60 minutos para responder de forma individual dos problemas, en formato de papel y lápiz.

El análisis de los datos para el objetivo de este estudio es de tipo cualitativo, pues nos centramos en la revisión y categorización de los procesos de resolución mostrados por los estudiantes según los niveles de DC.

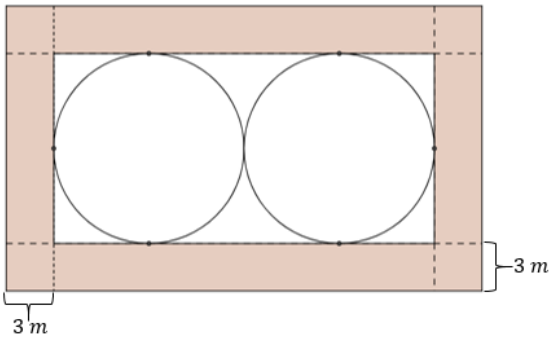
El problema del paseo rectangular

La Figura 1 presenta uno de los problemas usados en la experimentación final de la investigación, el cual tomamos como ejemplo para mostrar cómo analizamos el problema y las respuestas de los estudiantes. Para diseñarlo, consideramos los objetivos de aprendizaje que tienen relación con los elementos de la circunferencia y las fórmulas de cálculo de áreas de paralelogramos. Junto con esto, tomamos en cuenta que admitiera distintas estrategias de resolución en diferentes niveles de demanda cognitiva.

Figura 1. Texto del problema

PROBLEMA. PASEO RECTANGULAR

En el rectángulo interior de la siguiente figura se disponen dos circunferencias iguales, que son tangentes entre sí (se tocan en un punto) y que tocan al rectángulo interior en los puntos marcados. Alrededor del rectángulo interior se hace un paseo de 3 m de ancho, como se muestra en la figura (sombreado en el dibujo). El área del paseo es de 216 m^2.



¿Qué medidas tiene el rectángulo interior? Para resolver este problema no te guíes por las dimensiones aparentes de la figura. Explica por qué piensas esto, y si puedes, justifícalo matemáticamente.

ANÁLISIS TEÓRICO DEL PROBLEMA

El análisis teórico del problema lo basamos en una posible resolución correcta del problema que pueda hacer un estudiante medio de 7º básico, con el objetivo de valorar el nivel de DC que ella exige. En la Figura 2 presentamos una resolución de estas características, aunque la forma abreviada como verbalizamos la resolución no pretende reproducir la forma de expresarse de un estudiante medio de ese curso. Esta resolución muestra el uso de los contenidos matemáticos implícitos del problema, que son: i) establecer relaciones entre el diámetro de las circunferencias y las dimensiones del rectángulo interior, lo cual permite determinar que su base es el doble de su altura; ii) utilizar particiones de la superficie del paseo exterior, para determinar las dimensiones concretas del rectángulo interior; y iii) distinguir y utilizar correctamente los conceptos de área y longitud, para relacionar los datos con los valores pedidos.

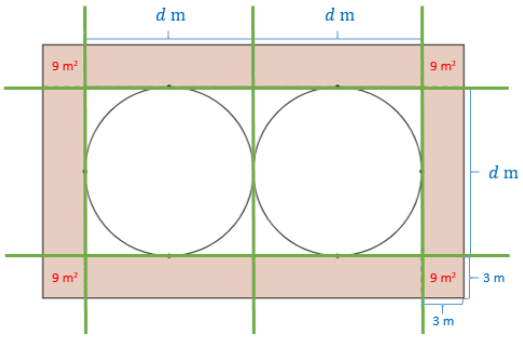
Figura 2. Posible resolución del problema

Al ser las circunferencias tangentes entre sí y tocar el rectángulo interior en los puntos marcados, si llamamos *d* al diámetro, tenemos que la altura del rectángulo interior mide *d* y su base mide 2*d*.

Basándonos en el diámetro de las circunferencias, podemos dividir la superficie del paseo exterior en las cuatro esquinas cuadradas y en varias regiones rectangulares congruentes, una de cuyas dimensiones esté relacionada con el diámetro. Por ejemplo, si dividimos el paseo en seis regiones, como muestra la figura inferior, un lado de cada región rectangular mide 3 metros y el otro lado mide *d* metros.

Al área del paseo exterior le restamos 36 m2, correspondientes a sus cuatro esquinas, resultando que las seis regiones rectangulares miden 180 m2 y, por tanto, cada región mide 30 m2.

Cada región rectangular mide 30 m2 y su lado menor mide 3 m, luego su lado mayor mide 10 m. Por tanto, las dimensiones del rectángulo interior son 20 m de base y 10 m de altura.



A partir de esta posible resolución del problema se puede situar esta tarea en el nivel de DC de *algoritmos con conexiones*, ya que los estudiantes deben establecer conexiones estrechas con los contenidos matemáticos implícitos y usarlos para la resolución con éxito del problema; concretamente, deben establecer relaciones entre el diámetro de las circunferencias, las dimensiones del rectángulo interior, las particiones realizadas del paseo exterior y el correcto uso de los conceptos de área y longitud. Todo ello requiere un esfuerzo cognitivo moderadamente alto. En la Tabla 1 mostramos el análisis detallado de esta resolución mediante las seis categorías de Benedicto (2018) que hemos presentado en el marco teórico.

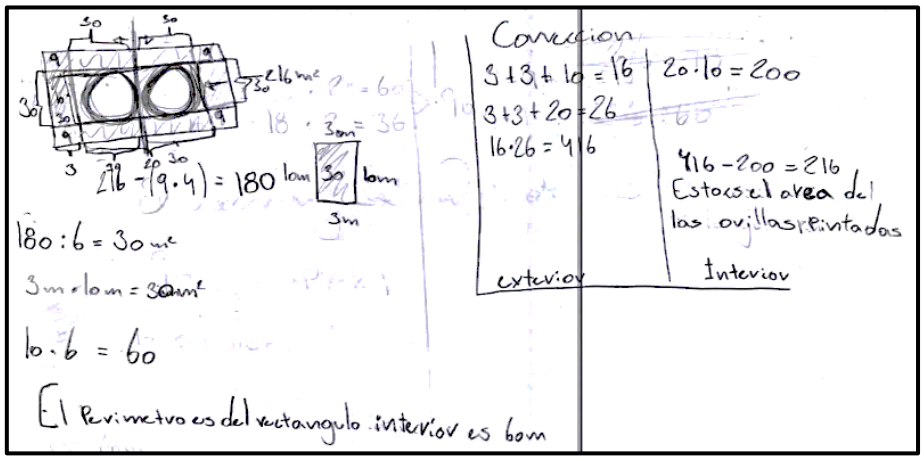
Tabla 1. Análisis teórico de la demanda cognitiva del problema

Nivel de DC	Categoría	Características
Algoritmos con conexiones	Finalidad	Calcular las medidas del rectángulo interior mediante una estrategia aritmética, estableciendo relaciones entre el diámetro de las circunferencias, las dimensiones del rectángulo interior, las particiones de la superficie del paseo exterior y el uso de los conceptos de área y longitud.
	Procedimiento de resolución	Se resuelve relacionando el diámetro de las circunferencias con las dimensiones del rectángulo interior y, después, con el paseo exterior, para realizar una partición del paseo en regiones congruentes cuya área se puede calcular. Conocida la medida del área de estar regiones, se determinan sus dimensiones y, a partir de ellas, las dimensiones del rectángulo interior.
	Esfuerzo cognitivo	Requiere un esfuerzo cognitivo moderadamente alto para identificar una relación adecuada entre el diámetro y las dimensiones del rectángulo interior y una partición útil del paseo exterior que ayude a calcular las dimensiones del rectángulo interior.
	Contenidos implícitos	Para resolver el problema, los estudiantes necesitan usar conscientemente la relación entre el diámetro y la longitud de los lados del rectángulo interior, las particiones de la superficie del paseo exterior en formas adecuadas y la utilización correcta de los conceptos de área y longitud.
	Explicaciones	Requiere explicaciones que hagan referencia a las relaciones del diámetro con las dimensiones del rectángulo interior, a la elección de la partición realizada del paseo y a la obtención de las dimensiones pedidas en el problema a partir de las áreas de las regiones de la partición.
	Representación de la solución	Se utilizan las representaciones geométrica y aritmética: la imagen proporcionada en el enunciado permite descubrir visualmente las relaciones entre los elementos geométricos del problema (diámetro, rectángulo, partición, etc.). Después, esta información visual hay que tratarla aritméticamente.

ANÁLISIS DE RESPUESTAS AL PROBLEMA

Hemos basado el análisis de las respuestas de los estudiantes en las seis categorías que organizan cada nivel de DC (Benedicto, 2018). Esto nos ha permitido identificar distintas estrategias de resolución utilizadas. A continuación, ejemplificamos el análisis de las resoluciones de los problemas usados en la experimentación mostrando las respuestas de dos estudiantes al problema. Estas respuestas son típicas de dos niveles de DC diferentes. La Figura 3 muestra la respuesta de un estudiante correspondiente al nivel de algoritmos con conexiones.

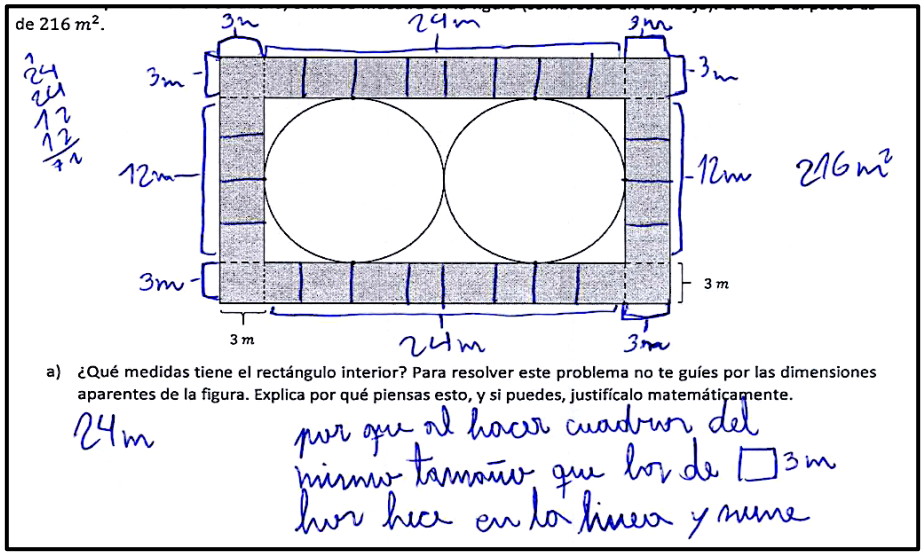
Figura 3. Respuesta de un estudiante del nivel de algoritmos con conexiones



En la Figura 3 observamos que el estudiante utilizó la estrategia de resolución presentada en el análisis teórico del problema, por lo que su respuesta se ajusta a todas las características del nivel de algoritmos con conexiones, mostradas en la Tabla 1. Junto con esto, en el lado derecho de su resolución muestra una comprobación aritmética de los resultados obtenidos, calculando la diferencia entre las áreas del rectángulo exterior y del interior, obteniendo el área del paseo exterior.

La Figura 4 muestra la respuesta de un estudiante situada en el nivel de algoritmo sin conexiones.

Figura 4. Respuesta de un estudiante del nivel de algoritmos sin conexiones



La respuesta de este estudiante es mayoritariamente visual. Esto se logra evidenciar cuando realiza las particiones de la superficie del paseo exterior sin considerar la relación entre en el diámetro de las circunferencias y las dimensiones del rectángulo interior, lo cual queda claro al escribir que sus particiones las hace mediante “cuadrados del mismo tamaño que los de 3 m”. Tampoco usa correctamente los datos del problema, pues no tiene en cuenta la medida de la superficie del paseo

(216 m^2). En la Tabla 3, presentamos el análisis detallado de la respuesta mediante las categorías de los niveles de DC, las cuales corresponden al nivel de algoritmos sin conexiones.

Tabla 3. Análisis de la demanda cognitiva de la respuesta de la Figura 4

Nivel de DC	Categoría	Características
Algoritmos sin conexiones	Finalidad	Determinar las medidas del rectángulo interior haciendo uso de particiones de la superficie del paseo exterior.
	Procedimiento de resolución	Usa una estrategia visual, dividiendo el paseo exterior en partes "del mismo tamaño" que los cuadrados de las esquinas y ayudándose de las marcas de los puntos de tangencia. Después, calcula las dimensiones del rectángulo interior contando la cantidad de partes en cada lado.
	Esfuerzo cognitivo	Requiere un esfuerzo cognitivo limitado, ya que se limita a dividir la superficie del paseo exterior visualmente y a calcular las dimensiones del rectángulo interior teniendo en cuenta la cantidad de partes.
	Contenidos implícitos	No los tiene en cuenta: utiliza las particiones del paseo exterior hechas de manera visual, por lo que no establece una conexión con el diámetro de las circunferencias para calcular las dimensiones del rectángulo interior. Tampoco usa el área del paseo rectangular para calcular la respuesta.
	Explicaciones	Aporta explicaciones que se enfocan a describir la partición del paseo exterior y cómo ha calculado las dimensiones del rectángulo interior.
	Representación de la solución	Utiliza la representación visual para mostrar la partición del paseo exterior considerando los cuadrados de las esquinas y la representación numérica para expresar las dimensiones del rectángulo interior.

Los análisis de estas dos resoluciones nos muestran dos casos de estudiantes situados en diferentes niveles de DC. El primer estudiante, en el nivel de algoritmos con conexiones, utilizó un procedimiento geométrico-aritmético, poniendo de manifiesto habilidades propias de la ACM, al identificar relaciones correctas entre los contenidos implícitos del problema y establecer conexiones entre datos y contenidos implícitos, lo cual le permitió obtener una respuesta correcta. Por otra parte, el segundo estudiante presenta una estrategia puramente visual, que no requiere ninguno de los contenidos implícitos del problema, lo que le impide obtener una respuesta correcta.

Tras analizar las respuestas de todos los estudiantes a este problema, tenemos que: 31 estudiantes (37,8%) dejaron el problema en blanco; 33 estudiantes (40,2%) presentaron ideas o estrategias que no tenían relación con lo pedido por el problema; 14 estudiantes (17,1%) mostraron respuestas en el nivel de algoritmos sin conexiones, lo cual no les permitió obtener la respuesta correcta; y 4 estudiantes (4,9%) en el nivel de algoritmos con conexiones. Dos de los últimos estudiantes solamente lograron establecer conexiones con parte de los contenidos implícitos, lo cual no les permitió obtener una respuesta totalmente correcta, mientras que los otros dos estudiantes establecieron conexiones con todos los contenidos implícitos, lo que les permitió obtener la respuesta correcta. Basándonos en esta diferencia, podemos afirmar que los dos últimos estudiantes son candidatos para tener ACM.

CONCLUSIONES

Para alcanzar el primer objetivo planteado, los niveles de DC (Benedicto, 2018) nos han ayudado a elaborar problemas que requieren distintos grados de esfuerzo cognitivo para su resolución correcta. En este texto hemos analizado un problema cuya resolución exige un alto nivel de DC.

En cuanto al segundo objetivo, el análisis de las resoluciones de los estudiantes ha evidenciado que es posible obtener respuestas de distintos niveles de DC para el mismo problema y ha mostrado que los estudiantes que lo han resuelto en el nivel más alto que el problema permite han puesto en juego durante sus resoluciones determinadas características propias de la ACM. Ello nos permite concluir

que el problema del paseo rectangular es adecuado para ayudar en la identificación de estudiantes con ACM en 7º básico del sistema escolar chileno.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i PID2020-117395RB-I00 y de la ayuda predoctoral PRE2021-097725, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por el FSE+.

Referencias

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* [Tesis de doctorado, Universidad de Granada, España]. http://hdl.handle.net/10481/1827

Benedicto, C. (2018). *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* [Tesis de doctorado, Universitat de Valencia, España]. http://hdl.handle.net/10550/66468

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). SEIEM.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Castro-Rodríguez, E. (2015). Retos, profesores y alumnos con talento matemático. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca, 21*, 85-104.

Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002) Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch, y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 219-226). MERGA.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(8), 14-17.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). PUV.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. The University of Chicago Press.

Manero, V., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2021). Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 161-183. https://doi.org/10.35763/aiem20.3998

Miller, R. (1990). *Discovering mathematical talent*. ERIC.

Ley 20.370 de 2009. Establece la Ley General de Educación. 12 de septiembre. Diario Oficial de la República de Chile Nº 39.461.

Ministerio de Educación (2020). *Priorización curricular COVID-19 Matemática. 1º Básico a 4º Medio*. Santiago, Chile: Mineduc.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodríguez Cao, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faisca. Revista de Altas Capacidades, 11*, 88-103.

Ruiz-Socolado, G. R. y Lupiáñez, J. L. (2022). Análisis de una tarea de invención de problemas realizada por alumnos con talento matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 519-527). SEIEM.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

ERRORES EN LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE FRACCIONES Y EFECTOS DE LA VARIABLE SITUACIÓN EN FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Errors on posed problems involving fractions and effects of the variable situation by prospective primary school teachers

Embid, S., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D.

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se estudia la formulación de problemas de fracciones por parte de estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria. El objetivo es analizar los errores y la ausencia de información de los enunciados planteados en función de la situación inicial de la que parten. Se solicita a 205 futuros docentes plantear problemas a partir de dos situaciones iniciales diferentes: datos numéricos (1/4 y 3/8) y un contexto (un viaje escolar). Se analizaron 274 problemas extraídos de una muestra de problemas de fracciones procedentes de un estudio más amplio, donde se utilizan distintos significados de fracción (Sosa-Martín et al., enviado). Los resultados muestran dificultades asociadas al significado de la unidad de referencia de la fracción en los casos parte-todo que indican la necesidad de incidir en ello a lo largo de la formación inicial de los docentes.

Palabras clave: *invención de problemas, variables, fracciones, futuros docentes*

Abstract

In this research we study fraction problem posing with preservice primary teachers. The aim is to analyze the mistakes and the lack of information in the posed statements based on the given initial situation. A total of 205 prospective teachers are asked to pose problems from two different initial situations: numerical data (1/4 and 3/8) and a context (a school trip). We analysed 274 problems extracted from a sample of problems of fractions from an extended research, where different meanings of fraction are used (Sosa-Martín et al., submitted). The results show difficulties associated with the meaning of the reference unit of the fraction in the part-whole case that indicate the need to influence it throughout the initial training of teachers.

Keywords: *problem posing, task variables, fractions, pre-service teachers*

INTRODUCCIÓN

En esta investigación, utilizamos la expresión formulación de problemas (en inglés, *problem posing)* para referirnos a la actividad mediante la cual una persona diseña, crea o inventa problemas matemáticos; esto incluye tanto la generación de problemas completamente nuevos como la reformulación de problemas dados (Silver, 1994). En los últimos años, numerosos investigadores se han interesado por la formulación de problemas, analizando tanto la naturaleza de ésta como el papel que desempeña en el aula de matemáticas (por ejemplo, Singer et al., 2013). La formulación de problemas por parte de los estudiantes de cualquier nivel educativo es considerada como una actividad efectiva, pues contribuye a la construcción de conocimiento a partir de la integración de estructuras matemáticas ya existentes (Kiliç, 2015). Señalan Singer et al. (2013) que para que el profesorado genere espacios dedicados a la formulación de problemas, previamente debe haber experimentado esta actividad con el fin de reconocer las características relevantes a tener en cuenta. Cai y Hwang (2020) indicaron que son necesarias más investigaciones acerca de cómo el

Embid, S., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., García-Alonso, I. y Sosa-Martín, D. (2023). Errores en la formulación de problemas de fracciones y efectos de la variable situación en futuros docentes de primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 219–226). SEIEM.

profesorado formula problemas y cómo lo integra en la enseñanza de las matemáticas. En España, tenemos varios ejemplos de investigaciones en esta línea (García-Alonso et al., 2022; Sosa-Martín et al., enviado; Torregrosa et al., 2021). En el estudio que se presenta a continuación se analizan problemas de fracciones de futuros docentes de Educación Primaria con el objeto de observar sus principales errores, teniendo en consideración la situación que se les ofrece para su formulación.

MARCO TEÓRICO

Las actividades de formulación de problemas pueden presentar distintas estructuras. Cai et al. (2022) distinguen dos partes en la tarea de formulación de problemas: la situación y el *prompt*. La situación se refiere a la información inicial a partir de la cual se formula el problema. Por ejemplo, una situación puede ser un conjunto de datos, un contexto o incluso un problema. El *prompt*, comprende las condiciones para dicha formulación. Por ejemplo, "formular tantos problemas como te sea posible". Un mismo *prompt* puede ir precedido por distintas situaciones y viceversa.

Una vez planteados los problemas, las investigaciones se han interesado en observar diferentes características. Por ejemplo, Cankoy y Özder (2017) analizaron aspectos como la resolubilidad, razonabilidad, estructura matemática, contexto y lenguaje. La resolubilidad está relacionada con la clasificación de Grundmeier (2015), quien distingue entre problema: a) *no plausible* si contiene afirmaciones no válidas y no es resoluble aun cuando se añada más información; b) *plausible sin información suficiente* si puede resolverse aunque el enunciado sobreentiende (o no hace explícita) parte de la información; c) *plausible con información suficiente de una tarea* si para resolverlo se requiere un único paso*;* y d) *plausible con información suficiente de varias tareas matemáticas* si requiere más de un paso. La razonabilidad hace referencia a si la información o los datos del enunciado son realistas y tienen sentido en el contexto en el que se formula el problema. La estructura matemática refiere a la actividad matemática implicada (p.ej., tipos de incógnitas del problema). En el contexto se distingue si corresponde a temas habituales en las tareas de aula y, por último, en el lenguaje se puede observar si este es claro y comprensible. Por su parte, en García-Alonso et al. (2022) se analizaron 52 problemas de fracciones formulados por 18 futuros profesores de educación primaria, observando la plausibilidad, la demanda cognitiva, esto es, la graduación de la dificultad de la resolución de los problemas, distinguiendo entre conocer, aplicar y razonar (Mullis et al., 2021), el significado del concepto de fracción (parte-todo, operador, medida, cociente y razón) y la estructura matemática (ordenación, adición y multiplicación). Los resultados mostraron un alto número de problemas plausibles, de aplicar, predominando el significado parte-todo con estructura aditiva; no aparecieron significados de las fracciones como cociente o razón.

En un estudio posterior de los autores (Sosa-Martín et al., enviado), se analizaron 1217 problemas de fracciones formulados por 205 futuros docentes de educación primaria. Se observó para cada problema formulado: la plausibilidad, la razonabilidad en relación con el contexto, la estructura matemática y el significado de fracción. Los resultados mostraron que la mayoría de los problemas (75,7%) eran plausibles tal y como se habían formulado. Sin embargo, un 22,5% presentaba algún tipo de error matemático (lo que los convertía en no plausibles), o bien, requería que se añadiera cierta información para poder ser resueltos. El resto (1,8%) eran problemas cuya resolución no requería del uso de fracciones. Si bien los resultados pueden tener una lectura positiva, preocupa que casi la cuarta parte de los problemas formulados por los futuros maestros no fueran resolubles. Por esa razón, nos planteamos un estudio profundo sobre las razones que los hacen no plausibles.

OBJETIVOS

El objetivo del presente estudio es analizar los problemas sobre fracciones planteados por futuros docentes de primaria, a partir de dos situaciones distintas, en concreto:

1. Identificar los tipos de errores que presentan los problemas no plausibles.

2. Identificar el tipo de información que falta en aquellos problemas que, siendo plausibles, requieren de la incorporación de algún dato para ser resueltos.
3. Explorar relaciones entre el tipo de situación que se presenta en la tarea de formulación de problemas, los tipos de errores y la información necesaria, aunque omitida.

METODOLOGÍA

Participantes e instrumento

La investigación se llevó a cabo con 205 estudiantes de la asignatura Didáctica de la Numeración, de la Estadística y el Azar, de 3º del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. Estos estudiantes en ningún momento previo a este estudio recibieron formación específica sobre formulación de problemas. Se diseñó un cuestionario con tres actividades de formulación de problemas. Cada actividad presentaba una situación inicial diferente: datos numéricos proporcionados de forma aislada (*1/4 y 3/8*), información contextualizada (*Viaje escolar*) y un problema a resolver. La primera actividad se tomó de Kiliç (2015) y la segunda se diseñó por los autores buscando que fuera un contexto escolar. Las dos actividades se plantearon con un mismo *prompt:* "formula tres problemas de diferente dificultad". Los estudiantes debían distinguir el nivel de dificultad aplicando lo aprendido en la asignatura, si bien, podían tener su propio criterio como resolutores experimentados. En este trabajo, presentamos el análisis de esas dos actividades, que hemos denominado PP-Num y PP-Context, haciendo referencia al tipo de situación inicial (Figuras 1 y 2). Esto nos permite analizar los posibles efectos de la situación en los errores y la información ausente (objetivo 3).

Figura 1. Enunciado de la actividad PP-Num

Actividad 1. Formula tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números 1/4 y 3/8. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución.

Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...).

Figura 2. Enunciado de la actividad PP-Context

Actividad 2. Formula tres problemas de distinta dificultad, en los que intervengan fracciones y cuyo contexto inicial sea el siguiente: *En un viaje de fin de curso participan 18 estudiantes, la maestra pregunta a qué lugares les gustaría viajar.*

Recuerda que puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...), sin modificar la dada en el recuadro.

Para responder a cada una de estas actividades, los participantes dispusieron de un máximo de 15 minutos y debían emplear únicamente lápiz y papel.

Proceso de análisis de los datos

Los participantes formularon un total de 1217 problemas, puesto que algunos solo indicaron uno o dos: 603 problemas a partir de la situación PP-Num y 614 problemas a partir de la situación PP-Context. Cada problema se codificó de acuerdo con las categorías de análisis descritas en la Tabla 1 y se realizó un análisis de frecuencias de cada categoría (Sosa-Martín et al., enviado).

Tabla 1. Categorías de análisis de la plausibilidad y suficiencia de datos de los problemas formulados

Categoría	Descripción
NF	No involucra fracciones.
NP	No plausible por contener errores matemáticos.
P1	Plausible con información insuficiente (no explícita) para ser resuelto.
P2	Plausible con información suficiente y una única tarea matemática para ser resuelto.
P3	Plausible con información suficiente y varias tareas matemáticas para ser resuelto.

Se encontraron 94 problemas de la categoría NP y 180 de la categoría P1. En ellos, se realizó un análisis de contenido y un proceso de comparación exhaustiva (Creswell, 2012) para identificar los

errores y la información ausente (objetivos 1 y 2). Se siguió un proceso de codificación múltiple ciego con cuatro codificadores. El análisis de estos 274 problemas se presenta a continuación.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

Tipos de errores en los problemas formulados

Al estudiar los errores matemáticos en los problemas no plausibles (NP), encontramos cuatro tipos principales: *superar la unidad cuando esto es incoherente matemáticamente en el problema formulado* (E1), *identificar el total con una fracción inferior a la unidad* (E2), *operar con fracciones que se refieren a unidades distintas* (E3) y *establecer relaciones erróneas entre distintas partes del total* (E4). Evidenciamos también *errores atribuidos a otras causas* (E5). La tabla 2 muestra la distribución de estos tipos de errores en cada una de las actividades.

Tabla 2. Número (porcentaje) de problemas no plausibles clasificados por sus errores matemáticos

		Tipo de error					
	Actividad	E1	E2	E3	E4	E5	Total
	PP-Num	7 (14,9)	10 (21,3)	12 (25,5)	3 (6,4)	15 (31,9)	47
	PP-Context	33 (70,2)	3 (6,4)	-	-	11 (23,4)	47
Total	-	40 (42,6)	13 (13,8)	12 (12,8)	3 (3,2)	26 (27.7)	94

Nota. Porcentajes (por filas) respecto al total de problemas formulados en PP-Num, PP-Context y el conjunto total de problemas.

Lo primero que se observa en el análisis de los 94 problemas no plausibles es la diferencia en cuanto a los tipos de errores que aparecen en una y otra situación, habiendo una mayor diversidad en los problemas formulados para PP-Num. Los errores que aparecen con mayor frecuencia están relacionados con superar la unidad (E1). Comparando las dos situaciones, se observa que este error aparece con mayor frecuencia en PP-Context (70,2%) que en PP-Num (14,9%). Mostramos en la figura 3 un ejemplo de error de tipo E1 para PP-Num donde, la solución del problema supera la unidad: 1/4+12/4=13/4. En la figura 4 apreciamos otro ejemplo de error de tipo E1 para PP-Context donde se observa el uso de la cantidad 12/6 que, claramente, supera la unidad.

Figura 3. Error de tipo E1 (PP-Num)

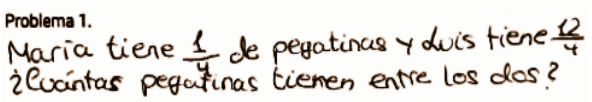
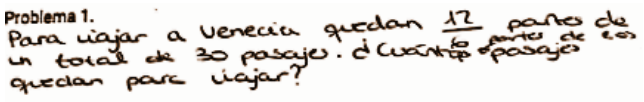


Figura 4. Error de tipo E1 (PP-Context)



Los errores tipo E2, sin embargo, aparecen con mayor frecuencia en la situación PP-Num (21,3%) que en PP-Context (6,4%). La figura 5 incluye un problema en la situación PP-Num donde se observa un error tipo E2, ya que se identifica la unidad con una cantidad menor que 1 (7/8). La figura 6 proporciona otro ejemplo para PP-Context, donde los alumnos que pueden pagar el viaje se corresponden con 1/4 del total y los que no con 2/5, que no completan la unidad: 1/4+2/5=13/20.

Figura 5. Error de tipo E2 (PP-Num)

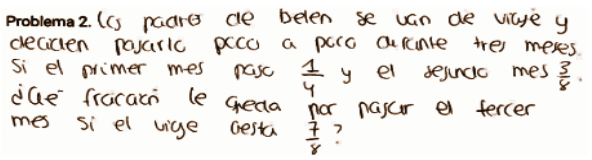
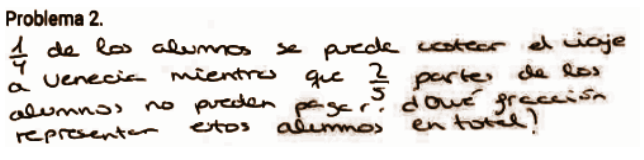


Figura 6. Error de tipo E2 (PP-Context)



El tercer tipo de error (E3), relacionado con el hecho de ignorar que las fracciones deben referirse a una unidad común para poder operar con ellas o compararlas, aparece únicamente en la situación

PP-Num (25,5%). Un ejemplo de este error se observa en la figura 7, donde se pide operar con pizzas y tartas sin tener en cuenta que obedecen a unidades distintas. El error tipo E4 se produce al establecer relaciones incorrectas entre distintas partes del total y se observó únicamente en la situación PP-Num (6,4%). La figura 8 muestra un ejemplo donde hay una única unidad de referencia para la que aparecen dos supuestos incompatibles matemáticamente: 1/4 equivale a 80€ (320€ en total); y 3/8 equivale a 720€ (1920€ en total).

Figura 7. Error de tipo E3 (PP-Num)

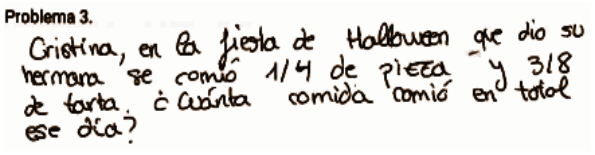
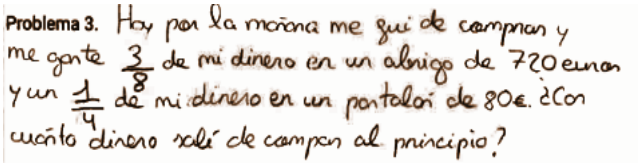


Figura 8. Error de tipo E4 (PP-Num)



Por último, los errores tipificados como otros (E5), incluyen situaciones donde la pregunta que se formula no tiene sentido desde un punto de vista matemático. La figura 9 muestra un problema donde el futuro maestro confunde la cantidad de fruta y de carne (en kg.) con el volumen de una cesta en PP-Num. En la figura 10 se muestra un ejemplo de problema formulado en PP-Context, donde se realiza una pregunta que no tiene sentido dada la información que se proporciona, puesto que pide obtener la fracción total de personas que viaja, lo que en este caso corresponde con la unidad y para indicarlo no es necesario usar nada de lo que se indica en el enunciado. Este tipo de errores aparece en ambas situaciones siendo más numerosos en PP-Num.

Figura 9. Error de tipo E5 (PP-Num)

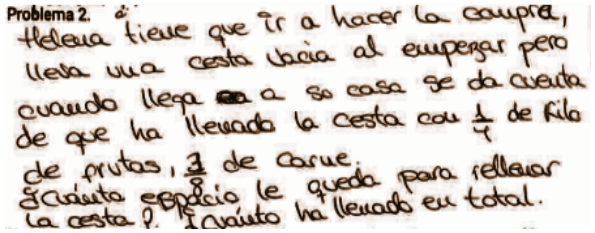
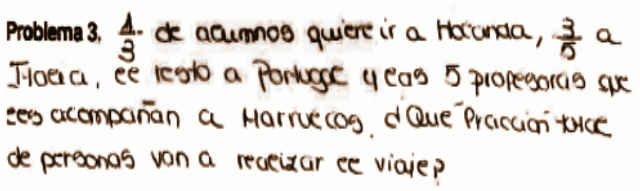


Figura 10. Error de tipo E5 (PP-Context)



Tipo de información ausente en los problemas formulados

En cuanto al análisis del tipo de información que falta en los problemas planteados, encontramos omisiones de la *cantidad total* (I1), la *igualdad de las unidades o partes* (I2) y alguna de las *partes del todo* (I3). Asimismo, evidenciamos casos en se observan *combinaciones de ausencias de información* (I4) y *ausencias diferentes a las anteriores* (I5). La tabla 3 muestra un resumen de los resultados al analizar el tipo de información que falta en los problemas codificados como P1.

Tabla 3. Número (porcentaje) de problemas plausibles clasificados por la información faltante

		Tipo de información que falta					
	Actividad	I1	I2	I3	I4	I5	Total
	PP-Num	48 (32,2)	48 (32,2)	12 (8,1)	18 (12,1)	23 (15,4)	149
	PP-Context	-	1 (3,2)	22 (71)	-	8 (25,8)	31
Total	-	48 (26,7)	49 (27,2)	34 (18,9)	18 (10)	31 (17,2)	180

Nota. Porcentajes (por filas) respecto al total de problemas formulados en PP-Num, PP-Context y el conjunto total de problemas.

Lo primero que se observa es una gran diferencia entre la cantidad de problemas en los que falta información para cada una de las dos situaciones; el 24,7% del total de los problemas propuestos a partir de la situación PP-Num carecen de información suficiente (149 de 1217), lo que contrasta con

el 5% en la misma categoría para la situación PP-Context (31 de 1217). Estas diferencias podrían explicarse a partir de la información proporcionada en uno y otro caso, pues en PP-Context se indica un monto o cantidad total (18 estudiantes) sobre el que pueden actuar las fracciones. Todos los problemas codificados como I1 corresponden a la situación PP-Num. Por ejemplo, la figura 11 muestra un problema donde se indican fracciones sobre una cantidad de cromos indeterminada que debe ser dada al resolutor para poder responder a la pregunta. En ocasiones, esta falta de información sobre la cantidad total aparece unida a información ausente de otro tipo. Esta tipología es específica de PP-Num. En la figura 12, se muestra un problema en el que se omite una combinación de información (I4) ya que no se indica ni en el número de trozos de la tarta de cumpleaños (I1) ni el reparto en partes iguales de trozos de igual tamaño (I2).

Figura 11. Información I1 (PP-Num)

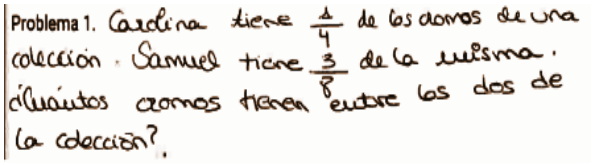
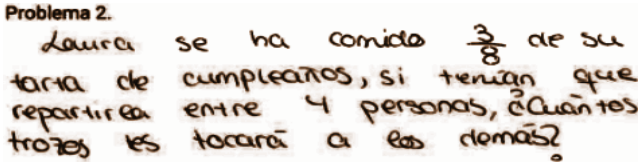


Figura 12. Información I4 (PP-Num)



Por su parte, la igualdad de las partes o unidades se omite, sin combinar con otras omisiones de datos (I2), en el 27,2% del total de problemas formulados. Esta categoría, si bien no es exclusiva de PP-Num, solo contiene un problema de PP-Context (3,2%). En la figura 13 observamos un problema de PP-Num donde no se especifica que, para poder juntar las partes de tarta que sobran, estas deben ser del mismo tamaño (igualdad de las unidades). La figura 14 corresponde a un problema de reparto de PP-Context donde se pide expresar la solución en fracciones (54/18) pero no se indica ni que los trozos de la pizza sean de igual tamaño ni que el reparto sea en partes iguales.

Figura 13. Información I2 (PP-Num)

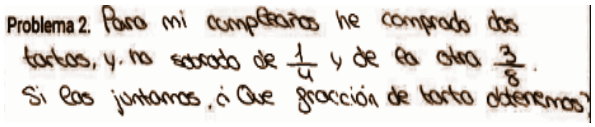
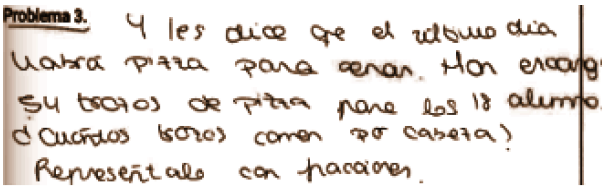


Figura 14. Información I2 (PP-Context)



La omisión de una de las partes del todo (I3) se observa en casi un 20% del total de problemas formulados por los futuros maestros; se recoge en el 8.1% de los problemas de PP-Num y el 71% de PP-Context. Esta diferencia podría estar mediada por el contexto del viaje, ya que muchos futuros docentes podrían estar sobreentendiendo que al preguntar por un destino que no aparece en el listado, necesariamente debe ser el escogido por los estudiantes que no han votado. Lo ilustramos en las figuras 15 y 16. En la figura 15 mostramos un ejemplo de PP-Num donde se señala la composición de una pizza con al menos cuatro ingredientes, pero únicamente se da información sobre tres de ellos. Esto es análogo a lo que se muestra en la figura 16: con tres posibles destinos para PP-Context e información sobre únicamente dos de ellos. Por último, la información de otro tipo (I5), responde a elementos de los más variados, en los que no ha sido posible identificar un patrón común. Por ejemplo, en un problema de PP-Context habría que especificar que los estudiantes que prefieren la playa son los únicos que votan viajar a una isla.

Figura 15. Información I3 (PP-Num)

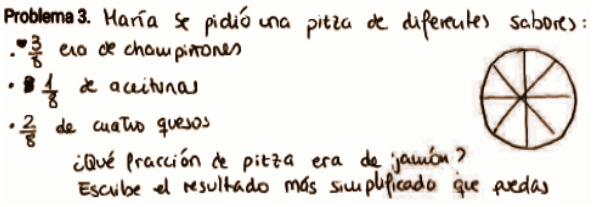
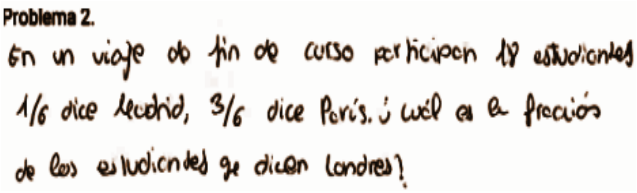


Figura 16. Información I3 (PP-Context)



Conclusiones

Este estudio nos ha permitido profundizar en el análisis sobre la forma en que los futuros maestros de primaria abordan la formulación de problemas de fracciones, centrando la atención en los errores que cometen (objetivo 1) y la información que omiten (objetivo 2). Además, nos ha permitido explorar posibles relaciones entre la situación a partir de la cual se les pedía formular los problemas frente a los errores y el tipo de información ausente (objetivo 3). El estudio se realizó a partir de dos actividades de formulación de problemas con un mismo *prompt* (formula tres problemas de diferente dificultad) y diferentes situaciones iniciales: datos numéricos 1/4 y 3/8 (PP-Num) y la realización de un viaje (PP-Context). En relación con los errores (objetivo 1), se encontraron cuatro tipos principales: superar la unidad cuando esto es incoherente matemáticamente en el problema formulado, identificar el total con una fracción inferior a la unidad, operar con fracciones que refieren a unidades distintas y establecer relaciones erróneas entre distintas partes del total. Al comparar los errores presentes en las situaciones PP-Num y PP-Context (objetivo 3), se aprecian diferencias, siendo más variados en PP-Num (Tabla 2). En esta situación aparecen errores que no se observaron en la situación PP-Context, relacionados con operar con fracciones que refieren a unidades distintas y establecer relaciones erróneas entre distintas partes del total. Superar la unidad cuando esto es incoherente matemáticamente en el problema formulado, es un error que aparece con más frecuencia en problemas que parten de PP-Context; mientras que el resto de errores aparece con más frecuencia en la situación PP-Num. Al analizar el tipo de información que falta en algunos de los problemas planteados por los futuros maestros (objetivos 2 y 3) se observa que la situación de partida condiciona tanto la cantidad de problemas con falta de información como el tipo de información que falta. El 24,7% del total de los problemas propuestos a partir de una situación PP-Num carecían de información suficiente frente al 5% en la misma categoría para la situación PP-Context. Esto está en consonancia con estudios previos donde se constata que los futuros docentes crean mejores problemas cuando se les da información previa (Crespo, 2003). En la situación PP-Num, las principales ausencias de información tenían que ver con la cantidad total y la igualdad de las unidades o partes; mientras que en la situación PP-Context con una de las partes del todo (Tabla 3). Consideramos que el maestro en formación puede tomar estos aspectos como algo "dado", lo que le llevaría a no matizar la composición de las partes de la unidad (o la unidad misma).

En resumen, este estudio muestra que la formulación de problemas pone de manifiesto qué comprenden y qué dificultades tienen los futuros maestros (Xie y Masingila, 2017). El trabajo ha servido para identificar los aspectos conceptuales que es necesario discutir en la formación inicial de maestros relacionados con las fracciones y la formulación de problemas. Así, se muestra la necesidad de profundizar en la enseñanza de la unidad (Valdemoros, 2001), alertando de la exigencia de incluir cierta información en los problemas formulados. Finalmente, se refleja la importancia de promover acciones formativas para que los docentes desarrollen sus habilidades de formulación de problemas y sepan cómo implementarlas en su trabajo de aula (Ellerton, 2013).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto ProID2021010018, del Gobierno de Canarias, cofinanciado por el Programa Operativo FEDER Canarias 2014-2020.

Referencias

Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119-145). PME.

Cankoy, O. y Özder, H. (2017). Generalizability Theory Research on Developing a Scoring Rubric to Assess Primary School Students' Problem Posing Skills. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 2423-2439. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01233a

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research.* Pearson.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 87-101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J. (2022). Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: algunas características. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 295-304). SEIEM.

Grundmeier, T. A. (2015). Developing the problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. En F. M. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds), *Mathematical problem posing* (pp. 411-431). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Kiliç, C. (2015). Analyzing pre-service primary teachers' fraction knowledge structures through problem posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(6), 1603-1619. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1425a

Mullis, I. V. S., Martin, M. O. y von Davier, M. (2021). TIMSS 2023 Assessment Frameworks. En I. V. S. Mullis, M. O. Martin, y M. von Davier. (Eds.), *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics,14*(1),19-28.

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 1-7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Sosa-Martín, D., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., Almeida, R. y García-Alonso, I. (enviado). Situations and plausibility when prospective teachers pose problems.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: la estrategia de resolución con relación al problema inventado. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595 – 602). SEIEM.

Valdemoros, M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: Estudio de casos. *Educación matemática, 13*(1), 51-67. https://doi.org/10.24844/EM1301.04

Xie, J. y Masingila, J.O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 101-118. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

CARACTERÍSTICAS DE MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES EN EL DOMINIO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Characteristics of prospective secondary mathematics teachers' professional noticing of students' proportional reasoning

Espinoza-González, J.[a], Buforn, À.[b] y Llinares, S.[b]

[a] Universidad Nacional, Costa Rica, [b] Universidad de Alicante, España

Resumen

El objetivo del estudio es caracterizar la competencia docente "mirar profesionalmente" el razonamiento proporcional de estudiantes en profesores de matemáticas de educación secundaria en formación. Catorce estudiantes para profesor de matemáticas participaron en una propuesta formativa centrada en aprender a analizar cómo estudiantes de educación secundaria resuelven problemas de proporcionalidad. Los estudiantes para profesor resolvieron una práctica profesional en la que se evaluaron las tres destrezas vinculadas a la competencia docente "mirar profesionalmente": identificar, interpretar y decidir. Se caracterizaron tres niveles de desarrollo que definen perfiles de esta competencia e informan sobre su desarrollo.

Palabras clave: *mirar profesionalmente; razonamiento proporcional; formación de profesores*

Abstract

The objective of this study is to characterize prospective secondary mathematics teachers' professional noticing of students' proportional reasoning. Fourteen prospective mathematics teachers participated in a teaching experiment focused on learning to notice how secondary school students solve proportional problems. Prospective teachers solved a professional practice in which the three skills linked to professional noticing were evaluated: identify, interpret and decide. Three levels of development were characterized that define profiles of this competence and inform about its development.

Keywords: *professional noticing, proportional reasoning, teacher training*

INTRODUCCIÓN

Mirar profesionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una competencia docente que permite reconocer aspectos que son de importancia en las situaciones de enseñanza y que otros profesionales no serían capaces de reconocer (Dindyal et al., 2021). Un foco particular de esta competencia es mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, entendido como la habilidad de identificar aspectos relevantes en los procedimientos de resolución de los problemas empleados por los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes que estos procedimientos evidencian y tomar decisiones de acción para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje (Jacobs et al., 2010).

Un objetivo relevante en educación secundaria es el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes. En el caso de Costa Rica su estudio es considerado un preámbulo al tema de funciones. Con especificidad, se pretende que los estudiantes utilicen modelos sencillos de fenómenos y situaciones del contexto que tienen que ver con razones y proporciones (MEP, 2012). Debido a lo anterior, es fundamental que docentes en formación aprendan a interpretar niveles de desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes cuando resuelven problemas de proporcionalidad. Sin embargo, investigaciones previas muestran las dificultades en el desarrollo de esta competencia tanto

Espinoza-González, J., Buforn, À. y Llinares, S. (2023). Competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de estudiantes de un grupo de profesores en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 227–234). SEIEM.

en profesores en ejercicio como en profesores en formación (Buforn et al., 2022; Burgos, y Godino, 2022a; 2022b; Fernández et al., 2011; Hines y McMahon, 2005). El estudio que se presenta se sitúa en este ámbito de investigación y pretende caracterizar aspectos de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de estudiantes de secundaria en relación con el razonamiento proporcional en profesores en formación.

MARCO CONCEPTUAL

Desarrollo del Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional consiste en la habilidad de establecer una relación multiplicativa entre dos cantidades, y extenderla a otro par de cantidades (Lamon, 1993) y la capacidad de reconocer situaciones proporcionales de las no proporcionales (van Dooren et al., 2005). Investigaciones previas han caracterizado el desarrollo del razonamiento proporcional a través de tres transiciones en la manera de razonar de los estudiantes (Lobato et al., 2010) (Tabla 1). Aprender a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las razones y proporciones implica que los profesores en formación deben aprender a identificar las características de estas transiciones.

Tabla 1. Transiciones entre los niveles del razonamiento proporcional (adaptados de Lobato et al., 2010)

	Descripción
1	*Del pensamiento absoluto al pensamiento relativo*. El estudiante pasa de enfocarse en una sola cantidad a prestar atención a la relación entre dos cantidades. El estudiante inicia la construcción de la idea de razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades de igual o distinta magnitud. En esta transición, el estudiante puede relacionar erróneamente de manera aditiva las cantidades cuando la situación es proporcional o multiplicativamente cuando es no proporcional.
2	*De considerar una razón a formar múltiples razones*. El estudiante identifica relaciones multiplicativas entre cantidades de igual magnitud y las traslada a las cantidades homologas en otra magnitud. En esta transición el estudiante construye y usa razones escalares que evidencian la invarianza de las razones escalares e inicia la comprensión de la constancia de las razones funcionales. Sin embargo, el estudiante tiene dificultades en representar algebraicamente la idea de que la razón funcional es constante
3	*De usar razones funcionales a representarlas*. Implica usar la constancia de las razones funcionales (constante de proporcionalidad) y expresarla en diferentes representaciones (tabular, verbal o algebraicamente).

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010), se entiende como la interrelación de tres destrezas: (i) identificar elementos matemáticos en las estrategias usadas por los estudiantes; (ii) interpretar su comprensión; y (iii) decidir cómo ayudarles a seguir progresando en su aprendizaje. En el dominio del razonamiento proporcional, la destreza identificar implica ser capaz de reconocer las relaciones usadas entre las cantidades y considerar si la situación es proporcional o no. La destreza interpretar conlleva mirar globalmente las resoluciones del estudiante a una serie de problemas, para reconocer características del desarrollo del razonamiento proporcional. Finalmente, la destreza decidir incluye proponer nuevos problemas o acciones de enseñanza a partir de la interpretación realizada.

Teniendo en cuenta estas referencias previas, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué características de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional se pueden identificar en profesores en formación al participar en una propuesta formativa? En particular, ¿de qué manera el desarrollo de las diferentes destrezas está vinculado a los diferentes aspectos de las respuestas de los estudiantes?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 14 profesores en formación (PFs) de Matemática de Educación Secundaria que cursaban el tercer año de su formación en una universidad pública de Costa Rica. Los PFs participaron en una propuesta formativa de 17 semanas de duración (una sesión semanal de 2 horas y 30 minutos), dirigida al desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de la razón y proporción". En esta comunicación se presentan los resultados de la competencia específica mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción, la cual se promovió en las tres primeras sesiones de la propuesta formativa.

En la primera sesión, los PFs resolvieron cinco problemas sobre razones y proporciones y discutieron sobre las estrategias empleadas en su resolución. En la segunda sesión, los PFs analizaron estos problemas apoyándose en un documento con información sobre las características de los problemas proporcionales (valor perdido, comparación numérica y predicción cualitativa) y no proporcionales (aditivo, afín y constante) y los aspectos que dificultan su resolución (existencia de razones enteras y no enteras) (Fernández y Llinares, 2012). Además, se mostraron ejemplos de estrategias correctas (enfoque escalar, enfoque funcional, estrategia constructiva, regla de tres, unificación de antecedentes o consecuentes, reducir a la unidad la razón funcional y comparar cocientes) e incorrectas (estrategia aditiva y comparación de dos cantidades de igual magnitud). En la tercera sesión, los PFs discutieron información sobre las características de las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes de educación secundaria (Lamon, 1993; Lobato et al., 2010).

Para realizar estas actividades, los propios PFs se organizaron en grupos de trabajo según sus afinidades. La única indicación para su conformación fue que cada grupo debía tener a lo sumo tres integrantes. De esta manera, cinco de los grupos tenían dos integrantes (G1, G2, G3, G4 y G5), uno tres integrantes (G6) y un estudiante trabajó de forma individual (G7).

Instrumento y procedimiento

Al finalizar las tres sesiones, los FPs resolvieron una "práctica profesional" que presentaba las respuestas de tres estudiantes (E1, E2, E3) a cinco problemas idénticos o con algunas modificaciones a los que habían resuelto en la sesión 1 (que podemos considerar como un registro de la práctica). En este registro de la práctica se plantearon tres cuestiones como una forma de favorecer la atención selectiva de los FPs hacia las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1).

Figura 1. Cuestiones planteadas a los FPs en la práctica profesional

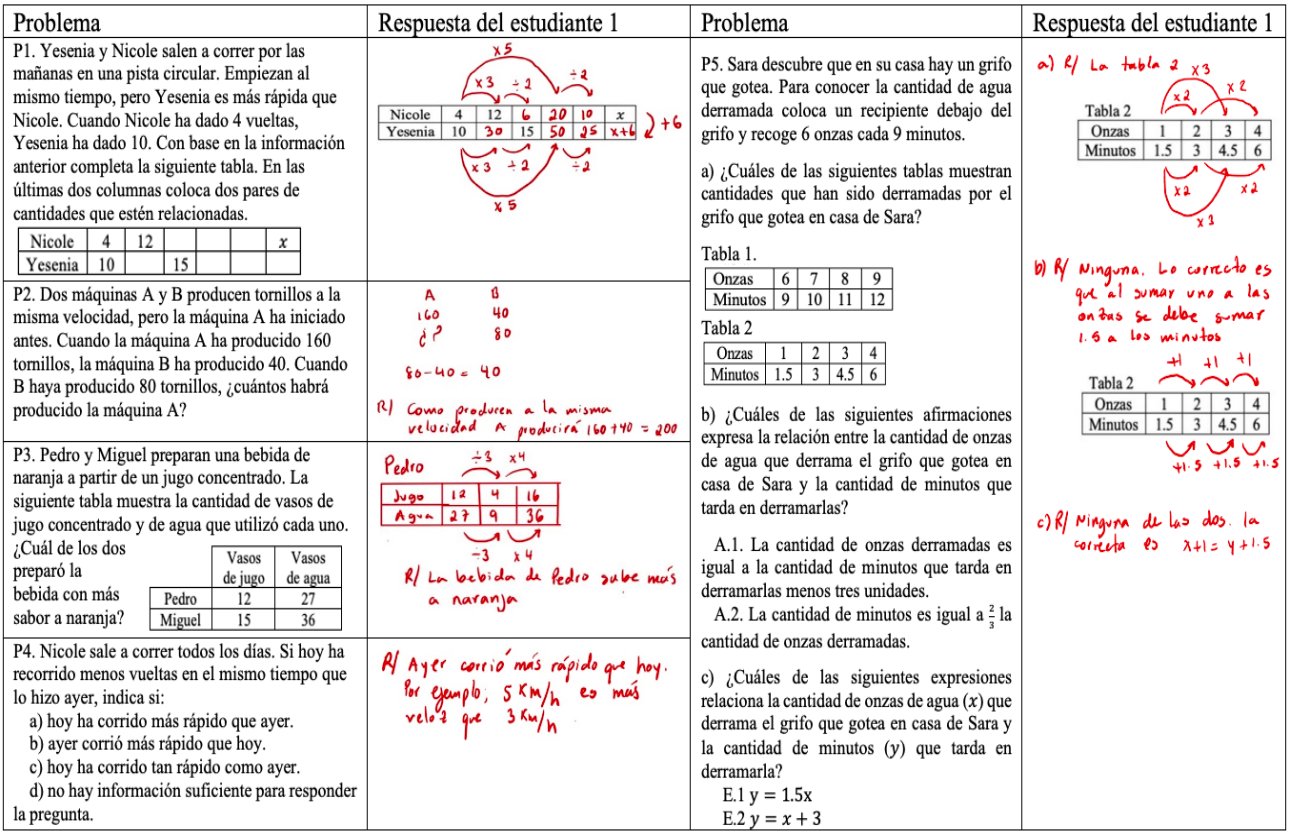
A continuación, se muestran respuestas de tres estudiantes a cinco problemas de las prácticas 1 y 2, con algunas modificaciones leves. Ahora realiza lo siguiente:

1. Analiza el pensamiento matemático de cada estudiante con base en los siguientes criterios.
   a) IDENTIFICAR. Describe la estrategia utilizada sin importar si es correcta o no. En caso de ser incorrecta explica qué es lo que el estudiante no comprende.
   b) INTERPRETAR el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional. A partir de las respuestas dadas por un mismo estudiante a todas las tareas, identifica las transiciones que ha logrado alcanzar y aquellas que aún debe superar en su pensamiento para desarrollar su razonamiento proporcional. Con base en lo anterior, indica el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional alcanzado por cada estudiante. Justifica tu respuesta.
2. DECISIONES DE ACCIÓN ¿Qué cuestiones o qué otras tareas propondrías para promover las transiciones en el pensamiento del estudiante que apoyan el desarrollo de su razonamiento proporcional.

Respecto a los problemas (Figura 2), cada uno fue diseñado con un propósito y presentaban distintas características. El problema 1 (P1) pide completar una tabla de proporcionalidad y expresar la relación funcional de forma algebraica. Se caracteriza por presentar una razón funcional no entera y dos razones escalares, una entera y otra no entera. El problema 2 (P2) es una situación no proporcional. El problema 3 (P3) es un problema de comparación numérica de razones en un contexto de mezcla. Muestra en una tabla dos razones funcionales no enteras y dos escalares no enteras. El problema 4

(P4) es un problema de comparación cualitativa inmersa en un contexto familiar. Por último, el problema 5 (P5) presenta diferentes representaciones (tabular, verbal y algebraica) de una relación funcional.Las respuestas hipotéticas a estos problemas se diseñaron para reflejar diferentes características del desarrollo del razonamiento proporcional. En particular, las respuestas de E1 a los cinco problemas (Figura 2) muestran que reconoce y usa relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud y las traslada a las cantidades correspondientes de la otra magnitud, y que, además, distingue situaciones no proporcionales. Sin embargo, no utiliza razones funcionales excepto en contextos familiares y tiene dificultades para representar la relación funcional de forma verbal o algebraica (Transición 2). Las producciones de E2 se centran en el uso incorrecto de las relaciones aditivas (cuando deben ser multiplicativas) y multiplicativas (cuando deben ser aditivas) (características de la transición 1). Las respuestas de E3 indican que distingue las situaciones aditivas de las proporcionales y usa y representa la razón funcional (características de la transición 3).

Figura 2. Los cinco problemas y las respuestas del estudiante 1



Análisis

Los datos del estudio son las respuestas de los siete grupos de PFs a la práctica descrita. Se adaptó el proceso analítico de Jacobs et al. (2010; 2022), para valorar con una escala de 0 a 3 las respuestas de cada grupo de PFs con relación a cada estudiante y para cada una de las tres destrezas (Tabla 2). De esta manera, a cada grupo de PFs se le asignaron 9 puntuaciones (3 destrezas x 3 estudiantes). Posteriormente, se resumieron las puntuaciones para cada una de las destrezas.

Para la destreza identificar, las puntuaciones reflejaban en qué medida los PFs tenían en cuenta los detalles matemáticos en los problemas y en las estrategias de los estudiantes. Para la destreza interpretar, las puntuaciones intentaban reflejar la evidencia que los PFs demostraban al interpretar la comprensión de los estudiantes de la idea de razón y proporción, considerando globalmente las respuestas de los tres estudiantes. Finalmente, las puntuaciones para la destreza decidir intentaban reflejar en qué medida los PFs tenían en cuenta la interpretación del razonamiento proporcional realizada a cada estudiante para decidir qué hacer a continuación.

Tabla 2. Descripción de la escala utilizada para puntuar las respuestas de los PFs según la destreza (adaptado de Jacobs et al., 2010)

Destreza	Escala	Descripción
Identificar	0	No identifican los elementos matemáticos en las resoluciones de los estudiantes
	1	Describen la estrategia de resolución y/o indican si es correcta o incorrecta
	2	Identifican alguna característica de los problemas, pero no en la resolución del estudiante
	3	Identifican al menos una característica de la estrategia del estudiante
Interpretar	0	No interpreta el nivel de desarrollo del estudiante
	1	Asigna y justifica de forma incorrecta el nivel de desarrollo.
	2	Indica el nivel de razonamiento (o transición) apoyándose en la estrategia y/o la resolución correcta o incorrecta de los problemas, pero no lo justifica considerando las características del razonamiento proporcional
	3	Justifica el nivel de razonamiento a partir de características del razonamiento proporcional
Decidir	0	No proponen nada o sugiere decisiones de acción no vinculadas al razonamiento proporcional
	1	Proponen acciones no vinculadas a la comprensión del estudiante
	2	Propone al menos una decisión de acción considerando la comprensión del estudiante, aunque puede no indicarla de manera específica
	3	Propone al menos una decisión de acción considerando la comprensión del estudiante y la indica de manera específica

RESULTADOS

Los resultados de este estudio se organizan según las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Para cada destreza se identificaron tres niveles de evidencia: alto, medio y bajo (Tabla 3).

Tabla 3. Niveles de los grupos según la destreza

Destreza	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo
Identificar	G4, G6	G2, G5, G7	G1, G3
Interpretar	G5, G6	G2, G4	G1, G3, G7
Decidir	G2, G6	G4	G1, G3, G5, G7

Identificar

Dos de los grupos de PFs tienen un nivel alto en la destreza identificar; tres grupos tienen un nivel medio, y dos grupos tienen un nivel bajo. Los grupos de PFs que evidenciaban un nivel alto en la destreza identificar (G4 y G6), mencionaban los elementos matemáticos característicos de los problemas y de las estrategias usadas por los tres estudiantes (puntuación de la escala: 2 y 3). Por ejemplo, G4 en relación con la respuesta de E1 al P1 reconoció que este estudiante utiliza las razones escalares enteras para determinar valores perdidos en el problema proporcional. Al respecto comentó:

> En la tabla se observa que Nicole pasa de dar 4 vueltas a 12, lo cual eso sería el triple; ahora si Nicole dio el triple de vueltas, Yesenia daría el triple de vueltas también, cuando Nicole completa 12 vueltas entonces Yesenia da 30 vueltas.

Por otro lado, 3 de los grupos evidenciaron un nivel medio en la destreza identificar (G2, G5 y G7), reconociendo la estrategia usada y/o la corrección de la respuesta en los tres estudiantes. Además, en alguna ocasión detallaron la estrategia de alguno de los estudiantes indicando algún elemento matemático (puntuación de la escala: 1 y 2). Por ejemplo, G5 respecto a la resolución de E1 a P3 indicó que "aplica la estrategia de manera adecuada para encontrar la respuesta", pero no mencionó explícitamente el uso de la razón funcional y las razones escalares enteras cuando se comparaban dos razones funcionales.

Finalmente, dos grupos evidenciaron un nivel bajo de la destreza identificar (G1 y G3). En este caso, los PFs solo indicaban la corrección de la estrategia (puntuación de la escala: 0 y 1). Por ejemplo, ante la respuesta de E1 a P3, G1 mencionó que "usa una estrategia de unificación de antecedentes o consecuentes, sin embargo, solamente compara los valores de Pedro, por lo que no puede afirmar la respuesta que ha dado". Es decir, G1 parece que no comprendió la respuesta de E1 a P3, ya que E1 compara la cantidad de vasos de jugo y de agua que utilizan las dos personas para preparar la bebida y refiere a la persona que utiliza más vasos de jugo cuando los dos tienen la misma cantidad de vasos de agua.

Interpretar

Dos grupos de PFs evidenciaron un nivel alto en la destreza interpretar (G5, G6). Estos grupos asignaron un nivel de razonamiento a cada estudiante justificándolo a partir de las resoluciones de todos los problemas (puntuación de la escala: 3). Por ejemplo, G6 mencionó que E1 se encuentra en el "nivel 2 ya que puede utilizar estrategias constructivas; sin embargo, le falta establecer la comparación de dos cantidades multiplicativamente por lo cual no alcanza aún el nivel 3". Es decir, G6 logró mirar globalmente a E1 como razonador proporcional al enlazar las características de los problemas y las respuestas dadas por el estudiante, con la definición del nivel de razonamiento proporcional dado en el documento teórico.

Dos grupos evidenciaron un nivel medio al reconocer de forma global la comprensión de los estudiantes a partir de la corrección de las respuestas (puntuación de la escala: 2) pero no proporcionaron justificaciones (G2 y G4). Por ejemplo, G2 comentó para E1 que "el nivel alcanzado por el estudiante es 3. A pesar de que en algunos ejercicios no logra resolverlos adecuadamente siempre utiliza técnicas correctas". G2 no indicó las características específicas que posee el estudiante y que le permitieron justificar el nivel asignado.

Por último, tres grupos presentaron un nivel bajo de la destreza interpretar (G1, G3 y G7). Estos grupos no consideraron globalmente las respuestas de cada estudiante a los cinco problemas para asignarle un nivel de razonamiento proporcional (puntuación de la escala: 0, 1). Por ejemplo, G3 indicó con relación a E1 que en dos de los problemas, P1 y P3 "tiene nivel 1 porque relaciona utilizando estrategias aditivas" y que "tiene nivel 2 porque utiliza otras estrategias para formar razones equivalentes". G3 tuvo dificultades en reconocer el perfil de cada estudiante considerando globalmente sus respuestas a los cinco problemas, por lo que asignó niveles de razonamiento diferentes al estudiante en función del problema.

Decidir

Dos grupos evidenciaron un nivel alto de la destreza decidir (G2 y G6). Estos grupos propusieron decisiones de acción considerando el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional asignado a cada estudiante (puntuación de la escala: 3). Por ejemplo, G6 identificó que E1 reconoce y usa relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud y las traslada a las relaciones entre cantidades de la otra magnitud, pero tiene dificultades en expresar algebraicamente la relación funcional. Para dar respuesta a esta dificultad propuso "pedirle que calcule valores muy grandes o decimales para que deba dejar atrás la adición seguido de una serie de ejercicios dónde deba hallar la razón de la proporcionalidad".

Un grupo (G4) evidenció un nivel medio en la destreza decidir. Este grupo propuso al menos una decisión de acción considerando la comprensión del estudiante, aunque no la nombró de manera específica (puntuación de la escala: 2). Por ejemplo, G4 interpretó que E3 construye y usa la razón funcional de manera adecuada, reconoce situaciones aditivas y proporcionales, y que representa y reconoce la forma tabular, verbal y algebraica de la relación funcional en las situaciones de proporcionalidad, y como consecuencia propuso "buscar alternativas distintas para que pueda expandir distintas maneras de resolver situaciones". Es decir, sugirió el uso de estrategias de

resolución que no explicita. Esto imposibilitó determinar si la sugerencia es acorde a la comprensión del estudiante.

Por último, cuatro grupos mostraron un nivel bajo en la destreza decidir (G1, G3, G5 y G7). Estos grupos no propusieron acciones o en algunos casos sugirieron acciones desvinculadas del razonamiento proporcional y de la comprensión del estudiante (puntuación de la escala: 0 y 1). Por ejemplo, G1 sugirió para E1 "ayudar al estudiante mediante la implementación de una tabla de valor perdido… que lo impulse a transicionar al pensamiento de estrategias constructivas". No obstante, la actuación de E1 al resolver los problemas se caracteriza por el uso de este tipo de estrategias. Por su parte, G3 propuso para E1 que "le haríamos saber sus errores y le ayudaríamos a corregirlos, con tareas y con trabajos grupales donde puedan dialogar juntos y llegar a dar una respuesta más clara y correcta". Estas sugerencias son genéricas y válidas para cualquier dominio de conocimiento.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Este estudio tiene como objetivo identificar características de la mirada profesional de 14 PFs con relación al pensamiento matemático de estudiantes en el dominio de la razón y proporción. Los PFs analizaron las resoluciones de tres estudiantes a cinco problemas sobre razones y proporciones reflejando distintos perfiles de razonadores proporcionales. Los PFs mostraron tres niveles de desarrollo en las destrezas identificar, interpretar y decidir. El desarrollo de estas destrezas no fue uniforme sino que depende de las características que mostraban las respuestas de los estudiantes y de la destreza considerada (Tabla 3). Este resultado es relevante ya que incide en que el desarrollo de la destreza depende de lo que se mira (diferentes características de los razonadores proporcionales) y cómo se mira (si hay que identificar elementos matemáticos en las estrategias de los estudiantes, o hay que interpretar la comprensión de los estudiantes, o hay que tomar decisiones para proponer nuevas acciones de enseñanza). Esta dependencia de la competencia mirar profesionalmente de estos dos aspectos, identificada en estudiantes para profesores de educación secundaria, también fue reconocida en estudiantes para profesores de educación primaria (Pérez-Tyteca et al., 2017; Tyminski et al., 2021), lo que parece indicar una característica general de esta competencia. Además, estos resultados apoyan la idea de que, si los FPs centran la atención en solo la corrección de las respuestas para mirar de forma global la comprensión de los estudiantes, evidencia luego un nivel bajo en el desarrollo de la competencia (Hines et al., 2005). Por otra parte, la investigación realizada, centrada en la línea del razonamiento proporcional, permite observar qué tipos de problemas pueden influir más que otros en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente.

Los resultados obtenidos aportan información específica que contribuyen a nuestro conocimiento como formadores de profesores para poder reconocer perfiles de la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes". Además, los resultados muestran que desarrollar la competencia mirar profesionalmente no es una tarea fácil para los futuros docentes (Buforn et al., 2022; Fernández et al., 2011; Hines y McMahon, 2005), por lo que es importante promover esta competencia a partir de propuestas formativas vinculadas a la práctica docente. Estas propuestas formativas deben incorporar registros de la práctica que incluyan situaciones con distintos tipos de problemas y respuestas de estudiantes a estos problemas que presenten diferentes grados de comprensión cuando se analizan todos los problemas en conjunto, no de forma individual.

Reconocimiento. La participación de À. Buforn y S. Llinares en este estudio forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Buforn, À., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2022): Preservice teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(2), 425-443. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M. y Godino, J. (2022a). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal, 34*, 269-291. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9

Burgos , M. y Godino, J. (2022b). Propective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *Journal of Mathematik-Didactik, 43*, 347-376. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011). Development of prospective mathematics teaches' professional noticing in a specific domain: Proportional reasoning. En B. Ubuz (ed.) *Proceeedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol2* (pp. 329-336). PME.

Hines, E. y McMahon, M. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations for preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18041.x

Jacobs, V.R, Lamb. L.C. y Philip, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. En T. Carpenter et al (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* pp.131-156. LAE, Publishers.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I. y Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programa de Estudios de Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Recuperado de https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica .pdf

Pérez-Tyteca, P, Callejo, M.L., Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2017). Cómo progresan estudiantes para maestro en la identificación de los elementos matemáticos necesarios para interpretar la comprensión de la longitud y su medida en alumnos de educación infantil. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 397-406). SEIEM.

Tymisky, A.M., Simpson, A.J., Land, T.J. et al. (2021). Prospective elementary mathematics teachers' noticing of children's mathematics: a focus on extending moves. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24, 533-56*1. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09472-2

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3

RELACIONES ENTRE INDAGACIÓN Y MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN UN CONTEXTO ARQUEOLÓGICO

Relations between mathematical inquiry and modelling in an archaeological context

Falcó-Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Ledezma y C., Font, V.

Universitat de Barcelona

Resumen

Se presenta un estudio de los subprocesos comunes entre los procesos de indagación y modelización matemática, así como de las sinergias que se pueden establecer entre ambos, con el objetivo general de observar las evidencias que emergen y analizarlas. Para ello se implementó una secuencia didáctica basada en un contexto histórico-arqueológico, diseñada usando los criterios de idoneidad didáctica, para promover el desarrollo de la indagación y la modelización matemática. Esta implementación se llevó a cabo en febrero de 2023 con 93 estudiantes (de 12–13 años) en una escuela de Catalunya, y los primeros resultados analizados muestran la aparición conjunta de algunos subprocesos de indagación y modelización matemática durante el desarrollo de la secuencia.

Palabras clave: *criterios de idoneidad didáctica, diseño e implementación de tareas, indagación matemática, modelización matemática.*

Abstract

We present a study of the common subprocesses between the inquiry and mathematical modelling processes, as well as the synergies that can be established between them, with the general aim of observing and analysing the arising evidence. To this end, we implemented a didactic sequence based on a historical-archaeological context, which we designed by using the didactic suitability criteria for promoting the development of inquiry and mathematical modelling. We performed this implementation in February 2023 with 93 students (aged 12–13) in a school from Catalonia, and the first results show the joint appearance of some mathematical inquiry and modelling subprocesses.

Keywords: *didactic suitability criteria, inquiry, mathematical modelling, task-design and implementation.*

INTRODUCCIÓN

Los procesos de indagación y modelización matemática han sido tratados ampliamente en la literatura sobre didáctica de la matemática (Artigue y Blomhøj, 2013; Blomhøj, 2004; National Research Council, 1996; Rocard et al., 2007; Sala-Sebastià, 2016), considerándose que las tareas de aprendizaje y las secuencias didácticas que promueven el trabajo de estos procesos pueden ser facilitadoras de un aprendizaje significativo de las matemáticas.

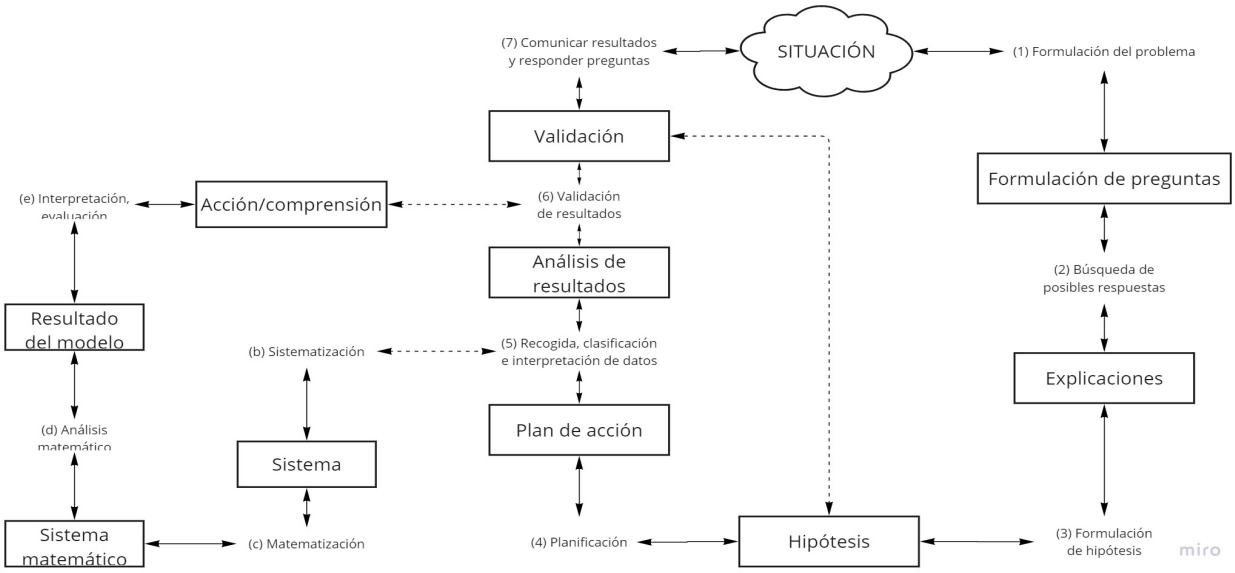
La indagación es definida, con amplio consenso, en los *National Science Education Standards* (National Research Council, 1996), contemplando los distintos subprocesos incluidos en la indagación, a saber: observación; planteamiento de preguntas; búsqueda en libros y otras fuentes de información para ver aquello que ya es conocido; planificación de la investigación; revisión de este conocimiento bajo la luz de pruebas experimentales; uso de herramientas para recoger, analizar e interpretar datos; propuesta de respuestas, explicaciones e interpretaciones; y comunicación de resultados. El Informe Rocard (Rocard et al., 2007) apunta hacia este tipo de prácticas en la enseñanza y exhorta a la didáctica de las ciencias a dirigir la educación de las materias científicas hacia prácticas

Falcó Solsona, P. J., Sala-Sebastià, G., Ledezma, C. y Font, V. (2023). Competencias de indagación y modelización matemática en contextos históricos en educación secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 235–242). SEIEM.

que permitan investigar, proponer preguntas, explorar y evaluar las propias conclusiones. Por su parte, Sala Sebastià (2016) define la indagación como la capacidad de formularse preguntas de investigación e intentar responderlas usando las ciencias, planteándola como una competencia metodológica, centrada en el aprendizaje y la adquisición de métodos de trabajo y estrategias que permitan resolver problemas en el contexto escolar y, a largo plazo, en la vida adulta, y transversal, que se desarrolla a lo largo de las distintas áreas y materias del currículo. Además, esta autora desarrolla una propuesta de caracterización de la competencia de indagación donde se definen los distintos subprocesos que la conforman, dando indicadores para la identificación y evaluación de los procesos de indagación de los estudiantes.

Por otra parte, la modelización matemática requiere del uso de un modelo matemático, que es "la relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y una situación o fenómeno de naturaleza no matemática, por el otro lado" (Blomhøj, 2004, p. 21. Traducción propia). El mismo autor destaca que, cuando se aplican las matemáticas a una situación extramatemática, necesariamente existe un modelo matemático involucrado, explícita o implícitamente, en dicha aplicación; así como que el hecho de percibir la situación o fenómeno modelado y los conceptos matemáticos utilizados en una situación de modelización matemática como objetos separados, pero interrelacionados, es una condición epistemológica necesaria para que un estudiante pueda experimentar con un modelo matemático y reflexionar sobre las relaciones existentes en él (Blomhøj, 2004). Para Blomhøj (2004), la modelización matemática es un proceso de naturaleza cíclica donde el conocimiento previo necesario (tanto teórico como experiencial) es un aspecto importante para dar significación a la situación de aprendizaje, o problema, que genera el conflicto cognitivo necesario para poder obtener un modelo matemático.

Figura 1. Modelo analítico integral de los procesos de indagación y modelización matemática (Sala Sebastià, Barquero y Font, 2021). Traducción propia.



La indagación y la modelización matemática se relacionan en Artigue y Blomhøj (2013), donde se afirma que, con relación a la educación matemática basada en la indagación, el concepto de modelización ofrece una forma sistemática de entender y trabajar con la relación entre las matemáticas y las situaciones o fenómenos problemáticos en otras disciplinas y en contextos extramatemáticos en general. Sala-Sebastià, Barquero y Font (2021), partiendo de las caracterizaciones de indagación matemática y de modelización matemática de Sala-Sebastià (2016) y de Blomhøj (2004), han elaborado un esquema del proceso de indagación matemática que expresa el carácter dinámico, cíclico y de constante evaluación y construcción de hipótesis de los estudiantes, y que es la base de la primera propuesta que aparece en la literatura de identificación de procesos

comunes entre las competencias de indagación y de modelización matemática (Figura 1). Así pues, los procesos de indagación y modelización matemáticas están bien estudiados, existiendo diversas propuestas de modelos para ambos procesos que permiten observar, identificar y analizar los distintos subprocesos que los estudiantes pueden llevar a cabo cuando se involucran en situaciones de aprendizaje que los promuevan. No obstante, no es tan extensa la literatura en relación con los puntos de conexión y sinergias que se establecen entre ambos procesos. Solamente un par de publicaciones recientes (Sala-Sebastià, Barquero y Font, 2021; Sala-Sebastià, Font y Ledezma, 2021) ponen en evidencia que los subprocesos comunes entre ambos procesos pueden converger en sinergias que potencien o influyan en el desarrollo tanto de la modelización como de la indagación.

Los objetivos del presente estudio son: (1) identificar los subprocesos de indagación y modelización matemática emergentes en la implementación de una secuencia didáctica interdisciplinar de contexto histórico-arqueológico; (2) identificar las relaciones —coincidencias, concatenaciones— y sinergias —entendido el concepto de *sinergia* como "la interacción entre dos o más agentes o fuerzas de manera que su efecto combinado es mayor que la suma de sus efectos individuales" (Maracci et al., 2013, en Sala Sebastià, Barquero y Font, 2021. Traducción propia).

MARCO TEÓRICO

Modelo integral de indagación y modelización

Las sinergias identificadas entre los dos procesos descritos se encuentran en dos artículos de reciente publicación (Sala-Sebastià, Barquero y Font, 2021; Sala-Sebastià, Font y Ledezma, 2021), los cuales sirven de base para esta investigación en curso. Cabe destacar que estas publicaciones toman como modelo descriptivo del proceso de modelización matemática propuesto por Blomhøj (2004), mencionado previamente, entre otras propuestas posibles, argumentando que es una conceptualización del proceso de modelización ampliamente aceptada y donde el proceso es descrito de manera dinámica, con subprocesos por los cuales los estudiantes no necesariamente deben avanzar siempre secuencialmente (Sala-Sebastià, Barquero y Font, 2021), lo que facilita metodológicamente la comparación con el modelo del proceso de indagación. Para conceptualizar el proceso de indagación matemática, ambos trabajos toman como modelo la propuesta de Sala Sebastià (2016), mencionado previamente, ya que describe, al igual que el modelo elegido para conceptualizar la modelización, el proceso de indagación como un proceso dinámico con subprocesos bien desarrollados. Esta elección de modelos facilitó el análisis de la emergencia de puntos de conexión entre ambos subprocesos en los estudios llevados a cabo.

Se observa que los dos procesos están motivados de forma habitual por preguntas del entorno próximo al estudiante y que conectan situaciones reales con el conocimiento matemático que se pretende construir (Sala-Sebastià, Barquero y Font, 2021). También, se señala que "parte importante del proceso de indagación consiste en transformar la situación problemática en cuestiones abordables desde un punto de vista matemático, a través de un proceso de modelización matemática" (Sala Sebastià, Font y Ledezma, 2021, p. 126). Sala-Sebastià, Barquero y Font (2021) realizaron una propuesta de modelo integral, que es el que se toma como modelo en esta investigación (Figura 1).

Criterios de idoneidad didáctica

Los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) son pautas para diseñar, valorar y mejorar las actividades de aprendizaje con la finalidad que tengan una alta idoneidad didáctica. Son un constructo que nace de los consensos existentes en la comunidad educativa sobre cómo debería ser una buena enseñanza de las matemáticas y, por tanto, se ha observado en numerosas ocasiones que docentes que no han sido formados previamente en el uso de los CID reflexionan sobre la propia práctica utilizando criterios para orientar su práctica que se pueden reinterpretar en términos de los CID (Breda et al., 2017). Los CID valoran seis criterios de idoneidad, dándose especial importancia al equilibrio entre ellos al diseñar una secuencia didáctica:

criterio de idoneidad epistémica (que las matemáticas que se enseñan sean de calidad), criterio de idoneidad cognitiva (que los conceptos matemáticos sean significativos para el alumnado y adecuados a sus conocimientos previos), criterio de idoneidad interaccional (que la enseñanza promueva interacciones para identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales), criterio de idoneidad mediacional (que la enseñanza se adecue a los recursos disponibles), idoneidad afectiva (que se promueva la motivación e implicación del estudiante) y criterio d idoneidad ecológica (que la enseñanza se adecue al proyecto educativo y al currículo) (Godino y Burgos, 2020). Estos seis criterios se desarrollan en componentes e indicadores, que son los que guían de forma efectiva al diseño y la evaluación de la idoneidad didáctica de una actividad de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que se han utilizado para el diseño de la actividad implementada para garantizar su calidad.

METODOLOGÍA

La secuencia didáctica ha sido diseñada por el primer autor contemplando la aplicación de los CID para garantizar una alta idoneidad didáctica. Por ejemplo, con relación a la idoneidad afectiva, la secuencia se basa en un contexto histórico, concretamente arqueológico, próximo y significativo para los estudiantes, que actúa no sólo como una base para el planteamiento del problema a resolver, sino como una fuente esencial de datos a partir de la cual realizar hipótesis y obtener conclusiones justificadas relevantes para la indagación y modelización que se lleve a cabo; con relación a la idoneidad mediacional, la secuencia contempla un trabajo en varios equipos en el cual el alcance de consensos respecto a los descubrimientos hechos es necesario. También, se dio mucha importancia al componente riqueza de procesos del criterio de idoneidad epistémica, así como al componente conexiones interdisciplinares del criterio ecológico.

La secuencia didáctica se implementó en febrero de 2023 en un curso de 1º de educación secundaria obligatoria (12–13 años) de una escuela concertada en Badalona (Catalunya), donde participaron los 93 alumnos de los tres grupos clase del curso. Los participantes trabajaron en 18 equipos de investigación colaborativos de 5-6 integrantes (rotulados desde G1 a G18), organizados considerando ciertas responsabilidades rotativas a lo largo de las sesiones de implementación. La secuencia tiene en cuenta contenidos y competencias curriculares de las distintas materias correspondientes al nivel (Generalitat de Catalunya, 2022), de modo que cumpla con el desarrollo del curso escolar el trabajo escolar habitual de los estudiantes. El contexto de la implementación consideró las características de la escuela, que tiene dos edificios (uno para la etapa de infantil y primaria, y otro para la etapa de secundaria y Bachillerato). Recientemente, se han hecho obras para reforzar el muro que rodea el patio del edificio de primaria —este edificio está situado justo delante del Museu de Badalona, un museo en cuyo subsuelo se encuentran parte de las ruinas de la antigua ciudad romana de *Baetulo* (nombre romano de la ciudad de Badalona). Dado el desnivel del terreno, el patio que queda rodeado por el muro reforzado está por debajo del nivel de la calle que separa la escuela del museo. Hasta este punto, toda la situación es real, y la gran mayoría de los alumnos de 1º de secundaria la conocen, ya que cursaron primaria en la escuela. La situación problemática planteada fue que, en la excavación para reforzar los cimientos del muro, se encontraron unos trozos de cerámica que podrían corresponder a objetos antiguos, quizás romanos, incompletos y con forma de cuerpos de revolución (platos, cuencos, jarrones). Se dijo a los estudiantes que se comunicó el hallazgo al Museu y que éste envió un par de técnicos en arqueología para documentar las piezas y elaborar un primer informe arqueológico. También, se explicó a los estudiantes que las piezas habían sido cedidas temporalmente a la escuela que, aprovechando que el alumnado de 1º de secundaria había estado estudiando las características de la sociedad romana y el proceso de romanización de Catalunya, encargó a las clases de 1º de secundaria que investigasen el origen de las piezas.

Para llevar a cabo la implementación de la secuencia didáctica se contó con la colaboración de arqueólogas del Museu, quienes cedieron piezas auténticas de cerámica romana que no están actualmente en exposición. Estas piezas reunían suficientes características observables para que los

estudiantes pudieran deducir (a través de sus conocimientos previos sobre la sociedad romana y sobre la antigua ciudad de *Baetulo* en particular, o bien, a través de fuentes documentales accesibles que se pueden consultar) el periodo concreto en que fueron hechas, así como sus usos (doméstico, religioso, social), la clase social a la que pertenecieron sus dueños, etc. También, se facilitaron informes preliminares, que eran simulaciones de los verdaderos informes que hace el equipo de arqueólogos del Museu, con detalles de otros objetos contextuales que podían arrojar luz sobre su origen. El problema planteado utilizó el contexto histórico y arqueológico como fuente básica para promover el proceso de indagación, y remitió a un contexto próximo a la vida cotidiana de los alumnos (el hallazgo es verosímil y se hizo en un lugar, el patio de primaria, donde jugaban hasta hace pocos meses), de modo que era potencialmente motivador.

Nos referimos por *fase* a la sesión o sesiones de clase en las que los estudiantes se han dedicado a una determinada tarea de la secuencia didáctica. Así pues, la secuencia didáctica, en la que el primer autor hizo de investigador y de docente de apoyo, constó de siete fases —explicadas con más detalle al presentar los resultados— durante las cuales se usaron distintos instrumentos de recogida de datos: observación directa de las sesiones y registro anecdótico por parte del primer autor; grabaciones de las sesiones; y producciones de los estudiantes. En la *séptima fase*, posterior a la implementación de la secuencia didáctica con los estudiantes y que aún se está llevando a cabo al momento de escribir esta comunicación, se hacen entrevistas semiestructuradas con algunos de los estudiantes y con los docentes participantes en la implementación de la secuencia didáctica, para lo cual se usan los siguientes instrumentos para recoger datos: grabación (transcripción y notas) de las entrevistas con los estudiantes y grabación (transcripción y notas) de las entrevistas con los docentes. Una vez recogidos los datos por parte del primer autor con los distintos instrumentos mencionados, se llevó a cabo un análisis temático donde se siguió una adaptación de las fases propuestas por Braun y Clarke (2006) teniendo en cuenta que los códigos iniciales son los diferentes subprocesos descritos en Sala Sebastià, Barquero y Font (2021). También se realizaron dos triangulaciones entre los autores, una para consensuar la categorización y, después, para discutir los resultados.

A partir de los datos recogidos se identificaron y categorizaron evidencias de los subprocesos de indagación y modelización matemática propuestos en el modelo analítico integral de Sala, Barquero y Font (2021): *formulación del problema* [IM1], *búsqueda de posibles respuestas al problema* [IM2], *formulación de hipótesis* [IM3], *planificación de las acciones para resolver el problema* (IM4), *recogida, clasificación e interpretación de datos* [IM5], *sistematización de la información* [IMb], *matematización de los datos para obtener un sistema matemático* [IMc], *análisis matemático para obtener un modelo que dé resultados* [IMd], *interpretación de los resultados y evaluación del modelo* [IMe], *validación de los resultados del modelo* [IM6] y *comunicación de resultados y respuesta a las preguntas del problema* [IM7].

RESULTADOS

La implementación de la secuencia didáctica se realizó durante el mes de febrero de 2023; por lo tanto, hay acciones de análisis de datos que aún se están llevando a cabo al redactar esta comunicación. Así pues, se presentan resultados preliminares fruto de los primeros análisis del trabajo de los estudiantes y de las primeras entrevistas hechas con algunos de ellos. Se espera tener más resultados a lo largo de los meses de marzo y abril, habiendo finalizado los análisis.

En la *primera fase* se hizo la presentación del caso con la colaboración del director de la escuela y los estudiantes se plantearon preguntas acerca de los objetos encontrados para determinar qué información de puede descubrir de cada objeto, además de comprobar si el descubrimiento se había dado dentro de los límites de la antigua *Baetulo*. Todos los grupos de estudiantes plantearon preguntas que les surgían ante las distintas piezas partiendo de la información que les daba la situación planteada; por ejemplo, el G3: [IM1]. A continuación, los distintos grupos especularon sobre las posibles respuestas a esas preguntas e hipotetizaron, centrándose en la época histórica a la cual

pertenecía el objeto; por ejemplo, el G5: "podría ser de los años en que los romanos existían, estaban en Badalona. Pensamos esto porque al lado del cole, que es donde lo han encontrado, es al lado del museo donde hay restos romanos" [IM2] e [IM3]; aunque ofreciendo también otras hipótesis que se descartaron por distintos motivos (se sugirió, por ejemplo, que en el terreno de la escuela había habido en época romana un cementerio). Al final de la primera fase los estudiantes dedujeron que necesitaban saber con certeza si las piezas eran o no de origen romano, y de qué periodo de la presencia romana en Badalona, ya que sus primeras investigaciones les llevaron a descubrir que esa presencia no fue siempre la misma; había que dedicar, pues, la siguiente sesión a descubrir esa cuestión [IM4].

En la *segunda fase* se hizo la datación de las piezas: a partir del informe preliminar del Museu, que afirma que se encontraron restos orgánicos entre las piezas de cerámica e indica la concentración de carbono-14 (C14) de dichos restos [IM5]. Los estudiantes elaboraron gráficas de concentración de C14 con GeoGebra [IMb] e [IMc]; y localizaron la antigüedad que deben tener las piezas para corresponderse con la concentración de C14 observada (con el consecuente uso del significado de las gráficas de tipo exponencial y familiarizándose con el uso de GeoGebra) [IMd] e [IMe]. Todos los grupos lograron datar las piezas, llegando a años más o menos similares (no iguales debido a la gran cantidad de decimales de los puntos de la gráfica de GeoGebra generada); así explicaba su proceso el G8 en el informe que redactaron:

> Dentro de las dos piezas encontradas se detectaron restos de huevos de codorniz. Con el carbono 14 (C14) que contenían podemos datar el año aproximados de nuestras piezas. [IM5]
>
> Si cogemos el % de C14 (78,6435%) que hay en los restos de materia orgánica encontrada y utilizamos el GeoGebra, obtenemos que los restos de huevos de codorniz son de hace 1986 años. Es decir, podemos estimar que el origen de nuestras piezas es aproximadamente el año 37 d.C. [IM5], [IMb], [IMe]
>
> Hemos utilizado la fórmula F(x) = 100·(1/2)^(x/5730) en la calculadora de GeoGebra. Hemos buscado el punto de % de C14 en la gráfica y nos da que han pasado 1986 años. Si los restamos a la fecha actual nos da que las piezas son del 37 d.C. [IMb], [IMc], [IMd], [IMe]

En la *tercera fase* los estudiantes llevaron a cabo una investigación sobre los usos y tipos de cerámicas del periodo romano en el que se fecharon las piezas del hallazgo, comparando con las observaciones realizadas, y elaborando y contrastando hipótesis hasta llegar a un consenso. Los descubrimientos hechos durante la segunda fase situaron la investigación en un nuevo contexto y los estudiantes retrocedieron en el ciclo planteado por Sala Sebastià, Barquero y Font (2021); no se formularon preguntas nuevas, pero los nuevos datos de que disponían [IM5] les conducían a buscar nuevas respuestas a las preguntas de investigación [IM2] y a elaborar nuevas hipótesis [IM3].

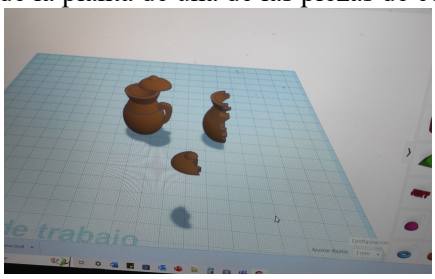
En la *cuarta fase* los estudiantes estudiaron la forma y las medidas que tenía la pieza originalmente, utilizando propiedades geométricas del círculo para lograr conocer el radio original de las distintas piezas. En esta fase se observó una gran riqueza de subprocesos, ya que los estudiantes retomaron el problema de la forma original de las piezas [IM1], planificaron la cantidad de secciones circulares que necesitaban conocer para obtener la forma original de la figura [IM4], recogieron los datos necesarios [IM5] del contorno conocido de las piezas y elaboraron un modelo matemático de las piezas [IMb] e [IMc], y trabajaron matemáticamente sobre ese modelo [IMd] para conseguir resultados [IMe] que luego pudieron validar comparándolos con la planta conocida de la pieza [IM6]. Podemos observar un ejemplo de producción de los estudiantes del G3 en esta fase en la Figura 2.

En la *quinta fase* los estudiantes usaron la información geométrica obtenida anteriormente para digitalizar las piezas con forma original y completa, elaborando una reconstrucción 3D de las mismas con el programa Tinkercad. Hicieron una breve planificación del trabajo [IM4] que debían hacer (dominar el programa Tinkercad mejor de lo que la mayoría lo dominaban, reproducir las piezas teniendo en cuenta las formas y las medidas deducidas con anterioridad); y partieron del modelo en 2D [IMb] utilizado en la fase anterior para desarrollar un nuevo modelo en 3D [IMc] con el programa

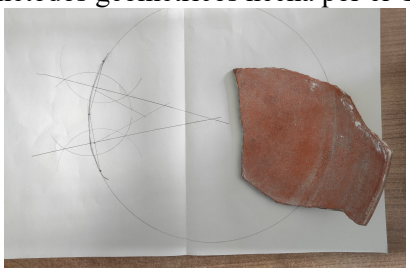
Tinkercad, con el cual fueron aproximando la figura original [IMd] e [IMe]. Podemos observar un ejemplo de producción de los estudiantes del G12 en esta fase en la Figura 2.

Figura 2. Producciones de los alumnos: (a) reconstrucción 3D del G12 Tinkercad; (b) reproducción de la planta de una de las piezas de cerámica utilizando métodos geométricos hecha por el G3.

(a)



(b)



En la *sexta fase* los estudiantes visitaron el Museu de Badalona, incluyendo el laboratorio donde se restauran las piezas que se encuentran, para contrastar sus descubrimientos y método de trabajo con los de los profesionales [IM6] y, posteriormente, expusieron los informes con sus hallazgos en el aula [IM7].

CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados preliminares expuestos sugieren algunas consideraciones importantes para destacar. En primer lugar, se observa que ciertos subprocesos aparecen encadenados de forma recurrente como, por ejemplo, cuando se generó la necesidad de buscar nueva información [IM5] y se activaron los procesos de búsqueda de posibles respuestas al problema [IM2] y de formulación de hipótesis [IM3], generándose sinergias entre [IM2] e [IM3]. No obstante, del subproceso de planificación de las acciones para resolver el problema [IM4], no siempre se recogen evidencias. En segundo lugar, se observa que, cuando los estudiantes obtuvieron sus primeros resultados, a partir de los cuales pudieron limitar las posibles respuestas a la pregunta inicial (porque era muy amplia), centraron su atención en profundizar los descubrimientos hechos. Ejemplo de ello fue que, después de la segunda fase, los estudiantes ya conocían la datación de las piezas de cerámica que estaban investigando, de modo que había muchas preguntas iniciales que se formularon y que se tenían que observar a la luz de este descubrimiento. Del mismo modo, en la tercera fase, cuando los estudiantes profundizaron en las características de las piezas de cerámica, se observó una iteración de los subprocesos [IM2], [IM3] e [IM5]. En tercer lugar, se observó una iteración en los subprocesos correspondientes a la modelización ([IMb], [IMc], [IMd] e [IMe]) cuando los estudiantes construyeron la reconstrucción geométrica de la pieza cerámica en 2D y, a partir de éste, el modelo de la misma pieza en 3D.

Otro aspecto para destacar es que, de los grupos de estudiantes que obtuvieron mejores conclusiones (con una investigación más rigurosa, contemplando más posibilidades y fuentes de información, planteando distintos escenarios, contrastando sus deducciones y llegando a conclusiones mejor argumentadas), se obtuvieron evidencias de que han desarrollado, a partir del subproceso [IM1], los siguientes subprocesos propios de modelización matemática: [IMb], [IMc], [IMd] e [IMe]; así como los subprocesos propios de indagación matemática: [IM2], [IM3], [IM4] e [IM5]. Se han encontrado evidencias de subprocesos de modelización matemática en la realización de tareas concretas que implican un uso específico de información de tipo matemático (no se han hecho evidentes, pues, procesos de modelización matemática en tareas que requerían una búsqueda de datos e información extramatemática), siendo un resultado coincidente con el de Sala Sebastià, Font y Ledezma (2021). Blomhøj (2004) ya destaca la importancia de los datos y de los conocimientos previos para abordar las tareas de modelización matemática, y se deduce efectivamente que la sistematización de la información requiere de los procesos intermedios propios de la indagación matemática para poder seleccionar los elementos clave del problema, plantearse sus dificultades y los conocimientos previos

en que los estudiantes se podrán apoyar, descartar respuestas y proponer hipótesis a partir de las cuales empezar a trabajar.

La limitación de este estudio es que está aún en una fase inicial de su desarrollo. Se espera, a medida que se analicen más datos, poder ofrecer descriptores de cada uno de los subprocesos de indagación y modelización para poder caracterizar todo el proceso como una competencia que se pueda trabajar y evaluar de manera conjunta por parte de los docentes. Por otra parte, la implementación realizada ha confirmado que los criterios de idoneidad didáctica que se priorizaron en el diseño han garantizado una práctica de calidad, ya que la situación presentada realmente motivó a los alumnos, se lograron realizar subprocesos relevantes de indagación y modelización, y se establecieron conexiones interdisciplinares entre historia y matemáticas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM - Mathematics Education*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. A. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. Lester, A. Wallby, y K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77-101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Generalitat de Catalunya. (2022). Decret 175/2022, de 27 de setembre, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació bàsica. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, *8762*, 491.

Godino, J., y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Paradigma*, *XLI*(e), 80-106. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p80-106.id872

Maaß, K., y Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM - Mathematics Education*, *45*(6), 887-899. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0505-7

National Research Council. (1996). *National Science Education Standards*. National Academies Press. https://doi.org/10.17226/4962

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Wlaberg-Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). *Science Education Now: A New Pedadogy for the Future of Europe*.

Sala-Sebastià, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*. Universitat de Barcelona.

Sala-Sebastià, G., Barquero, B., y Font, V. (2021). Inquiry and modeling for teaching mathematics in interdisciplinary contexts: How are they interrelated? *Mathematics*, *9*(15), Artículo 1714. https://doi.org/10.3390/math9151714

Sala-Sebastià, G., Font, V., y Ledezma, C. (2021). Relaciones entre los procesos de modelización matemática y de indagación desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. *Quadrante, 30*(1), 116-139. https://doi.org/10.48489/QUADRANTE.23590

CAMBIO EN VARIABLES CUANTITATIVAS POR ALUMNOS DE 4 AÑOS DESDE UN ENFOQUE FUNCIONAL

Change in quantitative variables by 4-year-old students from a functional approach

Fuentes, S[a]., Cañadas, M. C[a]. y Anglada, L[b].

[a]Universidad de Granada, [b]Centro Universitario María Inmaculada de Antequera

Resumen

Esta investigación se enmarca en un proyecto sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria realizado en España (www.pensamientoalgebraico.es). Después de cuatro sesiones con un grupo de 21 niños de 4 años, entrevistamos individualmente a 5 de esos niños. Les presentamos un contexto motivador como lo es un viaje al espacio y coger piedras lunares. Les propusimos una situación de cambio, al meter piedras en una caja "mágica". Esta situación involucraba la función f(n)=n+2. Nos centramos en las evidencias que mostraron en las relaciones entre las variables y cómo expresaban la relación. Utilizaron expresiones como "siempre salen más", "salen muchas", "se convierte en más". Los 5 niños concluyeron que siempre salían más piedras de las que entraban en la caja. Todos identificaron el cambio-aumento y algunos de ellos cuantificaron el cambio como dos más.

Palabras clave: *Cambio, early algebra, educación infantil, máquina de funciones, pensamiento funcional.*

Abstract

This research is part of a project on algebraic thinking in early childhood and primary education carried out in Spain (www.pensamientoalgebraico.es/en). After four sessions with a group of 21 4-year-old children, we interviewed 5 of these children individually. We presented them with a motivating context such as a trip to space and picking up moonstones. We proposed them a situation of change by putting stones in a "magic" box. This situation involved the function f(n)=n+2. We focused on the evidence they showed in the relationships between the variables and how they expressed the relationship. They used expressions such as "always come out more", "come out many", "becomes more". All 5 children concluded that more stones always came out than went into the box. They all identified the change-increase and some of them quantified the change as two more.

Keywords: *Change, early algebra, childhood education, function machine, functional thinking.*

INTRODUCCIÓN

Esta investigación está inmersa en el *early algebra*, que propone trabajar conceptos y tareas algebraicas desde educación infantil. Específicamente nos centramos en el enfoque funcional, que pone su atención en las relaciones que se pueden establecer entre dos o más conjuntos numéricos que covarían.

Aunque en educación infantil no hay referencia explícita al sentido algebraico, sí encontramos contenidos relacionados con este mismo sentido (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a). En particular, la noción de cambio de los atributos de un objeto o de un conjunto va a ser primordial para posteriormente establecer relaciones cuantitativas entre ellos. Además, esta etapa educativa es previa a educación primaria, donde sí se recoge este sentido.

Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. (2023). Cambio en variables cuantitativas por alumnos de 4 años desde un enfoque funcional. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 243–250). SEIEM.

Esto supone un inmenso desafío, para investigadores y docentes, pues las investigaciones sobre esta temática en este nivel educativo son escasas, aunque en España observamos cierto auge en el último curso de educación infantil (e.g., Acosta y Alsina, 2018; Anglada y Cañadas, 2021; Castro et al., 2017; Fuentes y Cañadas, 2022), y primeros años de educación primaria (e.g., Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes y Cañadas, 2021; Morales et al., 2018). Esta investigación contribuye a esta línea de trabajo, centrándose en niños de 4 años y fijando su interés en la noción de cambio cuantitativo en un contexto funcional del *early algebra*.

El objetivo principal de este trabajo es identificar el cambio que perciben niños de 4 años al resolver una tarea de generalización que involucra la función lineal $f(n)=n+2$.

ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

El objetivo principal del enfoque funcional del *early algebra* es promover el pensamiento algebraico a través del trabajo con funciones, relaciones y elementos matemáticos asociados a ellas. Adoptamos la definición de pensamiento funcional de Cañadas y Molina (2016), quienes lo definen como un proceso cognitivo "basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que la constituyen" (p. 211).

En el currículo español no existía hasta 2022 mención explícita a la introducción de elementos algebraicos antes de la educación secundaria. En la actualidad se reconoce la necesidad de abordar el sentido algebraico en educación primaria (MEFP, 2022b). Aunque en el currículo de educación infantil no hay mención explícita al sentido algebraico, si se incluyen la observación de los atributos de los objetos y las similitudes y diferencias entre diferentes elementos o conjuntos, consideraciones que también encontramos en los estándares del National Council of Teacher of Mathematics (2003).

> "...También establecen relaciones entre algunos de los atributos de los objetos y materias y su comportamiento físico cuando se interviene sobre ellas, estableciendo correlaciones, a su vez, entre dichas intervenciones y los efectos que producen. Ello conlleva el desarrollo de estrategias como la anticipación y la previsión, la formulación de hipótesis y la observación de fenómenos para constatar si se cumple lo esperado, y la discriminación entre las características o atributos permanentes y los variables..." (MEFP, 2022a, p 21).

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2004; Smith, 2008). Esta variación es el cambio que experimentan los objetos o cantidades involucradas. Al establecer las relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación propuestas en el currículo, es donde toma relevancia la noción de cambio en educación infantil. Identificar el cambio es el primer paso para establecer relaciones funcionales entre los conjuntos. Alsina y Pincheira (2022), proponen que identificar el cambio es un proceso clave en el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional, ya que permite introducir elementos algebraicos en situaciones cotidianas. Dienes (1971) incorporó la noción de cambio, no solo aritmético, sino cualitativo, en las actividades propuestas a los alumnos al trabajar con una máquina de funciones y los estados inicial y final de un elemento. Warren et al. (2013), en el trabajo con 6 alumnos de 1° de primaria, destaca el valor de los gestos y conversaciones que los alumnos comparten para lograr la generalización.

Consideraremos, que la primera evidencia de pensamiento funcional es la identificación del cambio que se produce entre las variables involucradas, ya que para establecer la relación entre las variables es necesario identificar si hay cambio entre ellas y cuál es ese cambio.

En la revisión de antecedentes, encontramos algunas investigaciones que concuerdan con nuestro estudio en edad y tema, aunque aún son muy escasas. Uno de nuestros principales antecedentes evidencia pensamiento funcional en 4 años. Se trata de un estudio de casos, donde se plantearon tareas de generalización, sobre los objetos necesarios para una fiesta de cumpleaños involucrando

las funciones *f(n)=n* y *f(n)=3n*. La niña logró la generalización y verbalizó la relación funcional entre las variables involucradas en ambas tareas (Fuentes y Cañadas, 2022). En otra investigación, con ayuda de recursos tecnológicos, los alumnos de 5 años descubrieron la regla general que utilizó un robot programable para llegar a un casillero específico, según las palmadas que da el investigador (Anglada y Cañadas, 2021). Castro et al. (2017) llevaron a cabo tres intervenciones con un grupo de 12 alumnos de 5 años. En las intervenciones se apreció que los alumnos establecieron la relación *f(n)=n* y *f(n)=2n*. En todas estas investigaciones se utilizó un contexto motivador y desafiante para el alumno. En estas investigaciones está inmersa la noción de cambio y es la base para las observaciones que se presentan. De ahí que consideramos prestar atención a esta noción en 4 años.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández et al, 2010), es exploratorio ya que encontramos escasa evidencia de investigaciones en este ámbito con alumnos de 4 años.

Se trabajó con un grupo de 21 niños de infantil de 4 años en un experimento de enseñanza de 4 sesiones en el curso académico 22-23, en un colegio público de la ciudad de Granada. La elección del centro fue intencionada, por disponibilidad de tiempo y disposición de toda la comunidad educativa. El contexto en el que se enmarcan las tareas propuestas a los niños es un viaje al espacio. Trabajamos con el cambio que experimentaban objetos al pasar por una máquina de funciones ("caja mágica"). En la siguiente tabla resumimos algunas características de las sesiones.

Tabla 1: Descripción de las sesiones

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Entrevista
Contexto	Viaje al espacio	Viaje al espacio	Piedras lunares	Piedras lunares	Piedras lunares
Tipo de variable	Cualitativa	Cualitativa	Cuantitativa	Cuantitativa	Cuantitativa
Cambio	Cualitativo (Tamaño)	Cualitativo (Tamaño y color)	Cuantitativo (+1)	Cuantitativo (+2)	Cuantitativo (+2)

Aunque todos los alumnos participaron en las sesiones e identificaron el cambio, por disponibilidad y calendario escolar, entrevistamos individualmente a 5 alumnos. La elección de estos alumnos fue intencionada, por las respuestas y participación demostrada en el trabajo con el grupo completo. Los criterios para ser entrevistados fueron: (a) participación activa, (b) identificación del cambio, (c) generalización y (d) que se expresen en público.

Un grupo de investigadores del proyecto en el que está inmersa esta investigación, diseñamos un protocolo de entrevista semiestructurada, dos de las investigadoras implementamos las entrevistas. En la tarea propuesta en la sesión 4 y en la entrevista, nos centramos en el cambio cuantitativo que experimentaban el número de los objetos que entraban y salían de la caja mágica. La variable independiente es el número de piedras lunares que entra; y la dependiente, el número de piedras lunares que sale. La función involucrada en esta tarea es *f(n)=n+2*. En la entrevista, nuestro objetivo era que además de identificar el cambio lo pudiesen cuantificar.

Para el trabajo individual, pusimos a disposición del alumno: (a) material concreto: piedras lunares, la caja mágica y hueveras de cartón con distribución de numicom, que representaban los números (b) material pictórico: franelograma con tabla de funciones y (c) material simbólico: hoja en blanco. Estos materiales se observan en la figura 1. El alumno podía utilizar los materiales cuando y como quisiera y la investigadora le preguntaba por casos particulares y por la generalización.



Figura 1: Entrevista individual y materiales utilizados

Para que los alumnos observasen el cambio, se introducían en la máquina piedras lunares y, dentro de la máquina, la investigadora le añadía dos piedras lunares. Pedíamos a los alumnos que explicaran lo que observaban y que representaran en una tabla la información obtenida, para ello utilizamos el franelograma con columnas y encabezados y hueveras. Así, emergieron parejas de datos. Por ejemplo, entra una piedra y salen 3 piedras. Utilizamos números menores que 10, por ser con los que estaban familiarizados y se les plantearon en orden no consecutivo para evitar la recurrencia. Por último, dimos a los alumnos un folio para que describieran qué pasó en la sesión.

En general, iniciamos las entrevistas con la introducción al contexto de la tarea. La investigadora metía en la máquina mágica un número de piedras lunares, ocurría el cambio en la máquina y salían dos piedras más. El número de piedras que entraban iba variando según el desarrollo de la entrevista. Si el alumno identificaba y cuantificaba el cambio, le pedíamos al alumno que gestionara la máquina. La aplicación de cada entrevista tuvo un tiempo estimado de 15 minutos y estuvo a cargo de las autoras de este trabajo. Las entrevistas fueron grabadas en vídeo. El análisis de las entrevistas pretende describir las nociones de cambio cuantitativo que perciben los alumnos.

Las investigadoras del equipo y autoras de este trabajo analizamos los vídeos de las entrevistas, buscando episodios donde los alumnos identificaron el cambio y lo cuantificaron. Analizamos estos episodios en el siguiente apartado.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Analizamos los vídeos de las entrevistas, en búsqueda de expresiones que evidenciaran el cambio y/o la relación entre las variables involucradas, más allá de casos particulares. Observamos como expresaron el cambio y cómo generalizaron la relación existente entre las variables.

A continuación, recogemos algunos fragmentos que evidencian la identificación del cambio cuantitativo y/o la relación entre las variables y un resumen de lo observado en la entrevista. Registramos con Ai, con i=1, 2,…, 5 a cada alumno entrevistado; e I, para la investigadora.

Alumno 1

I: ¿Qué hace la máquina?

A1: Hacerlos más.

I: Pero, ¿cuántas? (Se le insiste en que diga un número).

A1: No lo sé.

I: Ahora vamos a meter 1 piedra en la máquina. Va a salir 3, ¿qué pasó?

A: Que cuando metimos este aquí [coge la huevera de 1], se convirtieron en estos [coge la huevera de 3]. [Coloca en el franelograma las hueveras correspondientes a 1 y 3]

Este alumno no necesitó trabajar con material concreto, se fue directamente a trabajar con la representación pictórica y con la tabla de funciones. Estableció el cambio de que salen más bolas de las que entran, pero no estableció la relación funcional correcta. En la tabla de funciones, reconoció el número de piedras que entraban y que salían de la máquina mágica y reconoció las parejas de datos relacionadas. En la hoja en blanco representó los elementos que estaban en la tabla. Dibujó las

piedras que entraban a la izquierda, el cambio lo representó con una interrogación en un cuadrado y a la derecha los elementos que salían de la caja (ver figura 2).



Figura 2: Entrevista A1

Alumno 2

I: ¿Qué hace la máquina?

A2: Salían más piedras.

I: Vamos a poner 3 piedras en la máquina... ¿Qué crees tú que va a pasar?

A2: Se hacen más.

I: ¿Cuántas más?

A2: Salen 4.

Este alumno utilizó el material concreto al comienzo de la entrevista. Cuando se le preguntó por las piedras que salían al meter 3, buscó la huevera con 3 espacios y dijo que le faltaban 2, ya que debían salir 5 piedras. Luego, se le invitó a trabajar con las piedras sobre la mesa, para que comparara las piedras que metía y que sacaba. Ordenamos las piedras en columnas.

I: ¿Qué observas?

A2: Que el 3 es más bajo y el 5 es más alto.

I: ¿Qué más observas?

A2: Que 3 más 5 son 8 (cuenta las piedras de ambas columnas).

I: Si las juntas son 8. Pero, ¿si están separadas?

A2: Son 3 y 5.

I: Y si ahora metemos 1 piedra... ¿cuántas van a salir?

A2: 3.

I: ¿Y si metemos 5 piedras?

A2: Salen 7.

En este punto, el alumno gestionó la máquina. La investigadora metió 4 piedras y el niño, dentro de la máquina, puso 2 más (saliendo 6 piedras). Repitió la operación correctamente con otros valores. El niño reconoció el cambio que se producía e identificó la relación funcional correcta. En la tabla nombró los elementos que entraban y salían de la máquina e identificó parejas de valores. En la hoja en blanco representó los elementos de la tabla de funciones, simbolizó las piedras como cuadrados y, si tenía espacio, colocó al lado los números (por ejemplo, 1 y 3). Observamos lo que hizo en la figura 3 (hemos marcado las parejas en un recuadro).

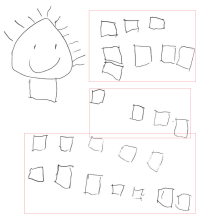


Figura 3: Entrevista A2

Alumno 3

I: Van a ingresar 2 piedras a la máquina. ¿Cuántas crees que van a salir?

A3: 4 [muestra 4 dedos].

I: Sí, salieron 4... ¿Por qué lo sabías?

A3: Porque después del 5 viene el 4.

I: Ahora vamos a meter 1 piedra, ¿cuántas van a salir?

A3: 3.

I: ¿Cómo lo sabes?

A3: Porque después del 2 va el 3.

Este alumno utilizó material concreto en toda la entrevista. Reconoció el cambio como el número que viene después del siguiente, para cada valor por el que se le pregunta. Utilizó la tabla, identificando los elementos de entrada y de salida y las parejas que se corresponden. No trabajó en la hoja en blanco.

Alumno 4

I: Al meter 2 piedras en la máquina, salen 4... ¿qué hace la máquina?

A4: No sé.

I: Probemos otra vez, cuando entran 5 piedras, salen 7. ¿Qué podemos decir que hace la máquina?

A4: Salen dos más.

...

I: [Cambiamos de rol] Y si entran 4, ¿cuántas deben salir?

A4: Pues 6.

I: ¿Qué hiciste?

A4: Le puse dos.

Este alumno utilizó material concreto en toda la entrevista. Reconoció el cambio de la máquina como dos más, para cada valor por el que le preguntamos, contestando correctamente. Dejamos al alumno gestionar la máquina. Utilizó la tabla de funciones, identificando los elementos de entrada y de salida y las parejas que se corresponden, puede extraer información de la tabla son dificultad. No quiso trabajar en la hoja en blanco.

Alumno 5

I: Cuando ingresan dos piedras, salen cuatro... ¿Qué hace la máquina?

A5: Que entran dos y salen cuatro.

I: Y si entra una... ¿cuántas crees que van a salir?

A5: Dos (ve las que salen). Pues digo tres.

I: ¿Y si meto tres?

A5: Cinco.

I: ¿Por qué?

A5: Porque es el que falta (en alguna parte del franelograma están representados todos los números) y ahora van a salir 6... Porque después del 5 va el 6.

Este alumno utilizó material concreto en toda la entrevista. Reconoció el cambio como que salen más elementos, pero solo identifica que sale el que sigue. Utilizó la tabla como almacenamiento, reconociendo los elementos que entraban y los que salían y las parejas que se corresponden. No trabajó en la hoja en blanco.

En la tabla 2 presentamos un panorama general del trabajo realizado en las entrevistas.

Tabla 2. Resumen de entrevistas

	Alumno				
	A1	A2	A3	A4	A5
Identifican el cambio	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Relación que identifican	$f(n)>n$	$f(n)=n+2$	$f(n)=n+1+1$	$f(x)=n+2$	$f(x)=n+1$

Se observa que todos los alumnos entrevistados identificaron que la máquina realizaba un cambio en los valores que entraban en la máquina respecto a los que salían. Los cinco alumnos verbalizaron la relación funcional, ya sea sin cuantificar el cambio (expresando que salen más) o cuantificándolo (es el siguiente del siguiente, sumándole uno y uno o sumándole dos). Todas las respuestas fueron adecuadas, aunque en el segundo caso (con cambio cuantificado) fueron más precisas. En todos los entrevistados observamos evidencia de pensamiento funcional y de generalización. En los alumnos A2, A3 y A4, las relaciones que identificaron fueron equivalentes.

CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo fue identificar el cambio que perciben los niños de 4 años al resolver una tarea de generalización que involucra una función lineal. Lo alcanzamos mediante el análisis y descripción de las entrevistas, que dejan evidencias de la percepción del cambio en las variables involucradas.

Al comparar este estudio con otros previos, coincidimos en que los alumnos evidenciaron pensamiento funcional al trabajar con conjuntos que covarían. Al igual que en Fuentes y Cañadas (2022), que fue un estudio de casos con una niña, nuestros entrevistados identificaron el cambio y la relación entre las variables.

Un aporte de esta investigación es dar peso a la identificación del cambio dentro del enfoque funcional como uno de los factores que llevan a establecer la relación funcional y la generalización. Una de las primeras evidencias de pensamiento funcional es la identificación del cambio y de las relaciones entre las variables involucradas. Mostramos un ejemplo sobre cómo trabajar del cambio cualitativo al cuantitativo y mostrar finalmente evidencias de pensamiento funcional.

Esta investigación aporta evidencia del trabajo que realizan los alumnos cuando se les plantean tareas de pensamiento funcional, aunque sabemos que los hallazgos no son generalizables por tratarse de una muestra muy reducida. Queda pendiente ampliar la muestra a otro tipo de estudiantes y ver si los resultados son similares.

Es importante proponer a los alumnos situaciones de cambio, poniendo el foco en la entrada, la salida o la transformación. Proponerles contextos cercanos y desafiantes ayudan a que se involucren en tareas de este estilo. Esperamos que actividades como esta sean un aporte a la tarea docente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y ANID n° 72210402, Gobierno de Chile.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: el caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). SEIEM.

Alsina, A. y Pincheira, N. (2022). El cambio: Un conocimiento esencial del álgebra temprana. *Revista Científica Ecociencia*, *9*(6), 49-76. https://doi.org/10.21855/ecociencia.96.737

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos*. Teide.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones f(x) = 3x y f(x) = 5x en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269-277). SEIEM.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación, 5° edición*. McGraw Hill.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *BOE*, 28, 1-33.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 56, 24386-24504.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

National Council Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Routledge.

Warren, E., Miller, J., y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

LOS PARADIGMAS DIDÁCTICOS COMO COMPONENTES ESENCIALES DE LA INFRAESTRUCTURA DEL ESTUDIO DE CLASES[i]

Didactic paradigms as critical components of the infrastructure of lesson study

García, F.J.[a], Gascón, J.[b], Nicolás, P.[c] y Sierra, T.A.[d]

[a]Universidad de Jaén, [b]Universitat Autònoma de Barcelona, [c]Universidad de Murcia, [d]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

El estudio de clases es una práctica profesional originada en Japón, íntimamente asociada a una forma determinada de entender las prácticas docentes. Mediante herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, reinterpretamos esta relación en términos del binomio (dispositivo, paradigma didáctico). Esto permitirá, en el caso particular del estudio de clases en Japón, desvelar que su diseño y funcionamiento en dicho país depende críticamente del paradigma didáctico de la "enseñanza a través de la resolución de problemas" vigente allí. Así mismo, mostramos algunas tensiones que surgen cuando el estudio de clases se traslada a instituciones en las que las prácticas docentes están reguladas bajo otros paradigmas, para concluir postulando que el paradigma didáctico es un componente esencial de la infraestructura del dispositivo de estudio de clases.

Palabras clave: *paradigmas didácticos, estudio de clases, formación del profesorado, enseñanza a través de la resolución de problemas.*

Abstract

Lesson study is a professional practice originating in Japan, intimately associated with a particular way of understanding teaching practices. Using tools from the Anthropological Theory of the Didactic, we reinterpret this relationship in terms of the binomial (device, didactic paradigm). This, will allow, in the particular case of lesson study in Japan, to reveal that its design and functioning in this country depends critically on the didactic paradigm of "teaching through problem solving" which is prevalent there. We also show some of the tensions that arise when lesson study is transferred to institutions where the teaching practices are regulated by other paradigms. We conclude by postulating that the didactic paradigm is an essential component of the infrastructure of the lesson study.

Keywords: *didactic paradigms, lesson study, teacher education, teaching through problem solving.*

INTRODUCCIÓN

La publicación del libro Stigler y Hiebert (1999) supuso la difusión mundial de prácticas docentes y profesionales que llevaban años desarrollándose en Japón (Fujii, 2018). Los autores caracterizan y comparan la enseñanza de las matemáticas en Japón, EUA y Alemania. Después analizan los mecanismos que sustentan ciertas prácticas profesionales del profesorado de dichos países, que pueden explicar las diferencias observadas.

El libro supuso la difusión internacional del estilo de clases japonés, que estos autores denominaron *resolución estructurada de problemas* (también se suele usar el término de *enseñanza a través de la resolución de problemas,* TTP[ii]). Al mismo tiempo, salieron a la luz ciertas prácticas profesionales de los docentes japoneses, integradas dentro de su quehacer profesional y orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza de las matemáticas. Estas se tradujeron al inglés como *lesson study*, y de ahí al castellano como *estudio de clases* o *de lecciones* (usaremos la primera, con las siglas EC, aunque no hay un consenso al respecto). Sin embargo, como señala Fujii (2018), el interés por el

García, F. J., Gascón, J., Nicolás, P. y Sierra, T. A. (2023). Los paradigmas didácticos como componentes esenciales de la infraestructura del estudio de clases. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 251–258). SEIEM.

EC, como práctica profesional, ha ensombrecido la importancia que en Japón tiene la metodología de TTP, como contenido y objeto de dicha práctica.

El objetivo de esta comunicación es profundizar en las relaciones que existen entre el EC y la concepción acerca de las matemáticas y su enseñanza presente, o asumida, en una determinada institución. Para ello, usaremos herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard et al., 2020). La tesis fundamental que subyace, y que exploramos para el caso particular del EC, postula la dependencia entre la forma de organizar la formación del profesorado y la forma de interpretar lo matemático y lo didáctico en las instituciones objeto de dicha formación.

MARCO TEÓRICO

En este apartado describiremos, brevemente, los elementos teóricos principales que usaremos en esta comunicación: el proceso de estudio de clases (EC) y la noción de paradigma didáctico (PD).

Respecto a la primera, el EC se inserta en el conjunto de prácticas de aprendizaje profesional de tipo colaborativo (Robutti et al., 2016), que se consideran eficaces para el desarrollo de conocimiento y/o destrezas profesionales (Darling-Hammond, 2006). El EC se presenta como un proceso cíclico estructurado en un conjunto de etapas o fases. Aunque se observan algunas diferencias entre autores cuando se entra en detalle en estas etapas, así como múltiples adaptaciones según el contexto en el que el EC se desarrolla, existe un consenso robusto acerca del proceso en sí. De forma global y resumida, y aun a riesgo de perder matices importantes, podemos describir los componentes esenciales del EC a partir de Fujii (2014, 2016): (1) el EC surge de algún interés del profesorado sobre el aprendizaje de cierto ámbito matemático en una institución I, que suele sintetizarse en una cuestión de investigación; (2) el grupo de profesores lleva a cabo un proceso de indagación acerca de la enseñanza del ámbito matemático en cuestión en I, que incluye una revisión en detalle de materiales curriculares (currículo vigente y libros de texto), así como de otros documentos y recursos; (3) el proceso de indagación se orienta al diseño de una intervención en el aula (una *clase de investigación*), creando una nueva tarea o adaptando alguna existente. En dicho diseño se detalla, por escrito, el desarrollo de una clase sobre dicha tarea, considerando las posibles estrategias de los alumnos, así como el papel del docente (recogido en un documento denominado *plan de clase*); (4) la clase se implementa en un aula real, por un profesor que ha participado en su diseño, y es observada en vivo por el resto de docentes involucrados en el proceso; (5) tras la implementación, hay una discusión colectiva sobre las estrategias utilizadas por los estudiantes y sobre las dificultades que han surgido. Dicha discusión que puede ser enriquecida con la intervención de un experto externo que también ha observado la clase; (6) el ciclo termina con una reflexión final para consolidar los aprendizajes profesionales y orientar el proceso hacia nuevos ciclos, pudiendo incluir la elaboración de un informe escrito final.

En relación con la segunda, Gascón y Nicolás (2021) afirman que la noción de PD tiene su origen en la tesis que postula que las prácticas docentes posibles en una institución didáctica están fuertemente condicionadas por el modelo epistemológico de las matemáticas vigente en dicha institución (Gascón, 2001). Caracterizan un PD, también denominado *modalidad de estudio*, en una institución I, como un sistema complejo integrado por cuatro componentes (Gascón y Nicolás, 2021): el *modelo epistemológico* de las matemáticas (ME), o de un cierto dominio de las mismas, vigente en dicha institución; los *fines educativos* (FE) que dicha institución persigue a propósito de la enseñanza de las matemáticas o de cierto dominio de las mismas; los *medios didácticos* (MD) que en dicha institución se consideran útiles para alcanzar dichos fines; los *fenómenos didácticos* (φD) (habitualmente «indeseables» desde cierta perspectiva) ante los que la institución responde con la puesta en marcha del PD. Tomando como referencia los niveles de codeterminación didáctica (Chevallard et al., 2020), es posible distinguir PD pedagógicos (independientes de las disciplinas), disciplinares (relacionados con las matemáticas y su enseñanza) o sub-disciplinares (relativos a cierto ámbito del conocimiento matemático) (Gascón y Nicolás, 2021). Entre los PD que el

investigador construye, de forma explícita, como instrumentos para analizar procesos de estudio institucionalizados, consideran los *PD de referencia* (PDR) y los *PD vigentes* en I (PDV_I). Donde los PDR se construyen para analizar los PDV_I, que representan modalidades de estudio presentes en una institución I.

EL ESTUDIO DE CLASES COMO DISPOSITIVO PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Desde la perspectiva y con las herramientas de la TAD, en García et al. (2022) propusimos modelizar el EC como un dispositivo para la formación del profesorado organizado como una interacción de diversos sistemas. Por un lado, un sistema didáctico escolar (la clase que se diseña, implementa, observa y discute). Por otro lado, varios sistemas de tipo paradidáctico (Winsløw, 2011), entendidos como sistemas didácticos formados por el profesorado, en los que se lleva a cabo una actividad matemático-didáctica referida al mencionado sistema didáctico escolar (indagación, planificación y diseño, observación y reflexión). Esta modelización permite, cuestionar el tipo de prácticas que se llevan a cabo en cada sistema, en términos de praxeologías (tipos de tareas, técnicas y entorno tecnológico-teórico). Además, permite preguntarnos acerca de las condiciones y restricciones que hacen posibles tales prácticas, y que vinculamos con el problema de las infraestructuras matemático-didácticas necesarias y/o disponibles (Chevallard, 2009). De esta forma, iniciamos una vía alternativa para analizar y comprender los factores que afectan y que harían viable este dispositivo, aspecto ampliamente discutido en la literatura existente sobre EC. Este análisis, en términos de infraestructuras, ya ha empezado a ser usado y a dar los primeros resultados (García et al., 2019, Miyakawa y Winsløw, 2019, Shinno y Yanagimoto, 2023).

LA ENSEÑANZA BASADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO PARADIGMA DIDÁCTICO DISCIPLINAR

En Japón, el dispositivo de EC se desarrolla, mayoritariamente, de acuerdo con los principios que subyacen a la metodología de TTP (Hino, 2007). Esta, en la medida en que se fundamenta en una forma de interpretar las matemáticas, preconiza unos *fines de la educación matemática*, propone unos determinados *medios didácticos* para alcanzar dichos fines y, como veremos, reacciona ante ciertos *fenómenos*, por lo que puede ser reinterpretada como un PD. A partir de diferentes fuentes, proponemos una caracterización inicial, y en cierta forma provisional, del TTP como PD.

Modelo epistemológico: las matemáticas se interpretan, principalmente, como un conjunto de relaciones entre conceptos, hechos y procedimientos, vinculados entre sí a través de procesos de resolución de problemas (Stigler y Hierbert, 1999). Tomando como referencia los paradigmas definidos en Gascón (2001) y su relación con determinados modelos docentes ideales, la TTP comparte, en gran medida, postulados propios de paradigmas de tipo *modernista* y *constructivista*, ya que asume que serán los estudiantes los que descubrirán y explorarán nuevos conocimientos y procedimientos matemáticos a través de procesos de resolución de problemas (Takahashi, 2021).

Fines educativos: se asume que el fin último de la educación matemática es enseñar a los alumnos a *pensar matemáticamente* (Isoda y Olfos, 2009), lo que se asocia con el desarrollo de destrezas de resolución de problemas (Takahashi, 2021). Sin embargo, se asume que el desarrollo de estas formas de pensar (inductivas, deductivas o analógicas) está encaminado a la comprensión, profundización, extensión y procedimentalización de conceptos matemáticos, al desarrollo de formas de representación de los objetos matemáticos, y al desarrollo de distintas formas de comunicación, explicación y argumentación (Isoda y Olfos, 2009).

Medios didácticos: los docentes introducirán los nuevos conocimientos a través de nuevos problemas que los estudiantes deben tratar de resolver por sí solos. Las características de estos problemas son cruciales: se trata de problemas que sean accesibles a los estudiantes, que no sean de aplicación directa de conocimientos anteriores y que admitan diferentes estrategias de solución

(Isoda y Olfos, 2009). En especial, se enfatiza, como una característica distintiva de esta aproximación, el uso de los denominados *problemas "abiertos-cerrados*": problemas con una única solución pero que pueden ser resueltos siguiendo diferentes procedimientos (Takahashi, 2021). Las clases se organizan a modo de lecciones articuladas en torno a un problema del tipo anterior, siguiendo una estructura más o menos prefijada: (1) la presentación del problema por parte del docente; (2) el trabajo autónomo del estudiante, mientras que el profesor circula por la clase, observa los diferentes procedimientos y toma nota mental de ellos de cara a la siguiente fase; (3) la discusión colectiva, orquestada y dirigida por el profesor, en la que los estudiantes pueden presentar sus métodos de resolución y el profesor establece conexiones entre estos, guiando la discusión; (4) la síntesis, en la que se resumen las ideas principales de la lección (Isoda y Olfos, 2009; Takahashi, 2021). Aunque todas las fases son importantes, se destaca, en especial, la tercera, conocida como *neriage*, ya que, a través de ella, se pone el acento no tanto en llegar a la solución del problema, sino en la comprensión de los conocimientos matemáticos a través de la discusión y comparación de diferentes estrategias (Takahashi, 2021), que es uno de los FE perseguidos.

Fenómenos didácticos: este paradigma surge como reacción de la institución de la enseñanza de las matemáticas a algunas de las limitaciones de los paradigmas tradicionales que interpretan la enseñanza de las matemáticas como la memorización de hechos y de procedimientos (Takahashi, 2021). Esto dificulta la comprensión de los procedimientos matemáticos y el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas. En este sentido, se pueden interpretar como un paradigma que reacciona ante paradigmas de tipo *teoricista* y *tecnicista* (Gascón, 2001).

LOS PARADIGMAS DIDÁCTICOS COMO COMPONENTES ESENCIALES DE LA INFRAESTRUCURA DEL ESTUDIO DE CLASES

El EC es un dispositivo complejo y difícil de mantener. Abundan las investigaciones que han puesto en evidencia las dificultades encontradas para iniciar este tipo de procesos, tanto con profesores en activo como con profesores en formación inicial, así como las transformaciones que este sufre en su necesidad de adaptarse a diferentes contextos (Seleznyov, 2018). Además, en la medida en que se interpreta que gran parte de su potencial radica en que sea una práctica sostenida en el tiempo y no puntual, las barreras y dificultades parecen multiplicarse. Desde la perspectiva teórica antes esbozada, relacionamos estas dificultades con la ausencia de una infraestructura matemático-didáctica adecuada.

En el caso japonés, diversos autores (p.e., Doig et al. 2011; Lewis y Tsuchida, 1999; Miyakawa y Winsløw, 2019; Shimizu, 2014;) han identificado componentes infraestructurales que podrían explicar la sostenibilidad de esta práctica. Se describen aspectos diversos como, por ejemplo: dotar al profesorado de tiempos y espacios para reunirse; una mentalidad de la profesión abierta al escrutinio y a la opinión de otros; un currículo relativamente breve; unos estudiantes que desean siempre colaborar en clase; el apoyo al profesorado desde instancias administrativas; un entramado de conferencias para profesores a nivel nacional, regional y local; disponibilidad de recursos que sirvan de modelo (libros de texto, revistas profesionales, actas de congresos, libros de sociedades de profesores, etc.). En la mayoría de los casos, estos factores se vinculan con los niveles superiores de codeterminación didáctica (pedagogía, escuela, sociedad). Sin embargo, detectamos una ausencia de problematización sobre los componentes infraestructurales relacionados con los niveles inferiores de codeterminación (disciplina e inferiores), aun cuando estos son densos en una gran parte de esta infraestructura de apoyo (por ejemplo, en los libros de texto, en el currículo, nacional, o en publicaciones para el profesorado). Consideramos que no se trata de un asunto menor, ya que la realización de un EC implica una reflexión profunda sobre los objetos matemáticos y su enseñanza, que conduzca a una toma consciente y bien meditada de decisiones sobre el diseño de la clase que se va a implementar y a observar, y que guíe y haga productiva la discusión posterior. Entender desde qué posición los profesores llevarán a cabo todo este proceso es crucial para el éxito del dispositivo en términos de aprendizaje profesional.

En el caso japonés, el dispositivo de EC se considera indisociablemente ligado a la metodología de TTP (Fujii, 2018; Hino, 2007). Es decir, que, si consideramos como institución J al "EC en Japón", en la misma se adopta, como PD vigente, el que hemos esbozado en el apartado precedente (por ello, lo denotaremos, a partir de ahora, como PDV_J). El carácter dominante de este paradigma da lugar a una forma común y compartida de interpretar qué es hacer matemáticas, aprender matemáticas y enseñar matemáticas, que es denso y atraviesa prácticas profesionales que llevan a cabo los docentes involucrados en procesos de EC. Esto se observa en todas las fases del EC (García et al., 2019) pero, especialmente, en la fase de indagación (*kyozaikenkyu*) que culmina con la redacción detallada de una lección (*plan de la clase*). Watanabe et al. (2008) describen, con cierto detalle, qué significa y cómo se lleva a cabo esta fase en Japón. El término *kyozai* se puede traducir como "material instruccional", y se suele asociar con tipos de tareas, normalmente presentes en libros de texto (de ahí la importancia que tiene el análisis de estos). El término *kenkyu* se puede traducir como "investigación". En un primer nivel, esta se entiende en el sentido de investigar, de forma profunda y repetida, un determinado "material instruccional" (por ejemplo, una tarea que se presenta en un libro de texto). Se trata de investigar hasta que el profesorado desarrolle una visión clara de lo que ellos podrían enseñar y los alumnos podrían aprender a través de dicho "material". Es especialmente relevante que los profesores se pregunten acerca de cómo los estudiantes resolverán el problema que el "material instruccional" presenta, anticipando posibles soluciones. En un segundo nivel, se procede a la elaboración de un determinado *plan de clase*, basado en el análisis de diferentes "materiales instruccionales" y siguiendo la estructura que hemos esbozado en los MDV_J.

Es en este nivel de microanálisis en el que se observa el papel crucial que desempeña el PDV_J, como forma compartida de interpretar las matemáticas y su enseñanza, en la configuración de la estructura y el funcionamiento del dispositivo de EC en Japón. Por ejemplo: a) la importancia que se le otorga a la selección de tareas problemáticas que permitan a los estudiantes desarrollar diferentes estrategias a partir de sus conocimientos previos. Y que, además, dichos procedimientos estén bien conectados con determinados conocimientos matemáticos, en coherencia con el MEV_J de tipo constructivista y con los FEV_J; b) La exploración concienzuda que se lleva a cabo de tales tareas para determinar, a priori, ese conjunto de posibles estrategias, de manera consistente con los FEV_J y con los MDV_J; c) El diseño minucioso que realiza de la clase (o lección), organizada en torno a este tipo de tareas y que obedece a una estructura más o menos prefijada que hemos detallado dentro de los MDV_J. En particular, es de gran importancia planificar el tipo de discurso que el docente desarrollará para articular entre sí las diferentes soluciones que se espera que surjan en el trabajo exploratorio de los alumnos. Este debe conducir a la compresión del contenido matemático objeto de la clase, superando así los fines meramente teoricistas o tecnicistas, en coherencia con los FEV_J.

Ahora bien, ¿qué ocurre en otros contextos, en los que el dispositivo de EC se intenta desarrollar asumiendo PD institucionales diferentes al PDV_J? ¿O qué sucede cuando se desea introducir el binomio EC-PDV_J en instituciones en las que los procesos de estudio están regidos por otros paradigmas? Para responder a esta pregunta, hemos seleccionado un conjunto de investigaciones que relatan el EC fuera de Japón. Además, nos interesan, o bien aquellas que describen el intento de trasponer componentes del PDV_J a otros contextos, o bien las que comparan EC realizados bajo otros paradigmas con el EC japonés. Consideramos que una mirada detallada a estudios de este tipo puede ser reveladora del importante papel que desempeñan los PD como componentes infraestructurales.

Por limitación de espacio, sintetizaremos aquí sólo algunos aspectos de 5 de estas investigaciones. Fujii (2014) describe cómo una comprensión superficial del PDV_J por parte de profesores involucrados en procesos de EC en Uganda y Malawi condujo a deficiencias en el proceso, (a) como una insuficiente anticipación de las estrategias de los estudiantes o (b) una dificultad para

identificar el objetivo de la clase en la exploración del currículo y los materiales a utilizar. En el caso de Malawi, Fauskanger et al. (2022) describen cómo los profesores se aferran, inicialmente, a "visiones tradicionales" (reflejo del PD vigente) de las matemáticas y cómo, tras el EC, empiezan a emerger otros aspectos, como la necesidad de crear espacios de participación para los estudiantes de manera que pueden descubrir las matemáticas por sí mismos (más cercanos ya al PDV_J). Clivaz y Miyakawa (2020) analizan dos procesos de EC con profesorado en formación inicial de Suiza y Japón, evidenciando cómo, incluso partiendo de la misma tarea, las clases que diseñan difieren en aspectos importantes. Al afirmar que "las clases implementadas (…) reflejan, en gran medida, las características de una clase ordinaria de matemáticas en cada país" (p. 68, traducción propia), los autores evidencian cómo los PD vigentes determinan el proceso de EC, mostrando así la necesidad de considerar el EC siempre desde la perspectiva de un PD determinado. En Groves et al. (2016) se relata una experiencia de introducción del PDV_J en Australia, usando el dispositivo del EC. El análisis de la misma muestra cómo los docentes intentaban dar sentido al PDV_J desde la perspectiva del PD vigente en dicho país, dando lugar a tensiones, como: a) la dificultad de los docentes en aceptar que toda una clase gire en torno a un solo problema; b) su reticencia a dar importancia al momento en que el profesor circula por la clase observando el trabajo de los estudiantes; c) no querer aceptar que aproximadamente la mitad de la clase se dedique a discutir las diferentes soluciones a la tarea; d) su escepticismo respecto a que los estudiantes participasen de forma efectiva en dicha discusión. Lo que los autores identifican como una diferencia en la *cultura de enseñanza* en ambos países se podría interpretar, de hecho, como un choque entre dos PD, el vigente en Australia y el PDV_J en el que se pretende que los profesores entren. Una interpretación similar, en términos de tensiones entre paradigmas, se muestra en Asami-Johansson (2021), donde, a través del análisis del caso de una profesora sueca que se aproxima al PDV_J, se ponen en evidencia las dificultades que esta tiene para movilizar técnicas didácticas propias del modelo japonés. La autora relaciona estas dificultades con lo que denomina el "contexto histórico y cultural" en Japón y Suecia, aunque, desde nuestra perspectiva, realiza una descripción de los PD vigentes en ambos países, para concluir que la profesora sueca modifica algunas de las técnicas didácticas propias del modelo japonés desde la perspectiva del paradigma vigente en Suecia.

CONCLUSIONES

El análisis del dispositivo de EC en Japón nos ha permitido poner en evidencia la estrecha relación que guarda con cierto PD vigente en dicho país. De hecho, argumentamos que, lo que hemos denominado PDV_J, es un componente infraestructural básico para el sostenimiento y el adecuado funcionamiento del dispositivo en dicho país. La breve revisión realizada de algunas investigaciones que relatan la traslación del dispositivo a otros países, en los que otros paradigmas didácticos están vigentes, o el contraste entre EC realizados asumiendo PD diferentes, nos permite empezar a vislumbrar hasta qué punto el PD asumido afecta al desarrollo del dispositivo. En particular, interpretamos algunos de los resultados descritos en estas investigaciones en términos de tensiones entre el paradigma vigente en dichos contextos, y que en gran medida determina cómo los profesores piensan y deciden acerca de la educación matemática de los estudiantes, y el paradigma importado, explícita o implícitamente.

Seleznyov (2018) realiza un análisis de la traslación del dispositivo a contextos diferentes al japonés, a partir de una revisión extensa de literatura científica, concluyendo que no hay una interpretación internacionalmente compartida del EC. Además, propone una lista de "componentes esenciales" que caracterizan al EC en Japón, para concluir que, en muchas de las investigaciones que ha revisado, uno o más de estos componentes están ausentes. En ninguno de los 7 componentes que propone como esenciales del dispositivo de EC tal y como se desarrolla en Japón, la autora identifica la forma en la que se interpretan las matemáticas y su enseñanza en Japón, es decir, el PD vigente. Resulta, sin lugar a duda, paradójico, a la luz del énfasis que académicos de ese país ponen en la inseparabilidad del dispositivo respecto de tal paradigma (Fujii, 2018; Hino, 2007). De hecho,

Fujii (2014) considera que, para la transferencia del modelo japonés de EC, es necesario considerar, de manera explícita, las creencias y actitudes de los profesores japoneses que lo apuntalan. Postulamos que, una parte esencial de tales creencias y actitudes, son un reflejo del PDV_J.

Gascón y Nicolás (2021) afirman que son los PD, globalmente considerados, los que permiten explicar las prácticas docentes que se llevan a cabo en una institución. En la medida en que el dispositivo de EC implica un trabajo profundo y refinado sobre las prácticas docentes institucionales, y que estas están fuertemente condicionadas por los PD vigentes en dichas instituciones, la consideración por parte del investigador del binomio EC-PD se revela de vital importancia para entender el funcionamiento del dispositivo, determinar la viabilidad del mismo y comprender el tipo de aprendizaje profesional al que este daría lugar. Así se muestra, por ejemplo, en Lendínez et al. (2020) y Lendínez y García (2021), donde se analiza el diseño, la implementación y el tipo de aprendizaje profesional en un dispositivo de EC bajo la consideración explícita del PD disciplinar asumido desde la Teoría de las Situaciones Didácticas en formación inicial del profesorado.

Referencias

Asami-Johansson, Y. (2021). Conditions and constraints for transferring Japanese structured problem solving to Swedish mathematics classroom. *Recherches en Didactique des Mathemátiques*, *41*(3), 347–391.

Chevallard, Y. (2009). Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. *Journées Ampère in Lyon*. http://yves.chevallard.free.fr/ spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M., García, F.J. y Monaghan, J. (2020). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook*. Routledge.

Clivaz, S. y Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(1), 53–70.

Darling-Hammond, L. (2006). Constructing 21st-Century Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, *57*(3), 300–314.

Doig, B., Groves, S. y Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. En L. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 181-200). Springer.

Fauskanger, J., Helgevold, N., Mercy, K. y Jakobsen, A. (2022). Challenging Malawian Primary Teachers' Views on Mathematics Teaching and Learning through Lesson Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 11*(1), 26-39.

Fujii, T. (2014). Implementing Japanese Lesson Study in Foreign Countries : Misconceptions Revealed. *Mathematics Teacher Education and Development Journal*, *16*(1), 65–83.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 411–423.

Fujii, T. (2018). Lesson Study and Teaching Mathematics Through Problem Solving: The Two Wheels of a Cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, A. Ní Shúilleabháin y A. Takahasi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer.

García, F.J., Wake, G., Lendínez, E M. y Lerma, A.M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(1), 137–156.

García, F.J., Lendínez, E.M. y Lerma, A.M. (2022). On the Problem Between Devices and Infrastructures in Teacher Education Within the Paradigm of Questioning the World. En Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás y N. Ruiz-Munzón (Eds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 103–112). Birkhäuser.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *4*(2), 129–159.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática*, *33*(1), 7–40.

Groves, S., Doig, B., Vale, C. y Widjaja, W. (2016). Critical factors in the adaptation and implementation of Japanese Lesson Study in the Australian context. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4), 501–512.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: Trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education*, *39*(5–6), 503–514.

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Ediciones Universitarias de Valparaiso.

Lendínez, E.M., García, F.J. y Lerma, A.M. (2020). Propuesta de un proceso de estudio de clases para la formación inicial del profesorado de Educación Infantil desde el paradigma del cuestionamiento del mundo. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(4), 694–710.

Lendínez, E.M. y García, F.J. (2021). Desarrollo del equipamiento praxeológico de los futuros maestros de Educación Infantil a través del Estudio de Clases. En P. D. Diago, D. F. Yañez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 377–384). SEIEM.

Lewis, C. y Tsuchida, I. (1999). A lesson is like a swiftly flowing river: research lessons and the improvement of Japanese education. *Improving Schools, 2*(1), 48-56.

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2019). Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: a case study of "practice research" in Japan. *J Math Teacher Educ*, *22*(3), 281–303.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM Mathematics Education*, *48*(5), 651–690.

Seleznyov, S. (2018). Lesson study: an exploration of its translation beyond Japan. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *7*(3), 217–229.

Shimizu, Y. (2014). Lesson study in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 358-360). Springer.

Shinno, Y. y Yanagimoto, T. (2023). Conditions and constraints of implementing a mathematics lesson study-based PD program for Japanese pre-service teachers. *European Journal of Science and Mathematics Education, 11*(2), 322-343

Stigler, J.W. y Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. The Free Press.

Takahashi, A. (2021). *Teaching mathematics through problem-solving*. Routledge.

Watanabe, T., Takahashi, A. y Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. En F. Arbaugh y P. M. Taylor (Eds.), *AMTE Monograph 5: Inquiry into Mathematics Teacher Education* (pp. 131–142). AMTE.

Winsløw, C. (2011). A comparative perspective on teacher collaboration: The cases of lesson study in Japan and of multidisciplinary teaching in Denmark. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources* (pp. 291–304). Springer.

[i] Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación PID2021-126717NB-C32, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

[ii] Teaching Through Problem-solving, en inglés.

USO DE LA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PARA CONTRASTAR EL ESTADO HIPOTÉTICO E IMPLEMENTADO DE LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA[1]

Using the epistemic configuration to contrast the hypothetical and implemented state of mathematical instruction

Garcia-Mora, E. y Díez-Palomar, J.

Universitat de Barcelona

Los conceptos, las proposiciones, los argumentos, la situación-problema, el lenguaje y los procedimientos son las entidades primarias de la instrucción matemática que integran una configuración epistémica, constructo del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Este instrumento permite al profesor regular las tareas a implementar en el aula y posteriormente reflexionar sobre dicha implementación. En esta comunicación se muestra una aplicación del constructo para caracterizar las seis entidades primarias según aquello se espera movilizar con la tarea (configuración epistémica hipotética) y que en el aula ocurre (configuración epistémica implementada). Cuando una tarea se desarrolla de una manera no esperada, el contraste de las seis entidades en estos dos momentos permite identificar los elementos que provocaron dicho desfase para rediseñar y mejorar la tarea.

Palabras clave: *configuración epistémica, Enfoque Ontosemiótico, reflexión del profesor.*

Abstract

Concepts, propositions, arguments, situation-problem, language and procedures are the primary entities of mathematical instruction that compose an epistemic configuration, a construct of the Ontosemiotic Approach (OSA). This instrument allows the active teacher to regulate the tasks to be implemented in the classroom and later reflect on said implementation. This communication shows an application of the construct to characterize the six primary entities according to what is expected to be mobilized with the task (hypothetical epistemic configuration) and what occurs in the classroom (implemented epistemic configuration). When a task is developed in an unexpected way, the contrast of the six entities in these two moments allows to identify the elements that caused this gap in order to redesign and improve the task.

Keywords: *epistemic configuration, Ontosemiotic Approach, teacher's reflection.*

INTRODUCCIÓN

Cuando un profesor diseña una tarea de tipo matemático, visualiza las reacciones que espera generar en el alumnado. Tales reacciones se pueden concretar como evidencias de aprendizaje graduadas en niveles de desempeño. Si el profesor observa que la mayor parte del grupo presenta niveles de desempeño más bajos de los que esperaba se puede generar en él una crisis de confianza sobre su propia práctica (Camargo, 2019). La reflexión es una práctica docente que permite identificar los elementos de la tarea que condujeron a la generación de reacciones de los alumnos diferentes a las esperadas. El uso de instrumentos de análisis didáctico que sistematizan la reflexión del profesor sobre su propia práctica es fundamental en la visualización de aspectos de la implementación que

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos: PID2021-127104NB-I00, PID2019-104964GB-I00 (MICINN, FEDER, EU), PGC2018-098603-B-I00 (MINECO).

Garcia-Mora, E. y Díez-Palomar, J. (2023). Uso de la configuración epistémica para contrastar el estado hipotético e implementado de la instrucción matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 259–266). SEIEM.

pueden no ser perceptibles por parte del profesor. El *Enfoque Ontosemiótico* (EOS) propone una serie de instrumentos de análisis didáctico para orientar la reflexión del profesorado, uno de ellos es el constructo *configuración epistémica*. En dicho constructo se identifican y relacionan las seis entidades primarias presentes en toda instrucción matemática: conceptos, proposiciones, argumentos, situación-problema, lenguaje y procedimientos (Godino et al., 2020).

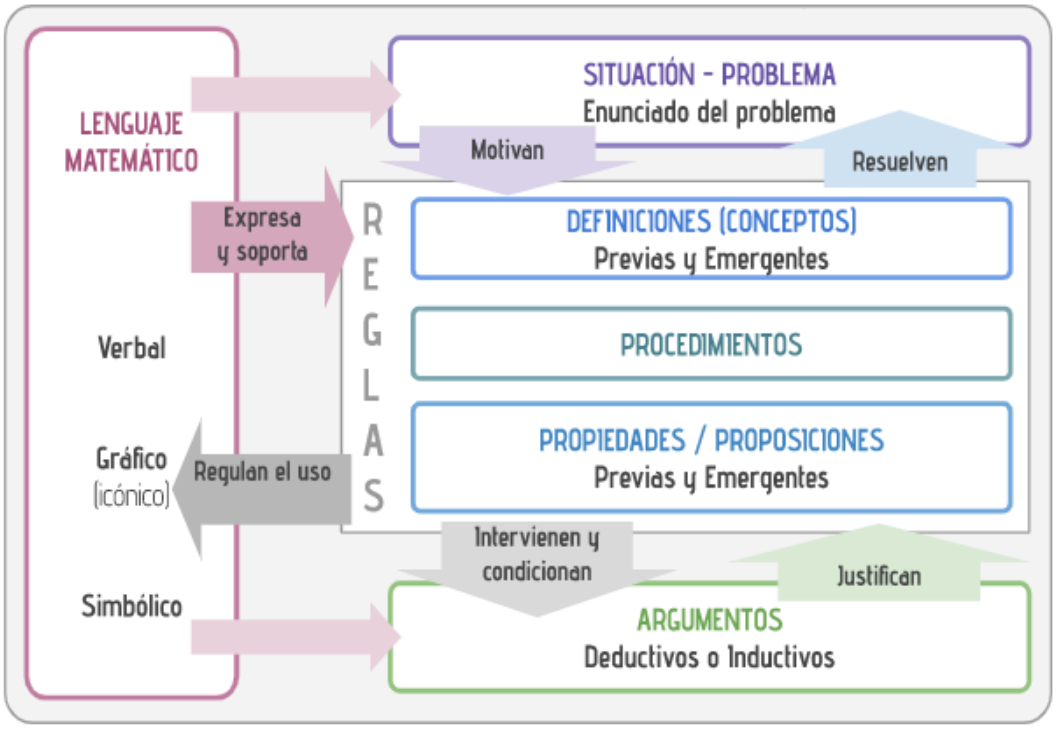
Con esta comunicación se muestra la aplicación de un constructo de análisis didáctico: la *configuración epistémica* como una herramienta para establecer lo que espera observar en el aula (estado hipotético) y lo que sucede en el momento de la implementación de la tarea (estado implementado). El objetivo de realizar la reflexión antes y después de su paso por el aula es caracterizar los objetos primarios del diseño de una tarea matemática (configuración epistémica hipotética) y los de su implementación en el aula (configuración epistéimca implementada). Tales caracterizaciones permiten encontrar relaciones entre sucesos del episodio de clase y las variaciones entre los objetos primarios en las fases hipotética e implementada.

ANTECEDENTES

Dentro del marco del EOS, Godino y colaboradores (2020) desarrollaron un conjunto de constructos para analizar de manera exhaustiva los problemas teóricos, epistemológicos y semióticos en torno del conocimiento matemático. La aplicación de dichos constructos permite describir las componentes científica, descriptiva, explicativa y predictiva del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas con el objetivo de conducir este proceso de la manera más idónea que sea posible.

Para el EOS se define como *configuración epistémica* al sistema formado por objetos matemáticos, prácticas matemáticas y procesos. Font y Godino (2006) enriquecieron la noción de *objeto matemático* que se presentaba en el currículum de algunos países en el momento de su investigación. En aquel momento los autores identificaron los *conceptos* y los *procedimientos*, por lo que ampliaron la ontología con lo que actualmente constituye los seis objetos primarios de la *configuración ontosemiótica* que se reconocen: conceptos, proposiciones, argumentos, situación-problema, lenguaje y procedimientos (Font y Godino, 2006). Se entiende como *conceptos* a todo término que puede utilizarse una vez que se ha establecido una definición de él. Las *proposiciones* son los enunciados que requieren de uno o varios *argumentos* para ser validados (Godino, 2018). El *lenguaje* es el conjunto de términos, notaciones, expresiones y gráficos en los que se presenta o describe un objeto matemático. La *situación-problema* son las consignas con las que se introduce una tarea con el propósito de inducir la actividad matemática. Finalmente, los *procedimientos* son las operaciones, algoritmos o técnicas utilizadas para el desarrollo de una tarea de tipo matemático (Godino, 2002). Para Font y Godino (2006), los seis objetos primarios que integran a la *configuración epistémica* se relacionan y condicionan entre sí (Figura 1). En primer lugar, la *situación-problema* es el objeto primario que motiva el uso de *conceptos*, *procedimientos* y *proposiciones*. En conjunto, estos tres objetos primarios (*conceptos*, *procedimientos* y *proposiciones*) integran las reglas de la instrucción matemática. Por su parte, el *lenguaje matemático* es el objeto matemático que ayuda a expresar y soportar las reglas, es decir, las *definiciones*, los *procedimientos* y las *proposiciones*. Las reglas a su vez regulan el uso del *lenguaje matemático* y resuelven la *situación-problema*. Finalmente, los *argumentos* dotan de justificación a las reglas. Como lo mencionan Font y Godino (2006), los objetos primarios que integran la *configuración epistémica* son útiles en la descripción de la actividad matemática y ayudan al profesor a analizarla de la manera más completa posible. Cabe puntualizar que Font y Godino (2006) identifican dos tipos de *configuraciones epistémicas*: las axiomáticas y las formalistas. La diferencia entre la *configuración epistémica axiomática* y la *configuración epistémica formalista* es la ausencia de la *situación-problema* y los *procedimientos*. Por tanto, en este trabajo de investigación se considera exclusivamente la *configuración epistémica formalista*, es decir, el constructo que considera los seis objetos primarios (Figura 1).

Figura 1. Configuración epistémica (Font y Godino, 2006).



METODOLOGÍA

Para la identificación de los elementos clave en el desarrollo de una tarea matemática se diseñó un itinerario de estudio cualitativo en seis fases: (1) diseño de la tarea, (2) caracterización del estado hipotético (*configuración epistémica hipotética*), (3) implementación de la tarea por parte del equipo investigador, (4) caracterización del estado implementado (*configuración epistémica implementada*), (5) contraste de los estados hipotético e implementado de la tarea y (6) reflexión basada en el contraste de los estados hipotético e implementado de la tarea.

La recopilación de información para esta investigación se realizó por medio de un estudio de caso (Stake, 1998). El grupo donde se implementó la tarea estaba formado por treinta alumnos. Los instrumentos de recopilación de datos consistieron en las producciones de los alumnos y los registros de observación del equipo investigador, que a la vez se hizo cargo de la implementación para aplicar una observación participante (Massot et al., 2009; Patton, 2022).

Fase 1. Diseño de la tarea

Para el diseño de la tarea matemática se tomaron como referencia las orientaciones curriculares para el dibujo geométrico en el primer curso de la escuela secundaria obligatoria (Decret 187/2015). La situación-problema hipotética (SPH), es decir, la situación-problema diseñada para su implementación en el aula es el objeto primario de la *configuración epistémica hipotética* de la tarea que se reconoce en primer lugar al diseñar la tarea. Dicho planteamiento fue el siguiente: *Toda la clase participará en el Festival de Globos. Se trata de un festiva especial donde se prueba la habilidad de los equipos que participan. Para ello se hace un sorteo de diferentes cuerpos geométricos para que cada equipo haga un modelo de ellos en papel. El cuerpo que ha sido asignado a vuestra clase es un octaedro*.

Durante el diseño de la tarea también se propusieron las instrucciones con las cuales se conduciría al grupo hacia la construcción colaborativa de un desarrollo plano: (1) la clase se dividirá en ocho grupos para que cada equipo realice el trazo de una de las ocho caras del poliedro, (2) para que las ocho

figuras permitan la construcción del desarrollo plano de un octaedro, todas ellas deben ser congruentes, por tanto la comunicación entre los equipos será fundamental, (3) una vez obtenidas las ocho caras se realizará la construcción del poliedro.

Fase 2. Caracterización del estado hipotético

El planteamiento de la *situación-problema hipotética* (SPH) dio pie a la caracterización de algunas de las entidades primarias que integran la configuración epistémica. En primer lugar, se identificaron las *definiciones (conceptos) hipotéticas* (DCH) que se esperaba encontrar en el aula al momento de la implementación. Posteriormente se reconocieron los términos que integraron el *lenguaje matemático verbal/escrito* (LMVEH) y *gráfico* (LMGH) esperados. La conjunción de las tres entidades anteriores condujo a la identificación de las *propiedades/proposiciones hipotéticas* (PPH), para a continuación relacionar con ellas las instrucciones de la tarea e integrar la descripción de la entidad denominada *procedimientos* esperados (PH). Finalmente se establecieron los *argumentos hipotéticos* (AH). La descripción de los objetos primarios que dan forma a la *configuración epistémica hipotética* de la tarea se muestra con mayor detalle en la Tabla 1.

Tabla 1. Descripción de los objetos primarios de la *configuración epistémica hipotética* de la tarea.

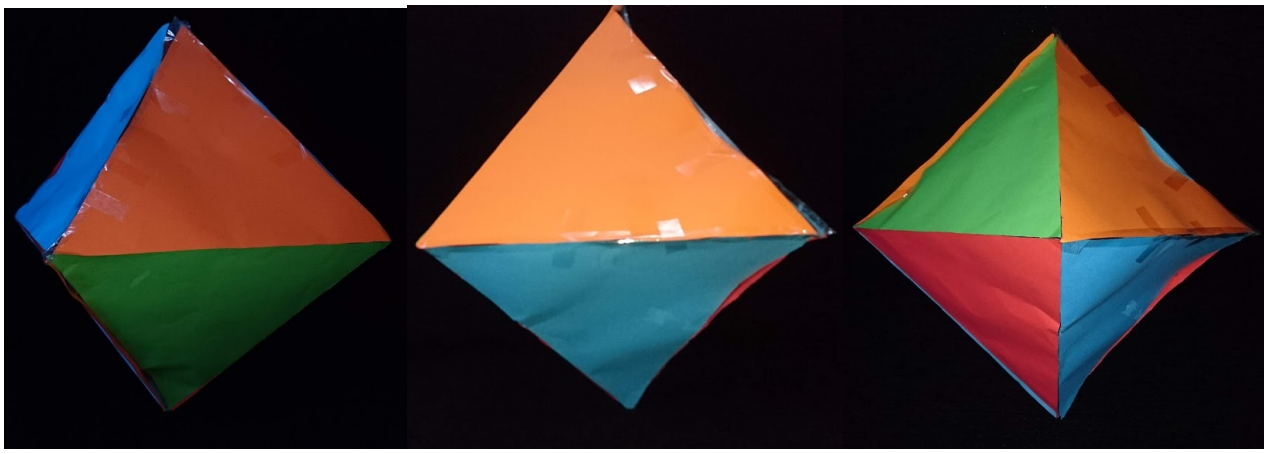
Objetos primarios de la *configuración epistémica hipotética*		
Código	*Objeto Primario*	*Descripción del objeto primario*
SPH	Situación-Problema Hipotética	Planteamiento del problema de construcción grupal de un octaedro a partir de sus caras en el contexto de un concurso de globos.
DCH	Definiciones (Conceptos) Hipotéticas	Cuerpo geométrico, modelo, congruente, octaedro
LMVEH	Lenguaje Matemático Verbal/Escrito Hipotético	Cuerpo geométrico, modelo, figura, desarrollo plano, octaedro, información numérica y no numérica dadas
LMGH	Lenguaje Matemático Gráfico Hipotético	Representación en dos dimensiones de un octaedro en escala de grises, representación en dos dimensiones de un octaedro en color y con trasparencias en las caras frontales, desarrollo plano de un octaedro
PPH	Propiedades/Procedimientos Hipotéticos	(1) Identificar la forma de las caras de un octaedro: triángulos equiláteros, (2) identificar las medidas de los lados del triángulo para que este sea equilátero.
PH	Procedimientos Hipotéticos	(1) Analizar las características y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones para identificar relaciones entre ellas, (2) utilizar la visualización, el razonamiento y la modelización para resolver problemas, (3) utilizar instrumentos de dibujo geométrico para dibujar un triángulo equilátero congruente al del resto de los equipos, (4) construir un octaedro a partir de sus caras.
AH	Argumentación Hipotética	(1) El uso de los instrumentos de dibujo geométrico son materiales manipulables que ayudan a medir y a trazar figuras geométricas con precisión, (2) los instrumentos de dibujo de los que se dispone condicionan el procedimiento de trazo de figuras geométricas y (3) el grado de precisión del dibujo geométrico condiciona la obtención de un cuerpo geométrico.

Fase 3. Implementación

Para la implementación de la tarea, uno de los miembros del equipo de investigación se hizo cargo de una sesión de matemáticas con un grupo de alumnos de secundaria. A pesar de que el nivel de logro de la tarea fue satisfactorio, los alumnos construyeron un octaedro aparentemente simétrico (Figura 2), las interacciones entre ellos difirieron de lo esperado. Es decir, la colaboración y diálogo

entre los alumnos fue muy limitada y casi inexistente. Por lo que el éxito de la tarea se debió al trabajo individual de un miembro de cada grupo.

Figura 2. Producción de los alumnos



Las observaciones de dicha experiencia se recogieron en forma de notas de campo que se acompañaron de imágenes. De la intervención en el aula se derivaron variaciones del diseño de la tarea como la omisión del contexto para dar agilidad a la sesión y promover la participación del alumnado que se mostró distraído con los instrumentos de dibujo geométrico entregados justo al iniciar la sesión. La mayor parte de la recopilación de la información sobre el trabajo dentro del aula se realizó en la caracterización de la sesión con el constructo *configuración epistémica implementada*.

Fase 3. Caracterización del estado implementado

Al igual que en la fase de diseño, el constructo *configuración epistémica* se utilizó para analizar la implementación de la tarea por medio de la identificación de las seis entidades primarias y su organización en la Tabla 2: *situación-problema implementado* (SPI), *definiciones (conceptos) implementados* (DCI), *lenguaje matemático verbal/escrito implementado* (LMVEI), *lenguaje matemático gráfico implementado* (LMGI), *propiedades/proposiciones implementadas* (PPI), *procedimientos implementados* (PI) y *argumentos implementados* (AI). Al seguir el mismo orden de análisis se esperaba encontrar los primeros patrones que dieran pie a la identificación de variaciones entre las entidades que integran la *configuración epistémica*. En la misma Tabla 2 se muestran tanto los componentes de cada objeto primario presentados por la persona que implementó la tarea como aquellos que surgieron en las intervenciones de los alumnos. Estos últimos se identifican bajo la etiqueta *emergentes*. Por otra parte, en la Tabla 2 también se agrega la etiqueta *verbal* y *escrito* al lenguaje matemático emergente, es decir que surgió de las interacciones entre los alumnos.

Tabla 2. Descripción de los objetos primarios de la *configuración epistémica implementada* de la tarea.

Objetos primarios de la *configuración epistémica implementada*		
Código	*Objeto Primario*	*Descripción del objeto primario*
SPI	Situación-Problema Implementada	Planteamiento descontextualizado del problema de construcción grupal de un octaedro a partir de sus caras.
DCI	Definiciones (Conceptos) Implementadas	Octaedro, caras, triángulo, triángulo equilátero, medidas iguales, altura, altura de un triángulo. Emergentes: Lado más largo, lados de un triángulo, punto medio, longitud de un lado, extremos, lado opuesto.
LMVEI	Lenguaje Matemático Verbal/Escrito Implementado	Cuerpo geométrico, octaedro Verbal emergente: aquí, allá, más cerca, raya, está chueco. Escrito emergente: 42 cm y 21 cm
LMGI	Lenguaje Matemático Gráfico Implementado	Representación en dos dimensiones de un octaedro en escala de grises, representación en dos dimensiones de un octaedro en color y con trasparencias en las caras frontales, triángulos
PPI	Propiedades/Procedimientos Implementados	Identificar la forma de las caras de un octaedro: triángulos equiláteros Emergentes: las medidas de los lados de un triángulo deben ser iguales para garantizar que es un triángulo equilátero
PI	Procedimiento Implementado	(1) Seleccionar el lado más largo de la hoja para ubicar uno de los lados del triángulo, (2) medir el lado más largo, 42 cm, para identificar su punto medio, 21 cm, (3) trazar la altura del triángulo a partir del punto medio de lado más largo de la hoja, (4) aplicar el ensayo-error para identificar el vértice que comparten los dos lados que faltan por trazar para formar el triángulo equilátero
AI	Argumentación Implementada	Los instrumentos de dibujo geométrico son materiales manipulables indispensables para medir y trazar figuras

RESULTADOS

Primeramente, se observó que al momento de la implementación se eliminó el contexto de la *situación-problema implementada*. En lo que corresponde al objeto primario *conceptos (definiciones)*, durante el diseño no se exploraron detalles sobre la forma de las caras del tetraedro, los triángulos equiláteros, pero en el aula surgieron términos relacionados con esta figura y con las características de medida de esta figura. Así mismo, los alumnos hicieron uso de términos relacionados con el proceso de dibujo geométrico porque se interesaron en la identificación de un punto medio para trazar una altura. Dicho enfoque no fue previsto en el momento del diseño de la tarea. Posteriormente se analizó el lenguaje matemático, con lo cual surgió la identificación de los términos informales de los alumnos para hacer referencia a ubicación, espacio y forma, así como el registro gráfico de medidas relacionadas con la longitud del lado mayor de la hoja en la cual se hizo el trazo y la ubicación de su punto medio. En cuanto a las *propiedades/procedimientos*, los alumnos se centraron en la forma de las caras del octaedro: el triángulo equilátero. Las propiedades exploradas por los alumnos estuvieron relacionadas con n la medida y el trazo para la construcción de un triángulo equilátero a partir de la longitud de sus lados. Desde la perspectiva de los alumnos, el objeto primario *procedimiento* también se encaminó hacia la construcción del triángulo equilátero y cómo garantizar que los lados dibujados tenían igual longitud a partir de la correcta identificación del vértice opuesto al primer lado dibujado. Finalmente, la *argumentación* de los estados hipotético e implementado coincidió en lo referente a la importancia del uso de los instrumentos de dibujo geométrico para medir y trazar.

CONCLUSIONES

Font y Godino (2006) utilizan la *configuración epistémica* (*formalista*) para dar respuesta al cuestionamiento sobre cómo realizar un análisis lo más completo posible, por parte del profesorado, de textos y tareas. El uso de este constructo ha permitido a varios grupos de investigadores (Font y Godino, 2006; Pochulu y Font, 2011; Rocha y Font, 2022) identificar los seis objetos primarios y relacionarlos entre sí para reflexionar sobre los contenidos matemáticos antes de su implementación en el aula (lo que en esta comunicación se considera *configuración epistémica hipotética*). Fernández y Godino (2007) aplican la *configuración epistémica* en el análisis didáctico de una tarea en dos niveles: la resolución ideal del sujeto experto (*configuración epistémica institucional de referencia*) y la solución de un estudiante. Con este trabajo Fernández y Godino (2007) demuestran el potencial del constructo *configuración epistémica* en "el estudio de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas y su secuenciación en los procesos de instrucción matemática" (p. 196). Por tanto, se considera un acierto la incorporación de una nueva fase de reflexión en la cual se utiliza nuevamente el constructo de análisis didáctico empleado para caracterizar la tarea diseñada permite identificar los objetos matemáticos efectivamente movilizado dentro del aula (*configuración epistémica implementada*).

La comparación de los estados hipotético e implementado de los objetos primarios de la *configuración epistémica* permitió puntualizar los aspectos susceptibles de mejora de la tarea. Al centrar el análisis en los objetos primarios, en lo que se refiere a la *situación-problema* se puede introducir el contexto por medio de un recurso visual como un video para generar la atención de los alumnos. Para establecer las *definiciones (concepto)*, será importante centrar la atención en la tarea que desarrollarán los alumnos. En este caso los alumnos realizaron el dibujo de un triángulo equilátero, por tanto, este deberá ser el concepto central a explorar en la tarea. La modificación del concepto principal de la tarea implica el replanteamiento del resto de los objetos primarios (lenguaje, propiedades y argumentos), en los cuales también se debe reflejar la estrategia de dibujo geométrico del triángulo equilátero a partir de las medidas de los lados. Las deficiencias de los alumnos para comunicar ideas matemáticas y la realización del dibujo geométrico se recogen en la caracterización de los objetos primarios *lenguaje* y *procedimientos*. Dicha problemática es el origen de las diferencias entre el estado *hipotético* y el *implementado* de la *configuración epistémica*. Según lo reportan Ortega y Pecharromán (2015), los alumnos que tienen dificultades para construir representaciones correctas de figuras geométricas tienen "percepciones inadecuadas o incorrectas de los objetos geométricos considerados y de los elementos que le configuran" (p. 114).

Los instrumentos que sistematizan la reflexión sobre la práctica del profesor, como las *configuraciones epistémicas* del EOS, ayudan al profesor a establecer un escenario hipotético de aquello que se espera encontrar en el aula cuando se implementa una tarea. Este mismo instrumento, la *configuración epistémica*, permite analizar los fenómenos ocurridos en el aula cuando las reacciones previstas en los alumnos no se presentan. El contraste de un estado hipotético y un estado experimental producto de la implementación de la tarea en el aula permite la identificación de las entidades primarias dictadas por el constructo *configuración epistémica* y orienta en la visualización de elementos para mejorar la tarea.

Referencias

Camargo, L. (2019). Perspectivas para leer la práctica del profesor de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M.T. González (Eds.) *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Decret 187 de 2015 [Generalitat de Catalunya]. Por medio del cual se ordena la enseñanza de la educación secundaria obligatoria. 25 de agosto de 2015.

Fernández, T., Cajaraville, J.A. y Godino, J.D. (2007). Configuraciones epistémicas y cognitivas de tareas de visualización y razonamiento espacial. *Investigación en Educación Matemática,* XI, 189-197.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 376-381.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques,* 22 (2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2018). *Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática*. Universidad de Granada. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12 (2), 3-15.

Massot, I., Dorio, I. y Sabariego, M. (2009). Estrategias de recogida y análisis de la información. En R. Bisquerra (Coord.) *Metodología de la investigación educativa*, 329-368.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 95-117.

Patton, M.Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. SAGE.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisi del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa 14*(3), 361-394.

Rocha, T.C. y Font, V. (2022). Análisis metacognitivo de un aula de matemática sobre medida de superficies. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 169-196. https://doi.org/10.12802/

Stake, R.E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.

COMPETENCIA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA PARA IDENTIFICAR PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DEL DIFERENCIAL

Competence of the prospective mathematics teacher to identify practices, objects, and processes in solving a differential problem

Giacomone, B. [a] y Verón, M. A. [b]

[a]Universidad de la República de San Marino, [b]Universidad Nacional de Misiones

Resumen

En este trabajo se describe y analiza el diseño e implementación de una acción formativa en curso dirigida a futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. El objetivo didáctico es iniciar a los participantes en el desarrollo de una competencia específica que les permita identificar y discriminar las prácticas, objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen en la resolución de situaciones-problemas en torno al estudio del diferencial. El análisis a priori de las tareas y el análisis de las respuestas se apoya en el uso de herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados y las reflexiones aportadas nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivo la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

Palabras clave: *formación de profesores, diseño didáctico, competencias didácticas, diferencial*

Abstract

This research describes and analyses the design and implementation of an ongoing training action aimed at prospective secondary school mathematics teachers. The didactic objective is to initiate the participants in the development of a specific competence that allows them to identify and discriminate the mathematical practices, objects, and processes that intervene and emerge in the resolution of problem-situations around the study of the differential. The a priori analysis of the tasks and the analysis of the answers are supported by the use of theoretical and methodological tools of the Onto-semiotic Approach. The results and reflections provided allow us to consider that this type of activity is a challenge for teachers in training, the identification and discrimination of the types of objects and meanings being conflictive, since it usually supposes a certain level of metacognitive activity to which they are not used to.

Keywords: *teacher education, didactic design, specific didactic competencies, differential*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la literatura, el diseño de tareas, el análisis a priori detallado de las posibles soluciones y el análisis de la actividad matemática manifestada por los estudiantes, son considerados competencias didácticas específicas del profesor de matemáticas. Esto implica que el futuro profesor de matemáticas tenga la oportunidad de abordar, desde su formación, acciones formativas que le permitan avanzar hacia el conocimiento y uso competente de herramientas específicas, eficaces para: diseñar y comprender la complejidad matemática de las situaciones-problemas que proponen a sus estudiantes, comprender y gestionar los conflictos de aprendizaje, gestionar la institucionalización de los conocimientos y evaluar todo el proceso de enseñanza y aprendizaje impartido.

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2023). Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos matemáticos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 267–274). SEIEM.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2007; 2020), se propone el modelo CCDM (Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos), desarrollado por Godino et al., (2017), en el cual los conocimientos y competencias mencionados forman una parte esencial de la competencia general de análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos.

En este trabajo se presenta el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática centrado en el desarrollo de la competencia para identificar y describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos implicados en tareas matemáticas escolares. Se utiliza como contexto matemático situaciones-problemas donde interviene el concepto diferencial.

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

Dada la complejidad de la enseñanza del diferencial (López-Gay et al., 2015) resulta fundamental incluir en la formación de profesores de matemáticas iniciativas formativas que permitan el desarrollo de competencias específicas para afrontar los complejos desafíos didácticos asociados a este concepto (Verón y Giacomone, 2021). Así, en este trabajo abordamos el desarrollo de competencias del profesor de matemáticas desde la perspectiva del EOS usando como contexto matemático los procesos de instrucción del diferencial.

Si bien se han desarrollado varios modelos parciales de los significados del diferencial para interpretar y explicar las dificultades asociadas a los procesos instruccionales (p.e. Ely, 2021; Hu y Rebello, 2013; Pulido, 2010), resulta necesario tener en cuenta el universo de significados y los conocimientos didáctico-matemáticos para diseñar propuestas idóneas. En esta dirección, Verón y Giacomone (2021) han caracterizado cuatro significados parciales del diferencial: la *Diferencial de Leibniz*, diferencial como una cantidad infinitesimal o infinitamente pequeña; la *Diferencial de Cuachy*, se define al diferencial mediante la ecuación $dy = y'dx$ que lo relaciona con la derivada; la *Diferencial de Fréchet*, conectado a situaciones de estimación lineal y/o linealización; la *Diferencial de Robinson*, se conecta con los infinitesimales en el campo del análisis no estándar. Estos significados parciales constituyen un punto de partida para el diseño de actividades formativas.

Modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor

En Godino et al. (2017), se plantea el modelo de *Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos* del profesor de matemáticas a partir de la organización de las dimensiones, componentes e indicadores que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos.

A partir de las concepciones del EOS, se desglosa la competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas, en cinco sub-competencias: competencia de análisis significados globales; competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas; competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas; competencia de análisis normativo; competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. Esta distinción es posible gracias al desarrollo de determinadas herramientas teórico metodológicas que han evolucionado al interno de dicho enfoque.

En este trabajo focalizamos la atención en la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas. La noción de configuración ontosemiótica responde a la necesidad de identificar, por parte del profesor, los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas. Es decir, el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio concepto (la diferencial) en la cual se tiene en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial (Giacomone et al., 2018).

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo a la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos). Y también,

intervienen y emergen procesos matemáticos (particularización, generalización, representación, …) (Godino et al., 2007). El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de instrucción (Godino et al., 2011).

METODOLOGÍA

El ciclo formativo se implementó durante el año 2022, durante 5 sesiones de dos horas y media cada una, en el ámbito del curso Seminario de Didáctica de la Matemática. Participaron 12 futuros profesores, que estaban cursando el cuarto año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un instituto superior de formación docente de Argentina. Si bien la mayoría de los futuros profesores de matemática nunca habían utilizado las herramientas del EOS para el análisis de la actividad matemática, tenían conocimientos teóricos previos sobre las nociones básicas del enfoque que caracterizan a una configuración ontosemiótica.

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La acción formativa comprende seis etapas. En la primera etapa 'Exploración inicial de los significados personales', los estudiantes resolvieron una primera tarea matemática, Tarea 1, sobre un problema del cálculo de la masa total de una lámina circular, adaptado de Salinas et al. (2012). Luego de la socialización y discusión de las resoluciones empleadas por los estudiantes, se avanzó con la segunda etapa de implementación 'Introducción al análisis epistémico' utilizando la Tarea 2 (Figura 1). Esta tarea tiene el objetivo de introducir un posible método para la identificación y reconocimiento de los distintos objetos matemáticos, como la situación problema, lenguajes, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos, que caracterizan a las configuraciones epistémicas.

Con la tercera etapa de implementación 'Introducción al análisis cognitivo' se involucra a los participantes a realizar un primer análisis cognitivo, basado en la identificación de los objetos matemáticos, de las prácticas matemáticas personales que realiza un estudiante hipotético cuando resuelve un problema (Tarea 3).

La cuarta etapa 'Puesta en práctica de la técnica de análisis ontosemiótico' avanza hacia la consolidación en el uso de herramientas de análisis. Se proponen dos tareas, 4 y 5, en las cuales se plantearon sobre las siguientes consignas: (1) Resuelve la tarea matemática; (2) Identifica las distintas prácticas matemáticas que se deben realizar; (3) Identifica los conocimientos que se ponen en juego (objetos y procesos matemáticos referidos en las prácticas). Para la Tarea 4 se utiliza como contexto un problema de aceleración basado en el cálculo de la distancia total recorrida de un auto. En cambio, en la Tarea 5 se propone realizar un análisis ontosemiótico sobre una lección de un libro de texto de cálculo de Stewart (2012).

Si bien cada etapa tiene un momento de intercambio de ideas, discusión grupal, puesta en común por parte del docente y discusión de resultados parciales al interno del grupo de investigación, en la quinta etapa del ciclo formativo se crea un espacio didáctico específico para ilustrar los avances que han logrado los estudiantes, para discutir sobre la importancia del conocimiento didácticos-matemáticos de los distintos significados de la diferencial para el diseño de tareas, y reflexionar sobre la importancia de las tareas realizadas en la futura práctica profesional.

Cada una de las tareas implementadas se analizaron a priori con el objetivo de gestionar la clase, la puesta en común y los potenciales conflictos de aprendizaje. Al final de toda la implementación, se realizó un análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo con el objetivo de identificar puntos de mejora y tomar decisiones para futuras implementaciones.

Por limitaciones de espacio, presentamos el análisis a priori e implementación de la Tarea 2.

Figura 1. Consigna de la Tarea 2. Fuente: Adaptado de Giacomone (2018).

A partir de la resolución del problema (Tarea 1), responde las siguientes preguntas:

1) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.

2) ¿Qué lenguajes se utiliza en la resolución de la tarea? (Lenguaje: natural, geométrico, simbólico, algebraico, etc.) Menciona algunos ejemplos.

3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.

4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe los procedimientos matemáticos utilizados en la resolución de la tarea.

5) ¿Qué argumentos/explicaciones validan las proposiciones y procedimientos utilizados? Menciona algunos ejemplos.

6) ¿Qué conceptualizaciones se pueden identificar en la resolución de la tarea?

ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA 2

A continuación, se presenta una síntesis del análisis ontosemiótico que se pretende que los estudiantes desarrollen. Este análisis se ha utilizado como recurso para la socialización y discusión.

Las preguntas de la Tarea 2 tienen la intención de discutir sobre las concepciones e interpretaciones que realizan los futuros profesores de matemática sobre los objetos matemáticos que caracterizan y describen los significados de un concepto. Las preguntas generan un planteo del tipo ontológico donde se estudia la naturaleza y funciones de los objetos matemáticos (Godino et al., 2020).

Pregunta 1. Un concepto puede estudiarse desde una perspectiva unitaria, donde se asocia a cada concepto con su definición; pero también, desde una perspectiva sistémica, bajo la cual, un concepto se describe y caracteriza por un conjunto de elementos, denominados objetos matemáticos que se diferencian según su naturaleza y función. Entonces un concepto no se reduce a una definición, sino que se caracteriza por un sistema de prácticas matemáticas, objetos matemáticos y los procesos que intervienen y emergen de las prácticas (Burgos y Godino, 2020).

Algunos conceptos-definición (objeto matemático primario) que se esperan que los futuros profesores identifiquen son:

Conceptos geométricos: círculo, radio, punto, centro, distancia, superficie, área, anillos o coronas circulares concéntricos, ancho de un anillo.

Conceptos físicos: densidad, masa, masa total, densidad superficial, unidades de longitud (metros), unidad de masa (Kg/m^2).

Conceptos aritméticos: valores, diferencia de valores, producto, cantidad, suma.

Conceptos algebraicos-funcionales: función, variación, relación de dependencia entre la densidad y el radio, constante.

Conceptos relacionados al cálculo: infinito, infinitesimal, diferencial, diferencial radio, diferencial área, diferencial masa, integral definida, función integrando, extremos de integración, cambio total, acumulación.

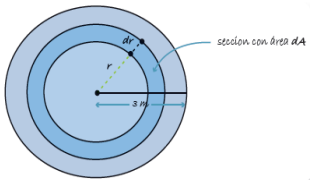
Pregunta 2. En la resolución de la tarea se observa el uso de una diversidad de tipos de lenguajes:

Lenguaje natural: infinitos, muy pequeño, infinitesimal, porción infinitesimal, diferencia, diferencial, diferencial área y área infinitesimal.

Lenguaje algebraico-simbólico: r, dr, $Ar + dr$, $dA = 2\pi r dr$, dM, σr, dMn, …

Lenguaje geométrico: Figura 2

Figura 2. Lenguaje geométrico. Fuente: Salinas et al. (2012, p. 144)



Pregunta 3. Algunas proposiciones (Pp) que surgen de la resolución del problema de cálculo de la masa son:

Pp1: la masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2(kg/m^2)$

Pp2: la densidad de masa dependiendo de radio

Pp3: r puede tomar cualquier valor entre 0 y 3

Pp4: se forman infinitos anillos concéntricos de radio muy pequeño

Pp5: dr representa una cantidad infinitesimal de radio

Pp6: dA representa un área infinitesimal de radio infinitesimal

Pp7: densidad constante en cada anillo infinitesimal

Pp8: dM representa una porción infinitesimal de masa

Pp9: $49{,}5\pi\ kg$ representa el cambio total acumulado de la masa

Pregunta 4. En la resolución de la tarea, se pueden aplicar los siguientes procedimientos (Pc):

Pc1: tomar distancias de r cada vez más pequeñas.

Pc12: $dr = r_2 - r_1$, dr se calcula haciendo la diferencia entre dos valores muy próximos entre sí.

Pc3: $dA = A(r + dr) - A(r)$, dA se calcula haciendo la diferencia de áreas $dA = 2\pi r dr$

Pc4: $dM = \sigma(r)dA$

Pc5: $M_{total} = dM_1 + \cdots dM_n$, con n tendiendo al infinito.

Pc1: $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$

Pregunta 5. Los argumentos (A) son enunciados y/o razonamientos utilizados que cumplen la función de justificar, validar o explicar las proposiciones y procedimientos, estos pueden ser:

A1: definición del diferencial como una cantidad infinitesimal

A2: uso del término infinitesimal para referirse a una cantidad muy pequeña

A3: cálculo de área un círculo y corona circular

A4: definición de masa

A5: proceso de acumulación, suma

A6: definición y propiedades de la integral definida.

A7: interpretación de la integral definida como cambio total

Pregunta 6. En la resolución de la Tarea 1 emergen los siguientes procesos con la intención de conceptualizar a la diferencial:

Conceptualización/definición: en las prácticas matemáticas se establece que dr representa una cantidad infinitesimal de radio; dA representa una cantidad infinitesimal de área; dM representa una porción infinitesimal de masa. Además, se plantea que la masa total será igual al cambio total acumulado, es decir $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$

Algoritmización: se establece la diferencia entre valores muy próximos entre sí de la misma magnitud para el cálculo de la diferencial radio y diferencial área: $dr = r_2 - r_1$ y $dA = A(r + dr) - A(r)$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de las respuestas elaboradas por los estudiantes en formación ha permito establecer conclusiones sobre los logros alcanzados. En relación a la primera pregunta, se pueden observar respuestas vinculadas a una visión sobre las matemáticas como un *producto terminado* (Figura 3), generando un conflicto con la perspectiva antropológica y pragmatista de la actividad matemática que postula el EOS (Giacomone et al., 2016). Otros estudiantes, en cambio, responden desde perspectiva personal (Figura 4).

Figura 3. Respuesta del estudiante 4 (E4)

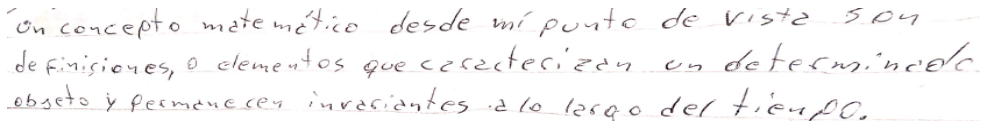
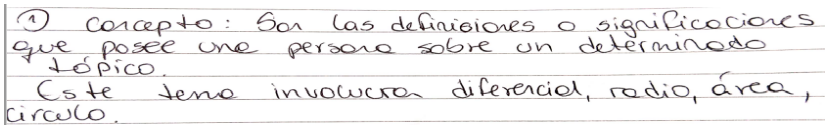
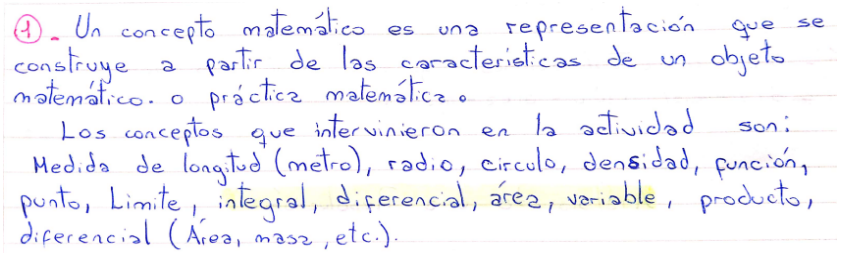

Un concepto matemático desde mi punto de vista son definiciones, o elementos que caracterizan un determinado objeto y permanecen invariantes a lo largo del tiempo.

Figura 4. Respuesta del E2


① Concepto: Son las definiciones o significaciones que posee una persona sobre un determinado tópico.
Este tema involucra diferencial, radio, área, circulo.

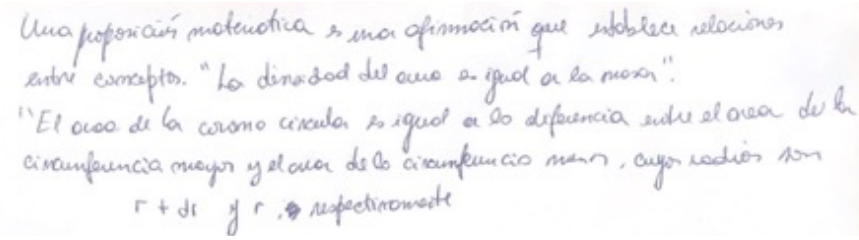
Resulta interesante notar el esfuerzo que hacen otros estudiantes para caracterizar los conceptos matemáticos desde la perspectiva sistémica que plantea el EOS, por ejemplo, E8 (Figura 5). En general, la mayoría de las estudiantes pudo reconocer correctamente los conceptos-definiciones:

Figura 5. Respuesta del E8


① - Un concepto matemático es una representación que se construye a partir de las características de un objeto matemático. o práctica matemática.
Los conceptos que intervinieron en la actividad son: Medida de longitud (metro), radio, circulo, densidad, función, punto, Limite, integral, diferencial, área, variable, producto, diferencial (Área, masa, etc.).

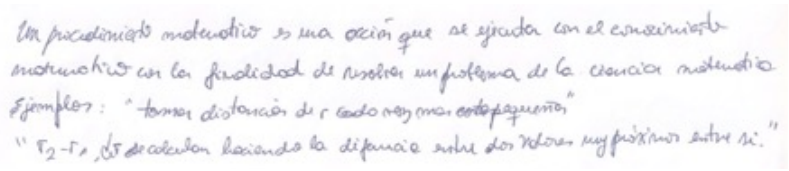
Los 12 estudiantes identificaron en forma idónea los diferentes tipos de lenguajes (natural, geométrico, algebraico y simbólico) implicados en la resolución. Respecto a las proposiciones matemáticas, la mayoría menciona que una proposición es una afirmación, una idea, un enunciado, una frase que se realiza sobre un concepto matemático y que puede ser verdadero o falso (Figura 6). Sin embargo, tienen dificultades en la identificación, de su propia solución, de algunas proposiciones.

Figura 6. Respuesta pregunta 3 del E10


Una proposición matematica es una afirmación que establece relaciones entre conceptos. "La densidad del area es igual a la masa".
"El area de la corona circular es igual a la diferencia entre el area de la circunferencia mayor y el area de la circunferencia menor, cuyos radios son r + dr y r, respectivamente

En relación a la pregunta 4, la mayoría de los estudiantes responde que los procedimientos son los pasos o acciones que se realiza para resolver un problema. Un estudiante (E10) agrega que en los procedimientos se utiliza el conocimiento matemático para resolver la tarea (Figura 7).

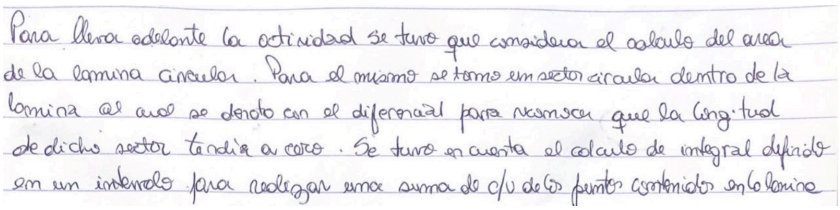
Figura 7. Respuesta pregunta 4 del E10



Respecto a la pregunta 5, la mayoría de los estudiantes logra identificar los argumentos. Las dificultades detectadas refieren a que algunos confunden las explicaciones que validan las proposiciones y procedimientos con las descripciones de los pasos realizados.

Por último, se aprecia que la mayoría de los estudiantes no logró comprender la pregunta 6 ya que cuatro no respondieron, cuatro dieron una respuesta incompleta porque mencionan al diferencial en forma general y no particularizan sobre qué tipo de diferencial. Por otro lado, otras dos respuestas evidencian un cierto nivel de conceptualización de la diferencial (ver Figura 8), aunque confunden la noción de argumento con la descripción de las prácticas (Burgos et al., 2019).

Figura 8. Respuesta pregunta 6 del E2



También la estudiante E10 (Figura 7) logra reconocer y conceptualizar el proceso de algoritmización que permite calcular el diferencial radio dr.

Los resultados reflejan imprecisiones en la caracterización y descripción de los significados parciales del diferencial. No obstante, los conocimientos previos de los participantes sobre el EOS posibilitaron momentos de discusiones más ricos respecto a resultados reportados en investigaciones previas.

CONCLUSIONES

En esta investigación se ha puesto énfasis en el diseño e implementación de una tarea formativa para desarrollar conocimientos y competencias para el análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemática sobre una situación problema del diferencial. Los resultados nos permiten plantear que este tipo de actividades formativas constituyen un desafío para la formación de profesores de matemática, resultando conflictivo el reconocimiento y la discriminación de los tipos de objetos y significados implicados en la resolución de una tarea matemática.

Si bien aquí se presentan resultados parciales del diseño formativo, la discusión final de la quinta etapa llevó a focalizarse en la potencialidad del análisis ontosemiótico para la comprensión de la actividad matemática. Esto incluye: comprender los grados de complejidad en las tareas que diseñan los profesores y el nivel de competencia matemática manifestado por los estudiantes; para identificar y resolver potenciales conflictos semióticos; reconocer las relaciones entre los objetos matemáticos que caracterizan a los significados parciales de la diferencial; y comprender las posibilidades y limitaciones que se pueden encontrar en los libros de textos educativos.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PFID-FID-2021-45 (Panamá), PID2021-122326OB-I00 (España), 16/Q1706-PI, 16/Q1746-TI (FCEQyN – UNaM, Argentina) y PRIU (Rep. San Marino).

Referencias

Burgos, M. y D. Godino, J. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática,* (18), 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D., y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Ediciones Universidad Salamanca.

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education, 53*, 591-604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. González, P. Hernández, A. Jiménez, J. A. Macías, F. Ruiz, y M. T. Sánchez, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 257-265). SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Blanco, T.F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 24*(1), 35-52. https://doi.org/10.5209/RCED.54880

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(37), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, Mathematics Education, 39*, 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265

Hu, D. y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 9*(2), 1-14. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

López-Gay, R., Sáez, J. M., y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education, 24*(5-6), 591-613. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 85-97.

Salinas, P., Alanis, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2*. Cengage Learning Editores SA de CV.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning Editores.

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop, 3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109

¿QUÉ CARACTERÍSTICAS DEBE TENER UN FORMADOR? LA PERSPECTIVA DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

What characteristics should a teacher educator have? The view of primary education teachers

Giadas, P.[a], Muñiz-Rodríguez, L.[a] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo

Resumen

En los últimos años los formadores de profesorado de matemáticas (FPM) han recibido una mayor atención en la investigación, centrándose la mayoría de los trabajos en describir su conocimiento. Aunque se está definiendo, con bastantes matices y amplia diversidad, cuál es la actividad de un FPM, aún no están igualmente descritas las características que definen a un FPM. En este estudio exploratorio se preguntó a 12 maestros de Educación Primaria en activo, a través de un grupo focal, sobre su percepción acerca de las características de los formadores de maestros de Educación Primaria (FMEP). Tras el análisis de los datos, se identificaron aspectos relacionados con el contexto del centro, el conocimiento especializado del contenido, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el dominio socioafectivo. Además, es posible establecer conexiones entre las categorías obtenidas y las descritas en algunos modelos.

Palabras clave: *conocimiento especializado, educación primaria, formador de profesorado de matemáticas, profesorado en activo*

Abstract

In recent years, mathematics teacher educators (MTE) have received increased attention in research, with most researchers focusing on describing their knowledge. Although some agreement is emerging, it is still unclear what it takes to be an MTE and what characteristics define an MTE. In this exploratory study, 12 in-service primary school teachers were asked, through a focus group, about their perception of the characteristics of primary school teacher educators. After analyzing the data, characteristics related to the context of the school, the specialized knowledge of the content, the teaching and learning of mathematics, and the socio-affective domain were identified. In addition, it is possible to establish connections between the categories obtained and those already existing in other models.

Keywords*: specialized knowledge, primary education, mathematics teacher educator, in-service teachers*

INTRODUCCIÓN

Cochran-Smith y Zeichner (2005) señalan que la figura de los FPM tiene un gran impacto en la preparación de profesorado cualificado y, por consiguiente, en el desarrollo y formación de la sociedad. De este modo, la indagación sobre los perfiles profesionales de los FPM, su trayectoria formativa, su conocimiento especializado o sus competencias profesionales se convierten en un objeto de investigación en educación matemática. En los últimos años, esta línea de investigación ha crecido considerablemente en el marco internacional (Beswick y Goos, 2018; Escudero-Ávila et al., 2021; Ferretti et al., 2021; Krainer et al., 2021; Llinares y Krainer, 2006; Martignone et al., 2022; Pascual et al., 2019, 2021; Ribeiro et al., 2019). A pesar de este avance, no existe un modelo único para caracterizar la figura de los FPM, surgiendo así la necesidad de profundizar en la investigación sobre los conocimientos, las competencias, o las trayectorias profesionales que presentan los FPM.

Giadas, P., Muñiz-Rodríguez, L. y Rodríguez-Muñiz,. L. J. (2023). ¿Qué características debe tener un formador de profesorado de matemáticas? La perspectiva de maestros de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 275–282). SEIEM.

La existencia de diferentes perfiles de FPM y la ausencia de una única vía para convertirse en uno de ellos llevan a la necesidad de estudiar esta figura. Para ello, se han utilizado diferentes metodologías hasta el momento. Estudios como el de Pascual et al. (2019) emplearon técnicas basadas en la observación directa de FMEP. Por su parte, Ferretti et al. (2022) se centraron en técnicas basadas en entrevistas a FPM. Escudero-Ávila et al. (2021) realizaron análisis de los planteamientos teóricos en la literatura sobre el tema, mientras que Superfine y Pitvorec (2021) basaron su investigación en comunidades de práctica. Dentro de las técnicas recogidas en la literatura no se ha documentado la entrevista al profesorado que es sujeto de la formación de los FPM. Los objetivos del presente estudio son, por un lado, analizar la perspectiva que los maestros de Educación Primaria en activo ofrecen acerca de la figura de los FMEP tanto de formación inicial como continua, ya que se trata de una población especialmente formada y su visión respecto a los FMEP resulta de interés. Y, por otro lado, relacionar los resultados obtenidos con el modelo de conocimiento *Mathematics Teacher Educator Specialized Knowledge* (MTESK) propuesto en Martignone et al. (2022).

MARCO TEÓRICO

La investigación sobre los FPM lidia con el desafío de definir claramente lo que se entiende por formador, debido a que cuenta con matices que engloban a un abanico heterogéneo de profesionales (Even, 2008, 2014). Dichos matices hacen alusión a su formación y a los contextos en los que trabajan (profesorado en formación o en ejercicio). De esta manera, en la literatura encontramos diferentes términos para referirse a los FPM, entre los que destacamos algunos como: *teacher trainer* (Palhares et al., 2009), *teacher-leaders* (Krainer et al., 2021), *didactician* (Coles, 2014), *mathematics educator* (Zaslavsky y Peled, 2007) y *teacher developers* (Sztajn et al., 2005). En este trabajo, puesto que cada término puede llevar asociado diferentes creencias y conocimientos, empleamos el término más amplio de FPM, al igual que en Martignone et al. (2022) o Pascual et al. (2021), entendiendo por FPM los "profesionales que trabajan con docentes en activo y/o futuros docentes para desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas" [traducción propia] (Jaworski, 2008, p.1).

No existe en la literatura un modelo único para caracterizar a los FPM, sino diferentes propuestas para estudiar su conocimiento, como, por ejemplo, el modelo de Leikin et al. (2018). La gran mayoría de las investigaciones se han acercado a determinar modelos de conocimiento para los FPM a partir de la extensión de modelos previamente existentes sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Zopf (2010), basándose en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas *Mathematics Knowledge fot Teaching* (MKT) propuesto en Hill et al. (2008), señala que el conocimiento de los FPM se diferencia del de un profesor de matemáticas en el conocimiento matemático y establece, por ello, un modelo llamado *Mathematics Knowledge for Teaching Teachers* (MKTT). Otro ejemplo más de esta idea lo encontramos en el modelo tomado como referencia para este estudio, el MTESK propuesto en Martignone et al. (2022), que toma como base el modelo MTSK (*Mathematics Teacher Specialized Knowledge*) de Carrillo et al. (2018). El MTESK establece tres grandes dominios que caracterizan el conocimiento de los FPM: conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido y creencias. A su vez, cada uno de estos dominios se divide en subdominios. Por un lado, el contenido matemático abarca el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de la matemática y el conocimiento de la práctica matemática. Por otro lado, el conocimiento didáctico del contenido está formado por el conocimiento de la investigación en educación matemática, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, estos dos últimos subdominios se desdoblan en dos, es decir, se consideran por separado el conocimiento de los FPM sobre la enseñanza y las características del aprendizaje del profesorado, como sujeto en formación y, por otro, el conocimiento sobre la enseñanza y las características del aprendizaje del alumnado.

METODOLOGÍA

Este trabajo presenta los resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con maestros de Educación Primaria en activo de un colegio público, de línea uno, ubicado en una zona semirrural en Asturias. La recogida de información se llevó a cabo durante una sesión sobre manipulativos en educación matemática, como parte de una formación continua más amplia. Los informantes, un total de doce personas (once mujeres y un hombre), constituyen prácticamente todo el profesorado del claustro del centro, incluyendo profesorado generalista y especialista de inglés, música, educación física y pedagogía terapéutica. Debido al pequeño tamaño del centro, todo el profesorado imparte clases de matemáticas con independencia de su especialidad, excepto la especialista en pedagogía terapéutica. Además, es importante señalar que algunos de los informantes han ejercido funciones propias de FMEP acompañando como tutores a estudiantes para maestro durante sus prácticas.

Los datos fueron recogidos mediante un grupo focal, es decir, un tipo de entrevista en la que los participantes cuentan con la oportunidad de escuchar las opiniones de sus compañeros e interactuar entre ellos a partir de un tema proporcionado por el entrevistador (Patton, 2014). Este formato fomenta un ambiente propicio de discusión entre el investigador y los participantes, lo que según Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) fomenta respuestas más elaboradas, profundas y detalladas. El tema de discusión para el grupo focal se presentó a los maestros en activo a través del planteamiento secuencial de tres preguntas: (P1) ¿Qué conocimientos, habilidades o características creéis que debe tener un "buen" formador de profesores de matemáticas cuando recibís un curso de formación continua? ¿Qué esperáis de un "buen" formador de profesores de matemáticas? (P2) ¿Qué recordáis, como bueno y malo, de quienes os formaron inicialmente como profesores en el ámbito de matemáticas? y (P3) ¿Qué tipo de relación debería tener un formador de profesores de matemáticas con el profesorado y con la etapa educativa que forma?

La discusión se grabó en audio para su posterior transcripción y análisis. Las respuestas de los maestros (unidades de análisis) se codificaron de manera inductiva, proporcionando un análisis abierto y flexible de los datos. En este tipo de codificación se parte de los datos en bruto y se buscan patrones, temas y conceptos emergentes con el objetivo de establecer categorías de análisis y agrupar los datos en dichas categorías (Patton, 2014). De esta manera, se crearon diferentes códigos que recogieran las ideas clave del grupo focal para, posteriormente, agrupar dichos códigos en categorías más generales. Estas agrupaciones se realizaron considerando la proximidad temática de los códigos. Después de la codificación se calcularon las frecuencias de aparición de cada código en las unidades de análisis (1=el código aparece, 0=no aparece). Nótese que algunas de estas unidades de análisis recogían diferentes códigos al mismo tiempo.

RESULTADOS

Tras el análisis de los datos se identificaron diez códigos (Tabla 1) que caracterizan el conocimiento de los FMEP y reflejan las ideas clave que podemos extraer de las respuestas de los maestros.

Tabla 1. Recuento de la aparición de cada código. Elaboración propia.

Código	Frecuencia
Significado matemático	1
Fenomenología	1
Aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas	1
Transposición didáctica	3
Diseño universal para el aprendizaje	5
Adaptación a las características del alumnado	2
Conocimiento de la profesión	3
Conocimiento del aula	8
Aspectos socioafectivos	3
FMEP como referente	1

A su vez estos códigos se agruparon en tres categorías, que se describen a continuación.

Conocimiento matemático

Esta categoría hace alusión a las matemáticas que saben los FMEP y cómo las saben (Carrillo et al., 2018). De esta forma, se definen los códigos *significado matemático* y *fenomenología*. Encontramos una evidencia del código relativo al *significado matemático* cuando una maestra señala en respuesta a P1:

> M8: A mí me parece super importante que los formadores de los profes enseñen a cómo dar significado a las matemáticas. El concepto en sí, y no a mecanizar.

El código relativo a la *fenomenología*, entendida como "la conciencia de sus usos y aplicaciones" [traducción propia] (Carrillo et al., 2018, p. 242), se identifica en la respuesta de otra maestra a P1:

> M1: Y yo empiezo siempre los temas así, a veces no lo sé ni yo, tengo que ir a internet buscar e investigar, y es vamos a estudiar enteros, para qué sirven y por qué aparecieron los enteros en el mundo. Y me toca estudiar, porque a mí no me enseñó nadie. […]. También eso nos lo tenéis que transmitir los que sois matemáticos. ¿Para qué se generaron los números? Pues yo me invento historias. Pues mira medían una mesa con la mano, y fíjate esto es media mano, tendrían que aparecer los decimales, pero a mí manera, para ellos tendría que ser importante.

Además, en las respuestas proporcionadas por los maestros a P1 se encontraron también expresiones muy parcas o ideas muy genéricas relacionadas con esta categoría, pero cuya concisión nos impide asignarlas a un código específico, como, por ejemplo, "buen nivel de matemáticas".

Aspectos didáctico-matemáticos

La segunda categoría hace referencia a los aspectos didácticos del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Identificamos seis códigos dentro de esta categoría: *aspectos específicos de enseñanza de las matemáticas, transposición didáctica, diseño universal para el aprendizaje, adaptación a las características del alumnado, conocimiento de la profesión, y conocimiento del aula*. Como se observa en la Tabla 1, los dos códigos más frecuentes fueron el *conocimiento del aula* y el *diseño universal para el aprendizaje*. El código *aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas* se relaciona con aquellas técnicas, estrategias, etc. de las que los FMEP deben disponer para enseñar matemáticas a un estudiante para maestro. Este código lo encontramos en la respuesta de una maestra a P1:

> M1: Mucha didáctica, porque yo ya sé sumar, enséñame a enseñar a sumar, yo sumar ya sé, necesito que me enseñes como enseñarlo, creo, digo sumar como ejemplo en general.

El código *transposición didáctica* hace alusión a la idea de transposición didáctica en el sentido de Chevallard (1991), y se encuentra en las respuestas de varias maestras a P1:

> M7: Por mucho conocimiento que me enseñen en la carrera, si no me enseñan a cómo trasladar ese conocimiento...

> M4: No solo un buen nivel de matemáticas, sino cómo darlas.

El código *diseño universal para el aprendizaje* recoge todas las ideas relativas a los diferentes ritmos de aprendizaje dentro del aula, a la forma de trabajarlos, y a cómo los FMEP deben transmitir estos conocimientos a los estudiantes para maestro. Este código lo encontramos en varias respuestas a P1:

> M1: La atención a la diversidad. En matemáticas, y en general. Quedan asustados. Bueno es que yo tuve una alumna hace poco. Quedan asustados, porque con perdón, no se enseña. Se enseña para una generalidad, no se enseña para lo que hay aquí […] El trabajo multinivelar que está con el diseño universal para el aprendizaje ahora mismo creo que tiene que venir desde la facultad, porque la gente no sabe diseñar clases multinivel. Solo saben hacer lo que hicieron siempre. Una clase media, refuerzo y ampliación, y no puede funcionar así.

M8: Y también manejando muy bien este tipo de situaciones, sabiendo dónde está el techo de uno y el techo del otro […] Y dándole la oportunidad al que tiene el techo aquí de llegar hasta ahí o más arriba. Y el que tiene el techo aquí, tienes que bajarlo, y tienes que bajarlo ahí y que encima se sienta satisfecho.

Otro código identificado es *adaptación a las características del alumnado*, que hace referencia a cómo los FMEP dominan técnicas que les permiten adecuarse a las características concretas de su alumnado, y fue detectado en algunas respuestas a P1:

M8: Por poder adaptarte a la persona que tienes delante, porque obviamente no estás en las mismas condiciones. Tú como profesor sabes que estás por encima de la persona a la que estás enseñando, independientemente de la edad que tenga […] Depende de la persona que esté aprendiendo, entonces tienes que ser tú capaz de detectar como profesor dónde está fallando y ser capaz, para mí eh, ser capaz de adaptarte y llegar a cuál es el problema.

El *conocimiento de la profesión* es un código que trata de reflejar cómo los FMEP señalan que los especialistas también imparten clases de matemáticas, es decir, en muchos casos asumen labores de tutoría, a pesar de la especialidad. Este código se encuentra en respuestas a P2:

M10: Yo lo que eché en falta cuando estudié la carrera es que no había realidad.

M1: Y que creen que no van a ser tutores. Hasta que no les quitéis eso de la cabeza… […] Yo he recibido alumnas de prácticas en el otro cole que decía, ay es que yo de matemáticas…total como no voy a ser tutora…Nono, sí vas a ser tutora.

El código *conocimiento del aula* hace alusión a la necesidad que ven los maestros de que los FPM se adentren en las aulas de las etapas educativas en las que forman. Esto se puede apreciar en las respuestas proporcionadas a P3:

M12: Más comunicación con el profesorado, y saber realmente lo que pasa en el aula.

M1: Deberíais venir todos los meses. Y entrar en un aula de cada nivel, porque no tienen nada que ver, nada de nada […] Y no solo ir a centros como este. Yo que he estado en centros de difícil desempeño con alumnado con dificultades altas o con alumnado con situaciones personales muy complicadas, con cursos mixtos, no sabéis lo que son grupos mixtos. Y el multinivelar […] Establecer algún tipo de comisión de profesorado de las etapas con las que estáis trabajando.

M3: Pero alguien que no haya pasado por la escuela y no sepa la realidad que hay…por mucha teoría que sepa.

M1: Lo que sería bueno sería la colaboración […] Deberíais entrar de vez en cuando a ver, y a trabajar en equipo.

M8: Sobre todo, un baño de realidad. Cuando te encasillas, como en cualquier puesto de trabajo, tú estás trabajando en la facultad, y estás trabajando con gente más mayor, y pierde de vista, lo que nos pasa a nosotros también, que pierdes de vista que a lo mejor tú sigues en una línea que ya está en desuso, porque la realidad de los colegios es completamente distinta.

Dentro de esta categoría también encontramos algunas ideas muy genéricas como respuestas de los maestros a P1, como por ejemplo, “Didáctica”, “Pedagogía”, “Para mí todo pasa por la didáctica”.

Dominio afectivo

La tercera categoría incluye los códigos *aspectos socioafectivos* y *FMEP como referente.* Dentro de esta categoría, *aspectos socioafectivos* es el código que más se repite y se relaciona con la idea de que los FMEP deben apoyar a los estudiantes durante su formación como maestros. Esto lo encontramos en las respuestas proporcionadas por varias maestras a P1 y P3:

M2: Paciencia. [P1]

M8: Hay muchos que llegan abandonados. Lo que necesitan es que desde la facultad se sientan apoyados […] Empatía. [P3]

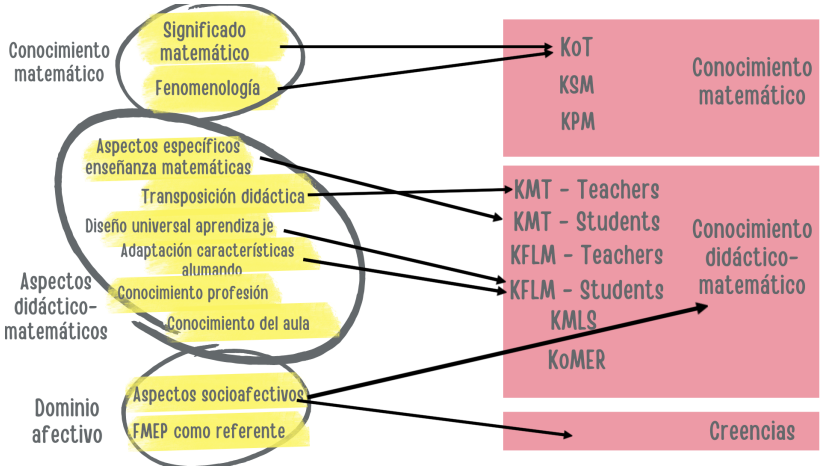
También identificamos el código *FMEP como referente*. Este código evidencia cómo influyen los FMEP en los estudiantes para maestro, y se encuentra reflejado en la respuesta de una maestra a P1:

> M1: ¿Cómo puede ser que tú llegues y te sientes a dar una clase con un PowerPoint? Porque es como me han dado clase a mí. Sois modelos. Los profes de universidad y secundaria sois modelos. Repiten modelos.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio cualitativo pone de relieve varios aspectos que los maestros en activo demandan de la figura de los FMEP, y que consideran relevantes en su conocimiento. En relación con el primer objetivo de investigación según la perspectiva de los maestros en activo, concluimos que el conocimiento de un FMEP debería dividirse en dos grandes categorías: el *conocimiento matemático* y el *conocimiento didáctico del contenido*, al igual que ocurre en investigaciones previas (Leikin et al., 2018; Martignone et al., 2022; Pascual et al., 2021; Zopf, 2010). A raíz de esta similitud, nos hemos centrado en el modelo MTESK (Martignone et al., 2022), y se han buscado y establecido conexiones entre nuestros códigos y categorías y los subdominios del modelo (Figura 1), aunque no se ha logrado una relación biunívoca debido a que ambas investigaciones presentan situaciones y contextos diferentes.

Figura 1. Relaciones códigos-categorías (izda.) y subdominios MTESK (dcha.). Elaboración propia.



Nota: A la izquierda se encuentran los códigos de este estudio y a la derecha los subdominios del MTESK.

Dentro del *conocimiento matemático* encontramos conexiones entre el subdominio *conocimiento de los temas* y nuestros códigos *significado matemático* y *fenomenología*. Dentro del *conocimiento didáctico del contenido* encontramos varias conexiones con nuestros códigos. En primer lugar, el código *transposición didáctica* se relaciona con el subdominio *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* enfocado al profesorado como sujeto que se forma, y el código *aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas* se relaciona con el mismo subdominio, pero enfocado al alumnado como sujeto al que forma el profesorado. En segundo lugar, los códigos *diseño universal para el aprendizaje* y *adaptación a las características del alumnado* se relacionan con el subdominio *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* enfocado al alumnado como sujeto al que forma el profesorado. En tercer lugar, el código *aspectos socioafectivos* se relaciona tanto con el dominio *conocimiento didáctico del contenido* como con el dominio *creencias*. Esta relación con las *creencias* abre la puerta a futuras investigaciones sobre cómo estas se relacionan con el conocimiento de los FPM (Aguilar-González et al., 2022).

Sin embargo, no se encuentran conexiones entre todos los códigos de este estudio y los diferentes subdominios del *conocimiento didáctico del contenido.* Por ejemplo, en nuestra investigación nuestros participantes no hicieron alusión a ideas relacionadas con los subdominios *conocimiento de la investigación en educación matemática* y *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las*

matemáticas. No obstante, sí se identificaron ideas que no se contemplan en el modelo MTESK, como son los códigos *conocimiento de la profesión*, *conocimiento del aula* y *FMEP como referente*. En este sentido, también encontramos similitudes con otras investigaciones (Pascual et al., 2021) sobre el conocimiento de los FMEP. Estas relaciones se establecen a través del código *FPM como referente* y la idea que los autores señalan sobre que "el educador actúa como modelo a imitar por los estudiantes para maestro" [traducción propia] (Pascual et al., 2021, p. 11).

A pesar de las limitaciones encontradas en el estudio como son el bajo número de participantes y la condensación de respuestas en los conocimientos de los maestros y no en los de los FMEP, este estudio constituye un avance en la investigación sobre la figura de los FMEP. A través de las diferencias encontradas y las propias del contexto de la investigación se abre la puerta a futuras investigaciones sobre cómo encajar lo que piensan los propios FPM (Martignone et al., 2022) y lo que piensan los maestros en activo formados por los FMEP.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto PID2021-122180OB-100 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Los autores pertenecen a la Red MTSK (https://redmtsk.net/) y quieren agradecer al profesorado participante su generosidad y colaboración.

Referencias

Aguilar-González, Á., Rodríguez-Muñiz, L. J., y Muñiz-Rodríguez, L. (2022). Las creencias y su papel en la determinación de relaciones entre elementos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo Yañez, M. Á. Montes Navarro y N. Climent Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 109-120). Dykinson.

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here*? Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 417–427.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín Rodríguez, G. Fernández García, L. J. Blanco Nieto y M. Palarea Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 77–98). SEIEM.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. De saber sabio al saber enseñado*. AIQUE.

Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactician, of a heightened listening. *ZDM Mathematics Education, 46*(2), 267–278. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0541-3

Cochran-Smith, M., y Zeichner, K. M. (Eds.). (2005). *Studying teacher education: the report of the AERA Panel on Research and Teacher Education*. Lawrence Erlbaum.

Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators* (pp. 23–40). Springer.

Even, R. (2008). Facing the challenge of educating educators to work with practicing mathematics teachers. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.) *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional, Vol. 4* (pp. 57–74). Sense.

Even, R. (2014). Challenges associated with the professional development of didacticians. *ZDM Mathematics Education, 46*(2), 329–333. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0573-3

Ferretti, F., Martignone, F., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Mathematics teachers educator specialized knowledge model. *Zetetike, 29*(00), e021001. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661966

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of student. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Jaworski, B. (2004). *Investigating mathematics teaching*. Falmer Press.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development: An introduction. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, *Vol. 4* (pp. 1–13). Sense Publishers.

Krainer, K., Even, R., Rogers, M. P., y Berry, A. (2021). Research on Learners and Teachers of Mathematics and Science: Forerunners to a Focus on Teacher Educator Professional Growth. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19* (Suppl 1), 1–19. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10189-8

Leikin, R., Zazkis, R., y Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: Focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*, 451–473. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429–459). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901127_016

Martignone, F., Ferretti, F., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). What aspects can characterize the specialized knowledge of a mathematics teacher educator? *Educación Matemática, 34*(3), 301–328.

Palhares, P., Gomes, A., Carvalho, P., y Cebolo, V. (2009). From Teacher Education to Teacher Practice: A Gap Affecting the Implementation of Tasks. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 275–284). Springer.

Pascual, M. I., Montes, M., y Contreras, L. C. (2021). The pedagogical knowledge deployed by a primary mathematics teacher educator in teaching symmetry. *Mathematics, 9*, 12–41.

Pascual, M. I., Montes, M., y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473–482). SEIEM.

Patton, M. Q. (2014). *Qualitative Research & Evaluation Methods.* SAGE publications.

Ribeiro, M., Martignone, F., Aslan-Tutak, F., Rø, K., Montes, M., y Kuntze, S. (2019). Introduction to the papers of TWG20: Mathematics teacher knowledge, beliefs, and identity. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University and ERME.

Superfine, A. C., y Pitvorec, K. (2021). Using Community Artifacts to Support Novice Math Teacher Educators in Teaching Prospective Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*(Suppl 1), 59–75. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10152-7

Sztajn, P., Ball, D., y McMahon, T. (2005). And who teaches the mathematics teachers? Professional development of teacher developers. En *ICMI Study 15th Conference Proceedings. The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics (no. 102).*

Zaslavsky, O., y Peled, I. (2007). Professional development of mathematics teacher educators. En B. Choksi y C. Natarajan (Eds.), *episteme Reviews: Research trends in Science, Technology and Mathematics Education* (pp. 211–225). Macmillan.

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education.* [Tesis doctoral no publicada]. The University of Michigan.

TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS NO ESPECIALISTAS

Techniques for solving proportionality problems by non-specialist university students

Gonzales, C. y Wilhelmi, M. R.

Universidad Pública de Navarra

Resumen

El objetivo de esta investigación es analizar la relación entre números, cantidades y magnitudes en la resolución de problemas de proporcionalidad por estudiantes universitarios en Ciencias de la salud. Se definen variables operatorias tomando como base la noción de campo conceptual de estructuras multiplicativas. La muestra es de 80 estudiantes y las respuestas se analizan por un método mixto. Se concluye que la falta de significado por el uso preponderante de la regla de tres simple, sugiere un cambio en la enseñanza que promueva estrategias de tipo funcional en el manejo de la proporcionalidad.

Palabras clave: *proporcionalidad, regla de tres, relaciones escalar y funcional, cantidades extensiva e intensiva.*

Abstract

The aim of this research is to analyse the relationship between numbers, quantities and magnitudes in the resolution of proportionality problems by university students in Health Sciences. Operational variables are defined based on the notion of the conceptual field of multiplicative structures. The sample is 80 students and the answers are analysed by a mixed method. It is concluded that the lack of meaning due to the preponderant use of the simple rule of three suggests a change in teaching that promotes functional strategies in the handling of proportionality.

Keywords: *proportionality, rule of three, scalar and functional relationships, extensive and intensive quantities*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se encuadra en la formación matemática en carreras de Ciencias de la Salud, que es considerada en el ámbito de didáctica como *no especialistas* (Romo-Vázquez y Artigue, 2023). En esta formación hay aspectos y contenidos cuyas dificultades pasan desapercibidas. En particular, en los primeros años de universidad se asumen contenidos escolares como "conocidos" o "comprendidos". En esta categoría, estaría el uso y compresión de *cantidades intensivas y extensivas* (Schwartz, 1988). Artaud et al. (2022) muestran que las situaciones de proporcionalidad esconden diferentes tratamientos (que privilegian el uso de números o de magnitudes). Asimismo, los investigadores asocian a estos tratamientos diferentes instrumentos o representaciones (tabla de proporcionalidad, reducción a la unidad, regla de tres, función lineal) que se identifican con diferentes etapas educativas (Wilhelmi, 2017).

La proporcionalidad aborda campos matemáticos y didácticos amplios y, por lo tanto, es necesario estudiar los efectos del cambio de significado de la noción en la actividad matemática de los estudiantes y en la forma de gestión del proceso instruccional por los docentes (Bourgade, 2020; Castillo y Burgos, 2022; Castillo y Fernández, 2022; Chambris y Visnovska, 2021; Comin, 2002;

Gonzales, C. y Wilhelmi, M. R. (2023). Técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad por estudiantes universitarios no especialistas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 283–290). SEIEM.

Gairín y Oller-Marcén, 2012). Además, es necesario contextualizar el uso de la noción en contextos profesionales propios, tal y como sucede en Ciencias de la Salud (Barrera y Santos, 2000; García-Oliveros et al., 2009; Hoyles et al., 2001; Noss et al., 2002). Así, por ejemplo, Castro (2019) explicita como la proporcionalidad juega un papel clave como: a) *variable de bloqueo* y *representatividad de la muestra* ("la muestra puede quedar desequilibrada, si no se toman en cuenta los subgrupos y su peso ponderado o proporcional respecto a la población de estudio", p. 54); b) estadístico en contraste de hipótesis sobre proporciones, en el análisis de la incidencia de una afección a distintos colectivos.

En el contexto de la formación inicial en Enfermería, Roditi (2012) muestra la influencia de las estrategias docentes en la resolución de problemas. En particular, como el "cálculo sistemático" basado en la regla de tres en tareas de proporcionalidad reduce la tasa de fracaso. Esta regla se sigue de diversos procedimientos *analógicos* (mediante el uso de operadores escalares) o *analíticos* (mediante operadores funcionales o el uso del coeficiente de proporcionalidad). Sin embargo, Roditi no valora el sentido que los estudiantes otorgan a esa técnica estandarizada ni el control que ejercen sobre sus resultados. ¿Qué impacto tiene esta ausencia de significado y de control en la valoración de las respuestas y en la comprensión de las situaciones-problema? Aviña-González et al. (2019) muestran cómo estudiantes de medicina presentan también problemas a la hora de resolver problemas de proporcionalidad cercanos a la vida cotidiana y cómo "el proceso de desarrollo del conocimiento de proporcionalidad por los […] estudiantes fue […] continuo [… De hecho,] el significado del concepto (objeto, evento o situación) lo fueron construyendo al relacionarlo con otros conceptos, en su forma de operar o funcionar, en los usos que pudieron hacer con ellos" (p. 84).

Raviolo et al. (2022) determinan que los universitarios de primer año que estudian la asignatura de Química no comprenden la noción de la proporcionalidad a pesar de que las respuestas que brindan sean correctas. Hallaron que los estudiantes emplean la regla de tres como proceso algorítmico. Además, identificaron que más de la mitad de los alumnos no logran obtener un conocimiento conceptual profundo de concentración expresada en la unidad (g/L). Asimismo, concluyeron que los estudiantes presentan problemas en reconocer la naturaleza de las cantidades extensivas e intensivas.

Por todo ello, se plantea la siguiente pregunta: ¿qué comprensión, lenguajes y procedimientos tienen estudiantes de Ciencias de la salud resolviendo problemas de proporcionalidad? Así, el objetivo principal será analizar las técnicas de resolución y su poder heurístico en la resolución de una situación cercana a la vida cotidiana y propia del ámbito de CC de la Salud (colesterol en sangre). Para alcanzar este objetivo, este trabajo se organiza en cuatro apartados: marco teórico y metodológico, experimentación (con indicación de la población, muestra y descripción del instrumento utilizado), resultados y su discusión y, a modo de conclusión, se señalan los aspectos clave de la actividad matemática de los estudiantes que sugieren recomendaciones para la enseñanza.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

De forma muy somera, en la *Teoría de los campos conceptuales* (Vergnaud, 1990) se aborda como un "espacio de problemas" fundamental las *estructuras multiplicativas* (Vergnaud, 1983), como conjunto de situaciones cuyo procedimiento implica una o más multiplicaciones o divisiones. Además, este campo incluye un conjunto de conceptos y teoremas para el análisis de situaciones de proporcionalidad, que involucran distintas formas de representación y uso (tablas, reducción a la unidad, regla de tres o función lineal). En este contexto, Vergnaud (1991) define *espacio de medida* considerando una magnitud y su medida. Así, en una situación, para una magnitud física, como la masa corporal de una persona o el volumen de sangre, se asignan cantidades que se expresan con una medida y con una determinada unidad de medida, por ejemplo, 78kg o 10dL.

Asimismo, es necesario identificar el tipo de cantidad que se manipula. Simon y Placa (2012) diferencian entre *cantidades extensivas* e *intensivas*. Una cantidad *extensiva* es una cantidad que se puede medir directamente (por ejemplo, masa corporal, estatura). Una cantidad *intensiva* no se puede medir directamente y es el cociente (comparación multiplicativa) de dos cantidades extensivas (por

ejemplo, velocidad (m/s), densidad (hab/km^2), caudal (m^3/s)) o que también involucran cantidades intensivas (por ejemplo, la dosis a administrar de un fármaco (4-5µg/kg/min)). Con estas cantidades se realizan diversos procedimientos. Una de las estrategias multiplicativas que define Vergnaud (1991) es el *isomorfismo de medidas*, que implica la relación de dos magnitudes mediante proporcionalidad.

En un isomorfismo de medidas es preciso distinguir cuatro situaciones esencialmente distintas en relación con los procedimientos de resolución: multiplicación, división en búsqueda del valor unitario, división en búsqueda de la cantidad de unidades y regla de tres (Vergnaud, 1991, pp. 199-201). En este contexto, a pesar de que un isomorfismo establece siempre una relación funcional lineal entre dos magnitudes, no siempre las estrategias de cálculo asociadas son equiparables. Estas estrategias pueden ser de tipo *escalar* o *funcional*, también conocidas como relaciones interna y externa, respectivamente. El trabajo con relaciones externas de magnitudes diferentes implica operaciones entre cantidades distintas, obteniéndose una nueva cantidad con unidad cociente. Por ejemplo, al multiplicar los kilogramos de masa corporal por 0.07 L/kg, se obtiene la cantidad de litros del volumen de sangre. Por otro lado, la propiedad de la función lineal "$f(kx) = k\,f(x)$", con k escalar, permite establecer una relación multiplicativa, base de una *estrategia escalar*. Por ejemplo, con el doble de masa corporal, se estima el doble de volumen de sangre. Desde el punto de vista cognitivo, las diferentes estrategias suponen distinto nivel de complejidad tal como afirman Hoyles et al. (2001). Estos niveles de complejidad quedan en ocasiones ocultos cuando no se catalogan correctamente las diferencias entre los problemas planteados y las técnicas de resolución. Así, por ejemplo, Martínez-Juste et al. (2022) muestran cómo en ocasiones problemas de "valor faltante" son etiquetados como "problemas de regla de tres" llevando a una confusión entre tipo de problema y técnica de resolución.

EXPERIMENTACIÓN

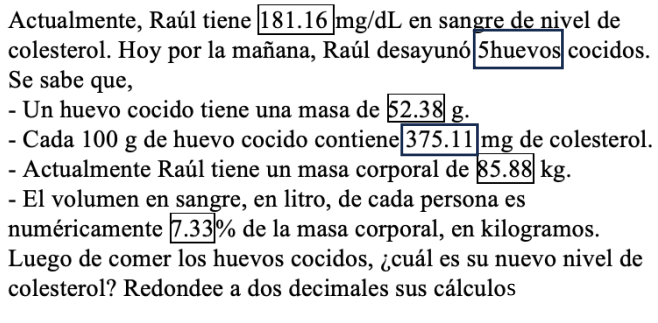
Población y muestra

La muestra es intencional por selección de todos los sujetos pertenecientes a la asignatura "Razonamiento Cuantitativo" para estudiantes de diversos ámbitos de Ciencias de la salud. La asignatura incluye nociones básicas de aritmética, álgebra, estadística, funciones reales de variable real, cálculo diferencial e integral. La muestra está compuesta por 65 estudiantes), de dos grupos (A=30 y B=35). La edad promedio de estos estudiantes es 18 años. El análisis de las respuestas se sigue tanto del resultado como del procedimiento. El envío a través de la plataforma Desmos classroom (https://teacher.desmos.com) se hace mediante una imagen de la resolución en papel.

Análisis de la situación

Antes de la realización de la situación (figura 1), los estudiantes reciben una clase teórica sobre proporcionalidad. El objetivo de esta situación es relacionar cantidades extensivas e intensivas, a través de la noción de nivel de colesterol de una persona. La actividad se presenta en un contexto asociado a las prácticas de nutrición.

Figura 1. Cuestionario


Actualmente, Raúl tiene 181.16 mg/dL en sangre de nivel de colesterol. Hoy por la mañana, Raúl desayunó 5huevos cocidos.
Se sabe que,
- Un huevo cocido tiene una masa de 52.38 g.
- Cada 100 g de huevo cocido contiene 375.11 mg de colesterol.
- Actualmente Raúl tiene un masa corporal de 85.88 kg.
- El volumen en sangre, en litro, de cada persona es numéricamente 7.33% de la masa corporal, en kilogramos.
Luego de comer los huevos cocidos, ¿cuál es su nuevo nivel de colesterol? Redondee a dos decimales sus cálculos

En la figura 1, las medidas en los cajetines (181.16 mg/dL, 5 huevos, 52.38g, etc.) están programadas en para que la plataforma arroje de manera automática para cada estudiante un valor diferente, dentro de un intervalo fijo. Estos intervalos, que incluyen el nivel de colesterol (150 – 190 mg/dL), la masa del huevo (50 – 60 g), la masa corporal (80 – 92 kg) y el porcentaje de volumen de sangre (7 – 8 %), se siguen para garantizar el trabajo individual. Los ejemplos mostrados (figuras 2 y 3) no presentan pues los mismos valores, porque son representativos de actividad matemática que difiere en los valores numéricos con los que operan los estudiantes. El procedimiento de resolución de la situación precisa de la realización de dos subtareas (tabla 1).

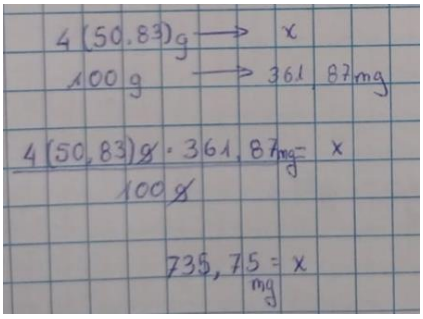
Tabla 1. Subtareas asociadas a la situación planteada

T1	T2
• Determinar la cantidad de masa de colesterol aporta un huevo. • Hallar la cantidad de masa de colesterol que aporta el total de huevos consumidos.	• Calcular el volumen de sangre de una persona dada su masa corporal (relacionar masa corporal, en kilogramos, con volumen el volumen de sangre, en litros). • Convertir el volumen de sangre de L a dL (multiplicar por 10, 1L/10dL o 1dL/0.1L). • Hallar la cantidad del nivel de colesterol a aumentar. • Determinar el nuevo nivel de colesterol.

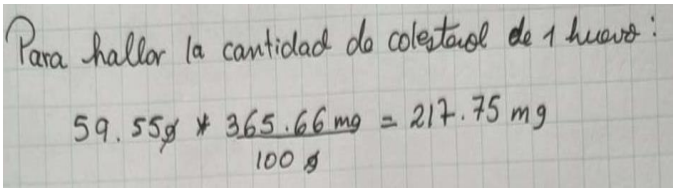
Estas subtareas están asociadas a comparar, relacionar magnitudes y realizar la conversión de unidades. En otras palabras, requieren un razonamiento proporcional complejo, empleando diferentes unidades: masa (g, mg, kg), volumen (L, dL) y concentración (mg/dL). Además, incluye un componente fenomenológico (Freudenthal, 1983) asociado a la salud, ya que es preciso saber los niveles de colesterol estándar como medio de control en las respuestas obtenidas.

En la figura 2, se observan resoluciones correctas de la subtarea T1. En esta subtarea, se prevé que los estudiantes tengan dificultad en el empleo de la cantidad “masa de colesterol”, dada por cada 100g de masa de huevo y no por cada huevo (unidad). Esto requiere un razonamiento proporcional compuesto, ya que se relaciona cantidad de unidades de huevo, cantidad de masa de huevo, cantidad de masa de colesterol.

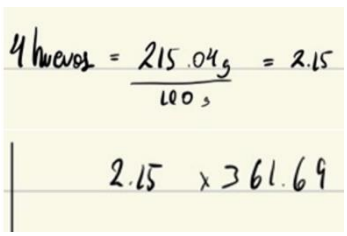
Figura 2. Técnicas correctas de resolución de T1



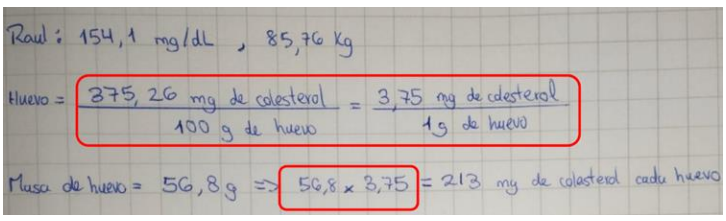
(a) Regla de tres simple



(b) Factor de conversión



(c) Reducción a la unidad relación escalar



(d) Reducción a la unidad relación funcional

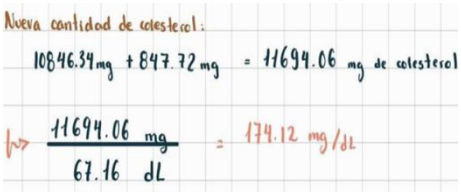
En la figura 3, se muestran respuestas correctas y descripción de los procesos generales de la subtarea T2. Esta resolución tiene dos técnicas asociadas (t1 y t2) y cada una de ellas se realiza en dos pasos.

Figura 3. Técnicas correctas para la subtarea T2

(a) técnica 1 (t1)

Primero se suman cantidades extensivas (masa de colesterol) y segundo se "opera" para hallar una cantidad intensiva (nivel de colesterol).

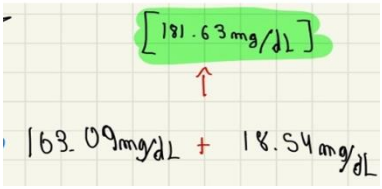
- Paso 1 (t1p1): a mg + b mg = c mg
- Paso 2 (t1p2): (c mg / d dL) = e mg/dL



(b) técnica 2 (t2)

Primero se "opera" para hallar una cantidad intensiva (nivel de colesterol) y segundo se suman cantidades intensivas (nivel inicial de colesterol con el obtenido con las mismas unidades).

- Paso 1 (t2p1): a mg / b dL = c mg/dL
- Paso 2 (t2p2): (d mg/dL) + (c mg/dL) = e mg/dL



Con respecto a la subtarea T2, se prevé que los estudiantes tengan dificultad en las operaciones entre cantidades extensivas e intensivas, así como el uso de las unidades de medida. En concreto, por un lado, se estima que los estudiantes que utilizan la técnica t1 (figura 3a) tengan una tasa de éxito menor, dado que se debe determinar primero una cantidad total de colesterol considerando el cálculo del valor inicial, para luego determinar el nuevo nivel. Por otro lado, se considera que los estudiantes que utilizan la técnica t2 (figura 3b) presenten dos tipos de errores: uno, no determinar la cantidad a incrementar, dado que se trata de una cantidad intensiva; otro, omitir añadir esa cantidad intensiva obtenida al nivel inicial de colesterol, habiendo elegido la misma unidad de medida. Estas dificultades de resolución en las tareas T1 y T2 están asociadas a las estrategias escalar o funcional utilizadas por los estudiantes y al poder heurístico que se les puede asociar teniendo en cuenta la tasa de éxito en la resolución. Asimismo, se debe analizar las diferencias atendiendo a la naturaleza de las cantidades manipuladas (extensivas o extensivas). Bajo estos presupuestos se identifican variables operativas para la interpretación de las respuestas de los estudiantes (tabla 2).

Tabla 2. Variables operativas

T	N	Variable	Descripción
1	1	T1	Respuesta correcta de T1
	2	R3S	T1: uso correcto de la regla de tres simple
	3	FC	T1: uso correcto de factor de conversión
	4	RUe	T1: uso correcto de reducción a la unidad donde se prioriza la relación escalar
	5	RUf	T1: uso correcto de reducción a la unidad donde se prioriza la relación funcional
2	6	T2	Resolución correcta de T2
	7	VS	T2: Calculo correcto de volumen de sangre
	8	t1	T2: Uso correcto de la técnica 1 de la tarea 2
	9	t2	T2: Uso correcto de la técnica 2 de la tarea 2
	10	t1p1	T2: Uso correcto de la parte 1 con la técnica t1 para resolver la tarea 2
	11	t1p2	T2: Uso correcto de la parte 2 con la técnica t1 para resolver la tarea 2
	12	t2p1	T2: Uso correcto de la parte 1 con la técnica t2 para resolver la tarea 2
	13	t2p2	T2: Uso correcto de la parte 2 con la técnica t2 para resolver la tarea 2

Resultados y su discusión

Las frecuencias absolutas asociadas a las distintas variables se muestran en la tabla 3 y también los porcentajes calculados sobre el total de respuestas por grupo.

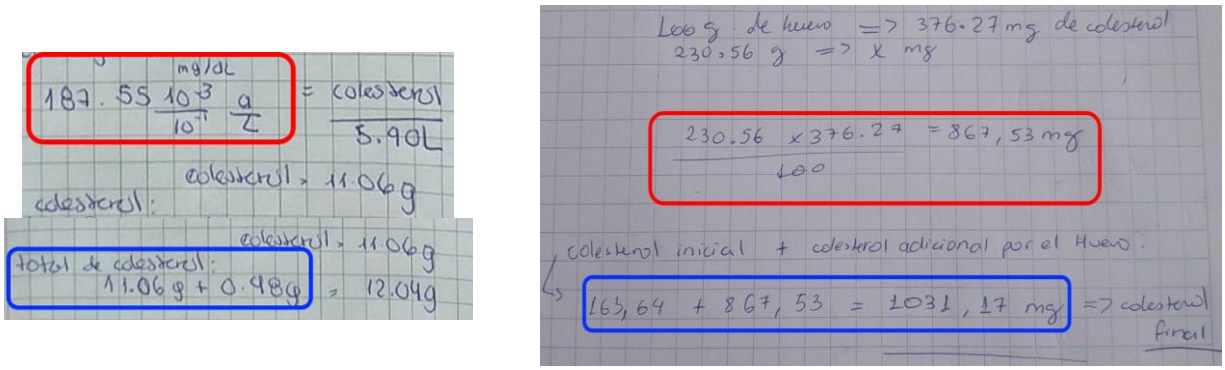
Tabla 3. Frecuencias absolutas (fa) y porcentajes (%)

Grupo A: subtarea T1						Grupo A: subtarea T2							
	T1	R3S	FC	RUe	RUf	T2	VS	t1	t2	t1p1	t1p2	t2p1	t2p2
Fa	29	24	3	1	2	17	23	7	10	9	7	15	10
%	96.7	80	10	3.3	6.7	56.7	76.7	23.3	33.3	30	23.3	50	33.3

Grupo A: subtarea T1						Grupo A: subtarea T2							
	T1	R3S	FC	RUe	RUf	T2	VS	t1	t2	t1p1	t1p2	t2p1	t2p2
Fa	32	29	1	1	2	24	33	6	17	8	6	23	17
%	91.4	82.9	2.9	2.9	5.7	68.6	94.3	17.1	48.6	22.9	17.1	65.7	48.6

El análisis relacional exhaustivo de las respuestas permite observar resultados tanto de la resolución de las subtareas como del uso de técnicas y su eficacia. La tasa de respuesta correcta en la subtarea T1 (T1 = 96.7% y 91.4%, respectivamente en los grupos A y B) permite afirmar que la actividad es comprendida por los estudiantes y que, por lo tanto, ambos grupos tienen estrategias de base para la resolución de este tipo de tareas; a saber, la regla de tres simple (R3S = 80% y 82.9%). Este resultado confirma que el empleo del algoritmo R3S muestra menores dificultades en el proceso de cálculo (Roditi, 2012). Con respecto a la subtarea T2, la mayoría de los estudiantes han sido capaces de determinar el volumen de sangre (Vs = 76.7% y 94.3%). Sin embargo, este proceso no garantiza el éxito de la tarea, debido a que solo 41 estudiantes obtuvieron una respuesta correcta (T2 = 56.7% y 68.6%). En la figura 4 se muestran ejemplos representativos de procedimientos incorrectos observados.

Figura 4. Procedimientos incorrectos en los pasos de las técnicas de la T2



(a) respuesta cantidad extensiva en g (b) suma de cantidad intensiva con otra extensiva

En esta subtarea T2, se utilizan dos técnicas de resolución que difieren en manejo de las cantidades extensivas e intensivas (figura 3). De los 17 estudiantes que emplean la técnica t1 (t1p1= 9 y 8), 13 logran resolver la situación de manera completa (t1p2 = 7 y 6). Con respecto a la falta de realización completa, 3 de los 4 estudiantes que realizan bien el primer paso t1p1 no son capaces de realizar el segundo paso t1p2, dado que no obtienen la cantidad intensiva a partir de las extensivas. Este resultado es notable en el sentido de que, si bien las cantidades se obtienen mediante la R3S, estos estudiantes no son capaces de dotar de sentido a sus resultados por una aplicación "automática" de dicha regla, cuestionando entonces la eficacia de su uso.

La técnica t2 es utilizada por 38 estudiantes (t2p1 = 15 y 23), pero solo 27 de ellos completan correctamente la situación (t2p2 = 10 y 17). Los errores que cometen son de tres tipos: 1) Estudiantes que suman una cantidad extensiva con otra intensiva. En la figura 4b, se observa un ejemplo donde el estudiante suma la masa de colesterol (867.53mg, cantidad extensiva) con el nivel de colesterol (163.64mg/dL, cantidad intensiva). 2) Estudiantes que no añaden la cantidad de nivel a aumentar al nivel inicial de colesterol. 3) Estudiantes que no emplean la unidad estándar para medir el nivel del colesterol (mg/dL). Este error es especialmente notable (Bourgade, 2020), dado que, si bien los

estudiantes pueden trabajar con intensivos, no eligen una única unidad de medida, estableciendo relaciones que no son de proporcionalidad. Finalmente, con esta técnica, se puede observar que de los 41 estudiantes solo 27 (t2p2 = 33.3% y 48.6%) culminaron con éxito la situación completa.

Síntesis y recomendaciones para la enseñanza

El análisis del procedimiento de los estudiantes y de las dificultades que muestran en la resolución de la tarea muestra contribuyen a reforzar la tesis (Chambris y Visnovska, 2022) según la cual el contenido constituye un *obstáculo epistemológico* (Brousseau, 1997). De hecho, otras investigaciones recientes relacionadas con la resolución de problemas de proporcionalidad que involucran cantidades intensivas (aunque no necesariamente la misma clase de tareas) refuerzan esta tesis en otros contextos; a saber: Educación Secundaria (Castillo y Fernández, 2022), en contextos físico-matemáticos en Bachillerato (Tinoco et al., 2021) o en la enseñanza de Química en primer curso de Universidad (Raviolo et al., 2022).

El análisis de las respuestas del cuestionario nos ha permitido inferir que los estudiantes de Ciencias de la salud tienen una predilección por la técnica de regla de tres R3S en tareas donde se tienen magnitudes proporcionales. Asimismo, los estudiantes que utilizan otros procedimientos se relacionan con los métodos *analógicos* (reducción a la unidad escalar) o *analíticos* (reducción a la unidad funcional) identificados por Roditi (2012).

Si bien la tasa de uso del algoritmo R3S es alta, se observa una bajada sustancial de su eficacia en la resolución de la subtarea T2. Esta tarea se resuelve mediante dos técnicas t1 y t2. Los estudiantes que emplean la técnica t1 aplican la R3S de forma "automática", desprovista de sentido, lo que reduce la tasa de éxito. Sin embargo, el uso de la técnica t2 es más racional y controlado. El uso de esta técnica t2 precisa comprender que las cantidades intensivas son producto de las relaciones externas entre magnitudes, que constituyen elementos de una nueva magnitud, que, a su vez, da significado a la unidad cociente, así como una interpretación funcional de la proporción. Por todo ello, se recomienda la enseñanza preferente de esta técnica t2.

Finalmente, las respuestas analizadas permiten observar que en los procesos implícitos hay una variedad de razonamientos multiplicativos al realizar operaciones entre cantidades, donde los estudiantes no se cuestionan acerca de la naturaleza de las cantidades involucradas. Es por lo que se recomienda en la enseñanza, en primer momento, la identificación de las relaciones internas y externas entre magnitudes y su articulación, y, en un segundo momento, avanzar en el estudio de razones de cambio promedio como comparación de diferencias de cantidades. Esta recomendación debe servir para el diseño y control de la experimentación de una propuesta didáctica coherentes, siguiendo, por ejemplo, el trabajo de Martínez-Juste (2022).

Referencias

Artaud, M., Redondo, C., Bernad, K. y Bonniol, V. (2022). Collaborative research as an institution that incorporates research systems Case study of a mathematical problem-solving Project. En Learning, strategies, and educational policies. What interdisciplinarity, methodologies and international perspectives? *2nd SFERE-Provence/Ampiric Conference on Education*.

Aviña-González, M. J., Vargas-Alejo, V., Alvarado-Monroy, A. y Escalante, C. C. (2019). Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. CPU-e. *Revista de Investigación Educativa*, *29*, 58-86.

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, L. M. (2000). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional: formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas (*pp. 166-185) Bogotá.

Bourgade, J. P. (20-22 de febrero de 2020). *Formación docente: el caso de la proporcionalidad*. X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. Perú.

Brousseau, G. (1998). Théorie *de situations didactiques en mathématiques*. La Pensée Sauvage.

Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Competencia reflexiva en futuros profesores de matemáticas mediante el análisis de lecciones de libros de texto. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 189-198). SEIEM.

Castillo, S. y Fernández, C. (2022). Secondary school students' performances on Ratio comparison problems. *Acta Scientiae*, *24*(6), 60-88.

Castro, M. (2019). Bioestadística aplicada en investigación clínica: conceptos básicos. *Revista Médica Clínica Codes*, *30*(1), 50-65.

Chambris, C. y Visnovska, J. (2022). On the history of units in French elementary school arithmetic: The case of proportionality. *Historia Mathematica*, *59*, 99-118.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2-3), 135-182.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Publishing Company.

Gairín, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249-259). SEIEM.

García-Oliveros, G., Granados-Silva, R. y Pinillos-Bohórquez, O. (2009). Razonamientos proporcionales en estudiantes de enfermería. *El Hombre y la Máquina*, *33*, 72-81.

Hoyles, C., Noss, R. y Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 4-27.

Martínez-Juste, S. (2022). *Diseño, implementación y análisis de una propuesta didáctica para la proporcionalidad en el primer ciclo de secundaria*. [Tesis doctoral]. Universidad de Valladolid.

Noss, R., Hoyles, C. y Pozzi, S. (2002). Abstraction in expertise: A study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 204-229.

Raviolo, A., Schroh, N. T. y Farré, A. (2022). La comprensión de estudiantes de primer año de universidad del concepto de concentración expresada en gramos por litro. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 143-159.

Roditi, E. (2012). L'enseignement du calcul de doses médicamenteuses : Un défi pour la santé publique au 21è siècle. *Enseignement des mathématiques et contrat social. Actes du colloque EMF2012* (pp. 1235–1245).

Romo-Vázquez, A. y Artigue, M. (2023). Research on Tertiary Mathematics Education for Non-specialistsIn *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education* (pp. 535-557). Springer.

Simon, M. A. y Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 35-41.

Tinoco, J. C., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Estrategias de proporcionalidad simple en las aulas de Matemáticas y de Física. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 587 – 594). SEIEM.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol.2, pp. 41-52). Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *RDM*, *10*(2), 33-170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Trillas.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el EOS*.

UNA PAUTA ESPECIALIZADA PARA REFLEXIONAR SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EN SECUNDARIA[i]

A specialized guideline to reflect on the teaching of functions in secondary school

Inglada, N.[a], Breda, A.[a] y Sala-Sebastià, G.[a]

[a]Universitat de Barcelona

Resumen

Una de las competencias que debe tener el profesorado es la de reflexionar sobre su propia práctica. El Enfoque Ontosemiótico ofrece como herramienta para este propósito los Criterios de Idoneidad Didáctica. En este trabajo se han analizado, en 48 Trabajos Finales del Máster de formación del profesorado de matemáticas de secundaria (Catalunya, España) sobre funciones de 4º de ESO, la reflexión que hacen los futuros profesores en el análisis de su práctica docente, desde el punto de vista epistémico en cada una de sus componentes: errores, ambigüedades, riqueza de procesos y representatividad de la complejidad del objeto función. Se concluye que, si se dotara al profesorado de una pauta especializada para el análisis epistémico, la reflexión sobre su propia práctica podría mejorar. Consecuentemente, aumentaría la calidad de los procesos de instrucción.

Palabras clave: *conocimiento meta didáctico-matemático, criterios de idoneidad didáctica, enseñanza de las funciones, formación del profesorado de matemáticas.*

Abstract

Reflection on their one practice is one of the competences that teachers must have. The Ontosemiotic Approach offers as a tool for this purpose the Didactic Suitability Criteria. In this work, we analysed, from 48 Final Projects of the Master's Degree in Secondary Mathematics Teacher Training (Catalonia, Spain) on functions of 4th ESO, the reflection that future teachers make in the analysis of their teaching practice, from the epistemic point of view in each of its components: errors, ambiguities, richness of processes and representativeness of the complexity of the object function. It is concluded that, if teachers were provided with a specialized guideline for epistemic analysis, reflection on their own practice could improve. Consequently, the quality of the instructional processes would increase.

Keywords: *didactic suitability criteria, mathematics teacher training, meta didactic-mathematical knowledge, teaching functions.*

INTRODUCCIÓN

¿Qué conocimientos debe poseer el profesorado de matemáticas para el ejercicio de su profesión? (Amaya De Armas et al., 2016) Dentro de los modelos coexistentes en la literatura sobre los conocimientos del profesor de matemáticas, destacamos el modelo Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del Profesor de Matemáticas (CCDM) de Godino y colaboradores (2017). Centrándonos en la dimensión didáctica, una de las competencias que debe tener el profesorado es la de reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas implementados en la práctica, y el modelo CCDM nos ofrece los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID), una herramienta que sirve para organizar y sistematizar la reflexión del profesorado considerando diferentes componentes, epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo, y ecológico (Font et al., 2010), que se configura como uno de los elementos del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), denominado conocimiento meta didáctico-matemático (Breda et al., 2017). El *Màster interuniversitari de Formació del Professorat de Secundària de Matemàtiques de Catalunya* atiende el criterio de que la práctica docente debe formar parte esencial de la formación inicial de los

Inglada, N., Breda, A. y Sala-Sebastià, G. (2023). Una pauta especializada para reflexionar sobre la enseñanza de las funciones en secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 291–298). SEIEM.

profesores de matemáticas y que la reflexión sobre la propia práctica es necesaria para comprender la complejidad del proceso educativo y es una estrategia clave para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para conseguir este objetivo de reflexionar sobre la propia práctica, los estudiantes del máster cursan una asignatura que se denomina Trabajo Final de Máster (TFM) que consiste en realizar un análisis de la Unidad Didáctica (UD) elaborada e implementada por ellos mismos en el periodo de prácticas. Para realizar este análisis se utilizan los CID. Esta herramienta del EOS la han conocido y estudiado previamente en una asignatura denominada "Innovación e Investigación en Educación Matemática". A partir del análisis de la práctica implementada, los futuros profesores y profesoras presentan una propuesta de mejora de su UD. De un total de 744 TFM producidos en el máster (del curso 2011-2012 al curso 2020-2021), 163 tratan del objeto matemático función, lo que corresponde al 22% del total de los TFM del programa. Como afirma Font (2011), no todos los conceptos matemáticos son igualmente centrales para la comprensión de las matemáticas de la educación secundaria. La noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora.

En este trabajo, pretendemos analizar, en los TFM sobre funciones de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), la reflexión que los futuros profesores y profesoras hacen en el análisis de la UD que han diseñado e implementado, desde el punto de vista epistémico en cada una de sus componentes: errores, ambigüedades, riqueza de procesos y representatividad de la complejidad del objeto función. Este trabajo forma parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es investigar el conocimiento meta didáctico-matemático del futuro profesor o profesora que participa del *Màster interuniversitari de Formació del Professorat de Secundària de Matemàtiques de Catalunya* con relación a la idoneidad epistémica, cuando reflexiona y presenta propuestas de mejora de la UD sobre funciones.

MARCO TEÓRICO

Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos (CCDM)

Con la finalidad de atender el problema relacionado con la formación del profesorado, en Pino-Fan et al. (2015) se propone un modelo del CDM que interpreta y caracteriza los conocimientos de un profesor o profesora a partir de tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. En esta investigación nos centraremos en la tercera de estas dimensiones.

Para desarrollar esta dimensión meta didáctico-matemática, en el EOS se han propuesto diferentes constructos teóricos, en particular, para la valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, su herramienta esencial es la noción de idoneidad didáctica. Se entiende como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino et al., 2006a; Godino et al., 2006b). La idoneidad didáctica se define a partir de las siguientes dimensiones o CID: *Idoneidad Epistémica*, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas"; *Idoneidad Cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar; *Idoneidad Interaccional*, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; *Idoneidad Mediacional*, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; *Idoneidad Afectiva*, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; *Idoneidad Ecológica*, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (Font et al., 2010). El análisis que

presentamos en este trabajo pone el foco en el ámbito epistémico, por cuestiones de espacio, detallaremos únicamente la idoneidad epistémica.

La *idoneidad epistémica* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Por ejemplo, la enseñanza de la adición en la educación primaria puede limitarse al aprendizaje de rutinas y ejercicios de aplicación de algoritmos (baja idoneidad), o tener en cuenta los diferentes tipos de situaciones aditivas e incluir la justificación de los algoritmos (alta idoneidad). Otro ejemplo es la enseñanza de la derivada de la función en un punto en el bachillerato. Enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, (baja idoneidad) o tener en cuenta diferentes significados de este objeto matemático como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, la tasa instantánea de variación, o el límite del cociente de incrementos (alta idoneidad). En el caso de las funciones de 4º de ESO, reducir la enseñanza al aspecto operacional y a su representación algebraica (baja idoneidad) o trabajar diferentes significados de función, como correspondencia, relación entre variables, relación entre magnitudes, y sus distintas representaciones, verbal, algebraica, tabular, gráfica e icónica (alta idoneidad).

En Breda et al. (2017) se configura un sistema de componentes e indicadores que sirven de guía para el análisis y la valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio de cualquier etapa educativa. Es importante tener en cuenta que, tanto los componentes como los indicadores de los CID se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En la Tabla 1 se presentan los componentes e indicadores de la Idoneidad Epistémica.

Tabla 1: Componentes e indicadores de la Idoneidad Epistémica. Fuente: Breda et al. (2017)

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático. Se observan prácticas correctas (sin errores) desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	Se observan prácticas sin ambigüedades… No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Investigaciones sobre la noción de función en el marco del EOS

En el marco teórico del EOS se han realizado diversas investigaciones sobre el concepto de función. (Amaya et al., 2016; Flores y Font, 2017; Parra-Urrea y Pino-Fan, 2017; Pino-Fan y Parra-Urrea, 2021; Ramos y Font, 2008; Sánchez et al., 2021). Nuestra investigación se apoya en los trabajos anteriores para profundizar en la faceta epistémica de la noción de función y de los procesos que se

ponen en juego en su enseñanza y aprendizaje. Recogemos los listados propuestos en las investigaciones relacionadas, de clasificaciones y caracterizaciones de los procesos que están asociados a los componentes de la idoneidad epistémica para, en este estudio, dar un paso más completando la iniciativa de Pino-Fan y Parra-Urrea (2021), de diseñar una herramienta que adecúe los CID para analizar, evaluar y mejorar la enseñanza y aprendizaje de las funciones. Esta herramienta, además, facilitará el estudio del conocimiento meta didáctico-matemático del profesorado.

METODOLOGÍA

Se trata de una investigación de tipo mixto (cuantitativo y cualitativo). El aspecto cuantitativo hace referencia a la selección y la cuantificación de los TFM que han desarrollado su UD alrededor del objeto función de 4º de ESO. A partir del análisis de la reflexión que aparece en los TFM de los futuros profesores sobre la idoneidad epistémica del diseño y de la implementación de la UD, emergen categorías inductivas de tipos de errores, ambigüedades, riqueza de procesos y representatividad de la complejidad del objeto *función* en 4º de ESO.

Contexto y participantes

La muestra está formada por 48 TFM sobre funciones de 4º de ESO de alumnos del *Màster interuniversitari de Formació del Professorat de Secundària de Matemàtiques de Catalunya* del curso 2011-2012 al curso 2020-2021. Durante el máster, hay dos períodos de prácticas en centros de secundaria. En el primero, los futuros profesores conocen el centro de prácticas, el alumnado y acuerdan con el mentor del centro qué UD deben preparar. En el segundo período, implementan la UD que han diseñado. Después, en el TFM, los futuros profesores valoran la idoneidad didáctica de su implementación utilizando los CID y proponen mejoras. En particular, al valorar la idoneidad epistémica, reflexionan sobre los errores, ambigüedades, riqueza de procesos y representatividad de la complejidad del objeto *función* en 4º de ESO.

Indicadores de la Idoneidad Epistémica para Funciones (RIEF)

Para analizar la reflexión recogida en los 48 TFM seleccionados se han considerado los indicadores propuestos en Pino-Fan y Parra-Urrea (2021) y Sánchez et al. (2021) obteniendo la siguiente adecuación de la idoneidad epistémica para analizar el objeto matemático *función*. Nos referiremos a esta herramienta con la expresión Refinamiento de los indicadores de la Idoneidad Epistémica para Funciones (RIEF). Los códigos relacionan cada subindicador con la componente a la que pertenecen.

Errores

(E1) Se evita el error de utilizar curvas continuas para funciones discretas. (E2) Error de definición. (E3) Error de representación. (E4) Error de resolución o procedimiento. (E5) Error en la proposición de un problema. (E6) Error de argumentación.

Ambigüedades

(A1) El trabajo con funciones no se limita al uso de representaciones algebraicas para evitar que se perciban solo como fórmulas y regularidades. (A2) Se evita la creencia de que un cambio en la variable independiente implica necesariamente un cambio en la variable dependiente pues, de lo contrario, una función constante podría no ser considerada una relación funcional. (A3) Se presentan relaciones funcionales que no son graficables para evitar la creencia de que toda función admite una representación gráfica. (A4) Se presentan relaciones funcionales que no tienen asociada una expresión algebraica, una fórmula o una ecuación para evitar la creencia de que toda función admite una representación algebraica. (A5) Las funciones se presentan con dominios y codominios explícitos para evitar la creencia de que toda función tiene un dominio y un codominio natural o real. (A6) Se presentan gráficas «irregulares» para evitar la creencia de que toda función representada gráficamente tiene «buen comportamiento» (simétrica, regular, suave y continua). (A7) Se hace uso de metáforas

de forma consciente. (A8) Uso de la notación $f(x)$ para representar la función y la imagen de un valor de la x sin especificar los dos significados. (A9) Lenguaje dinámico de funciones. (A10) Imprecisión en el lenguaje.

Riqueza de procesos

(RP1) Las definiciones y los procedimientos consideran la arbitrariedad y la univalencia como características clave de la noción de función. (RP2) Se presentan las nociones de dominio y codominio como elementos inherentes a la definición de función. (RP3) Se promueve el significado de la noción de función pretendido por el currículo escolar, para identificar y argumentar relaciones funcionales en sus diversas representaciones. (RP4) Se presentan enunciados y procedimientos fundamentales relativos a la noción de función adecuados al nivel educativo. (RP5) Se promueven situaciones en que los estudiantes deben justificar sus conjeturas y procedimientos. (RP6) Se institucionalizan los procesos. (RP7) Se identifican las variables. (RP8) Se identifica el tipo de función.

Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos

Significados

(S1) La función como correspondencia. (S2) La función como relación entre variables. (S3) La función como relación entre magnitudes. (S4) La función como representación gráfica. (S5) La función como expresión analítica. (S6) La función como correspondencia arbitraria. (S7) La función a partir de la teoría de conjuntos.

Representaciones y conversiones

(RC1) Se movilizan las representaciones vinculadas a la función (verbal, simbólica/algebraica, tabular, gráfica e icónica). (RC2) Se promueven tratamientos en los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ejemplo, dada la función definida por $f(x) = x^2 + 2x + 1$ se aplica un tratamiento de factorización para obtener la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = (x + 1)^2$, el tratamiento de la función original no debe alterar el dominio ni el rango de la función resultante, en caso contrario, la función no es la misma. (RC3) Se promueven conversiones entre los diversos registros de representación (verbal, algebraico, tabular y gráfico). Por ejemplo, para acceder a la idea de continuidad es conveniente utilizar un registro gráfico; para potenciar la idea de correspondencia es pertinente utilizar un registro algebraico

Situaciones problema

(SP1) Se presentan problemas que movilizan, representativamente, los seis significados de referencia de la función. (SP2) Se presentan problemas para reforzar conocimientos previos relacionados con la noción de función. (SP3) Se presentan problemas para ejemplificar distintas definiciones de la noción de función. (SP4) Se presentan problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje sobre funciones. (SP5) Se presentan problemas donde se trabajan conexiones intramatemáticas para reforzar el aprendizaje sobre funciones. (SP6) Se presentan problemas contextualizados provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias para reforzar el aprendizaje sobre funciones. (SP7) Se presenta un problema de modelización.

Se han analizado las reflexiones sobre su propia práctica que realizan los autores de los TFM para identificar en cuáles de los anteriores indicadores se basan para proponer mejoras en sus UD.

RESULTADOS

En la Tabla 2 se presentan los datos obtenidos en el análisis de los 48 TFM participantes en relación con los componentes e indicadores RIEF identificados en sus reflexiones. Hemos contabilizado el número de TFM donde se reflexiona sobre cada uno de los indicadores RIEF (Ind) y en qué aspectos de los mismos se reflexiona (diseño e implementación (DI) y/o propuesta de mejora (PM) de la UD).

En la Tabla 2, en relación con los TFM analizados, NR indica que no se ha encontrado ninguna reflexión sobre el componente; NDE hace referencia a que el autor del TFM afirma que no detecta errores; INE que se explicita la intención de no cometer errores.

Tabla 2: Resumen resultados

Errores			Ambigüedades			Riqueza de procesos			Significados			Representa-ciones			Situaciones problema		
Ind	DI	PM	Ind	DI	PM	Ind	DI	PM	Ind	DI	PM	Ind	DI	PM	Ind	DI	PM
NR	15	41	NR	18	39	NR	7	26	NR	17	43	NR	8	29	NR	3	16
NDE	13		A1	1		RP1	2		S1	14	2	RC1	38	9	SP1	11	11
E1	2	1	A5	4	1	RP2	4	2	S2	18	2	RC2	2	2	SP2	3	5
E2	10		A6	2		RP3	10	1	S3	14	1	RC3	36	16	SP3	15	8
E3	4		A7	13	9	RP4	16	2	S4	17	3				SP4	25	8
E4	7	1	A8	4		RP5	39	21	S5	14	3				SP5	9	6
E5	9	2	A9	14	2	RP6	19	3	S6	12	2				SP6	39	24
E6	2		A10	7		RP8	4		S7	16	1				SP7	12	9
INE		5															

En el análisis de la reflexión que realizan los futuros profesores en los TFM sobre funciones para 4º curso de la ESO se observa que los tipos de errores sobre los que más reflexionan son los que se cometen en las definiciones (21%) y en la proposición de un problema (19%).

Los tipos de ambigüedad sobre los que más se reflexiona son el uso de metáforas de forma consciente (27%), el uso de la notación $f(x)$ para representar la función y la imagen de un valor de x sin especificar los dos significados (29%). Pero sólo el 15% reflexionan sobre el uso del lenguaje dinámico de funciones. Por ejemplo, la autora del TFM 37, en su reflexión epistémica, describe una de las ambigüedades detectadas en la implementación de su UD.

> Una ambigüedad fue al explicar las funciones discontinuas, las cuales, definimos como aquellas funciones la gráfica de las cuales no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Esta definición les generó confusión cuando dibujamos una función discontinua en la que el punto de discontinuidad se identificaba con un círculo […]. Algunos alumnos expresaron que en ningún momento se levantaba el lápiz para continuar dibujando tota la función, ya que recorrían el círculo, y por tanto no era una función discontinua.

El proceso más tenido en cuenta es la proposición de situaciones en que los estudiantes deben justificar sus conjeturas y procedimientos (81%). La mayor parte de los futuros profesores reconoce una carencia de este tipo de proceso en el diseño e implementación de sus UD y el 44% las introducen en sus propuestas de mejora.

Cada uno de los 7 significados de función aparece, aproximadamente, en un 31% de las reflexiones de los TFM, aunque en las propuestas de mejora se observa que se considera solo en un 5%.

El componente representaciones y conversiones es el que está más presente en la reflexión de los autores de los TFM (77%).

El 94% de los trabajos contienen una reflexión sobre alguno de los indicadores de la componente situaciones problema. El más estudiado es la presentación de problemas contextualizados provenientes de la vida cotidiana o de otras ciencias para reforzar el aprendizaje sobre funciones (81%) y le sigue la presentación de problemas en contextos puramente matemáticos para reforzar el aprendizaje sobre funciones (52%).

También podemos observar que el número de TFM en los que se reflexiona sobre un indicador al analizar el diseño y la implementación de la UD es superior al de aquellos que lo utilizan para justificar las mejoras realizadas en la UD.

CONCLUSIONES

En el análisis de las reflexiones de los TFM sobre funciones para 4º curso de la ESO, se puede afirmar que se han obtenido evidencias de todos los indicadores RIEF (Tabla 2), en mayor o menor medida. Sin embargo, al entrar en detalle en cada TFM, se observa que cuando los participantes revisan la UD que han diseñado y su implementación, la pauta de que disponen —los CID (Tabla 1)— les ayuda a reflexionar (Alcaraz et al., 2022; Esqué de los Ojos y Breda, 2021). No obstante, al no ser ésta una pauta específica para la idoneidad epistémica de las funciones (RIEF), los participantes no atienden en su análisis a la mayoría de los RIEF. Se constata que sus reflexiones presentan importantes carencias que podrían influir en la calidad de sus procesos de instrucción. Aunque la revisión de la literatura apunta que en los últimos años ha ido creciendo la cantidad de trabajos que aplican los CID como herramienta teórico-metodológica (Malet, 2022), se hacen necesarios nuevos contextos de uso y el refinamiento de sus componentes para analizar procesos de enseñanza de objetos matemáticos específicos (Araya et al., 2021; Breda et al. 2021; García Marimón et al., 2021; Piñero-Charlo et al., 2021). En consecuencia, si se dotara al profesorado de herramientas como los RIEF, la reflexión sobre su propia práctica podría mejorar, ya que dispondrían de una pauta específica para realizar un análisis con más rigor, claridad y eficiencia. El uso de esta herramienta no solo contribuiría a mejorar la calidad de los procesos de instrucción, sino que mejoraría el conocimiento meta didáctico-matemático de quienes lo usen.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y por “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Referencias

Alcaraz, D., Breda, A. y Sala, G. (2022). Valoração de uma unidade didática sobre sistemas de equações lineares: um trabalho de reflexão sistematizada sobre a própria prática. En E. Silveira Vasconcelos; J. F. Staffa da Costa; Valderez Marina do Rosário Lima. (Org.). *O entrelaçar das pesquisas com as práticas pedagógicas: notas sobre o ensino de Ciências da Natureza e da Matemática na Educação Básica* (pp. 261-281). Porto Alegre: EDIPUCRS.

Amaya de Armas, T. R., Pino-Fan, L. R., y Medina Rivilla, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática*, *28*(3), 111-144. https://doi.org/10.24844/EM2803.05

Araya, D., Pino-Fan, L., Medrano, I. y Castro, W. F. (2021). Epistemic criteria for the design of tasks about limits on a real variable function. *Bolema*, *35*(69), 179-205. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a09

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Pochulu, M., Sánchez, A. y Font, V. (2021). Simulation of teacher interventions in a training course of mathematics teacher educators. *Mathematics, 9*(24), 3228. https://doi.org/10.3390/math9243228

Esqué de los Ojos, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Flores, M. y Font, V. (2017). Impacto de un programa de desarrollo profesional para profesores de secundaria de matemáticas sobre la enseñanza de funciones en el Ecuador. El caso de la función exponencial. En J.M., Contreras, P., Arteaga, G. R.Cañadas, M. M., Gea, B., Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-7). https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html#comunicaciones

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/ 021037010790317243

Font, V. (2011). Funciones. Evolución histórica de la noción de función. Algunas ideas clave que nos ofrece la evolución de la noción de función. En Goñi J.M. (coord.), *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar.* (pp. 145-186). Ed Graó.

García Marimón, O., Diez-Palomar, J., Morales Maure, L., y Durán González, R. E. (2021). Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta de los Criterios de Idoneidad Didáctica. *Bolema, 35*(70), 1047-1072. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a23

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhemi, M. R. (2006a). Análisis y valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html

Godino, J. D., Contreras A., y Font, V. (2006b). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/diseño.html

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Parra-Urrea, Y. E. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis ontosemiótico de libros de texto chilenos: el caso del concepto de función. En J.M., Contreras, P., Arteaga, G. R.Cañadas, M. M., Gea, B., Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, 1-11. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/parra.pdf

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. https//doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. (2021). Criterios para orientar el diseño y la reflexión de clases sobre funciones. ¿Qué nos dice la literatura científica? *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas, 91*, 45-54.

Piñero Charlo, J. C., Ortega García, P. y Román García, S. (2021). Formative potential of the development and assessment of an educational escape room designed to integrate music-mathematical knowledge. *Education Sciences*, *11*, 131. https://doi.org/10.3390/educsci11030131

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 233-265. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html

Sánchez, A., Breda, A., Font, V. y Sala -Sebastià, G. (2021). ¿Qué errores detectan los futuros profesores en las clases de matemáticas que imparten? *Revista CIDUI, 5*, 1-13. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/fprofesores.html

ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE Y RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS EN ALUMNADO DE ESCUELAS RURALES: ESTADO INICIAL EN UN PROYETO STEM

Learning strategies and Mathematics achievement in rural school students: initial state in a STEM project

Jiménez-Alcázar, A.[a], Solano-Pinto, N.[b] y Fernández-Cézar, R.[c]

[a] Estudiante de doctorado en el Departamento de Matemáticas, [b] Departamento de Psicología, área de Psicología evolutiva y de la educación, [c] Departamento de Matemáticas, área de Didáctica

Facultad de Educación de Toledo, Universidad de Castilla-la Mancha

Resumen

La sociedad actual se basa en la ciencia y la tecnología, dependiendo en gran parte de las matemáticas. El objetivo de este estudio es ver la relación existente entre las estrategias de aprendizaje y el rendimiento académico en alumnos de escuelas rurales. Se analizó una muestra de conveniencia de 199 estudiantes que participaban en un programa de experimentación STEM pertenecientes a escuelas rurales. El instrumento utilizado fue el cuestionario CEA de estrategias de aprendizaje. Se muestran los resultados obtenidos para la muestra total y desagregada para chicos y chicas, y se halla que el uso de las estrategias es similar en chicos y en chicas, y que el empleo de las mismas es mayor en el alumnado de mejor rendimiento en matemáticas, excepto la estrategia de pensamiento crítico y creativo.

Palabras clave: *estrategias de aprendizaje, rendimiento en matemáticas, escuela rural, educación primaria*

Abstract

Today's society is based on science and technology, relying heavily on mathematics. The aim of this study was to examine the relationship between learning strategies and academic performance in rural students. A convenience sample of 199 students participating in a STEM experimentation programme from rural schools was analysed. The instrument used was the CEA questionnaire of learning strategies. The results obtained for the total sample and disaggregated for boys and girls are shown, and it is found that the use of the strategies is similar in boys and girls, and that the use of these strategies is higher in the students with better performance in mathematics, except for the strategy of critical and creative thinking.

Keywords: *learning strategies, mathematics achievement, rural school, primary education.*

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son un campo clave en el crecimiento de la sociedad del siglo XXI, debido a que cada vez más en la vida cotidiana se depende de la tecnología. En este sentido, Zamorano et al. (2018), Sánchez (2019), y Ojeda y Agüero (2019) sostienen que el siglo XXI se caracteriza por grandes transformaciones estrechamente relacionadas con la tecnología y la ciencia, tal como se evidencia en la actualidad con la inteligencia artificial, la automatización, la hiperconectividad, la robótica o la micro fabricación digital. Tanto el desarrollo científico como tecnológico camina de la mano de las matemáticas, pues utiliza su lenguaje entre otras cosas, por lo que la gestión de la pedagogía empleada con esta materia se hace crucial para los futuros ciudadanos.

Jiménez-Alcázar, A., Solano-Pinto, N. y Fernández-Cézar, R. (2023). Estrategias de aprendizaje y rendimiento en matemáticas en alumnado de escuelas rurales: estado inicial en un proyecto STEM. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 299–306). SEIEM.

En este trabajo se presenta un análisis diagnóstico de la situación realizado dentro de un proyecto STEM que lleva la experimentación y el método científico a las escuelas rurales de la mano de científicos y científicas en activo. Este proyecto se inicia ofertándolo a los centros rurales a través del Centro Regional de Formación del Profesorado de Castilla La-Mancha, que voluntariamente deciden participar, implicándose mediante un compromiso de participación. A cada centro se le asignan unos tutores científicos equilibrados en su composición por géneros, que diseñan una guía para el docente basada en la experimentación sobre una temática científico-matemática (STEM) elegida de acuerdo con el centro. Esta se desarrolla durante dos meses en el segundo trimestre del curso, y se inicia con una visita de los investigadores al centro escolar, con la cual se arranca el proyecto de experimentación que se desarrollará en la clase con los maestros y maestras a cargo de las materias científicas. Estos siempre tienen el apoyo de los científicos y científicas para cualquier duda que les pueda surgir. El segundo contacto consiste en la visita que los colegios rurales realizan a los centros de investigación, y la experiencia termina con la visita de los investigadores a la escuela. Para determinar el impacto del proyecto se medirán variables que indiquen la actitud y motivación del alumnado hacia las STEM, las estrategias de aprendizaje que emplean los alumnos, y su rendimiento en matemáticas y ciencias, asignaturas STEM en la etapa de Educación Primaria, tanto al iniciar como al concluir el mismo, así como la visión que el profesorado implicado tiene del proyecto.

En este trabajo se presentan parte de los resultados, a saber, las estrategias de aprendizaje del alumnado participante y su posible relación con el rendimiento en matemáticas en el punto de inicio del proyecto.

1.1 Marco teórico

El enfoque pedagógico STEM, acrónimo que responde a las siglas en inglés de las disciplinas académicas ciencia, tecnología, ingeniería y matemática, promueve el aprendizaje desde el desarrollo del individuo en sociedad, con una raíz epistemológica en el constructivismo social, y se implementa de diferentes maneras según se reporta en la literatura (Rahman et al., 2021; Thibaut et al., 2018), contribuyendo estas experiencias también al desarrollo de elementos del currículo de matemáticas de las etapas preuniversitarias, según informan Diego-Mantecón et al. (2021). Este enfoque, promueve una enseñanza dinámica, contextualizada, sistémica e interdisciplinaria, integradora de estas cuatro áreas del saber, promoviendo así un conocimiento integrado e integral, en el que el sujeto construye su aprendizaje de manera activa (Sánchez, 2019). Además, la revisión realizada por Rahman et al. (2021) desde el punto de vista del docente de matemáticas reconoce que todas las prácticas STEM eficientes que se documentan en la literatura comparten algunos elementos comunes, entre los que se encuentran las conocidas como competencias transversales necesarias para el siglo XXI, como son el desarrollo del pensamiento crítico, la resolución de problemas, la creatividad, la comunicación y la colaboración. Por lo tanto, se encontrarían en línea con las subcompetencias reconocidas dentro de la competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería recogida en la nueva ley educativa española (LOMLOE).

Las funciones ejecutivas (FE) son las capacidades para formular objetivos, planear y llevar a cabo estrategias, y son esenciales para el desarrollo de un comportamiento personal autónomo, independiente, creativo y socialmente constructivo (Lezak, 1982). Tanto el pensamiento crítico como la resolución de problemas, la flexibilidad cognitiva como parte de la creatividad, son considerados también como procesos cognitivos que se ponen en juego y son controlados por las funciones ejecutivas, constituidas por el sistema inhibitorio conductual y la autorregulación (Hofman et al., 2012), siendo estrategias que el estudiante pone en juego en su aprendizaje. Por ello constituyen lo que se llaman estrategias de aprendizaje (Beltrán, 1993). Este autor incluye las estrategias de aprendizaje como una materialización de la asimilación de los contenidos y procesos, o desarrollo de las competencias por parte de los aprendices. Por esa razón, no solo se consideran en las estrategias puestas en juego los aspectos emocionales y metacognitivos sino también el pensamiento crítico y creativo, necesario para desarrollar la competencia matemática (Beltrán et al., 2006). El pensamiento

crítico y creativo es considerado como una estrategia de orden superior (Forehand, 2010) relacionada con la solución de problemas y con el desarrollo de la competencia matemática (Brunkalla, 2009; Hydayat et al., 2017). Además, existen algunos artículos empíricos en los que se aporta relación entre el pensamiento creativo y el rendimiento en matemáticas, de manera que aquellos que tienen más alto rendimiento hacen uso de esta estrategia en mayor medida (Liu et al., 2015; Fernández-Cézar et al., 2021). Pero estos estudios no se han realizado con población rural.

Siguiendo con las matemáticas, el éxito o fracaso parece ser un filtro académico crítico en la trayectoria educativa de los estudiantes (Chiu et al., 2010). En los sistemas educativos en general las maestras y maestros asignan una puntuación al estudiantado en las distintas asignaturas, según su rendimiento. Esto sucede también en matemáticas, y se conoce como rendimiento matemático. Aunque en el caso de estudiantes para maestro y otra población adulta el rendimiento en matemáticas puede tomarse como resultado de una prueba externa o de competencia (Artero y Checa, 2019; Gómezescobar y Fernández-Cézar, 2022), con alumnado no universitario es habitual tomar las notas de los maestros en la asignatura para indicar su rendimiento (Vázquez y de la Torre Fernández, 2009; Fernández-Cézar et al., 2021; Núñez et al., 2020). El rendimiento en matemáticas dependerá del tipo de prueba empleado por el docente, aunque normalmente el rendimiento refleja comportamientos, habilidades y conocimientos de los estudiantes, valorando también las estrategias que estos ponen en juego, y el conocimiento que movilizan, pues valora el nivel de los contenidos y los procesos desde el punto de vista cognitivo (Algarabel et al., 2001). Esta manera de evaluar está impregnada de las ideas de éxito y fracaso educativo típicamente medido a partir de los parámetros de la cultura occidental, mayoritariamente urbana (Guo et al., 2020), sin tener en cuenta los aspectos sociodemográficos y culturales que podrían afectarle, tanto a la cualidad de la evaluación como a las circunstancias en las que se desenvuelve el alumnado, que afectan también a su rendimiento académico (Cervini et al., 2016). Se añade a esta falta de consideración del contexto del estudiante que los programas educativos en ámbitos STEM están desarrollados de manera normalizada y estandarizada que afecta negativamente a los estudiantes que crecen en entornos rurales. Este estudiantado rara vez encuentra que las actividades de su día a día aparezcan valorizadas en las clases de ciencias (Lyons et al, 2012), y tienen ciertas dudas de que en ellas estén involucrados los conocimientos científico-matemáticos que estudian en la escuela, a pesar de que la mayoría de las tareas que realizan fuera de ella, ayudando en sus casas o negocios familiares, son principalmente tareas STEM, como son la ingeniería mecánica o las ciencias agrarias (Stahl et al., 2019), en las que también existe gran presencia de las matemáticas.

En los entornos rurales, los modelos para hombres y mujeres están bastante distanciados, con marcados roles de género. Estos estereotipos sociales, así como las expectativas familiares, han sido considerados los causantes de la brecha de género en el rendimiento a favor de los chicos en China y en Estados Unidos (Tsui, 2007; Zhu et al., 2018). Sin embargo, la posible influencia del sexo en el rendimiento en matemáticas en escuelas rurales en España no ha sido estudiada.

Dado que es reconocido en la literatura que el rendimiento en matemáticas se ve afectado de manera positiva por los proyectos STEM (Siregar et al., 2019), pero que este hecho no se ha comprobado específicamente en colegios rurales, se considera pertinente el desarrollo de proyectos STEM en estos centros, con el fin de contribuir a una educación de calidad para todos, sin sesgo de género (DOS-UN), y dinamizar esas escuelas, a la vez que, con el estudio de los participantes, se puede conocer más sobre las actitudes hacia las STEM y las estrategias de aprendizaje empleadas por el alumnado participante, y en qué medida influyen en su rendimiento en matemáticas.

Para poder determinar el efecto del proyecto STEM en la muestra de estudio, es necesario conocer el punto de partida. Por ello, el objetivo de este trabajo es explorar en ese punto de partida las estrategias de aprendizaje empleadas por el alumnado rural, su posible relación con el rendimiento en matemáticas, y si este es distinto en chicos y chicas.

2. MATERIAL Y MÉTODOS

Se ha empleado una investigación exploratoria e inferencial para el estudio de las posibles relaciones entre las variables de estudio, que son estrategias de aprendizaje, y rendimiento académico.

2.1. Participantes

La muestra está formada por 199 estudiantes, 89 niñas (44,7%) y 110 niños (55,3%), matriculados en las 10 escuelas rurales de una región del centro de España que han participado en el proyecto "Las científicas y los científicos van al cole" durante los cursos 2021-2022 y 2022-2023, financiados por la FECYT.

Las escuelas rurales involucradas deciden participar de manera voluntaria después de realizar una reunión informativa con el centro regional de formación del profesorado de Castilla-La Mancha, como se indicó en párrafos previos. Estos centros educativos tienen una organización de colegio rural agrupado, CRA, y pertenecían a la región de Castilla-La Mancha. El alumnado pertenecía a la etapa de Educación Primaria, con edades comprendidas entre los 7 y los 13 años (10,19 ± 1,20).

2.2. Instrumentos

Se ha empleado el cuestionario Estrategias de aprendizaje CEA (Beltrán et al., 2006), quienes estudiaron sus propiedades psicométricas para niños entre 12 y 16 años. En el cuestionario original se identifican cuatro factores con distintas subescalas. Las preguntas se evaluaron con una escala tipo Likert de cinco puntos, indicando frecuencias desde 1 (nunca) a 5 (siempre). Por su relación con el aprendizaje integrado STEM, en este trabajo se han utilizado las siguientes subescalas: estrategias de control emocional, formada por la suma de 5 ítems con valor mínimo desde 5 y máximo de 25; estrategias de pensamiento crítico y creativo, compuesto por la suma de 11 ítems con valor mínimo de 11 y máximo de 55; estrategias metacognitivas de planificación/evaluación, compuesta por 7 ítems con valores entre 7 y 35; y estrategias metacognitivas de regulación, donde se acumulan 4 ítems y toma valores entre 4 y 20. La consistencia interna del instrumento en la muestra de estudio medida mediante el coeficiente alfa de Cronbach fue de .795, que se puede considerar alta (Montgomery y Runger, 2010) para las ciencias sociales.

Los datos demográficos y los niveles de rendimiento fueron facilitados por los maestros de los alumnos participantes. En rendimiento aportados tendrá valores entre 0 y 10, siguiendo el sistema de calificación español, aunque se recodifican en tres categorías, como se indica posteriormente.

2.3. Procedimiento

Los cuestionarios se pasaron a los colegios mediante formularios en línea para facilitar y agilizar su cumplimentación. El maestro o maestra asignó un código a cada estudiante para garantizar el anonimato de los participantes. Todos los estudiantes y sus familias dieron su consentimiento informado. El procedimiento está aprobado por el comité de ética en la investigación social de la Universidad de Castilla La Mancha, con código CEIS-691069-X2F2

2.4. Análisis de datos.

Para la realización del análisis se ha utilizado el software estadístico SPSS versión 28. Se toman como variables numéricas las subescalas usadas para las estrategias de aprendizaje, mientras que el rendimiento en matemáticas se toma como variable categórica ordinal, asignando las calificaciones de rendimiento bajo a los alumnos con insuficiente (<5), medio a los alumnos que obtuvieron suficiente y bien (5≤x<7), y alto a los alumnos que sacaron notable y sobresaliente (7≤x≤10). Se analizan los valores para la muestra total, y desagregados por sexos.

Se analiza la normalidad de las escalas de estrategias de aprendizaje, mediante las pruebas de normalidad Kolmogorov-Smirnov se han obtenido los siguientes resultados: Control emocional (Z=.068. p=.025), pensamiento crítico y creativo (Z=.082. p=.003), planificación/evaluación

(Z=.121. p<.001) y regulación (Z=.088. p=0.001), por lo que se utilizan pruebas inferenciales no paramétricas para el análisis de la diferencia de medias.

3. RESULTADOS

Las medias y desviaciones típicas para las diferentes estrategias de aprendizaje para la muestra total, y desagregada por sexo, están presentadas en la Tabla 1.

Tabla 1. Diferentes estrategias de aprendizaje

	Todos	Chicos	Chicas	Prueba de Mann-Whitney	
Estrategias de aprendizaje	*M (DT)*	*M (DT)*	*M (DT)*	*U*	*p-valor*
Control emocional	17.3 (3.9)	17.2 (4.1)	17.6 (3.7)	4639.0	.525
Pensamiento crítico y creativo	41.3 (6.6)	41.5 (6.6)	41.0 (6.6)	4803.0	.820
Metacognición: Planificación y evaluación:	26.5 (4.3)	26.5 (4.3)	26.6 (4.3)	4832.0	.876
Metacognición: Regulación	13.5 (3.6)	13.0 (3.5)	14.2 (3.7)	4006.5	.027

Las escalas muestran valores medios similares en la muestra total y en las submuestras de chicos y chicas, siendo estos un porcentaje superior al 65% del valor máximo posible en todos los casos, ya que supone el 68% para el control emocional, el 74% para el pensamiento crítico y creativo, el 77% para la metacognición: planificación y evaluación, y entre el 65 y el 70% para metacognición: regulación, comparando chicos y chicas que tienen los valores medios menor y mayor respectivamente. Las escalas muestran valores similares para la muestra total y para chicos y chicas separados. Sin embargo, en la estrategia de metacognición: regulación, las chicas muestran un valor más alto, siendo esta la estrategia que apunta diferencias estadísticas significativas. Respecto a los valores de dispersión, son similares, en este caso en todas las escalas, tanto para la muestra total como para la separada por sexos.

Las frecuencias relativas y absolutas para las 3 categorías de rendimiento académico para la muestra total, y para las submuestras de chicos y chicas se pueden observar en la Tabla 2.

Tabla 2. Frecuencias relativas y absolutas para las 3 categorías de rendimiento académico

	Todos	Chicos	Chicas
Rendimiento académico	*F (%)*	*F (%)*	*F (%)*
Bajo	19 (9.5)	13 (11.8)	6 (6.7)
Medio	53 (26.6)	38 (34.5)	15 (16.9)
Alto	127 (63.8)	59 (53.6)	68 (76.4)

De nuevo, aunque tanto en la muestra total como en la separada por sexos aparecen menores frecuencias en la categoría de rendimiento bajo, seguida de la de medio y la de alto, en el caso de las chicas hay casi la mitad en la categoría de rendimiento bajo que en el de los chicos, ocurriendo lo mismo en la de rendimiento medio, y siendo superior el porcentaje, por lo tanto, de chicas en la de rendimiento alto. En cuanto a la posible relación entre las estrategias de aprendizaje analizadas y el rendimiento en matemáticas, se hallan diferencias significativas entre las puntuaciones obtenidas para las diferentes subescalas de las estrategias de aprendizaje y los distintos rendimientos académicos, excepto para la estrategia de pensamiento crítico y creativo que se pueden considerar medias iguales para los participantes que demuestran distintos rendimientos (ver Tabla 3).

En las puntuaciones medias obtenidas para la estrategia del control emocional se puede observar que los estudiantes que tienen mejor rendimiento también hacen un uso más intenso de esta estrategia, indicado el uso por el valor medio de la escala en cada una de las categorías (M_{bajo}=14.0; M_{medio}=16.5; M_{alto}=18.2). Esto es, a mayor rendimiento, mayor uso hacen los alumnos de esta estrategia, ya que se puede considerar que hay diferencia de medias entre los distintos rendimientos (H=22.06, p<.001).

En el caso de la subescala metacognición: planificación y evaluación, ocurre algo similar, que los estudiantes con mejor rendimiento hacen también un uso mayor de esta estrategia, indicado por las medias de la escala para cada categoría (M_{bajo}=24.8; M_{medio}=25.5; M_{alto}=26.5). Se puede considerar que la diferencia de medias es significativa para los distintos rendimientos (H=11.73, *p*=.003) para un nivel de significación de .05.

También para la subescala metacognición: regulación, los estudiantes que tienen mayor rendimiento hacen un mayor uso de ella (M_{bajo}=11.5; M_{medio}=13.2; M_{alto}=14.0), dado que hay diferencia de medias entre las puntuaciones obtenidas para los diferentes niveles de rendimiento (H=8.33, *p*=.016).

Tabla 3. Relaciones entre estrategias de aprendizaje y rendimiento académico.

	Bajo	Medio	Alto	Prueba de Kruskal-Wallis	
Estrategias de aprendizaje	*M (DT)*	*M (DT)*	*M (DT)*	*H*	*p-valor*
Control emocional	14.0 (4.3)	16.5 (3.5)	18.2 (3.7)	22.06	<.001
Pensamiento crítico y creativo	40.4 (6.2)	40.2 (6.3)	41.9 (6.7)	3.73	.155
Metacognición: Planificación y evaluación:	24.8 (4.3)	25.5 (4.3)	26.5 (4.1)	11.73	.003
Metacognición: Regulación	11.5 (2.8)	13.2 (3.8)	14.0 (3.6)	8.33	.016

Sin embargo, la estrategia de pensamiento crítico y creativo es usada en igual medida independientemente del rendimiento matemático de los participantes.

4. DISCUSIÓN

El objetivo principal de este estudio era explorar el uso que el alumnado rural hace de las estrategias de aprendizaje y si existe relación con el rendimiento académico en matemáticas en chicas y chicos de entorno rural. Para este fin, se analizó la muestra de conveniencia de 199 estudiantes que participaron en un proyecto de experimentación STEM en escuelas rurales. Los estudios previos señalan que podría haber relación entre las variables afectivas, cognitivas y conductuales y el rendimiento en matemáticas (Jansen et al., 2016; Parker et al., 2014).

En este trabajo se encuentra que las estrategias de aprendizaje de control emocional, pensamiento crítico y creativo y de metacognición: planificación y evaluación son empleadas de manera similar por chicos y chicas, no encontrándose diferencias estadísticamente significativas por sexo. Sin embargo, si se hallan diferencias en el uso de las estrategias de metacognición relacionadas con la regulación resultando que las chicas parece que hacen uso en mayor medida. Esta podría ser la razón que justifique el hecho que encontramos de que el porcentaje de las chicas en la categoría de rendimiento alto es superior al de los chicos.

En cuanto a los valores medios de las estrategias de aprendizaje son más altos cuanto más alto es el rendimiento, es decir, que en el alumnado de mejor rendimiento las estrategias de control emocional, planificación, evaluación y regulación se emplean en mayor medida. Esta relación no se da en el caso concreto del pensamiento crítico y creativo, estrategia para la que no hay una diferencia de medias significativa, resultado que contrasta con los encontrado por Fernández-Cézar et al. (2021), que encuentran que el uso del pensamiento crítico y creativo aumenta la probabilidad de éxito en matemáticas, o el de Liu et al. (2015) que encuentran también asociación entre el rendimiento y esa estrategia. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estos estudios no se han realizado con participantes de entornos rurales.

Estas estrategias de control emocional pueden actuar haciendo que el alumnado maneje sus emociones respecto de las matemáticas, permitiendo ese control que realizan movilizar sus conocimientos y tener buenos resultados en la materia. Lo mismo se observa en las estrategias de metacognición, en las que el estudiante piensa sobre su propio aprendizaje planificándolo y evaluándolo, y también autorregulándolo. Todo este manejo de las emociones les permite tener un mejor control de sus funciones ejecutivas, lo cual contribuye a promover la resolución de problemas,

la creatividad, la comunicación y la colaboración, es decir, las competencias reconocidas como fundamentales en el siglo XXI (Rahman et al., 2021).

Una limitación de este trabajo sería solo se han analizado las variables de estrategias de aprendizaje y rendimiento en matemáticas, y quedaría, para tener una imagen completa del diagnóstico de la muestra, disponer de los resultados sobre las otras variables afectivas recogidas, actitudes hacia las STEM. Además, sería interesante para determinar la efectividad del proyecto STEM, analizar los valores de las mismas variables tras la participación en el mismo, con el fin de comprobar si se alinean con lo hallado en el metaanálisis de Siregar et al. (2019), que encuentran una influencia positiva en el rendimiento en matemáticas de los proyectos STEM. Además, quedaría por estudiar si esa mayor regulación en las chicas puede ser la razón que las lleva a tener un rendimiento en matemáticas más alto, como parece deducirse de la tendencia con la muestra total (a mayor uso de la regulación, mejor resultado en el rendimiento en matemáticas).

Referencias

Algarabel, S.; Dasi, C. (2001) The Definition of Achievement and the Construction of Tests for Its Measurement: A review of the Main Trends. *Psicologica, 22*, 43–66.

Artero, R. N. M., y Checa, A. N. (2019). ¿A mayor ansiedad menor rendimiento en matemáticas? En XXXXX *Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 453-462).* Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Beltrán, J. (1993). *Procesos*, *Estrategias y Técnicas de Aprendizaje*; Síntesis.

Beltrán, J., Pérez, L. F., y Ortega, M. I. (2006). CEA. Cuestionario de estrategias de aprendizaje. *TEA*.

Brunkalla, K. (2009). How to increase mathematical creativity-An experiment. *The Mathematics Enthusiast, 6(1)*, 257-266. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1148

Cervini, R., Dari, N., y Quiroz, S. (2016). Las determinaciones socioeconómicas sobre la distribución de los aprendizajes escolares. Los datos del TERCE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 14(4),* 61-79. https://doi.org/10.15366/reice2016.14.4.003

Chiu, M.M., Klassen, R.M. (2010). Relations of mathematics self-concept and its calibration with mathematics achievement: Cultural differences among fifteen-year-olds in 34 countries. *Learn and Instruction 20*, 2–17. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.11.002

Diego-Mantecon, J. M., Prodromou, T., Lavicza, Z., Blanco, T. F., y Ortiz-Laso, Z. (2021). An attempt to evaluate STEAM project-based instruction from a school mathematics perspective. *ZDM–Mathematics Education, 53(5),* 1137-1148. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01303-9

Fernández-Cézar, R., Solano-Pinto, N., y Garrido, D. (2021). Can mathematics achievement be predicted? The role of cognitive–behavioral–emotional variables. *Mathematics, 9(14),* 1591. https://doi.org/10.3390/math9141591

Forehand, M. (2010). Bloom's taxonomy. *Emerging perspectives on learning, teaching, and technology, 41(4),* 47-56.

Gómezescobar, A., y Fernández-Cézar, R. (2022). Conocimientos matemáticos elementales: futuros docentes y alumnado de Educación Primaria. *Revista Fuentes, 24(3)*, 312–322. https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2022.20695

Guo, M.; Leung, F.K. (2020). Achievement goal orientations, learning strategies, and mathematics achievement: A comparison of chinese Miao and Han students. *Psychology in the Schools, 58*, 107–123. https://doi.org/10.1002/pits.22424

Hidayat, D., Nurlaelah, E., y Dahlan, J. A. (2017). Rigorous mathematical thinking approach to enhance students' mathematical creative and critical thinking abilities. *In Journal of Physics: Conference Series, 895(1)*, 012087. https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012087

Hofmann, W., Schmeichel, B. J., y Baddeley, A. D. (2012). Executive functions and self-regulation. *Trends in cognitive sciences, 16(3),* 174-180. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.01.006

Jansen, B.R.; Schmitz, E.A.; Van der Maas, H.L. (2016). Affective and motivational factors mediate the relation between math skills and use of math in everyday life. *Frontiers in Psychology, 7*, 481–513. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00513

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340, de 30 de diciembre de 2020.* https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Lezak, M. D. (1982). The problem of assessing executive functions. *International journal of Psychology, 17(1-4),* 281-297. https://doi.org/10.1080/00207598208247445

Liu, Z. K., He, J., y Li, B. (2015). Critical and creative thinking as learning processes at top-ranking Chinese middle schools: possibilities and required improvements. *High Ability Studies, 26(1),* 139-152. https://doi.org/10.1080/13598139.2015.1015501

Lyons, T., y Quinn, F. (2012). Rural high school students' attitudes towards school science. *Australian and International Journal of Rural Education, 22(2)*, 21–28.

Montgomery, D. C., y Runger, G. C. (2010). Applied Statistics and Probability for Engineers. Wiley & Sons.

Núñez, R.P., Fernández-Cézar, R., y Suarez, C.A. (2020). A model of structural equations of possible factors that cause poor academic performance in mathematics. *Espacios, 41(11 (2020)),* 1-9.

Ojeda, R. y Agüero, F. (2019). Globalización, Agenda 2030 e imperativo de la educación superior: reflexiones. *Conrado, 15(67),* 125-134.

Parker, P.D., Marsh, H.W., Ciarrochi, J., Marshall, S., Abduljabbar, A.S. (2014). Juxtaposing math self-efficacy and self-concept as predictors of long-term achievement outcomes. *Educ. Psychol, 34,* 29–48.

Rahman, N. A., Rosli, R., Rambely, A. S., y Halim, L. (2021). Mathematics teachers' practices of STEM education: A systematic literature review. *European Journal of Educational Research, 10(3),* 1541-1559. https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1541

Sánchez, E. (2019). La educación STEAM y la cultura Maker. *Padres y Maestros, 379, 45-51.* https://doi.org/10.14422/pym.i379.y2019.008

Siregar, N. C., Rosli, R., Maat, S. M., y Capraro, M. M. (2019). The effect of science, technology, engineering and mathematics (STEM) program on students' achievement in mathematics: A meta-analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1), em0549.

Stahl, G., Scholes, L., McDonald, S., y Lunn, J. (2019). Middle years students' engagement with science in rural and urban communities in Australia: Exploring science capital, place-based knowledges and familial relationships. *Pedagogy, Culture and Society, 29(1),* 1–18. https://doi.org/10.1080/14681366.2019.1684351

Thibaut, L., Ceuppens, S., De Loof, H., De Meester, J., Goovaerts, L., Struyf, A., ... y Depaepe, F. (2018). Integrated STEM education: A systematic review of instructional practices in secondary education. *European Journal of STEM Education, 3(1),* 2. https://doi.org/10.20897/ejsteme/85525

Tsui, M. (2007). Gender and mathematics achievement in China and the USA. *Gend. Issues, 24,* 1–11.

Zamorano, T., García, Y. y Reyes, D. (2018). Educación para el sujeto del siglo XXI: principales características del enfoque STEAM desde la mirada educacional. *Contextos: Estudios de Humanidades y Ciencias Sociales, (41).* Recuperado de: http://revistas.umce.cl/index.php/contextos/article/view/1395

Zhu, Y., Kaiser, G., y Cai, J. (2018). Gender equity in mathematical achievement: The case of China. *Educational Studies in Mathematics, 99, 245-260.* https://doi.org/10.1007/s10649-018-9846-z

FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA QUE MUESTRAN FUTURAS MAESTRAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL ORDENAR FRACCIONES[1]

Mathematical flexibility: exploring prospective primary school teachers' strategies and representations to order fractions

Cid-Cid, A.[a], Joglar-Prieto, N.[b], Escudero-Ávila, D.[b] y Flores-Medrano, E.[b],

[a]Universidad Rey Juan Carlos, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones representa un reto para estudiantes y profesores de Educación Primaria por las características propias del concepto y la variedad de significados asociados a la fracción. En este sentido, consideramos interesante explorar los procesos que siguen cinco futuras maestras, para comparar fracciones propias y reflexionar sobre la idea de equivalencia, analizando la Flexibilidad Procedimental y la Flexibilidad Representacional que puedan mostrar en tareas de comparación y ordenación de fracciones, a través de situaciones creadas para fomentar las actitudes positivas hacia las matemáticas en un contexto manipulativo y lúdico. La exploración de estos procesos de resolución y reflexiones sobre el tipo de pensamiento que tienen estas futuras maestras nos ha proporcionado información base para la generación de mejores tareas para la formación inicial.

Palabras clave: *flexibilidad procedimental, flexibilidad representacional, formación inicial, fracciones*

Abstract

The teaching and learning of fractions represents a challenge for students and teachers in Primary Education due to the characteristics of the concept and the variety of meanings associated with the idea of fraction. In this sense, it seems adequate and interesting to explore the processes followed by five future primary school teachers when they compare fractions and reflect on the idea of fraction equivalence. We will analyze how the Procedural Flexibility and the Representational Flexibility is developed while they work in tasks of comparing and ordering fractions, through situations created to encourage positive attitudes towards mathematics in a manipulative and recreational context. The exploration of these resolution processes and reflections on the type of thinking that these future teachers use have provided us with basic information for the generation of better tasks for initial mathematics teacher training.

Keywords: *procedural flexibility, representational flexibility, pre-service teacher training, fractions*

INTRODUCCIÓN

Recientes estudios apuntan a la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento matemático flexible (tanto procedimental como representacionalmente), en el aula de Educación Primaria y Secundaria en España (Star et al., 2022). Para que un maestro sea capaz de promover y valorar esta

1 Esta investigación forma parte de un proyecto de investigación financiado por la Unión Europea - NextGeneration, EU, en el marco de las becas María Zambrano 2022-2024 y por la Red Iberoamericana MTSK perteneciente a las redes de investigación AUIP

Cid-Cid, A., Joglar-Prieto, N., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano, E. (2023). Flexibilidad matemática que muestran futuras maestras de educación primaria al ordenar fracciones. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 307–314). SEIEM.

flexibilidad en el aula, requiere también de un conocimiento profundo sobre este constructo y sobre el papel crucial que juega en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

En esta comunicación se presentan los resultados de la primera parte de una investigación cuyo objetivo principal es describir y comprender la flexibilidad procedimental y representacional que evidencian cinco futuras maestras de Educación Primaria (FMEP) cuando abordan una tarea de comparación de fracciones, a través de situaciones creadas para fomentar las actitudes positivas hacia las matemáticas en un contexto manipulativo y lúdico diseñadas por la Red de Enseñanza Creativa de las matemáticas (RECREA Matemáticas[i]).

En este sentido mostraremos una reflexión sobre los resultados de un estudio exploratorio que consistió en la implementación de la primera versión de una propuesta de tarea formativa, y describiremos los procesos de resolución que se han identificado en la actividad, así como el potencial que tiene esta para desarrollar la flexibilidad procedimental y representacional en FMEP.

REFERENTES TEÓRICOS

Entender y saber usar las fracciones es fundamental, tanto para adquirir conocimientos matemáticos más avanzados, como para interpretar y resolver muchas situaciones problemáticas de la vida cotidiana (Fazio y Sigler, 2011). Sin embargo, su aprendizaje y enseñanza presenta importantes retos, por lo que ha sido uno de los contenidos matemáticos de Educación Primaria más investigados (Lortie-Forgues et al., 2015). Recientemente, varios autores han puesto el foco en la identificación y caracterización de los diferentes aspectos del conocimiento especializado que necesitan los maestros para enseñar fracciones (González-Forte et al., 2018).

Las fracciones tienen distintos significados dependiendo del contexto y los fenómenos o aplicaciones a las cuales están ligadas: como una relación parte-todo (en contextos continuos y discretos), como medida, como cociente, como razón y como operador (Moriel-Junior y Reyes, 2022) y todas estas se deben abordar en el proceso de enseñanza y aprendizaje para conseguir una comprensión amplia y profunda de las ideas relacionadas con el concepto de fracción (Lamon, 2020). Desde el punto de vista de la enseñanza, no es posible aislar cada una de las interpretaciones y hay estudios que sugieren que la interpretación parte-todo constituye la base sobre la que se desarrollan las demás (Llinares y Sánchez, 1997).

En la literatura podemos encontrar evidencias de dificultades que los estudiantes pueden tener cuando estudian fracciones, por ejemplo: a veces no son capaces de identificar las diferentes interpretaciones cuando se trabaja en distintos contextos y en otras de entender que existen múltiples representaciones de la misma cantidad, o intentan extender el razonamiento y propiedades de los números enteros a los racionales (Siegler et al., 2013), así como dificultades asociadas a la noción y naturaleza de la unidad. También se reportan dificultades para entender que en la recta real un único número entero se coloca en una posición, pero si se consideran fracciones, múltiples fracciones pueden tener el mismo valor y situarse en el mismo punto de la recta (Ni y Zhou, 2005).

En el contexto de formación inicial del profesorado de Matemáticas, distintas investigaciones señalan que los futuros maestros suelen presentar dificultades muy similares a las que presentan los estudiantes respecto del contenido matemático escolar de las fracciones (Rojas et al., 2013), lo cual dificulta el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos asociados al mismo.

Según autores como Lesh (1997) y Schneider y colegas (2011), la comprensión de un concepto matemático se alcanza en profundidad cuando se es capaz de resolver un problema poniendo en juego conocimientos matemáticos utilizando varias estrategias, diferentes sistemas de representación y de convertir con fluidez una estrategia en otra, comparando y valorando en paralelo los elementos y las ventajas de cada una. Sin embargo, en la matemática escolar en España parece que, en general, esta riqueza de estrategias y representaciones no juega el papel central que se merece. Con demasiada frecuencia los estudiantes resuelven problemas automáticamente usando una única estrategia en el

registro simbólico guiados por su profesor quien justifica esta decisión en la necesidad de no confundir a sus estudiantes y de minimizar la aparición de errores (Star et al., 2022). En este sentido, consideramos interesante implementar tareas que permitan a los FMEP explorar distintos procesos de resolución de un problema matemático usando diferentes representaciones, es decir, tareas que promuevan el desarrollo de la flexibilidad matemática en la formación inicial, en especial de temas que tienen dificultad como son las fracciones.

En esta comunicación consideramos la flexibilidad matemática desde dos perspectivas. Por un lado, hablaremos de *flexibilidad procedimental* (FP) entendida como la capacidad de una persona de producir diferentes estrategias para resolver un problema dentro de un sistema de representación y ser capaz de distinguir la más eficaz ante un problema concreto (Rittle-Johnson y Star, 2007). Por otro lado, hablaremos de *flexibilidad representacional* (FR) entendida como la capacidad de una persona de usar varios sistemas de representación en paralelo para representar, no solamente el resultado del problema que aborda, sino también el procedimiento o la estrategia seguida, siendo capaz de comparar en ambos sentidos dichas representaciones (Lesh, 1997).

En lo que se refiere a las representaciones de fracciones, adaptando levemente el Modelo de Lesh (1997) consideramos cinco sistemas de representación: el sistema simbólico-numérico (SN), el sistema icónico-gráfico (IG), el sistema manipulativo (M), el sistema de la situación real (SR) y el sistema de la lengua natural oral o escrita (LN). Especialmente importantes en la etapa de primaria (cuando se está haciendo un primer acercamiento a la idea de fracción) son el registro M (que facilita a los alumnos una interacción), el IG y el registro LN. Es claro que no es adecuado en esta etapa priorizar exclusivamente el trabajo a nivel simbólico, aunque no hay que perder de vista la secuenciación adecuada del uso y conversiones de sistemas de representación para facilitar el proceso de abstracción yendo de representaciones concretas a representaciones más abstractas, perdiendo la vinculación con el contexto del problema en dirección hacia la generalización.

A partir de estos referentes hemos identificado y caracterizado las diferentes estrategias y los distintos sistemas de representación que usan en paralelo las cinco futuras maestras cuando ordenan fracciones, así como el tipo de flexibilidad que evidencian en sus procedimientos de resolución de la tarea. En este sentido, se han explorado si estrategias para comparar fracciones como: la posición relativa respecto a la unidad o a ½ en el caso de fracciones propias, la igualación de denominadores (para comparar numeradores como naturales), la conversión a decimales, o la ubicación en una recta numerada surgen durante la resolución de la tarea y si lo hacen de manera *espontánea* por la consigna que tiene la tarea o *inducida* por la interacción de las FMEP con la guía de la actividad.

METODOLOGÍA

Debido a que nuestro objetivo fue comprender las estrategias de las FMEP para generar una tarea formativa que sirva para el desarrollo de conocimientos y habilidades específicas sobre fracciones y su didáctica, el proyecto se ha concebido bajo el marco de investigación de diseño (Molina, 2021). En este sentido, los resultados que mostramos corresponden a un primer microciclo que se ha desarrollado en las tres fases que deben tener este tipo de estudios: preparación y diseño, implementación/intervención y análisis retrospectivo.

Las tareas propuestas a las FMEP corresponden a una adaptación de la situación “La Densidad del Dominó” (Alvarado et al., 2018), la cual es una actividad creada con el objetivo principal de favorecer la creatividad y mejorar la percepción de los estudiantes de primaria hacia las matemáticas, para mejorar la relación socioemocional que se tiene con esta asignatura.

En la fase inicial del proyecto de investigación, un grupo de 6 investigadoras e investigadores hemos realizado una adaptación de la situación para usarla como una tarea que pudiera promover en las FMEP la exploración de distintos procedimientos de ordenación de fracciones y la reflexión sobre la variedad de estrategias y representaciones que pueden estar implicados en una tarea como esta. Los

cambios fueron mínimos en tanto que se utilizaron las consignas de las tareas originales (ver Tabla 1). Además, se incorporó a la actividad el uso de una caja con materiales didácticos que pueden utilizarse para representar fracciones y que se consideraba que podrían servir para inducir nuevas estrategias y así promover la flexibilidad a lo largo de la actividad (calculadora, regletas *Cuisenaire*, cubos *Multilink*, bandas plastificadas, rotuladores y reglas graduadas).

Tabla 1. Actividades, tareas y consignas utilizadas en la situación con las FMEP.

	Consigna de la tarea
Actividad (A) 1: El orden del dominó	Tarea (T)1.1. Selecciona 10 fichas de dominó (base 6) y ordénalas de menor a mayor
	T1.2. Ordena de forma diferente las mismas fichas y compara todas las estrategias que han aparecido
A 2: Las fichas de dominó como representación de fracciones	T2.1. Ordena de menor a mayor las mismas fichas considerándolas como fracciones. Reflexión
	T2.2. Ordena las 10 fichas utilizando otra estrategia diferente. Desde este momento cuentas con una caja de materiales didácticos
A 3: Las fichas de dominó como representación de fracciones propias	T3.1. Ordena todas las fichas de dominó de base 6 considerándolas fracciones propias. Reflexión
	T3.2. Realiza de nuevo la tarea anterior usando otras estrategias diferentes
A 4: Puesta en común e identificación de estrategias	T4.1. Ordena todas las fichas de dominó de base 7, 8 y 9 considerándolas fracciones propias. ¿Pueden usarse las mismas estrategias que en la Actividad 3? ¿Qué dificultades aparecen?

Esta adaptación se aplicó con un grupo de 5 estudiantes matriculadas en el tercer año del Grado en Maestro en Educación Primaria. Las participantes habían cursado la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I el año anterior (aritmética y su didáctica), y estaban completando la asignatura Matemáticas y su Didáctica II (las fracciones y su didáctica), la cual era impartida por uno de los investigadores colaboradores de este proyecto. Las actividades fueron guiadas por una formadora que es coautora de este trabajo, la cual restringió su participación a motivar a que las FMEP verbalizaran sus procesos y profundizaran en sus respuestas. Otras dos formadoras actuaron como observadoras tomando notas de campo y apoyando con la grabación y la gestión de los materiales.

En esta comunicación nos centramos en mostrar el análisis descriptivo e interpretativo de los procesos de resolución que han seguido las FMEP. Esto nos permitirá mostrar a los lectores los primeros resultados de esta investigación, los cuales nos han servido para comprender cómo se va activando la flexibilidad durante la intervención y con ello formular las primeras hipótesis de las trayectorias que podrían seguir los FMEP al trabajar con cada una de las tareas y, en un futuro, realizar una segunda adaptación de la tarea.

La intervención se desarrolló en dos sesiones de 90 minutos en dos días de una misma semana y fueron videograbadas. Las actividades y tareas están secuenciadas para facilitar la aparición progresiva de diferentes estrategias y representaciones y para promover la comparación entre las mismas. Así, nos interesa identificar si la FP surge de manera *espontánea* o *inducida* (Star et al., 2022), y también podemos analizar si ha habido *comparación* entre estrategias diferentes, además de identificar las representaciones puestas en juego (tanto por ellas mismas, como por otros compañeros) para describir así la FR. Las respuestas de cada grupo a cada actividad fueron recogidas también por escrito.

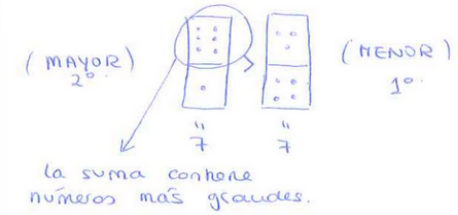
RESULTADOS

En la A1 se han podido identificar 3 posibles estrategias para ordenar las 10 fichas. Inicialmente miran las fichas como si fueran fracciones, sin embargo, les causa conflicto la ficha (0,4), al considerar el 0 como denominador.

Por ello, proponen una segunda estrategia que es considerar la cantidad total de puntos que tiene cada ficha. Así, espontáneamente surgen dos estrategias para ordenar las fichas, y tras una discusión entre las estudiantes, las comparan y deciden quedarse con la que no les genera un conflicto matemático. La tercera estrategia surge cuando se les pide en la T1.2 pensar en otra forma de ordenar las fichas. Identifican cada ficha con el valor numérico de la resta de los puntos de cada parte de la ficha. Surge de nuevo un conflicto en el grupo, en esta ocasión, por la posible aparición de números negativos dependiendo de cómo coloquen las fichas. Basándose en el currículo de Educación Primaria, deciden que restarán siempre el valor menor del mayor de cada ficha. Aunque se insiste en que busquen otros criterios, no se les ocurren más.

Ante las estrategias de sumar o restar los puntos de la ficha, llama la atención que, cuando encuentran fichas con el mismo valor numérico asociado, no consideran que sean equivalentes dejándolas en la misma posición en su acomodo (por ejemplo, superponiéndolas), sino que sienten la necesidad de considerar un nuevo criterio para ordenarlas: identificar como mayor a la ficha que tuviera una parte con mayor cantidad de puntos (Figura 1). Como estaba previsto, usan en paralelo los registros LN y M haciendo conversiones entre ellos.

Figura 1. Criterio de orden para anular la equivalencia

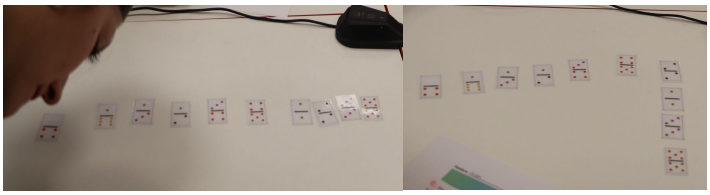


Cuando, en la A2, se les pide ordenar las fichas interpretando que son fracciones, sienten la necesidad inmediata de considerarlas como fracciones propias y justifican su decisión en la dificultad que habían encontrado en la tarea anterior (se da la circunstancia de que no habían elegido la ficha del doble cero). En este momento, colocan las fichas siguiendo las siguientes estrategias: colocan primero las fichas *dobles* que interpretan como la unidad ((1,1), (2,2), (3,3), (5,5)) y, de nuevo, sienten la necesidad de utilizar un orden secundario para colocar las fichas que han surgido como equivalentes atendiendo a la cantidad de puntos. Así las colocan de menor a mayor (Figura 2, izquierda), de manera que cada una de esas cuatro fichas ocupa una posición diferente en su acomodo. Una vez han colocado las fichas que valen 1, toman la ficha (1,2) y la colocan a la izquierda de la ficha (1,1) dejando hueco (posición relativa respecto a 1). A continuación, acomodan la ficha (3,4) entre las dos anteriores (posición relativa respecto a ½ y 1), pero no sitúan (3,4) en el punto medio entre (1,2) y (1,1). Después colocan (1,3) diciendo que la fracción que representa es menor que la que representa (1,2) (fracciones con el mismo numerador, atendiendo al tamaño de las partes). Hasta este momento habían tratado las fichas como un número fraccionario en cuanto al registro LN, lo cual es evidente cuando les asignan un nombre (un medio, un tercio y tres cuartos). Sin embargo, cuando cogen la ficha (1,6) sienten la necesidad de pasar a la expresión decimal dividiendo y, para acomodarla, usan la expresión decimal. Hacen lo mismo con la fracción que representa (1,3). En ese momento sitúan la ficha (0,4) a la izquierda del acomodo. Pasan también a decimal la fracción representada en la ficha (4,5). Inicialmente colocan mal esa pieza, pues la ponen a la izquierda de la ficha (3,4), pero enseguida ven su error a través de las expresiones decimales (dicen oralmente que ¾ es 0,75) y lo corrigen. Aunque surge la estrategia de comparación de fracciones unitarias (caso particular de fracciones con el mismo numerador), no la emplean en todos los casos, está más arraigada la estrategia de dividir numerador

entre denominador para usar la expresión decimal (en este caso mentalmente). Como estaba previsto, en esta primera parte de la A2 usan en paralelo los registros LN y M haciendo conversiones entre ellos.

Cuando describen a la guía cómo han realizado esta tarea, consideran solamente la estrategia de usar las expresiones decimales. De forma implícita, están comparando las estrategias usadas y eligen esta como la más adecuada. Además, solo cuando la guía pregunta sobre la colocación de las fichas equivalentes, reconocen que son iguales, pero insisten en que necesitan un orden, aunque al final deciden que están agregando criterios innecesarios y deciden colocar las fichas equivalentes en acomodo vertical (Figura 2, derecha). Muestran aquí una confusión entre equivalencia y orden.

Figura 2. Colocación de las fichas: fracciones equivalentes.



Cuando abordan la T2.2, para volver a ordenar sus fichas con otras estrategias que no sean la de división, tienen a su disposición una caja con materiales. Sin embargo, reconocen tener dificultades para buscar otras estrategias. Intentan recordar contenidos vistos durante su formación previa sin éxito y justifican su falta de FP y FR en que limitan su forma de proceder a lo que haría el alumnado de primaria. Tienen problemas para usar las regletas y los cubos *Multilink* al pensar siempre en la unidad representada con estos materiales como dividida en 10 partes iguales. Entonces la guía les ofrece el muro de fracciones. Se fijan en que en las piezas de este material aparecen varias representaciones en paralelo (IG con rectángulos o secciones triangulares de polígonos regulares sombreadas, SN con la expresión decimal, porcentajes y fracciones), además de la representación física (M) de las barras con el propio material y la verbal oral (LN) que movilizan constantemente. Reconocer la expresión decimal en las barras del muro les da seguridad y confianza. Las anima el poder manejar físicamente las piezas para comparar fracciones como (4,5) y (3,4) colocando las barras al lado verticalmente. Aunque inicialmente reconocen que las fichas (1,1), (2,2), (3,3) y (5,5) representan "la barra grande del muro", la unidad, siguen sintiendo la necesidad de representar cada ficha con el material para enfatizar que son el mismo número racional. Así, buscan otro muro ante la limitación de no poder hacer esto solamente con uno. Es fuerte para ellas la percepción de que, como fracciones, las fichas son diferentes, aunque sean equivalentes, aunque representen el mismo número racional, y quieren que eso se vea reflejado en todos los sistemas que usen. Colocan las barras siguiendo la misma disposición que en la Figura 2, derecha, representando las fichas con el material. Es decir, no usan el material para comparar de dos en dos las fichas (idea de relación binaria), lo usan para representar el acomodo completo. Es importante destacar que esto no era parte de la consigna. Con este material son capaces de movilizar interpretación de las fracciones como parte-todo.

Para finalizar la primera sesión, en la A3 ordenan todas las fichas de dominó de base 6. De nuevo surge la limitación del material: no tienen suficientes piezas para representar todas las fracciones de las fichas. Así, descartan la estrategia anterior de representar todas las fichas. Tras una discusión, empiezan a comparar dos a dos (relación binaria). La limitación con el material hace que no representen todos los elementos de la clase de equivalencia de una fracción, dejan un solo representante emergiendo la idea de clase de equivalencia.

Al comenzar la segunda sesión se les presenta una estrategia: representar cada una de las fracciones de las fichas de dominó en una regla graduada con 60 marcas haciendo uso del significado de la fracción como operador. Son capaces de hacerlo con facilidad y rapidez, valorando esta estrategia positivamente. Aunque identifican la equivalencia de dos fracciones al ocupar la misma posición en la regla, siguen sintiendo la necesidad de etiquetar ambas usando rotuladores de colores. Lo hacen

mucho más rápido que con sus estrategias espontáneas y sin ningún error, ellas dicen que "no necesitas pensar, lo tienes dibujado" y no vuelven a la expresión decimal.

Para empezar con la A4 la formadora les pregunta: "¿qué pasa si metemos la ficha (1,7)?". Intentan usar la regla graduada como antes, pero tienen dificultades al no encontrar un número entero de rayas, de las 60 en las que está dividida, que represente (1,7). Vuelven a la división con la calculadora al tener esta dificultad y de esta forma colocan todas las fichas que completan el dominó de base 9, abriendo huecos en su acomodo de la A3. Hacen uso de la calculadora (que muestra representación SN) para colocar y comprobar que la disposición de las fichas es correcta (no vuelven ni al muro de fracciones ni a la regla en este momento).

Tabla 2. Resumen de resultados obtenidos por tareas.

Tarea	Estrategias	FP observada	FR observada
T1.1	Mirar las fichas como representación de fracciones. Considerar la cantidad total de puntos en la ficha.	*Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros LN y M, sin conversiones*
T1.2	Identificar la ficha con el valor numérico de la resta del lado con más puntos menos el lado con menos puntos.	*Inducida* *Comparación*	
T2.1	Ordenar como fracciones propias para delimitar orden entre 0 y 1. Colocar fichas dobles (unidad). Colocar el ½ como referencia. Ordenar con la referencia de mayor o menor que ½. Convertir a decimal	*Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros LN y M* *Conversiones*
T2.2	Uso de materiales físico para representar y ordenar	*Inducida*	*Uso de registros IG, SN, M y LN* *Conversiones*
T3.1	Comparación dos a dos (relación binaria)	*Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros M, sin conversión*
T3.2	Representar cada fracción como un punto sobre una recta graduada con 60 rayas	*Inducida* *Comparación*	*Uso de registros LN, SN y M* *Conversiones*
T4.1	Intentan representar 1/7 en la regla de la A3. División para convertir a decimales usando calculadora	*Inducida* *Espontánea* *Comparación*	*Uso de registros LN y SN* *Conversiones*

Para finalizar, la formadora les pregunta si podrían seguir colocando más fichas (de base 12, por ejemplo), y ellas responden que sí, que *infinitamente*. Aunque no hacen explícita la propiedad de densidad de los racionales en la recta real, intuitivamente, con el material y la actividad sí tienen muestran tener una percepción de esta idea.

CONCLUSIONES

En esta actividad se encuentran evidencias de que, cuando la nueva estrategia o el nuevo registro facilita y agiliza la resolución de la tarea, las FMEP valoran positivamente la flexibilidad, tanto representacional como procedimental. El desarrollo de la flexibilidad a través de la secuenciación de las tareas les permitió reconstruir la idea de equivalencia de fracciones. Sin embargo, se han evidenciado dificultades en el uso y las conversiones de registros y limitaciones del uso de algunos recursos, que no se han superado a pesar de que se facilitaron otras estrategias y otros recursos para fortalecer el proceso de inducción en la segunda sesión.

Los resultados mostrados este estudio, junto con los análisis en curso de otros grupos participantes en la investigación, nos permitirán continuar con un segundo ciclo de adaptación de la actividad en la que comenzaremos a poner el foco en los conocimientos y competencias profesionales que puedan desarrollarse en los FMEP alrededor del tema de fracciones.

REFERENCIAS

Alvarado, A., Olvera, C., y Mata, A. (2018). *La estimación y el cálculo mental en educación secundaria.* Secretaría de Educación del Estado de Durango-UJED.

Fazio, L., y Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*. International Academy of Education.

González-Forte, J.M., Fernández, C., y Llinares, S. (2018). La influencia del conocimiento de los números naturales en la comprensión de los números racionales. En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F.J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 241-250). SEIEM.

Lamon, S.J. (2020) *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad «real» de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias*, *15*(3), 377-391. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4166

Llinares, S., y Sánchez, V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo*. Síntesis.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., y Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201-221. http://dx.doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83 – 97). SEIEM.

Moriel-Junior, J.G., y Reyes, A. (2022). Conocimiento especializado de las fracciones. En J. Carrillo, M.A. Montes, y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino* (pp. 135-150). Dykinson, S. L.

Rittle-Jhonson, B., y Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99*(3), 561-574. https:// https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 47-64.

Ni, Y., y Zhou, Y.D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B. y Star, J.R. (2011). Relations between conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, *47*(6), 1525-1538.

Siegler, R.S., Fazio, L.K., Bailey, D.H., y Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, *17*(1), 13-19.

Star, J.R., Tuomela, D., Joglar-Prieto, N., Hästö, P., Palkki, R., Abánades, M.Á., Pejlare, J., Jiang, R. H., Li, L., y Liuu, R.-de (2022). Exploring students' procedural flexibility in three countries. *IJ STEM Ed 9*, 4. https://doi.org/10.1186/s40594-021-00322-y

[i] https://www.recrea-matematicas.com/

REFLEXIONES DE FUTUROS PROFESORES SOBRE LA INCLUSIÓN DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LOS CONTEXTOS DE ENSEÑANZA VIRTUAL Y PRESENCIAL

Prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during the virtual and face-to-face teaching contexts

Ledezma, C., Hidalgo-Moncada, D., Vargas, J. P. y Font, V.

Universitat de Barcelona

Resumen

Se reportan los resultados de una investigación conducida durante dos años académicos en un programa de máster profesionalizante para profesores de matemática de educación secundaria y bachillerato. El objetivo fue analizar las reflexiones de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización matemática durante sus prácticas educativas, las cuales se desarrollaron en los contextos de enseñanza virtual y presencial debido a la pandemia por COVID-19. Estas reflexiones se analizaron con los Criterios de Idoneidad Didáctica, misma herramienta usada por los futuros profesores para pautar la reflexión sobre su propia práctica. Se realizó un análisis de contenido sobre 236 Trabajos Finales de Máster elaborados durante los cursos 2019–2020 y 2020–2021. Como resultado principal se destaca una priorización de los criterios «epistémico» y «ecológico» en las reflexiones de los futuros profesores sobre la inclusión de la modelización durante sus prácticas educativas.

Palabras clave: *futuros profesores, modelización matemática, práctica educativa, trabajo final de máster*.

Abstract

We report the results of a research conducted during two academic years in a professionalising master's programme for secondary and baccalaureate education mathematics teachers. The objective was to analyse the prospective teachers' reflections on the inclusion of mathematical modelling during their educational internship experiences, which were developed in the virtual and face-to-face teaching contexts due to the COVID-19 pandemic. We analysed these reflections with the Didactic Suitability Criteria, which was the same tool used by the prospective teachers to guide the reflection on their own educational practise. We conducted a content analysis on 236 Master's Degree Final Projects submitted during the 2019–2020 and 2020–2021 courses. As a main result, we highlight a prioritisation of the «epistemic» and «ecological» criteria in the prospective teachers' reflections on the inclusion of modelling during their educational internship experiences.

Keywords: *educational internship experience, master's degree final project, mathematical modelling, prospective teachers*.

INTRODUCCIÓN

Un aspecto clave en la educación de profesores es la reflexión sobre la propia práctica como mecanismo de mejora profesional (Schön, 1987). El Enfoque Onto-Semiótico ha abordado ampliamente este tema de investigación, tanto desde la reflexión docente en su totalidad (por ejemplo, Breda, 2020; Garcés, 2021; entre otros), como desde contextos más específicos (por ejemplo, Hidalgo-Moncada et al., 202; Sánchez, 2021; entre otros). Siguiendo esta línea investigativa, en esta comunicación se reporta un estudio centrado en las reflexiones de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización matemática durante sus prácticas educativas.

Ledezma, C., Hidalgo-Mocada, D., Vargas, J. P. y Font, V. (2023). Reflexiones de futuros profesores sobre la inclusión de la modelización matemática en los contextos de enseñanza virtual y presencial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 315–322). SEIEM.

Durante dos años académicos se condujo una investigación en un programa de máster profesionalizante para profesores de matemática de educación secundaria y bachillerato (estudiantes de 12–18 años) en el contexto español. La pregunta principal que guio esta investigación fue: ¿Qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático priorizaron los futuros profesores en sus reflexiones sobre la inclusión de la modelización durante sus prácticas educativas? Para responderla se analizaron los Trabajos Finales de Máster (TFMs) de futuros profesores, en los cuales debían, principalmente, reflexionar sobre la unidad didáctica que implementaron durante sus prácticas educativas y así proponer mejoras para su rediseño. Los futuros profesores pautaron sus reflexiones utilizando los Criterios de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013), que es la herramienta que propone el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) para valorar los aspectos (o facetas) intervinientes en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. Entre estas reflexiones se encontraron algunas que abordaban la inclusión de la modelización en las unidades didácticas y que fueron el foco de esta investigación. Debido a la pandemia por COVID-19, los futuros profesores de este programa de máster debieron realizar sus prácticas educativas en dos contextos de enseñanza: del presencial al virtual (curso 2019–2020) y del virtual al presencial (curso 2020–2021).

La relevancia de esta investigación radica en que, además de abordar un tema importante para la Educación Matemática como lo es la modelización, lo hace desde la perspectiva de la reflexión docente en la educación de profesores, utilizando las herramientas teóricas que aporta el EOS en un tema que no ha profundizado anteriormente y, más en general, para los que investigan la reflexión docente sobre la inclusión de la modelización en su práctica. Dada esta importancia, en esta comunicación se sintetizan y discuten los principales resultados de esta investigación enfatizando, por un lado, en los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático que los futuros profesores priorizaron en sus reflexiones sobre la inclusión de la modelización durante sus prácticas educativas y, por otro lado, en la influencia de los contextos de enseñanza sobre estas reflexiones.

REFERENTES TEÓRICOS

Modelización Matemática

Para esta investigación se tomó como referente teórico al ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007), pues es el ciclo que se enseña a los futuros profesores del programa de máster donde se contextualiza este estudio. Este ciclo explica el proceso de modelización como una transición entre el «mundo real» y la «matemática» para resolver una situación-problema tomada desde la realidad. Dentro de esta investigación, el ciclo de Blum y Leiß se utilizó como base teórica para analizar las reflexiones de los futuros profesores guiados por dos cuestionamientos: ¿Qué problemas de modelización plantearon los futuros profesores a los estudiantes?, ¿Cómo analizaron la actividad matemática subyacente a estos problemas? Estos cuestionamientos se abordaron en un estudio previo de los autores (véase Ledezma, Sol et al., 2022), por lo que no se discuten en esta comunicación.

Como este trabajo se enmarca en las investigaciones fundamentadas en el EOS, cabe destacar dos características de este enfoque teórico: en primer lugar, el EOS considera a la modelización como un *híper* o *mega proceso*, ello porque implica otros *procesos* matemáticos más elementales, como la representación, la argumentación, la idealización, etc.; en segundo lugar, en trabajos anteriores se han articulado las herramientas que aporta el EOS con un ciclo de modelización para analizar la actividad matemática subyacente a este proceso (véase Ledezma, Font y Sala, 2022).

Criterios de Idoneidad Didáctica

En el EOS se proponen los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) como herramienta para valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos (Godino, 2013). Su uso en esta investigación se justifica en que es la misma herramienta que se enseña a los futuros profesores del programa de máster donde se contextualiza este estudio para que pauten la reflexión sobre su propia práctica en los TFMs. Se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje como el grado en que

éste (o una parte de éste) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los *significados personales* logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los *significados institucionales* pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Este constructo multidimensional se compone por seis *criterios*, cada uno enfocado en un aspecto (o faceta) específico del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático (Breda et al., 2017): *epistémico*, para valorar si la matemática que se enseña es una «buena matemática»; *cognitivo*, para valorar, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes; *interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes; *mediacional*, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados durante el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático; *afectivo*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático; *ecológico*, para valorar la adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. A su vez, cada uno de los CID cuenta con sus respectivos *componentes*, y su operatividad requiere definir un conjunto de *indicadores* observables que permitan valorar el grado de idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático (véase la pauta completa de los CID y sus *componentes* en Breda et al., 2017).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para esta investigación se siguió una metodología cualitativa desde un paradigma interpretativo (Cohen et al., 2018), que consiste fundamentalmente en un análisis de contenido (Schreier, 2012).

Contexto de la Investigación

Esta investigación se desarrolló en el Programa de Máster para la Formación de Profesores de Educación Secundaria y Bachillerato que imparten las universidades públicas de Cataluña (España), durante los años académicos 2019–2020 y 2020–2021. A lo largo de su proceso educativo, los futuros profesores cursan tres módulos durante este máster: «Formación genérica», «Formación específica», y «Prácticas educativas».

Dentro del módulo «Formación específica» se incluye un submódulo sobre modelización matemática. Previo al inicio de esta investigación se observaron las clases de este submódulo con el propósito de conocer los contenidos y la forma en que se enseñan. El submódulo consta de cuatro sesiones con una metodología principalmente expositiva: en la primera sesión se explica qué se entiende por modelización y se presenta el ciclo de Blum y Leiß; durante la segunda y tercera sesión se presentan ejemplos de problemas de modelización, algunos de los cuales se resuelven durante ambas sesiones; en la cuarta sesión, los futuros profesores deben exponer la tarea final del submódulo, que consiste en presentar un problema de modelización que incluya el enunciado, la resolución, y la ubicación curricular de los contenidos matemáticos necesarios para su resolución.

Dentro del módulo «Prácticas educativas», los futuros profesores son asignados a centros de prácticas a cargo de un profesor mentor que los debe guiar en la institución educativa. En tales prácticas, los futuros profesores deben diseñar e implementar una secuencia de enseñanza y aprendizaje (conocida como «unidad didáctica»), la cual está determinada por la institución educativa, el nivel de los estudiantes, y el contenido matemático del momento del año escolar en que realicen su intervención en el aula. Dadas estas condiciones, los futuros profesores no pueden diseñar una unidad didáctica exclusivamente centrada en la modelización, aunque sí pueden implementar problemas de modelización. Al finalizar sus prácticas educativas, en el programa de máster se presentan los CID a los futuros profesores para que los utilicen en sus TFMs y así puedan pautar la reflexión sobre su propia práctica.

A causa de las medidas sanitarias adoptadas durante la pandemia por COVID-19, los futuros profesores del curso 2019–2020 debieron desarrollar sus prácticas educativas, ya sea parcial o totalmente,

en un contexto virtual de enseñanza; mientras que los del curso 2020–2021 desarrollaron sus prácticas en un contexto de retorno a la enseñanza presencial y/o de modalidad híbrida.

Estructura de un Trabajo Final de Máster

Al finalizar su proceso educativo, los futuros profesores deben elaborar un TFM, el cual es un trabajo original, autónomo, e individual que pretende mostrar, de forma integrada, los conocimientos y competencias adquiridos durante el programa de máster. Además, el TFM debe contribuir a que los futuros profesores reflexionen y profundicen en el análisis sobre su propia práctica, posibilitando proponer elementos para su mejora. Para la elaboración del TFM, cada futuro profesor cuenta con la guía de un profesor tutor del programa de máster quien, a su vez, lo supervisó durante la práctica educativa.

La estructura basal de un TFM consta de cinco capítulos: *Introducción*, donde se contextualiza la unidad didáctica y el centro de práctica educativa; *Análisis de la implementación*, donde se analiza la idoneidad didáctica de la unidad didáctica implementada utilizando los CID; *Propuesta de rediseño*, donde se proponen mejoras a la unidad didáctica implementada para un rediseño hipotético; *Autovaloración competencial*, donde se compara el nivel competencial de entrada con el alcanzado al final el proceso educativo en el máster; *Anexos*, donde se puede incluir evidencias de la unidad didáctica implementada, las referencias citadas en capítulos anteriores, etc.

Análisis de Contenido

Los TFMs fueron la fuente de datos para esta investigación, por lo que se realizó un análisis de contenido sobre los 236 TFMs elaborados por los futuros profesores durante los dos años académicos (119 del curso 2019–2020 y 117 del curso 2020–2021). Para ello, se adaptó la metodología utilizada por Sánchez (2021) a las necesidades de este estudio, desarrollando cuatro *pasos*.

En un *primer paso*, con base en la revisión de la literatura y el conocimiento de los autores, se elaboró una lista de palabras clave en catalán (y sus derivaciones) relacionadas con la modelización (context [contexts, contextualització, contextualitzar], model [models, modelització, modelitzar], problema [problemes, problematització, problematitzar], real [realitat]), lo que permitió identificar los TFMs con referencias a la modelización. En un *segundo paso* se registraron los datos de cada TFM (autor, título, nivel educativo, contenido matemático), lo que permitió contar con una base de datos ordenada para consultar los TFMs y registrar cuáles incluían las palabras clave definidas en el *primer paso*.

Producto de una regularidad encontrada en la distribución de las palabras clave en los capítulos *Análisis de la implementación* y *Propuesta de rediseño* de los TFMs, en un *tercer paso* se clasificaron estos documentos en cuatro niveles de referencia a la modelización: en un *Nivel 0* se clasificaron los TFMs que no incluyeron referencias a la modelización; en un *Nivel 1* se clasificaron los TFMs que no incluyeron el trabajo con modelización en las unidades didácticas implementadas (capítulo *Análisis de la implementación*), pero sí plantearon su inclusión en su rediseño (capítulo *Propuesta de rediseño*); en un *Nivel 2* se clasificaron los TFMs que incluyeron el trabajo con modelización en las unidades didácticas implementadas (capítulo *Análisis de la implementación*) pero no plantearon mejoras para potenciar este proceso en su rediseño (capítulo *Propuesta de rediseño*); en un *Nivel 3* se clasificaron los TFMs que incluyeron el trabajo con modelización en las unidades didácticas implementadas (capítulo *Análisis de la implementación*) y que plantearon mejoras para potenciar este proceso en su rediseño (capítulo *Propuesta de rediseño*).

En un *cuarto paso* se categorizaron los comentarios de los futuros profesores referidos a la modelización utilizando los *criterios* y *componentes* de los CID como categorías apriorísticas. De este modo se pudieron identificar los aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático que los futuros profesores relacionaron con la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas. Para este *cuarto paso* se consideraron los TFMs clasificados en los *Niveles 2* y *3* del *tercer paso*, pues son los que contienen referencias a las reflexiones de los futuros profesores con respecto a la modelización en el capítulo *Análisis de la implementación*.

En un estudio previo se analizó exclusivamente un TFM del curso 2019–2020 para refinar y validar la metodología de análisis de contenido antes descrita (véase Ledezma et al., 2021).

PRINCIPALES RESULTADOS

En esta sección se presentan los principales resultados de esta investigación a partir del análisis de contenido realizado sobre los 236 TFMs. Mediante la búsqueda de palabras clave en los TFMs (*primer paso* del análisis de contenido) se pudieron identificar los documentos que incluyeron referencias a la modelización (*segundo paso* del análisis de contenido), los cuales se clasificaron en cuatro niveles de referencia a este proceso (*tercer paso* del análisis de contenido). En la Tabla 1 se presenta el número de TFMs por año académico que se clasificaron según estos niveles de referencia.

Tabla 1. Número de TFMs según nivel de referencia a la modelización y año académico

Nivel de referencia	Año académico 2019–2020	Año académico 2020–2021
Nivel 0	33	30
Nivel 1	41	47
Nivel 2	21	24
Nivel 3	24	16
Total de TFMs	119	117

La Tabla 1 ofrece una mirada general sobre cuántos TFMs incluyeron y reflexionaron sobre la modelización (*Niveles 2* y *3*) y cuántos no consideraron este proceso (*Niveles 0* y *1*) en sus unidades didácticas implementadas. Un primer resultado para destacar es que hubo una tendencia en ambos años académicos con respecto al número de TFMs que implementaron la modelización en sus unidades didácticas: 45 en el curso 2019–2020 y 40 en el curso 2020–2021; es decir, alrededor de un tercio del número total de TFMs elaborados en cada año académico.

Una vez que se clasificaron los TFMs en los cuatro niveles de referencia a la modelización (*tercer paso* del análisis de contenido), se procedió a revisar los documentos que reflexionaron sobre la inclusión de este proceso en sus unidades didácticas implementadas. De este modo, se continuó el análisis de contenido sobre los 85 TFMs clasificados en los *Niveles 2* y *3*, mediante la categorización de los comentarios valorativos realizados en cada *componente* de los CID y que tuvieran relación con la modelización (*cuarto paso* del análisis de contenido). En la Tabla 2 se presenta el número de comentarios valorativos por año académico que se encontraron en las reflexiones sobre cada CID.

Tabla 2. Número de comentarios valorativos según los CID y año académico

CID	Año académico 2019–2020	Año académico 2020–2021
Epistémico	54	48
Cognitivo	19	20
Interaccional	8	7
Mediacional	8	9
Afectivo	40	24
Ecológico	40	40
Total de comentarios	169	148

Para la lectura de la Tabla 2 se deben tomar en cuenta ciertas consideraciones metodológicas asumidas en esta investigación. Primero, se consideró como «un comentario valorativo» a aquella frase u oración que contenía alguna(s) de las palabras clave determinadas en el *primer paso* del análisis de contenido, pero dentro de un contexto relacionado a la modelización. Segundo, dicho comentario se debía relacionar a las reflexiones sobre un *componente* específico de los CID. Tercero, si las reflexiones sobre un *componente* de los CID contenían más de una frase u oración con estas características, se consideraba como un solo comentario. Cuarto, los TFMs contenían comentarios valorativos sobre modelización en distintos *componentes* de los CID, pero no en todos.

La Tabla 2 ofrece una mirada más específica sobre qué *criterios* de los CID priorizaron los futuros

profesores en sus reflexiones sobre la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas implementadas. Un segundo resultado para destacar es que hubo una tendencia en ambos años académicos con respecto a la distribución de los comentarios valorativos sobre modelización entre los distintos *criterios* de los CID: por una parte, se evidenció una alta concentración en los *criterios epistémico* y *ecológico*; por otra parte, hubo un escaso número en los *criterios interaccional* y *mediacional*.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la sección anterior se destacaron dos resultados, los cuales se evidenciaron como tendencias en los TFMs elaborados durante ambos años académicos, y que se discuten en esta sección. El primer resultado relevante es que alrededor de un tercio del número total de TFMs elaborados implementaron la modelización en sus unidades didácticas. En términos generales, existen limitaciones inherentes al periodo de prácticas educativas que los futuros profesores deben enfrentar, tanto durante las intervenciones en el aula (sistema de trabajo del centro de práctica, intervención del profesor mentor, tiempos curriculares, etc.) como las exigencias del programa de máster (tiempo de elaboración del TFM, retroalimentaciones del profesor tutor, etc.). Si bien este programa incluye un submódulo dedicado a la enseñanza de la modelización matemática, los futuros profesores no pueden diseñar una unidad didáctica exclusivamente centrada en la modelización. Estas razones justifican que este proceso matemático no fue el único que trabajaron en sus unidades didácticas, ni tampoco el único sobre el que reflexionaron. Tomando en cuenta estas situaciones, en esta investigación se recogieron los comentarios valorativos sobre modelización que los futuros profesores realizaron en sus TFMs según la importancia que le atribuyeron a la inclusión de este proceso durante sus prácticas educativas.

Sobre este primer resultado relevante, donde la mayoría de los futuros profesores no incluyeron la modelización durante sus prácticas educativas, se proponen dos explicaciones plausibles: por una parte, en consonancia con la postura de Verschaffel y colaboradores (2020), la implementación de la modelización en las clases de matemática no es usual debido a, principalmente, las limitaciones del contexto educativo, como el nivel de los estudiantes, las recomendaciones del profesor mentor, entre otras variables; por otra parte, los futuros profesores dieron mayor prioridad a otros procesos de la actividad matemática, o bien, no consideraron a la modelización con un proceso relevante dentro de sus unidades didácticas implementadas.

El segundo resultado relevante es que la distribución de los comentarios valorativos no fue equitativa entre los distintos *criterios* de los CID. En este sentido, el *criterio epistémico* fue el que concentró el mayor número de comentarios valorativos sobre modelización, seguido por el *criterio ecológico*; mientras que los *criterios interaccional* y *mediacional* fueron los menos considerados para estas reflexiones. Por motivos de espacio, en esta comunicación no se profundiza en los análisis de cada uno de los *componentes* de los CID en que se encontraron comentarios valorativos sobre modelización, sin embargo, se destacan algunos *componentes* relevantes para esta discusión.

Dentro del *criterio epistémico* se encuentra el *componente* «Riqueza de procesos», el cual concentró el mayor número de comentarios valorativos sobre modelización. Esto se debe a que en este *componente* se reflexiona sobre los procesos matemáticos trabajados en las unidades didácticas implementadas. Así, los TFMs que incluyeron la modelización definieron este proceso y ejemplificaron las tareas utilizadas para trabajarlo. Sobre esto último se destacan dos particularidades: por un lado, las definiciones sobre modelización variaron desde considerar a este proceso como la matematización (traducción al lenguaje matemático) de una situación-problema, hasta como un proceso cíclico compuesto por fases; por otro lado, las tareas utilizadas para trabajar modelización no siempre se condijeron con las características de este tipo de problemas (véase Borromeo Ferri, 2018). Estas particularidades llevaron a cuestionar si todos los futuros profesores realmente implementaron la modelización a partir de lo aprendido en el programa de máster o si sólo intentaron acercarse a este proceso a pesar de las limitaciones propias del periodo de prácticas educativas.

Dentro del *criterio ecológico* se encuentran los *componentes* «Conexiones intra e interdisciplinares»

y «Utilidad sociolaboral», los cuales también incluyeron varios comentarios valorativos sobre modelización. Si bien, en algunos casos, los futuros profesores superpusieron sus reflexiones en ambos *componentes*, lo destacable de estas valoraciones es que se consideró a la modelización como una herramienta para relacionar los contenidos trabajados en las unidades didácticas a contextos extramatemáticos y de otras disciplinas (especialmente, de física y economía). Del mismo modo, el contenido matemático que más utilizaron los futuros profesores para trabajar la modelización fue «Funciones», en una postura coincidente con la de Michelsen (2006), quien considera a este contenido como una herramienta útil para desarrollar la modelización en el aula.

Retomando la pregunta principal de esta investigación sobre qué aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático priorizaron los futuros profesores en sus reflexiones sobre la inclusión de la modelización durante sus prácticas educativas, se puede afirmar que priorizaron los aspectos *epistémico* y *ecológico*.

Si bien hasta este punto se han discutido los resultados que permitieron dar respuesta a la pregunta principal de esta investigación, resulta interesante profundizar en la influencia de los contextos de enseñanza presencial y virtual en las reflexiones de los futuros profesores sobre la inclusión de la modelización en sus unidades didácticas implementadas. Para abordar este punto, se consideran los comentarios valorativos en los *criterios interaccional* y *mediacional* como la mayor evidencia. En ambos años académicos, los futuros profesores comentaron sobre las dificultades para desarrollar tareas grupales con los estudiantes, tal como sugieren Doerr y English (2003) para el trabajo con modelización: mientras que en el curso 2019–2020 los impedimentos fueron la enseñanza virtual y la escasa interacción entre los estudiantes, en el curso 2020–2021 los impedimentos fueron las medidas sanitarias de distanciamiento social y aforo reducido en las salas de clase. Si bien ambas situaciones afectaron el aspecto *interaccional* del proceso de enseñanza y aprendizaje matemático, sí hubo valoraciones positivas en el componente «Autonomía» dada la dinámica de trabajo individual para las tareas de modelización. Por su parte, los comentarios sobre modelización encontrados en el *criterio mediacional* se centraron, casi en su totalidad, en la valoración del componente «Recursos materiales», en que los futuros profesores destacaron el uso de softwares de geometría dinámica (GeoGebra, Desmos, Transum, etc.) para el trabajo con modelización. Sin embargo, las reflexiones de los futuros profesores sólo le atribuyeron un rol de complemento para este proceso, y no como un medio para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización.

Los resultados de esta investigación tienen distintas implicaciones y se proyectan en diferentes ámbitos. En primer lugar, al ofrecer una visión general sobre la enseñanza de la modelización dentro del programa de máster en que se contextualizó esta investigación, estos resultados permiten identificar los aspectos por mejorar en el submódulo dedicado a este tema y en las retroalimentaciones de los profesores tutores a los futuros profesores en sus TFMs. En segundo lugar, estos resultados son una muestra detallada del uso de los CID como herramienta de reflexión sobre un aspecto particular como es la modelización en un contexto de formación docente. En tercer lugar, estos resultados permiten cimentar las bases para la construcción de una pauta de CID enfocada en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos que incluyan la modelización en el aula (véase un avance en Ledezma, Font et al., 2022). Finalmente, el análisis de contenido realizado sobre los 236 TFMs arrojó más resultados que los expuestos (definiciones de modelización, tipos de tareas de modelización, contenidos matemáticos relacionados a la modelización, etc.), los cuales no se incluyeron porque excedían el objetivo principal de esta comunicación. No obstante, dichos resultados permiten proyectar este estudio para análisis más específicos sobre el rol de la modelización en la educación de profesores.

Agradecimientos

Estudio desarrollado en el marco del Proyecto 72200458 financiado por ANID/PFCHA Chile, y del Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

Referencias

Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 69–88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA: Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8ª ed.). Routledge.

Doerr, H. M. y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110–136. https://doi.org/10.2307/30034902

Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 10*(3), 239–268. https://doi.org/10.17583/redimat.7957

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111–132.

Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J. y Vanegas, Y. (2023). Formación de maestros de educación primaria en el contexto de confinamiento. La importancia del aprendizaje autorregulado en las matemáticas. *Magister, 32*(1), 40–48. https://doi.org/10.17811/msg.32.1.2020.40-48

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. Artículo individual. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3

Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G. y Breda, A. (2022). Principios de la modelización matemática desde la perspectiva de la idoneidad didáctica. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 345–354). SEIEM.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri, y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195–204). PME.

Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G. y Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics, 10*(18), Artículo 3339. https://doi.org/10.3390/math10183339

Michelsen, C. (2006). Functions: A modelling tool in mathematics and science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 269–280. https://doi.org/10.1007/bf02652810

Sánchez, A. (2021). *Perspectivas de los Futuros Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria sobre la Creatividad y su Desarrollo en las Clases* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. Dipòsit Digital de la Universitat de Barcelona. http://hdl.handle.net/2445/187046

Schön, D. A. (1987). *Educating the Reflective Practitioner: Towards a New Design for Teaching and Learning in the Professions*. Jossey-Bass Publishers.

Schreier, M. (2012). *Qualitative Content Analysis in Practice*. SAGE.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. y Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM – Mathematics Education, 52*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

COMPRENSIÓN DE LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO: DE PROCESO A OBJETO

Understanding the graph of the derivative function in high school students: from process to object

Lillo, E.[a], Moreno, M.[a], Orts, A.[b] y Llinares, S.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]IES Tavernes Blanques (Valencia)

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar el desarrollo de la comprensión de la gráfica de la función derivada en estudiantes de bachillerato que usan tecnología. Se diseñó un experimento de enseñanza fundamentado en la teoría APOS, la génesis instrumental y la teoría de las representaciones semióticas. El análisis de los registros del experimento de enseñanza ha permitido identificar dos características de la transición de la comprensión de la gráfica de la función derivada como proceso a objeto: (i) el conocimiento del proceso límite de la tasa de variación media y (ii) la reflexión sobre la relación actividad-efecto al usar GeoGebra. Estos resultados proporcionan información sobre el papel de la tecnología en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes cuando un modelo de construcción del conocimiento (descomposición genética) se usa para diseñar la secuencia de actividades.

Palabras clave: *Concepto de derivada, gráfica de la función derivada, experimento de enseñanza APOS, GeoGebra.*

Abstract

The goal of this research is to characterize the understanding of the graph of the derivative function in high school students (16-17 years). A teaching experiment was designed from three perspectives: the APOS theory, the instrumental genesis that supports reflection on the activity-effect relationship, and the theory of semiotic representations. The analysis of the records of the teaching experiment has allowed to identify two features in the transition from knowing the graph of the derived function as a process to know it as an object: (i) knowing the limit process of the average variation rate, and (ii) reflecting on the activity-effect relationship using, GeoGebra (instrumental genesis). These results provide information on the role of technology in the development of students' understanding when sequences of activities are designed following a knowledge construction model (genetic decomposition).

Keywords: *Derivative concept, derivative function graph, APOS teaching experiment, GeoGebra.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del concepto de derivada ha sido estudiada a nivel internacional y nacional (Larsen et al., 2017; Sánchez-Matamoros y García, 2015). La importancia de este concepto en el currículo de bachillerato y primeros cursos universitarios se evidencia por su presencia en los libros de texto (Vargas et al., 2020) y su aplicación en diversos campos científicos y tecnológicos. Sin embargo, en su enseñanza, se tiende a enfatizar las aproximaciones algorítmicas concediendo menos atención a la noción de razón de cambio introducida mediante la tasa de variación media (Contreras, 2000). En los últimos años, la emergencia de herramientas digitales como GeoGebra permiten cambiar esta tendencia favoreciendo la relación entre los modos de representación gráfico, numérico y analítico

Lillo, E., Moreno, M., Orts, A. y Llinares, S. (2023). Comprensión de la gráfica de la función derivada: de proceso a objeto. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 323–330). SEIEM.

para apoyar la construcción del significado geométrico de la tasa de variación media (Orts et al., 2018). En este estudio se analiza la introducción del concepto de derivada desde la idea de variación enfatizando las conexiones entre representaciones con el uso del software GeoGebra. La hipótesis que subyace en este planteamiento es que la comprensión de la gráfica de la derivada, entendida como la capacidad de interpretar y entender el significado y las características de su representación gráfica, se puede favorecer aprovechando la noción de variación, el paso al límite y la tecnología para construir oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, en particular mediante la herramienta específica rastro que incorpora GeoGebra y la conexión entre registros de representación (Asiala et al., 1997). El problema de investigación planteado explora el papel de la tecnología para favorecer la comprensión de la gráfica de la función derivada, a partir de la tasa de variación, mediante un entorno de enseñanza diseñado ad hoc haciendo énfasis en la relación entre la tasa de variación y la pendiente empleando recursos visuales interactivos.

MARCO CONCEPTUAL

Esta investigación se apoya en tres marcos teóricos: la teoría APOS (Arnon et al., 2014), la teoría de la representación semiótica (Duval, 2017) y la génesis instrumental para caracterizar el resultado de la reflexión sobre la relación actividad-efecto (Rabardel, 1995).

La teoría APOS (Arnon et al., 2014), acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, se basa en el concepto de abstracción reflexiva para describir y explicar cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos (en nuestro caso, la gráfica de la función derivada). Esta teoría contempla varios mecanismos mentales para describir cómo los estudiantes construyen diferentes formas de conocer los conceptos matemáticos. Así, una acción es la manipulación de objetos matemáticos, mientras que la interiorización de esta acción como proceso se refiere al proceso por el cual un individuo toma conciencia de que es posible concebir esta secuencia de acciones sin realizarlas. Cuando el estudiante se da cuenta de que algunas propiedades puede actuar sobre el proceso, es cuando asumimos que el proceso se encapsula en un objeto mental. De manera inversa, la desencapsulación es el mecanismo mental de reconocer las propiedades y relaciones que pueden actuar sobre el proceso. En el caso de la comprensión de la gráfica de la función derivada, una acción es manipular la recta tangente y comprender su relación con la función, un proceso es imaginar la gráfica de la función derivada sin necesidad de utilizar la recta tangente. Encapsular la gráfica de la función derivada como objeto implica analizar características locales y globales de la gráfica de la función derivada en relación a la función original, mientras que desencapsular es utilizar estas características para representar la derivada a partir de la función. El proceso de investigación basado en la teoría APOS implica realizar un análisis del concepto que permite proponer un modelo hipotético de construcción de las formas de conocer denominado descomposición genética (Orts et al., 2016) con el cual diseñar e implementar un experimento de enseñanza para recabar información que permita refinar la descomposición genética inicial.

La segunda perspectiva teórica usada es la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 2017). Según Duval (2017), la actividad matemática se lleva a cabo en un contexto de representación utilizando notaciones simbólicas, gráficas o verbales. Se identifican dos tipos de representaciones: las imágenes mentales que un individuo tiene sobre un objeto y las representaciones semióticas que utilizan signos que pertenecen a un sistema de representación para comunicar los significados. En el caso del concepto de derivada, pueden ser el registro gráfico/geométrico y simbólico/analítico.

Finalmente, la génesis instrumental (Rabardel, 1995) describe y explica cómo las tecnologías pueden integrarse en el proceso de enseñanza de las matemáticas para apoyar el desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos. La génesis instrumental estudia cómo un artefacto se convierte en un instrumento cuando el resolutor resuelve problemas (Artigue, 2002). La génesis instrumental permite describir cómo la reflexión sobre la relación actividad-efecto, cuando se usan instrumentos

tecnológicos como GeoGebra, ayuda a los estudiantes a construir un concepto como un objeto cognitivo a partir de la resolución de las tareas instruccionales (Simon y Tzur, 2004).

La pregunta de investigación es: ¿Cómo un recurso tecnológico (GeoGebra) favorece la encapsulación como objeto de la gráfica de la función derivada en estudiantes de primero de Bachillerato al potenciar la reflexión sobre la relación actividad-efecto?

METODOLOGÍA

Participantes y contexto

Los participantes de este estudio son un grupo de 29 estudiantes de primer curso de Bachillerato LOE de la modalidad de Ciencias y Tecnología que participaron en el tercer trimestre de 2022 en un experimento de enseñanza, sobre la construcción del concepto de gráfica de la función derivada, diseñado ad hoc. Los estudiantes habían completado el tema sobre el concepto de límite de una función y era su primer contacto con el concepto de derivada. El curso anterior, se realizó una prueba piloto con otro alumnado. Para el experimento se formaron 11 grupos de 2 o 3 miembros atendiendo al criterio de rendimiento académico similar y sintonía para facilitar la comunicación. Previo al experimento se instruyó a los estudiantes en el uso de dos programas de software libre y de código abierto: Obs Studio para la grabación de video y el software de geometría dinámica GeoGebra que permite la representación algebraica, gráfica y tabular. Se creó una página web donde los estudiantes podían trabajar con los applets y subir ellos mismos sus grabaciones de vídeo al finalizar la sesión. Además, se les proporcionaron, en papel, los enunciados de las tareas para responder a las actividades.

El experimento constaba de 6 tareas y se realizó en 6 sesiones de 55 minutos sin que hubiese ninguna puesta en común durante las sesiones. En cada sesión los estudiantes debían resolver una tarea que contenía varias actividades (tabla 1) trabajando cada grupo de manera independiente y con explicaciones en gran grupo para aclarar conceptos puntuales. Cada tarea, salvo la última, se acompañaba de un applet de GeoGebra. Las actividades se construyeron atendiendo a una descomposición genética del concepto de función derivada generada como hipótesis de la construcción de la comprensión de la gráfica de la función derivada, que se apoyaba en la invariabilidad de la pendiente en una recta y la noción de tasa de variación.

Tabla 1. Estructura del experimento de enseñanza

S	Objetivos desde la Descomposición Genética	Foco de la tarea
1	Observar la invariabilidad de la pendiente en una recta	i) La pendiente de una recta como razón entre los desplazamientos verticales y horizontales. ii) Uso del deslizador para observar gráfica, analítica y numéricamente que la pendiente no depende ni del número de triángulos considerados ni del intervalo considerado. iii) La invariabilidad de la pendiente de una recta no puede aplicarse en una curva.
2	Establecer la idea de tasa de variación media	i) La TVM de forma geométrica y numérica en un intervalo. ii) La TVM de forma geométrica y numérica en una partición del intervalo para obtener información de la gráfica de la función utilizando el "mecanismo de triángulos" junto a los valores de las distintas tasas de variación media.
3	De la tasa de variación a la función derivada: TVI como límite de la razón de cambio	i) Uso de la TVM, en su registro numérico y geométrico, para observar cómo las diferentes TVM convergen hacia un valor al hacer cada vez menor la longitud del intervalo dejando el extremo inferior fijo. ii) Introducir el concepto de tasa de variación instantánea como el valor al que convergen las diferentes TVM. iii) Formar la idea de función derivada al poder asignar a cada punto del dominio de la función un y solo un valor como TVI.

		iv) Obtención analítica de la definición de TVI como límite de la razón de cambio.
4	De la tasa de variación a la función derivada: Igualdad del límite de la razón de cambio y el cociente incremental	i) Identificar la TVM con la pendiente de la recta secante. ii) Uso del deslizador de GeoGebra para visualizar dinámicamente la convergencia de las rectas secantes a la recta tangente. iii) Obtención de la pendiente de la recta tangente como el valor al que convergen los valores de las pendientes de las rectas secantes y su identificación con la TVI y viceversa. iv) Establecer la igualdad entre la TVI y la derivada en un punto utilizando la noción de límite de la razón de cambio y el cociente incremental.
5	La función derivada como proceso a partir de la recta tangente	i) Relacionar gráfica y numéricamente el valor de una función en un punto y el valor de la derivada en ese punto. ii) Representar la gráfica de una función derivada al desplazar la recta tangente por la gráfica de la función. iii) Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su derivada, f'. iv) Realizar un esbozo de la gráfica de f' a partir de la gráfica de la función.
6	Gráfica de la función derivada como objeto	i) Relacionar la gráfica de una función derivada con la gráfica de su primitiva. ii) Realizar un esbozo de la gráfica de la función a partir de la gráfica de su primitiva.

Datos de la investigación

Los datos de esta investigación proceden de las grabaciones de las interacciones de los estudiantes con el ordenador (audio y registros escritos; de las producciones de los estudiantes en papel y de las notas del profesor). Solo se consideraron tres grupos de estudiantes de los 11 que participaron en el experimento de enseñanza porque generaron datos en todas las sesiones y sus aportes permitía realizar el análisis de todas las grabaciones, producciones escritas y anotaciones del profesor.

Análisis

El análisis de los datos se realizó conjuntamente por cuatro investigadores para discutir diferencias en las interpretaciones y consensuar los resultados. El análisis se llevó a cabo en dos fases. En la primera revisamos las respuestas de cada grupo a cada tarea para identificar los momentos de la resolución y el papel que desempeñaban los modos de representación (interacciones con los applets). Una vez identificados estos momentos, los relacionamos con la descomposición genética conjeturada. Con el fin de dar cuenta de las posibles construcciones mentales que los estudiantes estaban haciendo, se realizó un análisis. En la segunda fase, para cada grupo de estudiantes se analizó la resolución de la secuencia de tareas y el papel de la tecnología en su resolución, identificando evidencias de la reflexión de los estudiantes sobre la relación actividad-efecto al coordinar registros gráficos/geométricos y numéricos/algebraicos cuando manipulaban los applets (génesis instrumental). Este análisis permitió generar perfiles sobre cómo se construyó el significado de la gráfica de la función derivada.

RESULTADOS

En esta comunicación describimos dos características que parecen determinar la encapsulación del significado de la gráfica de la función derivada como proceso en objeto a partir de la reflexión sobre la relación actividad-efecto realizada por los estudiantes: (i) La dificultad de considerar el proceso de paso al límite (como un hito que debe superarse) y (ii) la necesaria coordinación de los registros gráficos/geométricos y numéricos/algebraicos cuando se usan instrumentos tecnológicos (génesis instrumental) (como un hito que determina la encapsulación de proceso a objeto).

Dificultad para considerar el proceso de paso al límite

Uno de los aspectos característicos viene dado por la dificultad en considerar el paso al límite. Por ejemplo, el grupo GP12 identificó el punto al que convergen las TVM como la TVI. Sin embargo, la

falta de comprensión del concepto de límite les impidió asignar un valor y dotarlo de significado. Esta dificultad se evidenció: (i) en su incapacidad para expresar en el registro simbólico o analítico el paso al límite de la sucesión de TVM, (ii) en hallar el valor límite del cociente incremental cuando h tiende a 0, y (iii) cuando en el registro gráfico no se identifica la recta a la que converge la sucesión de rectas secantes. Aunque la tecnología les permitió reconocer la gráfica de la función derivada de una función como una acción y representar la gráfica de una función derivada distinta a la del applet, a partir del establecimiento de similitudes y diferencias, estos estudiantes no consiguieron dotar de significado la gráfica representada porque no pudieron relacionar la gráfica de una función con la de su derivada si no podían establecer relaciones con la representada en el applet. Por ejemplo, cuando se pedía relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su derivada, diferentes a las del applet (actividad 5.3), las alumnas respondían:

E: Es que claro, yo ésta la he hecho... [Refiriéndose a la gráfica de la tarea anterior, figura 1]

O: Teniendo en cuenta esta, que es girada [Refiriéndose a la gráfica del applet], por eso hemos sabido que es justo al revés, pero, ¡es que las otras!?? [las gráficas de la actividad]

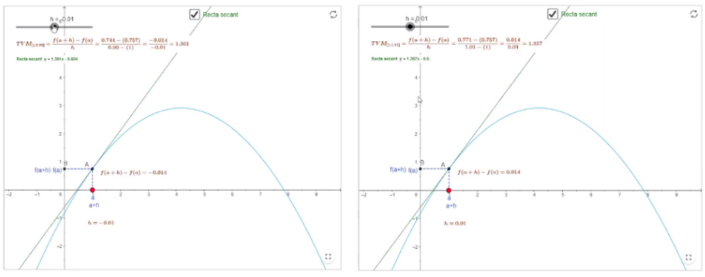
Figura 1. Derecha gráfica del applet. Izquierda gráfica representada por el grupo GP12 en actividad 5.2



Reflexión sobre la relación actividad-efecto apoyando la génesis instrumental

La reflexión sobre la relación actividad-efecto apoya la génesis instrumental. Identificamos dos características: (i) la coordinación entre los registros gráfico y numérico para construir la recta tangente como el límite de la sucesión de las rectas secantes, y (ii) el uso del rastro generado por un punto M con abscisa en el dominio de la función y ordenada igual a la pendiente de la recta tangente para identificar la función derivada. Por ejemplo, en la actividad donde se les pedía que dibujaran la recta a la que se aproximaban las secantes cuando h=0 (la recta no aparecía en el applet) (actividad 4.2.c), la estudiante R explicaba a su compañera cómo obtener dicha recta:

Figura 2. Respuesta del grupo GP16 a la actividad 4.2.c



R: Aquí pasa una recta secante y te dice que hay un valor de h en el que no existe función, es una asíntota [refiriéndose a la recta tangente]. Entonces tienes que dibujar la recta secante que pasaría por ahí [refiriéndose a la recta tangente], pero a ti no te la pone, porque no existe [cuando h= 0 la recta secante no aparece en el applet al no estar definida]. Entonces hemos cogido….

C: ¿cómo?

R: porque cuando h vale 0 la función no existe [refiriéndose a la recta tangente], la recta secante.

[…]

R: Lo que hemos hecho es coger un valor muy aproximado a cero por la derecha y un valor muy aproximado a 0 por la izquierda y dibujar la de en medio que es lo que sería. Eso es lo que estamos haciendo

Por otro lado, la respuesta del grupo GP14 a la cuestión que pedía completar una tabla con distintos valores de h y determinar a qué valor se aproxima la TVM o pendiente de la recta tangente cuando h tiende a 0 (cuestión 4.2.b), mostraba cómo obtenían el valor numérico de la pendiente de la recta tangente y cómo coordinaban los registros numéricos y gráficos en un solo proceso:

Ro: … cuando pones h aproximándose a 0 básicamente pones el TVI […]

Ro: se está aproximando a … [mientras va desplazando h a valores cercanos a 0 por la derecha y la izquierda en el applet]

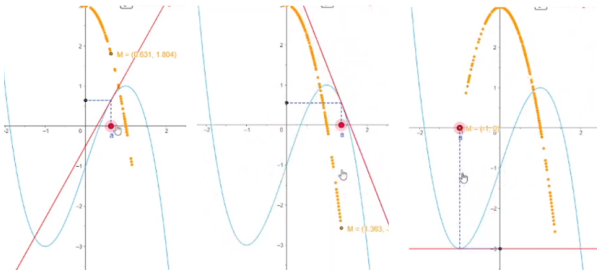
Cr: 1,36 […]

Cr: Sí, la derivada es la pendiente de la recta tangente, es lo mismo. La derivada y la pendiente de la recta tangente es lo mismo, es lo que calculábamos el otro día, que era el punto que no se podía calcular [Refiriéndose cuando h=0].

Este proceso se generó a partir de la coordinación de lo gráfico y lo numérico y permitió a los estudiantes encapsular la recta tangente como un objeto, manipularla e identificar el rastro de M generado por sus pendientes como la función derivada (como una evidencia de la reflexión sobre la relación actividad-efecto). Así, en la actividad en la que se pedía, usando el applet, completar una tabla relacionando el punto M y la recta tangente, y determinar alguna relación con un concepto previamente estudiado (actividad 5.1), la alumna C del grupo GP16 reconocía la función derivada:

C: A ver, vamos a dibujar todos los puntos, ¿lo he dibujado pasando por aquí? No, ¿verdad?, ah, sí, sí, sí, está dibujando. Es por donde pasa M. M es el conjunto de todas las pendientes pero que también forma una derivada [desplazan la recta tangente observando el rastro de M].

Figura 3. Respuesta grupo GP16 actividad 5.1



El uso simultáneo de la recta tangente y el rastro permitió al grupo GP16 relacionar los extremos relativos y la monotonía de la función con los ceros y el signo de la función derivada. Esto es lo que evidencia la encapsulación de la gráfica de la función derivada como objeto. Por ejemplo, en la resolución de la tarea en la que se pedía analizar la gráfica de una función, determinar las características de su función derivada f'(x), y esbozar la gráfica de f'(x) justificando la respuesta (actividad 5.2), este mismo grupo indicó:

C: Cuando llegamos al máximo es una recta horizontal y en el otro lado yo creo que igual, sí. [Desplazando la recta tangente del máximo al mínimo], cuando llega aquí [en el mínimo] […]

R: pasa por aquí y por aquí [Refiriéndose a los puntos de corte]. Es como habíamos dicho, ahora falta saber si es feliz o triste [Refiriéndose a la curvatura de la función derivada] […]

R: Si lo pones en medio, si lo pones en medio del máximo y el mínimo está en medio, está arriba. [la recta tangente es creciente] […]

R: yo creo que es contenta.

Estas alumnas lograron representar la gráfica de la función primitiva a partir de la gráfica de una derivada, que puede ser entendido como evidencia de desencapsular la gráfica de la función derivada identificando extremos relativos y monotonía, aunque mostraron dificultades en puntos de inflexión con tangente horizontal. Por ejemplo, cuando indicaron:

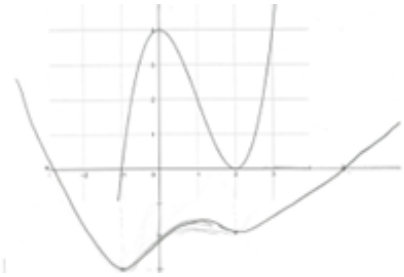
C: Ésta pasa dos veces, pasa solo 2 veces. [corta al eje OX]

H: Entonces tiene dos máximos o mínimos. […]

C: Tiene que hacer algo así [figura 4]. Sí, pero es que me parece raro, no sé, no me pega, en plan. Porque todas tenían un … […]

C: Ya. Pero no sabemos, por qué, hasta donde sube [No identifican el punto de inflexión].

Figura 4. Respuesta grupo GP16, a la actividad 6.2 que pedía realizar un esbozo de la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada



DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esa investigación tenía como objetivo caracterizar el desarrollo de la comprensión del significado de la gráfica de la función derivada cuando se introducen instrumentos tecnológicos que favorecen la reflexión sobre la relación actividad-efecto (génesis instrumental). Los resultados muestran dos características relevantes en la transición de conocer la gráfica de la función derivada como proceso a objeto: (i) dificultad para conocer el proceso de paso al límite, y (ii) el papel desempeñado por la reflexión sobre la relación actividad-efecto para apoyar la génesis instrumental.

Cuando los estudiantes comprenden el paso al límite pueden construir y dar significado a la recta tangente y a su pendiente como la derivada de una función en un punto, coordinando los registros numérico y gráfico. Sin embargo, cuando los estudiantes tienen dificultades en el paso al límite no construyen el concepto de TVI ni el de recta tangente. Estas limitaciones vienen dadas porque el concepto, la TVI o la recta tangente, se define mediante un paso al límite, como aquel valor al que converge la sucesión de TVM o de rectas secantes, respectivamente. Para los estudiantes el límite es un concepto definido y que les permite resolver ciertas tareas procedimentales, como calcular $\lim_{x\to 1} x^2$ ó hallar el valor al que se aproxima una sucesión como 0,9; 0,99; 0.999 … pero no han interiorizado su significado debido a la no coordinación entre los registros numérico y gráfico y un uso inadecuado de la tecnología como sucede con las alumnas del grupo GP12.

La segunda característica en la construcción de la gráfica de la función derivada como un objeto implica transitar desde la gráfica de una función a la gráfica de la correspondiente función derivada. La tecnología ha demostrado ser útil en este proceso, permitiendo el uso simultáneo de la recta tangente y el rastro de sus pendientes, lo que facilita la encapsulación de la función derivada como objeto (mediante la utilización del rastro para el reconocimiento de la función derivada y el establecimiento de relaciones con la gráfica de la función con apoyo de la recta tangente). La tecnología permite a los estudiantes reflejar estas características, relacionar la monotonía de la recta tangente con el signo de la derivada de la función. Al mismo tiempo, permite relacionar los puntos donde la pendiente de la recta tangente es 0 con los extremos relativos de la función, relacionar los extremos relativos de la función con los puntos de corte de la función derivada con el eje de abscisas. Esta segunda característica es la que permite a los estudiantes representar gráficamente la función

derivada a partir de la gráfica de la función primitiva, y representar gráficamente la función primitiva a partir de la gráfica de la función derivada.

Los resultados de esta investigación permiten complementar el conocimiento que teníamos del proceso de comprensión de los estudiantes de la gráfica de la función derivada (Asiala et al., 1997) cuando introducimos recursos tecnológicos para favorecer los procesos de reflexión sobre la relación actividad-efecto (Simon y Tzur, 2004) que se apoyan en la génesis instrumental (Rabardel, 1995) al aprovechar la potencialidad de los applets que permiten apoyar la noción de variabilidad y la coordinación de los diferentes registros (Duval, 2017).

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. D., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Contreras, A. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad: una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En N. Climent, ,L.C. Contreras, y J. Carrillo. (Eds.) *Actas del IV Simposio de la SEIEM*

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Registers of Semiotic Representations*. Springer Nature. http://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D. y Graham, K. (2017). Understanding the Concepts of Calculus: Frameworks and Roadmaps Emerging from Educational Research. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 526-550). NCTM.

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. (2016). Elementos para una descomposición genética del concepto de recta tangente. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 10,* 111-134. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.164

Orts, A., Boigues, F. y Llinares, S. (2018). Génesis instrumental del concepto de recta tangente. *Acta Scientiae, 20*(2), 78-95. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3833

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Sánchez-Matamoros, G. y García, M. (2015). Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada. En C. Azcarate, M. Camacho-Machin, M.T. González y M. Moreno, (Eds.). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 97-103).

Simon, M.A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). La derivada en los libros de texto de 1º de Bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (18)*, 87-102. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.288

RECOMENDACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA PRENSA PARA MUJERES DEL SIGLO XIX: MATERIALES Y RECURSOS

Recommendations for mathematics education in the 19th women's press: materials and resources

Madrid, M.J.[a], León-Mantero, C.[b], Casas-Rosal, J.C.[b] y Maz-Machado, A.[b]

[a]Universidad Pontificia de Salamanca, [b]Universidad de Córdoba

Resumen

Los materiales y recursos ocupan un papel relevante en la educación matemática y por tanto también en la historia de las matemáticas y la educación matemática. Considerando esto, el objetivo de este estudio es presentar algunos de los materiales y recursos que se incluían para la enseñanza de las matemáticas en La Educanda, una revista madrileña enfocada a las mujeres que se publicó entre 1861 y 1865 y no estaba especialmente dedicada ni a las matemáticas ni a la educación matemática. Para ello, se ha realizado una investigación descriptiva considerando como técnica el análisis de contenido y enfocada en los materiales y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los resultados muestran como una publicación destinada a las mujeres incluye entradas específicas sobre educación matemática en las que aborda el uso de distintos materiales y recursos como juegos, tableros contadores, objetos cotidianos, etc.

Palabras clave: *materiales y recursos, historia de las matemáticas y educación matemática, siglo XIX, prensa para mujeres.*

Abstract

Materials and resources play a relevant role in mathematics education and therefore also in history of mathematics and mathematics education. Considering this, the aim of this study is to present some materials and resources that were included to teach mathematics in La Educanda, a journal from Madrid focused on women that was published between 1861 and 1865 and was not specially dedicated neither to mathematics nor to mathematics education. For this purpose, a descriptive study has been carried out considering content analysis as the analysis technique and focused on the materials and resources for teaching and learning mathematics. The results show how a publication aimed specifically at women includes entries on mathematics education in which the use of different materials and resources such as games, counting boards, daily objects, etc., is discussed.

Keywords: *materials and resources, history of mathematics and mathematics education, 19th century, women's press.*

INTRODUCCIÓN

Los materiales y recursos ocupan un papel relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, prueba de ello es la gran cantidad de investigaciones en este ámbito que podemos encontrar desde muy distintas perspectivas, incluida la historia de las matemáticas y la educación matemática.

Tal y como indican Flores et al. (2011), la historia de los materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas no es reciente. Por ello podemos encontrar investigaciones en educación

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Maz-Machado, A. (2023). Recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas en la prensa para mujeres del siglo XIX: materiales y recursos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 331–338). SEIEM.

matemática que buscan conocer qué materiales o recursos se han utilizado en los procesos de enseñanza aprendizaje de estos contenidos en el pasado. Por ejemplo, Carrillo (2018) analiza los ábacos o tableros contadores que aparecen en distintos catálogos de material escolar de los siglos XIX y XX; Meavilla (2022) presenta un rompecabezas formado por bloques cúbicos y prismáticos que fue diseñado en el siglo XIX por el pedagogo alemán Friedrich Fröbel y que estaba dirigido a los niños y niñas del Kindergarten; Albuquerque et al. (2018) estudian las posibilidades didácticas del ábaco de Gelbert del siglo X; Carrillo-Gallego, Maurandi-López y Olivares-Carrillo (2021) analizan los juegos educativos característicos del método de Decroly.

La historia de las matemáticas y la educación matemática cuenta entre sus fuentes primarias más destacadas con manuales o libros de texto del pasado, como puede verse en gran variedad de estudios en este campo, por ejemplo, Malovichko (2021) presenta la evolución de la enseñanza de la teoría de la probabilidad considerando el libro de V. P. Ermakov publicado en el siglo XIX; Muñoz-Escolano et al. (2022a) analizan el papel del porcentaje a través de 29 enciclopedias escolares españolas; Español González y Manterola Zabala (2021) estudian el texto *Instituciones Matemáticas* de Antonio Rosell.

Sin embargo, los manuales o libros de texto no son las únicas fuentes de información posible, y entre las opciones podemos considerar la prensa del pasado, por ejemplo, Muñoz Escolano et al. (2022b) analizan la sección de problemas de matemáticas presente en el boletín *La Escuela* entre 1913 y 1916.

En particular, en este trabajo vamos a centrarnos en la prensa dedicada a las mujeres que surgió principalmente en el siglo XIX. Los primeros ejemplos de prensa con cabecera en femenino y dedicados a la mujer los encontramos ya en el siglo XVIII, en particular, en *La Pensadora Gaditana* editada por primera vez en 1763 y en *La Pensatriz Salmantina* (1777). Sin embargo, a otros intentos posteriores de publicaciones en esta línea como el *Diario del Bello Sexo* (1795), el *Lyceo general del bello sexo o Décadas eruditas y morales de las damas* (1804) o el *Diario de las damas* (1804), se les negó el permiso de publicación. Como única excepción en 1804 se edita en Cádiz un suplemento destinado al público femenino del *Diario Mercantil de Cádiz,* el *Correo de las Damas*, que sin embargo dejó de publicarse en 1808 (Sánchez Hita y Román López, 2014).

Será en el período entre 1813 a 1899 en el que aparecerán en España más de 100 revistas dedicadas específicamente a la mujer lectora; eso sin tener en cuenta aquellas dedicadas a los niños o a las familias que en muchas casos iban también dedicadas implícitamente a la mujer (Palomo Vázquez, 2014).

Estas primeras revistas femeninas españolas incluyeron contenidos literarios, educativos, ecos de sociedad, novedades teatrales, curiosidades, noticias sobre moda, etc. Sin embargo, salvo contadas excepciones, la mayoría no sobrevivieron más de unos meses. Otro aspecto a destacar es que aunque muchas de estas publicaciones estaban dirigidas por hombres, a medida que avanzó el siglo y se generalizó la tirada de periódicos para ellas, aumentó también la participación de periodistas femeninas y el papel de la mujer en el negocio editorial (Palomo Vázquez, 2014; Prego y Cabrera, 2019; Roig, 1977).

En esta línea, Roig (1977) destaca la labor de un grupo de mujeres periodistas en un momento en el que el analfabetismo alcanzaba a la mayoría de la población femenina. En concreto según el censo de 1860 solo un 11,9% de la población femenina estaba alfabetizada, aunque con grandes diferencias entre provincias, entre las que destaca Madrid con un 34,6 % (Sarasúa, 2004). En este sentido, la cifra de mujeres alfabetizadas en Madrid pudo propiciar que precisamente allí fuera donde se editaran más publicaciones destinadas al público femenino (Sánchez Hita, 2022).

Además, en la segunda mitad del siglo XIX aparecen una serie de publicaciones que responden a la demanda de una educación formal para las niñas y las jóvenes. Estas iniciativas se ven favorecidas

por la entrada en vigor de la *Ley de Instrucción Pública* (1857), conocida como Ley Moyano, que garantizaba la educación primaria para niños y niñas (Sánchez Hita, 2022).

En esta línea, distintos autores han analizado planes de estudio y manuales para la formación matemática de maestras en este siglo (López Esteban, 2011; Meavilla y Oller, 2013; Puig, 2019).

Sin embargo, el papel de las revistas para mujeres no se ha analizado desde la perspectiva de la historia de las matemáticas y la educación matemática. Por ello, hemos seleccionado dentro de este perfil de revistas, la revista *La Educanda* que se publicó en Madrid del 1 enero de 1861 al 31 de diciembre de 1865.

La Educanda vive dos etapas muy diferenciadas. La primera se extiende del 1 de enero de 1861 al 15 de noviembre de 1862. La segunda comienza a partir del 8 de diciembre de 1862, cuando se funde con la empresa de *El Correo de la Moda*, y continúa hasta el 31 de diciembre de 1865, fecha a partir de la cual se integrará al *Correo de la Moda*. Las diferencias entre ambas etapas pueden verse tanto en la composición y edición de la revista, como en el aumento de la frecuencia en la segunda etapa, que sin embargo no significa un mayor número de páginas, por el contrario, la revista pasa de 16 a 8 páginas por ejemplar, con una disminución de tamaño (Sánchez Hita, 2022).

Prego y Cabrera (2019) consideran que *La Educanda* es una de las revistas más relevantes dedicadas a la educación de la mujer, indicando a su vez que tiene un carácter católico conservador. Roig (1977) indica que era una revista bien dirigida, redactada y confeccionada.

En este estudio, seguimos con la línea de los distintos trabajos en los que hemos analizado el papel de las matemáticas en la prensa española general del siglo XVIII (Madrid et al., 2023). En concreto, nuestra pregunta de investigación se centra en qué materiales y recursos eran utilizados para transmitir conocimientos matemáticos en la prensa para mujeres del siglo XIX en España. Para identificarlos, el objetivo de esta comunicación es analizar los diferentes contenidos sobre educación matemática incluidos en *La Educanda,* poniendo el foco en las ideas sobre materiales y recursos que reflejan dichos contenidos. Mediante este pretendemos encontrar evidencias de la transmisión de conocimientos relacionados con la enseñanza de las matemáticas en contextos no educativos y no formales orientados específicamente hacia las mujeres en el pasado.

METODOLOGÍA

Se presenta una investigación exploratoria, descriptiva y ex post facto, centrada en un estudio de caso (Muñoz-Catalán, 2021). Se trata de una investigación de tipo histórico matemático basada en el análisis de textos antiguos desde la perspectiva de la historia de las matemáticas y la educación matemática.

Para realizar este trabajo se ha utilizado la técnica de análisis de contenido, siguiendo las directrices que ya han sido utilizadas en otras investigaciones, por ejemplo, Madrid et al. (2021, 2022, 2023). Se definieron como unidades de análisis cada uno de los párrafos de todos los ejemplares de la publicación. Estos se leyeron, analizaron y categorizaron considerando la presencia o no de materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas en las distintas entradas.

La búsqueda y localización de todos los ejemplares publicados de la revista se realizó a través de la Biblioteca Digital Memoria de Madrid y la Hemeroteca Digital de la Biblioteca Nacional de España.

RESULTADOS

Como ocurría en otras publicaciones periódicas no especializadas (Madrid et al., 2023), el papel de las matemáticas y su enseñanza a lo largo de los años de publicación de *La Educanda* es menor. Pese a ello, sí es posible encontrar algunos ejemplos de materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas presentes en la revista.

La geometría y el dibujo lineal en la instrucción de la mujer

El 1 de marzo de 1861, el quinto número de *La Educanda* incluye este artículo publicado por un autor que sólo indica las iniciales de su nombre (R. P., 1861a).

En esta entrada el autor valora la utilidad de la geometría y el dibujo lineal para la mujer, indicando que, aunque no para las mismas ocupaciones y oficios que para el hombre, estas sí le serán útiles a las mujeres para los cuidados y tareas del hogar o la familia.

Entre los ejemplos que se indican se incluye el menaje del hogar:

> nadie forma idea exacta de la bondad, belleza, duración y conveniencia de un mueble, u otro cualquier objeto del menaje doméstico, sin el auxilio de conocimientos geométricos más o menos extensos; nadie ordena y armoniza las cosas materiales sin la apreciación de la regularidad é irregularidad, de la igualdad, semejanza, simetría, etc. (R.P., 1861, p. 72)

También valora la importancia en la enseñanza de las niñas de los principios generales de la geometría y el dibujo lineal por su aplicación al trazado y cortes de prendas de vestir, a los bordados, a los patrones y modelos, etc.

En este sentido, cabe indicar que la Ley Moyano (Ley de Instrucción pública, 1857) incluía los Principios de Geometría, de Dibujo lineal y de Agrimensura como un contenido de la Primera Enseñanza solo para niños, mientras que para las niñas estos y otros contenidos eran sustituidos por entre otros: Labores propias del sexo y Elementos de Dibujo aplicado a las mismas labores.

Consideraciones sobre el estudio de la aritmética por la mujer

El 15 de abril de 1861, el mismo autor del anterior artículo publica esta entrada (R.P., 1861b). En ella, el autor valora la utilidad del cálculo aritmético y sus aplicaciones para la mujer considerando que será necesario para ellas en la contabilidad del hogar y en la educación tanto en el hogar como en la escuela.

Considera que la mayor dificultad que se presenta en la infancia para esta materia es adquirir una idea clara de la abstracción de la cantidad numérica o el número. Por ello propone como punto de partida comprender la idea concreta del número y para ello indica que el primer ejercicio de cálculo debe ser: “la presentación de varios objetos iguales a la niña, como manzanas, nueces, botones etc., para que pasándolos uno a uno, tan iguales y hasta idénticos, adquiera la idea de los agrupamientos sucesivos de uno, dos, tres, cuatro, etc. que los expresan” (R.P., 1861b, p.122).

Del mismo modo para el conocimiento de las relaciones entre números también recomienda el uso de objetos.

Sobre la enseñanza de la aritmética en las escuelas de niñas

El 1 de julio de 1861, se pública en *La Educanda* este artículo, cuyo autor incluye solo su inicial (T., 1861). Comienza el autor indicando que las relaciones de los números y el ejercicio de las operaciones de cálculo son propias para formar hábitos de atención y raciocinio. Indica además que la aritmética no es una ciencia de lujo que la mujer debe adquirir como adorno intelectual, sino que es una ciencia indispensable para la administración económica del hogar.

Además, el autor considera que a la falta de método se debe que el número de niñas que aprende aritmética sea exiguo e incluye una serie de recomendaciones para su enseñanza, entre ellas el uso de objetos:

> Diversos objetos de una misma naturaleza, y particularmente monedas, fichas, tarjetas, dados, etc., podrán servir, por adiciones y sustracciones graduales de unidades o grupos, para enseñar el valor y las relaciones de los números, como asimismo las reglas fundamentales de la aritmética. También se podrá enseñar a expresar las dimensiones de los objetos, aplicándoles

> una unidad de medida, el metro o el decímetro, según el caso; y cuando se hayan asociado con frecuencia los objetos reales a las ideas de los números, entonces los nombres y las cifras, en la inteligencia, pasarán fácilmente del estado concreto al estado abstracto. (T., 1861, pp. 197-198)

Sigue el autor hablando del tablero contador, lo describe diciendo que está formado con 100 bolas en 10 alambres paralelos y horizontales y según sus palabras, en manos de una hábil profesora puede servir no solo para enseñar la numeración, sino también para las operaciones aritméticas. Destaca el autor además que las bolas de dos colores, dispuestas de forma alternativa, recrean la vista, cautivan la atención y facilitan los cálculos.

Expone que este instrumento muestra las cantidades y sustituye a los signos, por medio de intuiciones, permite componer y descomponer los números, hallar el producto de la multiplicación de dos factores cualesquiera menores de diez, cambiar el orden de los factores demostrando así que el producto no se altera, enseñar que la multiplicación es una forma abreviada de la adición, etc.

Compara además el contador de 100 bolas con el de 144 que utilizan las escuelas de párvulos de Inglaterra para enseñar a sumar, restar y multiplicar, diciendo que el primero es preferible porque sirve igualmente satisfaciendo todas las necesidades de esta enseñanza, y además permite evidenciar el principio del sistema decimal, puesto que la relación de unidades, decenas y centenas está a la vista en todas las operaciones.

Enseñanza del cálculo

El 1 de octubre de 1861, un autor que de nuevo indica las iniciales R. y P., comienza como en ocasiones anteriores exponiendo:

> Nada más sencillo que vencer en la niña y en la joven esa marcada repugnancia que tienen generalmente a los estudios aritméticos: repugnancia que, en nuestra opinión, nace de la manera poco comprensible con que se las exponen las primeras nociones que han de adquirir, y la aridez de los ejercicios que se adoptan y siguen rutinariamente, a pesar del cansancio y la fatiga que causa en ellas una tarea tan poco grata. (R. y P., 1861, p.294)

También en esta ocasión encontramos una breve mención al uso de materiales y recursos, el autor indica que, para la enseñanza de la cantidad, el número y las cifras destinadas a representarlos, deben emplearse objetos materiales.

Los números

El 8 de abril de 1864, A. Pirala (1864) pública esta entrada en la que habla de la importancia de conocer los números y su empleo en distintos usos. Para explicar esta importancia pone como ejemplo el uso que hará del dinero una joven que posee 1000 reales y desconoce la suma que representa esta cantidad, en contraposición con una joven que sí conoce el valor de estos.

Juegos de niños

A lo largo de varios números publicados en 1865, la revista incluye una sección llamada Juegos de niños. En concreto, el 8 de febrero de 1865 el autor P. (1865a) dice que los juegos son una rama indispensable de la educación y que, para ayudar a madres y maestras, se van a incluir detalladamente algunos juegos de niños, haciendo de ellos y de sus figuras alguna aplicación a la geometría.

Y cumpliendo con su ofrecimiento, en el siguiente número se incluye Juegos de niños. La pelota (P., 1865b), en el que el autor manifiesta que tal y como ofreció en el anterior número va a incluir la aplicación en estos juegos de algunas lecciones prácticas de geometría.

Así explica que la pelota que se ve en el aire puede representar el punto. Y a continuación, define el punto, diciendo que como lo indica su nombre, este no tiene largo, ancho ni grueso; es la cosa más pequeña que podemos figurarnos.
Continúa diciendo que en la pared que presenta en el grabado (incluido en dicha publicación) se puede observar lo que se entiende por línea.
Explica a continuación lo que es una línea: "Se llama línea al rastro o señal que deja una pluma, un lápiz ú otra materia dura al pasarla de un lado a otro sobre un papel, tablero, pared, etc." (P., 1865, pp.44-45).
Clasifica las líneas en rectas y curvas, y explica lo que son líneas rectas verticales, horizontales y oblicuas y líneas curvas, ejemplificándolo mediante el grabado del juego de la pelota.

> Es horizontal, cuando está trazada de izquierda a derecha, como con más o menos perfección demuestran las rayas que se ven en la pared en el grabado de que nos ocupamos.
> Vertical se dice, cuando está de arriba á bajo, como se ve en la misma pared en las líneas ó rayas, que hay entre las largas de que hemos hablado. Se llama también línea á plomo, porque tiene la misma dirección que tendría un hilo sostenido por un extremo, y que tuviese en el otro un perdigón de plomo u otra cosa de peso.
> Oblicua es la que se inclina más a un lado que al otro, y es la que las señoras en el corte de vestidos llaman al bies. El brazo del niño que está a la izquierda enfrente de la pared nos lo representa.
> Línea curva es aquella cuyos puntos no llevan la misma dirección. El brazo que tiene levantado el niño que está a la izquierda fuera de la pared nos lo demuestra, aunque no con toda propiedad. En otro artículo presentaremos modelos más perfectos. (P., 1865, p. 44)

La sección vuelve el 31 de marzo de 1865 con Juegos de niños. Las cuatro esquinas (1865c). En este caso explica y ejemplifica siguiendo con el método de que los juegos y sus grabados sirvan de auxiliares para algunas ligeras lecciones de Geometría, qué son rectas horizontales, verticales, paralelas, diagonales u oblicuas.
La sección vuelve a aparecer en varias ocasiones, aunque no en todas se sigue incluyendo este apartado sobre geometría. Sí lo hace el 30 de abril de 1865 cuando se habla de Juegos de niños. La cuerda (1865d, p. 124):

> De cualquier modo, que se haga girar la cuerda forma una línea *curva,* por eso se llama también juego de la comba. Bueno es que, siguiendo las lecciones prácticas que tenemos recomendadas, la madre o el aya hagan notar a las niñas lo que es una línea curva, y que en tres diferentes posturas la representa el grabado, más o menos abierta.

También el 16 de mayo de 1865 hablando del aro: "Como figura geométrica el aro es un verdadero círculo" (p.157).

CONCLUSIONES

Cabe destacar que en un momento de la historia española en el que solo un pequeño porcentaje de las mujeres estaba alfabetizado, esta publicación periódica incluía contenidos sobre educación matemática para mujeres, exponiendo recomendaciones sobre materiales y recursos que podían ser utilizados por madres o maestras para su enseñanza.

Las entradas valoran además la utilidad de las matemáticas para la mujer, en concreto del cálculo y de la geometría, enfocándolas fundamentalmente eso sí en el cuidado del hogar y las tareas propias de la mujer, y mostrando el sexismo y la segregación de oficios propia de la época.

En cuanto a los materiales, a lo largo de estas entradas es posible ver diferentes propuestas que valoran el uso de materiales y recursos como facilitadores del paso de lo concreto a lo abstracto. Destaca también la presencia de varias entradas que relacionan juegos populares con la geometría.

En definitiva, este estudio nos permite considerar el papel de la prensa como fuente de información más allá de la educación formal, mostrándonos como se hablaba de matemáticas y educación matemática en documentos diferentes a los manuales escolares o a los textos legislativos.

Además, tal y como plantean Meavilla, y Oller (2013), el uso de textos antiguos en los que los autores utilizan materiales manipulativos para transmitir distintos conceptos matemáticos es de interés en la formación del profesorado.

Finalmente hay que indicar que la continuación de este trabajo pasa por analizar otras revistas de la época y ver si este tipo de entradas son algo aislado o pueden encontrarse en alguna otra publicación. En este sentido, el número 187 de la revista *La Violeta* incluye un artículo sobre la Aritmética del corazón en el que una mujer reflexiona sobre el valor del dinero (León, 1866).

Referencias

Albuquerque, S. M. de, Pereira, A. C. C., Y Alves, V. B. (2018). Um estudo preliminar sobre o ábaco de Gerbert do século X como recurso didático para o ensino das operações aritméticas. *Espacios, 39*(52), 29.

Carrillo Gallego, D. (2018). Los catálogos de material escolar como fuente de la historia de la educación matemática: el caso de los ábacos. *Historia y Memoria de La Educación, 7,* 573-613. https://doi.org/10.5944/hme.7.2018.18638

Carrillo-Gallego, D., Maurandi-López, A., & Olivares-Carrillo, P. (2021). Los juegos decrolyanos matemáticos y los catálogos de material escolar en España (1920–1936). *Paedagogica Historica*, *57*(1–2), 85–103. https://doi.org/10.1080/00309230.2020.1831029

Español González, L., y Manterola Zabala, J. (2021). Antonio Gregorio Rosell y Viciano (ca. 1748-1829): instituciones matemáticas (1785). *Cuadernos Dieciochistas, 22,* 133–169. https://doi.org/10.14201/cuadieci202122133169

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A., y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

León, R. (1866). *La Violeta, 187*, 203-204.

Ley de Instrucción pública autorizada por el Gobierno para que rija desde su publicación en la Península é Islas adyacentes, lo que se cita. *Gaceta de Madrid, 1710*, de 10 de septiembre de 1857, 1- 3.

López Esteban, C. (2011*). La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C., y Maz-Machado, A. (2023). Mathematics in the Spanish press: a case study of the 18th century journal Semanario de Salamanca. *Humanities and Social Sciences Communications, 10*(1), 78. https://doi.org/10.1057/s41599-023-01512-5

Madrid, M. J., León-Mantero, C., Maz-Machado, A., y López-Esteban, C. (2021). Matemáticas y educación matemática en la prensa española del siglo XVIII: un instrumento para su análisis. En P. D. Diago, Y. D. F., M. T. González-Astudillo, Y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 401–408). SEIEM.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., Cuida, A., y Pedrosa-Jesús, C. (2022). Developing an Instrument for Analyzing Mathematics and Mathematics Education Ideas in the Spanish Press of the 18th Century. *Mathematics, 10*(13), 2308. https://doi.org/10.3390/math10132308

Malovichko, T. (2021). Evolution of teaching the probability theory based on textbook by V. P. Ermakov. *History of Science and Technology, 11*(2), 300–314. https://doi.org/10.32703/2415-7422-2021-11-2-300-314

Meavilla Seguí, V. (2022). Cubos y prismas triangulares para los niños y niñas de preescolar: un material didáctico de Friedrich Fröbel. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 5*(2), 1–14.

Meavilla, V., y Oller, A. M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 89-100.

Meavilla Seguí, V., y Oller Marcén, A. M. (2016). La formación de maestros y maestras elementales en España a finales del siglo XIX: el caso de la Geometría. *Contextos educativos: revista de educación*, *Extra 1*, 79-96. https://doi.org/10.18172/con.2837

Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). SEIEM.

Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., y Santágueda-Villanueva, M. (2022a). Un estudio de las enciclopedias escolares españolas (1901-1965). El caso del porcentaje. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, Y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 401–409). SEIEM.

Muñoz Escolano, J. M., Oller Marcén, A. M., y Santágueda Villanueva, M. (2022b). La sección de problemas matemáticos del boletín La Escuela (1913-1916). *Historia y Memoria de La Educación, 16*, 425–458. https://doi.org/10.5944/hme.16.2022.30828

Palomo Vázquez, M. del P. (2014). Las revistas femeninas españolas del siglo XIX. Reivindicación, literatura y moda. *Arbor, 190*(767), a130. https://doi.org/10.3989/arbor.2014.767n3001

P. (1865a). Juegos de niños. *La Educanda*, *105*, 36-37.

P. (1865b). Juegos de niños. La pelota. *La Educanda, 106*, 44-45.

P. (1865c). Juegos de niños. Las cuatro esquinitas. *La Educanda, 112*, 92-93.

P. (1865d). Juegos de niños. La cuerda. *La Educanda, 116*, 123-124.

P. (1865e). Juegos de niños. El aro. *La Educanda, 118*, 136-137.

Pirala, A. (1864). Los números. *La Educanda, 65,* 97-98.

Prego de Lis, M., y Cabrera Lafuente, A. (2019). ¡*EXTRA, MODA! El nacimiento de la prensa de moda en España.* Museo del Traje, Madrid. Ministerio de Cultura y Deporte.

Puig, Luis (2019). Geometry for women in teacher training schools in the late 19th century in Spain. En Bjarnadóttir, K., Furinghetti, F., Krüger, J., Prytz, J., Schubring, y G. Smid, H. J. (Eds.). *"Dig where you stand" 5. Proceedings of the fifth International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 301-317). Freudenthal Institute.

R.P. (1861a). La geometría y el dibujo lineal en la instruccion de la muger. *La Educanda, 5,* 72-73.

R. P. (1861b). Consideraciones sobre el estudio de la aritmética por la muger. *La Educanda, 8,* 120-122.

R. y P. (1861). Enseñanza del cálculo. *La Educanda, 19*, 294-295.

Roig, M. (1977). *La mujer y la prensa.* Autoedición.

Sánchez Hita, B. (2022). Un periódico para la instrucción y un espacio para la escritura femenina. *Arbor, 198*(805), a662. https://doi.org/10.3989/arbor.2022.805010

Sánchez Hita, B., y Román López, M. (2014). La prensa femenina en Cádiz a principios del siglo XIX. Aproximación al «Correo de las damas» (1804-1808). *Cuadernos de Ilustración y Romanticismo, 1*, 1–220. https://doi.org/10.25267/Cuad_ilus_Romant.2014.v1.01

Sarasúa, C. (2004). Aprendiendo a ser mujeres: las escuelas de niñas en la España del siglo XIX. *Cuadernos de Historia Contemporánea, 24,* 281–297. https://doi.org/https://revistas.ucm.es/index.php/CHCO/article/view/CHCO0202110281A

T. (1861). Sobre la enseñanza de la aritmética en las escuelas de niñas. *La Educanda, 13,* 197-198.

ACTIVIDAD CEREBRAL COMO RESPUESTA A DIFERENTES TIPOS DE TAREAS ARITMÉTICAS

Brain activity as a response to different types of arithmetic tasks

García-Monge, A.[a], Marbán, J.M. [a], Rodríguez-Navarro[a], H. y Escudero, A.[b]

[a]Universidad de Valladolid, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

La aritmética temprana es un elemento clave en la alfabetización matemática. Entender cómo se comporta el cerebro en las primeras etapas de la vida al enfrentarse a tareas aritméticas sigue siendo un reto abierto tanto para la neurociencia como para la educación matemática. El objetivo de esta investigación es el de caracterizar la actividad cerebral de una niña de 8 años a través de un enfoque de estudio de caso y mediante varios registros encefalográficos (EEG) tomados a lo largo de 30 sesiones. En cada sesión, se pidió a la niña que realizara 4 tipos de tareas de suma y resta, a saber, cálculo con ábaco, cálculo basado en juegos, aritmética mediada por ordenador y suma y resta convencional con papel y lápiz con números arábigos. Los resultados muestran diferencias estadísticamente significativas en la actividad cerebral entre todas las tareas, lo que nos habla de la especificidad de cada una de ellas en una persona concreta.

Palabras clave: *actividad cerebral, electroencefalografía, numeración temprana, tareas aritméticas*

Abstract

Early numeracy is at the core of mathematics literacy. Understanding how young learners´ brain behave when facing arithmetic tasks is still an open challenge both for neuroscientists and mathematics educators. The aim of this research is to characterize brain activity of an 8-years old girl through a case study approach and by means of several encephalographic records (EEG) taking along 30 sessions. In each session, the girl was asked to perform 4 types of addition and subtraction tasks, namely abacus calculation, game-based calculus, computer-mediated arithmetic and conventional paper and pencil addition and subtraction with Arabic numbers. The results show statistically significant differences in brain activity among all the tasks, which tells us about the specificity of each type of task in a particular person.

Keywords: *arithmetic tasks, brain activity, early numeracy, electroencephalography*

INTRODUCCIÓN

Existe una amplia bibliografía sobre el procesamiento cerebral ante tareas matemáticas (véase Peters y De Smedt, 2018), si bien la mayoría de los estudios se han realizado en condiciones de laboratorio y, principalmente, con poblaciones en edad universitaria. Recientemente, Anzalone et al. (2022) indicaron que, a pesar de una extensa histora de utilización de electroencefalogramas (EEG) para el estudio de diversos fenómenos neurocognitivos, son pocos los estudios que se han centrado en la actividad cerebral infantil implicada en procesos matemáticos. En este sentido, Van Atteveldt et al. (2018) señalan que uno de los principales retos de la neuroeducación es acercar la investigación a situaciones reales de aprendizaje apareciendo en este contexto los dispositivos EEG como una opción para aumentar las posibilidades de medir la actividad cerebral en tales entornos y mejorar, así, la validez ecológica de los experimentos.

Según Rosenberg-Lee et al. (2011), el segundo y el tercer grado (7-9 años) es un periodo importante para la adquisición y dominio de las habilidades matemáticas básicas. En su estudio registraron que en ese estrecho intervalo surgen cambios significativos en la respuesta y conectividad cerebral relacionados con tareas aritméticas. Las exigencias a estas edades son importantes para los años

García-Monge, A, Marbán, J. M., Rodríguez-Navarro, H. y Escudero, A. (2023). Actividad cerebral como respuesta a diferentes tipos de tareas aritméticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 339–346). SEIEM.

escolares posteriores y los problemas que surgen pueden crear ansiedad matemática y conducir a una mala relación con las matemáticas en el futuro, condicionando elecciones posteriores.

La investigación nos muestra que el entrenamiento cambia el cerebro y que el tipo de experiencia pedagógica (las metodologías utilizadas) influye en el procesamiento neuronal, pero al sujeto le afectan muchas variables de la propia tarea, así como variables personales, de desarrollo o culturales. Cada tipo de tarea (manipulativa, visual, simbólica, ...) implica diferentes demandas cerebrales (Peters y De Smedt, 2018). De hecho, existe un amplio debate sobre la relación entre el cálculo simbólico y el no simbólico (Bugden et al., 2019). Así, muchos estudios aportan evidencias de que las habilidades aritméticas simbólicas están enraizadas en circuitos neuronales que evolucionan para representar cantidades aproximadas no simbólicas y, por tanto, el entrenamiento con tareas aritméticas no simbólicas sería una forma de mejorar las habilidades matemáticas, pero también hay muchos cuestionamientos al respecto. Trabajos recientes como el de Bugden et al. (2019), entre otros, muestran algunas arquitecturas de red superpuestas y diferentes para el procesamiento de números simbólicos y no simbólicos. Además, al analizar cada tarea aparecen peculiaridades como el "efecto tamaño del problema" que lleva a utilizar diferentes vías neuronales, aunque el efecto se reduce con el entrenamiento (Núñez-Peña, 2008) o el hecho de que no todos los números se representan de la misma manera para cada persona (por ejemplo, "algunos números se aprecian como más pares que otros", Heubner et al., 2018). A esto hay que añadir las diferencias personales en la resolución de problemas de cálculo similares en función de la edad, la educación o el nivel de habilidad. Por ejemplo, Cho et al. (2011) hablan de alumnado "contador" o "recuperador" según su estrategia dominante (en cada uno de estos grupos se observaría la implicación de diferentes áreas cerebrales). A lo largo de la infancia, la escolarización modifica los circuitos cerebrales implicados en el cálculo (Battista et al., 2018). En la revisión de Peters y De Smedt (2018) se muestra que niños y niñas utilizan en tareas aritméticas redes neuronales que no coinciden plenamente con las de los adultos. Al repetir muchas veces operaciones básicas, estas se automatizan y esto reduce la demanda sobre la memoria de trabajo. Por último, en relación con estos factores personales y evolutivos, hay que considerar que cada tarea se ve afectada por contextos socioafectivos y materiales diferentes.

En este estudio, ignoraremos los factores contextuales y reduciremos la variabilidad personal estudiando las diferencias intrapersonales en las respuestas cerebrales al realizar 4 tipos diferentes de tareas de suma y resta en 30 sesiones, con el fin de caracterizar la actividad cerebral en el contexto individual de aprendizaje de las matemáticas. El análisis prestará atención a los efectos en las bandas de frecuencia delta (0,5-3Hz), theta (4-7Hz), alfa (7-13Hz) y beta (13-30Hz). Harmony (2013) observó que la actividad delta aumenta en tareas de cálculo mental, tareas semánticas y en tareas de memoria de trabajo, y Dimitriadis et al. (2010) mostraron que aumenta con la dificultad de la tarea. Soltanlou et al. (2018) concluyeron que los aumentos en la potencia theta sugerían un cambio de estrategias lentas y procedimentales hacia estrategias procedimentales y de recuperación más eficientes y automatizadas, lo que conducía a un rendimiento más eficiente. Vourkas et al. (2014) observaron una activación de red más distribuida en la banda theta a medida que aumentaban las exigencias de la tarea. En el caso de la banda de frecuencia alfa, los valores alfa reducidos podrían reflejar más recursos cognitivos utilizados por las estrategias procedimentales (Grabner y De Smedt, 2011; Hinault y Lemaire, 2016). Por último, el aumento de la potencia beta se asocia con la carga de trabajo (Pesonen et al, 2007), con la activación mental (Tatum et al., 2008) y con la resolución de problemas y la concentración (Malik y Amin, 2017).

MÉTODO

El diseño de la investigación se basó en un enfoque de caso único siguiendo la larga tradición de este tipo de estudios para la actividad cerebral siempre que el interés sea hallar diferencias intraindividuales en diferentes condiciones, lo que permite prolongar el estudio en el tiempo. Por otro lado, este caso no sería intrínseco, sino instrumental, porque la participante no tiene

características especiales y el estudio se centró en los efectos de distintos tipos de tareas en la misma persona. Al registrar la actividad cerebral durante 30 sesiones, se puede obtener una visión más precisa de los efectos de cada tipo de tarea en esta persona. El estudio fue revisado y aprobado por el Comité de Ética de la Universidad de Valladolid y el consentimiento informado por escrito para participar en este estudio fue proporcionado por los tutores legales de la participante.

Participante

La participante es una niña de 8 años seleccionada porque la familia de la niña solicitó ayuda para desarrollar un programa de refuerzo de matemáticas. La participante era diestra y estaba sana (según sus informes pediátricos y psicopedagógicos). Cursaba tercero de primaria y le gustaban las actividades de geometría, secuenciación y lógica, obteniendo antes del inicio del programa un 74% de competencia en la Escala de Competencia Matemática Temprana de Utrecht (Media 76,09, Van de Rijt et al., 1999) y mostrando ansiedad matemática ante tareas aritméticas, con un puntaje de 78 sobre 100 en la Escala de Ansiedad Matemática Temprana, (Wu et al. 2012), un fenómeno que afecta a un gran número de niñas a esta edad (por ejemplo, Van Mier et al., 2019).

Procedimiento

Se llevó a cabo un procedimiento de 30 sesiones de trabajo (26 minutos cada sesión) asociado a un programa de refuerzo matemático prediseñado y establecido por un especialista externo que tuvo en cuenta no sólo el perfil cognitivo de la participante sino también su perfil afectivo matemático y, en particular, su alto nivel de ansiedad matemática. El programa combinó 4 tipos de tareas de suma y resta (con números del 1 al 10):

- "Ábaco": sumar y restar utilizando un ábaco: Un investigador enunciaba la operación a realizar y la niña disponía de un ábaco Soroban para dar la respuesta. Para reducir posibles artefactos y centrar los registros en la tarea de cálculo, se le pidió que no diera la respuesta verbalmente.
- Cálculo "basado en juegos": En esta tarea se realizaron diferentes juegos de suma y resta basados en el "juego de la tienda". Para comprar y vender se utilizaban monedas unitarias o de diez. Se colocaron veinte productos en una bandeja (juguetes que imitaban comida o abalorios), se marcó cada uno con un precio y se pidió a la participante que comprara dos productos en cada una de sus compras, dando la cantidad de monedas correspondiente. Se le pidió que no diera la respuesta verbalmente.
- Cálculo "mediado por ordenador": Se recurrió a una plataforma online en la que se proponen diferentes operaciones aritméticas con números arábigos. Cuenta con un sistema de recompensas y un entorno virtual en el que intercambiar los puntos obtenidos por diferentes objetos virtuales. Las operaciones se realizaban con una pantalla digital en la que la niña indicaba los resultados de cada operación. Cada operación se presentaba verticalmente en el centro de la pantalla.
- Cálculo escrito: Tareas de suma y resta convencionales con números arábigos usando papel y lápiz. Cada operación se presentaba verticalmente en el centro de una página blanca.

En cada sesión, los cuatro tipos de tareas se presentaban aleatoriamente. De cada tarea se registraron 10 operaciones por sesión. Se dejó un intervalo de 4 segundos entre las operaciones. Las operaciones se centraron en las combinaciones entre números del 1 al 10 ya que el programa trataba de generar una automatización en las operaciones básicas de suma y resta. Se realizaron 10 propuestas por tarea para no superar tiempos de sesión superiores a 30 minutos en la recogida de datos EEG con niños. El tipo de cálculo requerido fue similar en las diferentes tareas. Al comienzo de cada sesión, se recogieron registros con los ojos cerrados, con los ojos abiertos y realizando una tarea consistente en escribir números del 1 al 40. Para que la participante se sintiera más cómoda,

las sesiones se realizaron en su mesa de estudio. La única modificación que se hizo fue incorporar un panel blanco de 1 m de altura alrededor de la mesa para reducir las distracciones. La sala habilitada para las sesiones no estaba aislada, pero no se registraron ruidos. La participante se sentó en una silla cómoda con los brazos apoyados en la mesa de despegue.

Al principio de cada sesión recordamos a la participante la importancia de no realizar movimientos bruscos o innecesarios (parpadeo, movimientos de la mandíbula o la lengua, tensión del cuello...). Para realizar los registros EEG, se utilizó un auricular Emotiv EPOC® con 16 electrodos, 14 canales de registro EEG (AF3, AF4, F3, F4, F7, F8, FC5, FC6, P7, P8, T7, T8, O1 y O2) y 2 electrodos de referencia (P3 y P4), posicionados según el Sistema Internacional 10-20. Los electrodos de este sistema son de contacto y de tipo salino. La impedancia de los electrodos es inferior a 5 kΩ (kilo-ohmios) para obtener una señal de buena calidad. La señal EEG registrada, con una frecuencia de muestreo de 128 Hz, se envía de forma inalámbrica a un receptor Bluetooth colocado en el ordenador. El Emotiv EPOC® dispone de un sistema de cancelación de artefactos en sus electrodos de referencia y un filtro para las frecuencias de 50 (notch filter) y 60 Hz.

Pre-procesado de la señal

El preprocesamiento de datos y los análisis se llevaron a cabo utilizando la caja de herramientas EEGLAB (v.2019.1) para Matlab (R2020a). Se eliminó la línea de base de la señal de EEG para cada canal (-200 a 0 milisegundos). Se aplicó un filtrado espacial de referencia media común (CAR). Para el filtrado frecuencial, los datos se filtraron de paso alto a 0,5 Hz para eliminar las derivas lentas. Los artefactos se identificaron visualmente y se rechazaron de los datos de los canales. Los datos se descompusieron mediante análisis de componentes independientes (ICA). Los componentes que no representaban la actividad cerebral se identificaron visualmente y se eliminaron. Para ello se utilizó la herramienta ICALabel (un clasificador de componentes independientes electroencefalográficos).

Análisis estadísticos

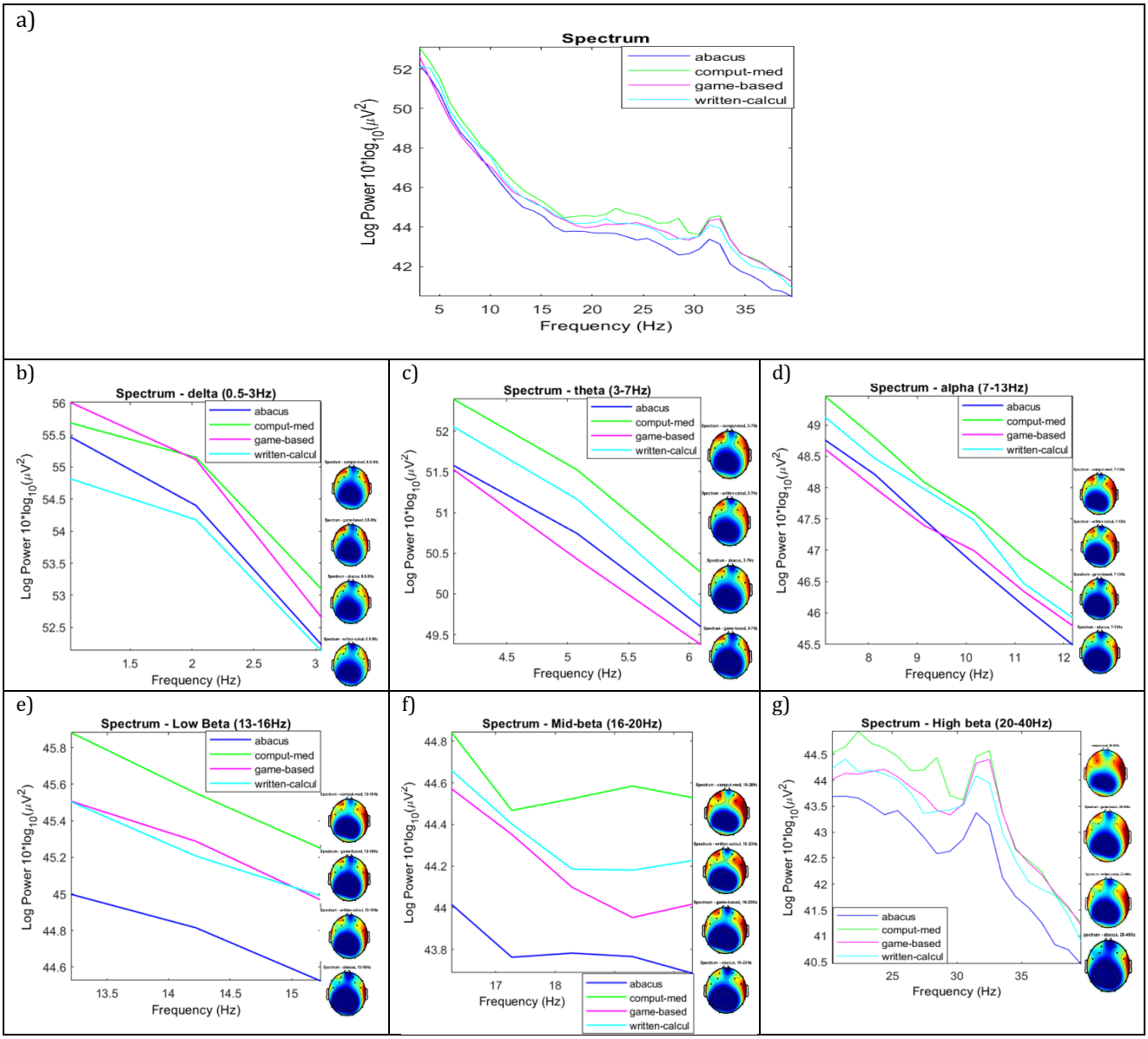
El análisis en el dominio de la frecuencia se realizó mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier 200 (FFT) (con una resolución de 0,125 Hz) para calcular la densidad espectral de potencia absoluta dentro de las bandas delta (0,5-3 Hz), theta (4-7 Hz), alfa (7-13 Hz) y beta (13-30 Hz). Se trata de una transformación logarítmica basada en la potencia a partir de la medición del microvoltio (μV) y el tiempo, calculada para cada banda de frecuencia. Dado que mide la potencia con respecto a la unidad de densidad espectral, se expresa en decibelios (dB). Las mediciones de canales y componentes se calcularon previamente. Se calcularon las métricas de densidad espectral de potencia para cada tarea. EEGLAB permite realizar análisis de varianza de los espectros de potencia. Para los espectros de potencia media, los valores p se calculan en cada frecuencia. En este caso se desarrolló una prueba de análisis de la varianza (ANOVA) para detectar diferencias estadísticas entre las cuatro tareas utilizando estadísticas basadas en permutaciones (de 2000 permutaciones). El punto específico de tiempo-frecuencia se consideró significativo a $p \leq 0{,}001$. También se realizaron análisis de varianza pareados entre los cuatro tipos de tareas.

RESULTADOS

Los resultados tras el análisis de la varianza muestran diferencias significativas entre las densidades espectrales de potencia (PSD) en todas las frecuencias (Figura 1). En la banda delta (0,5-3Hz) hay una diferencia significativa ($p<0{,}001$) en el intervalo 0,5-2,5Hz. Entre 2 y 3Hz hay una tendencia hacia la agrupación de las tareas "basadas en el juego" y "mediadas por ordenador", así como otra agrupación de "ábaco" y "cálculo escrito". En la banda theta (4-7Hz) las tareas "mediadas por ordenador" presentan los valores más altos de PSD (M=51,39), seguidas de las tareas "cálculo escrito" (M=51,02) y "ábaco" (M=50,74). El valor más bajo correspondería a las tareas basadas en juegos (M=50,44). Las diferencias no significativas se establecerían entre "ábaco" y "basado en

juegos" (p=0,1001) y "mediado por ordenador" y "cálculo escrito" (p=0,023). Los valores en la banda alfa (7-13 Hz) también muestran diferencias no significativas entre "ábaco" y "basado en juegos" (p=0,033) y "mediado por ordenador" y "cálculo escrito" (p=0,351). El "mediado por ordenador" presenta los valores más altos (M=47,86), seguido del "cálculo escrito" (M=47,57), el "ábaco" (M=47,14) y el "basado en juegos" (M=47,19).

Figura 1. Comparación de los PSD de las tareas de "ábaco", cálculo "mediado por ordenador", cálculo "basado en juegos" y "cálculo escrito". a) visión general, b) banda delta (0,5-3Hz), c) theta (3-7Hz), d) alfa (7-13Hz), e) beta bajo (13-16Hz), f) beta medio (16-20Hz), g) beta alto (20-40Hz).



DISCUSIÓN

Los valores más altos en la frecuencia delta (0,5-3Hz) en tareas basadas en juegos y mediadas por ordenador pueden estar indicando una mayor demanda de concentración, cálculo mental y memoria de trabajo. Las oscilaciones delta parecen estar implicadas en una mayor implicación emocional y en procesos cognitivos relacionados con la atención y la detección de estímulos motivadores en el entorno, aunque también pueden relacionarse con procesos de atención. Los aumentos de potencia delta en la tarea matemática difícil, por su parte, podrían interpretarse como un reflejo de la inhibición de la red de modo por defecto durante las estrategias procedimentales. Sin embargo,

debemos considerar los hallazgos de Fernández et al. (2002) en su trabajo comparando la memoria de dígitos entre adultos y niños. En esta investigación señalan que la potencia no aumentó en las frecuencias delta en los niños (que se ha relacionado con la inhibición), lo que se relaciona con una inhibición infantil deficiente debida a la inmadurez del lóbulo frontal. En este caso, los valores más altos en las tareas "basadas en juegos" podrían explicar la implicación emocional y la atención; y en las tareas "mediadas por ordenador", la atención y una mayor implicación de la memoria de trabajo en el cálculo.

En la banda theta (4-7Hz) las tareas "mediadas por ordenador", seguidas de las tareas de "cálculo escrito" presentan los valores más altos lo que puede estar reflejando un mayor uso de estrategias procedimentales y de recuperación automatizadas (recuperación de hechos aritméticos). Harmony et al. (1999) observaron aumentos en la banda theta durante una tarea aritmética compleja. Los efectos theta a 3,9 Hz estaban relacionados con la producción del habla interna, el almacenamiento y el ensayo de la memoria de trabajo verbal. Las diferencias a 5,46 Hz se consideraron asociadas a la atención sostenida. Fernández et al. (2002), al estudiar la actividad 278 de niños que realizaban tareas de retención numérica que activaban la concentración interna o la atención a la *mentación* interna, observaron aumentos de potencia dentro de las frecuencias theta en la mayor parte del córtex, un área relacionada con la memoria de trabajo. Un efecto más pronunciado en niños que en adultos puede interpretarse como un mayor esfuerzo de los niños, ya que se ha demostrado que estas frecuencias aumentan con la carga de memoria. En este caso, los valores más altos en "mediado por ordenador" y "cálculo escrito" pueden deberse al habla interna, al almacenamiento y al ensayo de la memoria de trabajo verbal.

También las respuestas a las tareas "mediadas por ordenador" y "cálculo escrito" muestran los valores más altos en la banda alfa. Los valores alfa reducidos podrían reflejar más recursos cognitivos requeridos por las estrategias procedimentales de múltiples pasos, en relación con la estrategia de recuperación menos exigente, aunque autores como Klimesh (2012) señala que el acceso prolongado a la información almacenada (en tareas como matemáticas) implica la aparición de entradas de memoria inhibitorias irrelevantes para la tarea, lo que refleja una mayor actividad de la banda alfa. Además, Fernández et al. (2002) observaron que la potencia alfa disminuía en los adultos, mientras que aumentaba en los niños y explicaron que este resultado concuerda con la hipótesis de una respuesta inmadura en los niños. En este caso, los valores más altos en "cálculo mediado por ordenador" y "cálculo escrito" frente a "ábaco" o "basado en juegos" podrían deberse a un acceso prolongado a la información almacenada (Klimesh, 2012).

El aumento de la potencia beta se asocia con la carga de trabajo (Pesonen et al., 2007), con la activación mental (Tatum et al., 2008) y con la resolución de problemas y la concentración (Malik y Amin, 2017). Esos procesos podrían explicar los valores más altos de "mediada por ordenador". La mayor diferencia con las otras tareas se encuentra en el rango beta bajo, que Abhang et al. (2016) asocian con la concentración focalizada e introvertida y Spüler et al. (2016) con la dificultad de la tarea. Además, Abhang et al. (2016) señalan que el beta alto estaría asociado a un arousal alto (en este caso los valores más altos en este rango se reportan en "computer-mediated", "written-calculus" y "game-based"). En otras palabras, las tareas "mediadas por ordenador" parecerían ser más difíciles para esta persona, provocarían arousal y requerirían una concentración más introvertida, a diferencia de las tareas de "ábaco".

CONCLUSIONES Y LIMITACIONES

La comparación de estas cuatro tareas muestra diferencias en la actividad cerebral entre las tareas basadas en la manipulación de objetos ("ábaco" y "basada en juegos") y entre las tareas basadas en representaciones numéricas simbólicas escritas ("mediada por ordenador" y "cálculo escrito"), lo que nos habla de la especificidad de cada tipo de tarea, independientemente de que se basen en cálculos a través de objetos o con representaciones numéricas simbólicas escritas. A la luz de

investigaciones previas, interpretamos que valores altos de la frecuencia delta de la tarea basada en juegos podrían indicar mayor implicación emocional y atención; valores altos en la banda delta de la mediada por ordenador reflejarían atención y mayor implicación de la memoria de trabajo en el cálculo. Los valores altos en las bandas theta y alfa de las tareas mediadas por ordenador y de cálculo escrito podrían reflejar cálculo mental, demanda de memoria de trabajo y acceso prolongado a la información almacenada. Los valores altos de las tareas "mediadas por ordenador" en la banda beta estarían indicando que, para esta persona, implican tareas más difíciles que le provocan excitación y le exigen una mayor concentración que las tareas de "ábaco".

A pesar de las limitaciones de un estudio de caso único (aunque es complejo realizar un seguimiento durante tanto tiempo con una muestra mayor), hay que considerar que las tareas utilizadas a lo largo del experimento no aparecen de forma aislada y de alguna manera todas ellas definen o conforman un contexto de aprendizaje determinado. Además, el entorno de las tareas mediadas por ordenador tiene su propia lógica y es un ecosistema en el que aparecen otras recompensas y motivaciones (juegos, premios, charlas con otros participantes...) que proporcionan una experiencia más estimulante que la tarea aislada de sumar o restar. Además, aunque este breve informe nos muestra indicadores interesantes, en futuros análisis profundizaremos en los datos para extraer conclusiones más detalladas sobre la asimetría alfa frontal, la participación de diferentes áreas cerebrales en cada tarea, o la coherencia entre canales y redes.

Referencias

Abhang, P. A., Gawali, B. W., y Mehrotra, S. C. (2016). Technical aspects of brain rhythms and speech parameters. En P. A. Abhang, B. W. Gawali, y S. C. Mehrotra (Eds.), *Introduction to EEG- and Speech-Based Emotion Recognition* (pp. 51-79). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-804490-2.00003-8

Anzalone, C., Luedke, J. C., Green, J. J., y Decker, S. L. (2022). QEEG coherence patterns related to mathematics ability in children. *Applied Neuropsychology: Child*, *11*(3), 328–338. doi.org/10.1080/21622965.2020.1830403

Battista, C., Evans, T. M., Ngoon, T. J., Chen, T., Chen, L., Kochalka, J., y Menon, V. (2018). Mechanisms of interactive specialization and emergence of functional brain circuits supporting cognitive development in children. *NPJ Science of Learning, 3*(1), 1. https://doi.org/10.1038/s41539-017-0017-2

Bugden, S., Woldorff, M. G., y Brannon, E. M. (2019). Shared and distinct neural circuitry for nonsymbolic and symbolic double-digit addition. *Human Brain Mapping, 40*(4), 1328–1343. https://doi.org/10.1002/hbm.24452

Cho, S., Ryali, S., Geary, D. C., y Menon, V. (2011). How does a child solve 7 + 8? Decoding brain activity patterns associated with counting and retrieval strategies. *Developmental Science, 14*(5), 989–1001. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01055.x

Dimitriadis, S. I., Laskaris, N. A., Tsirka, V., Vourkas, M., y Micheloyannis, S. (2010). What does delta band tell us about cognitive processes: a mental calculation study. *Neuroscience Letters, 483*(1), 11–15. doi:10.1016/j.neulet.2010.07.034

Fernández, T., Harmony, T., Gersenowies, J., Silva-Pereyra, J., Fernández-Bouzas, A., Galán, L., y Díaz-Comas, L. (2002). Sources of EEG activity during a verbal working memory task in adults and children. En C. Reisin, M. R. Nuwer, M. Hallet, y C. Medina (Eds), *Advances in Clinical Neurophysiology* (Supplement to Clinical Neurophysiology, Vol. 54) (pp. 269-283). Elsevier Science.

Grabner, R. H., y De Smedt, B. (2011). Neurophysiological evidence for the validity of verbal strategy reports in mental arithmetic. *Biological Psychology, 87*(1), 128–136. doi:10.1016/j.biopsycho.2011.02.0

Harmony, T., Fernández, T., Silva, J., Bosch, J., Valdés, P., Fernández-Bouzas, A., Galán, L., Aubert, E., y Rodríguez, D. (1999). Do specific EEG frequencies indicate different processes during mental calculation? *Neuroscience Letters*, *266*(1), 25–28. doi:10.1016/s0304-3940(99)00244-x

Harmony T. (2013). The functional significance of delta oscillations in cognitive processing. *Frontiers in Integrative Neuroscience,* 7, 83. doi:10.3389/fnint.2013.00083

Heubner L, Cipora K, Soltanlou M, Schlenker M-L, Lipowska K, Göbel SM, Domahs F, Haman M, y Nuerk H-C (2018). A mental odd-even continuum account: Some numbers may be "more odd" than others and some numbers may be "more even" than others. *Frontiers of Psychology*, 9, 1081. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01081

Hinault, T., y Lemaire, P. (2016). What does EEG tell us about arithmetic strategies? A review. *International Journal of Psychophysioly*, 106, 115–126. doi:10.1016/j.ijpsycho.2016.05.006

Klimesch W. (2012). α-band oscillations, attention, and controlled access to stored information. *Trends in Cognitive Science*, 16, 606–617. doi:10.1016/j.tics.2012.10.007

Malik, A.S. y Amin, H.U. (2017). *Designing EEG Experiments for Studying the Brain: Design Code and Example Datasets*. Elsevier.

Núñez-Peña, M. I. (2008). Effects of training on the arithmetic problem-size effect: an event-related potential study. *Experimental Brain Research*, 190, 105–110. https://doi.org/10.1007/s00221-008-1501-y

Pesonen, M., Hämäläinen, H., y Krause, C. M. (2007). Brain oscillatory 4–30 hz responses during a visual n-back memory task with varying memory load. *Brain Research*, 1138, 171–177. https://doi.org/10.1016/j.brainres.2006.12.076

Peters, L., y De Smedt, B. (2018). Arithmetic in the developing brain: A review of brain imaging studies. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 30, 265–279. https://doi.org/10.1016/j.dcn.2017.05.002

Rosenberg-Lee, M., Barth, M., y Menon, V. (2011). What difference does a year of schooling make? Maturation of brain response and connectivity between 2nd and 3rd grades during arithmetic problem solving. *NeuroImage, 57*(3), 796–808. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.05.013

Soltanlou, M., Artemenko, C., Ehlis, A. C., Huber, S., Fallgatter, A. J., Dresler, T., y Nuerk, H. C. (2018). Reduction but no shift in brain activation after arithmetic learning in children: A simultaneous fNIRS-EEG study. *Scientific Reports, 8*(1), 1707. doi.org/10.1038/s41598-018-20007-x

Spüler, M., Walter, C., Rosenstiel, W., Gerjets, P., Moeller, K., y Klein, E. (2016). EEG-based prediction of cognitive workload induced by arithmetic: a step towards online adaptation in numerical learning. *ZDM Mathematics Education*, 48, 267–278. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0754-8

Tatum, W.O., Husain, A.M., Benbadis, S.L., y Kaplan, P. (2008). *Handbook of EEG Interpretation*. Demos.

Van Atteveldt, N., van Kesteren, M., Braams, B., y Krabbendam, L. (2018). Neuroimaging of learning and development: improving ecological validity. *Frontline Learning Research, 6*(3), 186–203. doi:10.14786/flr.v6i3.366

Van de Rijt, B. A. M., van Luit, J. E. H., y Pennings, A. H. (1999). The 541 construction of the Utrecht early mathematical competence scales. *Educational and Psychological Measurement, 59*(2), 289–309. https://doi.org/10.1177/00131644995920006

Van Mier, H. I., Schleepen, T., y Van den Berg, F. (2019). Gender differences regarding the impact of math anxiety on arithmetic performance in second and fourth graders. *Frontiers in Psychology*, 9, 2690. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02690

Vourkas, M., Karakonstantaki, E., Simos, P. G., Tsirka, V., Antonakakis, M., Vamvoukas, M., Stam, C., Dimitriadis, S., y Micheloyannis, S. (2014). Simple and difficult mathematics in children: a minimum spanning tree EEG network analysis. *Neuroscience Letters*, *576*(1), 28–33. doi.org/10.1016/j.neulet.2014.05.048

Wu, S. S., Barth, M., Amin, H., Malcarne, V., y Menon, V. (2012). Math anxiety in second and third graders and its relation to mathematics achievement. *Frontiers in Psychology*, 3, 162. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2012.00162

LA TAREA PROFESIONAL DE DEFINIR DESDE EL MODELO MTSK

The professional task of defining from the MTSK model

Martín-Díaz, J. P., Codes, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Climent, N.

Universidad de Huelva

Resumen

La práctica matemática de definir resulta de especial complejidad para los estudiantes para maestro. Esta dificultad puede estar ligada, no solo a la falta de formación previa, sino también a las tareas y actividades que se les proponen en su etapa de formación como docentes. La presente investigación se centra en mostrar algunos elementos del conocimiento especializado que se pretenden que emerjan en una tarea sobre definir en formación inicial de maestros y los que se movilizan durante la puesta en práctica. Los resultados muestran cómo la tarea implementada provoca la movilización de los elementos pretendidos sobre la construcción del concepto de polígono. Sin embargo, algunos pretendidos sobre la práctica matemática de definir no son evidenciados, lo que muestra la complejidad de lo pretendido y la necesidad de modificar la tarea.

Palabras clave: *conocimiento del profesor, práctica matemática, definir, tareas profesionales, formación inicial*

Abstract

The mathematical practice of defining is particularly complex for Primary student teachers. This difficulty may be linked not only to the lack of previous training, but also to the tasks and activities proposed to them in teacher education. The present research focuses on showing some elements of the specialised knowledge that are intended to emerge in a task on defining in preservice teacher education and those that are mobilised during implementation. The results show how the implemented task provokes the mobilisation of the intended elements on the construction of the polygon concept. However, some of the intended elements on the mathematical practice of defining are not evidenced, which shows the complexity of the intended elements and the need to modify the task.

Keywords: *teacher knowledge, mathematical practice, defining, professional tasks, preservice teacher education.*

INTRODUCCIÓN

La investigación ha mostrado que los estudiantes para maestro (en adelante EPM) que participan en cursos de formación que incluyen conocimiento didáctico del contenido y conocimiento matemático, aumentan su seguridad y motivación en la enseñanza de las matemáticas al establecer mejores conexiones entre ambos conocimientos (Cardetti y Truxaw, 2014). El aprendizaje de estos contenidos potencia la capacidad reflexiva de los EPM sobre su propio aprendizaje y sobre su futura práctica en el aula. Pero este aprendizaje está condicionado por el tipo de tareas de formación que se les ofrece y por cómo se gestionan (Grevholm et al., 2009).

A partir de la triada de Jaworsky (1994) (*mathematical challenge, sensitivity to students and management of learning*), Biza et al. (2015) caracterizan las tareas para la formación del profesorado, poniendo el énfasis en situaciones de enseñanza que evidencien cuestiones matemáticas clave, como la formación de conceptos matemáticos, el uso de definiciones, la

Martín-Díaz, J. P., Codes, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Climent, N. (2023). La tarea profesional de definir desde el modelo MTSK. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 347–354). SEIEM.

visualización o la argumentación matemática, entre otras, sin olvidar otros aspectos esenciales, entre los que se incluye la gestión de esas cuestiones en el aula.

Por otra parte, la investigación ha mostrado que la construcción de conceptos geométricos básicos presenta dificultades para maestros en formación inicial (Carreño y Climent, 2009, 2019; Marches, 2012). En la construcción de un concepto matemático juega un papel fundamental tanto la definición como la imagen del concepto (Vinner y Hershkowitz, 1983). En esta investigación asumimos que abordar en el aula el proceso de definir, frente a enseñar o memorizar definiciones, permite una mejor construcción del concepto, así como desarrollar una actividad matemática de la misma importancia que resolver problemas, demostrar o probar (De Villiers, 1998).

El objetivo de esta investigación es analizar el alcance de una tarea profesional sobre definir, en términos del modelo MTSK, en la que se aúnan distintos elementos de conocimiento profesional.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Esta investigación se articula en torno a dos pilares: un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas, que actuará como herramienta de análisis del conocimiento pretendido y movilizado de una tarea en formación inicial, y los propios fundamentos de la práctica matemática de definir.

Conocimiento especializado

Consideramos el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018), en adelante MTSK (de sus siglas en inglés), como un posible estructurador del conocimiento profesional a desarrollar en formación docente, pues nos ha permitido generar secuencias de enseñanza, en forma de tareas o unidades temáticas, sustentadas en distintos subdominios de conocimiento profesional (Montes et al., 2022). En línea con los fundamentos del modelo MTSK, el conocimiento profesional, aunque integrado y holístico, puede abordarse, con fines analíticos, desde la diferenciación entre conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido y creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Dentro de estos dominios, se han desarrollado distintos subdominios y categorías de conocimiento que constituyen herramientas de análisis en contextos de investigación sobre conocimiento especializado en distintos niveles educativos y han servido para dar forma a distintas tareas formativas (Giberti, 2022; Semanišinová, 2021).

La tarea formativa que analizamos en este trabajo ha sido diseñada para abordar distintos subdominios del modelo MTSK y el análisis que hacemos de su alcance se organiza en torno a estos. Sin embargo, para esta comunicación centraremos la mirada en dos subdominios con el fin de conocer qué elementos del Conocimiento de los Temas (KoT) (procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones) y del Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) (en relación con la práctica matemática de definir), previstos durante el diseño de una tarea de formación inicial, emergen durante su puesta en práctica.

En nuestro estudio, entenderemos por tarea un fragmento de clase, contexto o medio, que configura una unidad para desarrollar una idea o una práctica disciplinar (Stein et al., 2009), y nos referiremos a tarea profesional en tanto que tiene una orientación hacia la profesión de enseñar matemáticas. En el diseño de tareas de formación deben considerarse su función (o propósito), forma y foco (Grevholm et al., 2009). En la tarea que analizamos, su función viene marcada por la construcción del conocimiento especializado pretendido, la forma viene dada por la simulación de una tarea de un aula de Primaria y la reflexión sobre ella, y el foco se sitúa en la construcción de la definición de polígono, como ejemplo de la práctica matemática de definir.

Definir

Como hemos referido, en el proceso de construcción de conceptos hay una práctica matemática que tiene especial relevancia: definir. Según Vinner (1991), la construcción de una definición se apoya tanto en la imagen del concepto (que abarca las representaciones visuales mentales, impresiones y/o

experiencias sobre el constructo), como en la definición del concepto (que se refiere a la definición en su formato verbal y que puede estar, o no, memorizada). El propio Vinner (op. citada) señala que los profesores en formación necesitan entrenarse para poder generar y utilizar definiciones a través del análisis de ejemplos y no ejemplos que puedan crear conflictos entre imagen y definición de un concepto matemático, para aprender a ver más allá de los prototípicos (ejemplos que, además de todas las características críticas del concepto, incluyen otras características; por exceso de exposición estos ejemplos forman parte de la imagen conceptual del aprendiz, considerando este que las características adicionales son propias del concepto matemático a definir) (Herskowitz et al., 1990). Por otro lado, la investigación ha mostrado que muchos profesores no son conscientes de que son posibles diferentes definiciones de un concepto, que serán equivalentes entre sí (Leikin y Winicki-Landman, 2001).

De la mano de la práctica de definir se encuentra otra que puede considerarse complementaria: clasificar (Muñoz-Catalán et al., 2013). Esta práctica requiere el reconocimiento de propiedades, agrupando cada elemento analizado, ya sean ejemplos o no ejemplos, en función de aquellas características que son comunes (Shir y Zaslavsky, 2001). No es un proceso de final definido. Sufre un refinamiento conforme nuevos elementos son analizados, llegando un momento en el que ya cada clase puede ser nombrada; es entonces cuando estamos ante el proceso de definir (Mariotti y Fischbein, 1997), considerado desde una perspectiva inductiva. Esta es la perspectiva que adoptamos en la tarea que analizamos para la formación de maestros. Estas dos prácticas pueden, por tanto, considerarse complementarias, ya que la definición de un concepto puede ser vista como el criterio para clasificar casos en ejemplos o no ejemplos del concepto (Haj-Yahya et al., 2022).

Entender la definición como proceso ha permitido diferenciar, matemáticamente, entre definiciones descriptivas y constructivas (de Villiers, 1998; Sinclair et al., 2016). Las definiciones descriptivas tienen como punto de partida la imagen del concepto que posibilita identificar un listado de propiedades que, al analizarse, permiten distinguir entre necesarias y suficientes de otras que podrían deducirse de las primeras. Las definiciones constructivas parten de una definición del concepto de la que se identifican propiedades para que, al variarlas (excluyendo, generalizando, especificando, reemplazando o añadiendo alguna), se construya una nueva definición. Mientras la definición constructiva tiene como función la producción de un nuevo conocimiento, la definición descriptiva busca la sistematización del conocimiento existente.

Lo habitual es que los estudiantes para maestro no hayan construido conceptos geométricos desde una perspectiva inductiva. Así, han sido expuestos a definiciones y ejemplos estandarizados, pero no al proceso de definir. En la formación de maestros nos parece especialmente relevante abordar la práctica matemática de definir. El objetivo de la investigación se centra en comparar elementos del conocimiento especializado pretendido en una tarea formativa, pertenecientes a los subdominios del KoT y el KPM, con el que se moviliza posteriormente en la tarea, en la que se trabaja la práctica de definir.

METODOLOGÍA

Este estudio se sitúa en una investigación de diseño (Cobb et al., 2003). Sobre la base del análisis de una actividad real de un aula de Primaria, con la mirada puesta en qué conocimiento permite movilizar en la formación inicial de maestros, diseñamos una tarea para la formación inicial de maestras y maestros de Primaria. En esta comunicación nos centramos en el análisis de la transcripción de la grabación de lo que ocurre en el aula del cuarto curso del Grado en Educación Primaria (formada por aproximadamente setenta estudiantes que han recibido formación didáctico-matemática durante sus cuatro años de formación) cuando se implementa la tarea formativa.

El formador del aula donde se implementa la tarea, uno de los autores de este trabajo, tenía más de 35 años de experiencia en el momento de la implementación. A la transcripción de las videograbaciones se les realiza un análisis de contenido atendiendo al Conocimiento de los Temas

(KoT) y el Conocimiento de la Práctica de la Matemática (KPM) movilizado, que se compara con el conocimiento pretendido (Tabla 1).

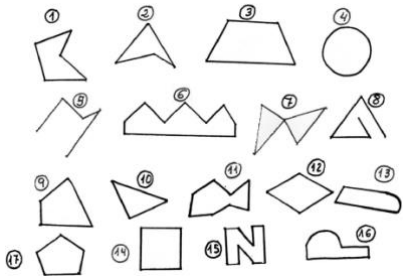
Tabla 1. Elementos del conocimiento pretendidos en la tarea.

MTSK pretendido	
KoT	KPM
KoT1 Propiedades de polígono y sus relaciones, características críticas de polígono. KoT2 Definiciones de polígono, posibles equivalencias, diferencias y consecuencias. KoT3 Ejemplos y no ejemplos de polígono.	KPM1 Práctica matemática de *definir*: qué es definir. Relaciones entre definir y clasificar. KPM2 Características de una definición. KPM3 La definición como convenio, unicidad o no de la definición de un concepto matemático. KPM4 Definiciones descriptivas

Para su presentación en el análisis se mostrarán algunos fragmentos extraídos de las grabaciones de vídeo y se relacionarán con los elementos de los subdominios del KoT y el KPM que se han reflejado en la Tabla 1. Estas relaciones se harán explícitas en el texto haciendo alusiones a los números con los que hemos identificado los elementos del conocimiento en la Tabla 1.

La tarea para los EPM contiene una breve descripción de lo que ocurre en una clase real de 5º curso de Educación Primaria y tres actividades. En esta investigación analizaremos la primera de ellas, que consistió en presentarles a los EPM la misma ficha utilizada por la maestra con idénticas indicaciones a las dada por aquella a sus estudiantes (Figura 1). A la acción de señalar cuáles de las 17 figuras planas es polígono y cuáles no, con su argumentación correspondiente, se acompañó una indicación sobre lo que queremos que reflexionen: ¿Con qué argumentos acordamos incluir o no a determinadas figuras como polígonos? ¿Cuáles son las razones que hemos manejado? ¿Por qué puede interesar incluir o no determinadas características en el concepto de polígono? ¿Hay una definición única de polígono? ¿Qué podrían aprender los alumnos de primaria con una actividad como esta? ¿Qué interés tiene frente a haberles dado una definición? ¿Es la definición un descubrimiento o una construcción? Esta actividad ha de concluir con una definición de polígono.

Figura 1. Figuras presentadas por la maestra en el aula



RESULTADOS

A continuación, se muestran algunos de los resultados. La primera figura en la que no hay acuerdo por parte de los EPM es la 4 (círculo). Algunos EPM lo incluyen en su imagen de polígono, probablemente por lo común que resulta en el estudio de formas planas. La estudiante que lo incluye tiene sus dudas e intenta respaldarse en una definición establecida de polígono (Unidad 1).

EPM1[1]: Es que yo lo del círculo, no lo sabía. Entonces, lo busqué en internet.

F: Si no es que sepas o que no sepas. [...] Yo no voy a definir todavía. Yo quiero que lo definamos entre todos. […] ¿Por qué puede ser interesante incluir o excluir la circunferencia [lapsus del formador] dentro de los polígonos? Eso va a ser una de las cosas que vamos a ver

[1] Indicaremos por EPMi cada EPM por su orden (i) de intervención y F se refiere al formador.

hoy. Si para nosotros es polígono, ¿qué consecuencias tiene que lo sea? (Unidad 1, 89-104[2])

En este extracto el formador hace explícito que el interés no es partir de una definición conocida, como pretende la EPM, sino construir conjuntamente una definición (esto es, desarrollar la práctica de definir en lugar de tomar una definición dada -KPM1) y describe la definición como resultado de un convenio, por la conveniencia de considerar determinadas propiedades (KPM3).

La EPM1 que interviene en la unidad 1 muestra resistencia a lo largo de la sesión a que se pueda realizar el proceso de definir que el formador pretende. Así, cuando continúan discutiendo la inclusión o no del círculo (figura 4), declara:

EPM1: Yo, por lo menos, entiendo que, si no lo podemos comparar con nada, si no tenemos claro lo que es polígono, ¿cómo vamos a decir si es polígono o no?

F: [...] Bueno, pues yo pongo en duda tu afirmación porque lo que tú estás diciendo es que la única manera de definir es de lo general a lo particular. […] Yo quiero saber si es posible de diversas situaciones particulares, intentar construir un concepto general. (Unidad 2, 179-185)

Muchos de los EPM, sin embargo, se involucran en el análisis de características para consensuar cuáles van a considerar críticas a partir del estudio de las consecuencias (KoT1). En las razones para considerar características críticas se incluye que se puedan clasificar por número de lados (Unidad 3), que se puedan triangular y que se pueda calcular su área (Unidad 4) y que tengan el mismo número de lados, de ángulos y de vértices (Unidad 5).

F: Ventajas o inconvenientes de que consideremos a cuatro como polígono.

EPM2: No se podría clasificar, por ejemplo, ¿no?

F: [...] Dime cuál sería la ventaja o el inconveniente y por qué.

EPM2: A ver, el inconveniente sería que no se podría situar en una de [...] las clases de polígonos que hay, porque los hay, por ejemplo, con dos lados, hay decaedro… ¿sabes? (Unidad 3, 199-209)

EPM3: [En referencia a por qué no es polígono la figura 5] Porque está abierto, no es… […]

F: […] ¿Alguna ventaja o algún inconveniente?

EPM4: Una desventaja sería que no puede hacer los triangulitos esos.

F: Inconveniente: que no puedo triangularizar, ¿no? ¿No puedo triangularizar?

EPM4: No, te faltarían…[...]

EPM5: Tampoco se podría sacar, por ejemplo, el área, ¿no? (Unidad 4, 249-271)

EPM6: [referido a la figura 7] El inconveniente sería que, si lo consideramos polígono, no tendríamos en cuenta que el polígono tiene los mismos lados que vértices. (Unidad 5, 298-321)

En la discusión anterior los EPM están considerando propiedades que asocian a su idea de polígono, que forman parte de su definición del concepto y posibles relaciones entre distintas propiedades (KoT1). De alguna manera, los EPM están considerando posibles variaciones en la definición de polígono y la posibilidad de que la definición no sea única (KPM3). Así, otro estudiante se plantea qué figuras serían polígonos si se acepta el círculo como polígono (Unidad 6).

EPM6: Hombre, si considero el cuatro un polígono, todas las figuras que tengan alguna línea curva son también polígonos, porque en sí el círculo es una figura curva entera. (Unidad 6, 210-220)

Durante toda la sesión los EPM están valorando ejemplos y no ejemplos de polígonos (KoT3), pues es la base de la actividad. Como también era de esperar, la figura 7 es de las que resulta más controvertida. Mientras que, de entrada, algunos EPM no la consideran polígono sino dos polígonos

[2] Indicamos las unidades por su orden de aparición en la comunicación y las líneas de la transcripción de la sesión.

unidos, lo descartan porque “desde el vértice que une los dos triángulos no sale ninguna diagonal”. Eso los lleva a proponer añadir como característica crítica "tener diagonales" (Unidad 7) (KoT1).

F: Bueno, para que no sea polígono, ¿qué le hemos añadido?

EPM7: Las diagonales.

F: Sin entrar en eso.

EPM8: Que no tenga vértices…

F: Sin entrar en eso. Algo más sencillo, más intuitivo. Es verdad, pero es más intuitivo. ¿Cuántos interiores tienen los polígonos, los candidatos uno, dos y tres? (Unidad 7, 397-418)

En la unidad 7 se observa la diferencia de perspectiva del formador, que considera como característica crítica un único interior y las que enuncian los alumnos como derivadas, y la visión de los EPM, para los que es más importante incluir características sobre los vértices o las diagonales (KoT1).

Acaban concluyendo que las características críticas son: línea poligonal, cerrada, con un único interior (Unidad 8). De las figuras 8 en adelante están todos de acuerdo, según las características consensuadas. Aunque se proponen otras definiciones no se analizan características de las definiciones, como minimalidad (KPM 2) (Unidad 8).

F: [...] Con estos ejemplos, hemos sido capaces de llegar a una definición de polígono consensuada, que es una poligonal cerrada con un único interior.

EPM9: Yo he puesto también: “Formada por una única secuencia concatenada de segmentos que cambian de dirección”.

F: Secuencia concatenada de segmentos que cambian de dirección, es poligonal.

EPM9: Ah, bueno.

Lucas: Todo eso se resume en poligonal. Si tú lo quieres expresar por su expresión amplia, estás en tu derecho.

Para cerrar la sesión el formador propone un ejemplo extremo (Figura 2) a lo que los EPM acuerdan, sin que se observe desacuerdo, que es polígono y el espacio central forma parte del exterior del polígono (KoT3).

Figura 2. Ejemplo extremo final



CONCLUSIONES

Durante toda la sesión los EPM se involucran en la práctica matemática de definir, entendida como considerar características necesarias y suficientes para acotar lo que es de lo que no es (Haj-Yahya et al., 2022). Este proceso de definir se realiza sobre la base del proceso de clasificar, de modo que conforme van clasificando cada figura dada en polígono o no polígono, van extrayendo de su inclusión o exclusión posibles características críticas.

Las resistencias observadas a la práctica de definir y la tendencia en estos casos a evocar una definición aprendida, muestran la complejidad de la construcción de conocimiento de esta práctica matemática en formación inicial de maestros. Es posible que esto se vea influido tanto por la ausencia de esta práctica en su experiencia escolar previa (De Villiers, 1998), como por la profundidad de análisis matemático que requiere (Haj-Yahya et al., 2022).

En el desarrollo de la tarea, los EPM contrastan su imagen de polígono y parecen darse en general un enriquecimiento en ese sentido, visible en el acuerdo sobre la figura extrema final. Este enriquecimiento se da tanto en ejemplos como en no ejemplos de polígono. Asimismo, la tarea los lleva a considerar distintas propiedades de polígonos y sus posibles relaciones. Esto parece promover una profundización en el concepto (Edwards y Ward, 2008).

Sin embargo, la implementación de la tarea no ha producido evidencias de algunos elementos de KPM pretendidos. Así, aunque la propia práctica desarrollada en el aula consideró aspectos relacionados con la definición, como convenio y univocidad (se avanzó hacia una definición convenida en el grupo y se planteó que pudieran darse otras), no hay manifestaciones de los EPM que nos indiquen qué aprendieron de ello. Del mismo modo, si bien la definición que se aborda en el aula es de tipo descriptiva (de Villiers, 1998), este hecho no es explícito para los EPM. Finalmente, aunque era uno de los aspectos del conocimiento especializado pretendido (KPM2), no se aborda en el aula las características de una definición matemática.

Lo anterior nos lleva a plantear la necesidad de rediseñar la actividad de modo que las orientaciones hacia los EPM, en relación con aspectos de la práctica matemática, sean más precisas. Por otro lado, la dificultad constatada con las de investigaciones previas en la construcción de conceptos geométricos básicos (Carreño y Climent, 2009, 2019; Marches, 2012), como es el caso de polígono, supuso un obstáculo a la hora de pretender abordar en una misma tarea tanto la construcción del concepto como el análisis del proceso de definir.

El modelo MTSK nos ha servido como herramienta tanto para diseñar la tarea como para evaluar los resultados de su implementación. En este sentido, puede ser un instrumento que permite al formador sistematizar su aproximación a la formación del profesorado.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO y del grupo de Investigación DESYM (HUM-168) de la Universidad de Huelva, y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

Referencias

Biza, I., Nardi, E., y Joel, G. (2015). Balancing classroom management with mathematical learning: Using practice-based task design in mathematics teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development, 17*(2), 182–198.

Cardetti, F., y Truxaw, M. P. (2014). Toward improving the mathematics preparation of elementary preservice teachers. *School Science and Mathematics, 114,* 1–9. https://doi.org/10.1111/ssm.12047

Carreño, E., y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA 14*(1), 23–53. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265

Carreño, E., y Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187–196). SEIEM.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M, y Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalan, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cobb, P., Confrey, J. diSessa, A, Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher, 32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver y K. Newstead (Ed.), *Proceedings of the 22th PME Conference, 2* (pp. 248–255). University of Stellenbosch.

Edwards, B., y Ward, M. (2008). The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223–232). Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.018

Giberti, Ch. (2022). A teacher training project to promote mathematics laboratory during the COVID-19 health crisis in Italy. *European Journal of Science and Mathematics Education, 10*(3), 256–268. https://doi.org/10.30935/scimath/11837

Grevholm, B., Millman, R., y Clarke, B. (2009). Function, form and focus: the role of tasks in elementary mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.). *Task in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 1–5). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_1

Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R., y Dreyfus, T. (2022). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students' definitions. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00406-6

Hershkowitz, R., Ben–Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., y Vinner, S. (1990). Psychological aspects of learning of Geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70–95). Cambridge University Press.

Jaworski, B. (1994*). Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. The Falmer Press.

Leikin, R., y Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development, 3*, 62–73.

Marches, I. (2012). Preservice primary school teachers' elementary geometry knowledge. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 33–40.

Mariotti, M., y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 219–248.

Montes, M. A., Climent, N., y Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría, en formación inicial de maestros, a través de un experimento de enseñanza. *Aula Abierta, 51*(1), 27–36. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36

Muñoz-Catalán, M. C., Montes, M. A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Aguilar, A. (2013). *La Clasificación de las Figuras Planas en Primaria: Una Visión de Progresión entre Etapas y Ciclo*s. Universidad de Huelva Publicaciones.

Semanišinová, I. (2021). Multiple-Solution Tasks in Pre-Service Teachers Course on Combinatorics. *Mathematics, 9*, 2286. https://doi.org/10.3390/ math9182286

Shir, K., y Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of square. M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference* (pp. 161–168). Utrecht University.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 48*(5), 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65–81). Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 15*, 20–25.

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE SOBRE ISOMETRÍAS EN UNA REPRESENTACIÓN NO DINÁMICA

Opportunities to learn isometries in non-dynamic environment

Martín-Nieto, Marta[a] y Ruiz-López, Natalia[b].

[a]CES Don Bosco, [b]Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio sobre la riqueza de una discusión en gran grupo con el uso de GeoGebra. Los participantes son estudiantes de Grado de Magisterio de Educación Primaria que dialogan sobre un problema relacionado con isometrías en una representación no dinámica. Se considera que una sistemática será rica si se detectan oportunidades de aprendizaje. La metodología es "investigación de diseño". Los datos se recogen a partir de la transcripción de videograbaciones y de la interpretación de cada una de las intervenciones. Se detectan 26 oportunidades de aprendizaje diferentes que clasificamos según la orientación de sus acciones. Varias parejas representan polígonos auxiliares para aplicar el carácter dinámico. La tecnología, la dinámica de participación y la orquestación influyen en la aparición de oportunidades de aprendizaje.

Palabras clave: oportunidad de aprendizaje, discusión en gran grupo, formación del profesorado, isometrías, representación no dinámica.

Abstract

This study analyses the richness of a whole group discussion using GeoGebra. The participants are students at the Primary School Teacher Training Degree who discuss a problem related to isometries in a non-dynamic representation. The discussion is rich if learning opportunities are detected. The methodology is "design research". Data are analysed from video recordings and interpretation on each of the interventions. Twenty-six different learning opportunities are detected and classified according to the orientation of their actions. Several pairs represented auxiliary polygons to apply the dynamism of GeoGebra. Technology, collaborative environment, and orchestration are essential for the emergence of learning opportunities.

Keywords: *opportunities to learn, whole group discussion, primary teachers, isometries, non-dynamic environment.*

INTRODUCCIÓN

La investigación en didáctica de las matemáticas muestra una fuerte preocupación sobre el estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático (Martín-Nieto y Ruiz López, 2022; Planas y Boukafri, 2019). Además, hay muchos trabajos sobre la adquisición de competencias geométricas en el grado de magisterio (Collazos-Delgado et al., 2023).

Esta investigación se encuadra dentro de un proyecto de tesis doctoral más amplio. Es una contribución al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de movimientos rígidos en el plano a partir de discusiones en gran grupo con el uso del software de geometría dinámica GeoGebra que se utiliza como herramienta para resolver problemas. Para la tesis se diseñaron cuatro problemas, tres de ellos de corte puramente geométrico y el cuarto de corte didáctico. El objetivo de esta

Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. (2023). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una representación no dinámica. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 355–362). SEIEM.

comunicación es ejemplificar la riqueza de una discusión en gran grupo de un problema sobre isometrías en un aula del Grado de Maestro en Educación Primaria.

MARCO TEÓRICO

La mayoría de las investigaciones sobre el papel de la interacción social en el aprendizaje de las matemáticas (Cobo, 1998; Molina, 2016; Planas y Boukafri, 2019) coincide en que el trabajo colaborativo entre alumnos es crucial (tanto en parejas como en discusiones en gran grupo) para construir el conocimiento. Algunas han identificado las condiciones para producir una interacción efectiva. Un rasgo común es que los alumnos trabajen conjuntamente en la resolución de problemas con autonomía. Además, Morera (2013) destaca la importancia de una buena anticipación que muestre que la tarea tiene posibilidades de tratar numerosos estadios.

El Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM) con sede en la Universitat Autònoma de Barcelona, afirma que el análisis de las interacciones de clase puede utilizarse para detectar obstáculos e interrupciones, pero también continuidades en la participación y oportunidades de aprendizaje (Planas y Boukafri, 2019). Entendemos por oportunidad de aprendizaje todas las situaciones que se dan en los procesos de resolución en las que a los alumnos se les presenta la posibilidad de reorganizar sus estructuras conceptuales, procedimentales o de gestión de conocimiento. Es decir, construir nuevas conexiones o relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución de los problemas que están trabajando. Se trata de situaciones donde el contraste entre diferentes interpretaciones de la resolución de un problema o de las normas de clase es aprovechado como hilo conductor de la discusión.

Partimos de la base de que consideraremos la aplicación de una sistemática potencialmente rica si tenemos evidencia de que se han dado oportunidades de aprendizaje matemático. Estas quedan definidas por las acciones que han intervenido en su creación y la explicación en cada caso de cómo la interacción de los participantes que han llevado a cabo las acciones ha generado la oportunidad. Así, una oportunidad de aprendizaje matemático es la combinación entre los contenidos del aprendizaje potencial y las acciones que propician la emergencia de esos contenidos (Morera, 2013). Morera et al. (2013) clasifican las oportunidades de aprendizaje en tres tipos, según la orientación de sus acciones:

a) Orientada a contenidos matemáticos específicos. Por ejemplo, dirigida a conocer el concepto eje de simetría.
b) Orientada a diferentes estrategias. Por ejemplo, enfocada a aprender a conjeturar.
c) Orientada a actividades de autorregulación. Por ejemplo, aprender que es importante justificar las respuestas a preguntas de corte matemático.

Martín-Nieto (2021) añade un tipo más que considera necesaria cuando los protagonistas son futuros profesores.

d) Orientadas a contenidos didácticos específicos. Por ejemplo, conocer fases en una discusión en gran grupo.

El estudio de las oportunidades de aprendizaje matemático implica el de la construcción de normas de aula de matemáticas. La noción de norma sociomatemática (Yackel y Cobb, 1996) surge al observar que las teorías psicológicas del desarrollo humano no bastan para explicar el aprendizaje matemático en entornos de interacciones en clase. Se focalizan en aspectos normativos de las discusiones sobre temas matemáticos y son las que marcan qué se considera matemáticamente sofisticado, matemáticamente eficiente o matemáticamente elegante. Disponemos de resultados de experimentos donde se relaciona la construcción de normas sociomatemáticas como normas de clase y el aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático (Molina, 2016). Por otro lado, hay ejemplos que relacionan la generación de oportunidades de aprendizaje con la forma en la

que el profesor ha preparado la discusión en gran grupo. Ferrer et al. (2014) exponen un caso en el que se generan más oportunidades de aprendizaje cuando la profesora prepara esquemas para la resolución y la gestión de la actividad. Además, define claramente los objetivos matemáticos de la tarea, plateándolos en el aula como introducción.

Se considera aprendizaje matemático cuando hay evidencias explícitas del aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje matemático. Según este criterio, lo importante es encontrar estudiantes que evidencien cambios en sus producciones (Morera, 2013). Puede ocurrir que las iteraciones sean productivas para algunos de los participantes (Kieran, 2001). Además, se puede dar el caso de que se produzca aprendizaje sin que se hayan detectado oportunidades explícitas. En estos casos, Cobo (1998) considera que el aprendizaje es debido a la reestructuración cognitiva producida como consecuencia de reflexiones no explícitas sobre los procesos de resolución o debidas a reflexiones individuales posteriores sobre los procesos de resolución.

METODOLOGÍA

La metodología, de naturaleza cualitativa, se encuentra dentro del paradigma "investigación de diseño" ('design research') con métodos interpretativos aplicados al análisis de datos de clase. Se planifican secuencias formativas que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia que conlleva la detección de posibles mejoras en el diseño. La sistemática se fue re-adaptando durante tres cursos consecutivos, siendo aplicada a dos grupos por curso. El proceso de reflexión iterativa es el que permite re-adaptar el diseño inicial (Cobb et al., 2016).

Para este estudio nos fijaremos en los datos obtenidos en la última implementación de la secuencia (curso 2019-2020). El experimento tiene lugar en clase presencial durante noviembre de 2019. Los participantes son los 21 estudiantes de 4º curso de Grado de Magisterio de Educación Primaria (modalidad bilingüe) del Centro de Estudios Superiores Don Bosco (Centro Adscrito a la Universidad Complutense de Madrid), dentro de la asignatura Matemáticas y su Didáctica III. La profesora que dirige el taller es a su vez la investigadora principal. Además, tiene relación con los participantes del estudio, ya que es la profesora de la asignatura.

La secuencia didáctica está formada por cuatro problemas, los tres primeros sobre contenidos relacionados con movimientos rígidos en el plano y el último de corte didáctico. Aquí expondremos el análisis de la riqueza de la discusión en gran grupo del problema 3. El enunciado es el siguiente:

En la figura siguiente se muestra un fragmento de un recubrimiento del plano, elaborado por M.C. Escher.

Se han marcado tres peces con las letras F, G, H.

a) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con G?*
b) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir F con H?*
c) *¿Qué movimiento rígido hace coincidir H con G?*

En cada uno de los apartados:

i. *Explicad, en un cuadro de texto, cómo habéis llegado a la conclusión de que se trata de ese movimiento.*
ii. *Construid los elementos esenciales del movimiento (centro, vector o eje).*

Figura 1. Fragmento de recubrimiento del plano

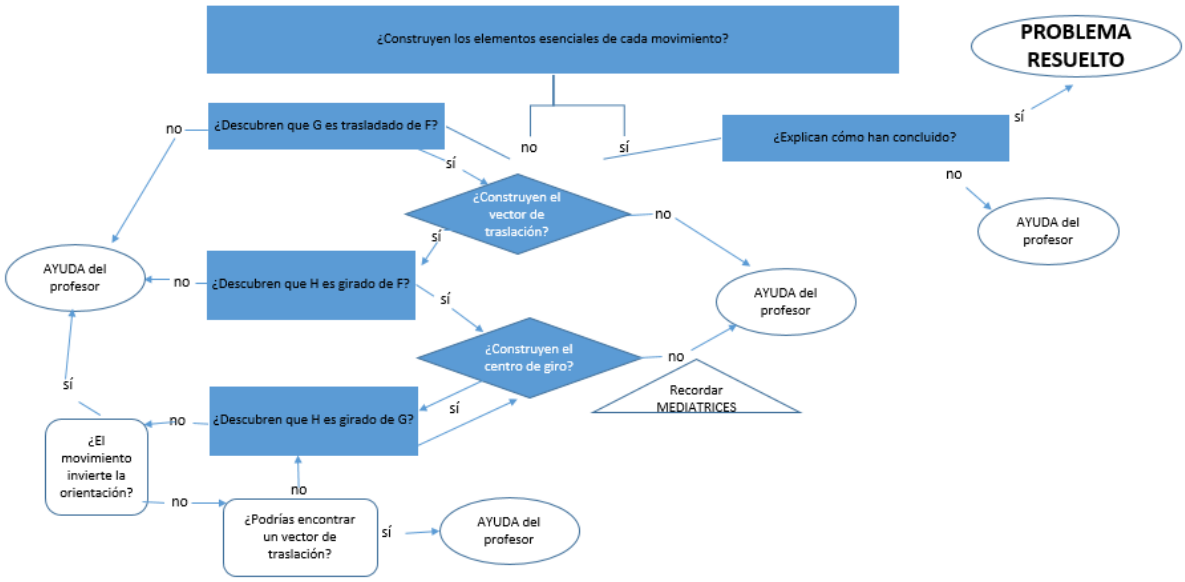
(Escher, 1955)



El objetivo es la identificación visual de las isometrías en una representación no dinámica y la construcción de los elementos esenciales. Para la resolución del problema inmediatamente anterior en la secuencia, los alumnos pueden arrastrar por la pantalla los elementos libres en la construcción geométrica y observar los invariantes que se producen. En este caso deben buscar nuevas estrategias.

Para llevar a cabo la fase de anticipación de una forma sistemática, para cada problema se crea un instrumento que llamaremos *árbol del problema*. Consiste en una estructura esquemática, en forma de árbol en el que las ramas muestran las diferentes estrategias que el alumno podrá seguir para la resolución del problema (Morera, 2013). Es un sistema dinámico que se actualiza tras cada intervención. El objetivo de este instrumento no es únicamente contenedor de las diferentes estrategias de resolución en un espacio reducido, si no también sirve para dar indicaciones al alumno. En todo momento, la docente sigue su estructura haciendo conscientes a los alumnos de su uso. Debido al tamaño del grupo la tarea de orquestación puede resultar complicada, pero es capaz de situar rápidamente en qué posición del árbol se encuentran, así no pierde mucho tiempo en interpretar los pasos que han dado en la resolución y puede, en cambio, elegir minuciosamente el tipo de mensajes que dar.

Figura 2. Árbol del problema



La aplicación de esta actividad se llevó a cabo en dos sesiones. En la primera, los estudiantes trabajan en parejas, que formaron por afinidades personales, y la profesora monitoriza. En la segunda, tiene lugar la discusión en gran grupo anclada en una solución que la profesora selecciona previamente. La pareja que ha elaborado la solución utiliza la pizarra digital interactiva para presentar su trabajo y responder a cuestiones planteadas por el resto de participantes y por la profesora. Según los tipos de orquestación de Drijvers et al. (2010) esta pareja realiza el *trabajo del sherpa*.

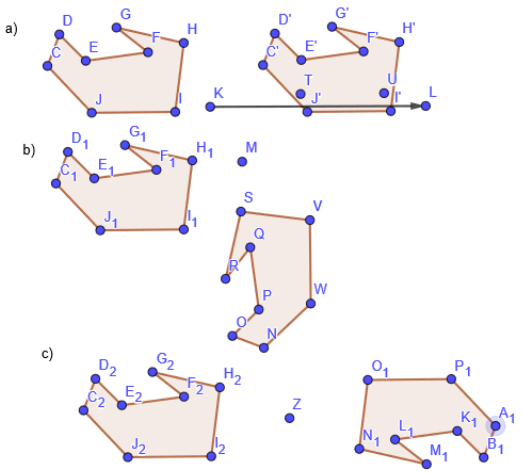
Según Smith et al. (2018) la monitorización del trabajo de los alumnos en parejas y la selección de una solución son fases de discusiones de gran grupo efectiva. Monitorizar es más que observar y escuchar a los alumnos mientras utilizan sus propias estrategias en el trabajo de resolución de un problema. Durante esta fase, la profesora hace preguntas para conseguir centrar la atención en ciertos aspectos del problema, para ayudar a clarificar ideas y para cerciorarse de que ambos integrantes de la pareja están implicados en la resolución. Después de haber monitorizado a los estudiantes y habiendo detectado las estrategias generadas, la profesora revisa los documentos presentados a través de la plataforma virtual. En base a la información que ha obtenido selecciona a estudiantes para que compartan su trabajo con el resto del grupo, y así tiene el control sobre la discusión. En el caso del problema 3 selecciona a una pareja que ha identificado la traslación y el giro de F a H. Además, ha encontrado el vector de traslación y el eje de simetría, pero no el centro de giro de H a G. Se trata de una situación que se ha repetido en muchas parejas. Para resolver esta última parte, se ofrece una pareja voluntaria para explicar su solución en la pizarra.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Tras la transcripción de las vídeograbaciones y el análisis de cada una de las intervenciones, se estructura el problema en trece episodios según la orquestación y estadios de la discusión (Morera et al, 2013). La serie tiene significado en su globalidad y consideramos que es necesaria una mirada a posteriori ya que en el análisis en profundidad de cada episodio el foco es demasiado concreto.

En el episodio 1, la profesora sitúa el problema, recuerda el enunciado, los objetivos y la anticipación, proyectando el árbol del problema. Después, invita a una pareja a salir a la pizarra. En el siguiente episodio comienza la presentación de la solución. Las alumnas han utilizado lo que llamamos "polígonos auxiliares" sobre los que pueden aplicar el dinamismo de GeoGebra. Aunque uno de los objetivos del problema era que las estudiantes buscaran nuevas estrategias diferentes a las del problema anterior para la identificación de movimientos rígidos, varias parejas recurrieron a la construcción de polígonos fuera de la imagen como apoyo visual.

Figura 2. Ejemplo de polígonos auxiliares construidos por una pareja



En el episodio 3 las parejas presentan una estrategia para encontrar el vector de traslación. Luego, la profesora pregunta por otros procedimientos. La discusión va más allá de los objetivos planteados y de lo que pide el enunciado, conectando con "ángulo de giro" en los episodios 4 y 6 cuando se tratan temas relacionados con el centro de giro.

En los episodios 5 y 10 se estudia un caso particular de giro: el centro se encuentra en la frontera de la figura a girar. En este caso, hay un punto que coincide con su homólogo. Por su parte, en el episodio 7 la pareja expone cómo ha encontrado el centro de giro cuando ningún punto de la figura coincide con su homólogo en la representación no dinámica. En el episodio 8, la profesora conecta lo sucedido en el episodio anterior con un resultado que desarrollará en los siguientes: la composición de un giro y una traslación es un giro. La profesora había observado durante la monitorización del trabajo en parejas que en varios casos habían tenido dificultades para ver el movimiento como un giro, viéndolo como composición de giro y traslación.

En el episodio 9 la profesora invita a otra pareja a participar, así el grupo conecta con otra solución al problema que se desarrollará durante los episodios 10 y 11. Estudian un caso particular y el genérico que ya se habían resuelto en los episodios 7 y 11.

La profesora tiene el protagonismo durante los episodios 12 y 13. Generaliza los resultados que han surgido durante la discusión y recapitula, recurriendo además a conclusiones a las que se había llegado en los problemas anteriores.

Consideramos el problema potencialmente "rico" desde el punto de vista de las oportunidades de aprendizaje porque observamos 26 oportunidades de aprendizaje diferentes que clasificamos atendiendo a su naturaleza.

Oportunidades orientadas a contenidos matemáticos específicos

1. Recordar la definición de isometría
2. Recordar las características de traslación, giro y simetría
3. Repasar los elementos que definen un vector
4. Repasar la noción de módulo
5. Repasar la noción dirección
6. Repasar la noción de sentido
7. Recordar un procedimiento general para encontrar el centro de giro.
8. Recordar un procedimiento particular para encontrar el centro de giro.
9. Revisar la noción de sentido del giro
10. Aprender que la composición de giro y traslación genera un giro
11. Recordar que la composición de simetría y traslación, de vector no perpendicular al eje de simetría genera una simetría deslizante. Aunque estos movimientos no sean conmutativos, traslación y simetría también generan simetría deslizante
12. Recordar que, si el eje de simetría es perpendicular al vector de traslación, la composición de simetría y traslación es simetría.
13. Recordar las características de un giro
14. Aprender que giro y traslación no son movimientos conmutativos pero su composición en un orden u otro genera un nuevo giro

Oportunidades orientadas a diferentes estrategias

15. Aprender que la construcción de un polígono auxiliar sobre el que se pueda aplicar el dinamismo de GeoGebra ayuda a recordar las características de los distintos movimientos rígidos y es posible extrapolar el razonamiento a un entorno no dinámico.
16. Aprender a argumentar empíricamente utilizando los medios técnicos.
17. Aprender a conjeturar
18. Aprender a argumentar matemáticamente.

19. Aprender la necesidad de encontrar la estrategia más corta para resolver un ejercicio
20. Aprender a argumentar empíricamente utilizando el arrastre
21. Aprender a argumentar utilizando procedimientos matemáticos y geométricos

Oportunidades de autorregulación

22. Aprender la importancia de participar en clase
23. Aprender la necesidad de justificar mediante argumentos
24. Aprender la necesidad de expresarse con el lenguaje matemático adecuado
25. Aprender la importancia de hacer conexiones con otras cuestiones.

Oportunidades orientadas a contenidos didácticos específicos

26. Recordar qué es el árbol del problema y para qué se utiliza

Señalamos que algunas oportunidades de aprendizaje se repiten en más de una ocasión: La oportunidad 7 se repite en tres ocasiones mientras que las siguientes se repiten dos veces: 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 19, 23 y 24

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Consideramos el problema potencialmente rico por el número de oportunidades de aprendizaje distintas que se detectan. Sin embargo, el concepto de riqueza del problema no es intrínseco al propio problema, sino que va acompañado de su gestión en el entorno de enseñanza-aprendizaje, tanto por parte de la profesora como del grupo clase. Tras considerar el problema como rico, cabe preguntarse qué factores han podido influir en esa riqueza.

Como Morera (2013) hemos observado que una buena anticipación del problema influye en la riqueza en cuanto a oportunidades de aprendizaje. Para el diseño e implementación de nuevas secuencias didácticas que involucren el uso de la tecnología y las discusiones en gran grupo, sugerimos algunas recomendaciones tras nuestra experiencia. La anticipación es fundamental y recomendamos diseñar un árbol del problema que sirve inicialmente para plasmar el esquema mental que tiene el docente en la cabeza. Consideramos que este instrumento debe servir como guion inicial tanto en la monitorización durante el trabajo en ordenador, como en el desarrollo de las discusiones. Predecir todas las actuaciones de los alumnos resulta imposible, por lo que no puede ser un guion cerrado y el profesor debe tener capacidad de adaptación a las intervenciones. Debe favorecer que los alumnos sean el centro de la actividad docente y capaces de construir su propio aprendizaje.

La tecnología y la dinámica de participación de los estudiantes también repercute en la aparición de oportunidades y la orquestación de la profesora es fundamental para el equilibrio de estos factores que influyen en la riqueza del problema. En futuros talleres que involucren tecnología y trabajo colaborativo, consideramos que, durante el trabajo en parejas previo a la discusión en gran grupo, el profesor debe permanecer atento a las diferentes actuaciones de los alumnos, teniendo presente la anticipación del problema y los contenidos que se quieren abordar. Después, se deben seleccionar situaciones que ayuden a encaminar la discusión hacia los objetivos que se han propuesto durante el diseño de la tarea. La discusión debe orquestarse bajo el andamiaje de la solución seleccionada para ser expuesta y de las intervenciones de los participantes.

Consideramos que hay aprendizaje matemático cuando hay evidencias explícitas de aprovechamiento de alguna oportunidad de aprendizaje. En la tesis doctoral en el que se encuadra el análisis del problema que se ha discutido aquí mostramos evidencias de aprovechamiento de alguna de estas oportunidades de aprendizaje.

Referencias

Cobb, P., Jackson, K., y Dumlap, C. (2016). Design Research: An Analisis and Critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3r ed., pp. 481-503). Routledge.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos* [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona]. Recuperado de https://www.tdx.cat/handle/10803/4716

Collazos-Delgado, A. A., González-Rincón, Y. M., y Monroy-Fonseca, M. N. (2023). Desarrollo del pensamiento geométrico a través de una secuencia didáctica apoyada con el uso de la herramienta GeoGebra. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *7*(1), 3433-3459.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool : instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5

Escher, M.C. (1955) *Symmetry Watercolor 96 Fish.*

Ferrer, M., Fortuny, J. M., & Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias,* 32(3), 385-405. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1231

Kieran, C. (2001) The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics,* 46, 187–228. https://doi.org/10.1023/A:1014040725558

Martín-Nieto, M. (2021). *Estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el us ode la tecnología en futuros maestros de Educación Primaria.* [Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid] Repositorio institucional de la Universidad Autónoma de Madrid https://repositorio.uam.es/handle/10486/697259?locale-attribute=es

Martín-Nieto, M. y Ruiz-López, N. (2022). Oportunidades de aprendizaje sobre isometrías en una discusión en gran grupo con GeoGebra. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXV (pp. 383-390). SEIEM. Recuperado de https://www.seiem.es/docs/actas/25/Comunicaciones/383.pdf

Molina, O. (2016). Interacción en un aula de geometría: construcción colectiva y escritura autónoma de una demostración. En E. Soledad, G. Manual, C. Guerrero, A. Mena, J. Mena, E.Montoya, A. Morales, M.Parraguez, E. Ramos, P. Vázquez y D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 117–121). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/15023/1/Molina2016Interaccion.pdf

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y d el aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2013/hdl_10803_116213/lmu1de1.pdf

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). *Design and Validation of a Tool for the Analysis of Whole Group Discussions in the Mathematics Classroom.* En Ç.M. Behiye Ubuz y A. Mariotti (Eds.). *Procedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1506– 1515). Recuperado de https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Planas, N. y Boukafri, K. (2019). *Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático.* Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02024105

Smith, M. S., y Stein, M. K. (2018). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. CORWN

Yackel, E, y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477. https://doi.org/10.2307/749877

LA COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE UNA DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA

The semiotic complexity of a proof by mathematical induction

Milanesio, B.[a] y Markiewicz, M. E.[b]

[a] Universidad de Granada, [b] Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo poner en evidencia la complejidad semiótica de una demostración de una proposición matemática realizada utilizando el principio de inducción matemática. Para ello, utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico, que nos permiten analizar las funciones semióticas que se deben poner a funcionar para comprender una demostración por inducción que se propone en un libro de texto de nivel universitario. Esto hace posible también poner en evidencia conflictos semióticos potenciales que pueden constituirse en explicaciones a posibles dificultades del estudiantado en la comprensión y la realización de este tipo de demostración.

Palabras clave: *funciones semióticas, demostración. principio de inducción, conflictos semióticos.*

Abstract

This paper aims to highlight the semiotic complexity of a proof of a mathematical proposition made using the principle of mathematical induction. To do this, we use tools from the Ontosemiotic Approach, which allow us to analyze the semiotic functions that must be put into operation to understand a demonstration by induction that is proposed in a university level textbook. This also makes it possible to highlight potential semiotic conflicts that can become explanations for possible difficulties of students in understanding and carrying out this type of demonstration.

Keywords: *semiotic functions, demonstration, principle of induction, semiotic conflicts.*

INTRODUCCIÓN

Desde el primer año del nivel universitario en diversas carreras de grado, particularmente, en el Profesorado en Matemática, se espera y se pretende que el estudiantado pueda comprender y realizar demostraciones matemáticas, en particular, demostraciones utilizando el principio de inducción matemática (PIM). Este tipo de demostración deductiva reviste una importancia fundamental dado que permite probar que una propiedad matemática es verdadera para todos los números naturales.

Sin embargo, como docentes de la asignatura Matemática Discreta, correspondiente al primer año de la Universidad Nacional de Rio Cuarto, Argentina, hemos podido constatar muchas dificultades que presentan los estudiantes para comprender y realizar este tipo de demostraciones. Tal como reconoce Gómez-Chacón (2009), la inducción matemática generalmente es un método de demostración desconocido por estos estudiantes universitarios, lo cual implica mayor preocupación ante su enseñanza y aprendizaje.

Las mencionadas dificultades también son reconocidas por otros investigadores en Didáctica de la Matemática (Crespo-Crespo, 2016; Nieves-Pupo et al., 2019; Ron y Dreyfus, 2004; Stylianides, 2007). Estos autores plantean que la comprensión significativa del método de demostración por inducción es un proceso complejo que involucra: la comprensión de la estructura de la demostración por inducción, la comprensión del paso base y del paso de inducción y la operatoria algebraica necesaria, siendo todos estos, aspectos que pueden ser fuente de dificultades para los estudiantes. A

Milanesio, B. y Markiewicz, M. E. (2023). La complejidad semiótica de una demostración por inducción matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 363–370). SEIEM.

su vez, reconocen que muchos estudiantes realizan estas demostraciones de forma mecánica sin comprender su significado, debido principalmente a las fundamentaciones lógicas que las mismas implican. Así, en producciones de muchos estudiantes, se manifiesta la suficiencia de la demostración del paso inductivo para la demostración general de la proposición involucrada, obviando de esta manera la demostración del paso base debido a su "simplicidad". Esto da cuenta de que el estudiantado no logra interpretar la estructura lógica que conlleva una demostración utilizando el PIM. En otros casos, los estudiantes intentan generalizar la aplicación de este método de demostración a cualquier conjunto numérico.

En este trabajo sostenemos que una posible explicación a las mencionadas dificultades reside en la complejidad semiótica que reviste este tipo de demostraciones (en sintonía con lo planteado por Recio (1999) en relación a cualquier demostración matemática). Así, el objetivo de este estudio es poner en evidencia dicha complejidad en una demostración utilizando PIM planteada en un libro de texto de nivel universitario, a través del análisis de las funciones semióticas que se necesitan poner a funcionar para poder comprenderla y realizarla. Esto nos permitirá, a su vez, develar conflictos semióticos potenciales que pueden explicar, desde otro lugar, las dificultades del estudiantado.

MARCO TEÓRICO

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS) nos aporta herramientas para analizar la demostración matemática escogida, por lo que se constituye en el marco teórico y metodológico de este trabajo.

En este enfoque (Godino et al., 2007) se introduce la noción de *práctica matemática*, entendida como toda actuación o expresión realizada por alguien para dar solución a problemas matemáticos, comunicarla, validarla o generalizarla, y de *significado* (personal e institucional) de un objeto matemático como un emergente de los sistemas de prácticas (que realiza una persona o compartidas en el seno de una institución) donde dicho objeto es determinante para su realización. Estos sistemas de prácticas están constituidos por redes de relaciones en las que intervienen diferentes tipos de *objetos primarios*: situaciones-problemas, procedimientos, definiciones-conceptos, proposiciones, argumentos y lenguaje.

Los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o dualidades (Godino et al., 2021): ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significado (contenido); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales - institucionales. Estas dualidades dan lugar a ciertos *procesos cognitivos/epistémicos duales*, tales como, procesos de materialización-idealización (asociado a la dualidad ostensivo-no ostensivo), particularización-generalización (dualidad extensivo-intensivo), representación-significación (dualidad expresión-contenido), descomposición-reificación (dualidad unitario-sistémico) y personalización-institucionalización (dualidad personal-institucional).

Uno de los constructos fundamentales del EOS es el de *función semiótica*, entendida como "la correspondencia entre un objeto *antecedente* (expresión/significante) y otro *consecuente* (contenido/significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia" (Godino et al., 2021, p.15). Además, en el EOS se asume que toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de expresión (significante), contenido (significado) o interpretante (regla que relaciona expresión y contenido). Se asume también que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas etc.), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos,

argumentos, inclusive las situaciones-problemas, pueden ser también antecedentes y/o consecuentes de las funciones semióticas. Los funtivos pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales. Se genera de este modo una variedad de tipos de significados que orienta y apoya la realización de análisis ontosemióticos de la actividad matemática, tanto desde el punto de vista epistémico (institucional) como cognitivo (personal) (Godino et al., 2021).

El análisis pormenorizado de las funciones semióticas que se ponen en juego en una práctica matemática permite develar su complejidad semiótica, siendo esto un factor explicativo de *conflictos semióticos* potenciales (o efectivos), definidos por el EOS como "cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)" (Godino et al., 2007, p.133).

METODOLOGÍA

La metodología adoptada en este trabajo es inherente al EOS. En particular, realizamos un estudio documental e interpretativo de una demostración matemática realizada utilizando el PIM. La misma se propone en un libro de texto de Matemática Discreta (Johsonbaugh, 2005) que se suele utilizar en primer año del nivel universitario.

Tomando como base la caracterización del PIM que se plantea en el texto (ver Figura 1), se analiza la demostración por inducción planteada para una proposición matemática (ver Figura 2). Llevamos a cabo este estudio a partir de la identificación y el análisis de las funciones semióticas implicadas en las diversas prácticas matemáticas elementales en la cuales se puede descomponer dicha demostración. Además, identificamos conflictos semióticos potenciales que nos aportarían algunas explicaciones a las dificultades que presentan los estudiantes ante la comprensión y la realización de este tipo de demostraciones.

Figura 1. Caracterización del PIM

Suponga que se tiene una función proposicional S(n) cuyo dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos. Suponga que

S(1) es verdadera; **(1.7.7)**
para toda $n \geq 1$, *si S(n) es verdadera, entonces S(n + 1) es verdadera.* **(1.7.8)**

Entonces S(n) es verdadera para todo entero positivo n.

La condición (1.7.7) en ocasiones recibe el nombre de **paso base** y la condición (1.7.8) el de **paso inductivo**. En adelante, por "inducción" entenderemos "inducción matemática".

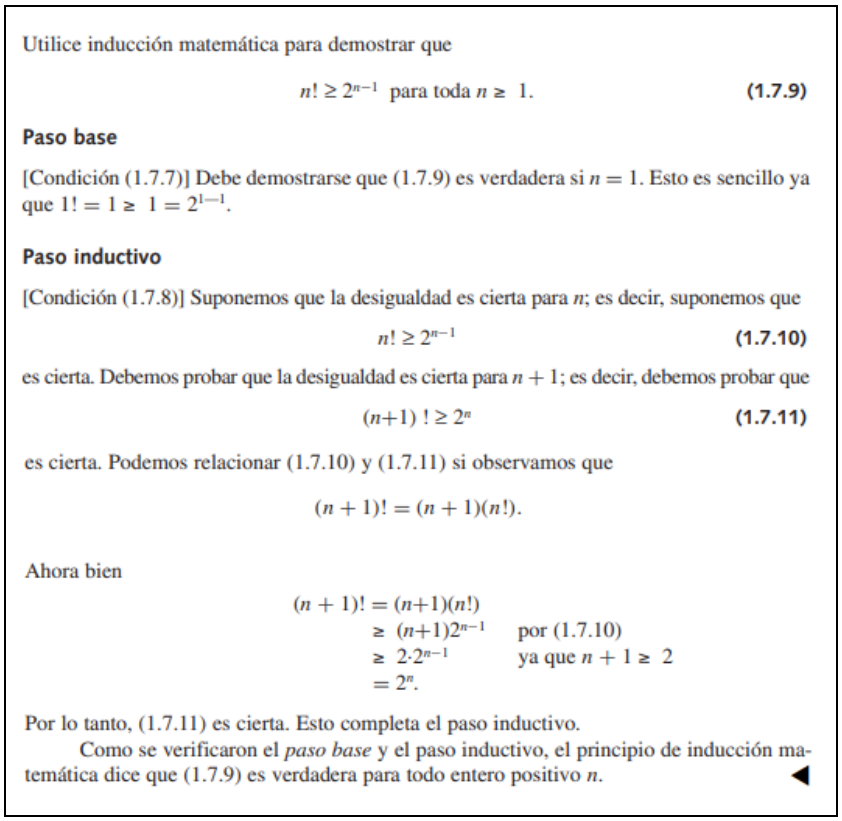
Fuente: Johsonbaugh (2005, p. 55)

DESARROLLO

Prácticas matemáticas elementales y funciones semióticas implicadas

A continuación, mostramos el análisis realizado a la práctica demostrativa planteada en el texto (Figura 2). Para ello, la descompusimos en una secuencia de prácticas matemáticas elementales (PME) y, para cada una, identificamos algunas de las principales funciones semióticas (FS) que se establecen entre los objetos matemáticos implicados (Godino et al., 2016), determinando el antecedente, la regla de correspondencia y el consecuente.

Figura 2. Demostración matemática utilizando PIM.



Utilice inducción matemática para demostrar que

$$n! \geq 2^{n-1} \text{ para toda } n \geq 1. \qquad \textbf{(1.7.9)}$$

Paso base

[Condición (1.7.7)] Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$. Esto es sencillo ya que $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$.

Paso inductivo

[Condición (1.7.8)] Suponemos que la desigualdad es cierta para n; es decir, suponemos que

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \textbf{(1.7.10)}$$

es cierta. Debemos probar que la desigualdad es cierta para $n + 1$; es decir, debemos probar que

$$(n+1)\,! \geq 2^n \qquad \textbf{(1.7.11)}$$

es cierta. Podemos relacionar (1.7.10) y (1.7.11) si observamos que

$$(n + 1)! = (n + 1)(n!).$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} (n + 1)! &= (n+1)(n!) \\ &\geq (n+1)2^{n-1} && \text{por (1.7.10)} \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} && \text{ya que } n + 1 \geq 2 \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (1.7.11) es cierta. Esto completa el paso inductivo.

Como se verificaron el *paso base* y el paso inductivo, el principio de inducción matemática dice que (1.7.9) es verdadera para todo entero positivo n. ◀

Fuente: Johsonbaugh (2005, pp. 55-56)

- PME1. Utilice inducción matemática para mostrar que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. (1.7.9).

FS1. A la expresión "inducción matemática" (antecedente de FS1) se la asocia con un método de demostración según el cual, dada una función proposicional S(n), cuyo dominio de discurso es el conjunto de los enteros positivos, se requiere demostrar dos condiciones para poder concluir que S(n) es verdadera para cualquier entero positivo: que S(1) es verdadera y que para todo $n \geq 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera (consecuente de FS1).

FS2. La expresión "$n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$" (antecedente de FS2) se relaciona con una función proposicional S con dominio en el conjunto de los enteros positivos (consecuente de FS2).

FS3. Al ostensivo n (antecedente de FS3) se lo asocia con un entero positivo arbitrario (consecuente de FS3).

FS4. Al ostensivo $n!$ (antecedente de FS4) se lo vincula con un número natural que se define como $0! = 1$ y $n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 2..$ si $n \geq 1$ (Johsonbaugh, 2005, p. 55) (consecuente de FS4).

FS5. Se relaciona el ostensivo 2^{n-1} (antecedente de FS5) con una potencia de base 2 y exponente $n - 1$, con $n \geq 1$ (consecuente de FS5).

FS6. A la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ (antecedente de FS6) se le otorga el contenido de una desigualdad entre dos números naturales (consecuente de FS6).

- PME2. Paso base [1.7.7]. Debe demostrarse que (1.7.9) es verdadera si $n = 1$.

En PME2, además de asociarse FS4, FS5 y FS6 de PME1, se asocia la siguiente función semiótica:

FS7. A la expresión "paso base" (antecedente de FS7) se le otorga el contenido de que S(1) sea verdadera, esto es, que la desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$ sea verdadera para $n = 1$ (consecuente de FS7).

- PME3. Esto es sencillo ya que $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$.

En PME3 además de vincularse FS4, FS5 y FS6 de PME1 se asocian las siguientes funciones:

FS8. Se evoca la definición de factorial para determinar que $1! = 1$ (consecuente de FS8).

FS9. Se evoca una propiedad de potencia (la potencia elevada a exponente 0 es igual a 1) para determinar que $2^{1-1} = 1$ (consecuente de FS9).

FS10. La cadena conformada por dos igualdades y una desigualdad $1! = 1 \geq 1 = 2^{1-1}$ (antecedente de FS10) se debe unificar para concluir que el primer término 1! es mayor o igual que el último 2^{1-1} (consecuente de FS10).

- PME4. Paso inductivo [1.7.8]. Suponemos que la desigualdad es cierta para n, es decir, suponemos que $n! \geq 2^{n-1}$ es cierta. Debemos probar que la desigualdad es cierta para $n + 1$, es decir, debemos probar que $(n + 1)! \geq 2^n$ es cierta.

Además de asociarse FS4, FS5 y FS6 de PME 1 se vinculan las siguientes funciones semióticas:

FS11. Al ostensivo n (antecedente de FS11) se lo relaciona con un entero positivo particular arbitrario (consecuente de FS11).

FS12. A la expresión "paso inductivo" (antecedente de FS12) se le otorga el contenido de que: para todo $n > 1$: si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera (consecuente de FS12). A su vez, se asocia esto último con la generalización de un condicional.

FS13. Se asocia la expresión "S(n) es verdadera" (antecedente de FS13) con la expresión "la desigualdad es cierta para n" (consecuente de FS13).

FS14. A la expresión "la desigualdad es cierta para n" (antecedente de FS14) se le otorga el contenido "$n! \geq 2^{n-1}$ es cierta" (consecuente de FS14).

FS15. La expresión "S(n+1) es verdadera" (antecedente de FS15) se relaciona con "la desigualdad es cierta para n+1" (consecuente de FS15):

FS16. A la expresión "la desigualdad es cierta para n+1" (antecedente de FS16) se le otorga el contenido "$(n + 1)! \geq 2^n$ es cierta" (consecuente de FS16).

FS17. La prueba del condicional involucrado (antecedente de FS17) se relaciona con el argumento consistente en suponer que su antecedente es verdadero (hipótesis) y probar su consecuente (tesis) (consecuente de FS17).

FS18. Se relaciona la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ (antecedente de FS18) con el antecedente del condicional involucrado (consecuente de FS18). Esto corresponde a la hipótesis inductiva.

FS19. Se vincula la expresión $(n + 1)! \geq 2^n$ (antecedente de FS19) con el consecuente del condicional involucrado (consecuente de FS19).

- PME5. Podemos relacionar $n! \geq 2^{n-1}$ y $(n + 1)! \geq 2^n$ si observamos que: $(n + 1)! = (n + 1).n!$.

Para PME5 se asocian las funciones semióticas FS4, FS5 y FS6 de PME1 y la siguiente:

FS20. A la expresión $(n + 1)!$ (antecedente de FS20) se la relaciona con $(n + 1).n!$ (consecuente de FS20) para poder aplicar la hipótesis inductiva.

- PME6. $(n + 1)! = (n + 1).n! \geq (n + 1).2^{n-1}$ (por $n! \geq 2^{n-1}$)
  $\geq 2.2^{n-1}$ (ya que $n + 1 \geq 2$)
  $= 2^n$.

Se asocian las funciones FS4 y FS5 de PME1, la función FS20 de PME5 y las siguientes:

FS21. Se aplica la hipótesis inductiva para el ostensivo $n!$ para poder obtener $(n+1).n! \geq (n+1).2^{n-1}$ (consecuente de FS21).

FS22. Evocar una propiedad de la desigualdad (si se suma el mismo valor a ambos miembros de una desigualdad, la misma se mantiene) para obtener $(n+1).2^{n-1} \geq 2.2^{n-1}$ (consecuente de FS22).

FS23. Evocar la propiedad del producto de potencias de igual base para obtener $2.2^{n-1} = 2^n$ (consecuente de FS23).

FS24. La cadena de igualdades y desigualdades involucrada (antecedente de FS24) se unifica para concluir que $(n+1)! \geq 2^n$ (consecuente de FS24).

- PME7. Por lo tanto, $(n+1)! \geq 2^n$ es cierta. Esto completa el paso inductivo.

Para PME7, además de FS11, FS12, FS17, FS18 y FS19 (de PME4) y FS20 (de PME5) se asocian:

FS25. A la expresión $(n+1)! \geq 2^n$ (antecedente de FS25) se la asocia con una desigualdad entre dos números naturales (consecuente de FS25).

FS26. Los pasos realizados en el paso inductivo (para un n particular arbitrario suponer que vale el antecedente - la desigualdad es cierta para n - y deducir utilizando definiciones y propiedades que vale el consecuente - la desigualdad es cierta para $n+1$ -) (antecedente de FS26), se reifican para concluir la validez del condicional para cualquier n (consecuente de FS26).

- PME8. Como se verificaron el paso base y el paso inductivo, el PIM dice que $n! \geq 2^{n-1}$ es verdadera para todo entero positivo n.

Se asocian todas las FS de PME1, la FS7 de PME2, la FS12 de PME4 y las siguientes:

FS27. El paso base y el paso inductivo (antecedente de FS27) se unifican para ser interpretados como la hipótesis del PIM (consecuente de FS27).
FS28. Se asocia la expresión "$n! \geq 2^{n-1}$ es verdadera para todo entero positivo n" (antecedente de FS28) con la tesis del PIM (consecuente de FS28).

FS29. Se reconoce en la expresión "$n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$" (antecedente de FS29) un nuevo todo unitario: la proposición emergente (consecuente de FS29).

Conflictos semióticos potenciales

El análisis de las funciones semióticas permite anticipar conflictos semióticos potenciales en la comprensión y el desarrollo de esta demostración por inducción, que pueden producirse al no relacionar adecuadamente los elementos de una función semiótica. Aquí, haremos referencia a algunos conflictos que consideramos más relevantes, indicando la función semiótica asociada que lo puede generar.

- Vinculados a FS1: posibles desajustes en el significado otorgado al PIM al que remite la demostración, más precisamente dificultades para vincular esta expresión con la idea de que, dada una función proposicional S(n), para demostrar que es verdadera para todo n entero positivo basta con probar dos condiciones: que S(1) es verdadera y que, para todo $n \geq 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera.
- Asociados a FS2: conflictos para otorgar contenido a la proposición matemática a demostrar ($n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$) como una función proposicional S con dominio en el conjunto de los enteros positivos.
- Vinculados a FS3 y FS6: dificultades para reconocer en el ostensivo n un entero positivo arbitrario y en la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ una desigualdad entre dos números naturales.
- Vinculados a FS4 y FS5: posibles disparidades al significar las expresiones $n!$ y 2^{n-1}.

- Asociados a FS7: dificultades para significar la expresión "paso base" como que S(1) sea verdadera, es decir, que la desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$ sea verdadera para $n = 1$.
- Vinculados a FS12, FS18 y FS19: dificultades para otorgar significado a la expresión "paso inductivo" como: para todo $n > 1$, si S(n) es verdadera entonces S(n+1) es verdadera. A su vez, conflictos para significar al paso inductivo como la generalización de un condicional, y para relacionar la expresión $n! \geq 2^{n-1}$ con el antecedente, y la expresión $(n+1)! \geq 2^n$ con el consecuente.
- Asociados a FS17: conflictos para relacionar la prueba del paso inductivo, con un argumento consistente en considerar un n particular arbitrario, suponer que su antecedente es verdadero (hipótesis) y probar su consecuente (tesis). También, conflictos vinculados con la necesidad de generalizar el condicional para todo número natural, a partir de haberlo probado para un natural n particular arbitrario.
- Vinculados a FS20: dificultades para significar la expresión $(n+1)!$ como $(n+1).n!$.
- Asociados a FS21 y FS22: posibles desajustes en el paso inductivo, por ejemplo, en el pasaje de la expresión $(n+1).n! \geq (n+1).2^{n-1}$ a la expresión $(n+1).2^{n-1} \geq 2.2^{n-1}$ en relación a la posibilidad de significar la última expresión como consecuencia de la aplicación de ciertas propiedades en la primera que permiten deducir la segunda.
- Vinculados a FS10 y FS24: dificultades, en el paso base, para unificar la cadena conformada por dos igualdades y una desigualdad, para concluir que el primer término 1! es mayor o igual que el último 2^{1-1}. También, en el paso inductivo para unificar la cadena de igualdades y desigualdades para concluir que $(n+1)! \geq 2^n$.
- Asociados a FS20: dificultades para expresar $(n+1)!$ en función de $n!$ para hacer uso de la hipótesis inductiva.
- Asociados a FS26: dificultades, en el paso inductivo, para unificar los pasos realizados.
- Vinculados a FS27 y FS28: conflictos asociados a la posibilidad de unificar el paso base y el paso inductivo en la demostración utilizando el PIM, a partir de interpretarlos como hipótesis del PIM, que, al haber sido probados, permite asegurar la tesis del mismo (la función proposicional en cuestión vale para todo entero positivo n).
- Asociados a FS29: dificultades para reconocer la proposición emergente $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$ como un todo unitario que ha sido demostrado para todos los números naturales.

CONSIDERACIONES FINALES

Este trabajo pone en evidencia la potencialidad de la noción de función semiótica para analizar de manera microscópica la secuencia de prácticas matemáticas elementales implicadas en una demostración básica por inducción matemática, poniendo en relación un objeto antecedente con otro consecuente según una regla de correspondencia (Godino et al., 2016), dando cuenta de la complejidad semiótica de este tipo de prácticas demostrativas. Claramente algunas de ellas son particulares de la demostración de la proposición seleccionada, pues están íntimamente ligadas a los procesos que exigen la aprehensión de los conceptos, proposiciones y relaciones matemáticas que definen a la propiedad objeto de estudio (por ejemplo, FS4, FS6, FS20), mientras que otras son transversales y aplican a cualquier demostración por inducción, pues son inherentes al proceso de argumentación y evidencian la complejidad lógica de este método (FS1, FS12, FS27, FS28).

Tal como se menciona en Godino et al. (2007), las funciones semióticas revisten un papel esencial en el proceso relacional de las entidades que se lleva a cabo en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje) y, en este sentido, el EOS entiende la comprensión en términos de las funciones semióticas que se pueden establecer. Esto pone de manifiesto la necesidad de reconocer, como docentes, las distintas funciones semióticas que se ponen a funcionar en este tipo de demostraciones para lograr una comprensión significativa en los momentos de implementación de

estas prácticas. En este sentido, Crespo-Crespo (2016) expresa que en el aula se debe promover un ambiente reflexivo y comprensivo de modo que estas prácticas demostrativas no se limiten a procesos algebraicos meramente técnicos, pero para esto – nosotros agregamos – es necesario ser conscientes de la complejidad ontosemiótica de las mismas.

El análisis realizado nos permitió, además, poner al descubierto conflictos semióticos que permiten explicar posibles dificultades del estudiantado en la comprensión y realización de este tipo de demostración (algunos específicos de la práctica analizada y otros comunes a la estructura lógica de toda demostración utilizando inducción matemática) en términos de los conocimientos matemáticos específicos requeridos en cada caso (Godino et al., 2016).

Finalmente, este trabajo pretende ser un aporte a los estudios sobre la complejidad que revisten las demostraciones matemáticas, y, en particular, las demostraciones por inducción, desde una perspectiva semiótica que pone de manifiesto relaciones y significados que muchas veces están ocultos en las prácticas planteadas en un libro de texto. La desnaturalización de las mismas y de los posibles conflictos es un primer paso para pensar en procesos de estudio sobre este tipo de demostraciones con mayor idoneidad cognitiva e instruccional.

Referencias

Crespo-Crespo, C. (2016). Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. En E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 29 (pp. 243-252).

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics Education. *ZDM. The international journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes Matemáticas: Propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*, 5–32.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas (6.ª ed.).* Pearson Educación.

Nieves-Pupo, S., Caraballo-Carmona, C. M., y Fernández-Peña, C. L. (2019). Metodología para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la demostración por inducción completa. *Mendive. Revista de Educación*, *17*(3), 393- 408.

Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Ron, G. y Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (pp. 113-120).

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38(*3), 289–321.

SIGNIFICADOS PRAGMÁTICOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Pragmatic meanings of mathematical proof in higher education students

Milanesio, B.[a], Burgos, M.[b] y Markiewicz, M. E.[c]

[a,b] Universidad de Granada, [c] Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

El objetivo de esta investigación es analizar los significados personales mostrados sobre la demostración matemática de un grupo de 31 estudiantes que ingresan a los grados de física y matemáticas, cuando resuelven una tarea que exige la validación de proposiciones aritméticas fundamentales. A través de un estudio de tipo mixto cualitativo-cuantitativo, se investigan el grado de pertinencia de las soluciones, los tipos de estrategias seguidas y los niveles de razonamiento algebraico asociados, según el modelo desarrollado desde el Enfoque Ontosemiótico. Los resultados muestran las dificultades de los participantes para desarrollar pruebas completas. Predominan las explicaciones informales y los argumentos empíricos, de carácter aritmético e insuficientes para validar de manera general las proposiciones matemáticas involucradas.

Palabras clave: *estudiantes universitarios, demostración matemática, niveles de razonamiento algebraico, enfoque ontosemiótico.*

Abstract

The objective of this research is to analyze the personal meanings shown on the mathematical proof of a group of 31 students entering physics and mathematics grades, when they solve a task that requires the validation of fundamental arithmetic propositions. Through a mixed qualitative-quantitative study, the degree of relevance of the solutions, the types of strategies followed and the associated algebraic reasoning levels are investigated, according to the model developed by the ontosemiotic approach. The results reveal the difficulties of the participants to develop complete proofs. The predominant strategies were informal explanations and empirical arguments, arithmetical in nature and insufficient to validate in a general way the mathematical propositions.

Keywords: *undergraduate students, mathematical proof, algebraic reasoning levels, Ontosemiotic Approach*

INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática constituyen una problemática desafiante en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Stylianides y Stylianides, 2017). Cómo enseñar la demostración y cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto para los profesores de matemáticas, debido a las constantes dificultades que presentan los estudiantes en los procesos de comprensión y desarrollo de las demostraciones (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz et al., 2021; Weber et al., 2020). Dado que la demostración matemática constituye un proceso inherente a la propia disciplina, presente de diferentes formas en las clases de matemáticas de los distintos niveles educativos, diversos autores han analizado la conexión con formas menos abstractas de aproximarse a la demostración tales como explicación, argumentación, verificación, prueba (Alfaro-Carvajal et al., 2019; Balacheff, 2000; Stylianides et al., 2017).

Como sugieren Stylianides et al. (2017), incluso estudiantes de nivel universitario carecen de las competencias necesarias para elaborar pruebas con éxito, bien porque no dan sentido a enunciados

Milanesio, B., Burgos, M. y Markiewicz, M. E. (2023). Significados pragmáticos de la demostración matemática en estudiantes universitarios. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 371–378). SEIEM.

con una estructura lógica compleja, no llegan a elegir un marco de demostración legítimo para comenzar su demostración o no reconocen argumentos inválidos. Para estos autores, la dificultad que encuentran los estudiantes parte de la distancia estructural entre el argumento informal y la prueba. Autores como Pedemonte y Reid (2011), entre otros, se apoyan en el modelo de Toulmin (1993) para analizar y documentar las dificultades que encuentran los estudiantes con la demostración, observando la distancia estructural entre el argumento informal y la prueba. Sin embargo, son escasas las investigaciones que analizan la complejidad de este tránsito en base a las prácticas, objetos y procesos que intervienen en la demostración matemática, y en especial aquellos de naturaleza algebraica.

En este sentido, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2019) se han realizado algunas investigaciones sobre la demostración matemática con la intención de clarificar los significados que se le otorgan a la misma, cómo se interrelacionan y cómo deberían tenerse en cuenta en los procesos instruccionales (Godino y Recio, 2001; Markiewicz et al., 2021). Así, en Markiewicz et al. (2021) se analizan los objetos y procesos que influyen y condicionan las prácticas argumentativas de estudiantes del último año de secundaria, determinando los niveles de razonamiento algebraico (Godino et al., 2015) de dichas prácticas y los conflictos semióticos que obstaculizan el avance hacia el tipo de validación deductiva pretendida en los primeros años de la universidad. Esta investigación permitió constatar cierta distancia entre el tipo de validación logrado por estudiantes al final de secundaria y el pretendido en el nivel superior.

Continuando con esta línea de investigación, el objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de un primer ciclo de investigación con estudiantes que acaban de ingresar en titulaciones universitarias de matemáticas y física, en una universidad de Argentina, cuando resuelven tareas que requieren justificar propiedades aritméticas fundamentales. Se pretende identificar los significados personales sobre la demostración de estudiantes que se encuentran en la transición entre el nivel secundario y superior, a partir del análisis de sus prácticas y el nivel de razonamiento algebraico emergente.

MARCO TEÓRICO

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones-problemas, e interpreta el significado pragmático de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones (Godino et al., 2019) por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Los objetos matemáticos que intervienen y emergen de las prácticas se clasifican según su naturaleza y función en: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

El modelo de razonamiento algebraico en el EOS

El modelo de los niveles de razonamiento algebraico (RAE) desarrollado en el EOS (Godino et al., 2015) permite modelizar el conocimiento institucional y personal que se pone en juego en el estudio de la validación, en tanto describe la actividad matemática bajo la perspectiva del álgebra.

Los criterios para delimitar los niveles están basados en los objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática (institucional o personal), por lo que permiten hacer un análisis microscópico de las prácticas matemáticas y, por tanto, de los significados (institucionales o personales) (Godino y Burgos, 2017). Estos criterios son los siguientes: a) generalización (de la que emergen objetos intensivos en relación dialéctica con los correspondientes extensivos), b) unitarización (reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias), c) formalización y ostensión (nombramiento mediante diferentes sistemas de representación, en particular, expresiones

simbólico-literales), d) transformación (intervención de objetos intensivos en procesos de cálculo analítico y nuevas generalizaciones). Los niveles de RAE son los siguientes:

- Nivel 0 (N0). Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- Nivel 1 (N1). Involucra objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
- Nivel 2 (N2). Se usan representaciones simbólico-literales para referir a objetos intensivos reconocidos ligados a la información y contextual; en tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Nivel 3 (N3). Los símbolos se emplean de forma analítica. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables y se formulan de manera simbólica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.
- Nivel 4 (N4). Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Se opera con coeficientes variables, pero no con parámetros.
- Nivel 5 (N5). Tratamiento de parámetros. Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables.
- Nivel 6 (N6). Introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o grupo) y el estudio del álgebra de funciones.

Demostración y términos asociados

Como hemos mencionado, diversos autores reconocen la existencia de diferentes formas en las que se presenta la demostración, dependiendo del contexto en la que se la considere (escuela, universidad, comunidad de matemáticos) y del grado de formalidad con el que se utilice. Para Balacheff (2000) los procesos de *validación* persiguen asegurar "la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración)" (p.13). En la *explicación*, el sujeto pretende hacer inteligible al público la verdad de una proposición, que él ya ha adquirido. No se trata necesariamente de un razonamiento deductivo y el lenguaje principal es el natural (Balacheff, 2000). Para este autor, la *prueba* es una explicación que ha sido reconocida y aceptada socialmente por una comunidad. Entiende que "el paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad" (Balacheff, 2000, p.12), aunque, puede ser aceptada por una comunidad, pero rechazada por otra.

La *demostración* es considerada el tipo de prueba dominante en matemáticas. Utiliza proposiciones aceptadas por la comunidad de clase que son verdaderas (axiomas) y están disponibles sin más justificación; emplea formas de argumentación válidas y conocidas o al alcance conceptual de la comunidad, se comunica con formas de expresión que son apropiadas y conocidas o pueden serlo por la comunidad de la clase (Stylianides et al., 2022). Dado que lo que se considera una demostración matemática y cuándo es válida depende del contexto sociocultural, Alfaro-Carvajal et al. (2019) consideran necesario reconocer la existencia de diversos significados de la demostración que contemplen argumentos empíricos, es decir, basados en el uso de ejemplos que ofrecen una evidencia incompleta sobre la veracidad de una proposición matemática. Consideran demostraciones informales aquellas en las que "se hace una redacción en prosa más simple en la que se omiten las justificaciones sobre las reglas de inferencia usadas y los presupuestos matemáticos que fundamentan cada paso de la demostración" (p.66).

METODOLOGÍA

De forma general la investigación tiene un carácter descriptivo y exploratorio, con algunos elementos interpretativos y explicativos (Bisquerra y Alzina, 2004). Empleamos el análisis de

contenido (Cohen et al., 2018) para examinar las respuestas de los participantes. La experiencia formativa se llevó a cabo con 31 estudiantes de primer curso universitario de profesorado y licenciatura en matemáticas y licenciatura en física en una universidad de Argentina, que comparten la asignatura de Matemática Discreta. El nivel de desempeño en matemáticas de los estudiantes que participaron en la experiencia es estándar, según los resultados obtenidos en los cursos de nivel secundario.

Figura 1. Instrumento de recogida de datos

Problema 1. En cada caso, justifica tu respuesta.
a) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 3?
b) Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 5?
c) ¿Cuándo será cierto que, si se suman k números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado es múltiplo de k?

Fuente: ítems a y b tomados de Sessa (2005, p. 113), ítem c adaptado de Sessa (2005, p. 113)

En este trabajo y por motivos de espacio, mostramos el análisis de los resultados obtenidos en una de las tareas propuestas, incluida en la Figura 1. Además de esta tarea se propusieron otras dos y los estudiantes dispusieron de dos horas y cuarenta minutos para su realización. La encargada de la recogida de datos fue la tercera autora y profesora de los estudiantes en Matemática Discreta.

El problema propuesto involucra la validación de diversas propiedades matemáticas, en un contexto aritmético-algebraico cercano a los conocimientos esperados de los estudiantes del nivel secundario y que se retoman en el ingreso al nivel universitario. Se ponen en juego diversos objetos matemáticos (números naturales consecutivos, múltiplo de un natural, números impares, propiedades de la suma y multiplicación en $\mathbb{N}$) y procesos como la exploración de ejemplos, el reconocimiento de regularidades, la búsqueda de contraejemplos, el planteamiento de conjeturas y la propuesta de algún tipo (más o menos formal) de argumentación para validar dichas conjeturas. En el ítem c, aunque no se espera una demostración formal de la doble generalización involucrada distinguida en Sessa (2005) (comienzo de la suma por cualquier número natural y cualquier cantidad de sumandos implicados) se espera que los estudiantes obtengan alguna regla general con base en los resultados de los ítems previos.

Las autoras, teniendo en cuenta la solución experta a la tarea, acordaron previamente los siguientes grados de pertinencia en la valoración de las respuestas:

- *Correcta* (C). Una respuesta se considera correcta si se establece y garantiza la validez general de la proposición matemática. Tal es el caso de las demostraciones informales como se puede ver en la producción del estudiante E31 (ver Figura 5) donde pone de manifiesto en lenguaje simbólico la suma de cinco naturales consecutivos utilizando implícitamente algunas propiedades disponibles (asociativa y conmutativa de la suma en N, agrupación de términos semejantes, etc.): $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4) = 5a+10 = 5(a+2)$, expresando la relación de la primera expresión con ser múltiplo de 5.
- *Parcialmente correcta* (PC). Una respuesta se considera parcialmente correcta si se basa en propiedades matemáticas correctas pero que no permiten valorar la validez de la proposición, atendiendo así a particularización-generalización incompletas o al uso de contraejemplos para afirmar una proposición emergente (sin validar la misma). Por ejemplo, la solución de E5 al apartado c, donde emplea contraejemplos (particularizando k a 2 y luego a 4) que refutan la sentencia de que, para la suma de cualquier k números naturales consecutivos el resultado es múltiplo de k (ver Figura 4).
- *Incorrecta* (I). En otro caso, por ejemplo, si resuelve de manera confusa, se basa únicamente en casos particulares para fundamentar la validez de las proposiciones (Figura 2) o emplea proposiciones matemáticas no verdaderas (Figura 3).

A continuación, la primera y segunda autora analizaron independientemente parte de los informes

de los estudiantes, para identificar y compartir los tipos de estrategias encontradas. Después confrontaron sus resultados y los discutieron con la tercera autora para definir las categorías:

- *Argumento empírico*. Se basa en el uso de casos particulares que ofrecen una evidencia incompleta (ver Figura 2) sobre la verdad de la proposición matemática involucrada (Alfaro-Carvajal et al., 2019).
- *Explicación informal*. El estudiante se basa en sus propias reglas de decisión de la verdad para establecer y garantizar la validez de la proposición (ver Figura 3).
- *Particularización-Generalización incompleta*. Se produce una particularización de la proposición matemática que se pretende demostrar y se obtiene una regla general que, si bien es cierta, no permite probar la proposición matemática inicial. La estrategia de particularización-generalización incompleta se observa fundamentalmente en el último apartado. Por ejemplo, E29 indica "esa expresión, a base de pruebas podría decir que sólo es cierto con números impares, como los ejemplos del punto a y b".
- *Uso de contraejemplos*. El estudiante refuta una conjetura matemática (no la prueba en sí) a través de un razonamiento deductivo, lo cual le proporciona un medio de control de la validez de la conjetura (ver Figura 4).
- *Demostración informal.* En la prueba, el estudiante no justifica explícitamente las reglas de inferencia usadas y los presupuestos matemáticos que sustentan cada paso de la demostración (ver Figura 5).

RESULTADOS

En la Tabla 1 se resumen los grados de pertinencia de las resoluciones de los estudiantes a la tarea de evaluación (Figura 1) según las estrategias empleadas.

Tabla 1. Grado de pertinencia de las producciones según las estrategias

Tipo de argumentación	Grado de pertinencia								
	Ítem a			Ítem b			Ítem c		
	I	PC	C	I	PC	C	I	PC	C
Explicación informal	13	0	0	12	0	0	13	0	0
Uso de contraejemplo	2	0	0	1	0	0	0	4	0
Argumento empírico	11	0	0	13	0	0	2	0	0
Particularización-Generalización incompleta	0	1	0	0	1	0	1	9	0
Demostración informal	0	0	4	0	0	4	0	0	1

Fuente: Elaboración propia de la investigación

La tabla 1 muestra que los estudiantes tuvieron dificultades para resolver la tarea correctamente: un 83,9% de estudiantes respondieron de forma incorrecta a los apartados a y b y un 53,3% lo hizo en el apartado c (además, un estudiante no resolvió este apartado). Sin embargo, un 43,3% resolvió de forma parcialmente correcta esta última parte. La mayoría de los estudiantes proponen para los apartados a y b argumentos empíricos, categorizados como incorrectos pues, consideran suficiente el uso de casos particulares para validar de manera general una proposición matemática. También se observa mayoritariamente el uso de explicaciones informales categorizadas como incorrectas, puesto que, en su mayoría, son confusas o parten de proposiciones matemáticas falsas. En el apartado c, además de las respuestas incorrectas evidenciadas mayormente en las explicaciones informales, se presentan respuestas parcialmente correctas en las particularización-generalización incompletas, donde los estudiantes plantean una conjetura a partir de lo argumentado en los ítems a y b. Otras estrategias poco frecuentes para los tres ítems fueron el uso de contraejemplos y de demostraciones informales.

En la Tabla 2 aparecen relacionados los diferentes tipos de estrategias utilizadas para cada ítem según los niveles de RAE implicados. La tabla 2 muestra que la actividad matemática de la mayoría de las producciones se sitúa entre un nivel 0 (actividad aritmética) y 2 (presencia de indeterminadas

en un lenguaje simbólico-literal para referir a intensivos de grado 2) de RAE. También muestra la escasa actividad algebraica, de nivel 4 de RAE, implicada en las pocas demostraciones informales (que involucran el uso de parámetros como generalizadores).

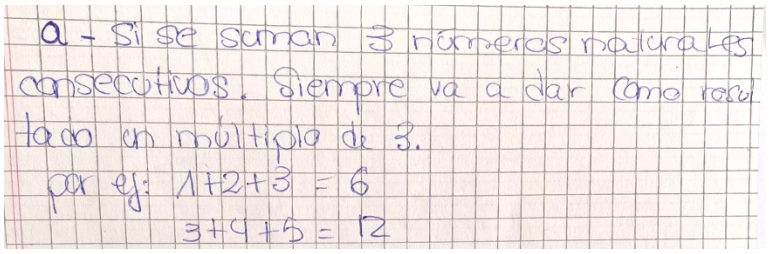
Tabla 2. Estrategias y frecuencias de las producciones

Tipos de estrategias	Frecuencia											
	Ítem a				Ítem b				Ítem c			
	N0	N1	N2	N4	N0	N1	N2	N4	N0	N1	N2	N4
Explicación informal	7	6	0	0	7	6	0	0	12	1	0	0
Uso de contraejemplo	2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	3	0
Argumento empírico	10	0	1	0	11	0	1	0	2	0	0	0
Particularización-Generalización incompleta	0	1	0	0	0	1	0	0	0	10	0	0
Demostración informal	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	1

Fuente: Elaboración propia de la investigación

A continuación, se ejemplifican algunas de las estrategias más representativas, así como los errores más frecuentes manifestados en las producciones. Como se observa en la Figura 2, E22 utiliza la argumentación empírica para justificar la validez del ítem a. La actividad matemática es aritmética, se basa en las operaciones con números naturales como fundamentación (Godino et al., 2015).

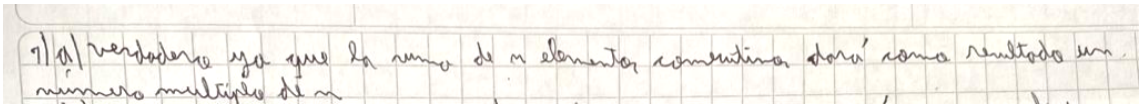
Figura 2. Respuesta de E22 al ítem a. Argumento empírico. Nivel 0 de RAE. Incorrecta.



Fuente: Elaboración propia de la investigación

También, se observaron respuestas incorrectas en los tres apartados al recurrir a explicaciones informales, las cuales parten, en su mayoría, de propiedades matemáticas falsas, como es el caso de E23 en la Figura 3: "la suma de *m* elementos consecutivos dará como resultado un número múltiplo de *m*". En este caso, la actividad corresponde a un nivel 1 de RAE, pues se expresa una regla general en lenguaje natural.

Figura 3. Respuesta de E23 al ítem a. Explicación informal. Nivel 1 de RAE. Incorrecta.

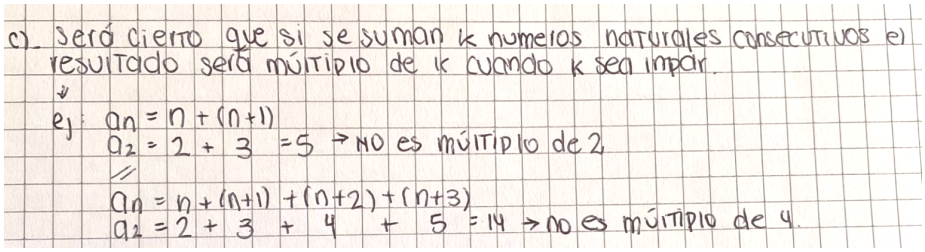


Fuente: Elaboración propia de la investigación

La mayoría de las respuestas parcialmente correctas se observaron en el último ítem mediante el uso de la estrategia de particularización-generalización incompleta, donde los estudiantes recurren a las proposiciones derivadas de a y b "si se suman tres naturales consecutivos el resultado es un múltiplo de 3" y "si se suman cinco naturales consecutivos el resultado es un múltiplo de 5" para deducir que "c sólo es cierta para números impares" (E24, E26). También es frecuente el uso de contraejemplos para este ítem, como se observa en la Figura 4. La estudiante E5 para justificar que la proposición "la suma de cualquier *k* números naturales consecutivos el resultado es múltiplo de *k*" es válida cuando *k* es impar, se basa en que no lo es cuando se suman dos cantidades pares (2 y 4) de números naturales consecutivos. En este caso, el nivel de RAE asignado a la actividad es 2,

pues intervienen indeterminadas expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a intensivos de grado 2 ligados a la información contextual (Godino et al., 2015).

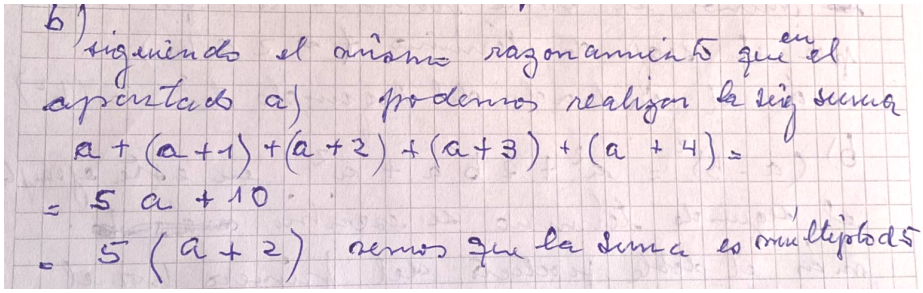
Figura 4. Respuesta de E5 al ítem c. Uso de contraejemplo. Nivel 2 de RAE. Parcialmente correcta.



Fuente: Elaboración propia de la investigación

Las únicas respuestas correctas en las producciones se manifestaron en las demostraciones informales. En la Figura 5 se ha incluido la respuesta del estudiante E31 al apartado b, quien recurre a esta estrategia. El nivel de RAE es 4 en tanto aparecen involucrados parámetros con los que se opera siguiendo reglas sintácticas (Godino et al., 2015).

Figura 5. Respuesta de E31 al ítem b. Demostración informal. Nivel 4 RAE. Correcta.



Fuente: Elaboración propia de la investigación

La elevada frecuencia de respuestas incorrectas vinculada al uso de explicaciones informales o argumentos empíricos (principalmente en los ítems a y b) puede venir motivada porque en el nivel educativo primario y secundario se acepta la comprobación sobre unos casos particulares como suficiente para argumentar la validez general de las proposiciones (Stylianides y Stylianides, 2017). Como observamos, las escasas respuestas que se consideraron correctas correspondieron en todos los casos a demostraciones informales, a las que correspondía un nivel mayor de formalización.

CONCLUSIONES

El significado del concepto matemático fundamental de demostración ha sido objeto de diferentes aproximaciones y enfoques en la literatura e investigación en Educación Matemática (Stylianides et al., 2017). Demostrar es una parte indispensable de hacer matemáticas, por lo que es fundamental que los estudiantes produzcan, comprendan y aprecien las demostraciones participando en prácticas de demostración a lo largo de su educación matemática (Weber et al., 2020). Así, la demostración es importante no sólo para la disciplina matemática, sino también para el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes (Stylianides y Stylianides, 2017).

En la demostración, se debe producir un argumento matemático a favor o en contra de una proposición matemática. Este argumento debe ser matemáticamente sólido y formulado en un discurso que sea aceptado y conceptualmente accesible por los miembros de la comunidad donde se comparte. Sin embargo, la complejidad intrínseca a la actividad matemática implicada hace que sea necesario aceptar diversos grados de formalización en el mega-proceso de validación matemática.

En esta comunicación, se han analizado las producciones de un grupo de estudiantes que acababan de acceder a los grados en matemáticas y físicas, donde la demostración matemática tiene un papel

relevante. El análisis de las prácticas desarrolladas por los estudiantes, en términos de los objetos matemáticos, especialmente, del tipo de argumentos desarrollados, el grado de generalidad de estos y la formalización en el lenguaje, muestra un escaso carácter algebraico en la actividad desarrollada y la prevalencia de demostraciones intuitivas o informales (Godino et al., 2015). Los significados personales de los estudiantes ingresantes al nivel superior respecto a la demostración matemática se vinculan a explicaciones informales o argumentaciones empíricas, a la argumentación no deductiva para validar las proposiciones matemáticas implicadas. Estas argumentaciones se encuentran alejadas de los significados institucionales pretendidos y del nivel de formalización esperada en cursos universitarios (Markiewicz et al., 2021). Se observa así la necesidad de promover una articulación efectiva entre estos tipos de argumentaciones y la demostración matemática formal, permitiendo a los estudiantes avanzar hacia un mayor nivel de RAE (Markiewicz et al., 2021). Esto supone además continuar investigando sobre los significados iniciales y los logrados sobre la demostración para tener una noción más clara de las pruebas que proponen los estudiantes y poder pensar en intervenciones que ayuden a superar las dificultades en la transición hacia matemáticas más avanzadas (Lew y Mejía-Ramos, 2019).

Referencias

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente.

Bisquerra, R. y Alzina, R. B. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). SEIEM.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Godino, J. D. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(2), 121-155. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNION, 17*(62).

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281-303.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Libros del zorzal.

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K. y Stylianides, G. J. (2022). Teaching and LearningAuthentic Mathematics: The Case of Proving. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of Cognitive Mathematics*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119–127.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. E. (1993). *Les usages de l'argumentation.* Presses Universitaires de France.

Weber, K., Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

RACIONALIDAD DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS SUBYACENTE EN EL DISEÑO DE TAREAS SOBRE ARGUMENTACIÓN[i]

Mathematics teacher educators' rationality underlying the design of tasks on argumentation

Molina, O., Camargo, L., Perry, P. y Samper, C.

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Resumen

Presentamos parte de la racionalidad de un colectivo de formadores de profesores de matemáticas que están inmersos en el diseño de tareas que buscan promover el aprendizaje sobre argumentación. Analizamos fragmentos de interacciones de los formadores en los que se expresan argumentos cuyo propósito es sustentar la aceptabilidad de propuestas de tareas. Usamos el Modelo de Toulmin (2007) para estructurar los argumentos y, con ello, indicar el dato y la garantía que sustentan una aserción; para caracterizar las razones, adaptamos la clasificación de garantía propuesta por Nardi et al. (2012). El análisis revela que las razones de las propuestas o decisiones de los formadores son de diversa naturaleza (institucional-curricular, empírica-investigativa, empírica-profesional, pedagógica y creencia); también, que la racionalidad caracterizada puede incitar reflexión sobre aspectos del quehacer propio de estudiantes para profesor, formadores e investigadores.

Palabras clave: *racionalidad del formador de profesores de matemáticas, argumentos del formador, clases de garantías y datos, tareas de formación profesional.*

Abstract

We present evidence of the rationality of a group of mathematics teacher educators who are immersed in the practice of designing tasks that seek to promote learning about argumentation. We analyze fragments of interactions among the educators in which arguments are formulated to support the acceptability of task ideas or points of view. We employ Toulmin's Model (2007) to structure of the arguments and, with it, to identify the data and warrant that support an assertion; to describe the reasons, we adapt the classification of warrants proposed by Nardi et al. (2012). The analysis reveals that such reasons are of a varied nature (institutional-curricular, empirical-research, empirical-professional, pedagogical and beliefs); also, that the identified rationality can incite reflection on aspects of the work of pre-service mathematics teachers, teacher educators and researchers.

Keywords*: mathematics teacher educator rationality, educator arguments, type of warrant and data, professional training tasks.*

INTRODUCCIÓN

Sierpinska (2004) reconoce el diseño, el análisis y el testeo de tareas de aprendizaje como asuntos centrales en la Educación Matemática. Más recientemente, un reconocimiento similar se ha venido extendiendo al campo de la Formación de Profesores dada la necesidad, tanto de diseñar tareas específicas para los procesos de formación (llamadas aquí, tareas profesionales), como de precisar el papel del formador de profesores en la caracterización o construcción del conocimiento (Sousa et al., 2020). Este escenario plantea retos mayúsculos para el formador de profesores; entre otros, implica diseñar tareas que proporcionen un puente entre la teoría que fundamenta la acción docente y la práctica, y que sirvan para desafiar, confrontar, ampliar, reflexionar o provocar el examen de

Molina, O., Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2023). Racionalidad del formador de profesores de matemáticas subyacente en el diseño de tareas sobre argumentación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 379–386). SEIEM.

alternativas; además, implica atender exigencias relativas a generar conocimientos y desarrollar cualidades reflexivas para el formador (Zaslavsky, 2008). Sobre el último reto, en esta comunicación, exponemos parte de la reflexión que, en el marco de un proceso investigativo que inició en 2020, nos ha suscitado el diseño de tareas profesionales que pretenden promover una conceptualización especializada sobre argumentación en estudiantes para profesor de matemáticas. Resonando con estudios similares a este (Herbst y Chazan, 2011; Ledezma et al., 2022; Metaxas et al., 2016; Nardi et al., 2012), nuestra intención es interpretativa; el objetivo es, entonces, analizar y clasificar las razones subyacentes en nuestras propuestas de tarea o en las decisiones sobre cómo enunciarlas. Mostramos que dichas razones son de diversa naturaleza (institucional-curricular, empírica-investigativa, empírica-profesional, pedagógica y creencia), y que el análisis hecho puede incitar reflexión sobre aspectos del quehacer de estudiantes para profesor, formadores e investigadores.

REFERENTES CONCEPTUALES

El interés por la *racionalidad práctica* del profesor se debe a la necesidad de comprender la base de las decisiones que toman los profesores en las clases y que favorecen o no una transacción entre las acciones de los estudiantes y las acciones del profesor para promoverlas (Herbst y Chazan, 2011); este interés implica explicitar las razones por las cuales los profesores, entre ciertas opciones, toman unas decisiones y no otras durante su práctica profesional. Adoptamos la recomendación de Ledezma et al. (2022), Nardi et al. (2012) y Sol et al. (2022) según la cual es afortunado seguir un modelo de argumentación para identificar y caracterizar las razones que esgrime un profesor en su práctica. Por ello, usamos el Modelo de Toulmin (2007) y la propuesta de Nardi et al. (2012) para tipificar las garantías de los argumentos identificados. Enseguida, presentamos el desarrollo de estas ideas.

Argumento, argumentación y elementos relacionados

La conceptualización de referencia que enmarca la presente comunicación ha sido construida durante nuestra actividad investigativa. Ella toma ideas de Durand-Guerrier et al. (2012), del enfoque pragma-dialéctico de van Eemeren y Grootendorst (Leal, 2015), y del Modelo de Toulmin (2007).

Una *argumentación* es un proceso que ocurre cuando se quiere resolver una diferencia de opinión proveyendo razones – idea central del enfoque pragma-dialéctico (Leal, 2015)– o cuando se pretende justificar (o dar razones para) una aserción (Toulmin, 2007). Un *argumento* es una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan; emerge de una argumentación. La *aserción* se expone de tres maneras: una proposición (es decir, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; una oración en la que se plantea una postura; o una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las *razones* se pueden expresar en oraciones (sean o no proposiciones) o acciones. Siguiendo a Toulmin (2007) un *argumento simple* es un argumento conformado por seis elementos (dato, aserción, garantía, calificador modal, respaldo y refutación) relacionados funcionalmente así: el *dato* es una razón que da fundamento a la aserción, es evidencia que la sustenta; la *garantía* da soporte a la relación del dato y la aserción, es una razón que expone, con un enunciado general, por qué el dato es evidencia para apoyar la aserción; el *respaldo* soporta la garantía y suele tener un carácter categórico. El *calificador modal* matiza la aserción expresando grados de confianza del argumentador. Por último, la *refutación* (Knniping y Reid, 2019) es la negación (parcial o total) u objeción de algún elemento del argumento o la exposición de excepciones a la aserción. No todos los seis elementos son explícitos en un argumento formulado, por lo cual el analista debe reconstruirlos a partir del contexto donde el argumento se vislumbra.

En este artículo, usamos la conceptualización previa en dos sentidos: como conocimiento de referencia usado en la práctica de diseñar tareas de argumentación; y como herramienta analítica que nos permite explicitar los argumentos producidos por los formadores; con ello, podemos indicar las razones que sustentan la aceptabilidad de una postura o decisión (entendida esta como la aserción).

Tipos de garantías

Con el fin de complementar la herramienta analítica, adoptamos la propuesta de Nardi et al. (2012) para clasificar las garantías de los argumentos proporcionados por los formadores. La clasificación atiende, por una parte, a las clases de reglas establecidas por la garantía y, en consecuencia, a su nivel de fiabilidad: *a priori*, empírica, institucional o evaluativa; por otra, atiende a la fuente en la que se origina o se fundamenta: epistémica, pedagógica, curricular, profesional y personal. Con base en esos dos atributos, Nardi et al. (2012) consideran siete clases de garantías: una garantía *a priori* es, por ejemplo, el recurso a una definición o teorema (a priori-epistemológica), o a un principio pedagógico (a priori-pedagógico); una garantía institucional es, por ejemplo, la justificación de una elección pedagógica por estar recomendada o exigida en un libro de texto (institucional-curricular) o por reflejar las prácticas habituales de la comunidad matemática (institucional-epistemológica); una garantía empírica es, por ejemplo, la cita de un hecho frecuente en el aula (según la experiencia del argumentador, empírico-profesional) o el recurso a experiencias personales de aprendizaje de las matemáticas (empírico-personal); una garantía evaluativa es la justificación de una elección pedagógica basada en una opinión, un valor o una creencia personales.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación es un estudio de caso intrínseco de carácter cualitativo con una aproximación discursiva-interpretativa (Stake, 2005). Describimos los aspectos metodológicos centrales del trabajo.

El caso analizado es el de un equipo de formadores de profesores de matemáticas involucrados en una investigación de diseño curricular, como un esfuerzo científico (Battista y Clements, 2000). Los formadores son miembros de un grupo de investigación desde el año 2006. Sus intereses recientes se centran en las líneas Argumentación en Geometría y Formación de Profesores de Matemáticas. Dos formadores son doctores en Educación Matemática (F1 y F4), una tiene estudios de doctorado en el mismo campo (F3), y las otras dos han realizado un máster, una en matemáticas (F2) y otra en docencia de las matemáticas (F5). El grupo cuenta con una amplia experiencia investigativa en diseño curricular para los cursos de geometría de un programa de formación inicial de profesores; así mismo, cuenta con una amplia experiencia en formación de profesores: F1, F2 y F5 orientan cursos centrados en el contenido geométrico; F3 ha orientado cursos de didáctica de las matemáticas y F4 orienta el curso centrado en didáctica de la geometría. Hasta 2020, el Equipo no se había concentrado investigativamente en el diseño curricular para este último curso ni, en ese marco, en el diseño de tareas para fomentar el estudio del objeto argumento. Este curso se ubica en el quinto semestre de la carrera y tiene como meta proporcionar una visión amplia y fundamentada de la didáctica de la geometría, focalizándose en procesos más que en contenidos. Se estudia el currículo escolar, teorías de aprendizaje, modelos de enseñanza, y se estudian procesos relevantes en el trabajo geométrico como la visualización, la representación, la conjeturación y la argumentación.

Motivado por la lectura de artículos de Herbst y sus colegas sobre racionalidad práctica, en 2020, en el marco del proceso investigativo, uno de los formadores –el primer autor de esta comunicación– se interesó en estudiar la racionalidad del Equipo cuando este diseñaba tareas para el curso mencionado. Por ello, realizó un registro videograbado de las interacciones a lo largo del proceso. Esta información fue usada como base para obtener las transcripciones que constituyen los datos de la investigación. Estos son transcripciones de cinco episodios de interacción de los formadores cuando se abocaron al diseño de tres bloques de tareas de formación profesional: tres episodios corresponden al primer bloque de tareas, centrado en determinar los significados que tienen los estudiantes para profesor sobre argumento; el cuarto y el quinto, corresponden al segundo y tercer bloque, focalizados en estudiar una conceptualización especializada de argumento y de tipos de argumentos matemáticos, respectivamente. El criterio para escoger los episodios se basó en la ocurrencia de intervenciones en las que se evidenciaba argumentación y, con ello, razones de los formadores para sustentar sus ideas o decisiones. Empleamos dos maneras para determinar esa presencia. 1) Mediante la identificación

de etapas de la pragma-dialéctica (Leal, 2015; Ledezma et al., 2022): (i) de confrontación –hay una diferencia de opinión, esto es, dos ideas antagónicas–; (ii) de apertura –se identifican los roles de protagonista y antagonista–; (iii) de argumentación –hay defensa de puntos de vista, con provisión de razones para sustentar posturas o manifestación de objeciones–; y (iv) de conclusión –se evalúa la extensión que alcanzó la resolución de la diferencia de opinión y a favor de quién se dio. 2) Mediante la identificación de solicitudes de un formador que llevaron a otro a sustentar una aserción. Resaltamos que hubo ocasiones en las que naturalmente no surgieron situaciones de antagonismo o intervenciones que dieran lugar a sustentaciones; en estos casos, el formador interesado en los asuntos de la racionalidad deliberadamente hizo intervenciones que procuraban suscitar sustentos.

Análisis de datos

El procedimiento para identificar la racionalidad del Equipo fue: (i) Realizada la transcripción del Episodio, hicimos su descripción general para tener una contextualización consensuada y un acuerdo sobre el asunto que suscitó el argumento. (ii) Cada formador, con referencia al Modelo de Toulmin, identificó en la transcripción la aserción y sus razones (dato, garantía o respaldo) y las objeciones, insumos con los cuales reconstruyó el argumento; además, decidió si la garantía estaba implícita –caso en el que la reconstruyó con base en las intervenciones– y destacó las expresiones clave que le permitieron identificar la presencia de un argumento y del calificador modal. (iii) Cada formador clasificó las razones usando la propuesta de Nardi et al. (2012). (iv) Hicimos un proceso de triangulación, después de que cada formador leyó los análisis, en el que discutimos hasta llegar a un consenso. Dado el espacio limitado para esta comunicación, no presentamos la transcripción de los episodios usados para ejemplificar el análisis, pero sí su descripción general. Exponemos los argumentos usando las frases que nos permitieron reconstruirlos; además, usamos los siguientes convenios: entre corchetes indicamos el emisor de una expresión (e.g. [F1]); la aserción, la garantía, el dato y el respaldo de un argumento se denotan, respectivamente, con *A*, *G*, *D* y *R*, seguidas de un número que corresponde al número del argumento (e.g, la aserción del argumento 1 se denota *A1*).

EJEMPLOS DE ANÁLISIS

Presentamos cuatro argumentos, dos surgidos en el Episodio 1 y uno en el Episodio 3, ambos centrados en los significados que tienen los estudiantes sobre argumento. El cuarto, surgido en el Episodio 5, está focalizado en la conceptualización de tipos de argumentos matemáticos.

El Episodio 1 inicia con la manifestación de F2 del propósito del Equipo con el primer bloque de tareas: "identificar lo que saben los estudiantes sobre argumentación". Enseguida, ocurren sucesos que nos hacen evidente la emergencia de las etapas de la pragma-dialéctica: se exponen dos expresiones que contrastan; por un lado, F4 sugiere "preguntar qué experiencias dejaron a los estudiantes los cursos de geometría [que han tomado] o cómo se involucra la argumentación en ellos"; por otro, F3 cuestiona la sugerencia diciendo "pero las preguntas tan directas llevan a responder *clichés*". Advertimos el contraste de ideas por la expresión "*pero* las preguntas tan directas…" (etapas de confrontación y apertura). Luego, F2, F1 y F4 intervienen para apoyar la propuesta hecha por F4; lo anterior pone de manifiesto un momento de argumentación colectiva en el cual identificamos dos argumentos (etapa de argumentación). Finalmente, F4 parece aceptar lo dicho por F2 en apoyo a la idea de F3, con lo cual se dirime la diferencia (etapa de conclusión). Reconstruimos los argumentos, que nos son evidentes por el uso de las expresiones "por eso" y "porque", respectivamente:

Argumento 1: se configura con el fin de sustentar la afirmación de F4.

> *D1*: Los cursos de geometría deberían haber llevado a los estudiantes a saber algo sobre la argumentación [F4]. *A1*: Por eso se me ocurre que preguntemos algo como qué experiencias les dejaron esos cursos sobre argumentación; o sobre cómo se involucra la argumentación en esos cursos como para identificar lo que saben [F4]. *G1*: Si se toman los cursos, entonces los estudiantes pueden decir cosas sobre la demostración [F2]. Y sobre otro tipo de argumento, inductivo o abductivo. De hecho, podrían decir algo sobre lo que es argumento [F1].

Las razones (i. e., dato y garantía) presentes en el Argumento 1 hacen evidente un conocimiento de F4 sobre un rasgo del curso de geometría (D1) que le permite concretar la posibilidad manifestada en G1; decimos "posibilidad" por el uso de las palabras "pueden" y "podrían" empleadas en G1. Clasificamos a G1 como *institucional-curricular*, dado que F1 y F2 son los diseñadores del currículo para los cursos de geometría y sus profesores; así, conocen sus propósitos de aprendizaje con detalle.

Argumento 2: se configura cuando F3 objeta la postura de F4.

> *A2*: Las preguntas tan directas llevan a responder *clichés* [F3]. *D2*: Porque a veces los estudiantes responden con discursos que han escuchado para quedar bien, pero que no necesariamente es lo que ellos piensan [F3]. *G2* (implícita): Con preguntas directas se logra que, a veces, los estudiantes respondan con discursos que han escuchado para quedar bien, pero no es lo que ellos piensan, entonces llevan a *clichés*.

En el Argumento 2, el dato y la garantía también evidencian un conocimiento del Equipo, esta vez basado en las experiencias profesionales de F3 (lo que se evidencia con la expresión "a veces los estudiantes…" presente en D2). G2 manifiesta una creencia (más que una posibilidad); esto es, un conocimiento que está cargado de una valoración indicada con la palabra "*cliché*". Este sustantivo, que significa "lugar común" en este caso, frecuentemente se usa como un rasgo característico de carácter negativo para indicar que algo es repetitivo o carente de genuinidad. La creencia descrita, dispone a la acción de no hacer preguntas directas. Por lo anterior, clasificamos a G2 como *empírica-profesional*; también la clasificamos como *evaluativa* dada la valoración descrita antes. La descripción del dato de cada argumento nos hace pensar que un dato puede ser tipificable según una clasificación análoga a la de las garantías; así, D1 y D2 se podrían tipificar como *institucional-curricular* y *empírico-profesional*, respectivamente, por las mismas razones dichas para G1 y G2.

Al respecto de las razones que son parte del Argumento 2, vale la pena hacer un comentario más. Solo hasta la elaboración de un artículo en el que los formadores analizaron las respuestas de los estudiantes al primer bloque de tareas, F3 explicitó un *respaldo* para G2 que apoya la creencia que esa garantía manifiesta; este tiene que ver con una cita de Godino et al. (2007) según la cual los significados que los estudiantes le otorgan a los objetos se manifiestan de una manera más clara cuando se usan; no solo cuando discursivamente dicen su definición. De esa cita se sigue que puede ser pertinente proponer tareas en las que se tengan que usar los objetos sobre los cuales se quiere conocer el significado, en lugar de preguntar directamente sobre este. Dicho esto, vemos que, al igual que una garantía y un dato, un respaldo también pueden ser tipificado; en este caso, el respaldo (R2) para G2 es *a priori-pedagógico*, pues corresponde a un principio reconocido en la comunidad.

En el Episodio 3, en consonancia con la aserción A2 dicha por F3, se acuerda formular una tarea en la que no se pregunte directamente sobre el significado que los estudiantes tienen de argumentación. F3 propone, entonces: (a) que resuelvan un problema análogo a los que se proponen en el curso de geometría plana del programa de formación y (b) que identifiquen en su proceso de resolución, los argumentos que producen, y los transcriban, indicando, además, su propósito. A diferencia de lo sucedido en el Episodio 1, en la interacción correspondiente a la concreción de la propuesta de F3, no hay ideas antagónicas, pero sí intervenciones que suscitan un argumento. En lo que respecta a la enunciación (a), F1 propone un problema que, según sus palabras, promueve argumentación inductiva (útil para producir una conjetura) y la producción de argumentos deductivos (que surgirían al demostrar la conjetura). Luego, F2 interviene para proponer un problema adicional (que promueve argumentación abductiva). Enseguida, deliberadamente F1 hace una pregunta (¿y para qué otro problema?) que pretende suscitar un sustento, por parte de F2, para la aceptabilidad de su propuesta. Efectivamente, F2 presenta una justificación. Exponemos el Argumento 3 reconstruido.

> *D3*: Debemos buscar un problema [de geometría] en el que esté dado un hecho y se deba buscar el dato que lo ocasiona. *A3*: Así, los estudiantes tienen la posibilidad de producir argumentos abductivos, no solo inductivos o deductivos. *G3*: Del artículo [publicado por F1 y F2 en 2019] sabemos que, dependiendo de la estructura del problema, hay argumentos que se favorecen. Específicamente, si un problema tiene una

> estructura en el que está dado un hecho y se debe buscar el dato que lo ocasiona, entonces se favorecen argumentos abductivos.

El uso de la palabra "así" nos hizo notar que lo dicho previo a esta expresa razones para A3, la cual se concreta con D3. Esta razón junto con la garantía (G3) que explícitamente indica F2, es producto del conocimiento que han construido los formadores como resultado de su labor investigativa. Dado que Nardi et al. (2012) no tienen una categoría al respecto, nosotros proponemos una, *empírica–investigativa*: D3 es un hecho que recae en el conocimiento que F2 tiene sobre la estructura de los problemas. Adicionalmente, G3 tiene un *respaldo* explícito obtenido de un artículo científico producido por dos de los formadores, que expone la relación entre tipos de problemas y tipos de argumentos; a ese respaldo también le asignamos la categoría *empírica–investigativa*.

Finalmente, comentamos sobre el Episodio 5; este ocurre luego de uno relativo al segundo bloque de tareas, focalizado en abordar una conceptualización de argumento y de argumento matemático. En él pasan hechos que evidencian el surgimiento de las etapas de la pragma-dialéctica: dos expresiones que contrastan son expresadas; por un lado, F2 sugiere "proponer problemas similares, incluso, los mismos propuestos en el primer bloque de tareas y pedir [a los estudiantes] que indiquen los argumentos principales". F1, objeta esa propuesta indicando "que eso podría ser interesante, pero limitado" y desarrolla su idea. Advertimos el contraste de ideas por el uso de la expresión "*pero*" (etapas de confrontación y apertura). Luego, F3, F4 y F1 intervienen para sustentar la objeción de F1 (la expresión "dado que" deja ver la intención justificativa); ello indica un momento de argumentación colectiva (etapa de argumentación). Finalmente, F2 acepta la objeción expresando que sería "chévere complementar mi idea" con lo dicho por sus compañeros (etapa de conclusión). Reconstruimos el argumento correspondiente como sigue:

> *A4*: Proponer problemas similares, incluso, los mismos del primer bloque de tareas y pedir [a los estudiantes] que indiquen los argumentos principales podría ser interesante, pero limitado [F1]. *D4*: dado que no se presentaría una conceptualización de los tipos de argumentos [inductivo, abductivo, deductivo] como se hizo para argumento en el bloque previo [F3]; […] tampoco se alude a diferentes tipos de argumentos inductivos […] particular-general, general-general […] como lo hace Hernández [y Parra; se refiere a un artículo de esos autores de 2013], o de abductivos […] el teórico o creativo como lo hicimos en el artículo [el mismo citado en el argumento 3], o de deductivos como el directo o el de principio de reducción al absurdo [F1]. *G4*: Mejor dicho, si hacemos lo que dice F2 no habría preguntas para que los estudiantes tengan oportunidad de saber lo que van interpretando de esas cosas nuevas… complejas para ellos [F4] […] no tienen ocasión de estudiarlas como objetos, digamos [F1].

G4 alude a un criterio que los formadores usan para diseñar tareas: presentar una conceptualización de elementos que son nuevos y complejos para los estudiantes e ir haciendo preguntas para controlar su interpretación; la clasificamos como *empírica-profesional* dado que proviene de la práctica como profesora de F4. D4 indica la diversidad de conocimientos a los que acuden para sustentar A4; por un lado, refieren al criterio dicho para indicar su ausencia en la propuesta de F2; por otro, a conocimientos sobre tipos de argumentos matemáticos que han estudiado en el marco de su práctica profesional o investigativa. Reconocemos que este conocimiento no proviene del campo de las matemáticas en sentido estricto; más bien, es obtenido de propuestas que procuran hacer operables, en procesos educativos, aproximaciones filosóficas sobre tipos de argumentos ampliamente discutidas en la Didáctica de la Matemáticas; por ello, decidimos clasificar a D4 como *a priori-pedagógico* y no como *a priori-epistemológico*. En todo caso, el análisis nos sugiere la necesidad de ampliar la descripción de estas clases con el fin de contemplar principios de una didáctica específica (e. g. de las Matemáticas) o de una disciplina distinta a las matemáticas (e. g., filosofía).

DISCUSIÓN Y COMENTARIOS FINALES

El estudio llevó a la explicitación no solo de razones que llevaron a los formadores a plantear ciertas tareas o a tomar decisiones sobre cómo enunciarlas; también, de la variedad de clases de razones esgrimidas (Tabla 1). Reconocimos que el campo de conocimiento fuente de tales razones es diverso

(curricular, sobre un curso de geometría; didáctico, sobre una conceptualización de argumento y de tipos de argumentos, sobre la relación *tipo de problema-argumento matemático que se favorece*; pedagógico, sobre la identificación de significados) y que su fiabilidad también lo es (se basa en exigencias institucionales, principios pedagógicos o en experiencias profesionales o investigativas).

Tabla 1. Datos y garantías clasificados

Razones	Clase
D1: Los cursos de geometría deberían haber llevado a los estudiantes a saber algo sobre la argumentación.	Institucional-curricular
G1: Si se toman los cursos, entonces los estudiantes pueden decir cosas sobre la demostración. Y sobre otro tipo de argumento, inductivo o abductivo. De hecho, podrían decir algo sobre lo que es argumento.	
D2: A veces los estudiantes responden con discursos que han escuchado, como para quedar bien, pero que no necesariamente es lo que ellos piensan.	Empírico-profesional
G2: Con preguntas directas se logra que, a veces, los estudiantes respondan con discursos que han escuchado, como para quedar bien, pero no es lo que ellos piensan, entonces llevan a clichés.	Empírico-profesional Evaluativa
R2: Cita según la cual los significados que los estudiantes le otorgan a los objetos se manifiestan de una manera más clara cuando se usan.	A priori-pedagógico
D3: Debemos buscar un problema [de geometría] que tiene una estructura en el que está dado un hecho y se debe buscar el dato que lo ocasiona.	Empírica–investigativa [nueva]
G3: Del artículo [publicado por F1 y F2 en 2019] sabemos que, dependiendo de la estructura del problema, hay argumentos que se favorecen.	
D4: No se presentaría una conceptualización de los tipos de argumentos [inductivo, abductivo, deductivo] como se hizo para argumento en el bloque previo; tampoco se alude a diferentes tipos de argumentos inductivos […] particular-general, general-general […] como lo hace Hernández [y Parra; se refiere a un artículo de esos autores de 2013], o de abductivos […] el teórico o creativo como lo hicimos en el artículo [el mismo citado en el argumento 3], o de deductivos como el directo o el de principio de reducción al absurdo.	A priori-Pedagógico [ampliada]
G4: Si hacemos lo que dice F2 no habría preguntas para que los estudiantes tengan oportunidad de saber lo que van interpretando de esas cosas nuevas, complejas para ellos no tienen ocasión de estudiarlas como objetos, digamos.	Empírico-profesional

Consideramos que otro equipo de formadores (o de profesores de matemáticas) que tenga interés en fomentar el aprendizaje sobre argumentación, luego de leer este texto, puede verse reflejado en los episodios analizados y entenderlos como detonador de reflexiones sobre su propia racionalidad al diseñar tareas; creemos que podría contribuirle a ganar más conciencia de los aspectos (fuente de conocimiento o rasgos de fiabilidad) que caracterizan dicha racionalidad y, con ello, a promover el reconocimiento de potenciales aspectos por involucrar o de acciones que harían los estudiantes al enunciar una tarea de una cierta manera y no de otra. Consideramos, también, que un estudiante para profesor de matemáticas puede reconocer que sus formadores proponen tareas sobre argumentación atendiendo a una variada racionalidad, no ingenua ni improvisada, en busca del logro de expectativas asociadas; así, podría ganar una mejor disposición para el aprendizaje, pues conoce algunas razones de la propuesta de ciertas tareas. Finalmente, pensamos que este escrito posibilita a investigadores una herramienta con la cual analizar argumentos de formadores (y profesores de matemáticas) de una manera más completa que la sugerida por Nardi et al. (2012); esto, ya que la enriquece a partir de (i) viabilizar la clasificación de datos y respaldos análogamente a como se hace con las garantías, y (ii) considerar una clase nueva (empírico-investigativa) y una ampliada (a priori-pedagógica).

Referencias

Battista, M. y Clements, D. (2000). Mathematics curriculum development as a scientific endeavor. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Education, Handbook of Research Design in Mathematics and Science* (pp. 737-760). Lawrence Erlbaum Associates.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. y Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 349-368). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_20

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Herbst, P. y Chazan, D. (2011). Research on practical rationality: studying the justification of actions in mathematics teaching. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 405-462. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1225

Hernández, H. y Parra, R. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. *Innovación Educativa*, 13(63), 61-73.

Knipping, C. y Reid, D. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G. y Font, V. (2022). Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. *Mathematics, 10*, Artículo 3339. https://doi.org/10.3390/ math10183339

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93*, 383–397. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9701-z

Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32(62), 109-134.

Nardi, E., Biza, I. y Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics , 79*, 157-173. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9345-y

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the learning of mathematics, 24*(2), 7-15.

Sol, T., Sánchez, A., Breda, A., Font, V. y Hummes, V. (2022). Análisis de la reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre los errores que cometen en su práctica docente. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 549-557). SEIEM

Sousa, J., Silva, T., Font, V. y Cassia, J. (2020). Task (re)design to enhance the didacticmathematical knowledge of teachers. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 2*(4), 98-120. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research* (3ª ed., pp. 443–466). Sage.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* (Trads. M. Morrás y V. Pineda). Ediciones Península.

Leal, F. (2015). *Argumentación y pragma-dialéctica: Estudios en honor a Frans van Eemeren*. Editorial Universitaria.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (Vol. 4, pp. 93–114). Sense Publishers.

[i] Estudio desarrollado en el marco de los proyectos DMA-615-23 y PID2021-127104NB-I00 financiados, respectivamente, por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia y por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y "FEDER Una manera de hacer Europa".

ANÁLISIS DE MODELOS PARA LA ESTIMACIÓN DE CANTIDADES IRREGULARMENTE DISTRIBUIDAS

Analysis of models for the estimation of irregularly distributed quantities

Montejo-Gámez, J.[a], Fernández-Ahumada, E.[b], Martínez-Jiménez, E.[b] y Adamuz-Povedano, N.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Córdoba

Resumen

Este estudio analiza los modelos que desarrollan futuros maestros de primaria al resolver una tarea de estimación de grandes cantidades en las que los objetos a contabilizar se distribuyen de manera irregular sobre una superficie. Para ello se preguntó a una muestra de 26 estudiantes del Grado en Educación Primaria el número de asistentes a la investidura de Barack Obama a partir de una imagen de satélite. Para el análisis de las producciones obtenidas se definieron unidades de análisis pertinentes cuyo estudio permitió identificar cuatro tipos de modelos, cuya relación con las estrategias exploradas en la literatura se describen y discuten. También se observó que el carácter irregular de la distribución de las personas en la imagen fue abordado matemáticamente en la mitad de los casos.

Palabras clave: *Estimación, Problemas de Fermi, Aprendizaje de la modelización matemática, Maestros en formación inicial*

Abstract

This study analyses the models that future primary school teachers develop when solving a large quantity estimation task in which the objects to be counted are distributed irregularly over a surface. To do so, a sample of 26 students enrolled in the primary teacher's degree were asked to estimate the number of people attending Barack Obama's inauguration based on a satellite image. For the analysis of the productions obtained, relevant units of analysis were defined, the study of which made it possible to identify four types of models, whose relationship with the strategies explored in the literature is described and discussed. It was also observed that the irregular nature of the distribution of people in the image was dealt with mathematically in half of the cases.

Keywords: *Estimation, Fermi problems, Learning of mathematical modelling, Prospective primary teachers*

INTRODUCCIÓN

Los beneficios de incluir la modelización como parte de la educación matemática escolar son hoy en día reconocidos por los currículos de los diferentes niveles educativos y por los investigadores en educación matemática, tanto a nivel nacional (Ferrando, 2019) como internacional (Ärlebäck y Albarracín, 2019; Stillman et al., 2015). En el ámbito de la formación inicial del profesorado, el trabajo con tareas de modelización es idóneo, ya que plantear este tipo de tareas a futuros profesores les proporciona ejemplos de enseñanza que después ellos mismos pueden aplicar (Doerr, 2007), estimulando así su reflexión sobre el significado de los contenidos matemáticos escolares (Kaiser et al., 2006). Además, la modelización contribuye al fomento de actividades propias de la práctica matemática como el razonamiento, la formulación de hipótesis para la resolución de problemas (Fernández-Ahumada y Montejo-Gámez, 2019; Kämmerer, 2023) y la comunicación matemática (Barquero, 2022). En el contexto de la formación inicial del profesorado de primaria, particularmente, surge el interés por la investigación de tareas que estimulen estas actividades a partir de la aplicación

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E. y Adamuz-Povedano, N. (2023). Análisis de modelos para la estimación de cantidades irregularmente distribuidas . En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 387–394). SEIEM.

de contenido matemático de la educación primaria. Las tareas de estimación son relevantes en este sentido, y constituyen el foco teórico del presente trabajo.

MARCO TEÓRICO Y PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

La estimación en educación matemática se puede entender como un "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (Segovia et al., 1989, p. 18). La elaboración de este tipo de juicios es una actividad idónea en la formación de futuros maestros de primaria, ya que estimula su reflexión sobre el orden de magnitud de los números (De Castro et al, 2004), y la pertinencia de encontrar valores exactos o aproximados a problemas contextualizados, ampliando así la perspectiva de este alumnado universitario sobre las matemáticas (Segovia y Castro, 2009). Numerosos autores utilizan el término problemas de Fermi para referirse a una familia de tareas de estimación especialmente relevantes en este sentido. Estos problemas de Fermi consisten en una pregunta abierta y no rutinaria, cuya resolución obliga a los estudiantes a establecer hipótesis sobre la situación en la que se plantea la pregunta y a estimar el valor de cantidades necesarias para dar una respuesta a partir de cálculos sencillos (Ärlebäck, 2009).

La investigación de problemas de Fermi orientados a la estimación de grandes cantidades sobre una superficie delimitada ha sido especialmente prolífica. En particular, Albarracín y Gorgorió (2014) y Ferrando et al. (2017) identificaron, desde diferentes metodologías, las estrategias que los estudiantes de educación secundaria aplicaron para resolver tareas de este tipo. Estas estrategias fueron contrastadas en otros estudios como el de Ferrando y Albarracín (2021), que incluyó alumnado de educación primaria. En el contexto de formación inicial de maestros de primaria, Segura (2022) describió y discutió cuatro categorías que sintetizan las estrategias de estimación que emergieron al plantear secuencias de tareas de este tipo a estudiantes del grado de magisterio, y que sirven de referencia para el presente estudio. La primera de ellas es la de Recuento exhaustivo, que engloba todas aquellas estrategias que buscan cuantificar directamente la cantidad de objetos que se desea estimar. La segunda categoría es la de Linealización, cuyas estrategias están orientadas a reducir la tarea a un problema unidimensional para después dar la estimación final utilizando la respuesta al problema unidimensional planteado. El ejemplo más usual de estrategia de esta categoría se basa en distribuir idealmente los objetos a contabilizar en una retícula de filas y columnas, y aprovechar esta distribución para la estimación. La tercera categoría contiene las estrategias que utilizan una Unidad Base. Estas consisten en la selección de una unidad base o región de la superficie inicial sobre la que se busca la estimación, la cuantificación de la cantidad de objetos que caben en la unidad base, y la multiplicación de esa cantidad por el número de unidades base que componen la superficie inicial. La cuarta categoría, finalmente, incluye estrategias de Densidad, que se fundamentan en calcular el número de objetos que ocupan una unidad de área (metro cuadrado, por ejemplo) y multiplicarlo por el área de la superficie sobre la que se estima.

Las tareas de estimación de grandes cantidades que dan lugar a estas categorías son diversas pero comparten características comunes que, de alguna manera, determinan dichas categorías. Una de las principales es que el área de la superficie inicial sobre la que se estima es mucho mayor que la de los objetos a contabilizar, lo que invita a simplificaciones razonables como ignorar la forma concreta de los objetos a contabilizar, o asumir que estos están distribuidos de manera uniforme sobre la superficie inicial o que la superficie está totalmente ocupada. Estas simplificaciones restringen en cierto modo la actividad de modelización de los futuros maestros y, dependiendo de la situación real de partida, podrían llevar a estimaciones excesivamente imprecisas. Es de interés entonces proponer tareas de estimación que eviten simplificaciones excesivas e investigar cómo los futuros maestros modelizan estas tareas, iniciativa que constituyó el punto de partida del presente trabajo.

Pregunta de investigación y objetivos específicos

Esta comunicación estudia el caso en el que la distribución de los objetos sobre la superficie sobre la que se estima es claramente no uniforme, por lo que se desea responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las características novedosas de los modelos producidos por maestros en formación inicial al abordar una tarea de estimación de grandes cantidades en la que los objetos a contabilizar se distribuyen de manera irregular sobre la superficie en la que se estima?

Para responder a esta pregunta, se plantearon los siguientes objetivos específicos:

O1: Identificar los modelos producidos por estudiantes del Grado en Educación Primaria para abordar una tarea de estimación en la que los objetos a contabilizar se distribuyen irregularmente sobre la superficie en la que se estima.

O2: Conocer las similitudes y características novedosas de estos modelos frente a las estrategias para abordar tareas de estimación de grandes cantidades encontradas en la literatura.

MÉTODO

El estudio forma parte de una investigación más amplia que busca caracterizar de forma exhaustiva los modelos que emergen para resolver tareas de estimación que generalizan a las mejor estudiadas en la literatura. En esta comunicación se hace una primera exploración con un análisis descriptivo basado en datos cualitativos, según se detalla a continuación.

Tarea, muestra y recogida de datos

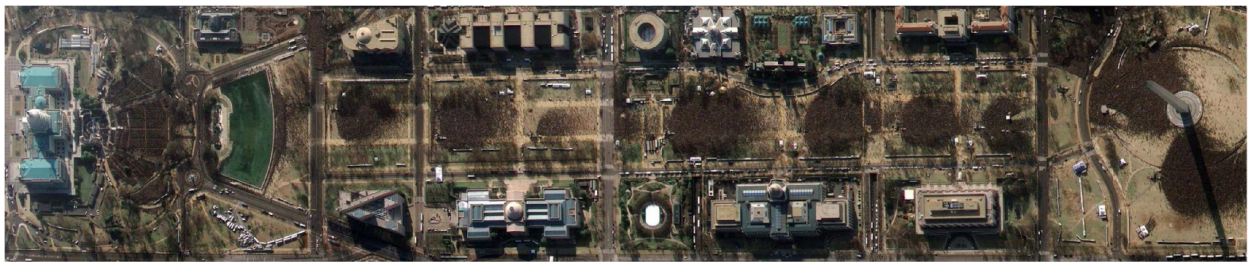
Con el fin de proponer una tarea de estimación de grandes cantidades que incidiera en la distribución irregular de los objetos a estimar, se recurrió al uso de una imagen que mostrara esa situación (Sevinc y Ferrando, 2022). De esta manera se planteó la estimación del número de asistentes a la ceremonia de investidura de Obama como presidente de Estados Unidos a partir de una imagen de satélite del evento, que muestra zonas ocupadas por personas con diferente densidad (Figura 1).

Figura 1. Tarea planteada para el estudio. Fuente: Elaboración propia

Los seguidores del presidente

Barack Obama fue elegido presidente de los Estados Unidos de América en 2009. La asistencia a su ceremonia de investidura fue histórica, y se puede ver en la fotografía de debajo.

Proporciona una estimación de la cantidad de personas que asistieron a la ceremonia de investidura de Obama. Explica tu solución.



Esta tarea se propuso a tres grupos de estudiantes del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada en el contexto de resolución de problemas de medida indirecta. Los estudiantes, que no tenían experiencia previa con tareas de modelización ni de estimación, dispusieron de 90 minutos para responder individualmente a la tarea. Se les permitió interactuar entre ellos y utilizar dispositivos móviles para buscar información, haciéndoles hincapié en que especificaran aquellos datos que habían buscado en internet y la fuente concreta. Además, dada la importancia de la imagen para desarrollar la estimación, esta se repartió impresa en formato apaisado y adicionalmente en versión digital de gran resolución. Al final de la sesión, se recogieron las producciones escritas de los

participantes de los tres grupos, lo que proporcionó una muestra de registros. En este estudio, y por cuestiones de espacio, se presentan los resultados de 26 de ellos, que conforman los datos del estudio.

Análisis de datos

El procedimiento de análisis desarrollado se organizó en dos pasos. En el primero de ellos se seleccionaron las unidades de análisis útiles para identificar el modelo desarrollado en una producción, su relación con las estrategias conocidas y ver en qué medida la producción había considerado la distribución irregular de las personas. Para ello se partió de la noción de modelo propuesta por Montejo-Gámez et al. (2021). En esa conceptualización, un modelo escolar puede describirse a partir de la identificación de tres tipos de elementos: (i) las relaciones y objetos (no matemáticos) del sistema real que se modeliza, (ii) los resultados y objetos matemáticos, tanto aquellos relacionados con el sistema como los puramente conceptuales, que conforman la matematización del sistema real y (iii) el conjunto de representaciones que los estudiantes emplean para expresar la información del modelo. El análisis de los modelos escolares a partir de estos tres elementos es coherente con el análisis del contenido descrito por Fernández-Plaza (2016), que se organiza en términos de la estructura conceptual (comparable a la categoría ii considerada aquí), las representaciones (análoga a la categoría iii), y los modos de uso (correspondiente a i).

Teniendo en cuenta estos tres tipos de elementos y utilizando la descripción de las categorías de Segura (2022) como conocimiento *a priori* sobre los posibles resultados que se podrían encontrar, se seleccionaron tres unidades de análisis. En efecto, con el objeto de identificar la estrategia empleada se recurrió a la observación conjunta de las relaciones y los resultados del modelo, es decir, aquellas afirmaciones que expresan información relacionada con el sistema con el objetivo de dar la estimación: datos que se asumen como válidos, resultados de estimaciones y reglas de cálculo (en este estudio se ha evitado diferenciar entre afirmaciones propias del sistema real y de su matematización, ya que esto no aportaba información relevante para los intereses del estudio). En particular, se prestó atención a aquellas que expresan el modo de llegar a la estimación final, que es el rasgo característico de las estrategias descritas por la literatura previa. El conjunto de estas afirmaciones constituyó la primera unidad de análisis: Fórmula. Por ejemplo, un cálculo que evidencie que se ha multiplicado el área en m² de la zona ocupada por gente por el número de personas que caben en 1 m² sería como información propia de esta unidad de análisis. A su vez, las afirmaciones que expresaban los valores numéricos tomados para comenzar las estimaciones se consideraron relevantes para contemplar en qué medida los participantes habían considerado que la distribución de las personas en el dibujo era irregular. Este segundo tipo de afirmaciones constituyeron la unidad de análisis Datos aportados. Por ejemplo, la afirmación "en 1 m² caben 8 personas" sería un dato propio de esta unidad de análisis. Finalmente, se consideró que las representaciones pictóricas dan una visión global de cómo los estudiantes abordaron la estimación, lo que dio lugar a la unidad de análisis Dibujos. La Figuras 2 y 3 debajo muestran ejemplos de información propia de esta unidad de análisis.

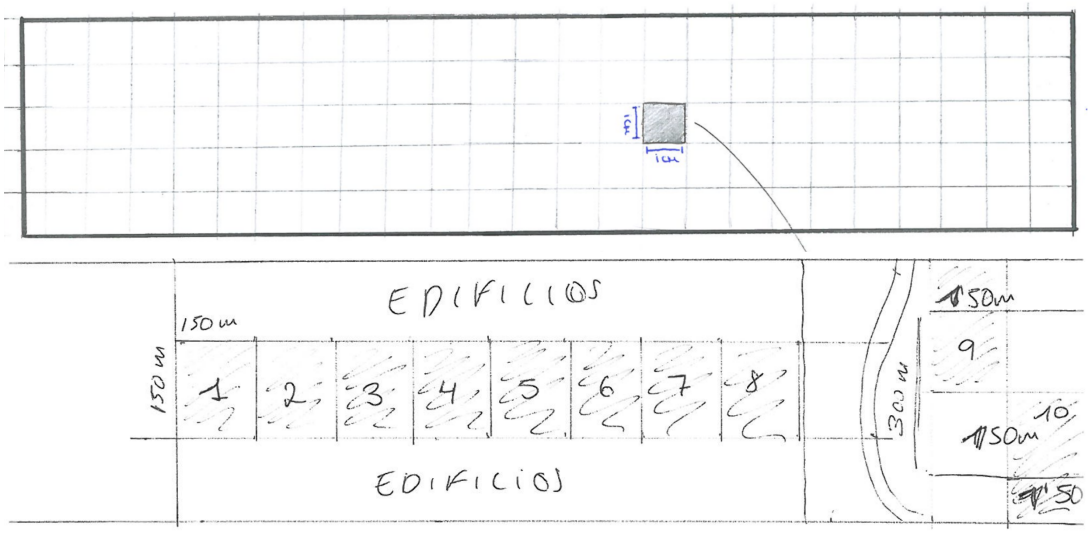
En el segundo paso del análisis, se evaluaron las producciones escritas en términos de las unidades de análisis seleccionadas. Una vez finalizadas estas evaluaciones, la información sobre las Fórmulas se categorizó, comprobándose que no era suficiente para distinguir información relevante sobre los modelos. De igual forma, se observó que había producciones en la misma categoría de Fórmulas y con el mismo Dibujo, pero que modelizaban de forma diferente la distribución irregular de las personas en la imagen de la tarea. Finalmente, la consideración de los Datos aportados permitió establecer criterios para identificar los modelos (objetivo O1) y sus características novedosas en relación con las consideradas en la literatura (O2).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de las producciones analizadas llevó a identificar cuatro categorías de modelos (Tabla 1 debajo). La primera contiene los modelos de Retícula, que se fundamentan en la descomposición del

recuadro de la imagen en una cuadrícula (Figura 2, arriba) y el cálculo del área real que representa el cuadrado unidad. De esta manera, el conteo de los cuadrados que contienen a personas permite calcular el área de la zona ocupada por la gente. Así, la estimación se obtiene multiplicando este área por el número de personas que caben en 1 m² (P/m², en adelante). Esta categoría contiene seis modelos que estiman 8 P/m² usando un dato recogido de la web, mientras los demás utilizan 4 P/m² argumentando que se promedian los cuadrados más llenos de personas con los que están menos.

Figura 2. Dibujos de producciones que desarrollan modelos de Retícula (arriba) y de Descomposición (abajo). Fuente: Elaboración propia



Los modelos de Retícula son comparables con la estrategia de Unidad base (Segura, 2022) porque los cálculos en ellos se centran el cuadrado unidad de la cuadrícula (aunque para trabajar con él se use el dato propio de la estrategia de Densidad).

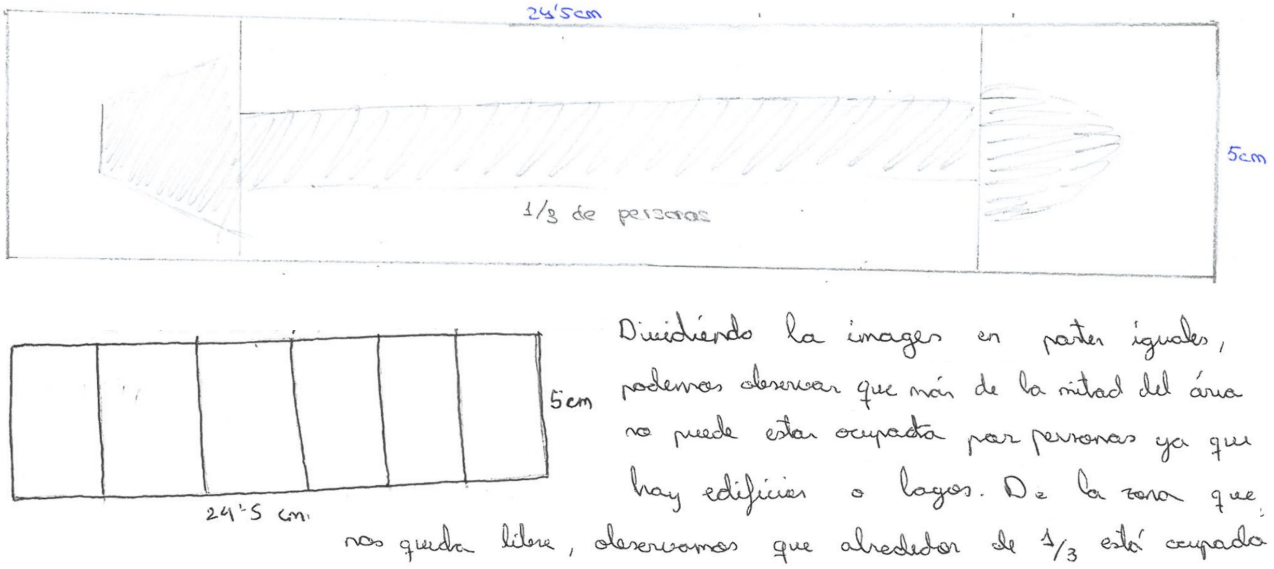
La segunda y tercera categoría de modelos encontradas engloban los modelos de descomposición, que parten de la zona ocupada por personas y la descomponen en figuras cuya área es calculable utilizando fórmulas escolares (Figura 2, abajo). Aunque comparten el mismo planteamiento, la estrategia de cálculo que emplean estos dos modelos difiere en el tratamiento que hacen de la distribución irregular de las personas en la imagen. Los modelos de Descomposición en figuras igualmente ocupadas (se encontraron en 9 ocasiones) calculan la estimación sin más que sumar el área de las figuras para alcanzar el área de la zona ocupada por personas, y multiplicar este dato por el número de P/m². Por su parte, en los modelos de Descomposición en figuras desigualmente ocupadas (observados en dos producciones) se utiliza un valor para P/m² para algunas de las figuras y otro valor en otras figuras, en función del nivel de ocupación que presentan en el dibujo. Los modelos de estas dos categorías están relacionados con la estrategia de densidad de Segura (2022), debido a que el valor que utilizan para estimar las P/m² es el punto de partida de estas dos categorías de modelos.

La cuarta categoría identificada incluye los modelos de Ocupación parcial, que se han encontrado en 4 producciones (Figura 3). En ellas, los estudiantes partieron del rectángulo que enmarca la imagen dada y ofrecieron una estimación de la razón de ocupación del rectángulo, es decir, la fracción del rectángulo que estiman que está ocupada por gente en el dibujo. En la Figura 3 (arriba) se ilustra un caso en el que esta razón de ocupación se ha obtenido agrupando las zonas ocupadas por personas, mientras que en la Figura 3 (abajo) se muestra una estimación verbal.

En estos modelos, la estimación se obtiene multiplicando el número de P/m² por el área en m² del rectángulo y por esta razón de ocupación estimada. En relación a las categorías discutidas por Segura (2022), estos modelos se pueden considerar también vinculados a la estrategia de Densidad, ya que

no solo utilizan el número de P/m² sino que además usan la razón de ocupación que expresa también noción de densidad.

Figura 3. Dibujos de modelos de Ocupación parcial. Fuente: Elaboración propia



La Tabla 1 proporciona una síntesis cuantitativa de los resultados del estudio y su relación con las estrategias empleadas por futuros maestros de primaria. En ella se muestra que no se han observado modelos asociados a las estrategias de Recuento exhaustivo y de Linealización, y que 11 de los modelos están vinculados a la estrategia de unidad base. La densidad, aunque está presente de alguna forma en todos los modelos, se ha vinculado directamente a 15 de los que se han analizado. En relación al tratamiento dado a la irregularidad de la distribución de las personas en la imagen, el total de los modelos encontrados se han restringido a la zona ocupada por personas, pero solo diez de ellos han dado un tratamiento matemático específico.

Tabla 1. Estrategias empleadas en relación con las descritas por Segura (2022). Fuente: Elaboración propia

Estrategia (Segura, 2022)	Modelo (frecuencia)	Irregulares
Unidad base	Retícula (11)	4
Densidad	Descomposición en figuras igualmente ocupadas (9)	0
Densidad	Descomposición en figuras desigualmente ocupadas (2)	2
Densidad	Modelos de ocupación parcial (4)	4
Total	26	10

Nota: La columna "Irregulares" indica la frecuencia de los modelos que hacen referencia explícita a la distribución irregular de las personas en la imagen.

Finalmente, debe comentarse que la observación y descripción de estos modelos pone de manifiesto la importancia del contexto educativo en el que se enmarca la propuesta, principalmente en relación con el sentido de la medida de los futuros maestros. Los modelos de retícula observados son similares a tareas de cálculo de áreas trabajadas previamente con los estudiantes. De igual manera se constataron, dentro de las categorías de descomposición, estrategias de cálculos de área de la zona ocupada por personas que estaban basadas en restar el área de ciertas zonas a la del rectángulo que enmarca la imagen inicial. Finalmente, debe señalarse que la introducción de la imagen como parte de la tarea involucró el uso de escalas, cuestión que generó dificultades al alumnado, sobre todo a la hora de hacer cambios entre unidades de área. Estos resultados están alineados con la importancia que asignaron Sevinc y Ferrando (2022) a las imágenes sobre la actividad de modelización, aunque han podido sesgar las estrategias empleadas por estudiantes.

CONCLUSIÓN

Esta comunicación presenta una primera aproximación a los modelos que surgen al resolver una tarea de estimación de grandes cantidades en las que los objetos a contabilizar se distribuyen de manera irregular sobre una superficie. Con este estudio se proporcionan unas ideas preliminares sobre los modelos que se pueden esperar ante tareas de estas características y su conexión con otros problemas de Fermi mejor estudiados en la literatura. Estas ideas preliminares se han establecido a partir del análisis de los modelos, que engloban información más rica que las estrategias de estimación empleadas.

En respuesta a la pregunta de investigación, los resultados del estudio indican que los modelos producidos por los estudiantes para maestros al abordar este tipo de tareas no recurren al recuento exhaustivo en ningún caso, ni buscan estrategias de linealización. Por el contrario, todos los modelos encontrados en el estudio se apoyan en el número de personas que ocupan un metro cuadrado, por lo que se puede afirmar que este tipo de tareas fomentan las estrategias de Densidad, cuestión que se constata en virtud de la Tabla 1 arriba y de la descripción de los modelos. El tratamiento matemático del carácter irregular de la distribución de las personas en la imagen ha sido explícito en aproximadamente la mitad de los casos. En este sentido, es especialmente interesante la aparición de los modelos de ocupación parcial, que enriquece los resultados en lo que a la actividad de modelización se refiere, pero quizá incurran en una sobresimplificación.

El estudio desarrollado presenta limitaciones que deben señalarse en este punto. Más allá del carácter exploratorio del mismo, que impide generalizar los resultados, debe señalarse la fuerte conexión con el sentido de la medida que presenta la tarea y que debe calibrarse en futuras investigaciones. En primer lugar, los estudiantes se han visto obligados a calcular áreas de zonas irregulares, cuestión que ha podido limitar los modelos encontrados aunque no era el foco de la investigación. En segundo lugar, la introducción de la imagen real ha introducido el trabajo con la escala. Esto ha producido riqueza de ideas, pero también ha generado dificultades en el alumnado, sobre todo en lo que respecta a la relación cm^2 (dibujo) m^2 (real). Estas dificultades posiblemente hayan condicionado los resultados de esta investigación, y deberán ser objeto de análisis en el futuro. De igual manera, este estudio abre vías de investigación sobre tareas de estimación que serán exploradas en el futuro. En primer lugar, es necesario clarificar y profundizar en las categorías obtenidas, en muestras más amplias y en estudiantes con otro perfil matemático. En segundo lugar, debe analizarse la pertinencia de la tarea empleada para explorar las estrategias de estimación de objetos irregularmente distribuidos. Un estudio similar al desarrollado por Albarracín y Gorgorió (2014), que analizaron comparativamente los planes de resolución de estudiantes de diferentes edades a un conjunto de tareas diferentes pero relacionadas, podría contribuir a contrastar los resultados obtenidos en esta comunicación, y se emplaza para un futuro próximo.

Referencias

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79-96. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Ärlebäck, J. B. y Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM, Mathematics Education, 51*(6), 979-990. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01075-3

Barquero, B. (24-27 de septiembre de 2022). *Moving Beyond Mute Modelling Praxeologies: an Study and Research Path for Teacher Education About the Cake Box* [Comunicación larga]. 20th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA20), Wurzburgo, Alemania.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.) *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183-194). Universidad da Coruña.

Doerr, H. (2007). What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?. En W. Blum, P.L., Galbrait, HW., Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14 th ICMI Study* (pp. 69-78). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_5

Fernández-Ahumada, E. y Montejo-Gámez, J. (2019). Dificultades en el aprendizaje matemático del profesorado en formación: análisis de las premisas utilizadas al modelizar. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 273-282). Valladolid: SEIEM.

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. J. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103-118). Pirámide.

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 43-64). SEIEM.

Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33*, 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Boletim de Educação Matemática, 31*, 220-242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11

Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM, 38*(2), 82-85. https://doi.org/10.1007/BF02655882

Kämmerer, M. (10-14 de julio de 2023). *Students' use of assumptions to solve a modelling task with much or little personal interest in the real-world context of the task* [Comunicación]. 13th Congres of the European society for Research in Mathematics Education (CERME13). Budapest, Hungría.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2021). A Tool for the Analysis and Characterization of School Mathematical Models, *Mathematics, 9*(13), 1569. https://doi.org/10.3390/math9131569

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(7), 499-536.

Segura, C. (2022). *Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestros* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. https://roderic.uv.es/handle/10550/81850

Sevinc, S. y Ferrando, I. (24-27 de septiembre de 2022). *The Role of Representational Images in Fermi Problems: A Study on Prospective Teachers' Mathematical Modeling* [Comunicación corta]. 20th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA20), Wurzburgo, Alemania.

Stillman, G. A., Blum, W. y Biembengut, M. S. (2015). Cultural, Social, Cognitive and Research Influences on Mathematical Modelling Education, in G. A. Stillman et al. (eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 1-32). Springer International Publishing Switzerland.

DESCRIPTORES PARA ANALIZAR LA FLEXIBILIDAD EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO INDICADOR DEL TALENTO MATEMÁTICO[i]

Descriptors to analyze flexibility in problem solving as an indicator of mathematical giftedness

Mora, M.[a], Gutiérrez, A.[b] y Jaime, A.[b]

[a]Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica, [b]Universitat de València.

Resumen

La flexibilidad es un componente de la creatividad, la cual ha sido señalada en diversas investigaciones como una característica del talento matemático. Por otra parte, la resolución de problemas se ha manifestado como la mejor manera de identificar estudiantes con talento matemático. Por ello, en este texto presentamos un conjunto de descriptores que caracterizan la flexibilidad y permiten analizar su presencia en los procesos de resolución de problemas. Mostramos cada descriptor aplicado para analizar soluciones a diferentes tipos de problemas usados para identificar el talento matemático en estudiantes de enseñanza primaria. Nuestro estudio aporta la novedad de integrar varias características de la flexibilidad en una única herramienta analítica.

Palabras clave: *creatividad, flexibilidad, talento matemático, resolución de problemas, primaria.*

Abstract

Flexibility is considered a component of creativity, which had been pointed in several studies as a characteristic of mathematical giftedness. In other hand, problem solving has proved to be a very good way to identify mathematically gifted students. That's why in this text we present a set of descriptors which characterize flexibility and allow us to analyse its presence in problem-solving processes. We show each descriptor applied to analyse solutions to different types of problems used to identify mathematical giftedness in primary school students. Our study brings the novelty of integrating several characteristics of flexibility into a single analytical tool.

Keywords: *creativity, flexibility, mathematical giftedness, problem solving, primary school.*

INTRODUCCIÓN Y REVISIÓN DE LITERATURA

Las investigaciones sobre talento matemático (TM) destacan la resolución de problemas como una forma muy útil y precisa de identificar estudiantes con TM (Benavides, 2008; Kattou et al., 2013; Manero et al., 2021). Algunas de ellas analizan las actuaciones de los estudiantes en la resolución de problemas (Krutetskii, 1976; Heinze, 2005; Leikin y Lev, 2013) y se centran en determinar cómo evidencian los estudiantes ciertas características de TM (Freiman, 2006; Gutiérrez y Jaime, 2013).

Diversos estudios plantean que la creatividad matemática es un elemento del talento matemático (Kattou et al., 2013) y la interpretan operativamente como formada por tres componentes: fluidez (variedad de ideas por unidad de tiempo), flexibilidad y originalidad (nuevas aproximaciones o nuevas soluciones) (Leikin, 2018; Sánchez et al., 2021), los cuales adoptamos en nuestro trabajo. Pitta-Pantazi et al. (2011) consideran que el TM se basa en las habilidades matemáticas y la creatividad matemática que los estudiantes evidencian al resolver problemas. En este sentido, varias investigaciones que analizan aspectos de la creatividad matemática coinciden en concluir que los

Mora, M., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2023). Descriptores para analizar la flexibilidad en la resolución de problemas como indicador de talento matemático. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 395–402). SEIEM.

estudiantes con TM presentan resultados significativamente mejores que los estudiantes ordinarios (Leikin y Lev, 2013).

La literatura consultada muestra la necesidad de analizar la forma en la que los estudiantes, como manifestación de su TM, evidencian los componentes de la creatividad al resolver problemas. El contexto de las olimpiadas matemáticas permite plantear problemas retadores y creativos, diferentes a los utilizados en las aulas, que requieran enfoques nuevos y sin una estrategia de resolución predeterminada, cualidades adecuadas para obtener información acerca de la flexibilidad. Generalmente las olimpiadas no permiten evaluar la fluidez, debido a la falta de control sobre el tiempo empleado por los estudiantes, ni la originalidad, por la restricción en la duración de la prueba, pero es un excelente contexto para evaluar la flexibilidad de los estudiantes (Freiman, 2006). En este texto informamos sobre parte de una investigación en progreso centrada en analizar el uso que hacen los estudiantes de la flexibilidad matemática durante la resolución de problemas en una olimpiada matemática.

Los objetivos de investigación de este texto son: i) presentar una caracterización de la flexibilidad mediante un conjunto de descriptores que resultan útiles para analizar los procesos de resolución de problemas de los estudiantes y ii) mostrar el uso de dichos descriptores particularizados a tipos específicos de problemas utilizados con frecuencia para identificar estudiantes con TM. Una novedad de este estudio es que integra varias características de la flexibilidad, descritas independientemente en la literatura de investigación en educación matemática, en un marco teórico en el que basar la metodología de análisis de las respuestas de los estudiantes a diferentes tipos de problemas e identificar potenciales estudiantes con TM.

MARCO TEÓRICO: CARACTERIZACIÓN DE LA FLEXIBILIDAD MATEMÁTICA

De acuerdo con Leikin (2018) “un estudiante tiene talento matemático si exhibe un alto nivel de desempeño matemático en relación al grupo de referencia y es capaz de crear ideas matemáticas que son nuevas con respecto a su historial educativo” (p. 3).

Varios autores han aportado diferentes respuestas parciales a la cuestión de cómo caracterizar la flexibilidad matemática. Krems (1995) la relaciona con usar diversas representaciones durante la resolución de un problema y con adaptarse a cambios en la demanda de un problema con varios apartados; Kozlowski et al. (2019) con cambiar la línea de pensamiento si surge un obstáculo o si el proceso de resolución es demasiado largo o complejo; Siswono (2011), Leikin y Lev (2013) y Sánchez et al. (2019) con producir diversas resoluciones de un mismo problema significativamente diferentes. Nosotros argumentamos que, además de las caracterizaciones mencionadas, la flexibilidad también está relacionada con encontrar una forma de resolución de un problema nueva y más eficiente (mediante un proceso menos largo o menos complejo).

Integrando las propuestas de los autores recién mencionados y nuestra propia perspectiva, definimos la flexibilidad en matemáticas como *la capacidad para producir diversas resoluciones de un mismo problema o para cambiar la forma de resolver un problema cuando se modifican las condiciones del problema o cuando, durante la resolución, surge un obstáculo o una idea nueva más interesante*. Consideramos que, operativamente, esta definición de flexibilidad puede evidenciarse en la actividad de un estudiante mediante el siguiente conjunto de *descriptores de flexibilidad* (DF), que aluden a cambios que tienen lugar durante la resolución de problemas:

DF1. *Cambio a un sistema de representación más eficaz.*

> DF1.1. *Cambios en el sistema de representación*, si el estudiante pasa de usar un sistema de representación a usar otro que le resulte más eficaz en el contexto del problema o usar una combinación de sistemas de representación.

DF2. *Cambio en el proceso de resolución.*

DF2.1. *Cambio por bloqueo,* porque el estudiante no sabe cómo seguir por el camino actual.

DF2.2. *Cambio por camino ineficaz,* cuando el estudiante se da cuenta de que el camino actual no le llevará a la solución o le llevará mediante un proceso largo o complejo.

DF2.3. *Cambio por idea nueva más eficaz,* si el estudiante descubre un procedimiento de resolución diferente que le parece más eficaz (surge una nueva idea).

DF2.4. *Cambio por variaciones en el problema,* debido a la modificación de las características del enunciado (p. ej., en problemas con varios apartados que tienen diferentes condiciones, tipos de datos, etc.).

DF3. *Producción de diversas resoluciones significativamente diferentes.*

DF3.1. *Resoluciones diferentes por los sistemas de representación*, si una resolución se diferencia de otra principalmente por los sistemas de representación utilizados en ambas.

DF3.2. *Resoluciones diferentes por la estrategia*, cuando una resolución se diferencia de otra principalmente por las estrategias utilizadas en ambas.

DF3.3. *Resoluciones diferentes por la secuencia de ejecución de los pasos,* si una resolución se diferencia de otra principalmente por el orden de ejecución de los procedimientos.

La validez de nuestros descriptores está avalada por las ideas y resultados presentados por diversos investigadores a lo largo de los años, algunos de ellos citados anteriormente, que coinciden en las características centrales de la flexibilidad y que las han aplicado con éxito en sus investigaciones.

A continuación, presentamos la aplicación de nuestra propuesta de marco teórico, consistente en operativizar más aún los descriptores anteriores, particularizándolos a las características específicas de diferentes tipos de problemas. Estas particularizaciones son importantes porque permiten hacer un análisis de las respuestas más fino que usando las definiciones generales de los descriptores. En los siguientes apartados presentamos los diferentes tipos de problemas que utilizamos, el enunciado de un problema de cada tipo y la particularización de los descriptores evidenciados en respuestas de estudiantes a estos problemas.

METODOLOGÍA

Para la recogida de datos, hemos planteado 48 problemas, creados por nosotros, en las pruebas de la Olimpiada de Educación Primaria de Costa Rica (OLCOMEP), de los siguientes tipos: (A) generalización de patrones gráficos, (B) visualización espacial, (C) problemas en los que se piden dos resoluciones por procedimientos diferentes, (D) problemas con varios apartados, de manera que cada apartado tiene una consigna nueva y más compleja, basada en las soluciones de apartados previos y (E) problemas con situaciones inusuales que requieren una estrategia de resolución no predeterminada ni trabajada previamente (en clases regulares) y que permiten usar varias representaciones y estrategias de resolución. De este grupo de problemas, un total de 33 permitieron evaluar el uso de la capacidad de flexibilidad en sus respuestas. Se recogen los datos de una muestra de 300 estudiantes participantes en la OLCOMEP (42 de 2º, 99 de 4º, 48 de 5º y 111 de 6º).

Para cada tipo de problemas, hemos formulado las particularizaciones de todos los descriptores pertinentes. En el apartado de resultados presentamos algunas de dichas particularizaciones a los tipos de problemas mencionados y las usamos para analizar respuestas específicas.

RESULTADOS: EVIDENCIA DE LOS DESCRIPTORES DE FLEXIBILIDAD

La Tabla 1 nos informa sintéticamente de que los problemas del tipo A son los que más diversidad de descriptores de flexibilidad permiten a los estudiantes evidenciar.

Tabla 1. Descriptores de flexibilidad evidenciados en cada tipo de problema

	DF1.1	DF2.1	DF2.2	DF2.3	DF2.4	DF3.1	DF3.2	DF3.3
Tipo A	X		X	X	X	X	X	
Tipo B			X			X	X	
Tipo C	X					X	X	X
Tipo D					X			
Tipo E	X	X	X				X	

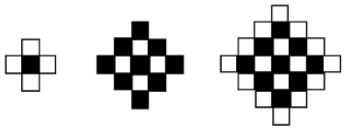
Problemas de generalización de patrones gráficos

En los problemas de generalización de patrones gráficos (Figura 1), los estudiantes suelen utilizar solo una representación, gráfica o numérica. Una evidencia de TM y de flexibilidad es buscar mayor eficacia de resolución pasando de usar una representación a usar la otra. En este tipo de problemas, el descriptor DF1.1 se particulariza como: *Pasar de usar la representación gráfica a usar la representación numérica cuando aumenta el tamaño de las figuras del patrón*.

La Figura 2 muestra la respuesta de un estudiante de 6º curso. Él inició la resolución del apartado a) dibujando hasta la 4ª tarima y contando sus baldosas, pero después no dibujó la 5ª tarima, sino que escribió las cantidades de baldosas que la forman. En este problema, cambiar del sistema de representación pictórico al numérico le resultó conveniente para resolverlo con más eficacia.

Figura 1. Enunciado de un problema de tipo A

Una empresa que organiza eventos coloca tarimas formadas por baldosas cuadradas de 1m x 1m, de colores blanco y negro, como se observa:

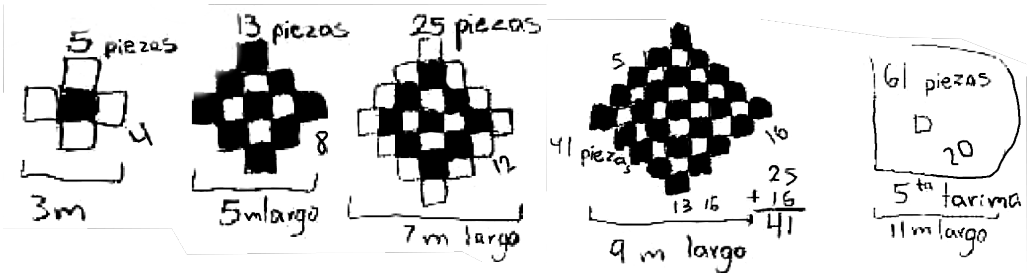


Pueden colocar tarimas pequeñas (de 3m de ancho, como la tarima de la izquierda) o más grandes, siguiendo el mismo patrón. Utilizando para ello el mismo tipo de baldosas blancas y negras de 1m x 1m.

a) Si se continúa el patrón observado, agregando la 4ª y 5ª tarimas, ¿cuántas baldosas se utilizan para construir la 5ta tarima?

b) ¿Cuántas baldosas necesitan para construir una tarima de 21m de ancho?

Figura 2. Solución evidenciando el descriptor DF1.1

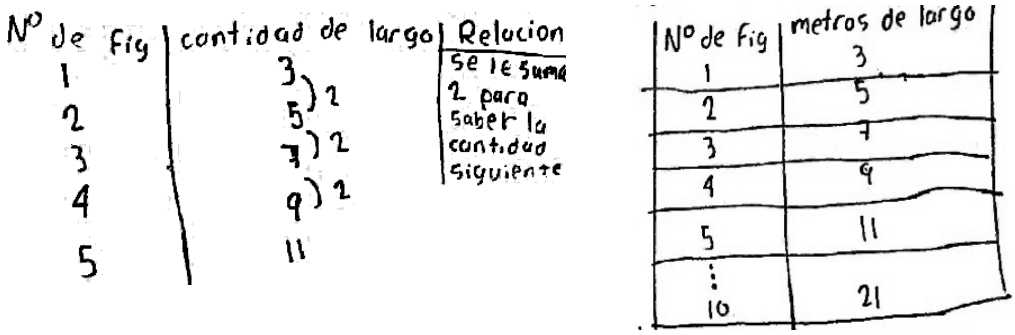


Los problemas de generalización de patrones gráficos presentan una relación entre dos variables, que los estudiantes tratan de identificar comparando, de formas variadas, conjuntos de valores numéricos. Una evidencia de flexibilidad es abandonar una estrategia de búsqueda de la relación cuando se piensa que otra diferente puede ser más eficaz, por lo que el descriptor DF2.3 se particulariza como: *Tiene una nueva idea sobre cómo relacionar la posición de un término en la secuencia (número de tarima) con su valor (metros de largo)*.

La Figura 3 muestra la respuesta de otro estudiante de 6º curso al apartado b), que empezó notando que las diferencias entre las anchuras de cada tarima y de la siguiente es 2 (Figura 3 a la izquierda),

pero después tuvo otra idea, por lo que empezó de nuevo escribiendo otra vez la tabla de valores. Esta idea le permitió calcular la solución con eficacia, relacionando los dos elementos de cada fila (Figura 3 a la derecha), que él explicó así: "para saber qué tarima o número de figura es de 21m de ancho, hallo dos números consecutivos que dan 21 y el más pequeño es el número de tarima o figura. 10+11 = 21".

Figura 3. Solución evidenciando el descriptor DF2.3



Problemas de visualización espacial

En los problemas que piden justificar las respuestas, algunos estudiantes escribieron una resolución rápida que solo contenía operaciones aritméticas y después hicieron otra resolución más detallada que, en ocasiones, resultó ser diferente de la primera. Este comportamiento es una evidencia de flexibilidad correspondiente al descriptor DF3.1, que se particulariza como: *Producir una resolución rápida solo numérica y después otra resolución más detallada incorporando la representación visual.*

La Figura 4 muestra un problema del tipo B y la Figura 5 muestra la respuesta de un estudiante de 6to curso. En su primera solución (Figura 5 a la izquierda), solo escribe una descripción de los huecos del cubo y los cálculos, sin una justificación. Después representa las cuatro capas del cubo (Figura 5 a la derecha), señala con color cada hueco y así justifica que faltan 20 cubos.

Figura 4. Enunciado de un problema de tipo B

Jazmín trabaja en su taller de artesanía con cubitos de madera de 3cm de arista. Ella construye un cubo grande con esos cubitos, pero, al no ser suficientes, le quedan algunas filas completas vacías en los espacios señalados en la figura.
¿Cuántos cubitos pequeños le hacen falta para rellenar los huecos? Justifique su respuesta.

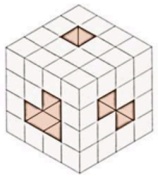
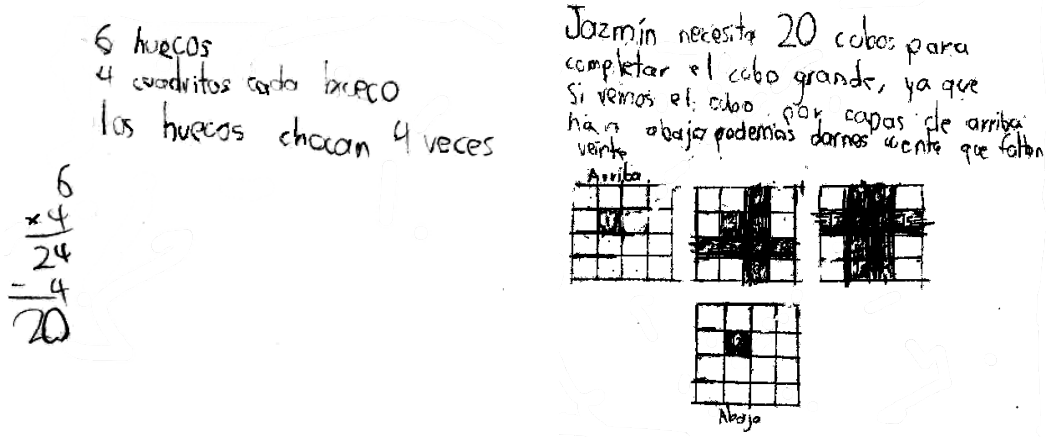


Figura 5. Dos soluciones del mismo estudiante, evidenciando el descriptor DF3.1



Problemas que piden dos resoluciones diferentes

Una forma de resolver por segunda vez problemas aritméticos consiste en reorganizar los pasos de la primera resolución. Una evidencia de flexibilidad es relacionar los datos de formas diferentes, con lo que el descriptor DF3.3 se particulariza así: *Producir dos soluciones ordenando los datos de distintas formas, para realizar secuencias diferentes de operaciones y pasos de la resolución.*

La Figura 6 muestra el enunciado de un problema del tipo C. Un estudiante de 4º curso respondió en a): "6 bananas valen lo mismo que 2 naranjas y cada banana vale 4 *Fruts* y 2 naranjas valen 24 *Fruts*. Si lo duplicamos, [4 naranjas] valen 48 *Fruts* y 2 manzanas valen 48 *Fruts* y si sumamos el valor de una manzana al de 2 [manzanas], tendremos que una piña vale 72 *Fruts*". Después, respondió en b): "Saqué la equivalencia de 3 manzanas con 6 naranjas. Cada 2 naranjas obtenemos 6 bananas y entonces 6 naranjas equivalen a 18 bananas y 1 piña equivale a 18 [bananas], cuyo valor es 18x4 = 72 *Fruts*". Al analizar en detalles ambas respuestas, podemos observar que el estudiante realiza operaciones diferentes en cada resolución, evidenciándose el descriptor DF3.3.

Figura 6. Enunciado de un problema de tipo C

Cristina está de viaje en el país de Frutilandia, cuya moneda es el *Frut*. Cristina quiere preparar el plato típico del país, que contiene banana, piña, naranja y manzana. Al comprar las frutas notó que:

- 2 naranjas valen lo mismo que 6 bananas.
- 1 piña vale lo mismo que 3 manzanas.
- 2 manzanas valen lo mismo que 4 naranjas.

a) Si cada banana vale 4 *Fruts*, ¿cuántos *Fruts* vale una piña?
b) Para verificar tu respuesta, resuelve el problema de una forma distinta a la anterior.

Problemas con varios apartados, cada uno más complejo que el anterior

En el problema de la Figura 7, para resolver cada apartado b) y c) es necesario generalizar los resultados anteriores. Una evidencia de flexibilidad es reconocer la relación entre cada apartado del problema y los anteriores y saber modificar el enfoque de las resoluciones anteriores para adaptarlo a las nuevas condiciones. El descriptor DF2.4 se particulariza como: *Modifica la relación entre la suma de tres números consecutivos y los sumandos para adaptarla a la suma de tres números no consecutivos y de cinco o más sumandos*.

Figura 7. Enunciado de un problema de tipo D

Halla el resultado de cada una de las siguientes sumas:

$$5 + 6 + 7 =$$
$$19 + 20 + 21 =$$
$$399 + 400 + 401 =$$

a) ¿Qué relación observas entre el resultado de cada suma y el valor central de la misma? Justifica tu respuesta.
b) Busca grupos de tres números mayores a 1000, no consecutivos, cuya suma cumpla la relación indicada en el apartado anterior. ¿Qué condiciones deben cumplir esos números? Justifica tu respuesta.
c) Plantea un problema parecido a los anteriores, pero que las sumas sean de más de tres números, ¿cuál sería la relación que se daría en tu problema? Justifica tu respuesta.

Un estudiante de 5º curso, después de haber resuelto correctamente los apartados a) y b) con grupos de tres números, justificó su respuesta en c) diciendo que "para los que tienen más cantidad de números impares [una cantidad impar de más de tres números] es lo mismo, pero [multiplicando] por la cantidad de números. Si es para [cantidades de] números pares, no se puede porque no hay número central". En esta respuesta está presente DF2.4, ya que el estudiante supo identificar la

relación entre los grupos de tres números de a), la modificó y aplicó para responder a b) e identificó la relación entre los números de b) y la transformó para responder, también correctamente, a c).

Problemas que presentan situaciones inusuales para los estudiantes

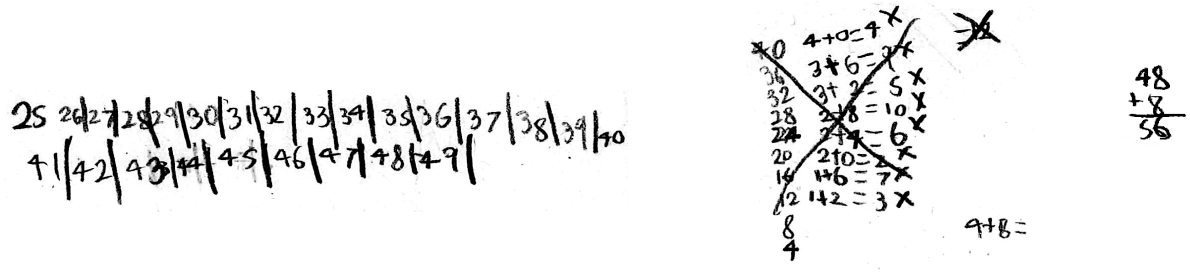
Algunos problemas sugieren una forma básica de resolución que, aunque sea factible, resulta demasiado larga u oculta alguna dificultad imprevista. Una evidencia de flexibilidad es darse cuenta de esto y abandonar esa resolución para empezar otra diferente. Así, el descriptor DF2.2 se particulariza como: *Busca la solución escribiendo los números entre 25 y 85, pero abandona este camino porque piensa que es demasiado largo o porque no sabe cómo usar los datos del problema.*

La Figura 8 muestra un problema del tipo E y la Figura 9 muestra la respuesta de un estudiante de 4º. Este empezó a escribir los números de 25 a 85 (Figura 9 a la izquierda) pero, al ser tantos, no terminó de escribirlos y empezó otra resolución, basada en escribir solo los múltiplos de 4 (Figura 9 a la derecha) e ir calculando la suma de los dígitos de cada múltiplo, hasta que encontró un número (48) que cumple las condiciones del problema. La resolución muestra cómo el estudiante pasó de un procedimiento que le podría llevar a encontrar la solución pero que le resultaba demasiado largo a otro más eficaz y rápido, evidenciando su flexibilidad a través del descriptor DF2.2.

Figura 8. Enunciado de un problema de tipo E

> La edad de Claudia es un número múltiplo de 4 y dentro de dos años será un múltiplo de 5. Además, la suma de las cifras de su edad es 12. Si Claudia tiene más de 25 años, pero menos de 85, ¿cuántos años tendrá Claudia dentro de 8 años? Justifica tu respuesta.

Figura 9. Cambio de forma de solución que evidencia el descriptor DF2.2



CONCLUSIONES

En educación matemática se considera la flexibilidad como un componente de la creatividad matemática y una de las cualidades de los estudiantes con TM. Un objetivo de este texto ha sido caracterizar la flexibilidad mediante un conjunto de descriptores que permiten analizar las resoluciones de problemas para valorar de qué manera los estudiantes han mostrado en ellas el uso de la flexibilidad. Dichos descriptores se basan en caracterizaciones de la flexibilidad presentadas en publicaciones previas, que hemos mencionado, y aportaciones nuestras que las complementan. Una aportación original de este estudio es haber integrado y organizado dichas caracterizaciones.

El segundo objetivo ha sido mostrar cómo usar los descriptores para analizar respuestas de estudiantes a cinco tipos de problemas, algunos de ellos planteados también por otros investigadores (p. ej., Manero et al., 2021) porque han mostrado ser eficaces como contexto para observar la flexibilidad y poder identificar a estudiantes con TM. Para aplicar los descriptores de la flexibilidad, hemos mostrado que particularizarlos a las características concretas de cada tipo de problemas los hace más operativos y específicos, lo cual es otra aportación original de este estudio.

En cuanto a los diferentes tipos de problemas de nuestra investigación, la Tabla 1 permite concluir que los problemas de generalización de patrones gráficos son los que proporcionan más información sobre la flexibilidad, ya que plantean preguntas de complejidad creciente, que inducen

la aparición de cambios en la resolución, y los estudiantes pueden resolverlos usando diferentes tipos de representaciones de la información y siguiendo distintos caminos para llegar a la generalización solicitada. Este resultado es consistente con publicaciones previas (Vale et al., 2012).

Referencias

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 51-75.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 319-326). SEIEM.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*, *6*(2), 175-183.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability, *ZDM Mathematics Education, 45*(2), 167-181. 10.1007/s11858-012-0467-1

Kozlowski, J., Chamberlin, S. y Mann, E. (2019). Factors that influence mathematical creativity. *The Mathematics Enthusiast*, *16*(1), 505-540. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1471

Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. En P. A. Frensch y J. Funke (eds.), *Complex problem solving: the European perspective* (pp. 201-218). Lawrence Erlbaum.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. The U. of Chicago Press.

Leikin, R. (2018). Giftedness and high ability in mathematics. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_65-4

Leikin, R. y Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: what makes the difference? *ZDM Mathematics Education*, *45*(2), 183-197. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8

Manero, V., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2021). Diseño e implementación de tareas de alta demanda cognitiva basadas en la sucesión look and say. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 161-183. https://doi.org/10.35763/aiem20.3998

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kontoyianni, K. y Kattou, M. (2011). A model of mathematical giftedness: integrating natural, creative, and mathematical abilities. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *11*(1), 39-54. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.548900

Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2019). Análisis de las respuestas de futuros profesores a un cuestionario sobre el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 543-552). SEIEM.

Sánchez, A., Font, V., Diamantidis, D. y Breda, A. (2021). Un estudio de caso de cómo entiende la creatividad y su desarrollo en la clase de matemáticas un futuro profesor de matemáticas. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 553-561). SEIEM.

Siswono, T. (2011). Level of student's creative thinking in classroom mathematics. *Educational Research and Reviews*, *6*(7), 548-553.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. y Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving task as a mean to foster creativity in mathematics. En T. Tso (ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 171-178). PME.

[1] Estos resultados son parte del proyecto de investigación PID2020-117395RB-I00, financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA MAESTRA DE EDUCACIÓN INFANTIL: LA DESCOMPOSICIÓN ADITIVA DEL NÚMERO 6

Early childhood teacher's specialised knowledge: additive decomposition of the number 6

Muñoz-Catalán, M. C.[a], Liñán García[a], M.M, Joglar-Prieto, N. [b] y Ramírez-García, M. [c]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad Complutense de Madrid, [c]Centro Universitario La Salle

Resumen

Utilizando el modelo MTSK, analizamos el conocimiento especializado que moviliza una profesora de Educación Infantil cuando trabaja la descomposición aditiva del número 6 en un aula de 5 años. La profesora pone en juego conocimiento didáctico del contenido ligado a su conocimiento profundo de la matemática elemental al contextualizar la descomposición con problemas aritméticos verbales y usar diferentes registros de representación facilitando constantemente las conversiones entre ellos. El análisis muestra que las decisiones que toma están sustentadas en su conocimiento de cómo se genera el conocimiento matemático y cómo se puede validar en esta etapa. Comprender cómo gestiona la descomposición del número 6 en el aula de infantil desde la flexibilidad representacional nos ha ayudado a identificar prácticas matemáticas en Educación Infantil, como la modelización, la comparación y la conversión entre sistemas de representación

Palabras clave: *MTSK en Educación Infantil, descomposición aditiva, flexibilidad representacional, prácticas matemáticas en Educación Infantil, registros de representación.*

Abstract

Using the MTSK model, we analyze the specialised knowledge mobilized by an early childhood education teacher when working on the additive decomposition of the number 6 in a 5-year-old classroom. The teacher mobilize pedagogical content knowledge connected to her deep knowledge of elementary mathematics, contextualizing additive decompositions with verbal arithmetic problems, using different representation registers and constantly facilitating conversions between them. The analysis shows that the decisions she makes are supported by her knowledge of how mathematical knowledge is generated and validated in this educational stage. Understanding how she manages the additive decomposition of the number 6 in the early childhood classroom promoting representational flexibility, helped us identifying mathematical practices in early childhood education like: modeling, comparing and transforming between representational systems.

Keywords: *Early Childhood Education MTSK, additive decomposition, representational flexibility, mathematical practices in Early Childhood Education, registers of representation.*

INTRODUCCIÓN

La atención al conocimiento profesional de los maestros y las maestras de Educación Infantil es relativamente reciente, y se conoce poco sobre su naturaleza respecto del trabajo matemático en el aula. Sin embargo, no hay duda del papel que tiene el profesorado y su conocimiento para generar buenas oportunidades de aprendizaje (Hill et al., 2005). En trabajos previos (Muñoz-Catalán et al., 2021) hemos puesto de relieve que la idiosincrasia del conocimiento de este profesional también viene definida por el dominio matemático, habitualmente considerado solo para el profesorado de otras etapas educativas. Además, la investigación ha puesto de relieve que un conocimiento profundo

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., Joglar-Prieto, N. y Ramírez-García, M. (2023). Conocimiento especializado de una maestra de Educación Infantil: la descomposición aditiva del número 6. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 403–410). SEIEM.

de aspectos de dicho dominio es imprescindible para que estos profesionales construyan un adecuado conocimiento didáctico del contenido matemático (Opperman et al., 2016).

En esta comunicación seguimos ahondando en la caracterización del conocimiento del profesorado de infantil para enseñar contenidos matemáticos y lo hacemos con el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) por dos razones. Por un lado, porque es específico para la enseñanza de las matemáticas, y, por otro lado, porque, como herramienta analítica, permite poner de relieve aspectos de este conocimiento no contemplados para este profesional por otros modelos. Una primera adaptación del modelo a esta etapa educativa ha sido presentada en Muñoz-Catalán et al., (2022) aunque todavía son necesarias ampliaciones y revisiones. En concreto, en el trabajo presentado aquí, pretendemos comprender qué conocimiento moviliza una profesora de infantil, de más de 25 años de experiencia, cuando trabaja un contenido clave de esta etapa en un aula de 5 años: la descomposición aditiva del número 6. El enfoque didáctico que emplea está basado en el uso en paralelo de distintas representaciones de la situación aditiva y en las conversiones entre ellas (Lesh, 1997). La flexibilidad y adaptabilidad en el uso de estrategias y representaciones en educación matemática es una habilidad que requiere de procesos cognitivos complejos para desarrollarse (Heinze et al., 2009). Para activar dichos procesos en el alumnado, el trabajo en el aula suele comenzar por registros más concretos (situación real y sistema manipulativo) para impulsar conversiones hacia sistemas más abstractos y simbólicos (que también podrían ser manipulativos, como las piezas Numicon®), que permiten iniciar la práctica de modelización matemática a través de un proceso de formalización progresiva (Braithwaite y Goldstone, 2013). La importancia de este enfoque no solo reside en el desarrollo de la capacidad simbólica en los y las estudiantes, sino que se convierte en un elemento clave para impulsar la comprensión matemática y su razonamiento (Kuntze et al., 2015). Así, el impulso hacia la pérdida de literalidad de las representaciones utilizadas juega un papel fundamental en la identificación y representación de la matemática de las situaciones aditivas de la vida cotidiana, en la modelización, práctica matemática por excelencia (Lesh, 1997; Flynn, 2017).

MARCO TEÓRICO

El conocimiento de los docentes de Educación Infantil abarca tanto aspectos pedagógicos generales como un conocimiento profundo y especializado de las matemáticas elemental y de cómo enseñarlas en esta etapa (Muñoz-Catalán et al., 2021). El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK en sus siglas en inglés (Carrillo et al., 2018), considera la especialización como el eje del conocimiento de los profesores de matemáticas. Este conocimiento no se refiere a ninguna otra ciencia o profesión y está arraigado en las matemáticas en sí mismas, diferenciando entre tres dominios: Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y, por último, concepciones sobre las matemáticas y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Estas últimas no serán objeto de estudio en esta comunicación.

El Conocimiento Matemático (MK) está organizado en 3 subdominios. *El Conocimiento de los Temas* (KoT) tiene como referente el conocimiento matemático que es objeto de enseñanza. Incluye el conocimiento que la profesora tiene sobre *las propiedades de los temas matemáticos y sus fundamentos,* por ejemplo, saber que el esquema parte/todo del número es una relación numérica base para la comprensión del número. La categoría *procedimientos* abarca los conocimientos del *cómo* se procede, del *cuándo* se puede proceder, del *porqué* se puede proceder y de las *características del resultado* de aplicar un procedimiento; por ejemplo, saber que la subitización es un procedimiento para calcular la numerosidad de un conjunto. La *fenomenología* abarca la comprensión de los eventos u ocurrencias que pueden llevar al conocimiento matemático y sus usos prácticos. Por ejemplo, el conocimiento que tiene la profesora de que el número natural se puede usar para anticipar un resultado o como memoria de cantidad. Finalmente, el subdominio de *los registros de representación* incluye la comprensión sobre las diversas formas en que se puede representar una idea matemática, incluyendo las conversiones entre representaciones (flexibilidad representacional, Heinze et al., 2009). Para identificar los distintos registros, tomamos como referente el modelo de Lesh (1997),

pero en lugar de considerar la diferenciación entre sistema de representación *símbolo escrito* y *símbolo hablado*, preferimos diferenciar los registros *símbolo matemático* del registro *lenguaje natural verbal* (en nuestro caso en español, ya sea escrito o hablado) por el papel que el símbolo juega en el aprendizaje matemático. Así, junto a estos dos registros, identificamos los registros: *situación real, modelo manipulativo e icónico- gráfico*. Sería un ejemplo de esta categoría el conocimiento de la profesora de que el número 6 y sus descomposiciones aditivas se pueden representar con contadores (registro manipulativo) y de que estas representaciones se pueden transformar en una representación equivalente con las placas de Herbinière-Lebert (conversión dentro del registro manipulativo).

El conocimiento de la estructura matemática (KSM) trata de dar cuenta del conocimiento sobre las múltiples conexiones entre entes matemáticos. La investigación en Educación Infantil ha puesto de relieve hasta ahora que la conexión de simplificación-complejización podría ser caracterizadora del conocimiento de este profesional, pero que, por el enfoque de la formación inicial y continua del profesorado de Educación Infantil en nuestro contexto, es difícil identificarlo actualmente desde la práctica de estos profesionales (Muñoz-Catalán et al., 2021).

El Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM) contempla el conocimiento de cómo se genera conocimiento matemático y cómo se valida (Carrillo et al., 2018). Este subdominio está todavía en elaboración, por lo que no se dispone de categorías definidas, pero entre sus indicadores actuales se contemplan las practicas matemáticas consideradas desde una perspectiva avanzada, como la definición, la demostración o la resolución de problemas. En Muñoz-Catalán et al. (2022) nos preguntamos si esta manera de caracterizar este subdominio era operativa para comprender el conocimiento del profesorado de Educación Infantil. Aunque los referentes siguen siendo esas prácticas avanzadas, el foco de este subdominio debe estar en aquellas orientadas a generar conocimiento matemático y a validarlo, que sean precursoras de las primeras. Así, la comparación se podría considerar una práctica matemática en Educación Infantil porque permite al alumnado, mediante las semejanzas y diferencias, identificar propiedades matemáticas de los objetos en estudio, las cuales les permitirán en un futuro, por ejemplo, construir una definición de los mismos.

En principio consideramos los indicadores para este subdominio indicados en Carrillo et al. (2018) que son próximos a esta etapa educativa, principalmente *formas de validación y demostración*, *el papel de los símbolos y el lenguaje formal*, *procesos asociados a la resolución de problemas como medio para producir matemáticas* y *prácticas particulares del quehacer matemático* (por ejemplo, la modelización). Sin embargo, estamos abiertos a identificar otros que nos permitan expresar la idiosincrasia del conocimiento de la práctica matemática del profesorado de esta etapa. Este es el caso de *formas de génesis epistemológica* que permite recoger el conocimiento de prácticas que este profesional conoce para promover conocimiento matemático en su alumnado (Muñoz-Catalán et al., 2022).

El conocimiento didáctico del contenido se divide en tres subdominios. *El conocimiento de enseñanza de matemáticas* (KMT) caracteriza el conocimiento del contenido desde la enseñanza e incluye conocimiento de teorías de enseñanza (formales o personales), de recursos y de estrategias. *Las características del aprendizaje de matemáticas* (KFLM) considera el conocimiento del contenido desde la perspectiva del aprendizaje, considerando el conocimiento de teorías personales o formales del aprendizaje, de las fortalezas o las dificultades en el proceso de aprendizaje, de las formas de interacción de los estudiantes con el contenido y las expectativas de los estudiantes. Finalmente, el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) aborda el plan de estudios en su totalidad, incluyendo las expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo y secuencia de los contenidos.

METODOLOGÍA

En nuestro afán de seguir avanzando en la caracterización del conocimiento especializado del profesorado de infantil, el objetivo de este trabajo es identificar qué conocimiento moviliza una

profesora de esta etapa cuando trabaja la descomposición aditiva del número 6. Desde un paradigma interpretativo (Bassey, 1999) abordamos este objetivo mediante el análisis de un vídeo de una profesora de infantil, Patricia, de 30 minutos de duración, cuando trabajó ese contenido con un grupo de 24 estudiantes de 5 años de edad. Patricia es una maestra con más de 25 años de experiencia, muy interesada en mejorar su práctica en relación con las matemáticas. Tanto la informante como los adultos responsables del alumnado dieron su consentimiento para la recogida de datos y difusión de resultados de la investigación.

Analizamos la trascripción de la sesión mediante un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) utilizando las categorías e indicadores del modelo MTSK (Carrillo et al, 2018) y una primera adaptación de la caracterización de sus subdominios para el profesorado de infantil de Muñoz-Catalán et al. (2022).

Transcripción resumida de la sesión: «El juego de la familia de los ositos».

La sesión comienza en asamblea, donde Patricia plantea una actividad con la que el alumnado está familiarizado desde 3 años. En el primer curso de Infantil de 3 años, tenían una casa de juguete con la que jugaban con unos muñecos (hasta 4 ositos), colocándolos en las distintas estancias. En el curso siguiente la utilizaron para trabajar el número 5 y en paralelo la maestra usaba una lámina grande plastificada con una distribución específica de estancias (un salón, una cocina, un baño y un dormitorio) sobre la que colocaba los ositos. Durante esos dos cursos, la maestra había introducido también las piezas punteadas (Numicon®) para representar cantidades.

El objetivo de la sesión es comprender distintas descomposiciones aditivas del número 6 usando distintas representaciones. La profesora presenta a los seis miembros de la familia de ositos mientras los coloca uno a uno en el salón. Desplaza al oso abuelo al cuarto de baño (descomposición 5+1) y plantea las preguntas siguientes a estudiantes concretos: «¿Cuántos ositos hay ahora en el salón? ¿Y en el baño? ¿Cuántos había en el salón antes de que el abuelo se fuera al baño? ¿Cuántos hay ahora en el dormitorio? ¿Y en la cocina?». A continuación, la maestra continúa con la historia, realizando movimientos de los miembros de la familia de una estancia a otra, mostrando las siguientes descomposiciones del seis y planteando las siguientes preguntas al alumnado, que presentamos según el orden en el que las formula: «El hijo se marcha al baño con el abuelo (descomposición 4 + 2). ¿Cuántos hay ahora en el salón? (4) ¿Cuántos hay en ahora el baño? (2) ¿Y en total cuántos hay en la casita? Sigue habiendo seis ¿verdad? […] Después la niña va al baño (descomposición 3 + 3). ¿Cuántos hay en la cocina? (0) ¿Y en el dormitorio? (0) ¿Cuántos hay en el salón? (3) ¿Cuántos hay en el baño? (3). […] La abuela va al baño (descomposición 2 + 4). ¿Cuántos hay en el baño? (4) ¿Cuántos en el salón? (2) […] El padre va a la cocina (descomposición 1 + 1 + 4). ¿Cuántos hay en el baño? (4) ¿Cuántos en el salón? (1) ¿Y cuántos hay en la cocina? (1). […] Termina cada osito en su cama (descomposición 1 +1 +1 +1 +1 +1). ¿Cuántas hay en la cocina? (0) ¿En el baño? (0) ¿En el salón? (0) ¿Y en el dormitorio? (6) Pero cada uno en su cama».

Patricia saca también las piezas del Numicon® correspondientes a los 6 primeros números. Después de cada descomposición generada con los osos, les pide que la representen con este material y que comprueben su respuesta mediante la superposición de las fichas escogidas con la correspondiente del 6.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PATRICIA

Patricia sabe que la descomposición aditiva del número 6 es un contenido de aprendizaje para estudiantes de 5 años en Educación Infantil (KMLS, expectativas). Sabemos que este contenido asociado a números menores lo ha trabajado desde esta perspectiva desde los 3 años, por lo que sabe que la distribución de los miembros de una familia en las distintas dependencias de la casa es un contexto que da significado a la descomposición del número (KoT, fenomenología) y lo usa como contexto de la tarea (KMT, tarea). Patricia es conocedora también del interés que despierta en el alumnado esa situación (KFLM, intereses) que les va a permitir identificar las descomposiciones.

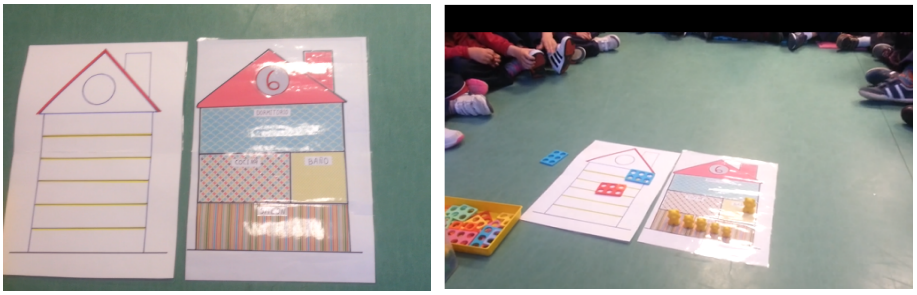
Al principio de la sesión, saca la familia constituida por 6 osos y construye el conjunto, presentando miembro a miembro, es decir, enumerando sus elementos, evidenciando su conocimiento de por qué este procedimiento genera el conjunto (KoT, procedimiento): «había una vez una familia de 6 ositos: el abuelo, la abuela, el papá, la mamá, el niño y la niña». El interés que dedica a crear el conjunto pone de relieve que ella sabe la importancia que tiene que el alumnado conciba el conjunto antes de comenzar a operar con él (KFLM, formas de interacción). Ella lo designa tanto por extensión (indicando miembro a miembro), como por comprensión, es decir, haciendo referencia a la relación que los une (familia) (KoT, propiedades y fundamentos).

Patricia sabe que la descomposición aditiva está definida por la relación parte-todo del número (KoT, propiedades) y, por ese motivo, la plantea sobre la base de situaciones aditivas de cambio, pero, sobre todo, de combinación (KoT, propiedades), que describen una relación estática entre dos subconjuntos disjuntos, también llamados partes, que juntos forman el todo. En el contexto de la historia, Patricia realiza la generación de las partes de manera dinámica (KMT, estrategia), posiblemente consciente de que el alumnado requiere de este enfoque hasta que no domine el esquema parte-todo del número (KFLM, formas de interacción) (idea respaldada por Fuson, 1992). De hecho, las preguntas que formula Patricia a los estudiantes cuando mueve un oso a una habitación en particular reflejan su conocimiento de las características relevantes de este tipo de problema —estático— (propiedades, KoT), pues es muy precisa en el tipo de preguntas que hace y en el vocabulario y el tiempo de habla que utiliza para la tarea (KoT, registros de representación; KMT, lenguaje como recurso de enseñanza): «¿Cuántos osos hay ahora en la sala de estar? (parte) ¿Y en el baño? (parte) ¿Cuántos había en la sala de estar antes de que el abuelo entrara en el baño?» (todo).

Patricia sabe la importancia de ser ordenada en la manera de proceder y repite la actividad sistemáticamente con diferentes descomposiciones aditivas del número 6: 5 y 1, 4 y 2, 3 y 3 y 2 y 4, lo que permite la promoción del reconocimiento de patrones o regularidades numéricas (KPM, Procesos asociados a la resolución de problemas; KMT, estrategias) (Muñoz-Catalán et al., 2021).

Si hay algo significativo en esta sesión, es que la descomposición aditiva discurre entre el uso de distintos registros de representación en paralelo en la clase y la conversión deliberada entre ellos. Por tanto, es importante comprender el conocimiento que sustenta las decisiones que Patricia toma en torno a cuáles usar, cómo usarlos y qué conversiones priorizar. El material de referencia es una casa real de juguetes con la que han jugado desde los 3 años. En esta sesión, Patricia pone en juego una secuencia de enseñanza muy concreta (KMT, estrategia), que comienza con el tiempo de asamblea trabajando en una lámina (lámina 1) que representa la casa de 4 habitaciones (con sus nombres) con el número 6 en su techo, en la que manipula los 6 osos y los distribuye por las dependencias (registro gráfico). En paralelo muestra otra lámina (lámina 2, registro gráfico) a la izquierda de la primera y de mayor nivel de abstracción, para que los estudiantes representen la distribución de osos en la casa con las piezas Numicon® y coloca en el tejado la que se corresponde con el número 6 (Figura 1).

Figura 1. Láminas para la representación de la descomposición del número 6.



Primero, realiza la descomposición de la familia de osos a la vez que describe la situación (conversión registro situación real-registro modelo manipulativo a través del registro de la lengua natural oral) sobre la lámina 1 (registro gráfico de la casa), cuyas dependencias ayudan a reforzar la existencia de

partes. A continuación, les va preguntando cuántos osos hay en cada dependencia (conversión entre registro modelo manipulativo sobre gráfico y registro de la lengua natural oral). Después, les pide que lo representen con el material Numicon®, volviendo ella a describir la descomposición resultante: «haz tú esa situación: 5 en el salón y 1 en el baño» (conversión registro lengua natural-registro modelo manipulativo). Para finalizar, los y las estudiantes seleccionan las dos piezas, las componen como la ficha del 6, y colocan esta composición encima de la del 6 para comprobar que la descomposición es correcta y dejarla sobre la lámina 2 (conversión registro modelo manipulativo-registro modelo manipulativo sobre registro gráfico). Esta secuencia de enseñanza (KMT, estrategia) pone de relieve distintos elementos de su conocimiento.

Por un lado, Patricia conoce distintos sistemas de representación del número 6 (KoT, registros) y los usa como recursos de enseñanza (KMT, recursos). Además, ella es consciente de que los estudiantes ya están acostumbrados a los materiales manipulativos utilizados, incluyendo el Numicon®, y que necesitan visualizar y manipular objetos matemáticos para identificar las relaciones entre las cantidades en una estructura aditiva (KFLM, formas de interactuar con el contenido). Ella conoce las potencialidades del Numicon® para esta actividad, al proporcionar piezas únicas que informan de la cantidad de manera discreta (el 5 es una pieza con 5 agujeros) y que facilita la identificación de la cantidad mediante la subitización (KMT, recursos). Así, potencia la subitización como una estrategia favorable en el recuento involucrado en la descomposición y composición del número 6 (KoT, procedimientos; KMT, recursos y estrategias de enseñanza, KMT).

La conversión de un sistema de representación a otro está basada en su conocimiento de que es una práctica matemática que ayuda a al alumnado a generar conocimiento matemático (KPM, génesis epistemológica) como ya han apuntado diversos autores (Braithwaite y Goldstone, 2013; Kuntze et al., 2015). De hecho, en la descomposición del 6 como 3 y 3, un niño comenzó colocando la ficha del 1 sobre la ficha del 6 y su manera de ayudarle es guiando su mirada de nuevo a la lámina 1, donde prima las representaciones más literales: «Hay 3 en el baño y 3 en el salón, ha dicho Laura». A continuación, el niño coloca la ficha del 3, la ficha del 1 y la ficha del 2 sobre la del 6 y Patricia le pregunta: «¿hay algún osito solo en una habitación?», con el fin de que comprenda qué está representando cada ficha elegida. La conversión entre sistemas de representación de las cantidades numéricas se potencia a través de otra práctica matemática importante en infantil como es la comparación (KPM, génesis epistemológica) a través de diferencias y similitudes. La presentación de ambas láminas en paralelo es la estrategia didáctica (KMT, estrategia) que le permite ayudar al alumnado a conectar representaciones diferentes de las mismas cantidades porque permanecen simultáneamente en las dos láminas.

La secuencia en la conversión de registros de representación planteada por Patricia promueve la progresiva abstracción de las representaciones, que van perdiendo cada vez más el vínculo con el contexto real inicial de la casita, facilitando que los estudiantes caminen hacia la modelización matemática de la situación (KPM, modelización). Así, la actividad que se desarrolla en la lámina 1 está ligada más directamente con el aspecto contextual de la situación (familia de osos que se desplazan por las habitaciones de la casa), mientras que la actividad que se desarrolla en la lámina 2, está orientada a expresar la naturaleza aditiva del problema en cada descomposición favorecida por el uso del Numicon® que permite representar y comparar la equivalencia numérica de distintas combinaciones aditivas (KMT, recursos y estrategias). Este proceso progresivo de abstracción se evidencia también en el uso del lenguaje de la profesora, acorde a la lámina donde está (KPM, lenguaje; KMT, lenguaje recurso). Por ejemplo, en la lámina 1 dice: «dice la abuela: uy, estos están tardando mucho en el baño. Voy a ver qué están haciendo». Entonces mueve el oso que representa la abuela a la dependencia baño y dice: «anda, si estáis haciendo un experimento, estaba yo muy preocupada. Y ahora, ¿cuántos hay en el baño?, cuatro (repitiendo lo que dice una alumna), y, ¿cuántos hay en el salón?, dos (repitiendo lo que dice una alumna)». Sin embargo, cuando los ositos se desplazan en la lámina 2 dice: «sale Elena y nos prepara las fichas (coge la ficha del 2 y del 4).

¿Hay alguna también ahí que diga 4 y 2? (la alumna superpone sobre la descomposición previa de 4 y 2)».

Desde la primera descomposición, Patricia pone al lado de la lámina 2 la ficha del Numicon® del 6 y promueve que superpongan cada descomposición representada con dicho material sobre la ficha del 6 para que realicen la comprobación de su resultado. En este caso, la superposición, basada en la comparación de figuras, es promovida por la profesora para comprobar el resultado (KPM, validación).

Conclusiones

El análisis del conocimiento de la profesora movilizado durante la sesión descrita ha puesto de relieve que el trabajo en Educación Infantil de la descomposición aditiva del número 6 desde la flexibilidad representacional requiere, entre otros, del conocimiento de recursos adecuados al contenido (KMT, recursos), del conocimiento de una secuencia didáctica que dé sentido al uso progresivo de tales recursos (KMT, estrategia), del conocimiento de qué situaciones producen interés en los y las estudiantes (KFLM, intereses) y de cómo ayudarles a representar y comparar sus representaciones de la situación aditiva, basándose en el conocimiento de cómo procesan e interactúan con el contenido (KFLM, formas de interacción con el contenido).

Estos elementos de conocimiento, pertenecientes al *Conocimiento Didáctico del Contenido*, están conectados con la especificidad de la descomposición aditiva, y se sustentan en su *conocimiento matemático* (MK). En particular, conoce diversas representaciones de la descomposición aditiva (KoT, registros), incluyendo qué situación cercana al alumnado da sentido a dicho contenido matemático (KoT, fenomenología). Sabe que la descomposición aditiva del número natural se sustenta en el esquema parte-todo y que las situaciones de combinación permiten reforzarlo (KoT, propiedades) o que la subitización es un procedimiento para determinar el cardinal del conjunto que, frente a otros, ayuda a trabajar la descomposición aditiva (KoT, procedimientos). Sin embargo, especialmente significativo ha sido identificar en el análisis que la mayoría de las decisiones didácticas están sustentadas en su conocimiento de cómo se genera el conocimiento matemático y cómo se valida (KPM), desde la perspectiva de su génesis en esta etapa educativa. Así, han emergido las prácticas de: comparar, mediante la presentación en paralelo de representaciones de cada descomposición; modelizar, mediante recursos que se van distanciando de la situación problema y ayudan a capturar su estructura matemática (en sintonía con Flynn, 2017); conversiones entre registros, para favorecer la identificación de las propiedades matemáticas de la situación (práctica identificada, por ejemplo, por Kuntze et al., 2015). Comparar también ha emergido en la sesión para validar el resultado, mediante la superposición de cada descomposición aditiva con Numicon® sobre la pieza del 6.

En contra de lo que tradicionalmente se ha considerado, el *conocimiento de las prácticas matemáticas* del modelo MTSK se ha mostrado útil para comprender cómo se gestiona a nivel didáctico el trabajo sobre la descomposición aditiva en el aula de infantil. También pareció tener un papel importante en el trabajo de Escudero et al. (2021), en relación con la comparación para la identificación propiedades de los prismas. Estos resultados nos permiten seguir avanzando en la caracterización de qué podemos considerar como práctica en Educación Infantil y, por tanto, cómo caracterizar el *Conocimiento de las prácticas matemáticas* para esta etapa, trabajo ya iniciado en Muñoz-Catalán et al. (2022).

Estas prácticas coinciden con algunas de las recogidas en documentos de asociaciones profesionales como los *Common Core State Standards for Mathematics* (Flynn, 2017), por lo que, como formadoras, consideramos que deben formar parte del contenido de la formación inicial de profesores de infantil (como parte del KMLS). Así, los resultados de este trabajo podrían considerarse como punto de partida para la necesaria reflexión sobre el perfil de este profesional, que permita organizar adecuadamente los nuevos planes de estudios conducentes al título de graduado en Educación Infantil, actualmente en revisión en nuestro país.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Referencia PID2021-122180OB-I00) y por la Junta de Andalucía (España) (Referencia ProyExcel_00297). Está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open university press.

Braithwaite, D.W. y Goldstone, R.L. (2013). Integrating formal and grounded representations in combinatorics learning. *Journal of Educational Psychology*, *105*(3), 666-682. https://doi.org/10.1037/a0032095

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20* (3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Escudero-Domínguez, A., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2021). Caracterizando el conocimiento especializado de un profesor de Educación Infantil enseñando prismas. En P.D. Diago, D. F. Yáñez, M.T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXIV (pp. 237 –244). SEIEM.

Flynn, M. (2017). *Beyond Answers: Exploring Mathematical Practices with Young Children*. Stenhouse publishers.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 243-275). Macmillan & Co.

Heinze, A., Star, J.R. y Verschaffel, L. Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535–540 (2009). https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hill, H.C., Rowan, B., & Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. https://www.jstor.org/stable/3699380

Kuntze, S., Dreher, A. y Friesen, M. (2015). Teachers' resources in analysing mathematical content and classroom situations –The case of using multiple representations. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 3213-3219). Faculty of Education and ERME.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Sage publication.

Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad «real» de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias, 15*(3), 377-391. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4166

Muñoz-Catalán, M.C; Joglar-Prieto, N.; Ramírez, M. y Codes, M. (2022). El modelo MTSK desde la perspectiva del profesor de Educación Infantil: foco en el dominio matemático. En Carrillo, J.; Montes, M.A y Climent, N. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)*, (p. 235-250). Dykinson, S.L.

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2021), Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition. *Journal for the Study of Education and Development*, *45*(1), 37-80. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640

Oppermann, E., Anders, Y. y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, *58*, 174-184. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004

ANÁLISIS DE LA PRODUCCIÓN CIENTÍFICA SOBRE PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA EN SCOPUS

Analysis of scientific production on algebraic thinking in pre-primary and primary education in Scopus

Narváez, R. [a], Adamuz-Povedano, N. [b] y Cañadas, M. C. [a]

[a] Universidad de Granada [b] Universidad de Córdoba

Resumen

La investigación relacionada con pensamiento algebraico es un tema de interés, tanto a nivel nacional como internacional. Los estudios sobre pensamiento algebraico han abordado distintos temas como generalización, estrategias utilizadas y representaciones, a través de tareas que pretenden fomentar el pensamiento algebraico y las capacidades que implica. En este trabajo presentamos un análisis bibliométrico cuyo objetivo es cuantificar y describir, de forma global, la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria desde 1984 al 2021. Para ello, analizamos las fuentes incluidas en la base de datos de Scopus, considerando criterios de inclusión como año, idioma, tipos de documentos y área temática. Dentro de los resultados destacamos que este tema sigue en crecimiento distinguiéndose diversos autores que continúan investigando sobre este tema.

Palabras clave: *Análisis bibliométrico; pensamiento algebraico; producción científica; revisión de literatura.*

Abstract

Research related to algebraic thinking is a topic of interest, both nationally and internationally. Studies on algebraic thinking have addressed different topics such as generalization, strategies used and representations, through tasks that aim to promote algebraic thinking and the skills involved. In this paper we present a bibliometric analysis whose aim is to quantify and describe, in a global way, the scientific production on algebraic thinking in early childhood and primary education from 1984 to 2021. To this end, we analyze the sources included in the Scopus database, considering inclusion criteria such as year, language, types of documents and subject area. Among the results, we highlight that this topic continues to grow, with several authors who continue to research on this subject.

Keywords: *Algebraic thinking; bibliometric analysis; literature review; scientific production.*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico ha sido un tema de investigación relevante dentro de la Didáctica de la Matemática en las últimas décadas. Diversos estudios han abordado distintas aproximaciones del pensamiento algebraico. Esto ha permitido tener un conocimiento de cómo integrar este tipo de pensamiento matemático en las aulas. Como lo expresa Kaput (2000) a través de la algebrización del currículo podemos realizar una integración paulatina del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de enseñanza. Esto no significa que debamos llevar contenido algebraico de educación secundaria a niveles educativos previos, sino que a través de distintos componentes y tareas relacionadas con el pensamiento algebraico podemos desarrollar habilidades matemáticas que le permitirán al estudiante abordar de mejor forma el álgebra.

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2023). Análisis de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en SCOPUS. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 411–418). SEIEM.

La mayoría de los trabajos en esta temática incluyen una revisión de literatura. Algunos ejemplos de revisiones sistemáticas en pensamiento algebraico son los trabajos de Pincheira y Alsina (2021) o Sibgatullin et al. (2022). Sin embargo, no hemos localizado una revisión general que permita dar una imagen global de las publicaciones sobre pensamiento algebraico. Consideramos que esto es necesario y útil para las investigaciones que se están llevando a cabo en la actualidad. En este trabajo presentamos algunos resultados de una revisión bibliométrica realizada sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria entre 1984 y 2021, método de análisis que nos ayudará a obtener un conjunto de datos e indicadores que caracterizará, a grandes rasgos, el estado de esta temática en esos años. En la actualidad, este trabajo cobra especial interés, tanto para investigadores como para docentes, pues el sentido algebraico es uno de los sentidos que se recogen en el currículo de educación primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El pensamiento algebraico "considera las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra y, en particular, el álgebra escolar" (Cañadas, 2016, p. 8). Esto permite que los estudiantes trabajen con cantidades indeterminadas. Para Blanton y Kaput (2004, p. 142) el pensamiento algebraico se define como "un hábito mental que impregna todas las matemáticas y que implica la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas". Kaput (2008) indica que "el corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con dichas generalizaciones" (p. 9). Este autor considera dos aspectos centrales del pensamiento algebraico: (a) hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales, y (b) razonar con formas simbólicas. Así mismo, indica que estos aspectos abarcan al álgebra como el estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones; como estudio de funciones, relaciones y variación articular; y como la aplicación de un grupo de lenguajes para expresar y el razonamiento sobre situaciones que están siendo modeladas.

El trabajo con actividades que promueven el pensamiento algebraico con estudiantes de primaria ayuda a desarrollar un pensamiento analítico, donde las cantidades indeterminadas, incógnitas o variables se tratan junto con las cantidades conocidas (Ventura et al., 2021). El principal objetivo de trabajar el pensamiento algebraico es hacer que "los niños piensen, describan y justifiquen lo que sucede en general con respecto a alguna situación matemática. Es decir, queremos que los niños desarrollen una generalización, una afirmación que describa una verdad matemática general sobre algún conjunto de datos" (Blanton, 2008, p. 105). Respecto al trabajo en educación infantil con pensamiento algebraico, permite explorar las nociones intuitivas que tengan sobre este tema, así como la observación de patrones, regularidades y la argumentación de los hallazgos. Todo esto a través del juego y de la enseñanza no formal del contenido (Fuentes y Cañadas, 2022).

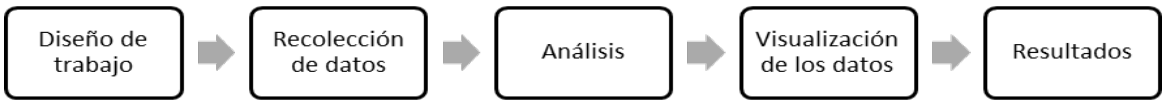
En este estudio nuestro objetivo es analizar la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. En la búsqueda de publicaciones, partimos de algunos indicadores bibliométricos para facilitar la tarea y estableciendo los siguientes objetivos específicos:

1. Cuantificar la producción científica por año y tipo de documentos publicados.
2. Identificar las fuentes donde se publican trabajos sobre pensamiento algebraico.
3. Identificar los autores que más producen sobre este tema.
4. Identificar los países en los que más se ha investigado en este tema.
5. Identificar los principales conceptos abordados en los estudios relacionados con el pensamiento algebraico.

METODOLOGÍA

Este estudio bibliométrico permite evaluar y analizar el resultado sobre un tema concreto, brindando información importante sobre la producción científica (Becerra, 2014). Utilizamos el flujo de trabajo de Zupic y Čater (2015), organizando nuestro trabajo en cinco pasos (ver Figura 1).

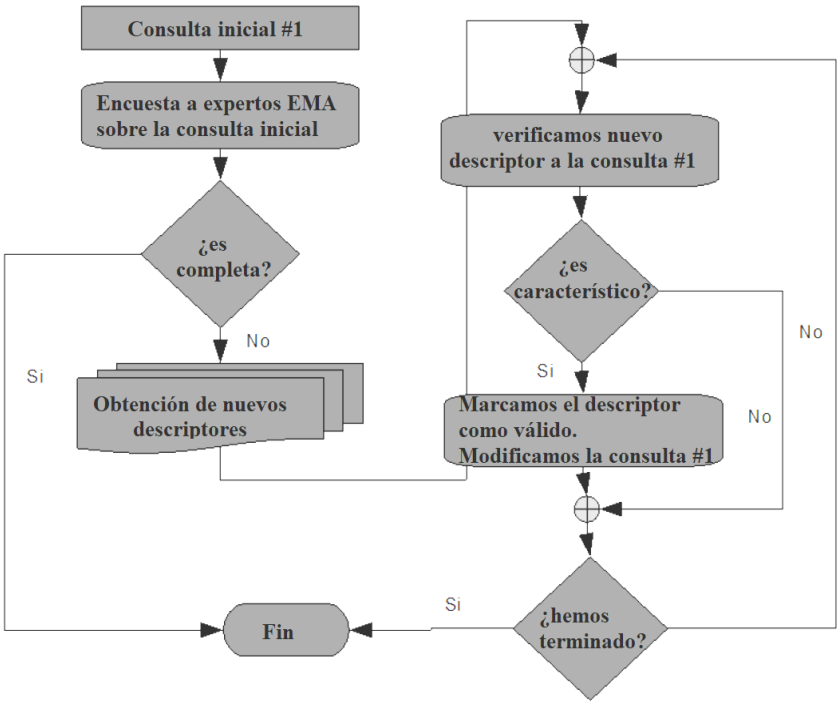
Figura 1. Diagrama de flujo utilizado en el proceso de revisión bibliométrica



Para la búsqueda de producción científica sobre pensamiento algebraico, utilizamos la base de datos Scopus, por ser una de las bases de mayor prestigio dentro de la Didáctica de la Matemática y por ser una de las de mayor cobertura a nivel de revistas y volumen de citación (Martín-Martín et al., 2021; Singh et al., 2021).

Para la obtención y validación de los conceptos descriptores para nuestra búsqueda, seguimos los pasos establecidos por Adamuz-Povedano et al. (2013), que detallamos en la Figura 2.

Figura 2. Proceso de elaboración del listado de descriptores



Nota. Figura extraída de Adamuz Povedano et al. (2013)

Con ayuda de cinco expertos en el tema de diferentes universidades españolas —distintas a las nuestras—, y universidades extranjeras, obtuvimos algunos términos, los cuales sometimos a validación. Una vez revisados, obtuvimos la siguiente fórmula:

"algebraic thinking" OR "functional thinking" OR "early algebra" OR "generalized arithmetic" OR "pattern generalization" OR "algebraic reasoning" OR "Arithmetic thinking" OR "algebraic representations" OR "variable notation" OR "symbolic notation" OR "algebraic notation" OR "School algebra" OR "Algebraic structure sense" OR "pre-algebra" OR "Algebraic skills" OR "Algebraic problem solving" OR "Algebraic achievement" OR "Algebraic symbolism" OR "Algebraic language" OR "arithmetic structure"

Con esta fórmula, obtuvimos una muestra inicial de 3.446 documentos, siendo descargados el día 18 de noviembre de 2022. Posteriormente, establecimos criterios de inclusión para obtener una muestra más refinada, la cual se ajusta a nuestros objetivos (a) año de publicación inicial abierto (1984) y final, hasta diciembre de 2021, (b) áreas temáticas (matemáticas, ciencias sociales y psicología), (c) tipos de documentos (artículos, capítulos de libros y libros) e (d) idiomas (inglés y español). Tras este filtrado realizado, obtuvimos 1.004 documentos. Descargamos estos registros en una base de datos Excel para proceder con el filtrado manual de los mismos, con la finalidad de seleccionar solo los documentos centrados en las etapas de educación infantil y primaria. Con esto obtuvimos una muestra final de 309 documentos.

Para analizar los datos, utilizamos los resultados que ofrece Scopus y el programa Bibliometrix (Aria y Cuccurullo, 2017).

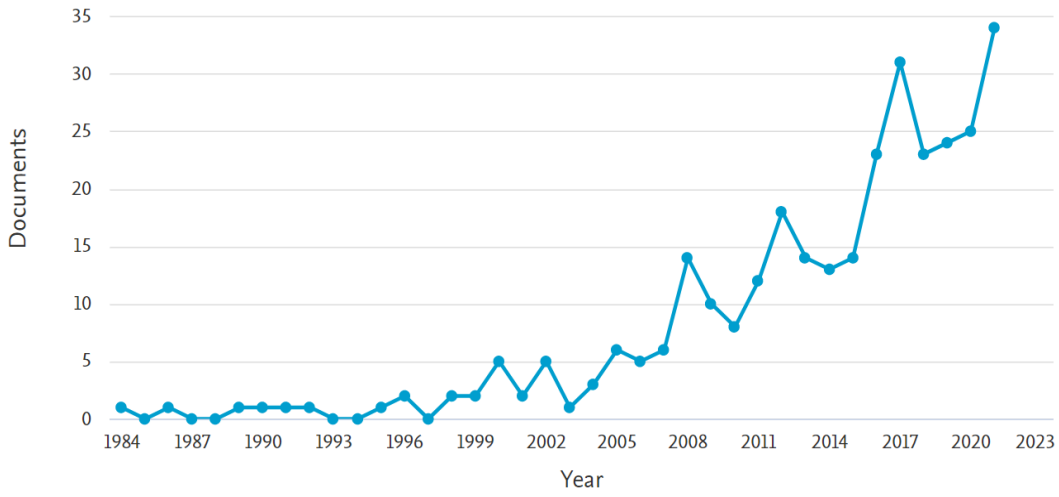
RESULTADOS

Detallamos a continuación datos obtenidos de nuestra muestra de 309 documentos:

- Existen 547 autores que han publicado sobre pensamiento algebraico, de los cuales 74 han realizado algún trabajo de forma individual.
- El promedio de documentos por año hasta el 2021 es de 9,33
- La media de citaciones por documento es de 19,67 aproximadamente.
- Existen 105 fuentes donde se han publicado los distintos trabajos.
- La tasa de crecimiento anual de publicación es del 10%.

La evolución diacrónica de esta producción se muestra en la Figura 3, observándose una tendencia creciente en este tema de investigación. La primera publicación indexada es en el año 1984. Los años posteriores las producciones sobre pensamiento algebraico en infantil y primaria fueron entre 0 y 1. A partir de 2005, la producción aumentó hasta llegar a 34 documentos publicados en 2021.

Figura 3. Producción diacrónica

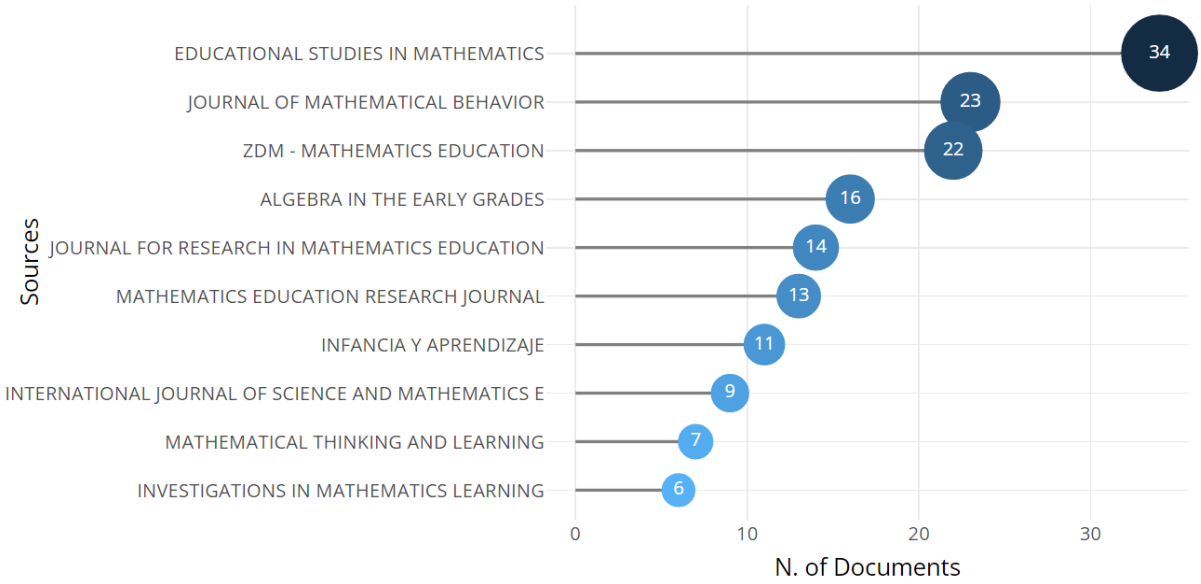


Nota. Figura extraída de Scopus

En cuanto a la tipología de documentos, teniendo en cuenta que hemos limitado la búsqueda a artículos, libros y capítulos de libro, obtenemos que un 83,8% son artículos, un 12,6% son capítulos de libros, y el resto (3,6%), son libros.

Respecto a las fuentes de publicación en Scopus, en la Figura 4 recogemos las revistas que han publicado una mayor cantidad de documentos relacionados con el pensamiento algebraico.

Figura 4. Fuentes de impacto



Nota. Figura extraída del programa Bibliometrix

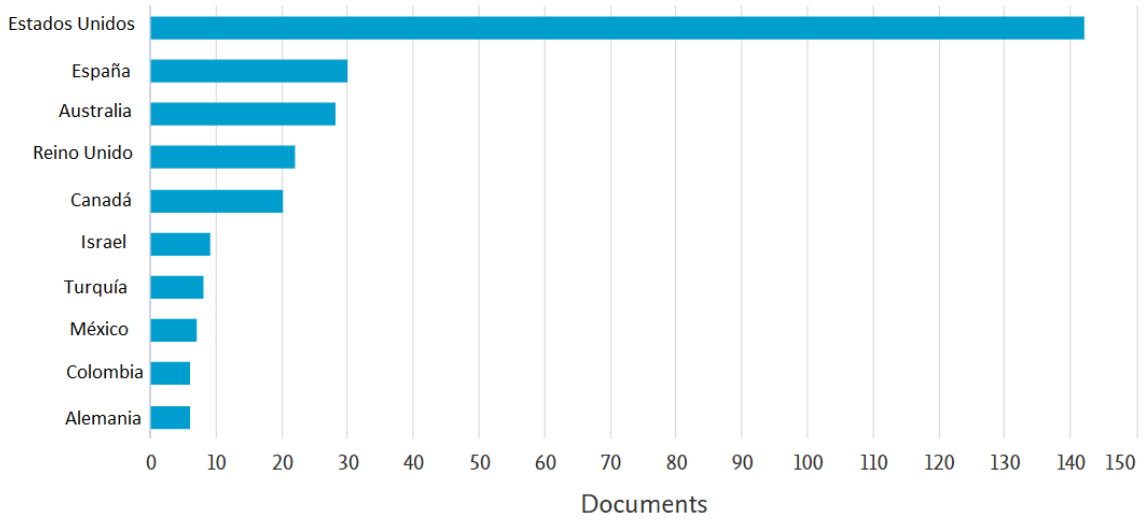
En lo referente a autores, en la Tabla 1 mostramos el listado de autores más productivos en la temática analizada, indicando los autores y las autoras que tienen hasta seis trabajos relacionados con el pensamiento algebraico en educación infantil o primaria. Se observa que la autora más productiva es María Blanton con 18 documentos en los años en los que hemos centrado el análisis, seguida de Bárbara Brizuela con 13 y Angela Gardiner y Eric Knuth con 10. Pertenecientes a universidades españolas, se encuentran María C. Cañadas (Universidad de Granada), con ocho y Marta Molina (Universidad de Salamanca) con seis.

Tabla 1. Listado de documentos por autor

Autores	Número de documentos
Blanton, Maria	18
Brizuela, Barbara M.	13
Gardiner, Angela M.	10
Knuth, Eric	10
Cañadas, María C.	8
Kaput, James J.	8
Stephens, Anne	8
Wilkie, Karina. J.	7
McNeil, N. M.	6
Molina, Marta	6
Radford, Luis	6
Strachota, Susanne.	6
Stroud, Rena.	6

Respecto a los países que más producciones tienen sobre el tema en Scopus, destaca Estados Unidos con 141 documentos incluidos en Scopus. Le siguen España, con 30 documentos y Australia, con 28. En la Figura 5 detallamos un gráfico con la cantidad de producciones realizadas por los 10 países que tienen una mayor cantidad de documentos sobre pensamiento algebraico indexados en Scopus.

Figura 5. Documentos por países



Nota. Figura extraída de Scopus

En Estados Unidos sobresale la Universidad de Wisconsin–Madison con 20 documentos y la Universidad Tufts con 17. La Universidad de Granada (España) sobresale en España con 20 documentos en Scopus. Por último, en Australia destaca la Universidad Católica Australiana con 8.

Con base en las palabras clave incorporadas por los autores, en la Tabla 2 mostramos los términos más usados en los trabajos analizados en nuestro estudio, cuya frecuencia es mayor a nueve.

Tabla 2. Lista de palabras claves con mayor uso de frecuencia dentro del pensamiento algebraico

Términos claves	Frecuencia
Early algebra	48
Algebra	43
Algebraic thinking	39
Algebraic reasoning	20
Functional thinking	19
Generalization	13
Mathematics education	12
Pattern generalization	9

Observamos que los términos *early algebra*, *algebraic thinking* y *algebra* son los que se han utilizado con mayor frecuencia dentro de los trabajos realizados sobre pensamiento algebraico. Además, sobresalen los términos pensamiento funcional, generalización de patrones y generalización, que coinciden con las distintas aproximaciones para abordar el pensamiento algebraico.

CONCLUSIONES

A través de un análisis bibliométrico cuantificamos e identificamos distintos componentes de la producción científica sobre pensamiento algebraico en Scopus. Presentamos una visión global sobre lo publicado desde 1984 hasta el año 2021 sobre este tema. Además, identificamos los autores que han investigado sobre pensamiento algebraico, fuentes donde se publican estos trabajos, países que más han producido en esta temática y palabras clave destacadas que usan los autores al publicar sobre pensamiento algebraico.

Al cuantificar la cantidad de producción científica, observamos que las publicaciones son un tercio de la cantidad total que produjo la fórmula inicial de búsqueda, pasando de 1004 a 309 documentos.

La mayoría de los documentos descartados para este trabajo estaban relacionados con investigaciones sobre pensamiento algebraico en cursos superiores a educación infantil y primaria. Hasta el año 2000 el pensamiento algebraico en las etapas de infantil y primaria no era una temática en la que la comunidad investigadora estuviera especialmente interesada, situación que ha cambiado en los últimos 20 años, cuando el interés es creciente. Molina (2009) indica que "el reconocimiento, reciente, de que los niños desde muy jóvenes pueden hacer mucho más de lo que se les suponía" (p. 138) ha impulsado el interés por investigar este tema. En el análisis por año evidenciamos que la investigación sobre pensamiento algebraico sigue en crecimiento y que es de gran interés para los investigadores en Didáctica de la Matemática.

Una gran cantidad de autores han escrito distintos trabajos, realizando investigaciones de forma individual o colaborativa. En el caso de España, destacamos que hay dos autoras entre las que más han publicado en Scopus sobre esta temática, y que España es el segundo país en número de producciones de pensamiento algebraico. En particular, sobresale la Universidad de Granada, con tantos trabajos publicados en Scopus como la universidad americana que más trabajos tiene (Wisconsin–Madison). Esto la sitúa en una posición destacada a nivel internacional en lo referente a pensamiento algebraico.

Al ser Scopus una base de datos donde se indexan mayormente revistas, la mayoría de los documentos que hemos obtenido son artículos científicos. Para la comunidad investigadora es un medio para mostrar aquellos avances relacionados con el pensamiento algebraico, lo que permite que otros investigadores, profesores o estudiantes interesados en el tema, puedan obtener la información necesaria. Esto es relevante también para los docentes, particularmente ahora que en España encontramos el sentido algebraico en el currículo de educación primaria de forma explícita (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).

Destacamos la contribución de este trabajo porque permite saber la situación sobre la producción en pensamiento algebraico, siendo este un tema actual, considerado en los ajustes curriculares de distintos países. Como lo expresaron Maz et al. (2009, p. 330) nos "aporta elementos objetivos para hacer identificable "quién es quién" en la Educación Matemática y establecer en cierta medida cuales son los núcleos de investigación y cuál es el nivel de actualidad y colaboración".

Como líneas abiertas, está pendiente actualizar las fechas del estudio, incluyendo el año 2022 y parte del 2023. Además, consideramos necesario realizar una revisión sistemática que dé respuesta a preguntas más específicas en las investigaciones en educación infantil y primaria sobre pensamiento algebraico, relativas a metodologías de investigación, tareas propuestas o edad de los estudiantes, por ejemplo. Otra línea abierta sería incluir otra base de datos como WOS, lo cual permitiría tener una visión más amplia de la producción científica sobre pensamiento algebraico.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y una Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075. También agradecemos a Ángel Alsina, Bárbara M. Brizuela, Juan Godino, Marta Molina, y Rodolfo Vergel por participar como expertos en la validación de los términos clave utilizados para este estudio.

Referencias

Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2013). Búsqueda de descriptores que caractericen una disciplina emergente en WoS y SCOPUS: el caso de la Educación Matemática. *Biblios: Revista Electrónica de Ciencias de la Información*, *50*, 1-15. https://doi.org/10.5195/BIBLIOS.2013.80

Aria, M. y Cuccurullo, C. (2017). Bibliometrix: An R-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics, 11*(4), 959-975. https://doi.org/10.1016/j.joi.2017.08.007

Becerra, L. D. A. (2014). Estudio bibliométrico sobre uso de métodos y técnicas cualitativas en investigación publicada en bases de datos de uso común entre el 2011-2013. *Revista Iberoamericana de Psicología, 7*(2), 67-76.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). PME.

Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 73*, 7-13.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). SEIEM.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Martín-Martín, A., Thelwall, M., Orduna-Malea, E. y Delgado López-Cózar, E. (2021). Google Scholar, Microsoft Academic, Scopus, Dimensions, Web of Science, and OpenCitations' COCI: a multidisciplinary comparison of coverage via citations. *Scientometrics, 126*(1), 871-906. https://doi.org/10.1007/s11192-020-03690-4

Maz, A., Torralbo, M., Hidalgo, M. y Bracho-López, R. (2009). Los simposios de la sociedad española de investigación en educación matemática: una revisión bibliométrica. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 323-331). SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 24386-24504.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: a systematic review from the MKT perspective. *Mathematics, 9*, 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V. y Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), em2065. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Singh, V. K., Singh, P., Karmakar, M., Leta, J. y Mayr, P. (2021). The journal coverage of Web of Science, Scopus and Dimensions: A comparative analysis. *Scientometrics, 126*(6), 5113-5142. https://doi.org/10.1007/s11192-021-03948-5

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in Kindergarten and First Grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

Zupic, I. y Čater, T. (2015). Bibliometric methods in management and organization. *Organizational Research Methods, 18*(3), 429-472. https://doi.org/10.1177/1094428114562629

CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN INFANTIL (0-3 AÑOS) PARA PROMOVER LOS INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Knowledge of early childhood education teachers (0-3 years) to promote the beginnings of algebraic thinking

Olmos-Martínez G.[a] y Alsina Á.[b]

[a]Escoles Bressol Municipals de Vic, [b]Universidad de Girona

Resumen

Las orientaciones contemporáneas sobre educación matemática en la etapa de Educación Infantil señalan la importancia de promover el desarrollo de las habilidades matemáticas en la primera infancia (0-3 años). Estas matemáticas emergentes, denominadas también intuitivas e informales, integran diferentes bloques de contenido; entre ellos, las acciones de reconocer, relacionar y observar los cambios en los atributos, que dan lugar a los cimientos que sustentan el pensamiento algebraico. A través de un diseño cuasi-experimental (Pre-Post), se han analizado los conocimientos de 28 profesionales de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic (Cataluña, España) para promover el inicio de este tipo de pensamiento, antes y después de un programa de formación. Los resultados muestran carencias significativas en la formación de los profesionales y la necesidad de actualizar la caracterización de los inicios del pensamiento algebraico de los 0 a los 3 años.

Palabras clave: *Matemáticas emergentes, pensamiento algebraico, conocimientos para enseñar matemáticas, formación continua, Escuela Infantil.*

Abstract

Contemporary guidelines on children's mathematics education point to the importance of promoting the development of mathematical skills in early childhood education (0-3 years). This emergent mathematics, also called intuitive and informal, integrates different blocks of content, including the actions of recognising, relating and observing changes in attributes, which give rise to the foundations that support algebraic thinking. Through a quasi-experimental design (Pre-Post), we have analysed the knowledge of 28 professionals of the Municipal Nursery School Network of Vic (Catalonia, Spain) to promote the beginnings of this type of thinking, before and after a training program. Results show significant shortcomings in the training of professionals and the need to update the characterisation of the beginnings of algebraic thinking from 0 to 3 years of age.

Keywords: *Emergent mathematics, early algebra, knowledge to teach mathematics, continuous training, prekindergarten.*

INTRODUCCIÓN

Diversos organismos y autores destacan la necesidad y la importancia de promover el desarrollo de las matemáticas emergentes desde las primeras edades (Geist, 2014) durante las situaciones de exploración, manipulación y juego, por ser el eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas más formales (NCTM, 2003). Estas primeras matemáticas se refieren, por un lado, a los conocimientos intuitivos que desarrolla el niño de una manera autoevidente, basándose en su certeza intrínseca, de forma global, no analítica (Fischbein, 1987) y, por otro lado, a los conocimientos matemáticos informales que se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, de una manera más natural y espontánea (Baroody, 1987).

Olmos-Martínez G. y Alsina, Á. (2023). Conocimiento del profesorado del primer ciclo de educación infantil (0-3 años) para promover los inicios del pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 419–426). SEIEM.

Alsina (2015), a partir de un estudio longitudinal de cinco años con más de 700 niños menores de 3 años, señala que estas primeras matemáticas giran en torno a las cualidades sensoriales, las cantidades discretas y continuas, las posiciones y las formas y los atributos mensurables. Para cada uno de estos aspectos, este autor describe diferentes tipos de acciones que los niños y las niñas pueden desarrollar, considerando las capacidades de identificar, relacionar y observar los cambios, siguiendo la categorización de tipos de actividades matemáticas en la infancia de Canals (1989). De este modo, en relación a las cualidades sensoriales, señala estas acciones: (1) el reconocimiento de los atributos de los elementos; (2) las relaciones entre los diferentes atributos, estableciendo así las primeras comparaciones; y (3) la observación de cambios en los atributos. Estas acciones promueven el desarrollo de habilidades matemáticas (Clements y Sarama, 2015), proporcionando una base esencial para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico. Autores como Mason (2008), Geist (2014), Clements y Sarama (2015) o Acosta y Alsina (2018) explican que los niños, de manera innata y natural desde edades muy tempranas, son capaces de adquirir nociones algebraicas elementales, por ejemplo el reconocimiento de patrones de repetición, y avanzar progresivamente hacia el proceso de generalización (Alsina, 2019; Papic et al., 2011).

Con base en estos antecedentes, Alsina (2015) señala que el reconocimiento de las cualidades y atributos sensoriales y las relaciones de naturaleza cualitativa que los niños y las niñas son capaces de establecer son, junto con el análisis de cambios cualitativos, el punto de partida para empezar el desarrollar el pensamiento algebraico a través del enfoque *early algebra*. De este modo, se refuerza la idea que, en las primeras edades, el conocimiento físico es un conocimiento preliminar imprescindible para promover el conocimiento matemático.

El concepto *early algebra* aparece para diferenciar el álgebra tradicional relativa a la Educación Secundaria como una actividad generadora del pensamiento algebraico que aparece en las primeras edades (Kaput 2008). Actualmente, son varios los currículos de Educación Infantil que han empezado a introducir de forma explícita conocimientos para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades (Pincheira y Alsina, 2021), en la línea señalada por autores y organismos como Carpenter et al. (2003) o el NCTM (2003). Cabe señalar que, en ningún caso, esta nueva corriente considera el álgebra como una asignatura más en los currículos de Educación Infantil, y se destaca únicamente como la manera de pensar y actuar sobre los objetos, las relaciones, las estructuras y situaciones matemáticas (Carpenter et al., 2003).

Diferentes autores como Geist (2014), Clements y Sarama (2015) o Björklund y Barendregt (2016) señalan la relación que existe entre los conocimientos, competencias y habilidades de los profesionales y las competencias y habilidades que desarrollan los infantes a los que acompañan. Además, existe una clara vinculación entre el conocimiento de los profesionales, el diseño de las propuestas y las ayudas que ofrecen al alumnado. Por consiguiente, el conocimiento del profesorado determina las acciones que van a poder desarrollar los niños y las niñas durante la educación infantil, las habilidades que van a ejercitar y las competencias que podrán adquirir.

Considerando estos antecedentes, el objetivo de este estudio, que forma parte de una investigación de mayor envergadura, es analizar cómo afecta una actividad de formación continua en el conocimiento que movilizan 28 profesionales de la Escuela Infantil (0-3 años) para promover los inicios del pensamiento algebraico.

CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE LA ESCUELA INFANTIL PARA PROMOVER EL INICIO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Alsina y Delgado (2021), a partir de diversos modelos de conocimiento como el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball et al., (2008). el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017) o el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) de Carrillo et al. (2018), junto con una revisión

exhaustiva de la literatura sobre educación matemática infantil (Alsina, 2020), han caracterizado un conjunto de conocimientos que necesita el profesorado de infantil para enseñar matemáticas, siguiendo la misma estructura de los modelos indicados, pero focalizándose en esta etapa educativa: los Conocimientos Matemáticos en Educación Infantil (CM-EI) y los Conocimientos Didácticos de las Matemáticas para la Educación Infantil (CDM-EI).

Dentro del CM-EI, en este estudio se considera el subtipo Conocimiento de las Matemáticas Emergentes (C-ME), en el que se encuentran descritos los conocimientos matemáticos emergentes vinculados al inicio del pensamiento algebraico. Los infantes, desde que nacen y a lo largo de los primeros tres años de vida, desarrollan las primeras acciones vinculadas a los inicios del pensamiento algebraico en situaciones informales de exploración, manipulación y juego (Tabla 1). De acuerdo con Alsina (2019), el profesorado de la Escuela Infantil debe tener un conocimiento amplio y profundo de estas matemáticas emergentes para poder diseñar los espacios de juego y exploración. A pesar de que estos conocimientos permean en los distintos estándares de contenido matemático, este estudio se focaliza exclusivamente en los vinculados a las cualidades sensoriales, al ser el eslabón para desarrollar conocimientos correspondientes a otros ejes, como ya se ha señalado.

Tabla 1. Acciones asociadas el inicio del pensamiento algebraico de 0 a 3 años.

Capacidades	Identificar (reconocer)	Relacionar (Comparar)	Operar (Transformar)
Contenidos	Reconocimiento de las características físicas de los objetos. Agrupaciones por criterios cualitativos.	Clasificaciones por criterios cualitativos. Correspondencias cualitativas. Ordenaciones por criterios cualitativos. Seriaciones.	Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.

Fuente: (Alsina, 2015 p. 34)

El reconocimiento de las características sensoriales, de acuerdo con Alsina (2015) incluye acciones como mirar, tocar, palpar, lamer, morder, etc., que en su conjunto permiten descubrir de qué están hechos los objetos y reconocer, poco a poco, sus características físicas. En cuanto a las agrupaciones según atributos cualitativos, este autor destaca que, al mismo tiempo que los niños y las niñas van descubriendo de qué están hechos los objetos, van reconociendo la existencia de diferentes objetos que comparten las mismas características (color, forma, textura, etc.).

Geist (2014) explica que aproximadamente al año, los niños y las niñas empiezan a crear estructuras de pensamiento en su cerebro en función de las cualidades que han ido descubriendo. Durante los primeros meses de vida, pues, empiezan a establecer estas primeras estructuras o categorías, como por ejemplo “cosas que son redondas”, “cosas que son suaves” o “cosas que no hacen ruidos fuertes cuando se golpean entre si porqué son suaves”. En este sentido, cada vez que tocan, ven o huelen, por ejemplo, lo recuerdan de cierta manera y construyen lo que Piaget y Inhelder (1967) definen como esquema de pensamiento. Para los infantes, estos esquemas son muy concretos y están directamente relacionados con sus sentidos y con la actividad motora, pero en ningún caso son simples. El desarrollo de este pensamiento está estrechamente vinculado con una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Alsina, 2019).

Diferentes autores (e.g., Alsina, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Ginsburg et al., 1998) señalan que el niño, al tiempo que identifica las características de los elementos, también las relaciona y las compara. En esta línea, Piaget y Inhelder (1967) ya indicaron que, en primer lugar, los niños y las niñas perciben las cualidades de los objetos a partir de las relaciones de similitud y diferencia y, en segundo lugar, según van comprendiendo las relaciones que se dan entre los objetos, van desarrollando una estructura de pensamiento más elevada que les permite hacer

clasificaciones y seriaciones. Las clasificaciones de elementos según criterios cualitativos van un paso más allá de la identificación de las cualidades sensoriales, implicando un salto en el desarrollo del pensamiento matemático del niño (Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014).

Geist (2014) ofrece rangos de edades sobre el momento en que aparecen estas primeras clasificaciones. Entre los 12-18 meses las clasificaciones suelen ser imples por un solo criterio cualitativo y, posteriormente, entre los 18-24 meses, la clasificación acostumbra a ser más compleja y aparecen clasificaciones múltiples con objetos de una misma colección, pero bajo criterios cualitativos diferentes.

En relación con las correspondencias cualitativas, Alsina (2015) explica que hacen referencia a la capacidad para hacer asociaciones o apareamientos según criterios cualitativos. Por ejemplo, cuando se relacionan dos elementos del mismo color. Y en cuanto a las ordenaciones, el criterio parte de la comparación entro los diferentes objetos sobre la cantidad del atributo que se está comparando. Por ejemplo, la gradación del color de un rosa pálido a un rosa intenso.

Respecto a las seriaciones, en las primeras edades se consideran como las acciones vinculadas a las repeticiones de un patrón (AB). Clements y Sarama (2015) explican que la amplitud de formas en que se utiliza el término "patrones" denota, por un lado, la importancia de estos para el aprendizaje de las matemáticas y, por otro lado, la complejidad que abarca el concepto. De hecho, los mismos autores explican que existen diferentes tipos de patrones y destacan la importancia de favorecer contextos educativos que los favorezcan. En este sentido, exponen que el concepto de "patrón" va mucho más allá de los patrones repetidos secuenciales y los definen como una búsqueda de regularidades y estructuras matemáticas, como un proceso y un hábito mental importantísimo. Por tanto, exponen que, aunque se considera que los patrones en las primeras edades hacen referencia a la práctica de hacer seriaciones con dos elementos (AB), estas cadenas repetitivas pueden ser útiles, pero en ningún caso se pueden considerar como los únicos procedimientos a desarrollar. Aunque en la Escuela Infantil las seriaciones a partir de patrones de repetición sean muy simples, Clements y Sarama (2015) proponen prácticas de patrones perceptuales (como patrones de dominó subitizados, patrones de dedos o patrones auditivos), patrones de conteo o patrones espaciales.

Finalmente, en relación con los cambios cualitativos que se producen en los objetos y en el entorno inmediato, se produce una transformación de una situación inicial dando lugar a una situación final diferente, a través de un operador. Son cambios que pueden presentar los mismos objetos o cambios en el entorno, y que de alguna manera modifican las características del mismo objeto (por ejemplo, "ser más alto").

Fruto del análisis exhaustivo que hacen los niños y las niñas de las cualidades de los objetos y de las relaciones que se establecen entre ellos, descubren principios matemáticos fundamentales como por ejemplo el principio de causalidad, entre los 6-9 meses aproximadamente (Geist, 2014). Otro aspecto clave para el desarrollo del pensamiento matemático aparece entre los 24 a 36 meses, aproximadamente, cuando, según Geist (2014), los niños y las niñas desarrollan un pensamiento representativo a través del lenguaje, dibujos y objetos.

METODOLOGIA

Se ha diseñado un estudio cuasi-experimental (Creswell, 2009) en el que, antes y después de una actividad de formación, se ha analizado el conocimiento de 28 profesionales de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic-EBMV para promover los inicios del pensamiento algebraico de niñas y niños menores de 3 años. La muestra ha sido seleccionada de manera intencionada, de forma no aleatoria, participando en el estudio 16 maestras, 1 maestro y 11 técnicas de Educación Infantil, de entre 23 y 60 años.

Para analizar el conocimiento de los participantes en el estudio, se diseñó y validó el Cuestionario "Conocimientos Didáctico-Matemáticos en la Escuela Infantil" (CDM 0-3). En concreto, se propuso a 10 expertos de diferentes universidades y de distintas escuelas infantiles que validasen el cuestionario y se incorporaron sus aportaciones en el instrumento. Este cuestionario es personal, con presencia del encuestador y semiestructurado. Su diseño contiene dos tipos de ítems: por un lado, incluye preguntas cerradas para controlar las variables a las que se ha dado un trato propio de la investigación cuantitativa y, por otro lado, preguntas abiertas para determinar los conocimientos matemáticos a partir de un análisis categórico mixto. En este estudio en concreto se analizan los datos correspondientes a dos de las preguntas abiertas: una consiste en detectar en las imágenes de los espacios y materiales de las distintas aulas de las escuelas, los conocimientos matemáticos relativos al pensamiento algebraico (a partir de imágenes de cada espacio debían anotar qué conocimientos identificaban), y la otra pregunta recoge información relativa al diseño de las programaciones de los profesionales, para analizar los contenidos matemáticos. Además, se analizaron también las planificaciones de los diseños de espacios y materiales con contenido matemático que prepara el profesorado.

Los cuestionarios han mantenido un carácter anónimo, pero a los participantes se les asignó un código para poder identificar y emparejar los cuestionarios de la fase pre con la fase post. A partir del marco de referencia (Tabla 1), previamente, se establecieron las categorías sobre los conocimientos vinculados al pensamiento algebraico. Las respuestas se han transformado en datos numéricos (por frecuencias de aparición) y, dándoles un tratamiento estadístico mediante el programa SPSS, se ha desarrollado el análisis. Las categorías se han descrito según el número y el porcentaje de casos de cada categoría. Las variables continuas han sido descritas mediante estadísticos de tendencia central como la mediana y la desviación estándar.

RESULTADOS

Los datos recogidos mediante el cuestionario muestran diferencias entre el pre y el post. Después de la formación que, en uno de los bloques, se centró en la observación, documentación e interpretación de acciones matemáticas en la Escuela Infantil en torno al pensamiento algebraico, la frecuencia de aparición de las acciones detectadas en las imágenes del cuestionario aumenta el 154.05% (de 37 acciones detectadas antes de la formación se pasa a 94 después). Las acciones que mayor crecimiento han tenido son las asociadas a las agrupaciones de elementos según las cualidades sensoriales, que han pasado de solo un participante (3.6%) a veinte (72%), seguido de las clasificaciones cualitativas, que ha pasado de seis (21.6%) a veinte (72%). Aun así, los datos presentan también diferencias en función del contenido o la capacidad a qué se refiere. Por un lado, aparecen otras acciones con una fuerte recurrencia y otros poco frecuentes. Ejemplo de ello son las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos, que ni antes ni después de la formación aparecen de manera recurrente. Por lo contrario, la identificación de cualidades sensoriales aparece tanto en el primer cuestionario como en el segundo, con una extensa mayoría, 24 (86.4%) y 26 (93.6%) profesionales que respectivamente identificaban este contenido.

En relación con las programaciones respecto el diseño de los espacios y materiales, existe un aumento significativo de la presencia de objetivos programados vinculados a las acciones de identificar, relacionar u observar cambios en las cualidades sensoriales pasando de 6 objetivos diseñados antes de la formación a 43 post formación.

Mediante el análisis de la documentación, los resultados muestran que antes de la formación los profesionales no planificaban las propuestas considerando como podían desarrollar los niños y las niñas el pensamiento algebraico, y no habían desarrollado ninguna planificación, ni programación, donde recogiesen los contenidos matemáticos que favorecían con el diseño de sus propuestas. Después de la formación, los profesionales incorporaron en el diseño de los espacios y materiales contenido matemático. Tal y como muestra la Figura 1, en función del nivel educativo los contenidos

y capacidades identificados fueron diferentes. En el nivel de Infantil 0 los profesionales han planificado 10 actividades vinculadas al reconocimiento de las cualidades sensoriales y 2 a las correspondencias. Los profesionales de Infantil 1 han planteado un mayor número de actividades que Infantil 0 con un mayor número y diversidad de contenidos matemáticos. Concretamente, los únicos contenidos que no destacan en este nivel son la observación de cambios cualitativos. Finalmente, en el nivel de Infantil 3 siguen aumentando significativamente el número de contenidos respecto a Infantil 0 (I0) e Infantil 1 (I1) apareciendo contenidos de todas las capacidades descritas, con la presencia de acciones como clasificar, seriar, ordenar y observar los cambios. Claramente, aumentan las propuestas diseñadas a medida que avanzan los curos de la Escuela Infantil.

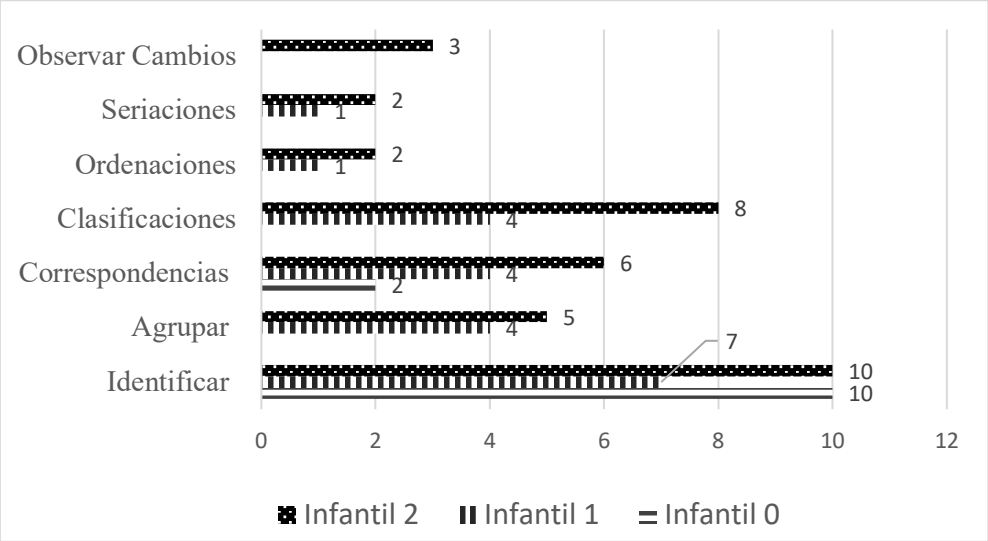


Figura 1**.** Planificación de propuestas con contenido vinculado a acciones en torno las cualidades sensoriales diseñados por los profesionales post formación.

CONSIDERACIONES FINALES

Los datos obtenidos en este estudio muestran que hay un cambio significativo en el conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento algebraico después de la formación continua, que se refleja en la práctica docente de los profesionales, tanto en el diseño de los espacios y materiales como en sus programaciones. En este sentido, los profesionales son capaces de detectar mayor número de contenidos. Además, incorporan con mayor frecuencia en sus planificaciones propuestas para favorecer la aparición de acciones vinculadas al pensamiento algebraico, a partir de las acciones de identificar, reconocer, ordenar, comparar, seriar, etc. (Alsina, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Ginsburg, et al., 1998) que, de forma natural e innata (Mason, 2008; Acosta y Alsina, 2020), dan lugar al inicio del proceso de generalización (Papic et al., 2011).

Aun así, aparecen contenidos poco frecuentes como, por ejemplo, las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos. Ello puede explicarse por la desvinculación del pensamiento algebraico en las primeras edades con las acciones de clasificar, ordenar, que son distintos tipos de relaciones.

En este sentido, Alsina (2015) sugiere que las acciones de identificar las características de los objetos y establecer relaciones entre ellas son la base necesaria para empezar a desarrollar el pensamiento algebraico, que incluye un conjunto de capacidades que implican representar, generalizar, formalizar patrones y regularidades (Godino y Font, 2003). Estos aspectos están estrechamente vinculados a los procedimientos de seriar, clasificar y relacionar, siendo claves en el corazón de las matemáticas y palpables en cualquier nivel educativo (Clements y Sarama, 2015). De hecho, en la formación se

introdujeron contenidos directamente vinculados con el álgebra temprana y estos fueron fácilmente incorporados por los profesionales. Los datos recogidos reflejan cómo, antes de la formación, los profesionales describían de forma recurrente solo algunos de los contenidos vinculados con el álgebra temprana; mientras que, una vez desarrollada la formación, podían hablar con seguridad y aportar una definición clara y completa sobre los contenidos propios de este bloque de contenido. Aun así, no todos los contenidos fueron incorporados de la misma manera, ni por todos los participantes.

De modo general, se concluye que los conocimientos matemáticos en torno a las acciones que permiten desarrollar el pensamiento algebraico de los profesionales antes de la formación eran insuficientes y que después de la formación continua se han enriquecido y ampliado, pero algunas creencias equívocas sobre qué matemáticas desarrollan los niños en las primeras edades y como se pueden favorecer están tan arraigadas, que los profesionales requieren de una formación más extensa que les permita implementar y consolidar los conocimientos introducidos. Por ello, para futuras investigaciones, sería necesario indagar en los diseños y contenidos de los programas de formación inicial analizando qué conocimientos disciplinares y didácticos se están introduciendo en los diferentes planes de estudio valorando si facilitan los conocimientos y estrategias necesarias para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en estas primeras edades (0-3).

Referencias

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, *45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310

Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*, 1-19 https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Alsina, Á., y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *52*, 218-235. https://rb.gy/gymq6m

Alsina, Á., y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. *ReviSeM: Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, *6*, 1-23 https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16003

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.

Björklund, C., y Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 60*(3), 359-377. https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426

Canals, Mª. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola: I. Parvulari.* Eumo Editorial.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán; Mª.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*, 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements, H.D., y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.

Creswell, J.W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed approaches*. Sage.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Reidel.

Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.

Ginsburg, H. P., Klein, A., y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research and practice. En I.E. Siegel y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (Vol. 4, pp. 401-476). John Wiley y Sons.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Granada*. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. https://rb.gy/9qxvst

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah.

National for Council Teachers of Mathmatics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Papic, M.M., Mulligan, J.T., y Mitchelmore, M.C. (2011). Assessing the development of preschoolers Mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Piaget, J., y Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. W. W. Norton & Company, Inc.

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

CARACTERIZACIÓN DE TAREAS DE INECUACIONES PROPUESTAS EN TEXTOS ESCOLARES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Characterization of inequality tasks proposed in primary school textbooks

Pacheco, E[a]., Ayala-Altamirano, C[b]. y Molina, M.[c]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Málaga, [c]Universidad de Salamanca

Resumen

El objetivo de esta comunicación es caracterizar tareas en textos escolares chilenos de 4° y 5° curso (9 y 10 años) de primaria sobre el significado y estructuras de las inecuaciones, y relacionarlos con las representaciones y la demanda cognitiva involucradas. Se realiza un estudio cualitativo y descriptivo de las tareas, considerando el significado del concepto de inecuación, la estructura sintáctica de las expresiones, el tipo de representación y la demanda cognitiva. Los resultados muestran que los textos proponen tareas con diversos significados, pero con baja demanda cognitiva y las inecuaciones se representan mayoritariamente de manera simbólica alfanumérica. Se concluye necesario enriquecer el diseño de tareas para la enseñanza de inecuaciones, considerando las categorías propuestas para visualizar qué elementos mejorar.

Palabras clave: *álgebra temprana, caracterización de tareas, educación primaria, inecuaciones.*

Abstract

The aim of this paper is to characterise tasks in Chilean textbookss of 4th and 5th grade (9 and 10 years old) of primary school on the meaning and structures of inequalities, and to relate them to the representations and cognitive demand involved. A qualitative and descriptive study of the tasks is carried out, considering the meaning of the concept of inequality, the syntactic structure of the expressions, the type of representation and the cognitive demand. The results show that the texts propose tasks with diverse meanings, but with low cognitive demand and that inequalities are mostly represented in a symbolic alphanumeric way. It is concluded that it is necessary to enrich the design of tasks for the teaching of inequalities, considering the proposed categories in order to visualise which elements to improve.

Keywords: *early algebra, task characterization, primary education, inequalities.*

INTRODUCCIÓN

En la literatura se distinguen variedad de enfoques para introducir y abordar la enseñanza del álgebra escolar. Entre ellos se encuentra el denominado "equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones" (Blanton et al., 2018), en el cual se enmarca este trabajo. Nuestro objeto de estudio son las inecuaciones en el contexto de educación primaria.

El estudio de las desigualdades e inecuaciones en educación primaria es considerado en las directrices curriculares chilenas desde hace más de una década (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012). Mientras que, en España, esta temática ha sido introducida en la última actualización (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).

Las investigaciones que abordan dichas nociones en educación primaria son escasas. Warren (2006) observó en estudiantes (8 a 10 años) una comprensión limitada de conceptos tales como: más, menos, igual y entre, palabras usadas en la equivalencia y la no equivalencia. Mientras que, la Agencia de Calidad de la Educación de Chile (2019) observa que estudiantes (9 años) en pruebas

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2023). Caracterización de tareas de inecuaciones propuestas en textos escolares de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 427–434). SEIEM.

estandarizadas nacionales e internacionales tienen dificultades en las tareas sobre inecuaciones dado que las resuelven como si fueran ecuaciones. Un mayor número de estudios se centran en secundaria, y por lo general su foco son las dificultades que manifiestan los estudiantes (p. e., Garrote et al., 2014).

El análisis de textos escolares es una línea de investigación que contribuye a la mejora en la elaboración de futuros textos escolares y diseño de tareas por parte del profesorado (Schubring y Fan, 2018). La importancia y el aporte de los textos recae en garantizar que el estudiantado reciba la enseñanza y los aprendizajes de manera equilibrada, precisa y objetiva en mejora de la calidad de la educación. En la literatura encontramos propuestas de diversidad de categorías para caracterizar las tareas. Estas atienden a la demanda cognitiva de las mismas, las representaciones que incluyen, los conocimientos en juego, las acciones que solicitan al estudiante y funciones de la tarea en una secuencia de enseñanza, como principales dimensiones (p. e., Moreno y Ramírez, 2016).

Motivados por la carencia de trabajos centrados en inecuaciones en primaria y el rol de los textos escolares en el aula, buscamos complementar dichas investigaciones, proponiéndonos como objetivo caracterizar tareas en los textos escolares chilenos de 4° y 5° curso (9 y 10 años) de educación primaria sobre el significado y estructuras de las inecuaciones, y relacionarlos con las representaciones y la demanda cognitiva involucrados en las tareas.

INECUACIONES Y SU ESTRUCTURA SINTÁCTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

El pensamiento algebraico se caracteriza por estar relacionado con las prácticas de generalizar, representar, justificar y razonar con estructuras, y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011). En el trabajo con desigualdades e inecuaciones se ponen de manifiesto dichas prácticas donde se busca desarrollar una comprensión relacional de los signos de desigualdad, así como razonar con expresiones, plantear y resolver inecuaciones (Blanton et al., 2018).

Entenderemos por inecuación una forma de describir una relación de desigualdad entre dos expresiones algebraicas, que involucran una cantidad desconocida o incógnita (Lloyd et al., 2011, p.38). Resolver una inecuación consiste en determinar todos los posibles valores de la incógnita que satisfacen la inecuación (Martínez y Varas, 2013, p.136).

La desigualdad e inecuación puede interpretarse con dos significados distintos: comparativo y restrictivo, en la Tabla 1 describimos estos significados. Paoletti et al. (2021) señalan una línea abierta de investigación es profundizar en el estudio de estos significados para hacer conexiones que favorezcan con las relaciones entre los tipos de desigualdades (comparativa y restrictiva) y conectar sus técnicas algebraicas.

Tabla 1. Significados de inecuaciones

Categoría	Subcategoría	Indicador
Significado del concepto inecuación (Paoletti et al., 2021)	Comparativo	Refiere a comparar cantidades. La tarea motiva a razonar sobre magnitudes relativas a los valores numéricos de dos o más cantidades. Por ejemplo, en la expresión $3x \leq 6$, se compara dos expresiones distintas $3x$ y 6 (constante y variable desconocida) las que se comparan.
	Restrictivo	La tarea motiva a razonar sobre un rango o intervalo de magnitudes o valores de una cantidad. En el enunciado o expresión, plantea restricción solo en el valor del dato desconocido. Por ejemplo, en la expresión $3x \leq 6$ con restricción en los valores de x, por lo que x es el conjunto de todos los valores de $x \leq 2$.

Un elemento clave para desarrollar el pensamiento algebraico es el razonar sobre estructuras. En el contexto de las inecuaciones la estructura es la forma en que los elementos de la inecuación se organizan y relacionan. En este trabajo indagamos en el análisis sintáctico centrado en la estructura externa o superficial (Vega-Castro, 2012). Kieran (2022) por su parte, refiere al pensamiento

estructural considerado como componente del pensamiento algebraico, distinguiendo una serie de elementos, tales son: relaciones, propiedades y estructura al interior de los números, operaciones y expresiones, siendo de atención para este estudio algunos de ellos, para esto nos centramos en los elementos descritos en la Tabla 2.

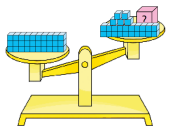
Tabla 2. Análisis sintáctico de las expresiones

Categoría	Subcategoría	Indicador
Análisis sintáctico (Vega-Castro, 2012)	Operatorias	Suma, resta, multiplicación, división. Selección de operación (el resolutor decide qué operatoria utilizar para desarrollar la tarea). No presenta operatoria (relación entre dos números).
	Ubicación del dato desconocido	Dato desconocido a la derecha. Dato desconocido a la izquierda. Ambos lados (resolutor ubicará el dato desconocido). No presenta (limita a una desigualdad numérica con datos dados).
	Representación de variables	Letra *x*; Otras letras; Figuras (geométricas o imágenes); No presenta (resolutor decidirá qué tipo de variable utilizar).
	Relación de desigualdad	Implementación signos >, <, ≥, ≤. Relación entre signos (>, <, ≥, ≤). No presenta (la tarea motiva a expresar y crear, el resolutor plasmará la dirección del símbolo).

REPRESENTACIÓN Y DEMANDA COGNITIVA EN TAREAS ESCOLARES

Presentar diversas representaciones contribuye a una caracterización más profunda de los objetos matemáticos (Carraher et al., 2008) y proveen a los estudiantes herramientas para pensar matemáticamente y comunicar sus ideas (NCTM, 2007). En la Tabla 3 se presentan distintas formas de representar las inecuaciones.

Tabla 3. Tipo de representaciones

Categoría	Subcategoría	Indicador
Representación incluida en las tareas (Carraher et al., 2008)	Verbal	Ocurren por medio del lenguaje natural, vía escrita u oral. "Carlos práctica ciclismo. El máximo de velocidad es 30 km/h. Ya ha alcanzado los 25 km/h, ¿cuántos km/h puede aumentar la velocidad sin igualar o superar el máximo permitido".
	Pictórica	Comprenden características visuales, donde los elementos son representados mediante imágenes o dibujos. 
	Simbólica	Numérica, comprenden números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático. Alfanumérica, conciernen al lenguaje algebraico alfanumérico a través de expresiones que involucran números y/o letras y operaciones aritméticas. Por ejemplo, 30 > 25 + ?.
	Múltiple	Involucran representaciones de dos o más tipos.

Pero no solo las representaciones son importantes al momento de contribuir en el desarrollo de un pensamiento algebraico más profundo, también es clave presentar tareas con distinta demanda cognitiva. Nos basamos en la propuesta de Smith y Stein (1998) quienes desarrollan cuatro niveles de demanda, descritos en la Tabla 4. Investigaciones que han empleado estas categorías en el área de la matemática han concluido que es necesario incluir tareas con exigencias cognitiva mayor (p.ej., Pincheira y Alsina, 2021) y que este tipo de tareas puede ser útil para trabajar aspectos transversales del currículo e identificar estudiantes con altas capacidades (p. ej., Manero et al., 2021).

Tabla 4. Nivel de demanda cognitiva

Categoría	Subcategoría	Indicador
Nivel de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998)	Memorización	Reproducen hechos, reglas o fórmulas ya aprendidos, además, lo que debe reproducirse está claramente indicado y no son ambiguas.
	Proceso sin conexión	Producen respuestas correctas. No tiene conexión con los conceptos subyacentes al procedimiento en uso. Estas no requieren explicación o se centra en describir el procedimiento.
	Proceso con conexión	Se representan de diversas maneras y se conectan modos de representación. Centran la atención en uso de procedimientos para desarrollar mayores niveles de comprensión de ideas y conceptos matemáticos.
	Hacer matemáticas	Demandan un pensamiento complejo y no algorítmico, de igual modo exploración de conceptos, procesos y relaciones, así como el análisis de la tarea en busca de restricciones que determinen posibles soluciones y estrategias. Requieren un considerable esfuerzo cognitivo.

MÉTODO

En este estudio seguimos un enfoque cualitativo y descriptivo (Fernández et al., 2014). Se analizan textos escolares chilenos[i] seleccionados según dos criterios: (a) abordan el contenido de inecuaciones y (b) son distribuidos de modo gratuito por el Ministerio de Educación, en colegios públicos y concertados, por tanto, son de amplio uso. Como resultado se eligen dos proyectos de dos editoriales distintas. En cada curso los proyectos están compuestos por: un texto para el estudiante, un cuaderno de ejercitación y un texto para el docente. En total se analizaron 209 tareas.

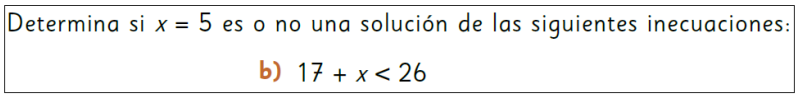
Organizamos los textos escolares con las siglas S1 y S2 corresponden a las editoriales (Sumo Primero y Santillana, respectivamente), los números que le acompañan 4 y 5 corresponden al nivel educativo (9 y 10 años), por tanto, la nomenclatura queda conformada en S1-4, S1-5, S2-4 y S2-5.

Análisis de datos

Cada una de las tareas se caracterizó considerando las categorías descritas en las Tablas 1, 2, 3 y 4. Realizamos un conteo frecuencia absoluta y porcentual de los datos con el fin de tener una visión general de los textos escolares con relación a las tareas de inecuaciones.

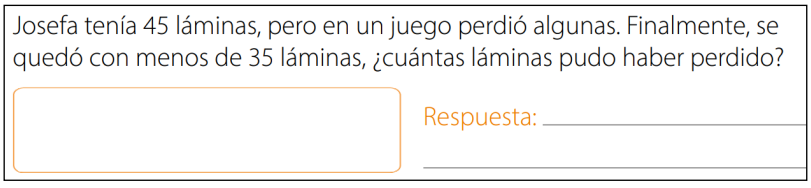
A continuación, ilustramos el análisis con dos ejemplos. La tarea que se muestra en la Figura 1 el significado asociado a la inecuación es comparativo. Mientras en la Figura 2, es restrictivo.

Figura 1. Ejemplo de tarea con significado comparativo



Fuente. Texto S1-5

Figura 2. Ejemplo de tarea con significado restrictivo



Fuente. Texto S2-4

La Figura 1, presenta un nivel de demanda de procedimiento sin conexión, previamente en el libro se ha presentado un procedimiento para su resolución, siendo una tarea algorítmica. Su representación corresponde al tipo simbólica. El análisis sintáctico corresponde al uso de la suma, ubica el dato desconocido a la izquierda, se representan cantidades desconocidas empleando una letra y el símbolo menor que (<).

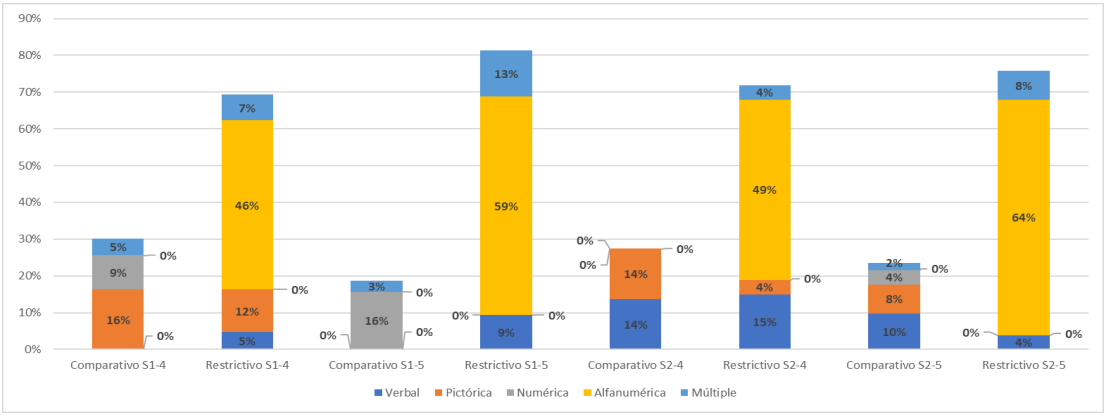
Respecto a la Figura 2, evidencia un nivel de demanda procedimiento con conexión. El tipo de representación empleada es verbal (lenguaje escrito). Referente al análisis sintáctico comprende el uso de la resta y el dato desconocido se ubica según cómo plantee la situación el resolutor (p. ej., $45 - x < 35$; $35 > 45 - x$).

Tras caracterizar todas las tareas por separado y para profundizar en la caracterización de las propuestas de los textos escolares se establecieron relaciones entre las categorías significado de la inecuación, representación y demanda cognitiva.

RESULTADOS

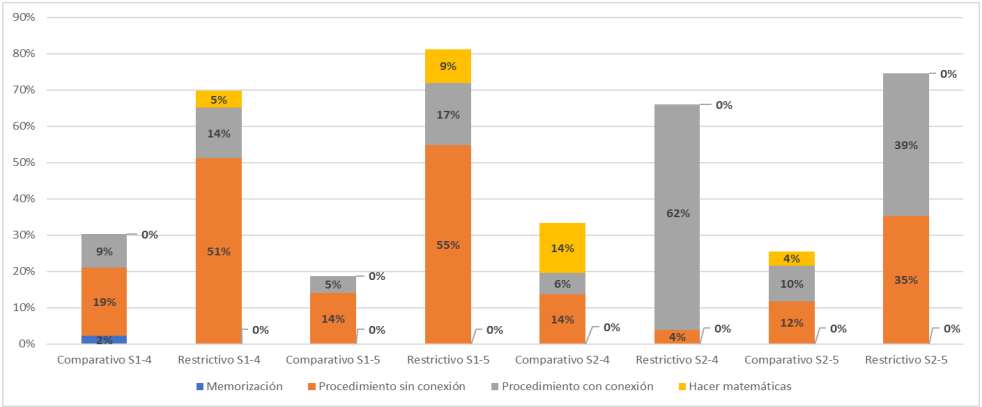
En los textos se observa un predominio de tareas relacionadas con el significado restrictivo, dando cuenta que el objetivo de la mayoría de las tareas es calcular un rango de valores para hacer verdadera la inecuación. En la Figura 3 se relacionan los significados con las representaciones. Se observa variedad de representaciones para ambos significados. No obstante, en las tareas con significado restrictivo hay un predominio de representaciones simbólicas alfanuméricas, que aumentan en cantidad en el tránsito de 4° a 5° curso. Respecto al significado comparativo, en la S1-4 y 5 predomina de tipo pictórica y numérica (respectivamente), luego en la S2 las representaciones verbales y pictóricas en cuarto y verbal en quinto curso.

Figura 3. Cantidad porcentual de tareas con significado de inecuación y su relación con la representación



Al contrastar los significados con la demanda cognitiva de las tareas (ver Figura 4) se observa que la S1 está compuesta mayoritariamente por tareas de baja demanda, para ambos significados. Mientras que la S2 en el significado restrictivo presenta un mayor número de tareas con alta demanda cognitiva.

Figura 4. Cantidad porcentual de tareas con significado de inecuación y su relación con la demanda cognitiva



En la tabla 5 se muestra el análisis sintáctico de las tareas. En los textos la mayoría de las tareas establecía relaciones entre expresiones que incluían operaciones aritméticas, siendo la suma la predominante. El texto S2-5 plantea tareas donde estudiantes podrían resolver tanto por la suma

como por la multiplicación. Sobre la ubicación del dato desconocido, las expresiones en su mayoría incluyen solo una incógnita y prevalece su ubicación en el lado izquierdo del signo de desigualdad.

En lo que concierne a la representación de las cantidades desconocidas, predomina el uso de la letra *x* en S1-5 y S2-4 y 5. Debemos destacar que S2-5 implementa el uso de diversas letras (*a, m, n, p, q, s, w, x, y, z*). En S1-4 se observa el uso de figuras geométricas (triángulo, cuadrado y cubo) e imágenes (sacos). Para representar la relación de desigualdad, en las dos series se observa la utilización de > y <. Solo en S1-5 usan los símbolos ≥ y ≤.

Tabla 5. Análisis sintáctico

Categoría	Subcategoría	Libros de textos			
		S1-4	S1-5	S2-4	S2-5
Operatorias	Suma	37(86,04%)	58(90,62%)	20(39,21%)	36(70,58%)
	Resta	0	2(3,12%)	14 (27,45%)	10(19,60%)
	Multiplicación	0	0	0	0
	División	0	0	0	0
	Selección de operatoria	0	0	0	2(3,92%)
	No presenta operatoria	6(13,95%)	4(6,25%)	17(33,33%)	3(5,88%)
Ubicación del dato desconocido	Derecha	5(11,62%)	0	10(19,60%)	13(25,49%)
	Izquierda	35(81,39%)	55(85,93%)	23(45,09%)	31(60,78%)
	Ambos lados	2(4,65%)	9(14,06%)	18(35,29%)	7(13,72%)
	No presenta	1(2,32%)	0	0	0
Representación del dato desconocido	Letra x	0	57(89,06%)	25(49,01%)	23(45,09%)
	Otras letras	0	0	0	21(41,17%)
	Figuras	40(93,02%)	0	11(21,56%)	0
	No presenta	3(6,97%)	7(10,93%)	15(29,41%)	7(13,72%)
Relación de desigualdad	Implementación de signos >	18(41,86%)	10(15,62%)	18(35,29%)	21(45,09%)
	Implementación de signos <	22(51,16%)	26(40,62%)	17(33,33%)	23(45,09%)
	Implementación de signos ≥	0	7(10,93%)	0	0
	Implementación de signos ≤	0	7(10,93%)	0	0
	Relación entre signos	0	5(7,81%)	0	0
	No presenta	3(6,97%)	9(14,06%)	16(31,37%)	7(13,72%)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio fue caracterizar tareas en textos escolares chilenos de 4° y 5° curso (9 y 10 años) de primaria sobre el significado y estructuras de las inecuaciones, y relacionarlos con las representaciones y la demanda cognitiva involucradas, contribuyendo a una temática escasamente abordada en la literatura en niveles de primaria que tiene relevancia a nivel curricular. Para ello hemos analizado 209 tareas de dos proyectos editoriales de gran uso en Chile.

Los resultados muestran que en las tareas se promueven significados comparativos y restrictivos de las inecuaciones, siendo estas últimas las que predominan. Paoletti y colaboradores (2021) señalan que el trabajo con estos dos significados tiene un impacto positivo en los estudiantes ya que permite que alcancen una mayor compresión de las inecuaciones.

También observamos un predominio de las representaciones simbólicas alfanuméricas. Dicho predominio refleja una carencia de los textos en tanto que, la implementación de variedad de representaciones se considera de utilidad para promover la comprensión de los conceptos (Rico, 2009).

Destacamos las diferencias detectadas entre ambas editoriales en cuanto a la demanda cognitiva de las tareas, donde una serie está compuesta mayoritariamente por tareas de baja demanda, sin embargo, la otra serie presenta un mayor número de tareas con alta demanda cognitiva. Pincheira y Alsina, (2021) también detectan una baja demanda cognitiva en tareas sobre patrones algebraico y en coherencia con este trabajo coincidimos en la necesidad de promover tareas con mayor demanda

cognitiva. Sobre esto Smith y Stein (1998) señala que las tareas de alta demanda cognitiva orientan al estudiantado a un pensamiento más allá de lo algorítmico y fomenta la exploración y comprensión de los conceptos, procesos o relaciones matemáticas. Además, según Manero et al. (2021) estas tareas pueden ser útiles para trabajar aspectos transversales del currículo e identificar alumnos con altas capacidades matemáticas.

Las estructuras de las expresiones vistas a partir el pensamiento estructural como componente del pensamiento algebraico se han considerado en el trabajo con las ecuaciones e inecuaciones, por tanto, la idea de estructura, así como las relaciones de tipo matemáticas, se observan y manifiestan desde las expresiones, operaciones y elementos característicos presentes (Kieran, 2022). En los hallazgos entregados en este estudio desde el análisis sintáctico de las estructuras asociadas a las tareas observamos que no se ofrece una amplia variedad de estructura sobre las que razonar. Por ejemplo, la operación que más se emplea es la suma por sobre la resta. También se emplea siempre la misma letra para representar las cantidades desconocidas o se ubica la cantidad desconocida siempre al lado izquierdo de los signos de desigualdad. Esto podría ser una dificultad considerando que una característica central del pensamiento algebraico es razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011).

Se concluye que es necesario enriquecer el diseño de tareas para la enseñanza de inecuaciones, considerando las categorías propuestas como una referencia para visualizar qué elementos se pueden mejorar.

Agradecimiento

Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y Beca ANID folio 72220116, Gobierno de Chile.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación (2019). *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas*. Autor. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/4490

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). LEA. https://doi.org/10.4324/9781315097435-12

Fernández, C., Baptista, P. y Hernández, R. (2014). *Metodología de la Investigación*. Editorial McGraw Hill.

Garrote, M., Hidalgo, J. y Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, *46*, 37-44.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education 54*, 1131–1150 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Lloyd, G., Herberl-Eisenmann, B. y Star, J. (2011). *Developing Essential Understanding of Expressions, Equations, and Functions for Teaching Mathematics in Grades 6-8* (pp. 38-39). NCTM.

Manero, V., Muñoz-Escolano, J. y Oller-Marcén, A. (2021). Diseño e implementación de tareas cognitivas de alta exigencia basadas en la secuencia de mirar y decir. *Avances de la investigación en educación matemática*, (20), pp. 161-183. https://doi.org/10.35763/aiem20.3998

Martínez, S., Varas, L., López, R., Ortiz, A. y Solar, H. (2013). *Álgebra para para futuros profesores de educación básica*. SM. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/07/REFIP-Algebra_01.pdf

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2012). *Bases Curriculares de la Enseñanza de Educación Matemática*. Unidad de currículum y evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022*)*. Real Decreto 157/2022 de 01 de marzo, por el que se establece la ordenación y enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 24386–24504. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/01/157

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 243-257). Pirámide.

NCTM. (2007). *Principios e normas para a matemática escolar*. A.P.M e I.I.E.

Paoletti, T., Stevens, I. y Vishnubhotla, M. (2021). Comparative and restrictive inequalities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *63*, 100895. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100895

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Explorando la demanda cognitiva de tareas matemáticas de búsqueda de patrones diseñadas por futuros profesores de Educación Primaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 489 – 496). SEIEM.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática, ***PNA* 4**(1), 1–14. https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: an overview. *ZDM Mathematics Education 50*, 765–771.https://doi.org/10.1007/s11858-018-0979-4

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.5.0344

Vega-Castro, D. (2012). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* (Tesis doctoral). Universidad de Granada.

Warren, E. (2006). Comparative mathematical language in the elementary school: A longitudinal study. *Educational Studies in Mathematics, 62*(2), 169–189. https://doi.org/10.1007/s10649-006-4627-5

[i]La lista de textos escolares pueden ser consultados en el siguiente enlace: https://acortar.link/Textos_escolares

UNA MIRADA A TRAVÉS DE GRÁFICOS FUNCIONALES DEL ALUMNADO DE QUINTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

A look throught the functionals graphs of fifth grade students.

Pérez-Martos, M. C.[a], Moreno, A.[a], Cañadas, M. C.[a] y Torres, M. D.[b]

[a]Universidad de Granada, [b] Universidad de Córdoba

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia centrada en la exploración del pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria en España. El objetivo aquí es identificar y describir el modo en que un alumno de quinto de primaria (10-11 años) usa los gráficos y extrae información realizando tareas de generalización en las que se implican funciones lineales. Analizamos la entrevista individual aplicada a este alumno sobre funciones al finalizar sesiones de trabajo. Los resultados obtenidos evidenciaron la mirada a través de los gráficos de este alumno ya que identificó diferentes relaciones entre las variables, generalizó y/o identificó el término independiente de una función.

Palabras clave: *educación primaria, generalización, pensamiento funcional, representación gráfica.*

Abstract

This study is part of a broader investigation focused on exploring the functional thinking of primary school students in Spain. The objective here is to identify and describe the way in which a fifth-grade student (10-11 years old) uses graphs and extracts information by performing generalization tasks involving linear functions. We analyze the individual interview applied to this student about functions at the end of work sessions. The results obtained evidenced the look through the graphs of this student since he identified different relationships between the variables, generalized and / or identified the independent term of a function.

Keywords: *functional thinking, generalization, graphic representation, primary school.*

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

Este estudio lo centramos en el enfoque funcional del pensamiento algebraico. El pensamiento algebraico es un tema de interés entre investigadores en Educación Matemática en la actualidad (Cañadas et al., 2019; Kieran, 2022). En particular, el pensamiento funcional es "un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211). En este estudio analizamos el uso que hacen alumnos de quinto de primaria de los gráficos al trabajar tareas de generalización que implican funciones lineales.

El nuevo currículo de primaria actualmente en vigor en España incluye el sentido algebraico (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). En este sentido el trabajo con la generalización y su representación cobra importancia debido a que estos procesos forman parte de las competencias específicas de matemáticas incluidas en este nuevo currículum.

En trabajos previos han abordado los usos y la comprensión de la representación tabular para trabajar las funciones con el alumnado de primaria (Brizuela et al, 2021; Torres et al., 2022a). En este estudio nos interesamos especialmente por el trabajo sobre los usos y comprensión de otro tipo

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 435–442). SEIEM.

de representación, la gráfica, con el alumnado de quinto de primaria. Presentamos una primera aproximación a través de un estudio exploratorio con un estudiante.

Esta investigación tiene como objetivo identificar y describir el modo en que un alumno de quinto de primaria usa los gráficos y extrae información realizando tareas de generalización en las que se implican funciones lineales.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

La generalización se produce al identificar lo común de los casos particulares. Varios autores muestran interés por este proceso. Radford (2010) diferencia entre generalización algebraica y generalización aritmética, definiendo la primera de estas como la obtención de una expresión general que permite obtener cualquier caso particular, y la segunda como la manifestación de haber identificado lo común de los casos particulares y su uso para obtener cualquier otro caso particular, pero sin llegar a la expresión general. En (Torres et al., 2022b) también se trabaja este proceso y se tienen en cuenta estos dos tipos de generalización. En ocasiones, la generalización aritmética se logra con casos particulares cercanos (Stacey, 1989).

Las representaciones matemáticas son las herramientas que nos permiten hacer presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y a partir de las cuales se registra y comunica el conocimiento sobre las matemáticas (Rico, 2009). Así, las representaciones son las que conducen a expresar y relacionar objetos matemáticos (Pinto et al., 2016). Nos centramos aquí en los gráficos como una de esas representaciones.

La comprensión de los gráficos no es una tarea sencilla. Varias investigaciones muestran dificultades y errores de los estudiantes al construir, comunicar o extraer información de los gráficos (Acuña, 2001; Wainer, 1992). En este sentido, Wainer (1992) concreta que existe gran diferencia entre contestar a una pregunta que tan solo requiera de la lectura del gráfico para extraer un dato específico, y contestar a una que requiera de la comprensión de la estructura profunda de la totalidad de los datos que presenta. Este autor asegura que comprender la estructura profunda de los datos de un gráfico para poder conectar ideas presenta mayor complejidad que la lectura de un gráfico, como se podía esperar.

Los gráficos de las funciones se han abordado en investigación desde diferentes aproximaciones: la visualización, la integración de la tecnología en la educación y la construcción de un lenguaje gráfico (Cordero, 2006). Cordero y Flores (2007) analizaron libros de texto de educación primaria e indicaron que “las investigaciones de las gráficas de las funciones, en Matemática Educativa, tradicionalmente han tenido un tratamiento privilegiado como representación del concepto de función” (p. 4). En este estudio nos quedamos con el enfoque de los gráficos orientado a la visualización, pensando en estos como representaciones visuales empleadas para comunicar e interpretar relaciones funcionales (Brizuela et al. 2021). Martí et al. (2010) indican que un gráfico consta de los siguientes componentes: (a) el marco, que informa sobre qué medida se utiliza y qué es lo que se mide; (b) los especificadores, a través de los que visualizamos las relaciones, como son las tendencias o comparaciones entre valores y (c) las etiquetas. Además, estos autores nos hablan de diferentes niveles de comprensión en un gráfico: leer datos, leer entre datos y leer más allá de los datos. Estos autores indican que este último nivel de comprensión, leer más allá de los datos, es lo que entiende Wainer (1992) por comprensión de la estructura profunda de la totalidad de los datos que se presentan.

Basamos nuestro marco teórico en las representaciones como herramientas en la perspectiva sociocultural de Vygotsky sobre el papel mediador de las herramientas en el pensamiento propio. En este sentido, el trabajo de Brizuela et al. (2021) toma la idea de Kaput et al. (2008) de que, al trabajar con símbolos o representaciones, uno puede o bien solo mirarlos como objetos opacos en sí mismos, o bien mirar a través de ellos, que quiere decir mirar lo que podrían significar. Brizuela et

al. (2021), concluyeron que una vez que se consigue mirar a través de una representación, es cuando comenzamos a usarlo como herramienta para pensar y razonar sobre los significados subyacentes, al explorar cómo un niño de infantil miraba a través de la representación tabular. La mirada a través de las tablas permitió hacer inferencias y generalizaciones como resultado de las contribuciones particulares proporcionadas por la visualización. En nuestro estudio queremos extender esta idea de mirar a través de una representación a los gráficos de funciones.

En este trabajo definimos mirar a través de los gráficos como la capacidad de hacer inferencias y generalizaciones a partir de las contribuciones particulares proporcionadas por la visualización de los gráficos, además de pensar y razonar sobre los significados subyacentes a esta representación. La mirada a través de los gráficos se evidencia en este estudio por conceptos que emergen del propio análisis llevado a cabo: relación de covariación, punto de corte de dos funciones, intervalos donde varía la comparación entre dos funciones, las generalizaciones algebraica y aritmética, el término independiente de una función, o más generalmente, la deducción o predicción de información y la obtención de conclusiones. En este trabajo describimos la mirada a través de los gráficos de un alumno de quinto de primaria mediante la identificación de estos conceptos.

METODOLOGÍA

Llevamos a cabo en este documento un estudio de caso que forma parte de un experimento de enseñanza, enmarcado en un proyecto, con un total de cuatro sesiones comunes para los 25 alumnos en el aula, y seis entrevistas individuales semi-estructuradas realizadas a seis de estos estudiantes. Analizamos la entrevista de un estudiante (videograbación y fichas de apoyo) donde estaba implicada la función $y=3x+1$ y la comparación de las funciones $y=2x+5$, $y=3x$. Algunas de estas funciones fueron trabajadas previamente en las sesiones de grupo-clase.

Los seis estudiantes asisten a un colegio público situado al sur de España. La elección del centro fue intencional. El único contacto que este grupo había tenido con la representación gráfica y la generalización en contextos funcionales fue en las sesiones del grupo-clase. Fueron cuatro sesiones, y en todas ellas planteamos tareas sobre funciones, a través de las representaciones verbal, simbólica, tabular y gráfica. Respondieron preguntas que involucraban la lectura e interpretación de diferentes representaciones. El objetivo de todas era que llegaran a la generalización de la expresión funcional asociada a cada contexto. En la sesión 1 se trabajó la función $f(x)=2x+5$, en la sesión 2 se trabajó $f(x)=3x$, en la sesión 3 se trabajó la comparación de las dos funciones anteriores y la última sesión giró en torno a $f(x)=2x+2$.

Para seleccionar los seis estudiantes a entrevistar, atendimos a su trabajo previo en las sesiones: (a) generalizaban desde el principio (A1 y A2), (b) no generalizaban al principio, pero sí al final (B1 y B2) y (c) no manifestaron generalización en ningún momento de las sesiones (C1 y C2).

El investigador-docente de las sesiones del grupo-clase realizó también las entrevistas, siguiendo un protocolo diseñado por los miembros del equipo de investigación.

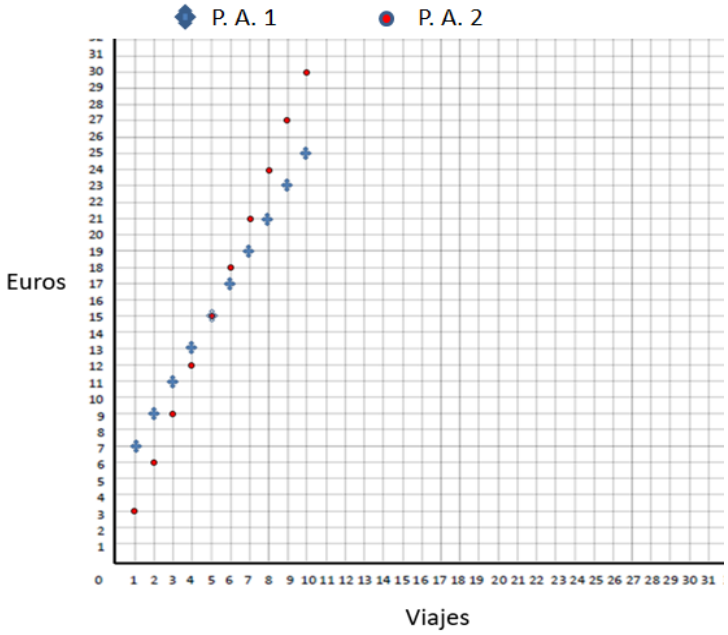
Cada entrevista duró unos 23 minutos y todas fueron organizadas en torno a tres momentos que se asocian a tres tareas diferentes, en el siguiente orden:

Tabla 1. Breve descripción de las partes de la entrevista.

Tarea	Contexto	Funciones asociadas	Descripción	Preguntas planteadas
1	Máquina de bolas	$y=3x+1$	Les presentamos la situación de una máquina misteriosa en la que metes un número de bolas, y esta saca otro diferente. La máquina hace algo y debemos averiguar qué es.	Para cualquier número de bolas que entraran, ¿cuántas bolas saldrían?; ¿Cómo me explicarías el funcionamiento de la

				máquina?; ¿Serías capaz de representar en un gráfico esta situación?
2	Parque de atracciones	y=3x+1	Les presentamos la situación de una visita a un parque de atracciones en el cual deben pagar 1 euro por hacerse un carnet de socio necesario para entrar, y luego, una vez dentro, cada viaje les cuesta 3 euros. Igual función a la anterior pero el contexto ofrece el valor del término independiente.	Si hago un número de viajes cualquiera, ¿cómo sabría cuánto tengo que pagar?; ¿Es posible que pagase yo 33 euros en viajes?; El gráfico de esta situación, ¿lo podrías representar?
3	Comparación de parques	1. y=2x+5 2. y=3x	Les mostramos un gráfico representando la comparación de dos parques cualesquiera, el 1(representado con cruces azules) y el 2 (representado con puntos rojos) (ver figura 1), sin indicarles que representaban las mismas funciones que los parques de Almería y Málaga de la sesión 3 y haciendo énfasis en que se trataba de parques diferentes al de la situación anterior. No se ofrecía ninguna otra información.	¿Cómo puedo saber cuánto tengo que pagar en cada parque?; ¿Cuál de los dos parques crees que es más caro?; ¿A qué parque me interesaría ir?; ¿Cómo observas eso en el gráfico?

Figura 1. Gráfico presentado en tarea 3



En este estudio de caso analizamos las transcripciones del vídeo y las producciones orales y escritas durante la entrevista de A1. Seleccionamos a este alumno para estudiarlo en profundidad por ser el que aportó una mayor cantidad de información. El análisis lo hicimos atendiendo a las generalizaciones evidenciadas (aritmética o algebraica) y a los diferentes elementos puestos en juego en relación a la mirada del gráfico (Martí et al., 2010).

RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este apartado ofrecemos el progreso de A1 a lo largo de la entrevista en lo que a su mirada a través de los gráficos se refiere.

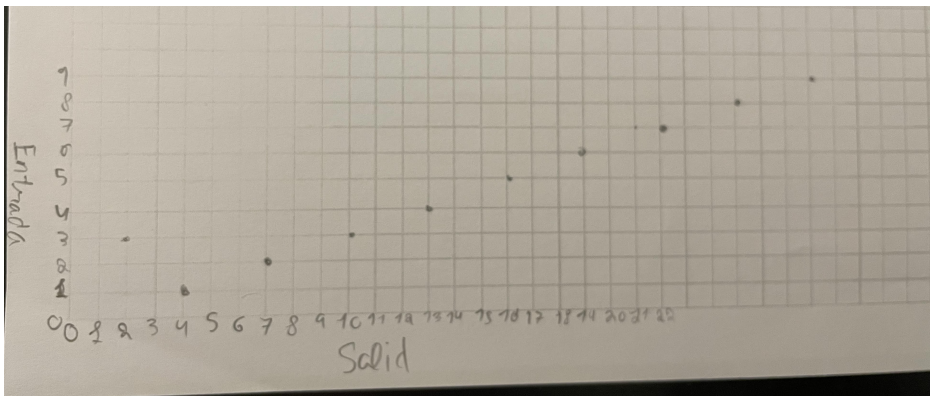
Cuando pedimos a A1 que representara en un gráfico la situación de la tarea 1, empezó por colocar los números en el eje X. El primer número que indicó en el punto intersección de ambos ejes fue el uno en vez del cero. Cuando terminó de escribir los números que consideró para el eje X se dio cuenta de que le faltaba el cero, y comenzó de nuevo en otra hoja cuadriculada. Hasta ahora, A1 solo había mirado el gráfico como objeto en sí mismo (Brizuela et al., 2021), usándolo para organizar la información obtenida de la situación. A partir de este momento empezaron a emerger los conceptos en relación con los elementos anteriormente considerados (Martí et al., 2010), como evidencia de su mirada a través de los gráficos. Colocó las dos variables involucradas en los ejes del gráfico, aunque colocó la independiente (bolas que entran) en el eje Y, y la variable dependiente (bolas que salen) en el eje X (ver figura 2), identificándose así la relación entre las variables.

Seguidamente, sin intervención del investigador, A1 comenzó a colocar en el gráfico los puntos correspondientes a la situación trabajada. Primero representó los datos que había indicado en los ejes, identificó lo común en la representación de estos puntos (si aumentaba una unidad en el eje Y, entonces se aumentaba en tres unidades en el eje X) y continuó colocando puntos sin necesitar ya prestar atención al resultado de salida (ver figura 2), generalizando así la construcción del gráfico a partir de la relación funcional. En línea con Wainer (1992), está evidenciando su comprensión de la estructura de los datos que se presentan en el gráfico. Encontramos evidencia de esto en el siguiente fragmento:

I: ¿Cómo estás construyendo eso?

A1: ¿Cómo? Pues me fijo… Primero hago los dos primeros, o los tres, y digo ¿cómo sube? Pues, miro cómo sube y como me he dado cuenta que es tres para el lado y uno para arriba, pues lo hago así (Y sigue poniendo más puntos ya donde no hay números en los ejes, siguiendo la tendencia).

Figura 2. Ejemplo de construcción de un gráfico a partir de la relación funcional



En el siguiente fragmento del diálogo, correspondiente a la tarea 2, A1 identificó la igualdad de la relación entre las variables de las tareas 1 y 2:

I: Ah bueno, el gráfico de esta situación ¿cómo lo harías?

A1: Pues lo mismo, mira, ya está hecho (dice señalando el gráfico trabajado en el contexto 1).

En la tarea 3, donde presentamos el gráfico que aparece en la figura 1, A1 identificó la presencia de término independiente en una de las funciones involucradas (parque 1), además de dar su valor exacto, y justificó la no existencia de término independiente en la otra función (parque 2). En el

contexto de la tarea esto se traduce en que reconoció en qué parque de atracciones había que pagar carnet de socio para entrar dando su valor exacto, y en qué parque no había que pagar carnet para entrar. A1 identificó que el cambio a lo largo de todos los valores de las abscisas consecutivas es constante en ambas funciones. Sin embargo, se da cuenta de que, mientras que en la función roja el cambio de cero a uno en la abscisa es el mismo que en el resto de la gráfica, en la azul es diferente. Esa diferencia en el cambio de cero a uno en la abscisa de la función azul es la que le hace reconocer que tiene término independiente e identificar que su valor es cinco. En este caso, el alumno atendió a elementos de los que Martí et al. (2010) reconocen como especificadores. Esto se puede observar en el siguiente fragmento de diálogo:

I: A ver, tú en este caso, ¿qué crees? ¿pagas carnet, o no?

A1: Sí, en el parque 1 (dice sin pararse a pensar mucho)

I: (Refiriéndose al parque de atracciones 1) Por cada viaje pago dos euros, y entonces por un solo viaje, ¿cuánto he pagado en total?

A1: Siete euros.

I: ¿Cuánto vale el carnet?

A1: ¡Cuatro! ¿Siete menos dos? (pregunta al investigador señalando y observando el gráfico como para hacer ver que su respuesta es correcta, pero entonces se da cuenta de su error) ... Cinco.

I: Y en el parque de atracciones dos, ¿hay que pagar carnet o no?

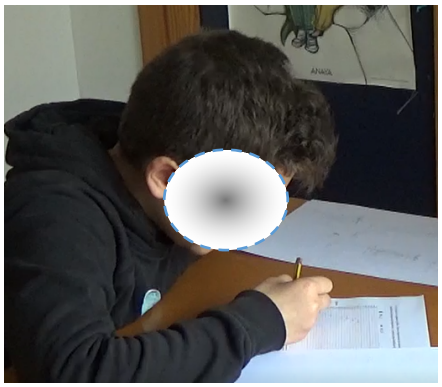
A1: Tres, tres, no, tres euros de entrada… porque si te fijas siempre es: uno dos y tres, uno dos y tres. (Dice marcando con el dedo. Se refiere a que el primer punto está a la misma altura desde el cero que la que hay luego entre cada dos de los siguientes puntos y, por tanto, quiere concluir con que no hay carnet).

En esta misma tarea, A1 identificó el punto de corte (Martí et al. 2010), aquel en el que la imagen de ambas funciones era igual y, por lo tanto, a partir del cual la función que tenía imagen mayor pasaba a tener imagen menor, y viceversa. En el contexto de la tarea, identificó el número de viajes para el que ambos parques costaban lo mismo y a partir del cual un parque dejaba de ser el más caro para pasar a serlo el otro. En primer lugar, identificó, señalando en el eje Y, el valor de la variable dependiente a partir del cual se produce dicho cambio (15 euros), y luego, señalando en el eje X, el valor de la independiente (5 viajes). En la figura 3 se observa que lo indica en el gráfico. De nuevo la identificación de este concepto permite al alumno ofrecer la conclusión de que si das 5 viajes te cuesta igual en un parque y en otro, como muestra el siguiente fragmento:

I: Muy bien. ¿A partir de cuánto es más barato un parque de atracciones que otro?

A1: A partir del 15, a partir del 15 es lo mismo. Si das 5 viajes es lo mismo.

Figura 3. A1 señala en el gráfico para dar sus respuestas



Por último, A1 generalizó aritméticamente con los casos particulares (Stacey, 1989) asociados a la función y = 3x (parque 2). En el contexto de la tarea lo que hizo el alumno fue identificar el coste de entrar al parque 2 y subirse en 50 atracciones:

I: En el caso del parque de atracciones 2, el rojo, viendo el gráfico ¿me podrías decir…?

A1: Sumar tres

I: Sumar tres, y… ¿hay alguna expresión general? Es decir, si yo te digo que desconozco el número de viajes, ¿cómo me explicas tú que si yo he dado un número de viajes cualesquiera, los que sean? (A1 se queda pensando) Por ejemplo he dado 50 viajes.

A1: ¿50 viajes? Pues 50 por 3.

CONCLUSIONES

Aunque los resultados de nuestro estudio no son generalizables, nos han permitido describir el modo en que A1 trabaja con la representación gráfica en tareas de generalización sobre funciones, y extender a la representación gráfica la idea de mirar a través de una representación (Brizuela et al., 2021). Hemos encontrado evidencias en relación tanto con la generalización aritmética (Radford, 2010; Torres et al., 2022b; Stacy, 1989), como con el uso de elementos propios del trabajo con funciones mediante la representación gráfica (Martí et al., 2010).

Hemos observado como A1 ha identificado la relación de covariación entre las variables, el punto de corte de dos funciones, el término independiente de una función (indicando su valor exacto), además de generalizar aritméticamente, predecir información y extraer ciertas conclusiones. Por tanto, en base a la definición de mirada a través de los gráficos que tomamos para este estudio, evidenciamos que este estudiante ha conseguido mirar a través de los gráficos, conectando ideas y extrayendo información para comunicar e interpretar relaciones funcionales (Brizuela et al., 2021; Kaput et al., 2008; Wainer, 1989) y dar así respuesta a las tareas planteadas.

Ahora nos quedaría poder ampliar el estudio a un mayor número de sujetos comparando lo que ocurre con las categorías estudiadas aquí. Después de centrarnos en la mirada a través de los gráficos nos preguntamos por, ¿cómo será la mirada a través de otras representaciones?, ¿qué ocurrirá con las justificaciones de los estudiantes sobre las relaciones funcionales implicando dos representaciones, tabular y gráfica? Seguiremos profundizando en si las explicaciones de los estudiantes pueden evolucionar al implicar una representación u otra.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

REFERENCIAS

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(3), 203-217. http://funes.uniandes.edu.co/9623/

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education: a global dialogue from multiple perspective* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Brizuela, B. M., Blanton, M. L. y Kim, Y. (2021). A kindergarten student's use and understanding of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R.E.d.S.R. Borba (eds), *Mathematical reasoning of children and adults*, (pp. 171–190). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_8

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp. 209-218). Comares. http://funes.uniandes.edu.co/8379/1/2016_Can%CC%83adasMolina.pdf

Cañadas, M. C., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2019) Special issue on early algebraic thinking, *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 469-478, 10.1080/02103702.2019.1638569

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matematica e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(1), 07-38. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000100002&script=sci_arttext

Kaput, J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, (pp. 19–56). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, *54*, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Martí, E., Gabucio, F., Enfedaque, J. y Gilabert, S. (2010). Cuando los alumnos interpretan un gráfico de frecuencias. Niveles de comprensión y obstáculos cognitivos. *Irice, 21*, 65-80. https://doi.org/10.35305/revistairice.v21i21.508

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (eds.), *Investigación en educación matemática XX,* (pp. 417-426). SEIEM.

Radford, L. (2010). Niveles de generalidad y tipos de generalizaciones en actividades de patrones. *PNA,* 4 *(2),* 37-62. http://hdl.handle.net/11162/79439

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *BOE, 52,* 24.386- 24.504.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14. http://hdl.handle.net/11162/79435

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Torres, M. D.; Brizuela, B. M.; Cañadas, M. C.; Moreno, A. (2022a). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*(1) 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022b). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236. https://hdl.handle.net/11162/224518

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, *21*(1), 14-23. https://doi.org/10.3102/0013189X021001014

UNA APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO DEL FORMADOR DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL

An approach to the mathematics teacher educator knowledge during the initial teachers training

Pérez-Montilla, A. [a], Cardeñoso, J. M. [a] y Montes, M. A. [b]

[a]Universidad de Cádiz, [b]Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo trata de obtener algunas evidencias que nos ayuden a caracterizar e ilustrar algunos aspectos del conocimiento profesional movilizado por un formador de docentes de matemáticas en su rol de facilitador del desarrollo profesional del futuro profesor. A partir de varias contribuciones teóricas sobre el desarrollo profesional del docente, apuntamos a la elaboración de conocimiento profesional y la construcción de una identidad como principales objetivos del formador, de manera que, informen sobre una posible conceptualización de la naturaleza y organización de su saber. Con el fin de obtener tal aproximación, empleamos el estudio de caso para extraer evidencias mediante el análisis de algunos episodios acontecidos en un aula de formación inicial. Los resultados apuntan a un conocimiento profesional elaborado y complejo.

Palabras clave: *formador de docentes, conocimiento profesional del formador de docentes, desarrollo profesional*

Abstract

This work aims to obtain evidence that helps characterize and illustrate certain aspects of the professional knowledge mobilized by a mathematics teacher educator (MTE) in their role as a facilitator of the professional development of teachers of pre-service teacher. Drawing on various theoretical contributions on teacher professional development, our focus is on the development of professional knowledge and the construction of identity as the main objectives of the MTE, offering valuable insights into a potential conceptualization of the nature and organization of their knowledge. To achieve this approach, we employ a case study approach to extract evidence through the analysis of specific episodes occurring in a pre-service education classroom. The findings point to a sophisticated and elaborate professional knowledge.

Keywords: *teacher educator, MTE's professional knowledge, professional development*

INTRODUCCIÓN

Los cambios curriculares y las reformas educativas plantean nuevos retos a los docentes de matemáticas en el ejercicio de su profesión. A su vez, las iniciativas legislativas emprendidas en España sobre el sistema universitario y, en concreto, los nuevos planes de los grados en Educación Primaria e Infantil sitúan la formación inicial del profesorado[i] de matemáticas como un tema de primer orden y trascendencia.

Al respecto, la literatura señala que la formación inicial constituye una primera etapa de desarrollo profesional (en adelante DP) del profesorado (Azcárate, 2004) y que puede tener un impacto considerable en el conocimiento o la identidad profesional de los estudiantes para profesor (en adelante EPP) (Ponte y Oliveira, 2002). Sin embargo, el qué entendemos por desarrollo profesional

Pérez-Montilla, A., Cardeñoso, J. M. y Montes, M. A. (2023). Una aproximación al conocimiento del formador de docentes de matemáticas en la formación inicial. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 443–450). SEIEM.

no es una postura aséptica, ya que, como señala Climent (2002), algunos posicionamientos apuntan a la comprensión de la práctica, al cambio en las concepciones y creencias; o a la elaboración de conocimiento profesional como elementos vinculados con dicho proceso de desarrollo.

En los últimos años, la comunidad investigadora ha puesto el foco en el formador de docentes por ser, junto al profesor, un agente crucial en la mejora educativa, ya que, a través de una multifacética práctica profesional (Wu et al., 2020) ejerce un rol de facilitador, guía y dinamizador del DP de los docentes. Sin embargo, la diversidad de comunidades profesionales existentes en torno al formador, configuran distintos rasgos en su identidad profesional, los cuales, a su vez, influyen en el conocimiento profesional que movilizan (Leikin, 2020). Este hecho supone una riqueza y a la vez un desafío para los investigadores en su objetivo de conceptualizar la naturaleza, estructura y desarrollo del conocimiento profesional del formador. Chapman (2021) señala que el conocimiento profesional del docente es una dimensión importante del saber del formador, además de que puede suponer un punto de partida indagatorio para la comunidad investigadora. Por su parte, Chick y Beswick (2018) apuntan a que formadores y docentes tienen conocimientos específicos y compartidos, aunque el formador conoce lo que conoce el docente de otra manera, ya que la función del profesor es que el alumno elabore conocimiento matemático, y la función del formador es facilitar la elaboración de conocimiento profesional del docente, así como ayudarle a construir una identidad profesional, elementos base de su DP.

En este trabajo tratamos de ilustrar y describir algunos aspectos del conocimiento profesional movilizado por un formador en su tarea de facilitar el desarrollo profesional de un grupo de futuros profesores de Secundaria, tomando como marco teórico el modelo de Escudero-Ávila et al. (2021).

MARCO TEÓRICO

El Desarrollo Profesional del Docente de Matemáticas

La educación del docente es un ente complejo en el que intervienen multitud de procesos y agentes, habiendo puesto la comunidad investigadora especial atención en aquellos procesos en los que "los docentes a nivel individual o en comunidad aprenden o adquieren nuevo conocimiento, desarrollan o cambian su práctica e identidad, y muestran nuevas actitudes o competencias" (Ponte, 2012a, p. 343). Desde nuestra perspectiva, todas estas aportaciones ponen el foco en distintas facetas del DP de los profesores, motivado por los diversos campos de actuación que configuran su ejercicio profesional, a saber, enseñanza en el aula, actividades extraescolares, tutoría, gestión…

En sintonía con Azcárate (2004) entendemos el proceso de DP como un proceso orientado a facilitar que los profesores sean autónomos profesionalmente, es decir, capaces de reflexionar en y sobre la práctica críticamente, adquiriendo a su vez una conciencia sobre la complejidad moral de ésta y como parte inherente de un proceso de socialización en una comunidad profesional. Por tanto, tal y como señalan Ponte y Oliveira (2002), el DP puede situarse en dos campos interdependientes: uno, vinculado a la elaboración de un conocimiento profesional (en adelante, CP) que capacita al profesor para dar respuesta a problemas que emergen de su práctica y, otro, a la formación y afirmación de una identidad profesional como parte esencial de su identidad social y que caracteriza sus formas de entender e interactuar en su realidad personal y profesional.

La investigación en torno al CP del docente concluye que se trata de un conocimiento de carácter *práctico* en el que se integran saberes experienciales y académicos en base a las concepciones y creencias del individuo; por lo que se trata de un conocimiento *artesanal* que no puede valorarse por criterios abstractos de carácter conceptual o lógico sino por criterios de eficacia en la resolución de problemas profesionales (Ponte, 2012b). Para nosotros, la formación enfocada al DP no pretende únicamente que el sujeto adquiera una serie de conocimientos académicos de diversa índole por asimilación, sino que a través de la reflexión sobre la práctica y partiendo de problemas profesionales, promueva una "explicitación y concienciación del conocimiento que moviliza en la acción y

conduzca a una identificación de los marcos teóricos relevantes para el análisis de la práctica" (Ponte, 1994, pp. 10-11). En este sentido, y como señala Ponte (2012b), esto no implica que el DP no pueda beneficiarse de un formación orientada a la teoría, es decir, como un proceso desde *fuera hacia dentro*; sino que sería deseable y recomendable estimular el cuestionamiento de los esquemas de acción en la práctica de los sujetos en formación, de manera que, el conocimiento profesional que los sustenta, evolucione desde posiciones más simplificadoras, acríticas y estáticas hacia otras de tipo interactivo, dialéctico e investigativo (Azcárate, 2004).

Por tanto, desde estos presupuestos, el CP como saber práctico surge de la integración de varios tipos de conocimientos, provenientes de tres fuentes interdependientes y conectadas mediante una relación dialéctica (Azcárate, 1999). Las fuentes meta disciplinares hacen referencia a las teorías generales que informan sobre la visión ideológica, epistemológica y ontológica del sujeto. Estos saberes permiten al docente fundamentar su forma de concebir el conocimiento y su elaboración, así como los sistemas de valores que permiten orientar la toma de decisiones en la práctica. Luego, las fuentes fenomenológicas son aquellas informaciones que provienen de la interacción directa con la práctica e incluye conocimiento sobre las rutinas y formas de actuación, así como sobre el currículum. Finalmente, las fuentes disciplinares se refieren a aquellas informaciones que provienen de diversas disciplinas como la psicología, la sociología, … teniendo un papel destacado la didáctica de la matemática, especialmente por ser la enseñanza de la matemática una actividad relevante del docente.

El Conocimiento Profesional del Formador para el Desarrollo Profesional del Docente

Tal y como afirman Escudero-Ávila et al. (2021) son múltiples los términos utilizados para referirse al formador: mentor, facilitador, educador matemático, … lo que refleja la heterogeneidad de profesionales que intervienen en la formación del docente. Beswick y Goos (2018) se refieren a ellos como "cualquier profesional comprometido en la educación o desarrollo de los docentes de matemáticas" (p. 418) definición que adoptaremos en este trabajo. Por tanto, en esta comunicación nos centramos en el conocimiento profesional movilizado por un formador en su rol de facilitador del desarrollo profesional de los profesores, del cual hemos ofrecido algunos apuntes previamente.

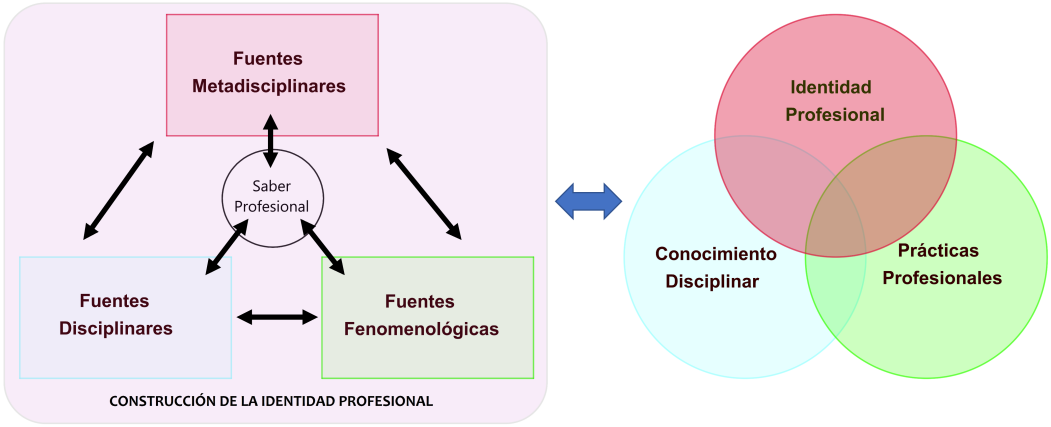
La investigación evidencia que distintos perfiles de formadores ponen el énfasis en distintas facetas del DP de los docentes de matemáticas. Por ejemplo, Leikin et al. (2018) analizaron el conocimiento profesional de varios matemáticos profesionales impartiendo cursos de matemáticas avanzadas a futuros profesores de Secundaria. Los hallazgos revelaron que este tipo de formadores prestaban especial atención a la construcción de conocimiento del contenido matemático -conocimiento encuadrable dentro de la fuente disciplinar-, ayudándoles a establecer conexiones entre distintos tópicos del currículum, así como a comprender aspectos meta-matemáticos. Igualmente, consideraban que su forma de enseñar tales cursos podría servir de modelo, de manera que, trasladasen a sus aulas ejemplos o estrategias de enseñanza, así como recursos o tareas. Por tanto, estos formadores evidenciaban un conocimiento matemático amplio, extenso y complejo.

El análisis de algunos modelos (Chick y Beswick, 2018; Escudero-Ávila et al., 2021; Leikin et al., 2018) apuntan a la existencia de dos subdominios en el saber profesional del formador: uno referido al contenido de la formación (en adelante, MTECK) y otro al conocimiento didáctico del contenido (en adelante MTEPCK). Respecto al MTECK, cabe decir, que no existe un consenso unánime respecto a qué temas constituirían el contenido de la formación (Chapman, 2021), aunque la investigación sobre la educación del docente, como fuente de conocimiento para el formador, puede ofrecer pistas sobre una primera organización de tal conocimiento del contenido de la formación. En el MTEPCK, sí existe mayor consenso en que este conocimiento es el que permite al formador diseñar situaciones que faciliten el DP de los docentes e incluiría conocimiento sobre cómo enseñar el contenido de la formación -estrategias, tipos de tareas, ejemplos…, conocimiento sobre las características de los procesos asociados al DP -teorías que explican los procesos de elaboración de conocimiento profesional o de construcción de la identidad, dificultades y obstáculos que han de

superar durante el proceso, etc.- y conocimiento sobre los estándares de la formación (Escudero-Ávila et al., 2021).

Por otro lado, Escudero-Ávila et al. (2021), basándose en las aportaciones de Ponte (2012a) acerca de la educación del profesor, presentan una primera organización del conocimiento del contenido del formador en torno a tres áreas clave e interrelacionadas entre sí: conocimiento, prácticas y habilidades; e identidad profesional (ver Figura 1). Estas áreas deben ser tomadas como un intento por describir y comprender distintos aspectos del DP del docente a desarrollar en la formación.

Figura 1. Campos del DP del Docente y Conocimiento del Contenido de la Formación



En concreto, el área de conocimiento disciplinar se refiere especialmente al conocimiento del contenido matemático y didáctico que ha de construir el docente durante la formación y que es parte importante de su conocimiento profesional. El conocimiento del formador sobre prácticas profesionales tales como dirigir discusiones en el aula o programar secuencias didácticas, apunta al saber sobre las distintas formas de actuar de los docentes en el aula -sus rutinas o esquemas de actuación- con el objetivo de ayudar a los estudiantes para profesor a promover cambios en su práctica mediante la construcción de conexiones entre teoría y práctica. Finalmente, el conocimiento sobre la identidad esperable en un formador se refiere a los distintos modos de ser y sentirse docentes de los profesores así como los factores que influyen en su construcción, entre los que destacaríamos los valores y normas dentro del proceso de socialización en el que están inmersos desde la formación inicial.

METODOLOGÍA

Dado que el objetivo de nuestra investigación es caracterizar y comprender el conocimiento profesional de un formador movilizado en un contexto de formación inicial de profesores de Secundaria de matemáticas, consideramos oportuno aprovechar las potencialidades del enfoque cualitativo-interpretativo, del estudio de caso instrumental (Bassey, 2003). Como señalan Escudero-Ávila y Carrillo (2020) la información facilitada por el informarte servirá para realizar un proceso de abstracción con el objetivo de obtener evidencias adicionales sobre el funcionamiento y la caracterización del conocimiento profesional del formador. En nuestro caso, el informante, al que nos referiremos como Álvaro, es licenciado en matemáticas y posee más de 27 años de experiencia como docente en Educación Secundaria, así como 4 años de docencia en el Máster de Secundaria siendo profesor asociado. Su elección ha sido intencional debido a su doble rol de profesor en activo y didacta de la matemática, esperando obtener evidencias más ricas.

La recogida de información se llevó a cabo mediante la grabación en audio y vídeo de 6 sesiones de 4 horas de la asignatura Aprendizaje y Enseñanza en la Especialidad de Matemáticas del Máster en Profesorado de la Universidad de Cádiz, junto con grabaciones de audio de las interacciones entre el formador y varios pequeños grupos de EPP, durante dichas sesiones. Estas evidencias fueron

complementadas con observación no participante, notas de campo del investigador y un plan previo de las sesiones remitido por el informante en el que se exponían los objetivos y el sentido de las actividades programadas. Además, hemos utilizado el método *top-down* (Grbich, 2003), de manera que, tras una indagación teórica y partiendo de la caracterización dada por Escudero-Ávila et al. (2021), reflexionamos sobre cómo los datos empíricos informan sobre el conocimiento del formador.

Debido a la extensión, en este trabajo analizamos algunos episodios extraídos de la tercera sesión, cuyo tema era el papel de las competencias en el nuevo currículum español. Las unidades de análisis son las intervenciones entre el formador y los EPP. Según el plan aportado por el formador, la sesión se estructuró en cuatro momentos:

- En primer lugar, los EPP tenían que concluir un análisis comparativo de la normativa estatal nueva y la anterior mediante una dinámica de trabajo cooperativo (puzle de Aronson) con un guion facilitado por el formador.
- Posteriormente, se llevó a cabo una puesta en común finalizando con una síntesis de las ideas principales y analizando la experiencia cooperativa vivida dentro del aula.
- A continuación, el formador realizó una exposición sobre la noción de competencia desde su visión del currículum y comparándola con otras perspectivas provenientes de la investigación en educación matemática.
- Finalmente, les propuso una tarea en pequeño grupo, en la que, a través del análisis de la normativa autonómica, los EPP debían reflexionar sobre cómo las competencias específicas que introduce el nuevo currículum español pueden contribuir al desarrollo de las competencias clave -también incluidas en el nuevo currículum-.

ANÁLISIS DE LOS EPISODIOS

El primer episodio tiene lugar tras la actividad en pequeño grupo de análisis de la normativa, cerrando el formador con una puesta en común. Álvaro plantea esta discusión con la intención de ayudar a los EPP a tomar conciencia sobre cómo las dinámicas que quieren promover en sus aulas, y, por tanto, la metodología que emplean debe ser coherente con los objetivos a conseguir. Esto se observa cuando permite a los EPP explicitar sus visiones acerca de la enseñanza de la matemática y les da feedback.

Álvaro: lo que estoy intentando ahora mismo es que como futuros docentes, os planteéis qué tipo de dinámicas queréis hacer en el aula.

EPP: no lo veo para todos los días ya que se volvería como aburrido. Me parece guay... Como que es, no sé, para integrarlo una vez cada unidad.

Álvaro: sí, en determinados momentos. Yo hablaba con un grupo que la suelo utilizar para los sistemas de ecuaciones. Hay que elegir. Mira, para este tema me viene bien [...] hago cuatro grupos y a cada uno le doy un método y, en una clase o dos, a lo sumo, hemos trabajado los cuatro métodos. Yo podría hacerlo de forma lineal, un método, otro método... Pero lo que sí me gustaría que nos planteásemos es que para que esto funcione, um ... hay que tener una actividad que sea rica en el sentido de que obligue al alumnado a poner en juego capacidades superiores a la mera memorización, ¡qué es un enfoque posible! Decir, pues me conformo con que memoricen y me lo suelten en el examen.

El formador utiliza la experiencia vivida por los EPP como punto de partida para reflexionar sobre los pros y contras de la estrategia de enseñanza en una futura aula de Secundaria. Esto supone una evidencia de conocimiento didáctico del formador, ya que, el puzle de Aronson es usado con una doble finalidad. En primer lugar, facilitar la elaboración de conocimiento sobre el currículum mediante la lectura crítica de la normativa, mientras que el debate posterior, ofrece un espacio de reflexión e intercambio de ideas, en el cual, abordar distintos aspectos vinculados con la identidad

profesional. A continuación, el formador interpreta la aportación del EPP gracias a su conocimiento sobre cómo razonan y piensan los docentes (Chick y Beswick, 2018). Lo que dicha estudiante trata de decir es que no ve factible el utilizar siempre la misma estrategia metodológica. El formador, partiendo de su propia experiencia como profesor, aprovecha la aportación para mostrar un ejemplo sobre en qué casos sería provechoso utilizar la metodología del puzle de Aronson (Martínez-Romero et al., 2015), lo que supone una evidencia de MTEPCK dirigido a ayudar a los EPP a desarrollar su propia práctica profesional. Al respecto, Álvaro conoce que el puzle de Aronson requiere dividir un tema en varias partes, de manera que lo utiliza en determinados tópicos como los algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones. Además, afirma que las dinámicas cooperativas le sirven para facilitar el desarrollo de capacidades superiores, tanto en sus alumnos como en sus EPP.

El segundo episodio transcurre tras el primero y también durante el debate en gran grupo. En este caso, un EPP, tras haber analizado la nueva normativa, plantea al formador una duda sobre cómo la nueva política de repetición de curso puede tener un efecto contraproducente en la motivación e interés del alumnado con problemas de fracaso escolar.

> **EPP:** Álvaro, si con la ley nueva un alumno puede, por ejemplo, desde 1º ESO, llevar una asignatura sin haberla aprobado ningún año, ¿eso no fomentaría que un alumno no mostrase interés por esa asignatura?
>
> **Álvaro:** ¿Tú que piensas? (sonríe)
>
> **EPP:** yo conozco a mucha gente que sí...
>
> **Álvaro:** se supone, siempre me muevo desde el ámbito del se supone, que ese problema se debe haber trabajado. Es decir, si el alumno está suspendiendo una materia en 1º, 2º, 3º ..., debe tener su plan de refuerzo, probablemente haya intervenido el equipo de orientación de centro, hay mecanismos para atajar [...] Ellos ya saben que van a pasar de curso, pero tú sabes que sí, que van a pasar, pero su nivel de desfase curricular va a ser tan grande que, en 2º, va a volver a arrastrar. Ahí está el trabajo del equipo educativo y del profesor de la asignatura para rescatar al alumno. Hay casos que se puede y casos que no.

Fijándonos en la pregunta del EPP, observamos cómo el formador reconduce la discusión tratando de promover una reflexión sobre el fracaso escolar y el rol que, como docentes, a nivel individual y dentro de una comunidad profesional, pueden asumir, por lo que el tema del fragmento gira principalmente respecto al desarrollo de la identidad profesional. Las preguntas del formador o el feedback nos sirven como indicadores de su capacidad para gestionar discusiones en el aula de formación. Hipotetizamos que Álvaro interpreta el comentario del EPP y anticipa la presencia de una posible creencia sobre el papel del docente ante el fracaso escolar. Además, es consciente de que podría conducirles a una actitud de desidia ante la enseñanza, motivada por el hecho de que el alumnado tiene garantizada su promoción por imperativo legal. Esto último apuntaría a una evidencia de su MTEPCK, como ya hemos comentado, al identificar esta creencia como un potencial obstáculo para sus EPP, de manera que concluye con una reflexión sobre qué podría hacer el profesor para ayudar a este tipo de alumnado, siendo el comentario proporcionado una evidencia de su conocimiento sobre protocolos.

CONCLUSIONES

El presente estudio constituye una primera aproximación al conocimiento profesional de un formador de docentes en su tarea de facilitador del desarrollo profesional del profesorado. En primer lugar, el modelo de Escudero-Ávila et al. (2021) evidenció ser una herramienta analítica potencial para comprender el saber profesional del formador, aunque sigue siendo necesario su testeo en otros contextos y con otros perfiles de formadores. Las evidencias empíricas recolectadas en la Tabla 1

corroboran que dicho conocimiento permite al formador articular varios niveles a la vez, como se ha observado en el primer episodio. Álvaro empleó una estrategia cooperativa durante la formación con el objetivo de que los EPP tuviesen un primer contacto con este tipo de metodologías, ofreciéndoles una oportunidad de elaborar conocimiento didáctico desde la propia experiencia vivida, a la vez que trataba de poner en valor la importancia del trabajo colectivo dentro de una comunidad profesional, como aspecto vinculado con la identidad profesional. No obstante, los aspectos relativos a la identidad profesional requieren más atención y reflexión dado lo limitado de la literatura. Por tanto, el formador enseña el contenido considerando un doble rol en el EPP: es aprendiz en la formación y a la vez futuro docente.

Tabla 1. Evidencias de CP del Formador de Docentes de Matemáticas identificadas en los episodios

Subdominios		***Episodio 1***	***Episodio 2***
Conocimiento del Contenido (MTECK)	Conocimiento Disciplinar	Estrategias cooperativas para enseñar matemáticas	
	Prácticas Profesionales	Gestión de aula e implementación de metodologías según los objetivos	Normativa de referencia y currículum Protocolos de actuación
	Identidad Profesional	Docente crítico, reflexivo y coherente	Creencias/concepciones sobre la enseñanza e impacto en la práctica Docente comprometido
Conocimiento Didáctico del Contenido (MTEPCK)	Conocimiento de la Enseñanza del Contenido	El debate como estrategia para el DP Ejemplos basados en la práctica	El debate como estrategia para el DP El feedback o andamiaje como estrategia para el DP
	Conocimiento de las Características del DP	Formas de razonar y pensar de los EPP	Indicadores/evidencias de DP de los docentes Obstáculos y dificultades

En otro orden de cosas, Chapman (2021) señala que sigue siendo necesario buscar un consenso sobre lo que debiera ser el contenido de la formación. Si bien, aunque la investigación acerca de la educación del profesor ofrece un marco general sobre el que establecer focos de contenido, consideramos que, como investigadores, son muchos los esfuerzos necesarios con el fin de aunar e integrar las distintas perspectivas en torno al DP del docente. En este trabajo, hemos dado un primer paso en esa dirección, evidenciando cómo la investigación (Ponte, 2012a) apunta a tres áreas claves.

Queremos concluir, señalando el papel esencial que juega la comunidad investigadora en torno a otro problema de investigación como es la construcción de conocimiento profesional de los formadores, y cómo las diversas comunidades profesionales configuran su identidad. Por tanto, afirmamos que es crucial el hecho de que las investigaciones no sólo focalicen en aspectos concretos del desarrollo profesional del docente, sino que también incluyan reflexiones explícitas sobre cómo dichos descubrimientos pueden ser de utilidad a los formadores.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con la ayuda del grupo HUM-462 Desarrollo Profesional del Docente, del proyecto PID 2021-122180OB-100 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España y de la Red MTSK.

Referencias

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional : Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, *8*(1y2), 111–138. https://doi.org/10.48489/quadrante.22716

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 1–18). Universidade da Coruña y SEIEM. http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/1017752.pdf

Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educationl Settings*. Open University Press.

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 417–427. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

Chapman, O. (2021). Mathematics teacher educator knowledge for teaching teachers. En K. Beswick y O. Chapman (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges* (pp. 403–416). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_74

Chick, H., y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 475–499. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la maemática: un estudio de caso* [Tesis de la Universidad de Huelva]. http://hdl.handle.net/10272/2742

Escudero-Ávila, D. I., y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educacion Matematica*, *32*(2), 8–38. https://doi.org/10.24844/EM3202.01

Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflectionsemerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators: International Perspectives and Challenges* (pp. 23–40). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_1

Leikin, R. (2020). How Far is the Horizon? En K. Beswick y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 4* (Second, pp. 15–33). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789004424210

Leikin, R., Zazkis, R., y Meller, M. (2018). Research mathematicians as teacher educators: focusing on mathematics for secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(5), 451–473. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9388-9

Martínez-Romero, M. L., González, E., y Zacarés García, F. J. (2015). La técnica puzzle de Aronson en la enseñanza/aprendizaje de la Geometría. En N. Ibarra Rius (Coord.), *Investigación e innovación en educación superior*, (pp. 187-192). Universidad de Valencia y Florida Universidad.

Ponte, J. P. (1994). O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Educaçao e Matemática*, *31*, 9-12 e 20. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4474

Ponte, J. P. (2012a). Mathematics teacher education programs: Practice and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(5), 343–346. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9226-z

Ponte, J. P. (2012b). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó. Enlace

Ponte, J. P., y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da Identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, *11*(2), 145–163. Enlace

Wu, Y., Yao, Y., y Cai, J. (2020). Learning to Be Mathematics Teacher Educators: From Professional Practice to Personal Development. En K. Beswick y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 4* (pp. 231–270). Brill Sense. https://doi.org/10.1163/9789004424210_010

[i] Utilizamos el término profesorado para referirnos indistintamente a los docentes de Educación Infantil, Primaria o Secundaria.

¿QUÉ CONOCIMIENTOS DE ÁLGEBRA TEMPRANA MOVILIZAN LAS TAREAS QUE DISEÑA EL PROFESORADO EN FORMACIÓN DE EDUCACIÓN INFANTIL?

What knowledge of early algebra do the tasks designed by early childhood education teacher trainees mobilise?

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y

Universidad de Girona

Resumen

En este estudio se presenta el análisis de las tareas matemáticas sobre álgebra temprana que diseña el profesorado en formación de educación infantil para niños y niñas de 3 a 5 años de edad. A partir de la técnica de análisis de contenido, se han analizado 96 tareas matemáticas diseñadas durante dos sesiones de clase en la asignatura "Aprendizaje de las matemáticas", del Grado de Maestro de educación infantil de una universidad española. Los resultados revelan una variedad de tareas matemáticas, predominando mayoritariamente las tareas de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos, seguida de tareas que atienden a la descripción de cambio. Mientras que una baja presencia de tareas implica seriaciones con patrones de repetición. Se concluye que es necesario ofrecer experiencias de formación al profesorado que permitan profundizar en el diseño de tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Palabras clave: *álgebra temprana, tarea matemática, profesorado en formación, educación infantil.*

Abstract

This study presents the analysis of mathematical tasks on early algebra designed by preservice Early Childhood Education teachers for children aged 3 to 5 years old. Based on the content analysis technique, 96 mathematical tasks designed during two class sessions of the subject "Learning mathematics" of the preservice early childhood education teacher degree at spanish university were analysed. The results reveal a variety of mathematical tasks, with a predominance of tasks involving the establishment of relationships based on the recognition of attributes, followed by tasks that focus on the description of change. While a low presence of tasks involving serialisation with repetition patterns is observed. It is concluded that it is necessary to offer teacher training experiences that allow us to deepen in the design of tasks that promote the development of early algebraic thinking.

Keywords: *early algebra, mathematical tasks; preservice teacher, early childhood education.*

INTRODUCCIÓN

Diversos currículos contemporáneos de educación infantil (e.g., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority [ACARA], 2020; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2018; Ministry of Education, Republic of Singapore, 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) han experimentado un cambio durante las últimas dos décadas, puesto que han introducido conocimientos de naturaleza algebraica de manera progresiva (Pincheira y Alsina, 2021). Esta alternativa de integración curricular, responde a las directrices del *Early-Algebra*, a partir de ahora álgebra temprana, cuyo propósito es promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización y facilitar una mejor comprensión de las matemáticas (Cai y Knuth, 2011).

Pincheira, N., Alsina, Á. y Acosta, Y. (2023). ¿Qué conocimiento de álgebra temprana movilizan las tareas que diseña el profesorado de educación infantil?. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 451–458). SEIEM.

El álgebra temprana busca desarrollar en las aulas de clase modos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de tareas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, donde los estudiantes exploren, hagan predicciones, discutan, argumenten y comprueben ideas (Blanton y Kaput, 2005).

El NCTM (2000) plantea que considerar el álgebra como un bloque de contenido a partir de la educación infantil, permite al profesorado ayudar a los niños y niñas a construir una base sólida de comprensión de conceptos algebraicos elementales y proporcionar experiencias de aprendizaje que fomenten el desarrollo del pensamiento algebraico, como preparación para un trabajo más complejo en los grados superiores.

Sullivan et al. (2013) asegura que "lo que los estudiantes aprenden en gran medida se define por las tareas que se les asignan y que componen la base de sus acciones" (p.57). Por tanto, las tareas matemáticas que propone el profesorado para promover el aprendizaje del álgebra desde edades tempranas deberían facilitar que los estudiantes piensen profundamente en las relaciones, patrones y el cambio (Twohill et al., 2019).

Dado que el aprendizaje de los estudiantes está determinado por el tipo de tarea que se les plantea, las tareas matemáticas que propone el profesorado para abordar el aprendizaje del álgebra en educación infantil son fundamentales. En este estudio, se asume por tarea matemática la información que impulsa el trabajo con los estudiantes, incluidas las representaciones, el contexto, las preguntas e instrucciones (Sullivan et al., 2013).

De acuerdo con Wake (2018) el diseño de tareas matemáticas forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza, puesto que desempeñan un rol importante en las experiencias de aula para los estudiantes y el profesorado. Sin embargo, aun son escasos los estudios que profundicen en las tareas propuestas por el profesorado de educación infantil para abordar conocimientos de naturaleza algebraica desde edades tempranas.

Considerando los lineamientos que plantea el álgebra temprana y los desafíos que requiere enfrentar la incorporación de tareas que promuevan el pensamiento algebraico, es necesario profundizar en las tareas matemáticas que propone el profesorado en formación de educación infantil, dado que son un agente clave para impulsar el cambio curricular que demanda la enseñanza de este bloque de contenido en las primeras edades. Desde esta perspectiva, nos preguntamos ¿qué conocimientos de álgebra temprana movilizan las tareas diseñadas por el profesorado en formación de educación infantil?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación, se asume la caracterización de los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de las tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en educación infantil, propuesta por Pincheira y Alsina (2021). Con base en este marco, el objetivo de nuestro estudio consiste en analizar los conocimientos sobre álgebra temprana de las tareas matemáticas diseñadas por el profesorado en formación de educación infantil para niños de 3 a 5 años de edad.

EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN EDUCACIÓN INFANTIL

La enseñanza del álgebra temprana en educación infantil se ha consolidando como una línea de investigación, puesto que existe un consenso cada vez mayor por parte de los investigadores por brindar experiencias de aprendizaje que impulsen el desarrollo del pensamiento algebraico en esta etapa escolar (Alsina, 2022; Castro et al., 2017; Clements y Sarama, 2015).

Enseñar álgebra temprana en educación infantil requiere atender a una amplia concepción del álgebra que comprende diversos conocimientos que se desarrollan principalmente a través de la indagación y exploración del entorno, la manipulación, la experimentación y el juego. Por tanto, el desarrollo del pensamiento algebraico se manifiesta por medio de diversas tareas, tales como "el análisis de las

relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelización, la justificación, el ensayo y error y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149).

Los resultados de investigación en torno al álgebra temprana en infantil han apuntado, hasta el momento, tres grandes tipos de conocimientos que contribuyen a desarrollar el sentido algebraico en estos niveles. Primero, emergen a partir de los conocimientos físicos que adquieren los niños y niñas en los primeros años a través de la manipulación de objetos (Piaget, 1953), permitiendo construir diferentes tipos de relaciones de carácter cualitativo y cuantitativo, al comparar elementos por medio de semejanzas o diferencias, de acuerdo con un criterio (Alsina, 2006, 2011, 2022; Lenz, 2022). En este contexto, el reconocimiento de atributos juega un papel fundamental para establecer relaciones de clasificación, ordenación y correspondencia, entre otras (Castro-Rodríguez y Castro, 2016).

Segundo, los patrones de repetición contribuyen también al desarrollo del pensamiento algebraico, y permiten la adquisición de habilidades, que se configuran como predictoras del rendimiento matemático en las etapas educativas posteriores (Rittle-Johnson et al., 2013). Para alcanzar tales habilidades, la literatura plantea una serie de tareas (Clements y Sarama, 2015; Lüken y Sauzet, 2020; Rittle-Johnson et al., 2013; Wijns et al., 2019) que permiten transitar del pensamiento recursivo al funcional (Lüken y Sauzet, 2020). Acosta et al. (2022) y Pincheira et al. (2022a) otorgan un orden de dificultad creciente a dichas tareas: duplicar el mismo patrón, encontrar elementos faltantes de una secuencia; ampliar una secuencia; construir el mismo patrón con diferentes elementos; identificar la unidad de repetición e inventar un patrón.

Y tercero, la noción de cambio entendida desde una perspectiva amplia como una transformación a partir de un operador (Alsina, 2011) es considerada por el NCTM (2000), un conocimiento importante del álgebra en educación infantil, puesto que ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas y comprender el mundo.

Así pues, a partir del análisis de diversos currículos contemporáneos que han incorporado explícitamente el estudio del álgebra, junto con las aportaciones sobre los conocimientos importantes de álgebra temprana planteados en la revisión de la literatura, Pincheira y Alsina (2021) caracterizan los conocimientos involucrados en la resolución de tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. En concreto, para la educación infantil establecen, inicialmente, tres categorías de conocimiento: a) establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos; b) seriaciones a partir de patrones de repetición; y c) descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

METODOLOGÍA

De acuerdo con el propósito de la investigación, se ha diseñado un estudio de carácter exploratorio-descriptivo (Creswell, 2009) en el que han participado 105 estudiantes del Grado de Maestro de educación infantil, pertenecientes a una universidad de España.

Los participantes cursaban la asignatura de Aprendizaje de las Matemáticas, donde reciben una formación general sobre la educación matemática infantil, se profundiza en los contenidos, recursos y estrategias de enseñanza para abordar el álgebra temprana de 3 a 6 años y otros bloques de contenido como la numeración y el cálculo, la geometría, medida, y estadística y probabilidad. La investigación se llevó a cabo al inicio de la asignatura mientras se abordaba el bloque de contenido de álgebra para edades tempranas, previo a profundizar en los otros bloques de contenido.

En el contexto de dos sesiones regulares del proceso de formación (90 minutos cada sesión) se plantea al profesorado en formación conformar equipos de trabajo para diseñar tareas matemáticas que promuevan la enseñanza del álgebra temprana para niños de 3, 4 y 5 años, respectivamente. Para ello, la instrucción es: a) diseñar una tarea para cada nivel; b) considerar a elección tareas de identificar (reconocimiento de atributos o agrupaciones), relacionar (clasificación, ordenación, correspondencia

o seriación por criterios cualitativos), y operar (cambios), siguiendo los tipos de acciones descritos por autores como Canals (1992) o Alsina (2006, 2022); c) describir la gestión que se debe realizar para el desarrollo de la tarea; y d) plantear preguntas que permitan favorecer la comprensión de la tarea.

Las tareas matemáticas diseñadas por el profesorado en formación se entregan de manera escritas con el apoyo de un procesador de texto y constituyen las unidades de análisis del estudio.

Categorías y procedimiento de análisis

Las unidades de análisis se han examinado de acuerdo con las categorías de conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en educación infantil propuestas por Pincheira y Alsina (2021). Para ello, se han considerado los indicadores que profundizan en tales conocimientos, descritos en Pincheira et al. (2022a), como se aprecia en la Tabla 1. Cabe destacar que una determinada tarea, puede atender a más de un indicador.

Tabla 1. Categorías e indicadores utilizados en el proceso de codificación

Caracterización del álgebra temprana en educación infantil	Indicador
Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	1. Reconocimiento de atributos de elementos u objetos 2. Agrupar elementos a partir de la identificación de sus propiedades 3. Clasificar elementos a partir de criterios cualitativos o cuantitativos 4. Establecer ordenaciones de objetos de manera ascendente o descendente 5. Establecer relaciones de correspondencia a partir del reconocimiento de atributos 6. Comparación de elementos a partir de criterios cualitativos o cuantitativos
Seriaciones a partir de patrones de repetición	7. Duplicar el patrón a partir de una secuencia 8. Encontrar elementos faltantes en una secuencia 9. Ampliar una secuencia 10. Construir un mismo patrón con diferentes elementos 11. Identificar la unidad de repetición de un patrón 12. Crear un patrón a partir de elementos determinados
Cambios cualitativos y cuantitativos	13. Reconocer cambios cualitativos 14. Reconocer cambios cuantitativos 15. Aplicar cambios cualitativos 16. Aplicar cambios cuantitativos

La codificación de las tareas matemáticas se ha realizado de acuerdo con las categorías e indicadores antes descritos, aplicado la regla de la presencia (Bardin, 2002), ya que la presencia/ausencia es significativa para describir un tipo específico de conocimiento en su totalidad. Para ello, se han asignando puntuaciones en caso de presencia (1 punto) o ausencia (0 puntos). Para establecer los conocimientos que movilizan cada tarea matemática se presta especial atención a la instrucción de la tarea, las preguntas que se formulan en el desarrollo de la tarea y los requerimientos que demanda para ser resuelta.

Para garantizar la confiabilidad del proceso de codificación, los autores llevaron a cabo un proceso de calibración mediante la codificación conjunta, para luego realizar la codificación individual. Posteriormente, las tareas se han analizado aplicando revisiones cíclicas hasta establecer la presencia/ausencia de los indicadores. Finalmente, se ha realizado una triangulación de las codificaciones establecidas por los autores y discutido los desacuerdos hasta establecer un consenso.

RESULTADOS

Considerando nuestro objetivo de estudio, se describen los datos a partir de la caracterización de los conocimientos de álgebra temprana para la educación infantil (Pincheira y Alsina, 2021), descritos en la Tabla 1.

Se han analizado un total de 96 tareas matemáticas diseñadas por el profesorado en formación de educación infantil, para abordar la enseñanza del álgebra temprana desde los 3 a 5 años de edad. La Tabla 2 muestra los datos correspondientes a los conocimientos que movilizan tales tareas.

Tabla 2. Distribución por porcentaje de los conocimientos de álgebra temprana que movilizan las tareas

Caracterización del álgebra temprana en educación infantil	3 años (*n*=32)	4 años (*n*=32)	5 años (*n*=32)	Total (*n*=96)
Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	93.8	62.5	31.2	62.5
Seriaciones a partir de patrones de repetición	6.2	15.6	6.3	9.4
Cambios cualitativos y cuantitativos	0	21.9	62.5	28.1

A nivel general, se observa una mayor presencia de tareas de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos (62.5%), seguidas de tareas vinculadas a la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (28.1%). Finalmente, las tareas de seriaciones a partir de patrones de repetición alcanzan una escasa presencia, con solo un 9.4%.

En las tareas diseñadas para los niveles de 3 y 4 años, predomina el establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos. Mientras que, en las tareas diseñadas para al nivel de 5 años se aprecia una mayor concentración de tareas de cambios cualitativos y cuantitativos. Cabe destacar que, para el nivel de 3 años, el profesorado en formación no diseña tareas de descripción de cambios.

De manera más específica, si nos situamos desde la perspectiva de los indicadores que precisan los conocimientos matemáticos de álgebra temprana en educación infantil (Pincheira et al., 2022a), es posible observar su predominancia en la Tabla 3 respecto de las tareas analizadas en cada nivel educativo.

Tabla 3. Distribución por porcentaje de los indicadores en relación con el total de tareas analizadas por nivel

Caracterización del álgebra temprana en educación infantil	indicadores	3 años (*n*=32)	4 años (*n*=32)	5 años (*n*=32)
Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	1	40.6	19	12.5
	2	18.8	21.9	0
	3	28.1	9.4	6.3
	4	3.1	3.1	3.1
	5	9.4	18.8	9.4
	6	40.6	21.9	12.5
Seriaciones a partir de patrones de repetición	7	0	0	0
	8	0	3.1	6.3
	9	6.3	9.4	6.3
	10	0	3.1	0
	11	0	6.2	0
	12	0	6.2	3.1
Cambios cualitativos y cuantitativos	13	0	6.2	43.8
	14	0	3.1	9.4
	15	0	18.8	43.8
	16	0	0	6.3

Podemos observar que, en las tareas de establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos diseñadas para el nivel de 3 años predominan los indicadores 1 y 6, asociado con el reconocimiento

de atributos y la comparación de elementos a partir de criterios cualitativos o cuantitativos, alcanzando ambos una presencia del 40.6%.

Asimismo, en el nivel de 4 años predominan los indicadores 2 (21.9%) y 6 (21.9%), asociados con la agrupación y comparación de elementos, respectivamente. Mientras que, en las tareas diseñadas para el nivel de 5 años, al igual que en el nivel 3, se evidencian mayoritariamente los indicadores 1 y 6, con una presencia del 12.5% cada uno.

Por otra parte, en cuanto a las tareas diseñadas para trabajar con seriaciones a partir de patrones de repetición para el nivel de 3 años sólo se evidencia el indicador 9 que tiene relación con ampliar una secuencia (6.3%). A su vez, este indicador es el que alcanza la mayor predominancia en los niveles de 4 y 5 años, con una presencia del 9.4% y 6.3%, respectivamente. De igual forma, en este último nivel, también predomina del indicador 8 asociado con encontrar elementos faltantes de una secuencia, con una presencia del 6.3%.

Finalmente, las tareas diseñadas para abordar la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos en el nivel de 4 años, predomina el indicador 15 vinculado con aplicar cambios cualitativos, con una presencia del 18.8%. Asimismo, en el nivel de 5 años, predominan los indicadores 13 y 15, que tienen relación con el reconocimiento y aplicación de cambios cualitativos, con una presencia del 43.8% cada uno.

A modo de ejemplo, en la Figura 1, se presenta una tarea matemática diseñada por un profesor en formación.

Figura 1. Extracto de tarea matemática diseñada para niños y niñas 5 años

Plantearemos un reto con la máquina de cambiar cualidades diseñada con una caja de cartón. Los alumnos verán el monstruo que entra en la máquina y el que sale, tendrán que descubrir la cualidad que ha cambiado. Se presentan monstruos de diferentes colores (verde, rosa y azul), tamaños (pequeño y grande) y formas (triangular y circular).
Preguntas:
- Si en la máquina entra un monstruo verde pequeño y sale un monstruo verde y grande ¿qué ha cambiado? ¿qué no ha cambiado?
- Si en la máquina entra un monstruo azul de gran tamaño y forma triangular, ¿qué monstruos podrían salir?

La tarea matemática aborda el cambio, más concretamente se deben aplicar cambios cualitativos a través de un operador y reconocer las características que han cambiado, por ejemplo, el color, el tamaño o la forma.

CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio se han analizado un conjunto de 96 tareas matemáticas sobre álgebra temprana que diseña el profesorado en formación para niños y niñas de 3 a 5 años de edad. Dicho análisis se ha realizado a partir de las categorías de conocimiento que caracterizan el álgebra temprana en educación infantil propuesta por Pincheira y Alsina (2021).

El análisis de las tareas matemáticas ha evidenciado que para promover la enseñanza del álgebra temprana el profesorado en formación plantea principalmente tareas que implican el establecer relaciones a partir del reconocimiento de atributos cualitativos o cuantitativos de una colección (62.5%) en todos los niveles. Le siguen en menor medida las tareas que requieren de la descripción de cambios, más específicamente vinculadas con aplicar cambios cualitativos (28.1%), que sólo se observan en los niveles de 4 y 5 años. Por último, se observa una presencia mínima de tareas que profundicen en las seriaciones a partir de patrones de repetición (9.4%). El planteamiento de estas últimas está presente en todos los niveles y se centra mayoritariamente en ampliar una secuencia.

La escasa atención que presentan las tareas relativas al cambio es preocupante, puesto que es un conocimiento que sientan las bases para avanzar hacia el desarrollo del pensamiento funcional y fomentar la capacidad de generalizar (Alsina, 2022; Castro et al., 2017).

Por otra parte, las tareas que involucran patrones de repetición, al centrase principalmente en ampliar una secuencia promueven la habilidad de extender (Rittle-Johnson et al., 2013), atendiendo sólo al desarrollo del pensamiento recursivo (Lüken y Sauzet, 2020). Esto reporta semejanzas con otras investigaciones (e.g., Pincheira et al., 2022b), confirmando que el profesorado de educación infantil no considera en el diseño una diversidad de tareas para hacer patrones. Por tanto, es necesario que el profesorado en formación profundice en el diseño de tareas con patrones de repetición, de manera que pueda incorporar otras tareas, tales como, construir un mismo patrón con diferentes elementos, identificar la unidad de repetición y inventar un patrón. Esto permitiría transitar hacia el desarrollo del pensamiento funcional (Wijns et al., 2019).

De acuerdo con Cai y Knuth (2011), es importante construir una base temprana de conocimientos para asegurar el éxito en álgebra. Por tanto, consideramos que es necesario ofrecer experiencias de formación al profesorado que permitan profundizar en el diseño de tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Tales experiencias, requieren tener en cuenta instancias de reflexión en torno a la tarea diseñada e implementación de la misma, de manera que se evidencie el progreso y mejora de la propuesta inicial. Esto último, constituye una limitación de nuestro estudio.

Agradecimientos: Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447 y el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el marco de la beca de Formación del Profesorado Universitario (FPU16-01856).

Referencias

ACARA (2020). The Australian Curriculum: Mathematics. https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Acosta, Y., Pincheira, N., y Alsina, Á. (2022). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de Educación Infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 91-110. https://doi.org/10.35763/aiem22.4193

Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* ICE-Horsori.

Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.

Bardin, L. (2002). *Análisis de contenido* (3.ª ed.). Akal.

Blanton, M., y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.https://doi.org/10.2307/30034944

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Canals, Mª. A. (1992). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola. I. Parvulari.* Eumo.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Ediciones Pirámide.

Clements, H.D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8,* 139-151.

Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education, 54,* 1181-1197.https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6

Lüken, M.M., y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competències. *Mathematical Thinking and Learning*. http://10.1080/10986065.2020.1719452

Ministerio de Educación (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministry of Education Singapore (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6*. Ministry of Education.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Papic, M.M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the Development of Preschoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42,* 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Piaget, J. (1953). How children form mathematical concepts. *Scientific American, 189*(5), 74-79.

Pincheira, N., Acosta, Y., y Alsina, Á. (2022a). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA 17*(1), 1-24. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (2022b). Habilidades para hacer patrones en tareas diseñadas por futuras maestras de educación infantil. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 471-478). SEIEM.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396. http://dx.doi.org/10.1080/15248372.2012. 689897

Sullivan, P., Clarke, D., y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science y Business Media.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

Twohill, A., Breen, S., Venkat, H., y Roberts, N. (2019). Task design for early algebra. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.). *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 185-186). PME.

Wake, G. C. (2018). A case study of theory-informed task design: what might we, as designers, learn? En L.J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 94-109). SEIEM.

Warren, E., y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B., y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. En K. Robinson, H. Osana, y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood* (pp. 139–161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1 9

INVENCIÓN DE SITUACIONES ADITIVAS CON NÚMEROS ENTEROS

Invention of additive situations with integer numbers

Quevedo Gutiérrez, E.[a], Zapatera Llinares, A.[b] y Lijó Sánchez, R.[c]

[a]Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, [b]Universidad Cardenal Herrera CEU y [c] Universidad de La Laguna

Resumen

En esta investigación se estudian las producciones de los alumnos al inventar situaciones aditivas con números enteros. Para ello se analizan las producciones de 266 estudiantes de 6º de Educación Primaria y 1º de Educación Secundaria al transferir la situación aditiva 2 - 3= -1 desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual. Los resultados revelan que el 60% de los alumnos participantes ha sido capaz de describir una situación que se ajuste a la operación, que el alumnado tiende a describir más situaciones aditivas de variación que de comparación o composición de estados y con más modelos concretos de desplazamiento que de neutralización. La mayoría de las situaciones descritas son cortas, con una estructura sintáctica sencilla y un contexto cercano, aunque, aproximadamente, una de cada cinco situaciones resulta incoherente.

Palabras clave: *invención de problemas, números enteros, situación aditiva, transferencias entre dimensiones, modelos concretos.*

Abstract

This research studies the production of the pupils when inventing additive situations with integers. To do this, the productions of 266 students in the 6th year of Primary Education and 1st year of Secondary Education are analyzed by transferring the additive situation 2 - 3 = -1 from the abstract dimension to the contextual dimension. The results reveal that 60% of the participating students have been able to describe a situation that fits the operation, that the students tend to describe more additive situations of variation than of comparison or composition of states, and with more concrete models of displacement than neutralization. Most of the situations described are short, with a simple syntactic structure and a close context, although approximately one in five situations is incoherent.

Keywords: *invention of problems, integers, additive situation, transfers between dimensions, concrete models.*

INTRODUCCIÓN

La invención de problemas, a pesar de ser un componente importante de la resolución de problemas (Kilpatrick, 1987), es una práctica poco habitual en las clases de matemáticas (Castro, 2011; Ruiz-Socolado y Lupiañez, 2022), y no ha recibido una atención explícita en los currículos (Kilpatrick, 1987). Por esta razón, la investigación en este campo ha sido escasa e insuficiente (Ayllón y Gómez, 2014; Ayllón et al., 2016). Sin embargo, en los últimos años se ha iniciado una línea de investigación centrada en la invención de problemas (Castro, 2011; Espinoza et al., 2016; Torregrosa et al., 2021), que aún está lejos de desarrollar su hipotético potencial educativo. De esta forma, investigaciones realizadas en contextos educativos señalan que la invención de problemas mejora determinados procesos de aprendizaje matemático (Ayllón y Gómez, 2014; Ayllón et al., 2016) e insisten en la necesidad de incorporar esta tarea en la enseñanza de las matemáticas (Castro, 2011), en los currículos educativos (Cai et al., 2015) y en programas de formación inicial y continua de profesores (Malaspina, 2016).

Quevedo Gutiérrez, E., Zapatera Llinares, A. y Lijó Sánchez, R. (2023). Invención de situaciones aditivas con números enteros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 459–466). SEIEM.

Rudnitsky et al. (1995) compararon tres métodos en la resolución de problemas aditivos con números positivos: 1) método redactar, en el que los alumnos redactan historias y problemas, 2) método resolver, en el que los alumnos resuelven sistemáticamente problemas, y 3) método tradicional, en el que los alumnos resuelven problemas para aplicar las reglas operatorias aprendidas. Observaron que los alumnos que siguieron el método redactar obtuvieron mejores resultados que los que siguieron los otros métodos en una prueba realizada varios meses después de la experiencia.

Investigaciones posteriores extendieron la investigación a la resolución de problemas aditivos con números negativos (Bruno, 2000, 2009) y comprobaron que los métodos redactar y resolver obtuvieron mejores resultados que el método tradicional. Y, aunque no obtuvieron resultados tan positivos como Rudnitsky et al. (1995) en el método redactar, confirmaron que "los problemas que escriben los alumnos son una rica fuente de conocimiento sobre su comprensión de los mismos" (Bruno, 2000, p. 250) y que el método redactar es una alternativa de enseñanza (Bruno, 2009) que necesita ser investigada con profundidad.

La invención de problemas, en esta investigación, se centra en las situaciones aditivas con números negativos, que son un aspecto fundamental en la incorporación de los números, donde el alumno debe romper con la concepción del número como representación de la realidad que ha ido construyendo durante la Educación Primaria (Herrera y Zapatera, 2019) y que le ocasiona muchas dificultades en su aprendizaje (Cid, 2016; Iriarte *et al*., 1991; Zapatera, 2021).

MARCO TEÓRICO

La invención de problemas es un proceso matemático complejo que requiere una contribución personal, original y creativa, y en el que los estudiantes formulan enunciados a partir de situaciones concretas o de problemas dados (Ayllón et al., 2016;Espinoza et al. 2016); además, es una forma eficaz de aprender matemáticas que, incluso puede ser más importante que la propia resolución de problemas (Cai et al., 2015).

Investigaciones en el campo de la resolución de problemas consideran que existe una alta correlación entre las habilidades para comprender, resolver e inventar problemas (Ayllón y Gómez, 2014) y que los alumnos instruidos en la invención de problemas obtienen mejores resultados que los que han recibido una instrucción tradicional (Ayllón y Gómez, 2014; Bruno, 2000; 2009;; Rudnitsky et al., 1995), por lo que la invención de problemas es una herramienta eficaz para la resolución de problemas (Ayllón et al., 2016).

La invención de problemas, además de mejorar la resolución de problemas, contribuye a la construcción del conocimiento matemático (Ayllón y Gómez, 2014), responsabiliza al estudiante en su propio aprendizaje, aumentando su motivación, mejorando su actitud hacia las matemáticas y fomentando la creatividad (Castro, 2011). También contribuye a superar errores (Ayllón et al., 2016) y permite conocer y evaluar las habilidades y la comprensión de los conceptos matemáticos (Cai et al., 2015).

Stoyanova (1998) identifica tres situaciones a partir de las que se pueden formular problemas: situación libre, situación semiestructurada y situación estructurada. En la situación libre, los estudiantes no tienen restricciones para inventar problemas; en la situación semiestructurada, los estudiantes inventan problemas a partir de una experiencia o contexto; y, en la situación estructurada, los estudiantes reformulan problemas dados, cambiando las condiciones o las variables.

Aunque en la mayoría de los sistemas educativos los números enteros se formalizan en la Educación Secundaria, tradicionalmente se introducen a final de la Educación Primaria (11-12 años) con las primeras ideas de negatividad centradas en la ordenación y comparación, en la representación de números en la recta y en la resolución de situaciones aditivas. Esta introducción se realiza, habitualmente, por medio de modelos concretos (Cid, 2016), tanto de neutralización como de desplazamiento.

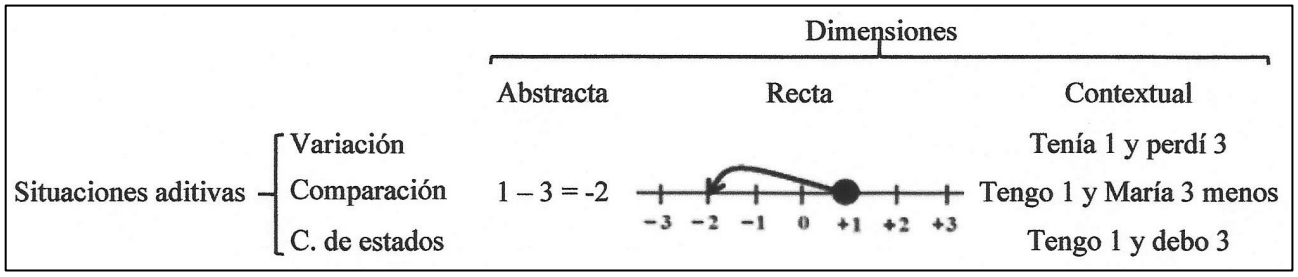
Numerosos investigadores, aunque proponen la utilización de los modelos concretos para introducir los números enteros y su estructura aditiva, consideran que pueden ser un obstáculo para su formalización y para la comprensión de su estructura multiplicativa (Cid, 2016). Pero, si la enseñanza de los números enteros exclusivamente desde los modelos concretos puede acotar su formalización y comprensión, reducirla al plano formal podría conducir a un "formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones" (Iriarte et al., 1991, p. 1).

Una estrategia que permite unificar los planos concreto y formal es la utilización de las tres dimensiones establecidas por Bruno (1997, 2000, 2009) y Bruno y Martinón (1994): abstracta, recta y contextual. La representación de números y operaciones se realiza en la dimensión abstracta, mediante símbolos; en la dimensión recta, mediante puntos y vectores en la recta numérica; y, en la dimensión contextual, mediante situaciones de la vida cotidiana. Una comprensión efectiva de los números implica también el conocimiento de las transferencias entre todas ellas; sin embargo, tradicionalmente, se ha prestado más atención a la transferencia desde la dimensión contextual a la abstracta que de la abstracta a la contextual (Bruno, 1997); es decir, se ha priorizado la resolución de problemas sobre la invención de problemas (Cai et al., 2015).

En esta investigación, las situaciones matemáticas, entendidas como cualquier contexto a partir del cual de desarrolla el conocimiento matemático, se diferencian estructuralmente en (1) situaciones problema, si constan de datos y una pregunta, y (2) situaciones no problema, si contienen datos, pero no la pregunta. Y las situaciones aditivas, relacionadas con problemas aditivos de una etapa, se clasifican semánticamente en (1) situaciones de variación, si expresan el cambio de un estado con el tiempo, (2) situaciones de comparación, si comparan dos estados y (3) situaciones de composición de estados, si expresan dos estados en un mismo momento (Nesher, 1982; Vergnaud, 1982).

En la Figura 1 se presentan ejemplos de situaciones aditivas expresadas en las tres dimensiones

Figura 1. Ejemplos de situaciones aditivas



El objetivo de esta investigación es estudiar las producciones de alumnos de 6º de Primaria y 1º de ESO al inventar situaciones matemáticas con números enteros, cuando transfieren una situación aditiva desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual.

METODOLOGÍA

En esta investigación han participado 266 alumnos de un mismo centro, 127 de 6º de Primaria y 139 de 1º de ESO, a los que sus profesores habían impartido el tema de los números enteros siguiendo las indicaciones curriculares, según su criterio y de forma independiente a la investigación.

Para la recogida de datos, los alumnos debían escribir el enunciado de un problema que se resolviera mediante la operación 2 - 3= -1.

El análisis de las producciones de los alumnos se ha realizado en cuatro fases: análisis matemático, análisis sintáctico y análisis de coherencia. En el análisis matemático se determina la corrección de las producciones y se clasifican en función del tipo de situación (situación problema y situación no problema), del tipo de modelo (desplazamiento y neutralización) y del tipo de situación aditiva (variación, comparación y composición de estados). En el análisis sintáctico se clasifican las producciones en función de su fórmula proposicional y se localizan los nexos utilizados. En el análisis

de coherencia se clasifican las situaciones incoherentes en cuatro grupos: (1) situaciones imposibles o sin sentido, (2) situaciones con preguntas mal formuladas, (3) situaciones con expresiones redundantes y (4) situaciones con datos inconexos.

RESULTADOS

Análisis matemático

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en función del tipo de situación, del modelo utilizado y del tipo de situación aditiva. Entre paréntesis se muestra el número de producciones de los alumnos que se ajustan a la operación propuesta.

Tabla 1. Resultados de la invención de situaciones desde la operación 2 – 3 = -1

		Producciones					
		Nº			%		
		6ºP	1ºESO	Total	6ºP	1ºESO	Total
Situación	Situación problema	80 (61)	82 (60)	162 (121)	63 (48)	59 (43)	61 (45)
	Situación no problema	15 (5)	44 (34)	59 (39)	12 (4)	32 (25)	22 (15)
	No situación	6 (0)	2 (0)	8 (0)	5 (0)	1 (0)	3 (0)
	En blanco	26 (0)	11 (0)	37 (0)	20 (0)	8 (0)	14 (0)
Modelos concretos	Desplazamiento	57 (44)	70 (58)	127 (102)	45 (35)	50 (42)	48 (38)
	Neutralización	38 (22)	55 (36)	93 (58)	30 (17)	40 (26)	35 (22)
	Sin modelo	6 (0)	3 (0)	9 (0)	5 (0)	2 (0)	3 (0)
	En blanco	26 (0)	11 (0)	37 (0)	20 (0)	8 (0)	14 (0)
Situaciones aditivas	Variación	64 (45)	83 (61)	147 (106)	50 (35)	60 (44)	55 (40)
	Comparación	9 (8)	17 (12)	26 (20)	7 (6)	12 (9)	10 (8)
	C. de estados	19 (13)	24 (19)	43 (32)	15 (10)	17 (14)	16 (12)
	No aditiva	9 (0)	4 (2)	13 (2)	7 (0)	3 (1)	5 (1)
	En blanco	26 (0)	11 (0)	37 (0)	20 (0)	8 (0)	14 (0)
Total		127 (66)	139 (94)	266 (160)	100 (52)	100 (68)	100 (60)

El 60% de los alumnos ha descrito una situación matemática ajustada a la operación planteada.

El 61% de los alumnos ha descrito situaciones problema, mientras que el 22% ha descrito situaciones no problema. Del 60% de las producciones que se ajustan a la operación, el 45% son situaciones problema y el 15% son situaciones no problema.

Los alumnos han utilizado más los modelos de desplazamiento que los de neutralización: el 48% frente al 35%. Los modelos de desplazamiento más utilizados son los de temperatura y, en menor cantidad, los de subir-bajar plantas de un edificio; los modelos de neutralización más utilizados son los de tener-deber y los de ganar-perder. Del 60% de las producciones que se ajustan a la operación, el 38% describen modelos de desplazamiento y el 22% modelos de neutralización

La mayoría de las situaciones aditivas son de variación, el 55%, mientras que las comparación y composición de estados son, respectivamente, el 10% y el 16%. También la mayoría de las situaciones que se ajustan a la operación describen situaciones de variación, el 40%, frente al 8% y al 12% que describen, respectivamente, situaciones de comparación y composición de estados.

Los alumnos de 1º de ESO han descrito más situaciones ajustadas a la operación que los de 6º de Primaria: el 68% frente al 52%. Por otra parte, los alumnos de 6º de Primaria han dejado más respuestas en blanco que los de 1º de ESO: el 20% frente al 8%. Los porcentajes de alumnos que describen situaciones problema son similares en ambos cursos; sin embargo, los alumnos de 1º describen más situaciones no problema que los de 6º.

Las relaciones entre situaciones con modelos de desplazamiento y neutralización y entre las distintas situaciones aditivas son similares en ambos cursos, aunque los alumnos de 1º han descrito más situaciones.

En la Figura 2 se muestran ejemplos de producciones de alumnos. Las abreviaturas A y noA se refieren, respectivamente, a situaciones que se ajustan a la operación y situaciones que no se ajustan. Los alumnos están definidos por el curso y el número asignado; por ejemplo, A1.107 corresponde al alumno 107 de 1º de ESO.

Figura 2. Ejemplos de producciones de los alumnos

			Producción	Alumno
Tipo de producción	Problema	A	En Tejeda hacían 2ºC y por la noche bajó 3ºC. ¿Cuántos grados hacía por la noche?	A1.107
		noA	Tenía 3€ y me gasté 2€ para comprarme un paquete de chuches ¿cuanto me queda ahora?	A6.101
	No problema	A	Isabel tiene 2 caramelos pero debe 3	A6.15
		noA	Estoy en la planta 2 y quiero aparcar en la -3	A1.26
	No situación	noA	¿Por qué me quitas caramelos?	A1.38
Tipo de modelo	Desplazamiento	A	En un edificio mi madre bajó 3 pisos. Si estaba en el piso 2, ¿en que piso se ha quedó	A6.78
		noA	La temperatura del agua por la mañana ulá a 2 y por la noche a -3. ¿Cuál sería la temperatura por la noche?	A1.46
	Neutralización	A	Tengo 2€ y debo 3€	A6.26
		noA	Federico tiene 2 caramelos pero le debe 5 a su hermana	A1.11
	No situación	noA	Busca la operación 2-3=-1	A6.32
Tipo de situación aditiva	Variación	A	Matilda [illegible] vio que el congelador estaba a 2 grados, cuando volvió, había bajado 3 grados	A1.25
		noA	A Pepe le quitaron 3 estuches	A6.112
	Comparación	A	Hoy hace 2 grados pero mañana va a hacer 3 grados menos ¿A cuántos grados estaremos mañana?	A6.40
		noA	Juan esta en una montaña a 100 0m por encima del nivel del mar y Nerea 100 1m debajo de Juan	A1.75
	C. de estados	A	Dico tiene dos manzanas y le debe tres a Juan ¿cuantas le quedarían?	A1.01
		noA	Tengo 2€ y debo 3€ ¿Cuánto debo ahora?	A6.11
	No aditiva	A	En Dolomitas habían 2º grados y la temperatura baja cada minuto 1º grado, en 3 minutos ¿a cuánto ha bajado la temperatura?	A1.90
		noA	Representa esta operación en la recta numérica	A6.73

Análisis sintáctico de las producciones de los alumnos

Para realizar el análisis sintáctico de las producciones se han elaborado y agrupado las fórmulas proposicionales de cada uno de los enunciados descritos por los alumnos.

Las fórmulas proposicionales obtenidas constan de uno o varios datos representados por proposiciones, Pi, y, con frecuencia, de una pregunta representada por Q. Las proposiciones están

unidas entre sí mediante nexos de conjunción (∧) y con la pregunta mediante nexos de implicación (→) (Tabla 2).

Tabla 2. Análisis sintáctico de las producciones de los alumnos

Fórmulas proposicionales	Alumnos Nº	Alumnos %		Nexos y	Nexos pero	Nexos , .	Nexos si	Nexos Otros	Total Nº	Total %
P1 ∧ P2 ∧ P3 → Q	11 (3)	4 (1)		14	4	4			22	9
P1 ∧ P2 → Q	149 (118)	56 (44)		92	30	12	15	1	150	64
P1 → Q	2 (0)	1 (0)								
P1 ∧ P2 ∧ P3	7 (2)	3 (1)		6	3	2		1	12	5
P1 ∧ P2	49 (37)	18 (14)		35	12	3		2	52	22
P1	7 (0)	3 (0)								
Q	4 (0)	2 (0)								
En blanco	37 (0)	14 (0)								
Total	266 (160)	100 (60)	Nº	147	49	21	15	4	236	100
			%	62	21	9	6	2		

Las fórmulas proposicionales más utilizadas han sido P1 ∧ P2 → Q, con un 56%, y P1 ∧ P2, con un 18%, que corresponden respectivamente a una situación problema y a una situación no problema. Estas fórmulas también son las que han descrito casi todas las situaciones ajustadas a la operación, un 44% y un 14%, respectivamente.

Los nexos más utilizados han sido el nexo conjuntivo "y" y el adversativo "pero", con un 62% y un 21%, respectivamente. Los nexos yuxtapuestos "," o "." y el condicional "si" han sido utilizados un 9% y un 6%, respectivamente. También han sido utilizados en una ocasión, cada uno de los nexos "desde", "cuando", "contando que" y "después"

De las 166 preguntas realizadas por los alumnos, 150 han sido formuladas de forma directa, 15 de forma condicional y 1 de forma indirecta; de las preguntas condicionales, 8 corresponden a la fórmula "P1 ∧ si P2 → Q" y 7 a "si P1 ∧ P2 → Q"; la pregunta indirecta se encuentra en la respuesta "*Antes debía 2€ pero como he tardado mucho y he pedido 3€. Ahora debo…"* (A6.90)

La media de las palabras de cada una de las producciones de los alumnos, sin contabilizar las respuestas en blanco, es 14,63 (15,16 en 6º y 14,21 en 1º); esta diferencia se debe a la mayor cantidad de situaciones no problemas (sin pregunta) descritas por los alumnos de 1º de ESO.

Coherencia de las producciones de los alumnos

Se han localizado 51 producciones con alguna incoherencia o falta de sentido, aunque algunas de ellas se ajustan a la operación; esta cantidad supone un 19% de todas las producciones y un 22% si no se contabilizan las respuestas en blanco.

En la Figura 3 se muestran ejemplos de cada uno de los cuatro grupos de situaciones incoherentes:

Figura 3. Ejemplos de situaciones incoherentes

Situaciones	Ejemplos	Alumno
Imposibles o sin sentido	tenía 2 años y me gritaron 3 años cuantos años tengo	A1.02
Con preguntas mal formuladas	Antes tenía 3 caramelos y ahora tengo ¿cuanto he regalado?	A6.96
Con expresiones redundantes	Tengo 2 € y debo de ¿cuánto debo ahora?	A6.11
Con datos inconexos	A laura le han regalado 2 cartas y a Elena debe una carta	A1.77

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación era estudiar las producciones de los alumnos al inventar situaciones matemáticas con números enteros. Para ello se han analizado las producciones de 266 alumnos de Educación Primaria y 1º de ESO al transferir la situación aditiva 2 - 3= -1 desde la dimensión abstracta a la dimensión contextual.

El 60% de los alumnos, sin haber recibido instrucción específica, han sido capaces de describir situaciones matemáticas, en forma de problema o no, ajustadas a la operación; además, este porcentaje aumenta del 52% en los alumnos de 6º de Primaria al 68% en los de 1º de ESO, de lo que se podría inferir que es una capacidad que aumenta con la enseñanza y el conocimiento.

Los alumnos de 1º de ESO han descrito más situaciones no problema, es decir, sin pregunta, que los de 6º de Primaria; quizá lo han hecho por economizar recursos, al considerar que era suficiente solo con exponer los datos. Por el contrario, los alumnos de 6º han dejado más respuestas en blanco, al estar menos familiarizados con este tipo de tarea.

Los alumnos tienden a utilizar más los modelos de desplazamiento que los de neutralización, y más las situaciones de variación que las de comparación y composición; quizá, debido a que el modelo de desplazamiento y la situación de variación son más intuitivos y les resultan más comprensibles.

Se ha observado poca variedad de contextos, quedando reducidos, casi exclusivamente a temperaturas, plantas de un edificio, tener-deber y ganar-perder; podría ser efecto de una enseñanza demasiado repetitiva y poco imaginativa.

Sintácticamente, describen situaciones formadas por dos datos y una pregunta, aunque algunos, especialmente de 1º de ESO, han obviado la pregunta. Mayoritariamente han usado el nexo conjuntivo “y”, aunque también han usado el nexo adversativo “pero”. El número de palabras utilizado en cada situación es muy reducido, quizá, también, por economizar recursos.

Aproximadamente, en una de cada cinco situaciones descritas se ha localizado alguna incoherencia; se podría inferir una enseñanza alejada de la realidad o una falta de atención por parte de los alumnos al describir situaciones imposibles, irreales y, a veces, absurdas. Además, las expresiones redundantes indican una falta de comprensión de la dualidad del signo menos, unario y binario, que denota un lenguaje artificial.

La invención de problemas es una capacidad latente en los alumnos que puede mejorarse con la práctica. Aunque en este trabajo nos hemos limitado a estudiar las producciones de los alumnos a partir de una situación muy concreta, la operación 2 – 3 = -1, que involucra la utilización de números con signo, consideramos que la invención de problemas necesita más investigación para desarrollar todo su potencial didáctico y comprobar que es una herramienta eficaz para aprender matemáticas (Cai et al., 2015), resolver problemas (Ayllón et al., 2016), construir conocimiento (Ayllón y Gómez, 2014), aumentar la motivación y creatividad (Castro, 2011), comprender conceptos matemáticos (Cai et al., 2015) y, en nuestro caso, contribuir a la incorporación de los números enteros.

Referencias

Ayllón, M. F., Gallego, J. L., y Gómez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos, 38*(152), 51–67. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.575888.

Ayllón M. F., y Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *EA, Escuela Abierta*, *17*, 29-40. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.03

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, *29*, 5-18.

Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *Revista EMA*, *5*(3), 236-251.

Bruno, A. (2009). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *3*(2), 87-103.

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *SUMA, 18*, 39-48.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, 3-34. Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, 1-15.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Espinoza, J., Lupiáñez, J., y Segovia, I. (2016). Un estudio de los problemas inventados por estudiantes de secundaria en España. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 23*(23), 85-101.

Herrera, J. L. y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta, un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 13*(4), 197-220.

Iriarte, M. D., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA*, *7,* 13-18.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? *Cognitive Science and Mathematics Education*, 123-147.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 15*, 321–331.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T.P. Carpenter, J.M. Moser, y T.A. Romberg (Eds.) *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 25-38.

Rudnitsky, A., Etheredge, S., Freeman, S. J., y Gilbert, T. (1995). Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, JRME, *26*(5), 467-486. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.5.0467

Ruiz-Socolado, G. R. y Lupiáñez, J. L. (2022). Análisis de una tarea de invención de problemas realizada por alumnos con talento matemático. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 519-527). SEIEM.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. *Research in Mathematics Education: a Contemporary Perspective*. 164-185.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2021). Resolución e invención de problemas: la estrategia de resolución con relación al problema inventado. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T., y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 595 – 602). Valencia: SEIEM.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in additions and subtraction problems. *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, 39-59.

Zapatera, A. (2021). Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros. En A. Rojas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Teorías diversas, 8*, 121-135. Editorial Lectorium.

ESTRATEGIAS, TÉCNICAS, TAREAS Y EJEMPLOS DE PATRONES UTILIZADAS EN PLANIFICACIONES DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Strategies, techniques, tasks and examples used in planning of patterns in first elementary school

Reyes-Escobar, M. [a] y Moreno, A.[b]

Universidad de Granada [a,b.]

Resumen

El objetivo de esta comunicación es especificar el conocimiento didáctico del contenido de patrones que manifiesta el profesorado al participar del proceso de evaluación docente. Concretamente describir cómo los docentes redactan actividades en su planificación para el contenido de patrones y como estas clasifican dentro de la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Se utiliza una metodología cualitativa, exploratoria y descriptiva. Se analizan las planificaciones utilizando el MTSK, específicamente el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En los resultados se presentan evidencias de la categoría, que manifiestan nueve profesores chilenos hacia el objetivo curricular de patrones en primero de educación primaria. En esta categoría se presenta una frecuencia significativa de evidencias encontradas.

Palabras clave: *estrategias, técnicas tareas y ejemplos, planificaciones, profesores de primaria*

Abstract

The objective of this communication is to specify the pedagogic didactic knowledge of the content of patterns that teachers manifest when participating in the teacher evaluation process. Specifically, describe how teachers write activities in their planning for content patterns and how they are classified within the category strategies, techniques, tasks and examples. A qualitative, exploratory and descriptive methodology is used. The plans are analyzed using the MTSK, specifically the knowledge subdomain of teaching mathematics. The results show evidence of the category, presented in which nine Chilean teachers manifest in the curricular objective of patterns in the first year of elementary school. In this category, there is a significant frequency of evidence found.

Keywords*: strategies, techniques, tasks and examples, planning, primary teachers*

INTRODUCCIÓN

Para mejorar la calidad educativa se implementan cambios en la evaluación de la práctica docente y en el currículo de matemática en Chile (Ministerio de Educación, 2013).

Se implementa la evaluación de la práctica docente en forma continúa a los docentes en ejercicio durante su carrera profesional a través de cinco instrumentos de evaluación: portafolio, pauta de autoevaluación, entrevista por un evaluador par, informe de referencia de terceros y prueba de conocimientos disciplinares. El portafolio consiste en la preparación de tres módulos: el primer módulo (planificación, reflexión y evaluación), el segundo módulo (filmación) y el tercer módulo (trabajo colaborativo).

Las bases curriculares establecen ejes en la asignatura de matemática, el eje de patrones y álgebra se implementa desde primero de educación primaria, siendo uno de los temas centrales referente al álgebra en primaria el estudio de patrones. Los currículos de diferentes países han introducido, desde

Reyes-Escobar, M. y Moreno, A. (2023). Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos de patrones utilizadas en planificaciones de primero de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 467–474). SEIEM.

hace varios años, el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros cursos (Pincheira y Alsina, 2021).

Tal como lo plantea Flores (2007) el reto para la formación docente inicial y continua, consiste en ayudar a incorporar el conocimiento teórico sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de manera reflexiva. La actividad de enseñar matemáticas, acompañada de la reflexión sobre la misma, constituye una importante fuente de aprendizaje para el profesor. Dentro de estas situaciones las planificaciones oficiales para el contenido de patrones es una fuente de conocimiento para profesores en ejercicio, insumo a profesores noveles, como también para las evaluaciones docentes.

La presente investigación tiene como objetivo especificar el conocimiento didáctico del contenido de patrones que manifiesta el profesorado al participar del proceso de evaluación docente. Concretamente describir las actividades planificadas para el contenido de patrones y como estas clasifican dentro de la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Para ello se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué estrategias, técnicas, tareas y ejemplos son utilizados por los profesores de primaria en sus planificaciones y reflexiones del portafolio, en el contexto de su evaluación docente?

La importancia de poder revisar planificaciones oficiales de docentes en ejercicio, radica en poder prestar atención a las tareas que propone el profesorado, dado que estas pueden ser utilizadas como medio para articular los contenidos y alcanzar los objetivos de enseñanza (Pincheira y Alsina, 2021).

MARCO TEÓRICO

Para esta investigación se profundiza en el concepto de patrones y en la descripción de la categoría del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Un patrón consiste en una repetición regular de objetos, números, sonidos, movimientos o formas. El trabajo con patrones se considera fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático; más concretamente se le reconoce ser precursor del pensamiento algebraico ya que permite llegar a generalizaciones, contribuyendo directamente a la capacidad de establecer modelos matemáticos y sentar las bases para el desarrollo de habilidades algebraicas (Castro y Castro, 2016).

Los patrones se clasifican de acuerdo con su estructura independiente del contexto en que se produzcan encontramos: cualitativos, cuantitativos, de repetición, lógicos, de desarrollo, visuales o espaciales, numéricos, recurrentes y relaciones funcionales.

Los patrones cualitativos son aquellos donde las características de los atributos de los objetos del núcleo del patrón atienden a cualidades sensoriales como el color, forma, textura olor, tamaño, entre otros (Castro, 1995; Morales et al., 2017).

Los patrones cuantitativos son aquellos donde las características de los elementos del núcleo del patrón atienden a cantidades y números (Castro, 1995; Morales et al., 2017).

Los patrones de repetición o reiterativos son aquellos que tienen una secuencia de elementos que se repiten constantemente (Castro y Castro, 2016).

Los patrones lógicos son aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y/o diferencia de atributos entre objetos (Ontario Ministry of Education, 2007).

Los patrones de desarrollo son aquellos que aumentan o disminuyen de forma sistemática produciendo expansión o reducción del núcleo (Castro y Castro, 2016). Existen de dos tipos, de crecimiento y de decrecimiento o disminución.

Los patrones visuales o espaciales son aquellos en que la regularidad se percibe a través de la vista. Por lo general este tipo de patrón suele ser también cualitativo dado que se encuentran en el ámbito de la geometría (Thornton, 2001).

Los patrones numéricos son aquellos patrones construidos sobre el número y donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante (Liljedahl, 2004).

Los patrones recurrentes o recursivos es una relación que se define con base en los valores de un mismo conjunto de valores (Johsonbaugh, 2005). Desde una sucesión de datos la relación de recurrencia expresa cada término de esa sucesión en función de sus antecesores (Castro, 1995).
Las relaciones funcionales son aquellos patrones que se establecen entre las cantidades que covarían en una relación funcional. Estos tipos atienden a patrones cuantitativos porque son números los que intervienen en las cantidades variables. Estas relaciones funcionales pueden ser de dos subtipos de correspondencia y de covariación (Smith, 2008).

Para el análisis del portafolio se utiliza el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Con fines de difusión internacional, el grupo ha adoptado el uso de las siglas correspondientes a su traducción en inglés *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* del nombre del modelo y de sus subdominios. El modelo, cuya finalidad es servir como herramienta teórica y analítica, permite identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas y comprender la naturaleza del mismo, desde un punto de vista sistemático y artificialmente organizado para su análisis (Carrillo et al., 2013; Carrillo et al., 2018).

El modelo en su estructura considera tres dominios: conocimiento matemático (MK); conocimiento didáctico del contenido matemático (PCK); y un dominio fundamentado en las creencias que permean los dos dominios anteriores. En relación con el PCK, definimos los subdominios de modo que el foco de todos ellos fuera la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático, sin que pueda entenderse como una yuxtaposición de conocimiento pedagógico y conocimiento del contenido matemático. De este modo, hablaremos de Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) (Contreras et al., 2018).

El KMT **(***Knowledge of Mathematics Teaching***)** es el conocimiento del profesor de teorías sobre la enseñanza de contenidos matemáticos, de recursos materiales y virtuales, y de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Existen varios elementos didácticos para enseñar un contenido matemático en diversas etapas escolares. Para esta investigación se pone énfasis en la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos del subdominio KMT. Escudero-Ávila(2015) aborda las estrategias didácticas relacionadas con funciones de un profesor de secundaria, y a esta estrategia está ligada la técnica didáctica del tránsito entre distintos registros de representación. Rojas (2014) aborda un caso de un profesor de primaria, enfatiza que el profesor ha de conocer distintas estrategias para abordar un error, estrategias de reiterar procedimientos algoritmos para resolver errores de cálculo y saber desarrollar líneas argumentativas que faciliten la adquisición de los conceptos en su caso de fracciones. Ribeiro (2016) en la formación inicial de maestros ha realizado aportes en la conceptualización e implementación de una tarea. Sosa et al., (2016) presenta también en el usos de ejemplos realizados por dos profesoras distinguiendo el tipo y potencialidad de estos con base en la intencionalidad, como en las ayudas a sus estudiantes y el momento. Y finalmente Tarisfeño-Vasquez y Reyes-Bravo (2022) en formación de profesores realizan un análisis de contenido de Patrones y para la categoría emergieron descriptores: ejemplos de patrones en lo cotidiano, estrategias de cuestionamiento, estrategias para el uso y tránsito entre representaciones, y diversas tareas.

La observación de las actividades de los docentes, no solo lo que hacen en el aula, sino que todos los procedimientos que emplean para realizar su práctica de enseñanza, son una fuente esencial para la obtención de información acerca del conocimiento que el profesor pone en juego. Pero al analizar su aplicación o uso, a veces encontramos evidencias, a veces indicios del conocimiento que el profesor posee, filtrado, entre otros, por elementos del contexto y la propia interpretación del investigador-observador, y a veces oportunidades para seguir indagando (Contreras et al., 2018). Y frente a esas oportunidades para seguir indagando, nos apoyamos en otras actividades como, la planificación del profesor, cuestionarios y entrevistas, análisis de vídeos o situaciones de aula, entre otros escenarios

(Flores et al., 2013), para esta indagación del conocimiento didáctico de patrones contamos con planificaciones oficiales de docentes.

METODOLOGÍA

Dentro de los instrumentos de evaluación es parte fundamental el desarrollo del portafolio y para la investigación contamos con los portafolios oficiales planificación y reflexión de clases, referida al diseño previo de actividades de clases frente al contenido de patrones.

La metodología utilizada es cualitativa, exploratoria y descriptiva (Hernández- Sampieri 2018).

Tiene un enfoque cualitativo porque se realizan categorías de análisis a priori, desde los criterios del MTSK para el contenido de patrones. Se realiza la codificación con el análisis de dos tareas del portafolio, la planificación y reflexión relacionadas con el objetivo curricular de patrones en primero de educación primaria. Para esta comunicación nos enfocamos en el subdominio del KMT, en la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Es un estudio exploratorio que pretende contribuir al conocimiento didáctico del contenido matemático, cada planificación desarrolla tres clases de noventa minutos siguiendo lineamientos del portafolio en donde deben redactar actividades coherentes y pertinentes al objetivo curricular.

Participantes

Esta investigación utiliza como instrumento de recogida de datos los portafolios de nueve profesores chilenos de primaria que realizaron su portafolio en esta temática. Los portafolios se solicitaron al sistema de evaluación del desempeño profesional docente, se mantiene la confidencialidad de la información de los datos elaborados utilizando la tarea de planificación y reflexión únicamente, para el fin de esta investigación.

Las planificaciones son de docentes que tienen distinta localización geográfica, de norte a sur tenemos: un docente de la región de Valparaíso, un docente de la región Metropolitana, dos pertenecen a la región de O'Higgins, uno de la región del Ñuble, uno de la región del Biobío, uno de la región de la Araucanía, y dos de la región de los Lagos. Las planificaciones son elaboradas por docentes de distinta profesionalización, seis de ellos son docentes generalistas y tres son educadores de educación especial en dificultades específicas de aprendizaje.

Los docentes redactaron su portafolio en el año 2016 y 2017 para el objetivo curricular de patrones OA 11 que es, reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo (Ministerio de Educación, 2013). Luego implementaron la planificación y realizaron una reflexión de esa unidad pedagógica implementada analizando la experiencia de su propia práctica pedagógica.

Clasificación y selección de la muestra

La selección de los documentos se hizo de forma intencionada, primero optando por la asignatura de matemática, segundo eligiendo el eje temático de patrones y álgebra, tercero seleccionando el nivel de enseñanza abarcando desde primero a sexto, y finalmente escogiendo el objetivo curricular de patrones. Por lo tanto, esta es parte de una muestra de treinta y cinco portafolios del contenido de patrones, cuando los docentes llevaban tres años con los cambios curriculares y analizamos aquí los documentos de los nueve docentes de primero de educación primaria.

Codificación

Se procede a codificar la planificación y la reflexión de los nueve profesores especificando a cada uno por letra, así tenemos nueve docentes de primero de educación primaria (1º A, 1º B, 1º C, 1º D, 1º E, 1º F, 1º G, 1º H y 1º I) para proteger su anonimato. Se hace referencia en las planificaciones y reflexiones, a indicios y/o evidencias, destacando la información de episodios, fragmentos de

episodio, frases o palabras relativas a la codificación de la categoría. El indicio es una señal que permite deducir la existencia de conocimiento, en cambio la evidencia es una certeza de que se manifiesta el conocimiento.

RESULTADOS

Estas actividades se obtienen luego de analizar que el profesorado manifiesta evidencias de sus extractos. Nos centramos en esta categoría porque abarca la mayor parte de la redacción de las planificaciones docentes. Una vez codificadas las evidencias e indicios y basados en la literatura procedemos a buscar las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. En la tabla 1 se presentan extractos de planificaciones que corresponden a evidencias de cada indicador de la categoría, se específica de donde se extrae el extracto y no son excluyentes ya que pueden incluir otros indicios.

Tabla 1: Categoría de Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos utilizados en 1ºprimaria

Estrategias para el uso y tránsito	Técnicas de preguntas	Tareas	Ejemplos cotidianos
1ºE Clase 2: … el patrón creado por medio de las imágenes adheridas a la cartulina y de esta forma presentan el patrón creado gráficamente. La docente junto a los alumnos(as) comparan la secuencia percutida con lo graficado con el fin de establecer si existe relación entre ambos mediante las siguientes preguntas: ¿Qué instrumentos utilizaron en la secuencia? ¿Se logró la secuencia en el sonido? ...	1ºB Clase 2: Se presentan tiras de caramelos"lolis" de 1, 2 y 3. Se proyecta actividad en la pizarra, preguntando ¿Cuántos lolis tiene cada tira? Luego, al agregar una nueva tira, ¿cuántos lolis debe tener? Deben anotar las cantidades bajo cada tira, y agregar una 4ª. En el siguiente ejercicio, se presentan tiras de 2, 4 y 6 lolis, se hacen las mismas preguntas, y se pide que anoten las cantidades abajo de cada tira, y dibujen una 4º tira. Se presenta un 3er ejercicio, con los lolis, pero esta vez, secuencia descendente, de 8,6 y 4; preguntando ¿De cuántos lolis, debe ser la siguiente tira? ¿Por qué?	1ºH Clase 3: Se le entrega a cada estudiante palotines (palos de madera), se les solicita que formen sobre sus mesas la secuencia de palotines que indique la profesora: un palotín amarillo, dos palotines verdes y un palotín rojo, tienen que repetir el patrón tres veces para que se vea que es repetitivo. Luego se les pide que cada uno invente una secuencia de palotines en que intervengan por lo menos 4 colores. Cuando terminen se solicita que cambien de puesto por el puesto de otro compañero y deben continuar con la secuencia de palotines comenzada sobre el escritorio respectivo.	1ºG Clase 2: Se evalúa de forma oral los contenidos como “continuar series de ritmos y/o sonidos”. Se establece una serie de sonidos con palmadas o movimientos del cuerpo, el cual ordene un patrón que se distinga con facilidad, se pide a los estudiantes que continúen los sonidos de la serie.

En primero de educación primaria los nueve docentes planifican actividades en esta categoría frente a indicadores como: estrategias para el uso y el tránsito, técnicas de realizar preguntas orientadoras y de cuestionamiento, en la creación de tareas, y frente a ejemplos presentados de patrones en lo cotidiano. Algunas actividades relativas a estos indicadores son: descubrir patrones, creación de secuencias y de problemas de patrones, identificar el patrón repetitivo, utilizan material concreto, pictográfico y simbólico. Los docentes realizan también actividades de completar secuencias

referentes a: secuencias de sonidos onomatopéyicos, de movimientos corporales, de crecimiento de plantas, sonidos y ritmo, de objetos cotidianos, numéricas, y por atributos de forma y color.

Sobre el conocimiento de estrategias para el uso de representaciones y el tránsito entre ellas, el profesorado plantea actividades que trabajan desde el material concreto a las representaciones pictóricas y abstractas, tales como: búsqueda y creación de patrones numéricos, continuación de secuencias ascendentes y descendentes, búsqueda de regularidades, completar tablas, generalización, resolución de problemas de patrones, y creación de secuencias y patrones.

Respecto a la técnica de realizar preguntas orientadoras y de cuestionamiento es utilizada por los docentes, cuando las preguntas hechas por el profesorado son adecuadas, es cuando se instala un recurso didáctico para estimular el proceso de enseñanza (Zakaryan et al., 2018). Siete de los nueve docentes (1ºB, 1ºC, 1ºD, 1ºE, 1ºF, 1ºG, 1ºI) que planifican manifiestan evidencias de preguntas orientadoras y de cuestionamiento en sus planificaciones dirigidas a: conceptos, completar secuencias, resolución de problemas de patrones y sobre el uso del material concreto.

Las decisiones del maestro sobre las tareas en la planificación son aspectos que determinan el aprendizaje de los estudiantes (Bernabeu et al., 2022). Los nueve docentes presentan evidencias de tareas de patrones relacionadas con: movimientos con patrones, ejercicios rítmicos de patrones, ejercicio con instrumentos musicales, juego del luche. En la identificación y clasificación de patrones planifican tareas donde utilizan material manipulable (palos de helado, lápices de colores, figuras geométricas, set de cubos encajables, juego de legos, bloques lógicos) para los atributos de forma, color y tamaño. Las tareas con patrones en forma gráfica están planificadas con actividades del texto escolar, uso de fichas, guías de trabajo, y creación e identificación de secuencias con el uso de TIC.

Y finalmente en los ejemplos presentados de patrones en lo cotidiano (Morales et al., 2018), los docentes utilizan elementos de la naturaleza (sonidos onomatopéyicos, árboles frutales, frutas), elementos cotidianos (utensilios de cocina, cajas, etc), elementos relativos a su cuerpo (estatura, movimientos) y elementos de su entorno (escaleras mecánicas, guirnaldas de colores, y numeración de los edificios). Hay dos docentes (1ºA y 1ºG) que mencionan ejemplos de lo cotidiano.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestro objetivo era especificar el conocimiento didáctico del contenido de patrones que manifestó el profesorado al participar del proceso de evaluación docente. Se describieron extractos de sus portafolios de las planificaciones de patrones, las cuales aparecen de forma natural y frecuente en la redacción y se clasificaron dentro de la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Diversos autores ya destacan la importancia de tareas en la enseñanza de patrones en primaria (Morales et al., 2018; Torres et al., 2021). Si bien los docentes de primero de educación primaria no planifican para todos los tipos de patrones, en estas planificaciones y reflexiones encontramos actividades docentes que proponen estrategias, tareas, técnicas y ejemplos relativos a dos tipos de ellos, patrones repetitivos y numéricos de acuerdo al objetivo curricular de primero de educación primaria.

Pincheira y Alsina (2021), mencionan que son escasos los estudios, que analizan tareas propuestas por el profesorado, para abordar conocimientos de naturaleza algebraica en los primeros niveles de escolaridad. Estas planificaciones pueden ser un insumo hacia la formación docente inicial y continua de maestros, para el diseño de tareas y evaluar la dificultad de resolución de estas tareas. Las producciones sirven para diseñar nuevos materiales docentes que ayuden a identificar las estrategias utilizadas y los elementos matemáticos significativos para el desarrollo del pensamiento algebraico (Callejo et al., 2016). Resulta necesario especificar el tipo de tareas que realiza el profesorado, y evaluar la dificultad que supone la resolución de tales tareas (Pincheira y Alsina (2021).

Contribuimos a documentar prácticas como una fuente para otras prácticas pedagógicas relacionadas con patrones, ya que el interés es comprender el conocimiento del profesor desde una perspectiva interpretativa, comprender la estructura de su conocimiento y los elementos que lo conforman en el contexto de la práctica (Contreras et al., 2018). Las planificaciones oficiales en sí mismas son una fuente primordial de información del profesorado hacia la enseñanza del álgebra en primaria.

Este estudio ha profundizado en la comprensión del conocimiento especializado de profesores de primero de educación primaria que enseñan patrones, en el contexto de su evaluación docente, permitiendo visualizar el carácter sistemático y sistémico del MTSK en la categoría del KMT estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

La limitación del estudio es que solo contamos con las planificaciones y reflexiones del profesorado, no podemos acceder a más información y tampoco a otros instrumentos por la legalidad vigente del proceso de evaluación docente. Queda como línea abierta de investigación poder realizar el análisis en paralelo de los instrumentos de evaluación cuando la legalidad lo permita.

Agradecimientos

Becas Chile doctorado en el extranjero, Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) Folio 72220142.

Proyecto con referencia PID 2020-113601 GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

Referencias

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Interacción entre la maestra y los estudiantes en la enseñanza aprendizaje de clases de polígonos. En T. F., Blanco, C., Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 179-187). SEIEM.

Callejo, M.J., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. A*vances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5 – 25. https://doi.org/10.35763/qiem.voi10.106

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,* 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Comares.

Castro-Rodriguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En E.Castro y E. Castro (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 87-107). Pirámide. http://hdl.handle.net/10481/47545

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-65). SEIEM

Escudero-Avila, D. (2015). Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria [tesis doctoral, Universidad de Huelva]. Repositorio institucional http://hdl.handle.net/10272/11456.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1(4), 139-159 https://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/11273/CC-75%20art%202.pdf

Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). SEIEM.

Hernández-Sampieri, R., y Torres, C. (2018). *Metodología de la investigación* (Vol. 4). McGraw-Hill Interamericana.

Ministerio de Educación (2013). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. Disponible en https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Bases-curriculares/

Morales, R., Cañadas, M. C., y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *11*(4), 233-252.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias,* 36(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Ontario Ministry of Education (2007). A guide to effective instruction in mathematics. Kindergarten to grade 3. Patterning and algebra. Ontario, Canadá.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). El álgebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: implicaciones para la formación docente. *Bolema, 35* (71) 1316-1337 https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Explorando la demanda cognitiva de tareas matemáticas de búsqueda de patrones diseñadas por futuros profesores de Educación Primaria. En , P. D. Diago., D. F., Yáñez., M. T., González-Astudillo, y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 489 – 496). SEIEM.

Ribeiro, M.(2016). Tareas para alumnos y tareas para la formación: Discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. En S. Estrella, et al. (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 31-39) SOCHIEM.

Rojas. N. (2014) Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Sosa Guerrero, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo Yáñez, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática, 28*(2)151-174. https://www.scielo.org.mx/pdf/edumat/v28n2/1665-5826-ed-28-02-00151.pdf

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics*, 9,1109. https://doi.org/10.3390/math9101109

Tarisfeño-Vásquez S. y Reyes-Bravo M. (2022). Aproximación al conocimiento especializado del tema patrones: un análisis de contenido. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XXV (p. 635). SEIEM.

Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. En A. Rogerson (Ed.), *New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251-256). ALMA.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105–123. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260

CREENCIAS EN MATEMÁTICAS, INTELIGENCIA FLUIDA Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

Beliefs in mathematics, fluid intelligence and geometrical reasoning

Rubio-Sánchez, A[a], Gómez-Chacón I. M.[b] y Gómez-Veiga I.[a]

[a]Universidad Nacional de Educación a Distancia, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En esta comunicación estudia la evolución de los procesos de visualización y se explora las relaciones entre el razonamiento sobre las figuras geométricas, la inteligencia fluida y las creencias hacia las matemáticas en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y bachillerato (N=356, 13-16 años). La metodología del estudio es mixta, cuantitativa y cualitativa, aplicando distintos instrumentos: Cuestionario de Creencias en Matemáticas (CreeMat), la prueba de Matrices Progresivas de Raven, y un Cuestionario de Razonamiento Geométrico expresamente creado para este estudio. El razonamiento geométrico de los alumnos ha sido analizado a partir del marco teórico de Duval. Se identifican relaciones significativas entre las creencias hacia las matemáticas, la inteligencia fluida y el razonamiento geométrico, particularmente destacable en 3º de ESO.

Palabras clave: *geometría, creencias, inteligencia fluida, visualización, aprehensión cognitiva*

Abstract

In this communication, the evolution of visualization processes is studied as well as relationships between reasoning about geometrical figures, fluid intelligence and student´s beliefs about mathematics of high schoolers (N=356, age 13-16). The methodology of this study is both quantitative and qualitative, and several instruments are applied: Mathematics Beliefs Questionnaire (CreeMat), Raven´s Progressive Matrices Set and a Geometrical Reasoning Questionnaire created specifically for this study. Student´s geometrical reasoning has been analyzed using Duval´s theoretical framework. Significant relationships were identified between beliefs in mathematics, fluid intelligence and geometrical reasoning, particularly in 3rd of ESO (year 10).

Keywords: *geometry, beliefs, fluid intelligence, visualization, cognitive apprehension*

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se ha puesto de relieve que la competencia matemática es un proceso complejo en el cual influyen diferentes factores de manera interrelacionada: conocimientos específicos, métodos heurísticos, creencias positivas, metaconocimiento y capacidades de autorregulación (De Corte et al., 2010; Shoenfeld, 1992). Dentro de estas variables cobran especial relevancia, y serán foco de este estudio, los sistemas de creencias, el razonamiento en tareas de geometría y la inteligencia fluida como característica individual de los sujetos.

Distintos estudios han señalado que las capacidades de pensamiento de alto orden tienen una influencia significativa en el aprendizaje escolar. Estos estudios han señalado la influencia de la inteligencia (factor g) sobre el rendimiento académico (Deary et al., 2007). La inteligencia fluida (Gf) se entiende como la capacidad de razonamiento abstracto y de establecimiento de nuevas relaciones. Esta variable es de interés para nuestro estudio por la influencia que puede tener la inteligencia fluida sobre el razonamiento abstracto y espacial (Primi et al., 2010) que se da en Geometría.

Rubio-Sánchez, A., Gómez-Chacón, I. M. y Gómez-Veiga, I. (2023). Creencias en matemáticas, inteligencia fluida y razonamiento geométrico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 475–482). SEIEM.

En el rol de los sistemas de creencias en el desarrollo académico ha sido frecuentemente señalado. Se ha estudiado la influencia que tienen las creencias sobre la visión que tienen los alumnos sobre ellos mismos, como estudiantes, y sobre el modo en el que operan en el aula (Gómez-Chacón et al., 2006, Schraw, 2000). Más concretamente, se han encontrado evidencias empíricas de la relevancia que tiene las creencias de estudiante relacionadas con las matemáticas en el aprendizaje de las matemáticas y en la resolución de problemas (De Corte et al., 2010, Gómez-Chacón, et. al., 2006, Gómez-Chacón et al., 2014), tanto en las etapas de primaria (Goldin et al., 2016) como en secundaria y bachillerato (Gómez-Chacón et al., 2014).

Teniendo en cuenta estos factores, el estudio se centra en el razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos. El estudio del razonamiento de las representaciones geométricas tiene como marco de referencia la aproximación teórica propuesta por Duval (Duval, 1995), especialmente para el análisis de los procesos cognitivos relacionados con la visualización y las aprehensiones cognitivas (Duval, 1995; Gatgasis et al., 2010).

Así pues, la contribución de este estudio es doble. Por un lado, se estudia la relación que suponemos existe entre el sistema de creencias sobre las matemáticas y su aprendizaje, la inteligencia fluida y los procesos de visualización en geometría, lo que constituye uno de los objetivos del estudio. El segundo de ellos consiste en examinar los procesos de razonamiento subyacentes a tareas geométricas, resueltas por alumnos de secundaria, en base a la teoría de aprehensiones cognitivas de Duval, y analizar su evolución durante la secundaria hasta el bachillerato (Duval, 1995). La combinación de estas variables supone una contribución novedosa dentro del ámbito de la didáctica de la geometría.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Creencias en matemáticas

Como se ha comentado anteriormente, las creencias de un individuo, implícitas o explícitas, afectan y predicen su comportamiento y están relacionadas con su rendimiento académico (De Corte, 2015; Gómez-Chacón et al., 2014). Las investigaciones sobre creencias proporcionan, hasta el momento, definiciones diversas que dependen del planteamiento de los estudios, marcos teóricos y herramientas de análisis escogidas (Pepin y Rösken-Winter, 2015). La aproximación teórica que fundamentó el cuestionario está basada en una comprensión integradora de los sistemas de creencias (ver Gómez-Chacón et al., 2006; Op't Eynde et al., 2002). Esta propuesta permite una mejor comprensión de las interacciones entre diferentes tipos de creencias, tal y como se refleja en el cuestionario CreeMat que se evalúa y valida en este estudio. Entendemos el sistema de creencias considera concepciones subjetivas (explícitas o implícitas) relacionadas con (1) la educación matemática (p.e. creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas y la resolución de problemas) (2) sobre sí mismos como matemáticos (p.e. objetivos intrínsecos/extrínsecos, autoeficacia) y (3) sobre el contexto matemático de la clase (p.e. el papel y funcionalidad de su profesor). Estos mismos autores defienden que este tipo de creencias interaccionan unas con otras, así como con los conocimientos previos del alumno, y determinan su aprendizaje matemático y sus actividades relacionadas con la resolución de problemas.

Razonamiento geométrico

El modelo teórico de Duval, la teoría semiótica de las representaciones, explora el funcionamiento cognitivo subyacente a numerosos procesos matemáticos y se ha usado en distintos estudios como modelo teórico del razonamiento geométrico (Bernabéu et al., 2019). Esta teoría considera la interacción que se produce entre la representación espacial de una figura, y la conceptualización abstracta de sus propiedades figurativas, como la raíz de las dificultades que muchos estudiantes tienen en la comprensión de las matemáticas (Duval, 1995). De la extensa teoría establecida por

Duval, nos centramos en lo que se denominan las cuatro aprehensiones cognitivas, que son cuatro maneras distintas de razonar cognitivamente relacionadas con la visualización. Estas categorías serán usadas como referente para el análisis de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario correspondiente, y nos permitirán evaluar su razonamiento geométrico.

Primeramente, la identificación visual e intuitiva del objeto geométrico lleva al estudiante hacia una percepción figurativa. En esta primera aprehensión, llamada aprehensión perceptiva, sólo se realizan tareas tales como el reconocimiento de la dimensión de la figura, su nombre, o su clasificación. Sin embargo, es posible que la percepción del objeto geométrico requiera de algo más que la figura dada, y su descripción se vea complementada, o incluso sustituida, por un enunciado verbal. Los alumnos desarrollan la llamada aprehensión discursiva cuando combinan de manera adecuada el enunciado verbal de un problema con la figura o el objeto geométrico con el que han de trabajar.

Cuando se llega a percibir las propiedades y las relaciones de la figura, se dice que ha empezado la aprehensión operativa (Duval, 1995). Llegados a este punto, el estudiante es capaz de establecer operaciones tales como cambios en el tamaño o la orientación de las figuras. Estas operaciones pueden acercar al alumno a la estrategia adecuada para la correcta resolución del problema. Duval (1995) también desarrolló una aprehensión final, la aprehensión secuencial, para describir el momento en el que el estudiante conceptualiza de manera abstracta todas las partes y las propiedades de las figuras percibidas con anterioridad. En este punto, el proceso de construcción de la figura está organizado, y depende únicamente de restricciones y propiedades matemáticas, en vez de evocaciones visuales e intuitivas.

Inteligencia fluida

El concepto de inteligencia fluida (Gf) fue introducido por Catell (1971), el cual afirma que "es una expresión del nivel de complejidad de las relaciones que un individuo puede percibir y sobre las que puede actuar cuando no tiene el recurso de recurrir a respuestas de cuestiones tan complejas previamente almacenadas en su memoria". Flanagan et al. (2000) estableció con posterioridad que la inteligencia fluida alude a "las operaciones mentales que un individuo puede usar cuando se encuentra ante una tarea relativamente novedosa que no se puede desempeñar de manera automática […] reconocer conceptos, establecer inferencias e implicaciones correspondientes, resolución de problemas y la extrapolación".

En este estudio se considera a la inteligencia fluida como la capacidad individual de adaptación a situaciones novedosas, es decir, a la agilidad con la que establece nuevas relaciones, y por tanto a la capacidad de razonar con contenidos abstractos. Estas son capacidades necesarias para las personas en entornos académicos, por lo que han sido varios los estudios que han demostrado la influencia de la inteligencia en el aprendizaje escolar (Deary et al. 2007), especialmente en las ciencias y en las matemáticas. Respecto de ellas, se ha probado no sólo la relación entre la inteligencia fluida y el rendimiento académico matemático, sino también la influencia sobre el razonamiento abstracto y espacial (Primi, 2010).

MÉTODO

Objetivos

Los objetivos del estudio son los siguientes:

1. Estudiar la evolución en estudiantes de 13 a 16 años (etapa de adolescentes) en los procesos de visualización a partir de los procesos cognitivos de aprehensión de figuras geométricas siguiendo el marco teórico de Duval.
2. Explorar las relaciones entre las distintas variables estudiadas, dos a dos. Se estudiará la relación entre el sistema de creencias sobre las matemáticas y la inteligencia fluida, entre la

inteligencia fluida y el razonamiento geométrico, y finalmente entre el sistema de creencias y el razonamiento geométrico.

Participantes

En este estudio participaron un total de 356 estudiantes, con edades comprendidas entre los 13 y los 16 años, de un centro concertado-privado de una zona urbana con nivel socioeconómico medio de Madrid (España). De esta muestra inicial, 82 alumnos fueron descartados por su incapacidad de completar las pruebas. Esto resultó en 274 estudiantes (103 chicos y 171 chicas) repartidos en cuatro cursos consecutivos de secundaria: 2º de la ESO (n=103), 3º de la ESO (n=66), 4º de la ESO (n=69) y 1º de Bachillerato (n=36).

Metodología e Instrumentos

La metodología utilizada es mixta, cuantitativa mediante análisis estadístico y cualitativa para el estudio de tareas geométricas. Las fuentes y recogida de datos se realizan mediante cuestionarios.

Cuestionario de creencias CreeMat

Para la evaluación de las creencias se utiliza el cuestionario CreeMat (Gómez-Chacón et al., 2014). De acuerdo al enfoque teórico en el que se basa, el cuestionario CreeMat evalúa a través de 13 ítems cuatro dimensiones de creencias. Estas son: (D1) el compromiso en el comportamiento en el aprendizaje de las matemáticas (p.e. "Trabajo duro en matemáticas"), (D2) confianza matemática y competencia personal (p.e. "Aprendo las matemáticas rápidamente"), (D3) creencias específicas sobre las matemáticas (p.e. "Las matemáticas nos permiten entender mejor el mundo en el que vivimos") y (D4) creencias sobre la resolución de problemas matemáticos (p.e."Las clases de matemáticas no deberían dar tanta importancia a la resolución de problemas"). Los participantes respondieron siguiendo una escala Likert de 5 puntos desde "completamente de acuerdo" hasta "completamente en desacuerdo". En este estudio, el alfa de Cronbach del cuestionario fue de .7, lo que indica su fiabilidad.

Cuestionario de razonamiento geométrico

La tarea de evaluación del razonamiento de los alumnos se denomina Cuestionario de Razonamiento Geométrico y ha sido diseñado expresamente para este estudio. Consiste en 11 problemas, la mayoría en dos dimensiones (superficies, perímetros, lugares geométricos, transformaciones métricas, etc.) y algunas de tres dimensiones (superficie de poliedro). Los análisis de las soluciones establecen, por un lado, una medida total acorde a la cantidad de problemas correctamente resueltos respecto de toda la prueba (posteriormente denominada Raz-Geo). Por otro, se evalúa el nivel de razonamiento geométrico demostrado en cada uno de los problemas de acuerdo con las distintas aprehensiones cognitivas que alcanzan los alumnos en el proceso de resolución.

En este estudio, esa evaluación de aprehensiones alcanzadas se muestra relativa a un ejemplo particular de problema dentro de la prueba, el *Problema de la Cabra*. Éste tiene el siguiente enunciado: *"Una cabra está atada mediante una cuerda de 8 metros a la verja de una finca cuadrada de 4 metros de lado. La cuerda está fija a 1 metro de una de las esquinas. Fuera de la finca, hay hierba que la cabra puede comer. Colorea en el dibujo anterior la zona fuera de la finca en la que la cabra puede llegar a comer hierba".* A esto se le sigue la imagen de la Figura 1.

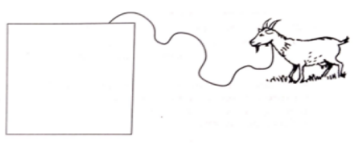


Figura 1: *Problema de la Cabra*

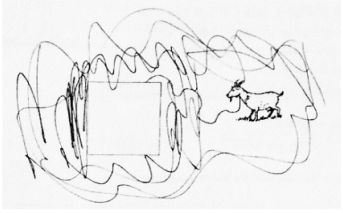


Figura 2: Aprehensión perceptiva



Figura 3: Aprehensión operativa

Inteligencia fluida

En lo que se refiere a la inteligencia fluida, la prueba más habitual para la medición del razonamiento abstracto no verbal es la prueba de Matrices Avanzadas de Raven (Raven et al., 1995). Esta prueba consiste en sesenta analogías visuales, y en cada uno de ellos los alumnos tendrán que identificar las características relevantes de una serie de figuras o formas visuales y abstractas que van acompañadas de un hueco en blanco. Entre varias alternativas posibles, tienen que escoger el elemento correcto que completa la serie. La puntuación de la prueba consiste en el número de ítems correctamente resueltos.

Análisis de razonamiento geométrico

Para explicitar el método de análisis cualitativo y cuantitativo realizado sobre el razonamiento geométrico tomaremos un ítem del cuestionario, el Problema de la Cabra. Las categorías de análisis como hemos indicado se basan en los procesos especificados en el marco teórico de Duval previamente explicado: aprehensión perceptiva, discursiva, operativa y secuencial. Desde esta perspectiva, se entiende que una primera resolución superficial que puede llegar a dar el estudiante es una figura abierta, como puede observarse en la Figura 2, que se corresponde con un ejemplo de resolución de un alumno de 2º de la ESO. En este caso, el estudiante ha sido capaz de comprender el enunciado verbal y el propósito del problema (aunque su solución sea incorrecta) y su razonamiento se basa sen una primera percepción visual. Se considera que una solución de este tipo implica que el alumno ha llegado tanto a la solución perceptiva como a la discursiva. Sin embargo, aquellos alumnos que persisten en el proceso de resolución se considera que realizan un esfuerzo consciente por comprender el problema, por percibir las relaciones entre los distintos objetos geométricos y por ende sus propiedades. Estos alumnos alcanzan una aprehensión operativa, y sus soluciones reflejan una zona cerrada con la forma, generalmente, de una figura geométrica. Otro ejemplo real de un alumno de 2º de la ESO puede observarse en la Figura 3. Finalmente, la solución correcta, el cardioide, se alcanza cuando el estudiante ha llegado al nivel máximo de abstracción del problema. Ha organizado la información basándose en las propiedades matemáticas de los objetos geométricos con los que está trabajando, y ha llegado a la última aprehensión, la secuencial.

Además de una medida global de problemas correctamente resueltos (Raz-Geo), también se obtiene una medida cuantitativa de las aprehensiones cognitivas alcanzadas por los alumnos. Considerando el análisis previo del *Problema de la Cabra*, se determina, por cada alumno, si han alcanzado o no cada una de las distintas aprehensiones. Estas medidas se agrupan por cursos y se analizan con profundidad en el apartado siguiente.

RESULTADOS

Evolución de los procesos cognitivos de aprehensión en geometría

La evolución de las diferentes aprehensiones según las categorías establecidas se presenta en la Tabla 1. Las medias obtenidas muestran que, de manera general, el razonamiento de las figuras geométricas mejora con la edad, aunque esos incrementos son menores en las aprehensiones perceptivas y discursivas (.89 a .97) que en las operativas (.37 a .61) y secuenciales (.04 a .24). Las desviaciones típicas, por su parte, aportan una información muy relevante en lo que se refiere a las aprehensiones perceptivas, discursivas y secuenciales. En las primeras dos, sugieren unos niveles polarizados en los primeros años del estudio, y una tendencia homogénea a medida que avanza el tiempo (DT=.31 a DT=.17). En la aprehensión secuencial, sin embargo, la tendencia en la variabilidad cambia: durante los primeros años es relativamente homogénea pero después tiende a polarizarse (DT=.19 a DT=.35).

Esto sugiere un patrón de razonamiento en el que los alumnos son, de manera general, competentes en los primeros procesos de razonamiento sobre las figuras y representaciones, y a medida que van madurando se vuelven excelentes. Las dificultades aparecen en fases del problema más avanzadas y

abstractas, que inicialmente, cuando son más jóvenes, están fuera del alcance de la mayoría de los estudiantes. Sin embargo, a medida que avanzan en su formación matemática, aparece una división entre aquellos que de manera general se vuelven competentes en el proceso de resolución, y aquellos que, en contraposición, detienen sus procesos de razonamiento en estados previos del proceso de resolución, quedándose por tanto en niveles intermedios.

Tabla 1: Estadísticos discretos de las aprehensiones cognitivas correspondientes al *Problema de la Cabra*.

Aprehensiones	Perceptiva		Discursiva		Operativa		Secuencial	
Curso	*M*	*DT*	*M*	*DT*	*M*	*DT*	*M*	*DT*
2º ESO	.89	.31	.89	.31	.37	.49	.04	.19
3º ESO	.94	.24	.94	.24	.5	.5	.06	.24
4º ESO	.97	.17	.97	.17	.43	.5	.07	.26
1º BACH	.97	.17	.97	.17	.61	.49	.14	.35

Relaciones entre Creencias, Inteligencia fluida y razonamiento

Los resultados descriptivos de las puntuaciones totales obtenidas en las pruebas se observan en la Tabla 2, donde aparecen las medias y las desviaciones típicas de las pruebas CreeMat (Creencias), Matrices de Raven (Inteligencia fluida) y razonamiento geométrico (Raz. Geo.). Por un lado, se considera a toda la muestra en su conjunto, y por otro aparecen desglosados por cursos. Se puede observar la tendencia creciente que tiene el razonamiento geométrico a medida que los alumnos avanzan en su recorrido escolar, y una leve tendencia creciente también en sus medidas de inteligencia fluida. Las creencias, sin embargo, decrecen levemente a partir de 3º de la ESO, tanto en medida global como en las dimensiones particulares, evidenciando lo crítico que es ese curso para el desarrollo académico y de autoconcepto para los alumnos.

Tabla 2. Media (M) y desviación típica (DT) de la muestra global y por curso.

	Global		2º ESO		3º ESO		4º ESO		1º BTO	
	M	*DT*	*M*	*DT*	*M*	*DT*	*M*	*DT*	*M*	*DT*
Creencias	28.86	11.13	29.5	8.81	30.09	9.88	27.61	12.8	27.27	1.18
D1	2.85	1.2	2.84	.98	3.05	1.11	2.73	1.35	2.71	1.59
D2	3.18	1.33	3.23	1.09	3.34	1.2	3.03	1.54	3	1.74
D3	3.66	1.35	3.76	1.04	3.87	1.22	3.47	1.56	3.31	1.84
D4	2.86	1.1	2.96	.87	2.9	.97	2.83	1.28	2.57	1.48
Inteligencia fluida	48.29	6.26	47.74	5.26	47.02	6.9	48.6	7.79	52.54	3.13
Raz. Geo.	2.22	1.5	1.55	1.2	2.23	1.33	2.85	1.52	2.88	1.72

Tabla 3. Correlaciones entre las pruebas Spearman bilateral, **<.01, *p<.05

	Creencias	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*	*Inteligencia fluida*	*Geometría*
Creencias	1						
D1	.81**	1					
D2	.76**	.44**	1				
D3	.69**	.55**	.5**	1			
D4	.61**	.55**	.49**	.49**	1		
Inteligencia fluida	.28**	.2**	.28**	.12	.14*	1	
Raz. Geo.	.21**	.13*	.21**	.11	.12*	.32**	1

Como se puede ver en la Tabla 3, todas las variables principales que se han tenido en cuenta en el estudio (creencias matemáticas, inteligencia fluida y razonamiento geométrico sobre las figuras) están correlacionadas positivas y significativamente con todas las demás (Rho .21, p<.01, a Rho .32, p<.01). En la tabla se reflejan también las correlaciones entre las distintas dimensiones provenientes de la prueba de creencias (D1: el compromiso en el comportamiento en el aprendizaje

de las matemáticas, D2: confianza matemática y competencia personal, D3: creencias específicas sobre las matemáticas y D4: creencias sobre la resolución de problemas matemáticos). Entre ellas destaca especialmente la D2 (autoeficacia), que tiene una correlación significativa y positiva con la inteligencia fluida, Rho .28, p<.01, y con el razonamiento geométrico, Rho .21, p<.01.

Ante esto surge también preguntarse si la relación que tienen las variables de estudio se mantiene constante a lo largo de los diferentes cursos, o si por el contrario la influencia oscila según el nivel académico del alumno. En la Tabla 4 se puede observar las correlaciones entre las pruebas CreeMat (Creencias), Matrices de Raven (Inteligencia fluida) y razonamiento geométrico (Raz. Geo.) correspondientes a cada curso académico. Estos resultados sugieren, dentro de las correlaciones positivas débiles o moderadas, un nivel de relación entre las variables más intenso en los primeros cursos y que se devalúa a medida que los alumnos avanzan académicamente. Es especialmente remarcable el caso de 3º de la ESO, donde todas las correlaciones alcanzan el valor más alto, corroborando la importancia de ese curso académico en el desarrollo del alumno. Es una situación completamente opuesta a la que ofrecen los datos de 1º de bachillerato, en el que no hay correlaciones significativas. Este es un curso en el que su recorrido escolar ya ha sido establecido, es decir, ya han elegido qué tipo de estudios cursar. Esta decisión implica una posición personal respecto de su identidad como estudiante, y eso puede significar que las creencias de los alumnos respecto de su propio aprendizaje matemático comienzan a cristalizarse. Los datos ponen de manifiesto que sus creencias tienen menos relación con el resto de las variables, es decir, se vuelven más independientes respecto de la capacidad real de inteligencia fluida.

Tabla 4. Correlaciones entre las pruebas Spearman bilateral, **<.01, *p<.05

Correlación entre:	*2º ESO*	*3º ESO*	*4º ESO*	*1º BACH*
Raz. Geo. - Creencias	.22*	.29*	.17	.04
Raz. Geo. - Inteligencia fluida	.25*	.42**	.37*	.09
Creencias - Inteligencia fluida	.16	.48**	.31*	.37

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

Las investigaciones realizadas nos permiten avanzar en nuestra comprensión del razonamiento y aprendizaje de la geometría en dos aspectos. En primer lugar, la evolución de los procesos de razonamiento geométrico en adolescentes ha sido estudiada con profundidad, cubriendo por tanto el primer propósito establecido en este trabajo. Se ha logrado cuantificar el progreso de los alumnos a lo largo de la etapa adolescente considerada en el estudio (13 a 16 años) según la conceptualización de visualización de Duval (1995), lo que nos ha permitido ampliar nuestra comprensión sobre la progresiva capacidad que tienen los alumnos de alcanzar las distintas aprehensiones cognitivas.

En segundo lugar, se han estudiado las relaciones entre las variables objeto de estudio, y que los resultados han confirmado un patrón de intercorrelaciones positivas y fiables entre las creencias de los alumnos relacionadas con las matemáticas, su inteligencia fluida, y su nivel de razonamiento geométrico. Estos resultados confirman el papel relevante que juegan las creencias relacionadas con las matemáticas en la competencia matemática (Gómez-Chacón et al., 2014; Goldin, et al., 2016) pero, tal y como inicialmente se había propuesto, específicamente focalizados en el ámbito de la visualización y el razonamiento sobre figuras. También se confirma la relación entre la inteligencia fluida y el razonamiento geométrico, tal y como se había establecido en el segundo objetivo.

Además, se han encontrado datos que sostienen la importancia que tiene el período adolescente en el desarrollo matemático y en la formación de su sistema de creencias sobre su propio aprendizaje matemático. Más concretamente, 3º de la ESO ha surgido como un punto de inflexión en su progreso, que coincide con el momento donde empiezan a decidir el devenir de su recorrido académico. Los datos apuntan lo crítico que resulta ese curso académico, especialmente en la formación de su autoconcepto como estudiante de matemáticas. Finalmente, se deben tener en

consideración las limitaciones de este estudio, tanto a nivel de tamaño de muestra estudiada como número de variables. Pudiera haber más factores, tanto ambientales como cognitivos, relacionados con el razonamiento geométrico y que podrían a futuro tenerse en cuenta con más detalle (como el razonamiento lógico, la reflexión cognitiva, la memoria a corto plazo…).

REFERENCIAS

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2019). Identificación y uso de los atributos de los polígonos por estudiantes de tercero de Educación Primaria: relaciones implicativas. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz- Escolano y Á. Alsina (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XXIII* SEIEM.

Cattell, R. B. (1971). *Abilities: Their structure, growth and action*. Houghton Mifflin.

Deary J., Strand S., Smith P., y Fernandes C., (2007) Intelligence and educational achievement. *Intelligence, 35* (1) https://doi.org/10.1016/j.intell.2006.02.001

De Corte, E. (2015). Mathematics-related beliefs of Ecuadorian students of grades 8-10. *International Journal of Educational Research*, 721-1-13

De Corte, E., Op 't Eynde, P., Depaepe, F., y Verschaffel, L. (2010). The reflexive relation between students' mathematics-related beliefs and the mathematics classroom culture. In L. D. Bendixen y F. C. Feucht (Eds.), *Personal epistemology in the classroom: Theory, research, and implications for practice* (pp. 292–327). Cambridge University Press.

Duval, R. (1995). *Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Springer.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panoura A. y Philippou, A. (2010). One Way of Assessing the Understanding of a Geometrical Figure. *Acta Didactica Universitaties Comenianae Matematics, 10*, 33-50.

Goldin, G. A., Hannula, M.S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutova, S., Di Martino, P., Morselli, F. Middleton, J.A., Pantziara, M., y Zhang, Q. (2016*). Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. Springer Cham.

Gómez-Chacón, I. Mª., Op't Eynde, P., & De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas, la influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(3), 309–324.

Gómez-Chacón I., García-Madruga J. A., Vila J. O., Elosúa, R. & Rodríguez, R. (2014) The dual processes hypothesis in mathematics performance: Beliefs, cognitive reflection, working memory and reasoning. *Learning and Individual Differences, 29*, 67–73

Flanagan, D. P., McGrew, J. S., y Ortiz, S. O. (Eds.). (2000). *The Wechsler Intelligence Scale and Gf—Gc theory: A contemporary approach to interpretation*. Allyn and Bacon.

Op't Eynde, De Corte, E., y Verschaffel, L. (2002). *Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Ed.), Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp.13-37). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_2

Pepin, B y Rösken-Winter, B. (Eds) (2015). *From beliefs and affect to dynamic systems: (exploring) a mosaic of relationships and interactions*. Serie Advances in Mathematics Education. Springer.

Primi, R., Ferrão, M. E., y Almeida, L. S. (2010). Fluid intelligence as a predictor of learning: a longitudinal multilevel approach applied to math. *Learning and Individual Differences, 20*, 446– 451

Raven, J., Raven, J. C., y Court, J. H. (1995). *Manual for Raven's progressive matrices and vocabulary scales. Section 1: General overview.* Oxford Psychologists Press; San Antonio, TX.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Schraw, G. y Sinatra, G. M. (2004). Introduction: Epistemological development and its impact on cognition in academic domains. *Contemporary Educational Psychology, 29*, 95–102.

PERCEPCIONES DE FUTUROS MAESTROS SOBRE LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS LÓGICO-MATEMÁTICAS MEDIANTE ACTIVIDADES CONSTRUCTIVISTAS

Perceptions of future teachers on the acquisition of logical-mathematical skills through constructivist activities

Saá-Rojo, M.D., Carrillo-Gallego, D., Dólera-Almaida, J., Sánchez-Jiménez, E., Ibáñez-López, F.J. y Maurandi-López, A.

Universidad de Murcia

Resumen

Este trabajo presenta la percepción de los futuros maestros de Educación Infantil sobre una actividad práctica implementada a partir de un enfoque constructivista. Con un diseño cuantitativo descriptivo no experimental, 168 estudiantes de una universidad pública estatal participaron en la realización de la actividad y en la cumplimentación de una encuesta tipo escala Likert. Los resultados mostraron que una mayoría de los participantes confirmó que este tipo de actividades ayuda a la adquisición de las competencias transversales y de materia de la asignatura de Didáctica de la Matemática. Además, los resultados son si cabe mejores cuando el alumnado ha experimentado experiencias similares en otras asignaturas del Grado en Educación Infantil o en su formación previa.

Palabras clave: *didáctica, matemáticas, constructivismo, futuros maestros, Educación Infantil.*

Abstract

This paper presents the perception of future Early Years Education teachers on a practical activity implemented from a constructivist approach. With a descriptive non-experimental quantitative design, 168 students from a state public university participated in the activity and in the completion of a Likert scale survey. The results showed that a large majority of the participants confirmed that this type of activity helps in the acquisition of the transversal and subject competences of the Didactics of Mathematics subject. Moreover, the results are even better when students have had similar experiences in other subjects of the degree in Early Years Education or in their previous education.

Keywords: *didactics, mathematics, constructivism, future teachers, Early Years Education.*

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, la investigación en la formación de futuros docentes en matemáticas está en auge y se centra en la identificación de los conocimientos y competencias que debe tener este profesorado para el desempeño de su labor. Varios investigadores como Ball et al. (2008), Cirade (2006), Valente (2018) o Carrillo y Espín (2021), señalan la necesidad de conocer, no solo la matemática a enseñar, es decir, contenidos del currículo, sino también los conocimientos propios del docente (matemática para enseñar o matemáticas para la enseñanza). Estos últimos deben ser abordados en la formación inicial del profesorado.

Houdement y Kuzniak (1996) han estudiado y clasificado las estrategias que utilizan los formadores de maestros en Francia. Entre ellas se encuentran las que se basan en la *homología*, en las que el formador utiliza procesos de enseñanza similares a los que podrán implementar los futuros maestros en sus aulas. Otra estrategia se basa en la *transposición* y con ella, los formadores de maestros se proponen transmitir saberes sobre la práctica en el aula.

Saá-Rojo, M. D., Carrillo-Gallego, D., Dólera-Almaida, J., Sánchez-Jiménez, E., Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. (2023). Percepciones de futuros maestros sobre la adquisición de competencias lógico-matemáticas mediante actividades constructivistas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 483–490). SEIEM.

Este modelo docente está basado en el aprendizaje constructivista por adaptación al medio, como lo plantea la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1998). Al planificar actividades como la que se presenta en esta investigación, se posibilitan momentos de *acción* (al buscar respuestas a las cuestiones planteadas), momentos de *formulación* (para transmitir y comprender la acción realizada), momentos de *validación* (en los que se trata de justificar la validez de la respuesta) y momentos de *institucionalización* (en los que el saber que se ha construido en el aula se reconoce como saber matemático). El aprendizaje de las matemáticas debería estar fundamentado en la combinación de una pedagogía constructivista, orientada hacia la implementación y resolución de situaciones-problemas por parte del estudiantado, asignando al profesor un papel de facilitador, y la transmisión directa del conocimiento por parte del profesorado unida a la recepción activa del alumnado (Godino et al., 2015).

Durante la etapa de la Educación Infantil, el desarrollo del pensamiento lógico es fundamental y, por lo tanto, está recogido dentro de las asignaturas Didáctica de las Matemáticas del currículo de formación de los futuros maestros (Alsina y Delgado-Rebolledo, 2022; Castro y Castro, 2016; Muñoz-Catalán y Carrillo, 2018).

La actividad práctica aquí presentada incide precisamente en la percepción del alumnado sobre la adquisición de competencias para designar, clasificar, ordenar y organizar los objetos con los que día a día interactuamos (Lerma et al., 2021). De esta manera, se pone de relieve cómo percibe el alumnado esta adquisición y el uso de los contenidos relativos a las competencias matemáticas. La participación activa del alumnado en el descubrimiento de conceptos e ideas matemáticas permite que, como futuros docentes, evolucionen hacia el manejo de herramientas y metodologías docentes más eficientes (Aragón et al., 2021; Friz et al., 2018).

Diferentes estudios confirman que el alumnado percibe una mejor adquisición de las competencias y los contenidos de la asignatura de matemáticas cuando se implementan actividades de corte constructivista frente a la clásica lección teórica (Aragón et al., 2021; García-Moya, 2020; Saá et al., s.f.). Así, se comprueba que la competencia matemática puede relacionarse de forma inversa con la dificultad que encuentran los futuros maestros en los conceptos y procedimientos, y de forma directa con el agrado que se experimenta al realizar tareas matemáticas (Escolano et al., 2012).

Pero, ¿realmente los estudiantes perciben que estas actividades ayudan en la adquisición de las competencias y la mejor comprensión de los contenidos matemáticos? ¿Consideran que estas metodologías son más eficientes en este sentido que las metodologías tradicionales de clase magistral? El objetivo de esta investigación fue evaluar cuantitativamente la percepción de los estudiantes del Grado en Educación Infantil sobre la adquisición de las competencias transversales y de materia de la asignatura de *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil I* mediante el desarrollo de actividades constructivistas para un aprendizaje significativo.

METODOLOGÍA

Diseño

Para dar respuesta a este objetivo de investigación, se llevó a cabo un enfoque descriptivo de corte cuantitativo, en el que se optó por un diseño de investigación no experimental (Creswell, 2012), en el que se implementaron técnicas e instrumentos de recogida de información de carácter cuantitativo, más concretamente, se empleó la técnica del cuestionario y una encuesta tipo escala Likert como instrumento.

Participantes

Los participantes en este estudio fueron 168 estudiantes matriculados en los tres grupos de la asignatura de *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil I* de segundo curso del Grado en EI de una universidad pública estatal durante el curso académico 2022/2023. Este alumnado asistió y

participó en las dos sesiones que se emplearon para el desarrollo de la actividad que se describe más adelante. Concretamente, intervinieron 159 mujeres (94.64%) y 9 hombres (5.36%), con una edad media de 19.7 años.

De entre el alumnado participante, 137 estudiantes (81.55%) accedieron a los estudios de grado mediante la realización y superación de la EBAU, mientras que el resto, 31 estudiantes (18.45%), accedieron por otras vías (FP, acceso para mayores de 25 años, acceso para mayores de 40 años, etc.).

Finalmente, solo 17 afirmaron haber tenido alguna experiencia similar antes de comenzar sus estudios universitarios (10.12%) frente a 151 que indicaron no haberla tenido (89.88%), y 19 estudiantes confirmaron haber tenido alguna experiencia similar en la realización de este tipo de actividades en alguna otra asignatura del grado universitario (11.31%), mientras que 149 (88.69%) indicaron no haberla tenido nunca.

Instrumento

Para la recogida de datos, se empleó un cuestionario tipo escala Likert realizado *ad hoc* tras una revisión exhaustiva de la literatura y los estudios previos. El cuestionario constaba de 33 preguntas con cinco valores de respuesta (donde 1 significaba "Totalmente en desacuerdo", 2 "En desacuerdo", 3 "Indiferente", 4 "De acuerdo" y 5 significaba "Totalmente de acuerdo") clasificadas en tres dimensiones, sobre la adquisición de competencias a través de la realización de la actividad constructivista, sobre el desarrollo y la implementación de la actividad en sí y, por último, sobre la percepción general del alumnado de la actividad. En este trabajo se muestran solamente los resultados de las cuestiones pertenecientes a la primera dimensión sobre percepción en la adquisición de competencias mediante el desarrollo de la actividad enmarcada dentro de actividades-propuestas constructivistas para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

1. Me ha ayudado a conocer los fundamentos científicos y matemáticos necesarios para desarrollar la docencia en Educación Infantil.
2. Muestra cómo se adquieren y desarrollan los aprendizajes de contenidos matemáticos.
3. Me dota de herramientas para desarrollar el pensamiento lógico.
4. Ofrece estrategias didácticas para la representación de nociones espaciales y geométricas.
5. Me ha ayudado a comprender el concepto de tarjetas gráficas del material lógico.
6. Promueve el pensamiento científico, la observación y la experimentación desde la matemática.

Con ánimo de ofrecer unos resultados válidos y fiables, se calculó la fiabilidad y consistencia interna del cuestionario empleado mediante diferentes técnicas e índices. Así, inicialmente, se obtuvo un *Alfa de Cronbach* de .949, resultado considerado como excelente (George, 2011). También se calculó el índice de *Fiabilidad Compuesta* y el índice de *Varianza Media Extractada* (AVE), resultando unos valores de .951 y .394 respectivamente, considerados como excelentes-buenos (Hair, 2009). Por último, también se calculó la *Omega de McDonald*, obteniéndose un valor de .963, considerado excelente (Ventura-León y Caycho-Rodríguez, 2017).

Por otro lado, también se realizó una validez de constructo del cuestionario sobre la variable latente "Percepción del alumnado sobre la adquisición de competencias mediante la realización de actividades constructivistas" a través de un *Análisis Factorial Exploratorio* (AFE), siguiendo el método de extracción de *Componentes Principales* y rotación *Varimax*, previo estudio de la no existencia de variables que no correlacionaran entre ellas o que pudieran causar multicolinealidad. Se obtuvo un valor significativo en el *Test de Bartlett* con $\chi 2\ (15) = 412.871$ y p-valor = .000, que rechazó la hipótesis nula consistente en que la matriz fuera similar a la matriz identidad. Se obtuvo un Índice

de *Kaiser-Meyer-Olkin* (KMO) para la adecuación factorial de .861 considerado excelente (se considera una bueno a partir de .5), con un 51% de la varianza total explicada.

Procedimiento

En los primeros contenidos de la asignatura *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil I* se abordan los conocimientos lógicos y prenuméricos. Así, inicialmente se presenta al alumnado el material lógico de referencia en el aula, que varía con respecto a cuatro descriptores: el color (rojo, azul, amarillo y verde), la forma (triángulo, círculo y cuadrado), el tamaño (grande y pequeño) y la textura (liso y rugoso). Por tanto, todo el material consta de 48 piezas.

La actividad llevada a cabo tenía por objetivo que el alumnado codificara gráficamente las propiedades del material lógico, individualizándolas y comparando sus conclusiones con el material correspondiente comercializado (Saá et al., 2023). Para su realización, se emplearon dos sesiones de dos horas, en las que se organizó al alumnado en grupos de cuatro a seis personas. Inicialmente, se le proporcionó a cada grupo una caja de material lógico en la que faltaban piezas y otras estaban repetidas. Además, se colocó en el aula a la vista de todo el alumnado, una caja-almacén con piezas del material lógico.

En la primera sesión se utilizó una estrategia basada en la *homología.* El equipo docente planteó al alumnado un supuesto práctico, en el que se establecía que estaban trabajando para una empresa que se dedicaba al suministro de material didáctico a los centros escolares. Se les explicó que tenían como objetivo completar las cajas con la máxima celeridad para poder enviarlas a los correspondientes centros, sabiendo que debían hacerlo a la vez, es decir, el mismo día para no marcar diferencias entre dichos centros.

Los grupos de estudiantes trataron inicialmente de completar las cajas intercambiando piezas y cogiendo piezas de la caja-almacén, que pronto, para un mejor manejo de la situación, pasó a ser gestionada por un cajero. Pero los procedimientos admitidos por este cajero para entregar piezas en función de cómo hacían su pedido los estudiantes fueron variando: desde gestos, descripciones orales hasta representaciones gráficas de las propias piezas. En un momento determinado, la situación cambia, sustituyéndose al cajero por una máquina (Figura 1), manipulada por un docente de la asignatura, que solo admitía mensajes escritos en papeles de un determinado tamaño y solo respondía, y entregaba la pieza demandada, si esos mensajes individualizaban las propiedades de la pieza, lo que debía descubrir el alumnado. Tratando de saber cuál era el funcionamiento de la máquina, el alumnado ideó distintas formas de representación gráfica, hasta descubrir que se debía representar de forma gráfica e individualizada cada una de las propiedades de la pieza y que debían elaborar propuestas de codificación; con el análisis y selección de dichas propuestas, el alumnado pudo descubrir la relación de su (o sus) propuesta con la de las tarjetas comercializadas.

Figura 1. Máquina recibida



En la segunda sesión de la actividad se analizó la situación de aprendizaje vivida, identificando tanto los aprendizajes adquiridos como la gestión de ese proceso de aprendizaje. Finalizada la actividad se

administró el cuestionario al alumnado vía correo electrónico. Fue cumplimentado de forma individual y anónima a través de la aplicación *Encuestas de la Universidad de Murcia*.

Análisis de la información

La información recabada mediante el cuestionario administrado fue procesada y analizada con el paquete estadístico de software libre R (R Core Team, 2021). Se calcularon los estadísticos descriptivos de la muestra mediante el paquete *Likert*, analizándose las propiedades de los ítems, indicándose media y mediana, por ser esta última la más recomendable en cuestiones ordinales (Ibáñez-López et al., 2022). Para la búsqueda de diferencias significativas en los ítems según variables sociodemográficas, se aplicaron test no paramétricos, por ser estos test los más robustos para datos ordinales. En concreto, se empleó la U de Mann-Whitney para variables independientes con dos niveles de respuesta (se tomó p-valor inferior a .05 y nivel de significación $\alpha = .05$).

Resultados

Tal y como se puede comprobar en la Tabla 1 y en la Figura 2, la mayoría de participantes percibió que consiguió una correcta adquisición de las competencias transversales y de materia de la asignatura a través de la realización de la actividad planteada. Así, un 89.9% de los informantes estuvo de acuerdo o totalmente de acuerdo con la afirmación de que la actividad le había ayudado a comprender el concepto de tarjetas gráficas del material lógico (cuestión 5) y un 79.8% consideró que la realización de la actividad le dotaba de herramientas para desarrollar el pensamiento lógico (cuestión 3). Además, un 78.6% de los estudiantes confirmó que este tipo de actividades promueven el pensamiento científico, la observación y la experimentación desde la matemática (cuestión 6). Los participantes indicaron que la actividad propuesta muestra cómo se adquieren y desarrollan los aprendizajes de contenidos matemáticos (77.4%; cuestión 2) y ofrece estrategias didácticas para la representación de nociones espaciales y geométricas (76.8%; cuestión 4). Por último, un 70.2% opinó que su realización le había ayudado a conocer los fundamentos científicos y matemáticos necesarios para desarrollar la docencia en Educación Infantil.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos y porcentajes de respuesta de las cuestiones sobre competencias

Cuestión	*N*	*Mín*	*Máx*	*Media*	*Mediana*	*Sd*	%1	%2	%3	%4	%5
I1	168	1	5	3.73	4	.85	1.79	7.14	20.83	57.14	13.10
I2	168	1	5	3.85	4	.82	1.79	5.36	15.48	60.71	16.67
I3	168	1	5	4.01	4	.75	.60	2.38	17.26	55.36	24.40
I4	168	1	5	3.89	4	.82	1.19	5.36	16.67	57.14	19.64
I5	168	1	5	4.26	4	.83	1.19	4.17	4.76	47.62	42.26
I6	168	2	5	4.00	4	.77	.00	4.17	17.26	52.98	25.60

En cuanto a la existencia de diferencias estadísticamente significativas en estos ítems, no se detectaron según la variable sexo.

Respecto a la modalidad de acceso al grado, se detectaron diferencias significativas en la pregunta 5, sobre la comprensión de las tarjetas gráficas del material lógico ($W = 2603.5$, *p-valor* = .030, $d = .44$), estando más de acuerdo el alumnado que realizó la EBAU ($\bar{x} = 4.32$ y mediana = 4) que el alumnado accedió al grado mediante otra vía ($\bar{x} = 3.97$ y mediana = 4).

Respecto a la variable haber tenido alguna experiencia similar antes de acceder al grado, se detectaron diferencias significativas en la pregunta 2, sobre adquisición de contenidos ($W = 1613.0$, *p-valor* = .048, $d = .44$) y nuevamente la pregunta 5 ($W = 1679.0$, *p-valor* = .021, $d = .45$), estando en ambas más de acuerdo el alumnado que sí tuvo alguna experiencia de este tipo ($\bar{x} = 4.18$ y mediana = 4 frente a $\bar{x} = 3.81$ y mediana = 4 en la cuestión 2; $\bar{x} = 4.59$ y mediana = 5 frente a $\bar{x} = 4.22$ y mediana = 4 en la cuestión 5). Finalmente, respecto a la variable haber tenido alguna experiencia similar en las asignaturas del grado que están cursando, se obtuvieron diferencias significativas en todas las

cuestiones. La Tabla 2 muestra el p-valor, el tamaño del efecto y los estadísticos descriptivos del grupo de participantes que afirmó haber realizado alguna actividad similar frente al grupo de los que no.

Figura 2. Descriptivo de las cuestiones sobre adquisición de competencias

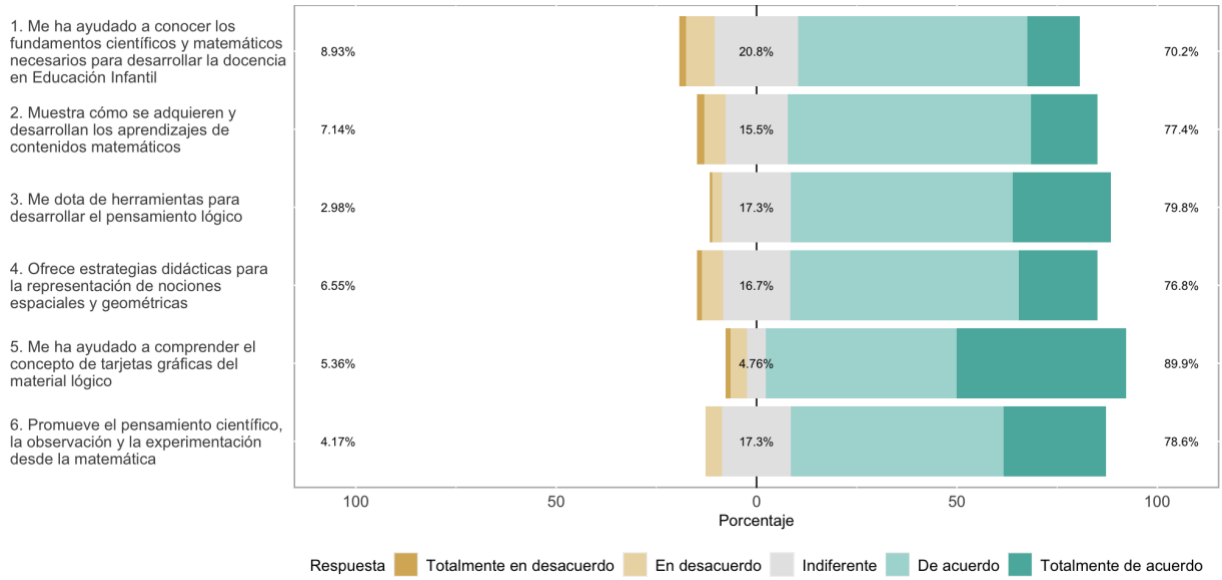


Tabla 2. Diferencias significativas en las cuestiones respecto de la variable haber tenido alguna experiencia similiar en el grado

Cuestión	Estadístico *W*	*p-valor*	*d* de Cohen	Estadísticos de grupo (sí frente a no)
I1	1810.0	.002	.77	$\overline{x}$ = 4.29 y med = 4 frente a $\overline{x}$ = 3.66 y med = 4
I2	1759.5	.004	.69	$\overline{x}$ = 4.35 y med = 4 frente a $\overline{x}$ = 3.79 y med = 4
I3	1626.0	.046	.52	$\overline{x}$ = 4.35 y med = 4 frente a $\overline{x}$ = 3.97 y med = 4
I4	1710.5	.012	.56	$\overline{x}$ = 4.29 y med = 5 frente a $\overline{x}$ = 3.84 y med = 4
I5	1806.0	.002	.70	$\overline{x}$ = 4.76 y med = 5 frente a $\overline{x}$ = 4.20 y med = 4
I6	1759.0	.006	.69	$\overline{x}$ = 4.47 y med = 5 frente a $\overline{x}$ = 3.95 y med = 4

Discusión y conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran que el alumnado percibió lograr una mejor adquisición de las competencias y los contenidos de la asignatura de matemáticas gracias a la implementación de estas actividades en comparación con la clásica lección teórica, tal y como también concluyen García-Moya et al. (2020) y Aragón et al. (2021) en sus estudios. Los cambios en las percepciones del alumnado sobre los contenidos matemáticos son lentos y requieren de metodologías que ayuden a reducir la complejidad de los mismos y que redunden en la mejora de la percepción de la asignatura (Martínez y Valiente, 2019). Además, se comprobó que aquel alumnado que había vivenciado el aprendizaje de contenidos mediante actividades similares, en otras asignaturas del grado universitario o en asignaturas de su formación previa en primaria o secundaria, supo identificar y reconocer más si cabe, el valor de los beneficios que, en los procesos de enseñanza-aprendizaje, se derivan de la aplicación de estas metodologías docentes.

En general, cabe destacar que el alumnado valoró de forma muy positiva la puesta en marcha de estas propuestas constructivistas, identificando que tanto docentes como estudiantes tienen un papel compartido para conseguir los objetivos propuestos (en coincidencia con Friz et al., 2018, y Saá et al., s.f.). Es de esperar que progresivamente se ofrezca una visión, tanto de la competencia matemática como de los procesos matemáticos, más alineada con la investigación contemporánea en la educación matemática infantil, completando la renovación de un currículo orientado a la adquisición de contenidos por un enfoque orientado al desarrollo de las competencias, para dar respuesta así a las necesidades sociales del siglo XXI (Alsina, 2022).

En conclusión, este trabajo evidencia que la percepción que tienen los futuros docentes sobre la consecución de las competencias didáctico-matemáticas mejora gracias a la implementación de actividades y propuestas constructivistas, motivo por el cual se debería seguir apostando por la implementación de estas propuestas didácticas en cualquier etapa educativa. Se debe seguir investigando la eficacia de estas metodologías docentes en el resto de asignaturas relacionadas con las matemáticas del Grado en Educación Infantil, incluso contar con la percepción de estudiantes de otros estudios afines a la formación de profesorado.

Referencias

Alsina, A. (2022). Transformando el currículo español de Educación Infantil: la presencia de la competencia matemática y los procesos matemáticos. *Números*, 111, 33-48. http://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-1-111/

Alsina, A. y Delgado-Rebolledo, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de educación infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 5(1), 18-37. http://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/14153

Aragón. L., Jiménez-Tenorio, N., Vicente-Martorell, J. J. y Eugenio, M. (2021). ¿Progresan las concepciones sobre la ciencia de futuros maestros/as tras la implementación de propuestas constructivistas para la alfabetización científica? *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 16*(1), 78-95. https://doi.org/10.14483/23464712.15589

Ball, D. L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des Situations Didáctiques*. La Pensée Sauvage.

Carrillo Gallego, D. y Espín Buendía, J.G. (2021). Pablo Montesino y la formación matemática del magisterio en España (1838-1850). *REAMEC*, 9(1) https://doi.org/10.26571/reamec.v9i1.11580

Castro, E. y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.* Pirámide.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathèmatiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.* (Tesis doctoral). Université de Provence. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709

Creswell, J. (2012). *Educational research: planning conducting and evaluating quantitative and qualitative research* (4.ª Ed.). Pearson.

Escolano Vizcarra, R., Gairín Sallán, J. M., Jiménez-Gestal, C., Murillo Ramón, J. y Roncal Gómez, L. (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del grado de educación primaria. *Contextos Educativos. Revista De Educación*, (15), 107–134. https://doi.org/10.18172/con.658

Friz Carrillo, M., Panes Chavarría, R., Salcedo Lagos, P. y Sanhueza Hernández, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *20*(1), 59-68. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1607-40412018000100059&lng=es&tlng=es

García-Moya, M., Gómez-Escobar, A., Solano-Pinto, N. y Fernández-Cézar, R. (2020). Las creencias de los futuros maestros sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Espacios*, *41*(9), 14. https://www.revistaespacios.com/a20v41n09/20410914.html

George, D. (2011). *SPSS for Windows Step by Step: A Simple Study Guide and Reference*. Pearson Education.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, G. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (Comp.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269). Universidad de la Sabana.

Hair, J. F. (2009). *Multivariate Data Analysis* (7th ed.). Pearson Prentice Hall.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1996). Autour des estratégies utilisées pour former les maîtres de premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 289-322.

Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Castejón-Mochón, J. F. (2022). Docencia práctica virtual y adquisición de competencias en la formación estadística de maestros durante el confinamiento sanitario. *PNA*, *16*(2), 99-113. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.21364

Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. En P. Diago, D.F. Yáñez, M.T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 385 – 392). SEIEM.

Martínez Vicente, M. y Valiente Barroso, C. (2019). Autorregulación afectivo-motivacional, resolución de problemas y rendimiento matemático en Educación Primaria. *Educatio Siglo XXI*, *37*(3 Nov- Feb), 33–54. https://doi.org/10.6018/educatio.399151

Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2018). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil.* Paraninfo.

R Core Team (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing.

Saá Rojo, M. D., Carrillo Gallego, D., Dólera Almaida, J., Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Sánchez Jiménez, E. (2023). Estrategias en la formación matemático-didáctica de los estudiantes del Grado en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 114, 23-41. https://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-2-114/

Saá Rojo, M. D., Carrillo Gallego, D., Dólera Almaida, J., Ibáñez-López, F. J., Maurandi-López, A. y Sánchez Jiménez, E. (s.f.). Propuestas constructivistas en Didáctica de las Matemáticas: percepción de los futuros maestros. *Educatio Siglo XXI.*

Valente, W.R. (2018). El saber profesional del profesor que enseña matemática: el futuro del pasado. *Paradigma*, *39* (extra 1), 190-201. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2018.p190-201.id674

Ventura-León, T. y Caycho-Rodríguez, J. L. (2017). El coeficiente omega: un método alternativo para la estimación de la confiabilidad. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud*, *15*(1), 625-627. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=77349627039

PERCEPCIONES DEL PROFESORADO SOBRE PENSAMIENTO COMPUTACIONAL. ESTUDIO DE UNA FORMACIÓN

Teachers' Perceptions of Computational Thinking. A Study of a Training Course

Santaengracia, J. J.[a], Palop, B.[b,c] y Rodríguez-Muñiz, L. J.[a]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universidad Complutense de Madrid, [c]Universidad de Valladolid

Resumen

El pensamiento computacional ha pasado a formar parte del currículo de matemáticas desde la última ley educativa. A partir de un breve cuestionario a los participantes de un curso de formación del profesorado, analizamos sus percepciones sobre el conocimiento y preparación para abordarlo de manera efectiva antes y después de recibir una formación especializada. La formación, orientada según el modelo realista-reflexivo, consistió en una ponencia de carácter teórico y siete talleres prácticos en los que se exploraron las diferentes dimensiones del PC, las formas de implementación en el aula y su ubicación y pertinencia en el currículo actual. El análisis de las respuestas de los profesores confirma la necesidad de la formación del profesorado en esta temática y la importancia de proporcionar secuencias didácticas adecuadas para su abordaje desde el aula de matemáticas.

Palabras clave: *currículo, pensamiento computacional, profesorado en activo.*

Abstract

Computational thinking has become part of the mathematics curriculum since the latest educational law. Through a brief questionnaire given to participants in a teacher training course, we analyzed their perception of their knowledge and preparedness to effectively approach computational thinking before and after receiving specialized training. The training, guided by the realistic-reflection model, consisted of a theoretical lecture and seven practical workshops exploring different dimensions of computational thinking, implementation methods in the classroom, and its relevance and integration within the current curriculum. The analysis of teachers' responses confirms the need for teacher training in this subject and the importance of providing suitable didactic sequences for addressing it in the mathematics classroom.

Keywords: *computational thinking, curriculum, in-service teachers.*

INTRODUCCIÓN

La inclusión del PC en el currículo de matemáticas en España en todas las etapas preuniversitarias genera al profesorado la necesidad de formarse en este tema tanto desde el conocimiento del contenido, que no estaba presente en sus planes de formación, como desde su didáctica, sabiendo que debe incardinarse en el aula de matemáticas. Este trabajo explora las percepciones de un grupo de docentes en activo que asisten a una formación sobre PC. Los objetivos planteados son:

1. Analizar el nivel autopercibido por el profesorado acerca de su conocimiento sobre el PC, así como su percepción sobre la preparación, propia y ajena, para implementarlo en el aula.
2. Comprobar el cambio en las percepciones sobre el conocimiento y la formación del profesorado a partir de la formación recibida sobre PC.
3. Analizar las percepciones sobre el encaje del PC en el currículo y, más concretamente, dentro del área de matemáticas.

Santaengracia, J. J., Palop, B. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2023). Percepciones del profesorado sobre pensamiento computacional. Estudio de una formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 491–498). SEIEM.

MARCO TEÓRICO

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos sobre el PC, su inclusión en el currículo y la formación del profesorado necesarios para enmarcar la comunicación.

Pensamiento computacional

Podemos fijar la aparición del término *pensamiento computacional* en los trabajos seminales de Papert (1980), pero el término no ganará relevancia hasta la publicación de los trabajos de Jeannette Wing (2006, 2008), quien definió que: "el pensamiento computacional implica resolver problemas, diseñar sistemas y comprender el comportamiento humano mediante la utilización de los conceptos fundamentales de la informática" (Wing, 2006, p. 33, [traducción propia]). Tras Wing, numerosos autores e instituciones han profundizado en el término, estableciendo definiciones y dimensiones, sin haber llegado a un consenso en la comunidad científica (Tang et al., 2020). Barr y Stephenson (2011) definieron el PC como: "un enfoque para resolver problemas de manera que pueda ser implementado con un ordenador" (p. 115, [traducción propia]), lo que subraya el papel del ordenador, a diferencia de Wing (2008). También haciendo referencia a los medios físicos, la Royal Society (2012) propuso que "el pensamiento computacional es el proceso de reconocer aspectos de la computación en el mundo que nos rodea y aplicar herramientas y técnicas de la informática para comprender y razonar sobre sistemas y procesos tanto naturales como artificiales" (p. 29, [traducción propia]). En este trabajo usaremos la definición propuesta por Díaz y Palop (2023): "El pensamiento computacional es la manera de razonar que nos permite enfrentarnos a un problema sobre unos datos con el objetivo de que un ordenador lo resuelva.". A diferencia de las anteriores, esta definición hace explícita la necesidad de atender no solo a la resolución de problemas y la algoritmia, sino también a los datos, elemento que apenas había sido considerado y que, en la era del *big data* resulta clave para el PC. Así, el PC se organiza en torno a tres ejes: los datos, los algoritmos y la resolución de problemas. La emergencia de los datos como un organizador motiva que en la formación sobre PC se incluyan aspectos como la simulación, la ordenación y la modelización de datos, omitidos cuando se asumen otras definiciones de PC (Bocconi et al., 2016).

El PC en el currículo de matemáticas

La inclusión del PC en el currículo educativo está comenzando a producirse a nivel global, aunque aún no es generalizada (Rafiepour, 2018). Hay un consenso entre los expertos respecto a la necesidad de incluir el PC en los currículos, aunque se distinguen dos motivaciones (Bocconi et al., 2016): promover que el alumnado piense de una forma distinta y desarrolle la capacidad de resolver problemas, y la necesidad de atender a las necesidades de trabajo actuales y futuras relacionadas con las TIC.

En España (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022ab) se ha incluido el PC dentro del área de matemáticas como una de las competencias específicas que trabajar, en línea con otros países como Francia y Finlandia. Tanto en el currículo de Educación Primaria como en el de Educación Secundaria (Palop et al., 2022a, 2022b) se hace alusión fundamentalmente a la robótica y al pensamiento algorítmico. A pesar de no coincidir con todas las recomendaciones del informe de Bocconi et al. (2016), este cambio curricular obliga a incluir el PC en el aula, tal y como han hecho otros países (Stephens, 2018).

Desarrollo profesional del profesorado en relación con el PC

El desarrollo profesional del profesorado comprende la mejora constante de las competencias docentes que necesita para llevar a cabo de forma más efectiva el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula (Borko, 2004). El profesorado, especialmente en Educación Primaria, está poco especializado en la ciencia de la computación, teniendo muy poca formación, lo que lo hace reticente a implementar prácticas computacionales y proclive a omitir el PC por su desconocimiento (Hubbard, 2018; Sands et al., 2018).

Para diseñar la formación continua del profesorado resulta fundamental comprender el papel que este juega en los procesos de enseñanza-aprendizaje (Llinares, 2018). Además, según Darling-Hammond et al. (2017), el profesorado en formación debe asumir un papel activo, realizando actividades y talleres, evitando convertirse en un escuchante pasivo. Considerando estos aspectos, el modelo de formación que se utilizará en este trabajo será el modelo realista-reflexivo de Alsina y Mulà (2019). En este modelo, se parte de los conocimientos cotidianos del profesorado para deconstruidos mediante conflictos cognitivos; por ejemplo, mostrando que el concepto de orden tiene un enfoque diferente desde la matemática y desde la computación. Posteriormente, a través del trabajo en grupos, se realiza la coconstrucción del conocimiento, adquiriendo nuevas competencias en el proceso. Finalmente, se termina esta secuencia con la reconstrucción del conocimiento, mediante su institucionalización. De esta forma, el conocimiento cotidiano se convierte en conocimiento profesional.

METODOLOGÍA

El estudio que se presenta a continuación sigue un diseño preexperimental, caracterizado por la existencia de un único grupo sobre el que se aplican un pretest, una intervención y posttest. Este tipo de diseño es el adecuado para medir percepciones personales sobre un tema concreto o innovaciones curriculares (Cohen et al., 2000).

De acuerdo con el diseño elegido, los datos analizados fueron tomados a partir de los 84 participantes que acudieron a unas jornadas de formación sobre PC. Eran, principalmente, docentes de Educación Primaria (30 %) y de Educación Secundaria (46 %), aunque también asistieron otros profesionales educativos como inspectores, asesores de formación, personal de la Consejería, maestros de infantil y profesores de universidad.

La recogida de datos se realizó en dos fases, utilizando un cuestionario previo a la formación y uno posterior, a modo de pretest y posttest. A este cuestionario respondieron 64 personas al inicio y 70 al final. De cara al análisis de datos se toman en consideración los 51 informantes que respondieron de forma válida tanto al pretest como al posttest. Para realizar el análisis descriptivo se utilizó Google Sheets® para los gráficos y R para las pruebas estadísticas.

Descripción de la formación

La formación transcurrió del día 20 al 22 de enero de 2023, con una duración total de 16 horas. Se realizó una sesión teórica inicial y varios talleres prácticos, en grupos, en torno al PC. La formación comenzó con la aproximación teórica al marco de PC de Díaz y Palop (2023) y, a continuación, se sucedieron seis talleres:

- Simulación de datos con hoja de cálculo.
- PC desenchufado con el material *Bebras*® (Dagiene y Dolgopolovas, 2022).
- Algoritmos de ordenación desarrollados manipulativamente.
- *Scratch*® online (Massachusetts Institute of Technology, 2023).
- Diseño figurativo de autómatas, el PC en el nuevo currículo de matemáticas.
- Aproximación manipulativa a los sistemas de numeración a partir de *Exploding Dots*® (Global Math Project y Buzzmat, 2023).

Los talleres fueron similares tanto para Educación Primaria como para Educación Secundaria, difiriendo únicamente el nivel de algunas actividades.

Descripción de la toma de datos

Se realizaron dos tomas de datos a través de un cuestionario en Google Forms® emparejando las respuestas de ambos cuestionarios de cada participante junto con la etapa en la que ejerce su docencia. Dichos cuestionarios fueron diseñados *ad hoc* y validados en términos de pertinencia y claridad por el equipo investigador. Su finalidad era medir las cuatro variables dependientes de este experimento. Se incluyeron por tanto, además de otras preguntas breves sobre la propia formación, cuatro afirmaciones donde los participantes indicaban su nivel de acuerdo con una escala tipo Likert 1-5, creciente en acuerdo: (1) Entiendo a qué nos referimos con el término "Pensamiento Computacional"; (2) Creo que estoy preparado trabajar con el PC en mi contexto laboral (según mi rol: aula, evaluación, inspección, etc.); (3) Creo que, en general, los docentes españoles están preparados para trabajar con el PC en el aula; y (4) Creo la asignatura más afín para la inclusión del PC era, efectivamente, la de matemáticas.

A través de estas cuatro preguntas definimos las cuatro variables dependientes que se pretenden medir, siendo: (1) la percepción sobre el conocimiento del término PC; (2) la percepción sobre la preparación propia para implementar el PC en mi aula/contexto laboral; (3) la percepción ajena sobre la preparación para implementar el PC en su aula/contexto laboral; y (4) la percepción sobre la pertinencia del encaje del PC en la asignatura de matemáticas.

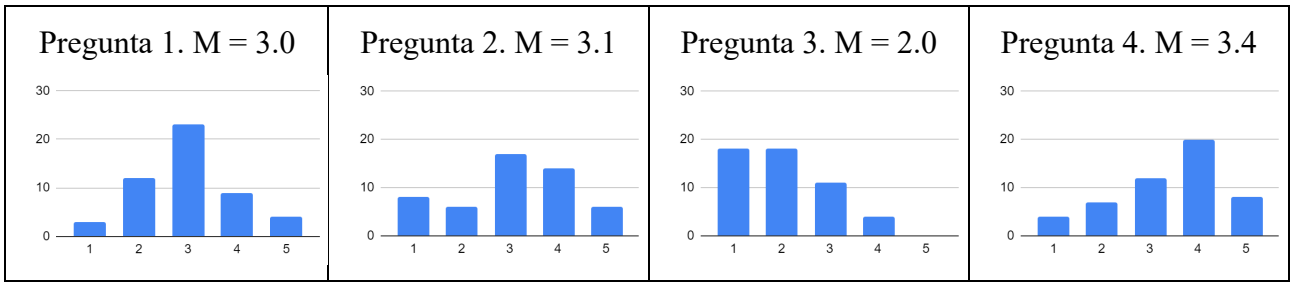
RESULTADOS

En esta sección se presenta el análisis descriptivo de las respuestas a los cuestionarios. Nos referiremos a cada una de las preguntas por su número según la descripción en la sección anterior. En un inicio se utilizó el test de normalidad de Saphiro-Wilk a fin de comprobar la distribución de las respuestas. Tras comprobar la no normalidad en todas las variables medidas se realizó el test de Wilcoxon para muestras pareadas, ya que se comparan los resultados de cada individuo en el pretest y en el posttest.

Pretest

Se realizó el test de normalidad de Saphiro-Wilk, comprobando que en ninguna de las cuatro preguntas las respuestas siguen una distribución normal (p-valores < 0.01). En la Figura 2 se muestra un resumen de los resultados en el que se incluyen la media de los valores y la distribución de frecuencias de las respuestas según la escala Likert utilizada.

Figura 2. Para cada pregunta: media (M), y gráfico con la distribución de las respuestas del pretest. Elaboración propia.

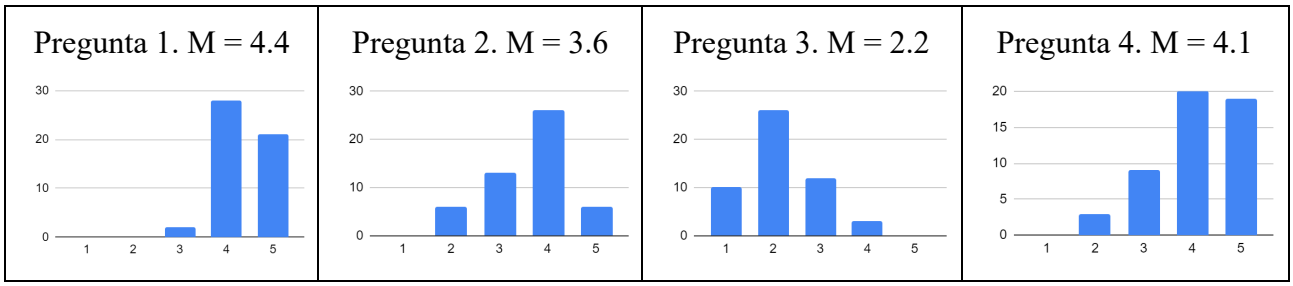


A partir de la Figura 2 se observa que el profesorado se percibe significativamente mejor preparado individualmente que el resto (p-valor < 0.01 en el test de Wilcoxon entre las preguntas 2 y 3). Por otro lado, al comparar las respuestas a las preguntas 1 y 2, mediante el test de Wilcoxon, obtenemos un p-valor de 0.4, por lo que se puede considerar que no hay diferencias entre la percepción de comprensión sobre el PC y la percepción para desarrollarlo.

Posttest

La Figura 3 recoge las respuestas a las preguntas en el posttest, en el sentido de la Figura 2.

Figura 3. Para cada pregunta: media (M), y gráfico con la distribución de las respuestas del posttest. Elaboración propia.

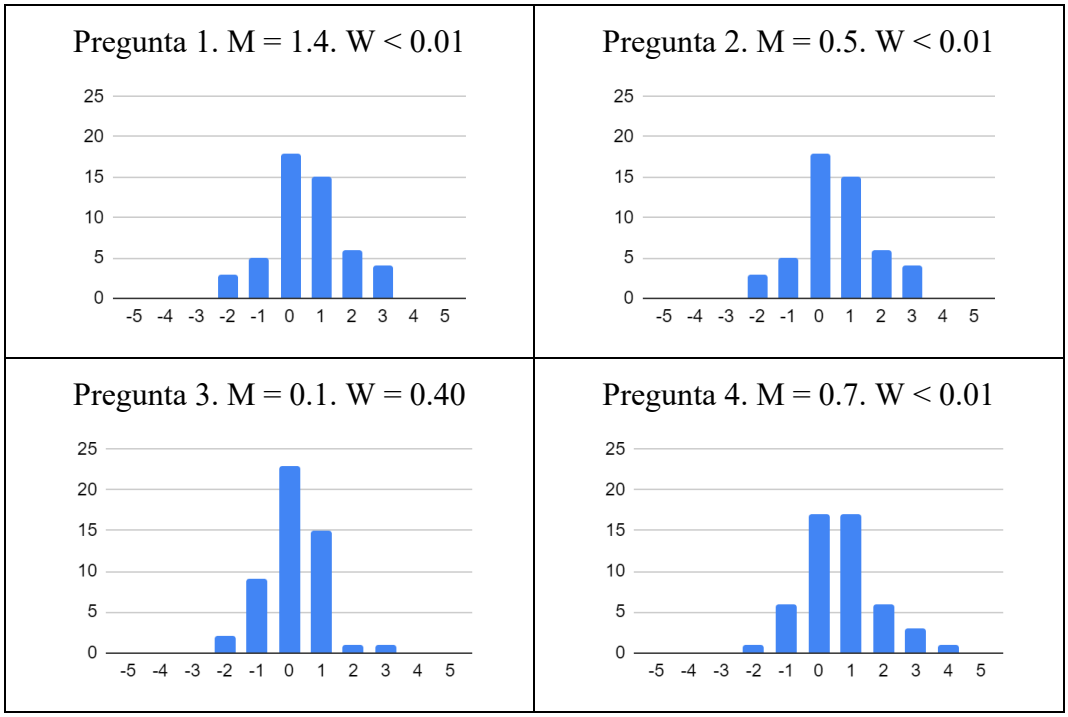


El test de Wilcoxon nos indica que (p-valor < 0.01) existen diferencias significativas entre las respuestas a las preguntas 1 y 2, al contrario que en el pretest: como se observa en la Figura 3, aunque los niveles de acuerdo han crecido en ambos casos, la percepción sobre la comprensión sobre del PC (pregunta 1) ha aumentado más notablemente que la percepción sobre la preparación para implementarlo (pregunta 2). Por otra parte, entre las preguntas 2 y 3 el test de Wilcoxon nos indica que (p-valor < 0.01) existen diferencias significativas, al igual que ocurría en el pretest.

Comparación entre pretest y posttest

La Figura 4 recoge la comparación pareada de las diferencias entre el pretest y el posttest.

Figura 4. Para cada comparación: media (M), gráfico con la distribución de las diferencias y p-valor del test de Wilcoxon (W). Elaboración propia.



Teniendo en cuenta la no normalidad obtenida en el test de Shapiro-Wilk, se utilizó el test de Wilcoxon para determinar la existencia o no de diferencias significativas. En este sentido, únicamente la pregunta 3 arroja diferencias no significativas, es decir, se mantiene estable la percepción sobre la falta de formación del resto del profesorado. Sin embargo, hay un incremento significativo en el nivel de acuerdo con las preguntas 1, 2 y 4, es decir, aumentan tanto el nivel de percepción sobre el

entendimiento del PC, como la percepción de la preparación para implementarlo y el acuerdo con su encaje en el currículo de matemáticas. Además, el valor de acuerdo se ha incrementado más notablemente en las respuestas a la pregunta 1, es decir, la percepción de entendimiento del término PC ha aumentado notablemente más que la percepción de la preparación para trabajar con el PC.

DISCUSIÓN

La formación ha respondido de manera consistente al modelo de Alsina y Mulà (2019) que se utilizó en su diseño. Con la ponencia inicial se activó el proceso de deconstrucción, explicitando posibles contradicciones respecto a las concepciones iniciales sobre el PC. Al tratarse de una formación voluntaria, la actitud del profesorado fue muy participativa (Darling-Hammond, 2017) y eso favoreció que los conflictos cognitivos generados por los formadores cambiaran la autopercepción de los docentes acerca de su conocimiento. Esto hace que se dé respuesta al primer objetivo, habiendo explorado el nivel autopercibido por el profesorado en las variables dependientes estudiadas.

Como podemos apreciar en los resultados obtenidos al comparar el pretest y el posttest de las preguntas 1 y 2, tanto la percepción sobre el conocimiento del término PC como la percepción para implementarlo en el aula han aumentado significativamente tras la formación. Además, la pregunta 1 aumentó significativamente más que la segunda, de lo que se puede interpretar que, a pesar de percibirse con un mayor conocimiento, ven la implementación del PC como una tarea compleja, aunque realizable. Esto resulta fundamental conseguir que empiecen a implementar el PC en el aula, ya que, ampliando la formación sobre el PC, el profesorado será más proclive a introducirlo en sus clases (Sands et al., 2018). El análisis del cambio en las percepciones, segundo objetivo planteado, se completa con el hallazgo de que la formación no ha cambiado cómo percibe el profesorado a sus iguales (pregunta 3 del cuestionario).

En Mason y Rich (2019) se encontró que las formaciones del profesorado en activo suelen centrarse de forma intensiva en los contenidos conceptuales de las ciencias de la computación, dejando de lado la su didáctica y su inclusión en el aula. En nuestra investigación, sin embargo, el despliegue de los talleres de formación de acuerdo con las dimensiones del modelo de PC de Díaz y Palop (2023) supone un cambio de paradigma, ya que se abordan situaciones de aula y se conecta con enfoques didácticos manipulativos, a los que el profesorado está habituado en el campo de la didáctica de la matemática. Por otro lado, la formación incluyó un taller sobre la inclusión del PC en el currículo, con el fin de analizar su pertinencia y mostrar propuestas concretas que pudieran ilustrar su implementación logrando dinámicas de cambio curricular exitosas (en el sentido de Artigue, 2018). Analizando conjuntamente este diseño formativo y los resultados de la pregunta 4, observamos que se ha conseguido que el profesorado perciba como correcta la inclusión del PC en el currículo del área matemáticas. A nuestro juicio esto evidencia una consideración amplia del currículo de matemáticas que acoge el concepto de PC y abre las puertas a una implementación eficaz, en los términos del germen del cambio que señalaba Stephens (2018).

CONCLUSIONES

Los hallazgos de esta investigación nos permiten concluir que el profesorado no percibe una buena preparación ni en sus compañeros ni en sí mismo, lo que se acompaña por una pobre autopercepción sobre el conocimiento del PC. Esto refleja una clara necesidad de formaciones sobre PC que permitan, por un lado, mejorar dichas percepciones y, por otro, ampliar sus conocimientos.

A través de la formación, el profesorado parece haber metabolizado la inclusión del PC en el currículo del área de matemáticas, cambiando sus percepciones sobre el lugar de inclusión. Esto puede hacer pensar que el profesorado no posee una gran formación curricular, dado el gran cambio en sus percepciones tras una formación tan corta en tiempo y con tan pocos talleres dedicados a este tópico. Los resultados reflejarían por tanto la necesidad formativa en cuestiones curriculares.

Finalizamos señalando brevemente algunas de las limitaciones de esta investigación. En primer lugar, al tratarse de la primera formación sobre PC y currículo de matemáticas que se acomete, durante la implementación se detectaron dificultades que han de ser modificadas en el futuro. En segundo lugar, el instrumento solo ha sido validado en términos de claridad y pertinencia por el equipo investigador, y fue aplicado en un entorno de profesorado altamente motivado (formación voluntaria, en un fin de semana, participante en un programa formativo de larga duración), lo que puede sesgar las respuestas y producir valores altos en la escala Likert. Además, la última pregunta, por su redacción, pudo inducir a la introducción de valores más altos de lo esperado. En tercer lugar, el tiempo de la formación es muy limitado, reduciéndose a un fin de semana, por lo que no es posible conocer los resultados a medio y largo plazo ni su eficacia. Por último, los propios sesgos del equipo investigador, como diseñador, implementador y analista de la formación podrían estar también actuando de manera inconsciente. Para controlar estas limitaciones nos proponemos en el futuro realizar una validación de contenido del cuestionario con expertos ajenos al equipo investigador y analizar su aplicación en muestras diferentes de profesorado en activo.

REFERENCIAS

Alsina, Á., y Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability, 11*(15), 4039. https://doi.org/10.3390/su11154039

Artigue, M. (2018). Implementing curricular reforms: a systemic challenge. En Y. Shimizy y R. Vithal (Eds.), *ICMI Study 24 Conference Proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 43–52). ICMI y Universidad de Tsukuba.

Barr, V., y Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: What is Involved and what is the role of the computer science education community? *ACM Inroads, 2*(1), 48–54. https://doi.org/10.1145/1929887.1929905

Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., y Engelhardt, K. (2016). Developing computational thinking in compulsory education: Implications for policy and practice. European Union. http://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/bitstream/JRC104188/jrc104188_computhinkrepor t.pdf

Borko, H. (2004). Professional Development and Teacher Learning: Mapping the Terrain. *Educational Researcher, 33*(8), 3–15. https://doi.org/10.3102/0013189X033008003

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. Routledge Falmer.

Dagiene, V., y Dolgopolovas, V. (2022). Short Tasks for Scaffolding Computational Thinking by the Global Bebras Challenge. *Mathematics, 10*(17). https://doi.org/10.3390/math10173194

Darling-Hammond, L. (2017). Teacher education around the world: What can we learn from international practice? *European Journal of Teacher Education, 40*(3), 291–309. https://doi.org/10.1080/02619768.2017.1315399

Diaz, I., y Palop, B. (2023). A holistic approach to Computational Thinking in K-12 Education [manuscrito presentado para publicación]. Universidad de Oviedo, Universidad de Valladolid.

Global Math Project y Buzzmat, (13 de marzo de 2023). The Exploding Dots Experience – The Global Math Project. Exploding Dots. https://www.explodingdots.org/

Hubbard, A. (2018). Pedagogical content knowledge in computing education: A review of the research literature. *Computer Science Education, 28*(2), 117–135. https://doi.org/10.1080/08993408.2018.1509580

Llinares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 1–3. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.237

Massachusetts Institute of Technology, (13 de marzo de 2023). Scratch - Imagine, Program, Share. Scratch. https://scratch.mit.edu/

Mason, S. L., y Rich, P. J. (2019). Preparing elementary school teachers to teach computing, coding, and computational thinking. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 19*(4), 790–824.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022a). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52*, de 2 de marzo de 2022, 24386–24504.

Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP]. (2022b). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 76*, de 30 de marzo de 2022, 41571–41789.

Palop B., Santaengracia J. J., y Rodríguez-Muñiz L. J. (2022a). La conceptualización del pensamiento computacional en el currículo LOMLOE de matemáticas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 623-xx). SEIEM.

Palop B., Santaengracia J. J., y Rodríguez-Muñiz L. J. (2022b). Computational Thinking in the Spanish Secondary School Curriculum of Mathematics. Meaning and implications. En W. Yang, M. Majewski, D. Meade y W. K. Ho. (Eds.), *Proceedings of ATCM 2022* (pp. 21999-xx). ATCM

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Basic Books.

Rafiepour, A. (2018). Iran school mathematics curriculum: past, present and future. En Y. Shimizy y R. Vithal (Eds.), *ICMI Study 24 Conference Proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 467–474). ICMI y Universidad de Tsukuba.

Royal Society. (2012). Shut down or restart: The way forward for computing in UK schools. http://royalsociety.org/education/policy/computing-in-schools/report/

Sands, P., Yadav, A., y Good, J. (2018). Computational Thinking in K-12: In-service Teacher Perceptions of Computational Thinking. En M. S. Khine (Ed.), *Computational Thinking in the STEM Disciplines: Foundations and Research Highlights* (pp. 151–164). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93566-9_8

Stephens, M. (2018). Embedding algorithmic thinking more clearly in the mathematics curriculum. En Y. Shimizy y R. Vithal (Eds.), *ICMI Study 24 Conference Proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 483–490). ICMI y Universidad de Tsukuba.

Tang, X., Yin, Y., Lin, Q., Hadad, R., y Zhai, X. (2020). Assessing computational thinking: A systematic review of empirical studies. *Computers & Education, 148,* 103798. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103798

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717–3725. https://doi.org/10.1098/rsta.2008.0118

SILOGISMOS Y DIAGRAMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: UNA PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Syllogisms and diagrams in Mathematics Education: A proposal of Hypothetical Learning Trajectory

Sanz-Herranz, H. [a], Marbán, J.M. [a] y Frápolli, M.J. [b]

[a] Universidad de Valladolid, [b] Universidad de Granada

Resumen

El proceso de razonamiento es considerado por la comunidad académica como una de las guías más relevantes para orientar la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, a menudo no se trabaja de forma explícita y, además, se suele abordar directamente en campos donde intervienen inferencias bastante complejas. El objetivo de esta comunicación es proponer una trayectoria hipotética de aprendizaje para desarrollar habilidades de razonamiento con un alumnado de educación primaria en el contexto de los silogismos y utilizando representaciones diagramáticas. Para ello, se siguen las fases de una investigación basada en diseño. Los resultados exploratorios con un grupo de 433 alumnos sugieren la posibilidad de profundizar en los procesos de razonamiento y prueba en edades tempranas a través del uso de diagramas complejos.

***Palabras clave**: Razonamiento, silogismo, diagrama de Venn, diagrama de Euler, educación primaria.*

Abstract

The process of reasoning is widely recognized by the academic community as one of the most relevant guides for teaching mathematics. However, it is often not explicitly taught and is usually addressed directly in fields where complex inferences are involved. The objective of this paper is to propose a hypothetical learning trajectory for the development of reasoning skills in primary school students, specifically in the context of syllogisms and using diagrammatic representations. To achieve this, the phases of design-based research are followed. The exploratory results from a group of 433 students suggest the possibility of enhancing reasoning and testing processes at an early age through the use of complex diagrams.

***Keywords**: Reasoning, syllogism, Venn diagram, Euler diagram, Primary education.*

INTRODUCCIÓN

Es una realidad el consenso que existe al respecto de la importancia capital de los procesos en la educación matemática, como se desprende de prescripciones como las del NCTM (2000), las que plantea la OCDE a través del informe español de PISA (2019) o las de la Asociación Internacional de Evaluación del Rendimiento Escolar (2019) recogidas en el marco de evaluación TIMSS. Particularmente, el razonamiento viene siendo en los últimos años notablemente prolífico en lo que a avances de investigación se refiere, toda vez que acaparan buena parte del trabajo de diversos grupos académicos (Stylianides y Harel, 2018). Asimismo, las normas educativas de aplicación en nuestro país han hecho acopio de las recomendaciones expertas (Hanna y Barbeau, 2010) incluyendo en los currículos sendas menciones expresas a estos procesos. De hecho, se hace referencia a la importancia del razonamiento como eje fundamental del sentido matemático en la

Sanz-Herranz, H., Marbán, J. M. y Frápolli, M. J. (2023). Silogismos y diagramas en Educación Matemática: Una propuesta de trayectoria hipotética de aprendizaje. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 499–506). SEIEM.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre (LOMLOE). Además, en muchos de los decretos autonómicos por los que se establecen los currículos de la educación primaria, como es el caso del de Castilla y León (Decreto 38/2022), podemos encontrar esta iniciativa desarrollada de forma más prolija y sosteniendo que, desde los primeros años, se habrán de proponer actividades educativas que permitan al alumnado dominar el razonamiento matemático. Sin embargo, aun cuando se llega a hablar expresamente en algunos de ellos de razonamientos deductivos, lo cierto es que, a excepción del caso de la propuesta curricular de Aragón, no abundan las orientaciones didácticas específicas en tales documentos oficiales con las cuales ayudar al profesorado a acercar tareas vinculadas al razonamiento al alumnado de educación primaria. En particular, el estudio de las inferencias deductivas suele esperar hasta la asignatura de Filosofía, que aparece en el bachillerato. Así, se torna necesario el disponer de herramientas en forma de situaciones de aprendizaje que permitan el desarrollo temprano de las habilidades precisas para generar deducciones correctas, así como para evaluar si efectivamente estas suscitan tal propósito.

Por otro lado, conviene notar que las propuestas curriculares tampoco especifican cuál es el marco en el que trabajar las deducciones: lógica proposicional, lógica de primer orden, lógica multimodal, etc. No obstante, en el trabajo que aquí nos ocupa se ha optado por recurrir a los silogismos, y ha sido así por tres motivos. El primero de ellos es que todo el desarrollo histórico de la lógica comienza con los silogismos aristotélicos. El segundo se debe a la inherente relación con sistemas representacionales habitualmente vinculados a la Matemática como son los diagramas de Venn o los de Euler. El último motivo, pero no por ello el menos importante, es que los silogismos son el sistema lógico más elemental, prestándose por tanto como el más idóneo, a nuestro juicio, para adentrarse en el estudio de la Lógica. Debemos señalar que, si bien existen intentos por utilizar diagramas de Venn en la enseñanza de los silogismos, estos no han sido dirigidos a estudiantes de primaria (Joaquin y Boyles, 2017). Asimismo, también se ha propuesto el uso de estos diagramas en primaria, pero sin atender su potencial como herramienta para la deducción (Olga, 2020). En este sentido, uno de los objetivos principales de este trabajo es proponer un recurso idóneo para que los niños desarrollen habilidades de razonamiento en el contexto de los silogismos.

También resulta pertinente advertir del peligro del uso ambiguo o directamente incorrecto de conceptos como “silogismo” o “diagrama de Venn”. El primero de ellos suele confundirse con cualquier inferencia deductiva, mientras que el segundo se utiliza de forma general para referir casi cualquier diagrama en el que aparezcan círculos. Por eso, esta comunicación persigue subsidiariamente arrojar algo de claridad a este respecto, tratando de aportar precisión lógica en el ámbito del razonamiento matemático y, particularmente, en unos recursos que se vienen utilizando frecuentemente por parte de la comunidad académica (Huerta y Arnau, 2014; Vargas et al., 2019).

MARCO TEÓRICO

Clásicamente, un “silogismo” (*syllogismós*) es una expresión que Aristóteles utiliza en tres sentidos diferenciados. A saber, un uso no técnico de silogismo asociado a operaciones de razonamiento, inferencia o argumentación (silogismo-0); uso técnico que apunta a un tipo de razonamiento particular, el deductivo, en los que la conclusión se sigue necesariamente de las premisas (silogismo-1); y un tercer sentido (silogismo-2) más técnico aún que hace referencia a figuras o esquemas (schemata) en las que se pueden presentar los silogismos-1. Tales figuras sirven, indica Aristóteles, para identificar razonamientos perfectos (Striker, 2009).

Por lo tanto, los silogismos presentan siempre una relación de consecuencia lógica, lo cual significa que la conclusión se sigue necesariamente de lo establecido en las premisas. En este sentido, los silogismos se pueden entender como la manifestación de conexiones entre conceptos dados, lo que

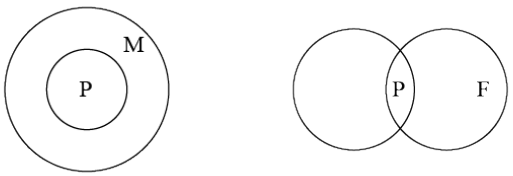
encaja con la conceptualización que se hace del razonamiento y la argumentación en el ámbito de la educación matemática, donde se entiende que el primero es el establecimiento de nuevas relaciones entre conceptos y el segundo justamente su expresión (Rico, 1997). Esta conclusión es algo distinta de lo establecido. Además, los silogismos deductivos requieren de la presencia de más de una premisa, todas las cuales son necesarias y suficientes con respecto a la conclusión, es decir, ninguna de ellas puede ser irrelevante. Tanto las premisas como la conclusión contienen términos generales no vacíos, concretamente tres, de cuyas combinaciones obtenemos las figuras o esquemas de silogismos-2. Estas figuras o esquemas tienen que ver no ya con la idea de consecuencia lógica, sino más bien con la de forma lógica, sirven como instancias de validación (como refiere el *principio de la forma*, dos argumentos en la misma forma lógica son ambos válidos o son ambos inválidos).

Hay que señalar que los "términos" no son otra cosa que el sujeto y el predicado de la conclusión, y lo que opera relacionando sujeto y predicado, pero que no aparece en ella. Así las cosas, al término que funciona como sujeto gramatical de la conclusión se le denomina "término menor". Por su parte, al término que funciona como predicado de la conclusión se le denomina "término mayor" y al que relaciona sujeto y predicado, sin aparecer en la conclusión, se le denomina "término medio". En consecuencia, a la premisa donde aparezca el término mayor se le llamará "premisa mayor", y "premisa menor" a aquella en donde aparezca el término menor. Utilicemos la letra M para el término mayor, F para el menor, y P para el término medio e ilustrémoslo con un ejemplo: "Todos los profesores [P] son matemáticos [M]"; "algunos filósofos [F] son profesores [P]"; luego, "algunos filósofos [F] son matemáticos [M]".

Como se ha apuntado anteriormente, para comprobar la validez de distintos silogismos se pueden utilizar diversos diagramas, lo que a su vez puede ser una buena actividad para trabajar también los procesos matemáticos que nos ocupan. En efecto, nótese que un diagrama constituye un argumento visual, lo que se puede utilizar para movilizar de otra forma los procesos de razonamiento, comunicación y prueba.

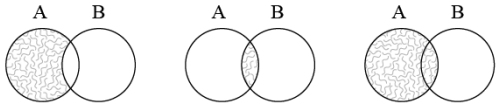
El primer intento por valerse de diagramas para ilustrar el razonamiento silogístico se lo debemos a Euler en *Lettres à une pricess d'Allemagne* (1761). Su sistema, no obstante, adolecía de varias patologías que fueron advertidas por Venn y que, esencialmente, se deben a su carácter representacional en lugar de uno funcional (Shin, 1994; Venn, 1881). Así es, si nos fijamos en las premisas 1 y 2 de nuestro ejemplo, habríamos de combinar los dos diagramas de la Figura 1 para concluir la relación entre F y M, lo que resulta imposible.

Figura 1. Diagramas incompatibles en forma de Euler



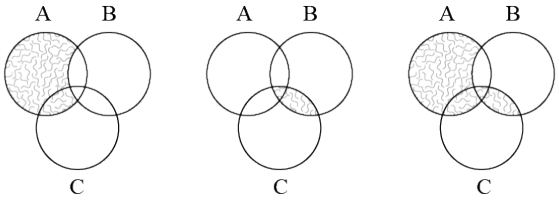
Venn, tras reparar en estas deficiencias, mejora el sistema de Euler introduciendo un esquema único que admite una mayor cantidad de configuraciones de relaciones entre los términos involucrados. Esencialmente, los diagramas siempre se colocan en la misma posición a razón de un círculo por término, y se sombrean las clases en las que no hay elementos. Esto es, los siguientes diagramas responden a "todo A es B", "ningún A es B" y, su solape, "todo A es B y ningún A es B".

Figura 2. Distintos ejemplos de diagramas de Venn que utilizan regiones sombreadas



Así, por ejemplo, los diagramas de Venn tienen poder representacional suficiente para abordar una proposición como "todo lo que es A o B es A y B". Así, las bondades de los diagramas de Venn se hacen patentes cuando se combinan para representar un silogismo, ya sea para alcanzar su conclusión o para verificar si esta es correcta.

Figura 3. Representación con diagramas de Venn del silogismo "todos los A son B" y "ningún B es C", luego "ningún A es C"



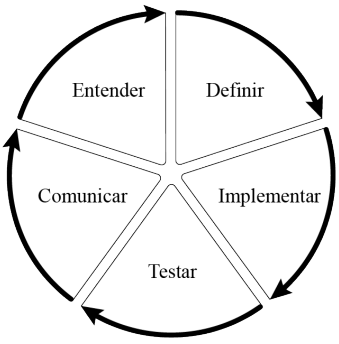
A tenor de lo expuesto puede comprobarse que, si bien los diagramas de Venn suponen una mejora de la capacidad expresiva del sistema diagramático frente a los de Euler, todavía no permiten representar la totalidad de los modos silogísticos. No obstante, para los objetivos de esta comunicación será suficiente con que el marco teórico abarque hasta aquí.

METODOLOGÍA

Nuestro planteamiento general sigue el esquema de una investigación basada en diseño, de carácter cualitativo, toda vez que lo que se pretende es comprender una realidad general al respecto de los procesos de razonamiento en edades tempranas. Este método exhibe una manifiesta idoneidad de cara a obtener resultados innovadores que deriven en diseños curriculares fundados para enriquecer los procesos de enseñanza-aprendizaje, como se desprende de los hallazgos de Núnez del Río et al. (2010).

Hay que señalar que el trabajo que aquí se presenta abarca tan solo una iteración del proceso ceñida a una cuestión muy concreta como es un tipo de deducción concreta (los silogismos) y su representación diagramática.

Figura 4. Diagrama de flujo que guía una investigación basada en diseño.



El pilotaje se ha llevado a cabo en el seno de la plataforma virtual para el aprendizaje de las matemáticas *Smartick*, participando 433 niños de entre 6 y 13 años de 6 países diferentes. No obstante, debemos mencionar que la distribución no ha sido completamente simétrica, toda vez que la mayoría del alumnado era de nacionalidad española. Todos los participantes fueron seleccionados aleatoriamente entre la base total de usuarios activos de la plataforma con un nivel de lectura suficiente, esto es, de entre aquellos que venían realizando actividades lectoras que involucraban la comprensión de textos breves sin exhibir ningún otro rasgo común Los datos que se recogieron fueron el porcentaje de éxito, el tiempo de respuesta, un indicador del gusto por la tarea y las conversaciones con los niños que exhibieron un peor desempeño a través de un chat integrado en la plataforma.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como investigación basada en diseño que se trata, los resultados obtenidos no son otros que una propuesta, en este caso una trayectoria hipotética de aprendizaje, junto con las informaciones que se derivan de su implementación a modo de pilotaje. Cabe recordar que una trayectoria hipotética de aprendizaje se compone de unos objetivos de aprendizaje, una secuencia de tareas para promoverlo y un conjunto de hipótesis a su respecto (Simon, 1995). Así, a partir de todo lo expuesto anteriormente, partimos de la hipótesis de que los diagramas de Euler resultan más intuitivos que los de Venn. Asimismo, asumimos inicialmente que el número de clases involucradas en el diagrama se relaciona directamente con su complejidad. También que la aparición de objetos concretos para ilustrar compromisos existenciales afirmativos resulta más sencilla que el uso de sombreados para el caso de los negativos. Por último, que las proposiciones ficticias suponen un puente entre las reales verdaderas (entendiendo como tales las que se corresponden con el conocimiento del mundo que tiene el sujeto) y las falsas. De este modo, pasemos a presentar la secuencia de actividades incluyendo algunas figuras para facilitar su comprensión.

Número	*Descripción*	*Porcentaje de éxito*
1	Actividad introductoria para trabajar la identificación de clases en un esquema de Euler.	87,9%



Figura 5. Primera actividad de la secuencia

2	Se trabajan las relaciones de contención con diagramas de Euler, solicitando evaluar si un diagrama y una proposición real verdadera se corresponden.	82,9%



Figura 6. Segunda actividad de la secuencia

3	Tarea similar a la 2, pero con proposiciones ficticias como “todos los Winkis son Tranquis”.	84,2%
4	Similar a las dos tareas previas, pero con proposiciones reales falsas como “ninguna manzana es una fruta” o “todos los números son números pares”.	61%
5	Alternando situaciones reales verdades y falsas, y también ficticias, se requiere seleccionar la afirmación correspondiente a un diagrama de Euler dado.	77,3%



Figura 7. Quinta actividad de la secuencia

6	Se introducen los diagramas de Venn, requiriendo identificar aquellos que representan una misma situación que uno de Euler dado.	91,4%



Figura 8. Sexta actividad de la secuencia

7	Se solicita transformar un diagrama de Venn con objetos existenciales positivos en otro con sombreados para los existenciales negativos.	72,1%
8	Se requiere trasformar una proposición de cualquiera de los tipos mencionados en un diagrama de Venn con sombreados.	82,6%
9	La situación recíproca a la tarea anterior.	84,7%
10	Se trabaja la superposición de diagramas de Venn con sombreados.	76,5%
11	Se requiere evaluar la validez de un silogismo presentando simultáneamente las proposiciones involucradas y la representación diagramática.	88,3%
12	Se realiza un silogismo, pidiendo primero representar las premisas para extraer después la conclusión a partir del diagrama.	81,3%

Tras un análisis de la significación estadística, señalamos que no se ha percibido que el género o la edad sean variables relevantes a la hora de explicar el nivel de desempeño en cada tarea. Respecto a las dificultades observadas, se ha advertido que el error más común es el supeditar el diagrama al conocimiento del mundo, esto es, cuando se utilizan proposiciones reales falsas. Asimismo, se ha encontrado este mismo error en todas las tareas en las que aparecían este tipo de proposiciones. Al ser interpelados parte de los participantes que habían fallado un número elevado de veces, se constató que percibían las proposiciones falsas como errores en la redacción de la tarea toda vez que así lo denunciaron expresamente. Por su parte, la otra dificultad aparece al retirar los objetos concretos y pasar a la representación con sombreados propia de los diagramas de Venn. No obstante, como se puede ver en la tabla superior, esa dificultad remite una vez que los niños se han familiarizado con la representación. En cuanto al indicador del gusto por la tarea, un 53% respondió que sí que le gustaba; un 18% que no; y el resto no marcó ninguna opción.

CONSIDERACIONES FINALES

Como ya se ha indicado antes, este pilotaje es tan solo una parte de una investigación más compleja actualmente en curso. No obstante, los resultados que se han arrojado son alentadores, toda vez que parecen indicar que, efectivamente, el alumnado en edades tempranas es capaz de manejar diagramas de Venn relativamente complejos en cuanto a su semántica y formato. Asimismo, a partir de las dificultades observadas en el manejo de proposiciones que entran en contradicción con el conocimiento del mundo que tiene el alumnado, sugerimos introducir explícitamente la idea de "validez", para tratar de desligarla de la de "verdad". Por último, atendiendo a los resultados satisfactorios de esta propuesta cabe plantearse la idoneidad de introducir representaciones más intrincadas, como son los diagramas de Peirce, que permitan abordar situaciones con cuantificadores más complejos gracias a su mayor capacidad expresiva.

Referencias

Decreto 38/2022, de 29 de septiembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación primaria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, 190, de 30 de septiembre de 2022, 48316 a 48849. https://bocyl.jcyl.es/boletines/2022/09/30/pdf/BOCYL-D-30092022-2.pdf

Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnkey H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). Springer.

Huerta, M. P. y Arnau, J. (2014). Percepción de los futuros maestros y profesores sobre usos y enseñanza de recursos en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional. En M. T. González Astudillo, M. Codes Valcarse, D. Arnau Vera y T. Ortega del Rincón (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 415-424). SEIEM.

Joaquin, J.J. y Boyles, R.J. (2017). Teaching syllogistic logic via a retooled Venn diagrammatical tehnique. *Teaching philosophy*, *40* (2), (pp. 161 a 180).

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, de 30 de diciembre de 2020, 122868 a 122953. https://www.boe.es/boe/dias/2020/12/30/pdfs/BOE-A-2020-17264.pdf

Ministerio de Educación (2019). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los alumnos. OCDE. Informe español.* https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2018/pisa-2018-informes-es.html

Ministerio de Educación (2019). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Núñez del Río, C., de Castro, C., del Pozo, A., Mendoza, C., y Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación de diseño sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463-474). SEIEM.

Olga, C. (2020). Using the Venn diagram in primary education. *Romanian Review of Geographical Education*, 9(2), (pp. 87-98).

ORDEN ECD/1112/2022, de 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín oficial de Aragón*, 145, de 27 de julio de 2022, 25614 a 26207.

Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/521/1/RicoL97-2528.PDF

Shin, S. (1994). *The Logical Status of Diagrams*. Cambridge University Press.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Reseachs in Mathematics Educación*, 26(2), (pp. 114-145).

Striker G. (2009). *Prior analytics. book 1*. Oxford University Press.

Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective*. Springer.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J.A., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2019). Caracterización de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivada. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano, y A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 593-602). SEIEM.

Venn, J. (1881). *Symbolic Logic*. Macmillan.

MICRO DESARROLLO DE LAS CONCEPCIONES DE DISTRIBUCIÓN MUESTRAL SIMULADA DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

MICRO DEVELOPMENT OF THE CONCEPTIONS OF SIMULATED SAMPLE DISTRIBUTION OF HIGH SCHOOL STUDENTS

Sepúlveda, F. y Sánchez, E.

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen

El objetivo de esta investigación fue entender la influencia de las actividades de diseño (uso de software estadístico Fathom, actividades de resolución de problemas en parejas e intervenciones oportunas del instructor), en la conceptualización de la distribución muestral simulada (DMS) en situaciones de problemas de pruebas de significación por parte de los estudiantes. Para lograrlo, se exploran y analizan las respuestas de 18 parejas de estudiantes, obtenidas con apoyo de tecnología, a cuatro problemas de pruebas de significación que les fueron administrados a lo largo de cuatro sesiones de trabajo. Los resultados muestran que poco más de un tercio de las parejas logra, en el curso de las actividades, transitar de una concepción concreta de DMS formada por muestras reales a una concepción de la DMS como un patrón de variación con una métrica para evaluar la inusualidad de una muestra dada; esta es ya una concepción matemática de la DMS.

Palabras clave: *Distribución muestral empírica, distribución muestral simulada, pruebas de significación.*

Abstract

The aim of this research was to understand the influence of design activities (using statistical software Fathom, problem-solving activities in pairs, and timely instructor interventions) on high school students' conceptualization of simulated sampling distribution (SSD) in significance testing problems. To achieve this, the answers of 18 pairs of students, obtained with the support of technology, to four problems of significance tests administered over four work sessions, are explored and analyzed. The results show that just over one-third of the pairs managed, during the activities, to move from a concrete conception of SSD formed by real samples to a conception of the SSD as a pattern of variation with a metric to assess the unusualness of a given sample; this is already a mathematical conception of the SSD.

Keywords: *Empirical sampling distribution, simulated sampling distribution, significance tests.*

INTRODUCCIÓN

El concepto de distribución muestral es crucial para entender los procedimientos de inferencia estadística. Por otro lado, las pruebas de hipótesis y de significación son procedimientos frecuentemente utilizados en la investigación científica. Una prueba de hipótesis o de significación requiere razonar acerca de y con la distribución muestral. Los temas de distribución muestral y pruebas estadísticas suelen ser estudiados en los cursos universitarios de estadística, sin embargo, varios informes de investigación en educación dan cuenta de grandes dificultades de los estudiantes con ambos conceptos (Aquilonius y Brenner, 2015; Chance et al., 2004), por lo que es un problema actual de la Educación Estadística. Esta investigación se restringe al estudio de la distribución muestral y las pruebas de significación sin abordar el tema más general de pruebas de hipótesis.

Teniendo en cuenta las siguientes tres recomendaciones tomadas de la literatura: 1) Introducir a edades más tempranas conceptos fundamentales (Heitele, 1975), 2) explorar variantes informales de

Sepúlveda, F. y Sánchez, E. (2023). Micro desarrollo de las concepciones de distribución muestral simulada de estudiantes de bachillerato. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 507–514). SEIEM.

los conceptos y procedimientos estadísticos (Zieffler et al., 2008) , 3) Utilizar recursos tecnológicos (Biehler et al., 2013) nos hicimos la siguiente pregunta: ¿Qué concepciones muestran los estudiantes de bachillerato de la distribución muestral en el contexto de actividades de resolución de problemas de pruebas de significación estadística con ayuda de tecnología? El objetivo de la investigación es describir e interpretar las concepciones sobre la distribución muestral simulada que los estudiantes se forman al buscar resolver problemas de pruebas de significación y cómo tales concepciones se transforman con base en las intervenciones del instructor.

ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre distribuciones muestrales empíricas y simuladas a nivel bachillerato y con apoyo de tecnología son recientes y escasas, por ejemplo: Bakker y Gravemeijer (2004), van Dijke-Droogers et al. (2019). No obstante, en el nivel universitario se encuentran varios estudios que cubren aspectos de las distribuciones muestrales con y sin tecnología. Un buen recuento de ellas se puede consultar en Saldanha y Thompson (2014). Sobre pruebas estadísticas con profesores de secundaria encontramos el trabajo de López-Martín et al. (2018) y en el nivel universitario podemos mencionar a Aquilonius y Brenner (2015) y Lane-Getaz (2017), por citar sólo estudios relativamente recientes.

La presente comunicación se apoya en los datos generados en la investigación de García-Ríos (2017) que realizó con estudiantes de bachillerato. En dicho trabajo se informa que un tercio de sus sujetos logra, gracias a su participación en una secuencia de cuatro problemas de pruebas de significación, resolver los dos últimos utilizando adecuadamente una distribución muestral simulada. Pero no responden a la pregunta formulada en este estudio; para hacerlo, nosotros retomamos los datos de García-Ríos y los analizamos desde una nueva perspectiva.

MARCO CONCEPTUAL

La distribución de los valores de un estadístico tomados sobre todas las muestras posibles de un tamaño dado de la población constituye la *distribución muestral* del estadístico. Una distribución muestral se puede aproximar de dos formas: Una distribución muestral teórica (DMT) se obtiene con métodos de la teoría de la probabilidad, mientras que una distribución muestral simulada (DMS) se obtiene mediante métodos de simulación computacional (Moore, 2000). Una distribución muestral empírica (DME) es obtenida calculando el estadístico sobre un conjunto de muestras efectivamente tomadas de una población real (material y finita). Si el número de muestras es suficientemente grande la DME será próxima a una DMS, no obstante, la diferencia entre muestras real y simuladas es fundamental y se resalta en la presente comunicación.

Una *hipótesis nula* es la hipótesis de que el fenómeno que se quiere demostrar está ausente, es la hipótesis que se quiere nulificar o rechazar. Cuando se tiene una muestra aleatoria de la población se define el *p-valor*; éste consiste en la probabilidad condicional de obtener un valor del estadístico igual o más extremo que el valor de la muestra-dato, suponiendo cierta la hipótesis nula. El razonamiento de una prueba de significación es: *Si una muestra es inusual suponiendo cierta la hipótesis nula entonces se rechaza la hipótesis nula*. Para determinar si la muestra-dato es usual o inusual se acuerda un *nivel de significación* α y el siguiente criterio: Si el p-valor es menor que α decimos que la muestra es inusual, en caso contrario es usual. El valor preciso de α es convencional y se establece por los científicos antes de llevar a cabo la prueba; un valor recomendado es: $\alpha=0.05$, es decir de 5%. Una prueba más fuerte podría utilizar $\alpha=0.01$ o 1%. (Lecoutre y Poitevineau, 2014)

Nociones de concepción e inferencia estadística informal

El término *concepción* es difícil de definir (Ruiz-Higueras,1994), pero para los fines de este trabajo, informalmente se considera como una idea o representación mental que un individuo se forma sobre un concepto o fenómeno. Siguiendo a la autora citada, una concepción suele ser una forma embrionaria del conocimiento de un concepto o fenómeno, aunque, en ocasiones, puede representar

un obstáculo para su formación y desarrollo. En cualquier caso, la didáctica estudia las concepciones que los estudiantes se forman de contenidos específicos para entender su proceso de aprendizaje. Aquí describimos tres concepciones de los estudiantes acerca de la noción de DMS.

En las últimas décadas se ha propuesto que los estudiantes tengan experiencias con un enfoque informal en la inferencia estadística. Sin embargo, la noción de inferencia informal es relativa, ya que la informalidad depende de las tareas, los conceptos y el nivel escolar de los sujetos (Pratt y Ainley, 2008). Para abordar la transición de lo informal a lo formal en la inferencia, nos centramos en el nivel de abstracción de conceptos básicos de muestreo, que van desde una concepción concreta de ellos hasta una concepción matemática. Inferimos las concepciones de los estudiantes a partir de sus respuestas a los problemas y las clasificamos en tres fases: práctico, informal y matemático-formal. Las respuestas de nuestros estudiantes no alcanzan el nivel matemático-formal.

MÉTODO

El presente es un estudio retrospectivo de los datos generados en una investigación de doctorado (García-Ríos, 2017). Tres elementos formaron parte del diseño: 1) uso de software estadístico Fathom, 2) actividades de resolución de problemas abordados en parejas y 3) intervenciones oportunas del instructor. La interpretación de datos generados permitió inferir las concepciones de los estudiantes sobre la DMS, que es el objetivo de esta investigación.

Los participantes fueron un grupo de 36 estudiantes (16-17 años), organizados en 18 parejas, de un sistema de bachillerato de México, en el que García-Ríos (2017) era el profesor regular de la asignatura de Matemáticas, y diseñó e implementó las actividades en su grupo como parte de sus estudios de doctorado.

Para la simulación se utilizó una aplicación del software Fathom. Este es un software dinámico para aprender y hacer estadística en el nivel bachillerato y universitario que permite a los estudiantes explorar y analizar datos tanto mediante el cálculo como de manera visual. Brinda a los estudiantes las posibilidades de arrastrar datos para formar automáticamente distribuciones; visualizar en tiempo real cambios en las gráficas cuando se cambian parte de los datos; vincular múltiples representaciones de datos y crear simulaciones (Biehler et al., 2013).

Procedimiento y organización de la secuencia

Figura 1. Problemas

Problema 1. La propaganda de Coca cola presume que la mayoría (más del 50%) de la población que consume refresco prefiere su refresco en lugar de Pepsi. Para comprobarlo se hizo un experimento donde se les dio dos vasos de refresco (uno con Coca y otro con Pepsi) a 60 personas escogidas al azar y decidían cuál le gustaba más. De los 60 participantes 35 personas prefirieron Coca Cola. Con estos resultados ¿es correcta la hipótesis "más del 50% de la población prefiere Coca Cola que Pepsi"?
Problema 2. El mismo contexto del problema 1 con las siguientes condiciones: Se hace el experimento a 180 personas elegidas al azar y de ellas 104 prefieren Coca Cola.
Problema 3. Si la producción diaria de la máquina de una fábrica tiene más del 10% de artículos defectuosos es necesario repararla. Para revisar la calidad de la maquina el supervisor toma una muestra aleatoria de 120 piezas del día y contiene 16 piezas defectuosas. Con esos datos ¿debe el supervisor solicitar reparar la maquina?
Problema 4. El fabricante de una medicina afirmó que su producto es 80% eficaz para aliviar una alergia. Para verificar esta hipótesis se realizó un experimento con 100 personas que padecían de la alergia, y la medicina alivio a 74. ¿Se puede rechazar la información del fabricante?

La actividad se organizó en torno de cuatro problemas de pruebas de proporciones (Figura 1) aplicados en cuatro sesiones de 90 minutos cada una. Se formaron parejas de estudiantes a los que, en cada sesión, se les pidió que resolvieran un problema con apoyo del software. Al final de cada sesión debían redactar un reporte escrito en Word orientado por consignas como: "Describan y expliquen es su conclusión" "Digan qué tan seguros están de dicha conclusión" etc.

En la primera sesión se instruyó a los estudiantes para simular en Fathom muestreo repetidos y obtener la DMS. Se les administró entonces el primer problema para que lo resolvieran en parejas durante la sesión y al final entregaran un informe capturado en un archivo de Word con imágenes del software y las explicaciones pertinentes. En la segunda sesión, el instructor revisó e hizo observaciones a los procedimientos de solución que las parejas de estudiantes entregaron en la sesión previa. Les introdujo el método del p-valor enfatizando en la importancia de distinguir entre muestras típicas o usuales y muestra atípicas o inusuales. En la tercera sesión, el instructor hizo indicaciones acerca de las soluciones al problema 2 y volvió a exponer el método del p-valor enfatizando ahora en los conceptos de p-valor y nivel de significación del 5%. Administró entonces el problema 3. En la cuarta sesión sólo administró el problema 4 como evaluación final.

Procedimiento de análisis

El stock de datos consiste en las respuestas de los estudiantes a los problemas y preguntas-guía. Las respuestas fueron codificadas y comparadas entre sí, con la intención de observar patrones de respuestas que, desde el punto de vista de los autores, revelen el razonamiento de los estudiantes. Se identificaron varias categorías que dan cuenta de aspectos importantes del razonamiento de los estudiantes; estas se exponen a continuación.

RESULTADOS

En esta sección exhibimos textos de las respuestas de los estudiantes que ofrecen indicios de su razonamiento frente a los problemas. Hay tres fuentes que nutren sus razonamientos, una consiste en sus intuiciones y conocimientos previos sobre muestreo, la segunda la constituye la información que obtienen de operar con el software y la tercera, son las indicaciones del instructor que incluyen correcciones y la introducción de conceptos nuevos de muestreo para los estudiantes. Las parejas (Ei, Pj) es una abreviatura de (Pareja de estudiantes i, Problema j) y significa que es un texto que escribió la pareja i en sus hojas de trabajo en respuesta al problema j.

Una intuición de base

Es conocido que muchos estudiantes tienen la intuición errónea de que toda muestra es representativa, así de manera automática resuelven los problemas de estimación con la idea de que: *La proporción de la muestra-dato es "igual" a la proporción de la población*. A partir de esta, los estudiantes derivan opiniones como la siguiente:

> (E8, P3). [en el problema 3 la muestra-dato es de 120 artículos con 16 defectuosos], si nos dicen que la máquina no puede trabajar si produce más del 10% de piezas defectuosas, entonces tendríamos que, a partir de 13 piezas defectuosas (más del 10%), la máquina debe ser reparada.

La mayoría de los que tienen dicha intuición no tarda en sustituirla por la que sigue, en la que se reconoce cierta variabilidad: *La proporción de la muestra-dato es "aproximada" a la proporción de la población*. Por ejemplo, la siguiente pareja se basa en esta intuición:

> (E9, P2): Sabemos que el 50% exacto de 180 es 90, sin embargo, podemos tomar un rango en el cual determinar hasta donde es el 50% [Es decir, un rango alrededor de 90 en el que caen todas las proporciones que pueden considerarse provenientes de una población con 50% de preferencias de ambos refrescos]

Esta intuición es similar a lo que Saldanha y Thompson (2002, p. 257) llaman una *concepción multiplicativa de muestra*, la cual definen como: "una versión cuasi proporcional a pequeña escala de la población". No es una intuición primaria, sino el resultado de la educación básica que Watson y Moritz (2000) describen como un desarrollo que culmina con una concepción representativa de muestra. Pero en este desarrollo los estudiantes tienen como referente muestras reales, con toda la imaginería que esto conlleva.

Consideración de la DMS como si fuera una DME

Dos características en las respuestas de los estudiantes nos hacen pensar que éstos interpretan a la DMS como si fuera una DME: 1) que se refieren a las muestras simuladas como muestras reales y 2) que utilizan un *criterio de doble mayoría* para hacer la inferencia. Ambas se describen a continuación.

Un rasgo general en las respuestas de los estudiantes a los problemas es que describen aspectos de la simulación que llevaron a cabo utilizando términos del contexto del problema que intentan resolver. Esta manera de expresarse sugiere que imaginan que están operando con resultados obtenidos de muestras reales. Por ejemplo:

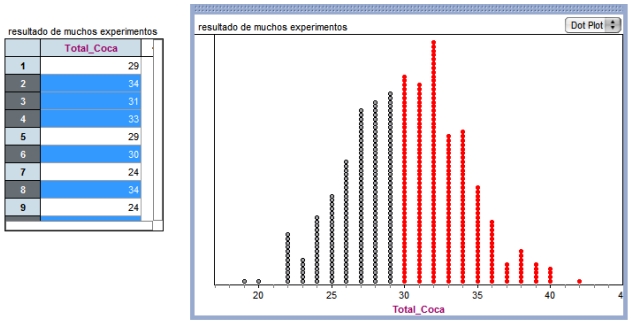
> (E3, P1): …se realizaron 500 encuestas de 60 personas cada una. En la gráfica podemos observar que la mayoría prefiere la coca cola, es decir, que la mayoría de los encuestados inclinan su gusto por este refresco

> (E9, P1): Se realizaron 500 encuestas de 60 personas, por lo tanto, se encuestaron a 30 000 personas.

En las respuestas de los estudiantes al primer problema, no sólo el lenguaje indica que piensan que la DMS está formada por muestras reales, sino que el criterio *de doble mayoría* que utilizaron para resolverlo lo corrobora.

Criterio de "doble mayoría"

Figura 2. DMES del equipo E7



Este criterio consiste en el siguiente razonamiento: Si en la mayoría de las muestras hay una mayoría de personas que prefiere Coca, entonces en la población hay más personas que prefieren Coca. Doce parejas aplicaron este razonamiento sobre la DMS que obtuvieron en el problema 1. Los estudiantes llaman "encuestas" a cada punto muestral de la distribución y creen que en la DMS hay muestras reales, de modo que creen obtener información de la población. Por ejemplo, La respuesta del equipo E7 es representativa del razonamiento subyacente a dicho procedimiento. Generan una DMS con p=0.5 y N=60, y argumentan su conclusión de la siguiente forma:

> (E7, P1): [La hipótesis de que hay más preferencia por la Coca-Cola es correcta] debido a que en la simulación se muestran que en 285 encuestas de 500 hubo más del 50% que prefirió Coca-Cola de 60 personas entrevistadas en cada una de las encuestas. En cambio, en 215 encuestas realizadas se mostró un gusto en menos del 50% de 60 personas (Figura 2) [Nota: consideraron erróneamente las muestras con exactamente 50% de éxitos como favorables a la hipótesis de que Coca-Cola tiene mayor preferencia]

Muestras simuladas y la hipótesis del simulacro

El uso del lenguaje del contexto del problema para referirse a aspectos del proceso de simulación y los procedimientos que proponen, muestran que los estudiantes actúan como si la DMS fuera una representación de muestras reales, por ejemplo, una DME. No obstante, podemos observar que en algunas respuestas a las preguntas que se les pidió responder tales como: ¿Será posible que sus conclusiones sean incorrectas aun haciendo bien todo el proceso? ¿Por qué? ¿Qué tan seguros están

de su conclusión? los estudiantes señalan que un problema es que la solución que proponen se realiza con base en muestras simuladas y no reales. Por ejemplo:

> (E5, P1): …el resultado no es absoluto, ya que esto es solo una simulación y no refleja la estadística de las personas que conforman la población total mexicana actual

> (E4, P2): No mucho ya que este programa es únicamente ilustrativo, no podemos saber a ciencia cierta si de verdad la coca cola es mayormente consumida en nuestra población

Es decir, los estudiantes tratan a la DMS como si estuviera compuesta por muestras reales, pero reconocen que son simuladas ¿cómo resuelven este conflicto? Nosotros proponemos la hipótesis de que los estudiantes creen que la actividad que hacen en clase es sólo un simulacro de lo que se debe hacer en el campo cuando se tienen que enfrentar a un problema real. De esta manera, no hay conflicto. Una consecuencia de esta concepción ya había sido detectada por Hogdson y Burke (2000) quienes observan que después de un curso basado en simulación los estudiantes creen que para hacer una inferencia tienen que obtener muchas muestras (reales).

Cambio de perspectiva: *márgenes de tolerancia*

Al analizar las soluciones al problema 1, el instructor se percata de que los estudiantes toman a las muestras simuladas como muestras reales dándose cuenta de que los estudiantes creen que pueden estimar la proporción de la población analizando la DMS. Para contrarrestar esta idea les advierte que la DMS es sólo hipotética y no contiene información de la población. Les enseña que la DMS sirve para identificar muestras típicas (usuales) y muestras atípicas (inusuales). Esto propicia que los estudiantes busquen soluciones alternativas.

Para el segundo problema, y gracias a la intervención del instructor, ocho parejas de estudiantes (Tabla 1) comienzan a enfocar el problema desde una perspectiva diferente; buscan darle sentido a la idea, propuesta por el instructor, de que pueden identificar con la DMS conjuntos de valores del estadístico (proporciones) que ocurren con mucha frecuencia y otros que ocurren con poca frecuencia. Por ejemplo, la pareja E2 menciona que dividen la distribución en tres partes:

> (E2, P2): …se tomaron tres rangos de referencia para garantizar los resultados y de esta manera decir que la hipótesis puede llegar a ser correcta […] se realizaron las 500 encuestas (simuladas) para graficar los resultados; una vez obtenida la gráfica se tomaron los siguientes rangos de las personas que prefirieron Coca-Cola: 1) menor a 50%: 0–79 personas. 2) Igual a 50%: 80-100 personas. 3) mayor a 50%: 101-180 personas.

Esta pareja considera que los resultados dentro del rango de 80 a 100 son típicos y fuera de él atípicos. Esta manera de hacer el análisis es una variante de la intuición: "La proporción de la muestra es aproximada a la proporción de la población", pero ahora utilizan la DMS para representar lo que entienden por "aproximado". Seis de estos estudiantes realizan este procedimiento, pero no lo utilizan para valorar la muestra-dato (los otros dos si lo hacen), sino que lo combinan con un método de comparación del número de muestras en el rango de la izquierda con el número de muestras en el rango de la derecha. Estos seis estudiantes todavía actúan como en un simulacro y no abandonan la idea de que la DMS está formada por muestras reales.

Cálculo del *p-valor*

Al corregir las respuestas al problema 2, el instructor subraya la importancia de observar en la DMS la frecuencia del conjunto de proporciones con igual proporción o con proporción más extrema que la proporción de la muestra-dato (es decir, una estimación del p-valor) y la regla de que si el p-valor es menor o igual al 5% entonces la muestra-dato se considera atípica, en caso de que el p-valor sea mayor al 5% entonces la muestra dato se considera común o típica. Después de estas instrucciones se les administra el problema 3. En los problemas 3 y 4 hubo 8 y 7 parejas de estudiantes respectivamente (Tabla 1) que siguieron el procedimiento utilizando la noción de *p-valor*. Por ejemplo:

(E9, P3): La máquina no debe repararse, ya que el resultado no es atípico [inusual], es decir no es más del 10% como lo presenta el problema. Tomando la regla del 5% nos debe salir un resultado menor o igual a 5% de las piezas, pero en esta ocasión nos salió 15.4% (77 experimentos de 500) y esto refleja que es un resultado típico [usual] de las muestras que nosotros tomamos, por lo tanto, si nos hubiese salido un porcentaje menor o igual a 5% la máquina debería repararse. [Los corchetes fueron agregados por nosotros para mayor claridad]

(E2, P4): Se tomó un rango de 74 hacia abajo para comprobar si el resultado es atípico o no; esto se hizo realizando una simulación de 500 pruebas de las cuales 42 de estas fueron de 74 personas o menos y al sacar el porcentaje de esto nos dio 8.4%, entonces usando la teoría: "menos del 5% es atípico y más del 5% es normal", podemos concluir que 8.4% es mayor al 5% por lo que entra en el 80% de eficacia del medicamento hacia la población debido a que el resultado es normal.

Tabla 1. Frecuencias de cada tipo de procedimiento por problema

Procedimiento	Problema				
	1	2	3	4	Total
1. Doble mayoría	12	2	1	0	15
2. Márgenes de tolerancia	0	8	3	4	15
3. Cálculo del p-valor	0	0	8	7	15

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Sugerimos un micro desarrollo de la concepción de la DMS de los estudiantes en tres fases. En la primera, ven a la DMS como una representación de muestras reales de la población. La atención de doce parejas de estudiantes se centra en la cardinalidad de los puntos muestrales a izquierda o derecha de la hipótesis. El procedimiento no incluye a la muestra-dato, pues, para ellos, ésta no es más que una más de todas las que organiza la DMS. No ven una contradicción en la evidencia de que las muestras son simuladas y su creencia de que son reales debido al fenómeno de simulacro. Un fenómeno similar ha sido mencionado por Hodgson y Burke (2000) y Case y Jacobbe (2018).

En la segunda fase, ocho parejas de los estudiantes (Tabla 1) le dan una estructura tripartita a la DMS mediante la cual prefiguran un patrón de variabilidad; piensan que las muestras en la sección central de la distribución son abundantes, mientras que las muestras en los extremos son pocas comparadas con las centrales. Este procedimiento se relaciona con la concepción multiplicativa de muestra de Saldanha y Thompson (2002). No obstante, al hacer la inferencia seis parejas aplican un método similar al de doble mayoría y sólo dos utilizan la distribución para evaluar la muestra dato. El instructor refuta el método de los estudiantes y aprovecha para dirigir su atención hacia las muestras inusuales de un extremo de la DMS enfatizando en el p-valor y ofreciendo el criterio de un nivel de significación de 5%.

En la tercera fase, ocho parejas utilizan el p-valor y el nivel de significación para rechazar o no la hipótesis. En los hechos, estas parejas actúan como si hubieran abandonado su concepción de que la DMS está formada por muestras reales y la conciben como un instrumento para evaluar la inusualidad de la muestra, que prefigura un proceso de inter–comparación (Stigler, 2017); es decir, aunque no lo sabemos con certeza, interpretamos que conciben la DMS como un patrón de variación con la métrica del 5% para evaluar la muestra-dato. Ahora los estudiantes están en la frontera de concebir a la DMS a un nivel matemático, como un objeto independiente del contexto y en mejores condiciones de entender la distribución muestral y su función en la inferencia.

Referencias

Aquilonius, B. C. y Brenner, M. E. (2015). Students' reasoning about p-values. *Statistics Education Research Journal, 14*(2),7-27.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 147–168*).* Kluwer.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. En M. A. (Ken) Clements et al. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-689). Springer.

Case K. y Jacobbe, T. (2018). A framework to characterize student difficulties in learning inference from a simulation-based approach. *Statistics Education Research Journal, 17*(2), 9-29.

Chance, B., del Mas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 295-323). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_13

García-Ríos, V. N. (2017). *Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la introducción y desarrollo del razonamiento sobre el contraste de hipótesis en el nivel medio superior*. [Tesis de doctorado no publicada]. Departamento de Matemática Educativa.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6* (2), 187-205.

Hodgson, T. y Burke, M. (2000). On simulation and the teaching of statistics. *Teaching Statistics, 22*(3), 91-96.

Lane-Getaz, S. J. (2017). Is the p-value really dead? Assessing inference learning outcomes for social science students in an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 357-399.

Lecoutre, B. y Poitevineau, J. (2014). *The Significance Test Controversy. The Fiducial Bayesian Controversy*. Springer.

López-Martín, M., Batanero, C., y Gea, M. (2018). La faceta cognitiva en el conocimiento de futuros profesores sobre el contraste de hipótesis. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñíz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. Garcí-García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 300-309). Gijón: SEIEM.

Moore, D. S. (2000). *Estadística Aplicada Básica.* Antonio Bosch Editor.

Pratt, D. y Ainley, J. (2008). Introducing the special issue on informal inferential reasoning. *Statistical Education Research Journal, 7*(2), 3-4.

Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. [Tesis de Doctorado]. Universidad de Granada.

Saldanha, L. y Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics, 51* (3), 257–270.

Saldanha, L. y Thompson, P (2014). Conceptual issues in understanding the inner logic of statistical inference: Insights from two teaching experiments. *The Journal of Mathematical Behavior 35*(1), 1-30.

Stigler, S. M. (2017). *Los Siete Pilares de la Sabiduría Estadística.* Grano de Sal.

Van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P. y Bakker, A. (2019). Repeated sampling with a black box to make informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(2), 116-138. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025

Watson, J. y Moritz, J. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 11-15. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0202_2

Zieffler, A., Garfield, J., DelMas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA ARGUMENTACIÓN PRÁCTICA DOCENTE AL SELECCIONAR PROBLEMAS PARA INTRODUCIR EL TEMA DE FUNCIÓN

Didactical Suitability Criteria in teacher's practical argumentation when they choose problems to introduce functions

Sol, T. [a], Breda, A. [a], Sánchez, A.[a], Font, V.[a] y Sala-Sebastià, G.[a]

[a]Universitat de Barcelona

Resumen

En este estudio ocho formadores de profesores, que conocen los Criterios de Idoneidad Didáctica, participan en un ciclo de Lesson Study. El objetivo de este trabajo es identificar el uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica en la argumentación práctica de los docentes durante la selección de problemas para introducir el concepto de función para estudiantes de entre 15 y 16 años en la educación obligatoria en España. El modelo ideal de una discusión crítica propuesto en la Pragma-dialéctica y el modelo de Toulmin se utilizan para identificar los argumentos prácticos. Se muestran algunos usos de los criterios en la argumentación de los docentes en la elección de los problemas introductorios, en particular el criterio epistémico y el cognitivo.

Palabras clave: *Argumentación práctica, Criterios de Idoneidad Didáctica, Lesson Study, Funciones.*

Abstract

In this study eight teacher trainers, who are familiar with the Didactic Suitability Criteria, participate in a Lesson Study cycle. The aim is to identify the use of the Didactic Suitability Criteria in the teachers' practical argumentation during the selection of problems to introduce the concept of function for students aged 15-16 in compulsory education in Spain. The ideal model of a critical discussion proposed in Pragma-dialectics and the Toulmin's model are used to identify the practical arguments. Some uses of criteria in teachers' argumentation in the choice of introductory problems are shown, in particular epistemic and cognitive criteria.

Keywords: *Practical argumentation, Didactic Suitability Criteria, Lesson Study, Functions*.

INTRODUCCIÓN

Algunas investigaciones sobre la reflexión docente en experiencias de *Lesson Study* (LS) han identificado el siguiente fenómeno: cuando los docentes reflexionan sobre su práctica, acuerdan criterios para orientarla, que pueden ser reinterpretados en término de los componentes e indicadores de los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Ledezma et al., 2022).

La investigación que se presenta forma parte de un estudio más amplio, donde los participantes (que conocen y usan los CID) del ciclo de LS diseñan una unidad didáctica sobre funciones dirigida a estudiantes de cuarto de ESO. Uno de los objetivos de dicho estudio es analizar la argumentación práctica de los participantes cuando utilizan los CID durante todo el ciclo de LS. Por ejemplo, en la revisión del currículo, el criterio epistémico se usa al analizar los procesos contemplados en los libros de texto; el cognitivo, para definir los conocimientos previos que se evaluarían en el examen diagnóstico; el criterio afectivo, para evitar el rechazo de los alumnos a las matemáticas al resolver los problemas; el criterio interaccional para considerar el tipo de interacción en la clase, etc.

Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Font, V. y Sala-Sebastià, G. (2023). Criterios de idoneidad didáctica en la argumentación práctica docente al seleccionar problemas para introducir el tema de función. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 515–522). SEIEM.

En este trabajo nos interesa, en particular, el uso de los CID en la argumentación de los participantes específicamente para seleccionar los problemas que se utilizaron para introducir el objeto función, dado que este es el objeto clave en la secuencia de tareas y también lo es en las matemáticas. En esta línea, la pregunta de investigación es: ¿Cómo utilizan los participantes los CID en su argumentación para justificar la elección de problemas para introducir la noción de función? De acuerdo con esta pregunta, el objetivo de este trabajo es analizar el uso de los CID en la argumentación práctica que sustenta los acuerdos que surgen en la sesión en la cual se seleccionaron los problemas para la introducción del objeto función. Para responder a esta pregunta, primero identificamos episodios de argumentación práctica (Lewiński, 2018) en la selección de los problemas para la introducción de esta noción, y luego, los analizamos utilizando el modelo ideal considerado en Pragma-dialéctica (Eemeren y Grootendorst, 2003) y el modelo de Toulmin (2003).

MARCO TEÓRICO

Argumentación práctica

La Pragma-dialéctica propone un modelo ideal para la discusión crítica, en el que pueden ocurrir (o no) cuatro etapas, a saber: 1. Etapa de confrontación: Establece la diferencia de opinión que puede ser no mixta o mixta. En una diferencia de opinión no mixta el punto de vista de una de las partes no es aceptado de inmediato por la otra, sino que se encuentra con dudas o críticas. En una diferencia de opinión mixta la otra parte presenta su punto de vista opuesto. 2. Etapa de apertura: Se refiere a los puntos de partida de la discusión y asigna los roles de protagonista y antagonista (en una diferencia de opinión mixta hay dos protagonistas y dos antagonistas). Además, se acuerdan las reglas del debate y los puntos de partida. 3. Etapa de argumentación: el protagonista defiende su punto de vista contra las críticas persistentes del antagonista, presentando argumentos para responder a las objeciones del antagonista o para disipar las dudas del antagonista. 4. Etapa de conclusión: Las partes evalúan hasta qué punto llegó la resolución de la diferencia de opinión y a favor de quién. Si el protagonista retira su punto de vista, la diferencia se resuelve a favor del antagonista; si el antagonista abandona sus dudas, se resuelve a favor del protagonista.

Para la fase de argumentación, dado que en esta investigación nos interesa conocer el uso de los CID para justificar las acciones que orientan la práctica docente, consideramos la etapa de argumentación de la Pragma-dialéctica como una argumentación práctica, entendida como "argumentación dirigida a decidir un curso de acción" (Lewiński, 2018, p. 219). Gómez (2017) entiende la argumentación práctica como aquella que se da en contextos sociales y que se orienta a elegir una acción para resolver un problema práctico. Este autor también considera que la argumentación teórica responde a preguntas como '¿es *p* verdadero?', donde *p* es una descripción del mundo, mientras que la argumentación práctica responde a preguntas como '¿qué debe hacer *a* en una situación *x*?', donde *a* es el nombre o la descripción de un agente y *x* es la descripción de una situación problemática. El modelo argumentativo propuesto por Toulmin (2003), se formula una afirmación a partir de unas evidencias (datos). Una garantía conecta los datos con la afirmación, se basa en un fundamento teórico, práctico o experimental: el respaldo. Los calificadores modales (seguramente, definitivamente, etc.) indican cómo se interpreta la afirmación como verdadera, posible o probable. Finalmente, se consideran posibles refutaciones u objeciones.

Criterios de idoneidad didáctica (CID)

La idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de él) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para alcanzar la adecuación entre los significados personales alcanzados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), considerando las circunstancias y los recursos disponibles (ambiente). Un proceso de enseñanza y aprendizaje alcanzará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular, de manera coherente y sistemática, los siguientes seis criterios parciales de idoneidad didáctica,

referidos a cada una de las seis dimensiones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Breda, et al., 2017): a) Criterio epistémico. Evaluar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas"; b) Criterio cognitivo. Evaluar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se pretende enseñar se encuentra a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes; y después del proceso, lo que han aprendido; c) Criterio interaccional. Evaluar si la interacción resuelve las dudas y dificultades de los estudiantes; d) Criterio mediacional. Evaluar la adecuación de los recursos y el tiempo utilizados en el proceso de instrucción; e) Criterio afectivo. Evaluar la participación de los estudiantes (interés, motivación) en el proceso de instrucción; f) Criterio ecológico. Evaluar la adecuación del proceso instruccional al proyecto educativo de la escuela, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.

Los CID para ser operativos se concretan en componentes e indicadores observables que permitan evaluar el grado de idoneidad de cada dimensión del proceso de enseñanza y aprendizaje. La Tabla 1 presenta los componentes de cada CID (Breda et al., 2017).

Tabla 1 Componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica

Criterio	Componentes
Epistémico	Errores; ambigüedades; riqueza de procesos; representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Conocimientos previos; adaptación curricular a las diferencias individuales; aprendizaje; alta demanda cognitiva.
Interaccional	Docente - estudiante; interacción de estudiantes; autonomía; evaluación formativa.
Mediacional	Recursos materiales; n.º de estudiantes, distribución y condiciones de aula; tiempo.
Afectivo	Intereses y necesidades; actitudes; emociones.
Ecológico	Adaptación del currículo; conexiones intra e interdisciplinares; utilidad sociolaboral; innovación didáctica.

Lesson Study (LS)

El LS es el diseño colaborativo y detallado de una clase o secuencia de clases, su implementación y observación directa en el aula, y su análisis conjunto posterior a la implementación realizado por un grupo de docentes. Un ciclo de LS debe seguir los siguientes pasos: definición del problema de investigación, análisis del plan de estudios y objetivos; planificación la lección (o la secuencia); ejecución y observación de la clase; reflexión conjunta sobre los datos recogidos. En cada etapa, se deben considerar algunos criterios para completar un ciclo de LS (Lewis y Hurd, 2011).

METODOLOGÍA

Se trata de una investigación cualitativa/interpretativa (Blumer, 1983).

Contexto, participantes y selección de episodios

El episodio analizado es parte de un estudio más amplio, donde los participantes del ciclo de LS diseñan una unidad didáctica de funciones para estudiantes de cuarto de ESO, usando los CID.

Participaron ocho profesores (T1-T8) que eran formadores de profesores y que, a su vez, conocen y usan los CID. La profesora T1 es la que implementó la clase con su grupo de alumnos, ya que también es profesora de secundaria. La experiencia en la enseñanza de las matemáticas en secundaria de los participantes es muy variada y va desde algunos meses en el caso T5 hasta 25 años en el caso de T2. Por otra parte, 3 de los ocho participantes tenían experiencias en LS y los

otros 5 era la primera vez que participaban en una LS. Hay que comentar que, en algunas sesiones, hubo otros participantes invitados, pero su participación fue principalmente de observador.

Hasta el momento, se han realizado 12 sesiones semanales del LS (virtuales, híbridas y presenciales) para el diseño de la unidad didáctica sobre funciones, las cuales han sido videograbadas para su análisis. En las primeras cinco sesiones se trabajó principalmente la organización del ciclo de LS, los objetivos de investigación y de la clase, la forma de trabajar la unidad de funciones, el número de sesiones, los conocimientos previos, entre otros aspectos. En la sexta sesión se seleccionaron los problemas para introducir la noción de función. Previamente, los participantes habían acordado preparar cada uno propuestas de problemas que pudiesen ser utilizados para introducir el objeto función, los cuales, una vez seleccionados deberían adecuarse al contexto de la clase. En esta sexta sesión se seleccionaron tres problemas: evolución de la fiebre de un enfermo, donde se muestra la gráfica de la temperatura durante un día; salto con paracaídas, donde se tiene el registro de la distancia entre el avión y el paracaidista; y variación de precio del tapizado de un sofá, donde la tapicería cobra cien euros por el transporte y veinticinco euros por cada metro cuadrado de tela. Un aspecto a destacar es que el grupo de estudiantes, de cuarto año de Educación Secundaria Obligatoria (15-16 años), a quien va dirigida la unidad didáctica que se desarrolló, tiene dificultades para trabajar el contenido de matemáticas.

Análisis de los datos

El análisis de la argumentación se realiza considerando el modelo ideal de la Pragma-dialéctica, el concepto de argumentación práctica y el modelo de Toulmin. Después de obtener los argumentos, éstos se relacionan con los CID. El análisis sigue estas fases: I) Revisión de vídeos para identificar episodios de argumentación práctica en la elección de los problemas para introducir el objeto función. II) Transcripción del diálogo. III) Identificar las diferentes ideas que los participantes expresan cuando participan en la elección de los problemas. IV) Identificar palabras que dan cuenta de la existencia de argumentos: entonces, por lo tanto, por ejemplo, si, es decir, etc. V) Establecer las etapas del modelo ideal de la Pragma-dialéctica. VI) En la etapa de argumentación, del modelo ideal, presentar los argumentos identificados, considerando el modelo de Toulmin VII) Interpretar los argumentos teniendo en cuenta los criterios de idoneidad didáctica.

RESULTADOS

A continuación, se muestra un segmento del diálogo de la sesión donde se seleccionan los problemas que los alumnos resolverán antes de definir lo que es una función. Cada problema seleccionado fue modificado para adecuarlo al contexto de la clase. Algunas veces tanto la elección como la modificación de los problemas implicaban la reflexión conjunta de los participantes. En esta sesión hubo ocho participantes y se seleccionaron tres problemas:

T1: Quedaba definir los problemas de la primera sesión y la idea era introducir el concepto de variable independiente, dependiente y de función, como conclusión de estos primeros problemas y dando ejemplos que no representan funciones […]

T2: Habría que pensar uno para explicar el sistema de coordenadas, lo pensamos con más calma. Os envío un correo porque el primer problema ¿cuál sería?

T1: Pues teníamos un problema que era el de la máquina quitanieves.

T4: Sí, pero yo no lo pondría de primero.

T2: Yo propongo uno más fácil, que a mí me gusta y que conecta muy claramente con los conocimientos previos de los alumnos, se los estoy enviando por correo electrónico. Es un problema muy básico muy básico que con los conocimientos previos que ellos tengan sea prácticamente inmediato contestarlo…es un problema clásico no es que sea original mío, que es el típico de la temperatura que además con esto del COVID ahora […]

T2: O sea porque yo propongo este problema contrariamente a todo discurso que existe de la enseñanza por descubrimiento, de que los alumnos tienen que ser muy autónomos, etc. Mi experiencia dice que cuando inicias el tema es mejor guiarlo bastante desde los conocimientos previos que tienen, por eso propongo un problema muy simple bastante guiado para que ellos puedan contestarlo, porque con otro planteamiento tendríamos que buscar, como en aulas investigativas, tendríamos que proponer un problema muy complejo de entrada y que ellos trabajen en grupo, investiguen, dejarles mucha libertad y cierta autonomía ¿no? pero por las características del grupo y por la experiencia personal, no sé si T4 corrobora (Por su experiencia docente), prefiero empezar con algo muy guiado, T6 nos tendrías que contradecir.

T3: T4 también por las mismas razones o ¿alguna más?

T4: No, por las mismas, porque este tipo de alumnos si les planteas un reto que se sientan superados o que nos les enganche mucho no van a entrar, entonces es mejor que ellos mismos vayan viendo que pueden ir siguiendo y que es algo asequible y que conecta con cosas que conocen y luego ya podemos plantear retos más difíciles […]

T2: Este problema es muy típico, "La gráfica siguiente representa la temperatura que ha sufrido un enfermo a lo largo de todo un día" (Lee el problema que proyecta desde su portátil). Igualmente se representan el eje de abscisas que se ha puesto horas, pero no es horas es tiempo, igualmente se representan en el eje de las ordenadas la temperatura.

T1: Pero es que la propia gráfica tiene […]

T2: Se presta a confusión, pero claro para que el alumno lo entienda ¿qué le pones horas o tiempo?

T5: Yo pondría tiempo y entre paréntesis horas.

T2: Entonces cambiamos el problema ponemos tiempo y entre paréntesis horas.

T5: Al final pondría […]

T1: Otra cosa es que completaran ellos el gráfico.

T2: ¿Qué temperatura tendría a las 10 a.m.? (Lee el primer inciso del problema). Bueno 39 grados ¿o no?, esto parece que todo el mundo contestaría 39 grados. ¿Qué temperatura tenía a las 10 p.m.? (Lee el inciso b del ejercicio) Bajó a 35 grados. ¿A qué hora estuvo a 37 grados? (Lee el inciso c del ejercicio) A las 4, a las 12 a las 16 y 1 y algo ¿no? (responde a la pregunta viendo el gráfico). ¿En qué ocasiones se le suministró al enfermo un antitérmico de efecto rápido? (Lee el inciso g del problema) ¿A qué hora se le administró? El primero fue a las 10 y el segundo a las ocho. Comenta la situación general del enfermo que puede deducirse de esta gráfica. (Lee el h) Aquí las respuestas ya pueden ser: está muy mal, tiene COVID, o sea ya encontraremos de todo tipo, ¿no? Pero bueno, básicamente está grave y con el antitérmico consiguen bajar la temperatura, ¿no? No en la primera vez que se lo dan sino hasta la segunda. Este tipo de problema, en mi opinión, si aumentas la palabra tiempo y entre paréntesis horas, en un problema que cualquier alumno puede resolver con los conocimientos previos que tenga. Entonces están de acuerdo con este problema o ¿pondrían otro diferente?

T1 y T4: Está bien.

A continuación, se describe la discusión considerando las fases del modelo de la Pragma-dialéctica:

Apertura: Las reglas para esta discusión son de un contexto académico, la cordialidad y el respeto se observa de manera clara, de hecho, pocas veces un participante confronta directamente a otro.

Confrontación: T2 comenta a T6 que tendría que contradecir, porque T6 prefiere problemas no tan guiados y T2 comenta que para introducir el tema prefiere problemas guiados.

En los episodios de esta comunicación, las diferencias de opinión son no mixtas, por qué no hay puntos de vista contrarios; en particular, el participante T2 anticipa la diferencia de opinión o duda de T6 respecto a los ejercicios propuestos, pero T6 no expresa ideas opuestas.

Argumentación: En esta fase nos interesa la argumentación práctica de los participantes y los describimos usando algunas categorías del modelo de Toulmin.

Dato 1: Se deben definir los problemas que sirvan para introducir los conceptos de variable independiente, dependiente y función.

Dato 2: El grupo de estudiantes con el que se trabajará tiene dificultades para aprender matemáticas. También se considera que sus conocimientos previos son pocos.

Respaldos: (Por experiencia de T2) Cuando inicias el tema es mejor guiarlo bastante desde los conocimientos previos que tienen los estudiantes; si les planteas un reto con el que se sientan superados o que no les enganche mucho no van a trabajar; para evitar confusiones se pueden modificar los problemas; con las modificaciones cualquier estudiante lo podría resolver con los conocimientos previos que tenga.

Garantía: Se debe introducir el concepto de función con problemas que los estudiantes puedan resolver con los conocimientos básicos que tienen.

Refutación: Se busca una enseñanza por descubrimiento, donde los alumnos deben ser autónomos.

Conclusión: El problema de la temperatura de una persona enferma, con modificaciones, será considerado para la clase. En este caso, la conclusión, es la fase de conclusión del modelo de la Pragma-dialéctica y, a su vez, es la afirmación o conclusión de modelo de Toulmin.

La propuesta de este problema es planteada considerando dos aspectos, el primero es que se están buscando problemas que sirvan para introducir el concepto de función y el segundo es que los conocimientos previos de los estudiantes son bajos. El problema que se propone cumple con que sirve para introducir el concepto de función y que los estudiantes puedan resolverlo con los conocimientos previos que tengan. Antes de que el problema sea aceptado, se realiza una modificación a su gráfica con el objetivo de que los estudiantes no se confundan. Se comentó que este problema no se utilizaría si la clase estuviera pensada con enseñanza por descubrimiento donde se prioriza la autonomía de los estudiantes.

Los CID que se consideran para la elección del problema son: el criterio cognitivo, al pensar en los conocimientos previos de los estudiantes y que el problema propuesto tiene una dificultad manejable; el criterio epistémico, al buscar evitar errores y ambigüedades haciendo cambios al problema con lo cual se disminuyó el grado de dificultad del problema y; el criterio afectivo, al pensar en evitar el rechazo de los estudiantes en la selección de un problema que puedan resolver y que permita valorar la utilidad de las matemáticas.

Para los problemas dos y tres seleccionados en la sesión seis, por cuestiones de espacio, solo compartimos su argumentación de porqué fueron seleccionados.

Problema dos: Un paracaidista salta del avión en caída libre durante un tiempo, después del cual abre su paracaídas. La Tabla 2 presenta las distancias del hombre al avión cada medio segundo:

Tabla 2 Datos del problema del paracaidista

Tiempo (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
Distancia al avión (m)	0	1	4	9	16	25	36	42	46	49	52	55

a) Identifique las magnitudes implicadas en este problema. ¿Cree que hay alguna relación entre ellas? ¿Cuál? b) Elabora una gráfica (con el apoyo del GeoGebra) que describa el movimiento graduando el eje de ordenadas de forma que la separación entre las marcas represente 5 metros; y el eje de abscisas, de modo que la separación entre las marcas represente 0,5 segundos.

Argumentación. Dato: Se busca un ejercicio para trabajar algún cambio de representación del concepto de función.

Respaldos: El problema es interesante porque no es intuitivo (ya que cuando el paracaidista cae la gráfica sube); se trabajan dos cambios de representación; se combate la idea de que la gráfica de la función es como un dibujo de la situación, ya que la gráfica es todo lo contrario a la situación; la idea de que la gráfica de la función es como un dibujo de la situación es un error detectado en la literatura.

Garantía: Se deben proponer problemas donde haya cambios de representación.

Refutación: Quizás este problema sea demasiado difícil.

Conclusión: El problema del paracaídas será propuesto en clase.

En este argumento se justifica porqué este segundo problema será utilizado para introducir el concepto de función. Este problema combate la idea de que la gráfica es como un dibujo de la situación y se trabajan cambios de representación, a diferencia del primer problema donde no se trabajó ningún cambio de representación. Los participantes creen que se deben trabajar diferentes representaciones del concepto de función, también consideran que el problema puede ser más difícil que el primero sobre todo porque la gráfica de la función no es un dibujo de la situación, pero acuerdan usar este segundo problema para introducir el concepto de función. En el argumento para el segundo ejercicio se identifica el uso de los siguientes CID: criterios cognitivos (usar un problema que afronta un error común de los estudiantes) y epistémico (al considerar diferentes representaciones para el concepto de función).

Problema tres: Para cambiar la tapicería de unos muebles, un tapicero cobra 100 euros por el transporte y 25 euros por cada metro cuadrado de tela. Prepara una tabla de valores de 5 en 5 m^2. Después, dibuja una gráfica y determina una fórmula que relacione la superficie de tela con el dinero cobrado. Justifica tu respuesta.

Argumento. Datos: Los estudiantes ya obtuvieron fórmulas cuando trabajaron con sucesiones; se busca un problema para trabajar otras conversiones entre representaciones de funciones.

Respaldos: Este problema es más fácil que el del paracaidista; se supone que los estudiantes ya vieron algo de funciones, esto les permitirá obtener la fórmula del problema; si lo estudiantes no son capaces de obtener la fórmula se les puede ayudar.

Garantía: El problema trabaja diferentes representaciones de la función, tabla, gráfica, fórmula y la descripción verbal, y las traslaciones o conversiones son descripción verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula.

Refutación: ¿Cómo van a obtener la fórmula los estudiantes?

Conclusión: Se utilizará este problema como tercero para introducir el concepto de función.

El argumento para seleccionar el tercer problema considera que se debía buscar otro problema que trabajara más cambios de representaciones de una función. Este problema trabaja tres representaciones: tabla, gráfica y fórmula. Una refutación en el argumento es el cuestionamiento del problema al dudar sobre si los estudiantes serán capaces de deducir la fórmula, lo cual se evalúa como posible considerando que los estudiantes han hecho esto antes y que en caso de que les sea difícil encontrar la fórmula se les puede ayudar en la clase, con preguntas. Se concluye que el problema será utilizado en clase. Los CID que se identifican en este argumento son el criterio epistémico al considerar las tres representaciones, el criterio cognitivo al considerar la comprensión que facilita el cambio entre representaciones y los conocimientos previos de los estudiantes para poder deducir una fórmula, y el criterio interaccional al pensar en la interacción del docente con el estudiante en caso de que tenga dificultades para deducir la fórmula.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La conclusión principal es que el conocimiento de los CID, es decir el uso explícito y consciente de todos los criterios de la pauta de los CID por parte de todos los participantes, influye en la elección de los problemas para introducir el objeto función, principalmente el criterio epistémico con su componente representatividad de la complejidad, ya que los participantes valoran como importante proponer tareas que sean una muestra representativa de las diferentes representaciones del concepto de función, complementado esto con el criterio cognitivo, al buscar que en los problemas haya cambios de representación para facilitar la comprensión y se puedan resolver con los conocimientos previos que se tienen. En los argumentos identificados se observa como los criterios de idoneidad epistémico, cognitivo y afectivo son considerados en las garantías y en los respaldos. Ese resultado es coherente con la investigación de Ledezma et al. (2022), que muestra el papel relevante que tienen los CID en la argumentación práctica de un futuro profesor cuando justifica el diseño de una secuencia de tareas para enseñar las funciones incorporando la modelización.

Se observa que el uso de los CID en la elección de los problemas ayuda a profundizar y a ampliar la reflexión de los participantes ya que, en este caso, se reflexionó también sobre la distribución del tiempo para los problemas, el tratamiento de las ambigüedades, sobre la interacción en el aula de clase, y sobre las emociones y actitudes de los estudiantes al resolver los problemas.

Este trabajo se pretende ampliar con el análisis de la implementación de la unidad didáctica contrastando los argumentos con lo sucedido en clase. Se considerarán los argumentos prácticos de todo el ciclo de LS, ya que, en este trabajo solo se presentan los argumentos para la elección de los problemas, pero también disponemos de los argumentos para la modificación de los problemas.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa" y PRE2019-090177 (financiado por Ministerio de Ciencia e Innovación y Universidades/Fondo Social Europeo/Agencia Estatal de Investigación).

Referencias

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico* [The symbolic interactionism]. Hora.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Eemeren, F., y Grootendorst, R. (2003). *A Systematic Theory of Argumentation: The Pragma-dialectical approach*. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511616389

Gómez, J. (2017). ¿Qué es la argumentación práctica? [What is practical argumentation?]. *Revista Co-herencia, 14*(27), 215–243. https://doi.org/10.17230/co-herencia.14.27.9

Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2022). Knowledge and Beliefs on Mathematical Modelling Inferred in the Argumentation of a Prospective Teacher When Reflecting on the Incorporation of This Process in His Lessons. *Mathematics*, *10*(18), 3339. https://doi.org/10.3390/math10183339

Lewiński, M. (2018). Practical Argumentation in the Making: Discursive Construction of Reasons for Action. In: Oswald, S., Herman, T., Jacquin, J. (eds) *Argumentation and Language — Linguistic, Cognitive and Discursive Explorations*. Argumentation Library, vol 32. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73972-4_10

Lewis, C. C., y Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Heinemann.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument* (2nd ed.). Cambridge University Press. (Original work published 1954).

DEL ARRASTRE VERTICAL A LA PERPENDICULARIDAD: ELABORACIÓN DE UNA PROPIEDAD GEOMÉTRICA EN 3D AL RESOLVER PROBLEMAS CON GEOMETRÍA DINÁMICA

From vertical dragging to perpendicularity: making a 3D geometric property by solving problems with dynamic geometry

Sua, C., Jaime, A., Gutiérrez, A.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

Resumen

Los problemas de construcción y demostración son una vía para aprender a demostrar deductivamente, gracias a las propiedades geométricas representadas por las herramientas de construcción de un ambiente de geometría dinámica y a los significados que su uso promueve en los estudiantes. Algunos estudios han utilizado la analogía en el estudio de la geometría 3D apoyándose en relaciones geométricas 2D y en el uso de geometría dinámica. Basados en la resolución de problemas de construcción y demostración en un ambiente de geometría dinámica, que inducen el estudio de elementos geométricos 3D a través de elementos análogos en 2D, analizamos la elaboración de una propiedad 3D por un estudiante con alta capacidad matemática. Los resultados del análisis muestran el refinamiento instrumental y conceptual que acompaña este proceso, así como la apropiación de esta propiedad como herramienta teórica y de construcción.

Palabras clave: *geometría dinámica tridimensional, problemas de construcción y demostración, analogía, perpendicularidad, equidistancia*

Abstract

Construction-and-proof problems are a way to learn to do deductive proofs, given the geometric properties represented by the construction tools of a dynamic geometry environment and the meanings their use promotes in students. Some studies have used the analogy in the study of 3D geometry, relying on 2D geometric relationships and the use of dynamic geometry. Based in construction-and-proof problem-solving in a dynamic geometry environment, which induce the study of 3D geometric properties through analogous 2D objects, we analyze the elaboration of a 3D geometric property by a mathematically gifted student. The analysis results show the instrumental and conceptual refinement that accompanies this process, as well as the appropriation of this property as a theoretical and construction tool.

Keywords: *3-dimensional dynamic geometry, construction-and-proof problems, analogy, perpendicularity, equidistance*

INTRODUCCIÓN

Los ambientes de geometría dinámica (en adelante AGD) apoyan el aprendizaje de la elaboración de demostraciones deductivas. Una de las vías para lograr esto es la resolución de problemas de construcción y demostración (Mariotti, 2012). Hay abundante literatura que analiza y caracteriza el razonamiento de los estudiantes al usar AGD para resolver este u otros tipos de problemas matemáticos, siendo el contexto de la geometría 2D en el que la literatura se sitúa principalmente (p. ej., Larios Osorio *et al*., 2017), quedando el campo de la geometría 3D poco explorado (p. ej., Gutiérrez y Jaime, 2015 y Gutiérrez *et al*., 2014). Conscientes de este desequilibrio y de la dificultad de estudiar la geometría 3D por la complejidad de las representaciones e interpretación de

Sua, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2023). Del arrastre vertical a la perpendicularidad: elaboración de una propiedad geométrica en 3D al resolver problemas con geometría dinámica. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 523–530). SEIEM.

los objetos geométricos allí presentes, algunos estudios han acudido al establecimiento de analogías entre la geometría 2D y 3D, apoyándose en el uso de AGD, con el fin facilitar a los estudiantes la comprensión y el aprendizaje de la geometría 3D mediante la comparación de objetos geométricos de ambos dominios que tienen propiedades similares (Ferrarello *et al*., 2020; Molina *et al*., 2021).

Presentamos parte de un proyecto de investigación en el que analizamos el proceso de razonamiento y el progreso en el aprendizaje de la elaboración de demostraciones deductivas por varios estudiantes con alta capacidad matemática cuando resuelven problemas de construcción y demostración en un AGD 2D y 3D combinado. El análisis presentado aporta información novedosa que muestra el largo recorrido en la formulación y refinamiento de una propiedad geométrica 3D, así como el papel desempeñado por un AGD en este proceso.

El objetivo de investigación de este documento es analizar el establecimiento, modificación y uso de una propiedad de equidistancia en 3D, por parte de un estudiante con alta capacidad matemática, en el marco de la resolución de problemas de construcción y demostración que promueven analogías entre dominios específicos de la geometría 2D y 3D.

MARCO TEÓRICO

Problemas de construcción y demostración: aportes de los ambientes de geometría dinámica

Consideramos una *demostración* como un argumento matemático, empírico o deductivo, cuyo objetivo es convencer a alguien sobre la verdad de una declaración matemática. En nuestro estudio, hacemos énfasis en el aprendizaje de la demostración a través de los *problemas de construcción y demostración.* Estos problemas, cuando se resuelven en un AGD, solicitan i) crear una figura geométrica que tenga las propiedades requeridas por el problema y que estas se conserven bajo arrastre y ii) explicar el procedimiento usado para crear la figura y demostrar que es matemáticamente correcto, es decir, que el protocolo de construcción produce una figura que cumple las condiciones del problema (Mariotti, 2019).

Al usar los estudiantes herramientas del AGD en la construcción de objetos geométricos, se producen significados personales, gracias a las relaciones de dependencia que descubren y verifican a través del arrastre (Mariotti, 2019). Estas herramientas también están relacionadas con elementos teóricos de la geometría euclidiana, que pueden apoyar a los estudiantes al desarrollar demostraciones de las construcciones (Mariotti, 2012). Resolver problemas de construcción y demostración permite a los estudiantes aprovechar las posibilidades del AGD y el sistema lógico que subyace a este. Por lo tanto, las construcciones geométricas tienen una naturaleza puramente teórica, donde su validez está vinculada a demostrar que un conjunto de pasos de construcción provee un resultado específico. Resolver este tipo de problemas puede llevar a los estudiantes a evocar significados teóricos de las herramientas que han usado en las soluciones (Mariotti, 2019).

La analogía: una herramienta para extender ideas y resolver problemas

Una *analogía* es una relación de semejanza entre dos dominios a través de objetos y relaciones específicas. Un dominio es “una representación de ciertos aspectos de un fenómeno, situación, proceso, modelo, problema, estructura conceptual, etc.” (Schlimm, 2008, p. 178). Elaborar analogías es un producto de la actividad humana con varios beneficios (Richland y Simms, 2015). Este proceso demanda reconocer estructuras conceptuales correspondientes entre diferentes dominios, sus semejanzas y diferencias, avanzando así de unas comparaciones basadas en aspectos superficiales a otras basadas en relaciones entre esos dominios. Esto tiene implicaciones para el aprendizaje de las matemáticas (English, 1997), dado que, al establecer relaciones en un dominio y llevarlas a otro, en el cual estas relaciones son válidas, la analogía permite descubrir nuevos objetos y relaciones, formular hipótesis y simplificar operaciones mentales complejas en el dominio de destino, al realizarlas en el dominio de origen, que ya es conocido (Fischbein, 2002).

En nuestra investigación, la analogía se convierte en una herramienta que permite explorar y descubrir relaciones en un dominio específico de la geometría 3D —desconocido por los estudiantes—, tomando como base el dominio correspondiente de la geometría 2D, ya conocido por ellos, e interpretando los resultados obtenidos en este último dominio a la luz de las características del dominio específico 3D en el que el problema original se sitúa.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Los análisis reportados pertenecen a una investigación cualitativa basada en un estudio de caso, en la que analizamos el aprendizaje de la elaboración de demostraciones, en el contexto de la geometría 3D y con la mediación de GeoGebra, por parte de cuatro estudiantes de educación secundaria con alta capacidad matemática, con edades entre 11 y 14 años. Los consideramos estudiantes con alta capacidad matemática debido a que, además de su experiencia escolar, ellos habían participado en programas de atención al talento general y al talento matemático.

Diseñamos e implementamos una secuencia de 18 problemas de construcción y demostración en sesiones de 60 minutos. Algunos problemas requerían la construcción, primero en 2D y luego en 3D, de objetos geométricos que satisficieran propiedades asociadas a la equidistancia (p. ej., construir un triángulo equilátero dado su lado). Otros problemas requerían construir un objeto 2D y uno análogo en 3D (p. ej., encontrar el centro de una circunferencia en 2D y luego el centro de una esfera en 3D). La resolución de cada problema proveía a los estudiantes de elementos conceptuales e instrumentales para resolver los siguientes problemas. Los estudiantes primero resolvían el problema y luego discutían su solución y justificaban su validez con el profesor (primer autor de este documento), quien gestionaba la conversación. Grabamos las sesiones en audio y video, previa autorización de estudiantes y padres. Dada la diferencia de cursos escolares y conocimientos de los cuatro estudiantes, las sesiones se organizaron como entrevistas clínicas individuales.

Presentamos los episodios de la resolución de cinco problemas por un estudiante al que llamaremos Rafael (pseudónimo), de 13 años y que había finalizado el tercer curso de ESO. Previo a la implementación de la secuencia, los conocimientos de Rafael de geometría 3D eran escasos, provenientes de su experiencia escolar y limitados al reconocimiento de sólidos básicos (p. ej., esfera, poliedros). La experiencia de Rafael con GeoGebra se limitaba al uso de algunas herramientas de GeoGebra 2D, siendo GeoGebra 3D y sus herramientas desconocidas para él.

La actividad de Rafael al resolver los problemas ilustra la emergencia, modificación y uso de una propiedad geométrica 3D a la que llamaremos *perpendicularidad-equidistancia*. En este proceso tiene un papel central la analogía entre dominios específicos de perpendicularidad y equidistancia en 2D y 3D. En lo que sigue, presentamos los episodios y realizamos un análisis global de estos.

La *propiedad Perpendicularidad – Equidistancia* establece que: dado un plano α, si un punto A en el plano α equidista de dos o más puntos contenidos en el mismo plano, todo punto en la recta perpendicular al plano α que contiene al punto A equidista también de dichos puntos.

LA RELACIÓN PERPENDICULARIDAD - EQUIDISTANCIA EN EL ESPACIO

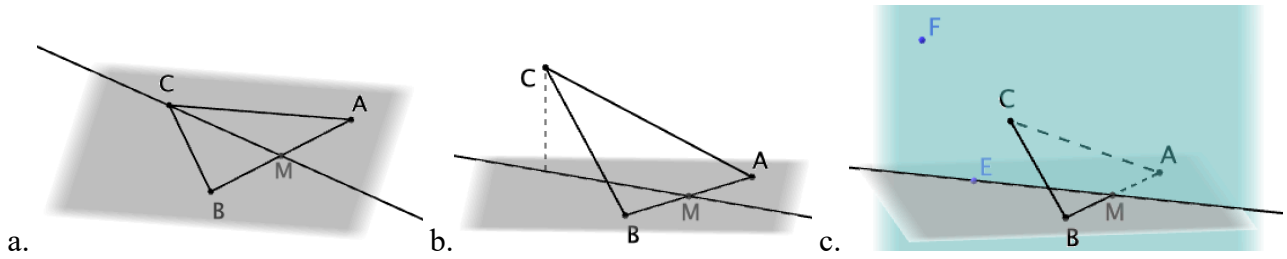
Episodio 1. El problema 6 proporciona dos puntos A y B en el plano XY. Rafael debía construir puntos que equidisten de A y B, primero en GeoGebra 2D y luego en GeoGebra 3D. La solución de este problema llevaría a establecer la mediatriz y el plano mediador, respectivamente, como lugares geométricos. En GeoGebra 2D, Rafael identificó rápidamente la mediatriz como la solución al problema. El estudiante sabía que esta recta es perpendicular al segmento AB por su punto medio, propiedades que le permitieron demostrar que los puntos contenidos en ella equidistan de A y B.

Al resolver el problema en GeoGebra 3D, Rafael utilizó las construcciones hechas en GeoGebra 2D para realizar la exploración: el segmento AB, su punto medio M, su mediatriz y un punto C de esta recta, que determinaba los segmentos CA y CB (Figura 1a). Rafael arrastró el punto C

verticalmente (respecto del plano XY, Figura 1b) y afirmó que C equidista de A y B. Para demostrar la validez de su estrategia, Rafael comentó *a C lo hemos movido en el eje Z* (paralelo al eje Z), [desplazando el puntero de arriba a abajo], *mientras que estos dos puntos* [A y B], *al estar en el mismo punto respecto a Z, bueno, a la misma altura,* [la equidistancia] *no varía. Si estuviese uno de los dos* [puntos] *más alto* [distancia respecto al plano XY], *sí que variaría* [la equidistancia].

El profesor pidió a Rafael encontrar otros puntos en GeoGebra 3D que equidistaran de A y B. Él construyó (Figura 1c) los puntos E y F en la mediatriz, arrastró F verticalmente y construyó el plano EMF. Rafael vinculó el punto C a este plano y lo arrastró a distintos lugares de este, mientras afirmaba que cada posición de C conserva la equidistancia (Figura 1c). Para validar su estrategia, Rafael afirmó que *lo único que está cambiando es el eje Z, moviéndolo* [arrastrando C] *por la propia mediatriz, que ya habíamos dicho antes que se podía* [solución en 2D].

Figura 1. Génesis de la propiedad Perpendicularidad - Equidistancia

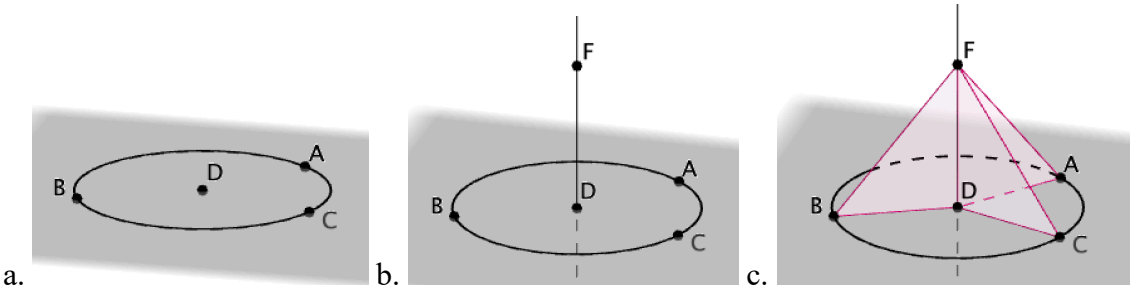


Este episodio muestra cómo las acciones de Rafael al resolver el problema lo llevan a establecer un vínculo entre el arrastre vertical de puntos y la equidistancia en 3D.

Episodio 2. El problema 8 solicita primero construir en GeoGebra 2D el centro de la circunferencia determinada por tres puntos no alineados A, B y C. Posteriormente, tomando como base los mismos puntos A, B y C, se pide construir en GeoGebra 3D un punto que equidiste de A, B y C que no esté en el plano XY. La construcción del centro D de la circunferencia no fue problemática para Rafael, él utilizó dos cuerdas de la circunferencia y sus respectivas mediatrices para determinar este punto.

En GeoGebra 3D, Rafael contaba con la circunferencia ABC y su centro D, construido en la primera parte del problema (Figura 2a). Rafael intentó arrastrar verticalmente el punto D, pero las propiedades de su construcción no le permitían hacerlo: *quiero crear aquí un punto* [señalando la posición del punto D], *pero que pueda mover. Quiero hacer un punto que esté arriba de D… exactamente arriba. Que solo se modifique el eje Z* [componente z de las coordenadas del punto D]. Tras estas afirmaciones, Rafael propuso una estrategia para obtener el punto que quería: *Quiero hacer una recta que pase por D, perpendicular al plano, pero no sé cómo hacerla*.

Figura 2. La perpendicularidad se hace explícita en la propiedad



Al ser la primera vez que había que crear una recta perpendicular a un plano, el profesor explicó a Rafael cómo construirla. Cuando Rafael construyó la recta deseada, él ubicó un punto F, distinto al punto D en esta recta (Figura 2b). Rafael demostró la validez del punto F con ayuda de los segmentos DC, DB y DA, sobre los que afirmó que *serían radios… y todos tienen la misma distancia* [longitud] (Figura 2c). Él también construyó los segmentos FA, FB y FC y luego afirmó

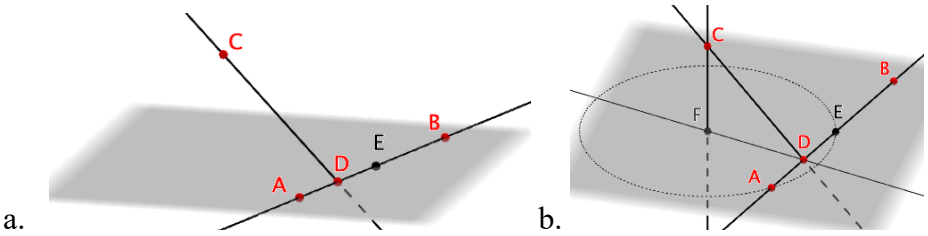
que, *por el teorema de Pitágoras, como todos tienen la misma base que es el radio y la misma altura, que es la distancia de D a F, la hipotenusa tendría que ser la misma, es decir la distancia entre los puntos* [F y A, B y C, es la misma].

En este episodio se establece una relación entre perpendicularidad y equidistancia en 3D.

Episodio 3. El problema 9 propone la siguiente configuración en GeoGebra 3D: la recta AB está contenida en el plano XY, el punto C, no contenido en este plano, determina una recta perpendicular a la recta AB, cuya intersección es el punto D y el punto E pertenece a la recta AB, de forma que la distancia entre A y D es la misma que entre D y E (Figura 3a). Con esta configuración, Rafael debía descubrir que el lugar geométrico de E al arrastrar B en el plano XY era una circunferencia que también contiene el punto A. Luego, él debía construir dicha circunferencia.

Rafael construyó la recta *h*, perpendicular al plano XY que contenía a C y nombró F a la intersección entre esta recta y el plano XY (Figura 3b). Para asegurar que F es el centro de la circunferencia solicitada por el problema, Rafael mencionó que *de A a D hay la misma distancia que de D a E y como C es* [está en] *la perpendicular de la línea* [AB] *que pasa por D* [recta CD], *también tiene la misma distancia* [respecto de A y E]*... La línea que pasa de C* [recta h] *al plano* [XY] *es perpendicular al plano ... Entonces, al ser perpendicular,* [F] *sigue manteniendo la misma distancia… es el medio, porque* [todo punto de h] *siempre está a la misma distancia de ambos*.

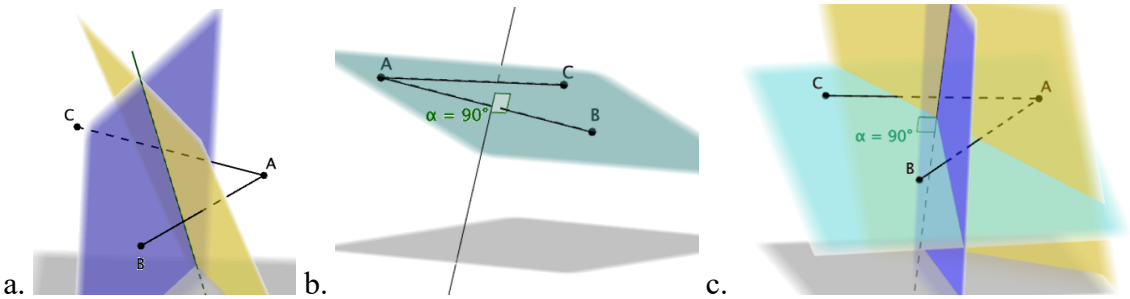
Figura 3. Uso de la relación Perpendicularidad - Equidistancia



El tercer episodio muestra cómo Rafael usa la relación perpendicularidad – equidistancia para sustentar que un punto equidista de otros dos, de forma distinta a la ocurrida en el segundo episodio.

Episodio 4. El problema 10 solicita construir tres puntos A, B y C, no alineados ni contenidos en el plano XY, los planos mediadores de los segmentos AB y AC y la intersección de estos planos (Figura 4a). Luego pide arrastrar el punto A y determinar una propiedad de la recta de intersección de los planos mediadores. Después de hacer la construcción y arrastrar A, Rafael expresó que esta recta era perpendicular al plano ABC, lo cual verificó de forma empírica (Figuras 4b y 4c). Al pedirle el profesor una demostración de esta propiedad, Rafael dijo que *esta* [recta de intersección] *está hecha con los dos planos mediadores…, el punto en el que intersecan* [los planos] *forma una línea en la que todos los puntos están a la misma distancia de B y de C. Entonces solo se puede mover en el…* [paralelo al] *el eje Z. Si el plano XY fuera este plano de aquí* [señala el plano ABC], *solo se mueve en Z, entonces, no cambia el ángulo. Siempre es perpendicular*.

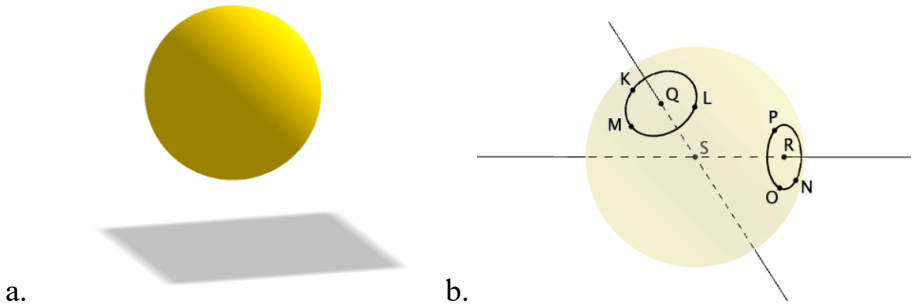
Figura 4. Uso de la propiedad recíproca: Equidistancia - Perpendicularidad



El cuarto episodio muestra el uso del recíproco de la propiedad perpendicularidad – equidistancia por Rafael, para sustentar la perpendicularidad entre una recta y un plano.

Episodio 5. El problema 16 pide determinar el centro de una esfera dada (Figura 5a). Para resolver el problema, Rafael construyó dos circunferencias determinadas por tríos de puntos pertenecientes a la esfera, construyó sus centros y las rectas perpendiculares a las circunferencias por sus respectivos centros (Figura 5b). Rafael aseguró que la intersección de ambas rectas (punto S) era el centro de la esfera: *...el punto en el que coinciden* [las rectas] *debería ser el centro… Porque son perpendiculares a la esfera como tal. Sería el diámetro… todos los puntos de la recta estaban a la misma distancia de estos tres puntos* [los que determinan la circunferencia].

Figura 5. Uso de la propiedad Perpendicularidad - Equidistancia



a. b.

En el último episodio, Rafael usa la propiedad perpendicularidad - equidistancia como herramienta para la construcción de objetos y la justificación de las propiedades que estos satisfacen.

ESTABLECIMIENTO DE UNA PROPIEDAD 3D: UN ANÁLISIS

Los episodios anteriores muestran el proceso de elaboración y transformación de una propiedad de la geometría 3D. El origen de esta propiedad tuvo lugar en el primer episodio, en la búsqueda de puntos en el espacio que equidistaran de dos puntos fijos contenidos en el plano XY. Determinar estos puntos llevó al establecimiento de una analogía entre los lugares geométricos que eran solución del problema en 2D y 3D. En concreto, al tomar como referencia la mediatriz como solución en 2D y desplazar verticalmente uno de sus puntos, asegurando el cumplimiento de lo solicitado por el problema, Rafael estableció un mecanismo para la conservación de la equidistancia en el espacio a través del arrastre de puntos en la dirección del eje Z, tomando como base configuraciones en el plano que satisficieran la misma propiedad.

Esta analogía estuvo presente también en el segundo episodio. En esa oportunidad, Rafael tomó la solución en el plano XY (centro de la circunferencia) como referencia para determinar el conjunto de puntos que equidistan en el espacio. Sin embargo, este episodio ofreció otros dos elementos a favor de la propiedad que se estaba formulando. El primero fue la declaración explícita de la perpendicularidad entre el conjunto solución y el plano XY, dejando al margen la referencia al arrastre vertical o cambio en el componente *z* de las coordenadas de un punto. Al hacer esta transición, Rafael presumiblemente transformó un significado personal atribuido al arrastre vertical en un significado matemático ligado a la perpendicularidad que subyace a este arrastre característico de los AGD-3D. El segundo elemento fue la demostración deductiva de esta relación, lo que aportó sustento teórico a la estrategia empleada por Rafael al resolver los problemas.

En el proceso llevado a cabo por Rafael hasta ahora, distinguimos una transición desde una relación de equidistancia sustentada en el arrastre vertical (episodio 1) hasta una relación, más sofisticada, de equidistancia que se sustenta en la perpendicularidad (episodio 2). Esta última relación es utilizada en el tercer episodio, como herramienta de construcción para encontrar el punto en el plano XY que equidista de otros dos puntos en este plano y como soporte de la construcción realizada. El uso dado por Rafael le llevó a operar con las relaciones geométricas dadas por el

problema, con el objetivo de contar con las condiciones necesarias para poder utilizar la propiedad perpendicularidad-equidistancia. Un segundo aspecto para resaltar sobre el uso de esta propiedad es que Rafael ya no tomó como punto de partida el conjunto solución en 2D para determinar soluciones en 3D, como se había realizado en los dos episodios anteriores, sino que ahora tomó como base un punto que equidista en el espacio, para llegar, a través de la propiedad elaborada, a un punto que equidista en el plano XY. Así pues, la generalidad de esta relación estaría permitiendo a Rafael moverse del plano al espacio y viceversa.

Además de su sofisticación, Rafael amplió el alcance de la relación perpendicularidad-equidistancia al utilizarla de forma bidireccional: mientras que en los tres primeros episodios el arrastre vertical o la perpendicularidad implicaban la equidistancia, en el cuarto episodio Rafael determinó la perpendicularidad entre una recta y un plano tomando como base de su argumento la equidistancia de cada punto en la recta respecto a tres puntos contenidos en el plano. Este argumento, aunque enmarcado en un razonamiento deductivo, no es suficiente para asegurar que Rafael comprendiera la relación bicondicional que estaba poniendo en juego. Investigaciones anteriores han mostrado que, en el tratamiento de relaciones condicionales, frecuentemente, los estudiantes usan de forma bicondicional (*p si y solo si q*) proposiciones que solo son válidas bajo una implicación (*p entonces q*) (Echeverry *et al*., 2012). Desafortunadamente, las acciones y razonamientos de Rafael no brindaron evidencia adicional para adoptar una postura respecto a la ampliación de esta relación.

Finalmente, en el quinto episodio podemos observar el uso decidido de la propiedad perpendicularidad – equidistancia por parte de Rafael para la construcción de un punto que satisficiera una equidistancia particular. Aunque la forma de usarla en esta ocasión es similar a la que hemos observado en los primeros tres episodios, tanto en la construcción como en la demostración de los resultados, el quinto episodio brinda evidencia del dominio que Rafael alcanzó de la propiedad y la constante presencia de esta en sus estrategias para determinar puntos que equidistaran de otros. Esto último llevó a Rafael a realizar construcciones auxiliares que ofrecieran condiciones suficientes y necesarias para utilizar esta propiedad y obtener los resultados deseados.

CONCLUSIONES

Los problemas de construcción y demostración mediados por AGD ofrecen un escenario útil para aprender a elaborar demostraciones deductivas. La información presentada en este documento aporta evidencia en esa vía, al tiempo que permite explorar la influencia de este tipo de problemas en un dominio poco explorado en investigación como lo es la geometría 3D.

El seguimiento y análisis de las acciones de un estudiante en la resolución de problemas de construcción y demostración muestra el aprovechamiento de su conocimiento de un dominio específico de la geometría plana y la extensión de este a un dominio específico de la geometría espacial, a través del establecimiento de analogías entre ambos dominios. En este proceso, apoyado en el uso de herramientas y funciones del AGD, se ve el establecimiento de relaciones geométricas inicialmente intuitivas, guiadas por la percepción y la comparación con relaciones de la geometría plana conocidas, las cuales se van transformando al resolver distintos problemas, hasta alcanzar un estatus teórico en el que incluso se puede demostrar su validez. Estas nuevas relaciones, pertenecientes al dominio de la geometría espacial, se convierten en herramientas teóricas para construir objetos con determinadas propiedades y demostrar los resultados obtenidos.

En este proceso, el papel del AGD es decisivo, al permitir la materialización de las ideas del estudiante a través de construcciones y acciones sobre los objetos construidos, así como proveer una simultaneidad entre la configuración 2D y 3D. El AGD apoya la extensión de ideas de la geometría plana a la espacial, en el contexto de analogías entre ambos dominios. De esta forma, un cuidadoso diseño de tareas y el reconocimiento de las posibilidades que ofrece el AGD para su resolución, se convierte en un aspecto central al proponer problemas de construcción y demostración que lleven al estudio de la geometría espacial, tomando como base elementos de la geometría plana.

No pretendemos que los resultados presentados aquí sean generalizables. Hemos ilustrado una posible forma de utilizar herramientas y funciones de un AGD, los significados personales que estas podrían provocar a través de su uso y la transformación de dichos significados conforme se avanza en la resolución de otros problemas, todo ello en un dominio específico de la geometría 2D y 3D. Esto brinda elementos novedosos en el campo investigativo y soporta la necesidad de realizar intervenciones de largo alcance, pues, como hemos mostrado en este documento, los resultados de este proceso de aprendizaje no son inmediatos. La particularidad del estudio presentado en este documento sugiere también la necesidad de otras investigaciones en esta vía, que aporten mayor evidencia empírica y permitan formular conclusiones más generales.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto PID2020-117395RB-I00 y la beca predoctoral EDU2017-84377-R, ambos financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Echeverry, A., Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2012). Proposición condicional: interpretación y uso por parte de profesores de matemáticas en formación. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 73-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.112

English, L. D. (1997). Children's reasoning processes in classifying and solving computational word problems. En L. D. English (ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images* (pp. 191-220). Lawrence Erlbaum.

Ferrarello, D., Flavia Mammana, M. y Taranto, E. (2020). Dynamic geometry systems in proving 3D geometry properties. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 27*(1), 19-27. https://doi.org/10.1564/tme_v27.1.03

Fischbein, E. (2002). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47237-6

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53-83. https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 405-414). SEIEM.

Larios Osorio, V., Pino-Fan, L. R. y González González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 39-57.

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: dynamic geometry systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 163-185. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694282

Mariotti, M. A. (2019). The contribution of information and communication technology to the teaching of proof. En G. Hanna, D. A. Reid y M. de Villiers (eds.), *Proof technology in mathematics research and teaching* (pp. 173-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_8

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2021). Gestión de normas que regulan el paso de la conjetura al teorema en un curso de geometría del espacio. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (eds.), *Investigación en educación matemática XXIV* (pp. 425-432). SEIEM.

Richland, L. E. y Simms, N. (2015). Analogy, higher order thinking, and education. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science*, *6*(2), 177-192. https://doi.org/10.1002/wcs.1336

Schlimm, D. (2008). Two ways of analogy: extending the study of analogies to mathematical domains. *Philosophy of Science*, *75*(2), 178-200. https://doi.org/10.1086/590198

DISEÑO DE TAREAS GEOMÉTRICAS EN LA FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA[i]

Designing geometric tasks in the training of future primary school teachers

Vargas, J. P.[a], Vanegas, Y.[b] y Giménez, J.[a]

[a]Universitat de Barcelona, [b]Universitat de Lleida

Resumen

El diseño de actividades matemáticas es una acción que los futuros maestros deben aprender. Esta comunicación describe el tipo de tareas geométricas que propone un grupo de futuros maestros a partir del estudio de imágenes que evocan diferentes contextos. Se sigue una metodología de carácter exploratorio-descriptivo y a través del análisis de contenido se identifican el tipo de tareas y el uso de los contextos. En el estudio han participado estudiantes del grado de educación primaria. Como resultado principal destaca la formulación de tareas de bajo nivel cognitivo, centradas en su mayoría en la determinación de cuestiones aritméticas (cálculo de áreas, perímetros, etc.). Tareas en las que no se consideran procesos clave de la actividad geométrica (visualización, representación, etc.). Por otra parte, se identifica dificultad en el reconocimiento de contextos como oportunidades de conexión entre lo matemático y el mundo real.

Palabras clave: *futuros profesores, educación primaria, tareas escolares, contextos, geometría.*

Abstract

The design of mathematical activities is an action that future teachers must learn. This paper describes the type of geometric tasks proposed by a group of future teachers based on the study of images that evoke different contexts. An exploratory-descriptive methodology is followed and through content analysis the type of tasks and the use of contexts are identified. Primary school students participated in the study. The main result was the formulation of low cognitive level tasks, mostly focused on the determination of arithmetic questions (calculation of areas, perimeters, etc.). Tasks in which key processes of geometric activity (visualization, representation, etc.) are not considered. On the other hand, difficulty is identified in the recognition of contexts as opportunities for connection between mathematics and the real world.

Keywords: *prospective teachers, primary, school tasks, contexts, geometry.*

INTRODUCCIÓN

Un aspecto fundamental en la enseñanza de las matemáticas es la planificación y diseño de tareas escolares. Como señalan Watson y Ohtani (2015), ya sea desde una perspectiva cognitiva, cultural o práctica, las tareas son el fundamento del aprendizaje matemático. En este sentido, una responsabilidad de los profesores de matemáticas es proponer tareas lo suficientemente ricas para que los alumnos desarrollen sus competencias. Según Mallart et al. (2018), los profesores deben ser capaces no solo de resolver tareas matemáticas, sino también, de escogerlas, modificarlas y plantearlas con fines educativos. Lavy y Hourigan (2019) señalan la necesidad de proponer experiencias de construcción, transformación y selección de tareas en los contextos de formación inicial de docentes. La presente comunicación abordará aspectos sobre el diseño de tareas en la formación de futuros maestros (FM) de primaria y los contextos que se utilizan para el diseño de dichas tareas en geometría.

De acuerdo con Llinares, (2008) uno de los propósitos principales de la formación inicial docente, es desarrollar el conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas, es decir, aprender a seleccionar, utilizar y construir conocimiento desde las necesidades de la propia enseñanza que ejerce. En este sentido, dada la responsabilidad de los FM de diseñar e implementar tareas geométricas ricas en procesos y competencias que logren el aprendizaje, se hace relevante que los programas de

Vargas, J. P., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2023). Diseño de tareas geométricas en la formación de futuros profesores de primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 531–538). SEIEM.

formación aborden como uno de sus contenidos el diseño de tareas para el desarrollo del conocimiento matemático. Godino, (2013) indica que, en el diseño de tareas, el foco de atención debería centrarse en evidenciar cómo la realización de éstas influye en el aprendizaje matemático, incluyendo además de las tareas, factores que aportan al desarrollo del conocimiento matemático.

Adicional a la importancia del diseño e implementación de tareas en el contexto para la enseñanza de las matemáticas reportado en diversas investigaciones, algunos planteamientos curriculares para la educación primaria (NCTM, 2000; Burgués y Sarramona, 2013) señalan la importancia que tiene desarrollar procesos matemáticos desde las primeras edades para promover actividad matemática rica.

El Decreto 157/2022 del Ministerio de Educación y Formación Profesional de España, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria indica, que: "la competencia matemática permite desarrollar y aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos con el fin de resolver diversos problemas en diferentes contextos" (p. 21). Lo que sugiere que, los docentes deben lograr que sus estudiantes adquieran los conocimientos y las destrezas necesarias para el razonamiento matemático a partir de diversas tareas, que les permitan interpretar sus soluciones en diferentes contextos y tomar decisiones estratégicas. Sin embargo, en el caso de la geometría, se observa que usualmente no se trabaja de forma competencial en las aulas, sino más bien de manera tradicional. (Paredes, Iglesias y Ortiz, 2007) y muchos de los maestros que abordan los conceptos geométricos tienen un enfoque en el que se privilegia la memorización de nombres de las figuras y algunas de sus características (Copley, 2000).

De acuerdo con Godino et al. (2003) la comprensión sobre los conceptos matemáticos es más profunda y perdurable, cuando los estudiantes tienen la oportunidad de conectar las ideas matemáticas, entre sí, con ideas de otras áreas y en contextos de sus propios intereses. Por tanto; si la formación de FM les brinda las herramientas para ser capaces de generar contextos relativos a sus futuros alumnos, avanzarán en el proceso de enseñanza de las matemáticas y seguramente en elementos asociados como la motivación y su funcionalidad dentro de la sociedad. El uso de contextos apropiados para la enseñanza de las matemáticas permite a los alumnos imaginar situaciones e incluso hacerles vivir esas situaciones a través de proyectos de investigación realistas y cercanos a ellos. Zolkower y Bresan (2012), indican que si un contexto es significativo, servirá como punto de partida para la actividad matemática del alumno, movilizará el sentido común y diversas estrategias.

A pesar de los avances en el estudio de los contextos como elemento clave para la enseñanza de las matemáticas y del consenso de su uso en Geometría, la cuestión de cómo el uso de uno u otro contexto impacta en el diseño de tareas para la enseñanza de la geometría y como apoya a la construcción de nuevos conocimientos, sigue en discusión. Montes (2021) resalta la importancia de estudios relacionados con el diseño y uso de tareas en la formación de docentes. No obstante, las investigaciones se centran mayoritariamente en docentes en ejercicio de educación secundaria y no en la formación de maestros de primaria. Consideramos como Bernabeu et al. (2022), que se desconocen muchos elementos en cuanto a las tareas y las interacciones entre el maestro y los estudiantes para el desarrollo del pensamiento geométrico. Teniendo en cuenta el panorama general que se ha relatado, las siguientes preguntas guiaron esta investigación: ¿Qué tipo de tareas para la enseñanza de la geometría, proponen FM de primaria al observar y analizar imágenes de diversos contextos? y ¿cómo los contextos utilizados impactan en el diseño de tareas respecto a conocimientos y competencias, que aseguren el aprendizaje de algún objeto geométrico?, para intentar avanzar en la respuesta a dichas preguntas ,la presente comunicación se propone por objetivo: describir el tipo de tareas para la enseñanza de la geometría que proponen FM de primaria al observar y analizar imágenes que evocan diversos contextos, discutiendo, el impacto que tienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

REFERENTES TEÓRICOS

Existe actualmente un consenso respecto a la formación de docentes, en tanto debe asegurar el desarrollo de competencias y habilidades necesarias para la enseñanza de las matemáticas. Aprender a

planificar y diseñar tareas escolares que promuevan el desarrollo de pensamiento geométrico y que estén acordes con los lineamientos curriculares actuales, (enfoque competencial), es uno de los grandes desafíos. Mallart et al. (2018) reconoce la selección, creación y adaptación de tareas matemáticas como una oportunidad de formación y de desarrollo docente. Guberman y Leikin (2013) indican que, al proponer una serie de tareas matemáticas a FM, que involucran conceptos, propiedades y procedimientos, tanto matemáticos, como didácticos, ellos progresan en la adquisición de competencias y conocimientos, que se adaptan a cualquier contenido. Sin embargo, aun cuando existe este consenso sobre la importancia de la construcción y uso de tareas y problemas en la formación de profesores de matemáticas, se sabe también que tanto los maestros en servicio como los FM, presentan dificultades para diferenciar tareas rutinarias de no rutinarias y fallan muchas veces en la elección de formatos adecuados para fomentar el aprendizaje y desarrollar las competencias necesarias en sus alumnos (Galant, 2013).

Diversos autores han abordado el diseño de tareas en el marco de la formación de FM, se ha evidenciado como: emergen procesos matemáticos como visualización, conjetura y prueba cuando los FM proponen tareas (Santa et al., 2018); se desarrollan proceso como la argumentación y prueba mediante la propuesta de tareas de tipo investigativas por parte de los FM (Vieira et al., 2013) y se ha analizado el conocimiento de los FM, los fenómenos presentes en la gestión de la instrucción y los conocimientos evidenciados en las soluciones propuestas (Gamboa et al., 2015; Herbst, 2012).

Por su parte, Ponte (2004), distingue cuatro tipos de tareas matemáticas: ejercicios, problemas, de exploración y de investigación. Los dos primeros tipos buscan particularmente que el estudiante ponga en acción los conocimientos relativos a un objeto matemático, se caracterizan por tener bien definido lo que hay que hacer y pueden terminar siendo rutinarios si siempre se conoce la información necesaria para su solución. Por otra parte, las tareas de exploración y de investigación, son tareas abiertas, que requieren de elementos que el estudiante no conoce, la diferencia entre ambos radica en su dificultad, pues la exploración refiere a un momento inicial en la construcción del objeto matemático, mientras la investigación involucra procesos, tiempo, recursos e incluso otras disciplinas, lo que la constituye en una situación con mayor grado de dificultad. De acuerdo con esto, los ejercicios y las tareas de exploración son usualmente más asequibles de resolver. Mientras que las tareas de investigación y los problemas poseen un grado mayor de complejidad; de ahí que los ejercicios sean tareas tradicionalmente de duración corta y un proyecto, por ejemplo, sea de duración larga.

Finalmente, desde el reconocimiento de que el contexto en el que se propone una tarea es un aspecto importante por considerar, pues dependiendo de estos puede aumentarse o disminuirse su dificultad, se sigue la propuesta de Martínez (2003), quien propone una clasificación de los contextos utilizados en la enseñanza de las matemáticas: a) Problemas de contexto real: en donde se ubican aquellos problemas matemáticos que están enmarcados en una práctica real de las matemáticas. b) Problemas de contexto simulado: son aquellos que provienen de la realidad de los estudiantes, pero que retoman solo algunos elementos, constituyéndose en una reproducción parcial o simulación. c) Problemas de contexto evocado: aquí se encuentran aquellas situaciones propuestas por el docente que permiten imaginar un marco o situación donde se da un hecho determinado.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se sigue una metodología cualitativa de carácter exploratorio-descriptivo, usando técnicas de análisis de contenido la cual permite hacer inferencias replicables y válidas a partir de un texto a los contextos en donde se utiliza (Krippendorff, 2013), en este caso, obtener inferencias de las producciones escritas por los FM correspondientes a sus tareas geométricas propuestas y el contexto del programa de formación de futuros maestros de educación primaria.

Se trabajó con un grupo de 148 FM estudiantes del segundo año del grado de educación primaria de una universidad española quienes respondieron una tarea profesional en grupos (3 a 5 personas). La asignatura en la cual se llevó a cabo la implementación se denomina “Espacio y forma” y es la única

relativa a la geometría y su didáctica dentro del programa de formación. Los conocimientos previos de los FM son fundamentalmente los que poseen de su formación escolar. Los datos de la investigación son las 57 producciones escritas de los diferentes grupos, las cuales se recolectaron y sistematizaron en la plataforma Moodle y en hoja de cálculo Excel, donde se construyó una matriz de cada tarea propuesta y de cada grupo de trabajo. El desarrollo de la tarea profesional se realizó en modalidad online, sincrónico con la profesora que imparte la asignatura. Se realizó una primera entrega preliminar y días después la entrega final, las indicaciones para realizar la tarea, fueron dadas por la profesora. Cabe mencionar que en los protocolos se les solicitaba a los estudiantes incluir fotografías y/o dibujos para complementar la respuesta a cada una de las preguntas de la tarea.

La tarea profesional que se utilizó se denomina: "De la realidad a la geometría en educación primaria", esta pretende reconocer el tipo de tareas geométricas que los FM son capaces de diseñar, analizando el valor y el papel que juegan los contextos para estos diseños. La tarea profesional está dividida en tres partes, pero sólo se hará mención a la primera parte (foco de esta comunicación). Para el desarrollo se presentan 10 imágenes y un vídeo de lugares, fenómenos y/o situaciones reales (animales, movimientos, lugares naturales, construcción arquitectónica, etc.) a partir de las cuales, los futuros maestros deben diseñar y formular una tarea/problema geométrico.

El análisis se realiza de la siguiente manera: a) Lectura individual de cada una de las tareas geométricas propuestas por cada grupo. Se organiza la información, teniendo en cuenta aspectos que estructuraban cada tarea como: sus datos, el tipo de pregunta, su relación con el contexto, el enfoque y algunas características que permitieran diferenciarlas. b) Construcción de categorías para agrupar las tareas propuestas por los futuros maestros. Estas categorías emergieron a medida que se identificaban rasgos comunes en las diferentes propuestas, desde la primera lectura y posteriormente mediante la agrupación de todas ellas, tal como se propone en (Arbeláez y Onrubia, 2014) (ver Tabla 1).

Tabla 1. Categorías emergentes para la agrupación de las tareas diseñadas por futuros maestros

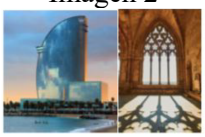
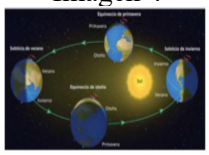
Agrupación	Características
A1: Comparación de unidades	Las tareas pertenecientes a esta categoría implican la conversión de unidades y/o equivalencias entre unidades y el establecimiento de razones y proporciones. Fundamentalmente son tareas centradas en cálculos que pretenden soluciones rápidas
A2: Aritmetización de elementos geométricos	En esta categoría se ubican aquellas tareas que solicitan la determinación de áreas, superficies y volúmenes Son tareas que presentan en su mayoría todos los datos (p.e medida de las dimensiones).
A3: Configuración-composición de figuras	En este caso se ubican las tareas en las que se solicita la determinación de elementos que no están explícitos en el enunciado, involucran figuras geométricas y a veces requieren de la composición y descomposición. En ocasiones usan material manipulativo.
A4: Estructura geométrica	Las tareas ubicadas en esta categoría son aquellas orientadas al análisis de propiedades y características de diversas figuras geométricas. Se suele solicitar justificaciones.
A5: Interdisciplinariedad	Las tareas de esta categoría son las que consideran y combinan aspectos matemáticos y de otras disciplinas que están inmersas o combinadas con aspectos geométricos.

Finalmente se realiza una c) clasificación de las tareas considerando, por una parte, las categorías de tipos de tareas propuestas por Ponte (2004): ejercicios, problemas, de exploración y de investigación. Por otra parte, los tipos de contexto, siguiendo a Martínez (2003): real, simulado o evocado. Se construye un instrumento de análisis que incluye la imagen y/o vídeo presentado en la tarea profesional; la tarea geométrica propuesta por cada grupo; las categorías asignadas según el tipo de tarea; el uso del contexto y las agrupaciones emergentes, tal y como se muestra en la Tabla 2.

RESULTADOS

Al analizar las respuestas de los futuros maestros, se encuentra que la mayoría de los grupos (89,6%) proponen tareas geométricas que se sitúan en la categoría de ejercicio (p.e. las formuladas por G_7 y G_4, Tabla 2).

Tabla 2. Instrumento de análisis de las tareas propuestas por futuros maestros

Imagen 1 	Tarea propuesta por G_7	*"Si el virus Covid19 tiene una longitud de 15 nanómetros, cuántos micrómetros hará, si 1 nanómetro = 0,001 micrómetro"*	
	Tipo de tarea	Contexto	Agrupación
	Ejercicio	Evocado	A1: Comparación de unidades
Imagen 2 	Tarea propuesta por G_4	*"Jesús Miquel va de vacaciones a Lleida. Han visitado un edificio emblemático y como deberes de verano tuvo que calcular el área de uno de los arcos. La guía ha dicho que el área del arco es el doble que un edificio de Barcelona. Este edificio está compuesto por un triángulo rectángulo y un rectángulo. El rectángulo mide 90 m por 30 m y la altura del triángulo es 12 m. Calcula el área del arco teniendo en cuenta las indicaciones dadas"*	
	Tipo de tarea	Contexto	Agrupación
	Ejercicio	Simulado	A2: Aritmetización elementos geométricos
Imagen 3 	Tarea propuesta por G_{17}	*"Esta tablilla es un hallazgo matemático antiguo, en ella se ve cómo un terreno se dividía en diferentes partes delimitadas por líneas rectas. Imagina que debes dividir de nuevo los terrenos, tendrás que dividir el terreno entre 10 personas y deben ser formas con los lados rectos. ¿Cómo dividirías los terrenos?"*	
	Tipo de tarea	Contexto	Agrupación
	Problema	Real	A3: Configuración – composición en geometría
Imagen 4 	Tarea propuesta por G_{23}	*"¿Cómo afecta a la forma de la Tierra en determinar la estación en la que nos encontramos teniendo en cuenta la traslación como el movimiento de rotación?"*	
	Tipo de tarea	Contexto	Agrupación
	De exploración	Real	A4: Estructura Geométrica

Las tareas planteadas por los futuros maestros y clasificadas como ejercicios apuntan fundamentalmente a habilidades básicas como la conversión de unidades, las equivalencias entre medidas y las transformaciones entre diferentes sistemas de medición. Son tareas de fácil solución que en algunas ocasiones incluyen elementos geométricos no usuales, por ejemplo, otra tarea planteada a partir de la imagen 1 es la siguiente: "Calcula el área de la bacteria de la imagen recordando cómo se calcula el área de una elipse: $A = \pi ab$; siendo a y b los semiejes mayor y menor de la elipse. El semieje mayor mide 3 cm y el menor 2" G_8. En este caso, los futuros maestros asocian a la figura de una bacteria con una elipse, desconociendo el contexto que se desprende de la imagen y reduciendo la tarea a un cálculo directo que no requiere de la visualización de la imagen.

Si bien hay un intento por incluir elementos geométricos en los ejercicios que proponen los futuros maestros, este tipo de tareas se caracterizan por plantear todos los datos necesarios para su solución, rescatar características usuales de las figuras como número de lados y/o ángulos, así como representaciones en su posición usual. Son en su mayoría tareas de identificación y aplicación, en tanto implican razonamientos sencillos, donde el objetivo es identificar algún objeto matemático y mediante la aplicación de un procedimiento conocido proponer una solución. (López y Contreras, 2014)

Por otra parte, el 9,3% de los futuros docentes propone tareas de exploración las cuales poseen un diseño un poco más estructurado, en éstas se reconocen elementos de configuración de figuras geométricas donde el interés está en determinar formas resultantes, describir elementos como radios de circunferencias o pirámides en las cúspides de algunos edificios, y en un nivel más complejo el estudio de propiedades de figuras no usuales como los arcos de una circunferencia. Los razonamientos y las preguntas que se diseñan en este caso son de tipo abierto, lo que permite una mayor discusión con los estudiantes e incluyen en muchos casos elementos del entorno como identificación de sólidos en edificios o formas en las bacterias del hogar. Finalmente, únicamente el 1,1% construye tareas que se

pueden considerar problemas según la tipología de Ponte (2004), en éstos priman las preguntas abiertas que sitúan a quien la resuelve en un contexto dado como el cálculo de alturas de edificios y árboles y en ocasiones se propone el trabajo con material manipulable para cumplir con ciertas condiciones por ejemplo la propuesta planteada por el G_{11} ante la imagen de las mochilas arahuacas: "Estas bolsas de tela cuentan con distintos diseños geométricos. Sin embargo, hay dos que no tienen ninguna figura geométrica. ¿Podrías identificarlas? Usando cartulina intenta recrearlas, ¿Qué orientación o criterio has tenido para realizarlo?".

Los futuros maestros al analizar las imágenes/vídeos, hicieron interpretaciones del contexto que evocan dichas imágenes, las cuales no siempre fueron adecuadas, dando lugar a la formulación de tareas "forzadas" o en las que se desconoce las características que se muestran en la imagen. Al respecto, la mayoría propone tareas en contextos simulados (en promedio el 78,6%), en donde se fija mayoritariamente la atención en objetos matemáticos como polígonos y algunos sólidos en el contexto de construcción de edificios. Sin embargo, el uso de estos elementos se hace de manera indiscriminada y poco real utilizando dimensiones imposibles, como edificios muy grandes o distancias en el espacio muy pequeñas en contra de los contextos originales de las imágenes, así como de la solución posible. Por citar un ejemplo G_{26} propone la siguiente tarea para la imagen 4 tabla 2: "En esta imagen tenemos distintas figuras geométricas. ¿qué medida corresponde a cada figura? Teniendo en cuenta la distancia de las distintas posiciones de la tierra: 5 cm / 14 cm / 7 cm", lo que omite el contexto en el que se está trabajando y asigna valores aleatorios para convertir la actividad en un ejercicio de cálculo.

Un 15,4% se basa en un contexto evocado, contextos que, si bien provienen de una situación real y con los elementos necesarios para la construcción de un objeto geométrico, terminaron desconociendo completamente los objetos matemáticos a estudiar y centrándose en propiedades y características que no dan riqueza a la tarea propuesta. Finalmente, un 5,9% de las tareas, se centran en un contexto real, aunque siempre de forma parcial. A pesar de disponer de elementos extra-matemáticos y de la cotidianidad, los futuros maestros, centran la atención en la visualización directa de los objetos geométricos que se están trabajando, desconociendo las características reales del contexto y de igual manera las propiedades o procesos intrínsecos a los objetos con los que se trabaja.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Planificar, diseñar y/o seleccionar tareas escolares adecuadas es una práctica profesional relevante del trabajo del docente. Las tareas que los maestros proponen determinan en gran medida oportunidades de aprendizaje para los alumnos (Chamoso y Cáceres, 2019; Ponte, 2004; Sullivan et al., 2010).

Los resultados encontrados coinciden con Braga y Belver (2016), quienes evidencian que el diseño y adaptación de tareas es una labor que puede resultar inusual y difícil para los profesores, por lo que se hace necesario que, desde los programas de formación se promuevan los conocimientos y las competencias necesarias para realizar con éxito este tipo de actividad. El proponer a los futuros maestros de primaria diseñar tareas geométricas evidenció la ausencia de conocimientos y habilidades (no solo en matemáticas sino también en otras ciencias) lo que se constituye en un justificante más para abordarlos en la formación de futuros profesores. En este sentido coincidimos con Shawer (2017) quien recomienda formar en conocimientos sobre el contenido y pedagógicos, así como plantear modelos de reflexión que incluyan resultados de investigación en la formación de futuros docentes.

Una dificultad a la hora de plantear tareas geométricas en contextos no matemáticos emerge a la hora de construir tareas de tipo interdisciplinar Rebello et al. (2017) afirman que para que haya emergencia de conocimiento en una tarea de tipo interdisciplinar, es necesario que el estudiante tenga un esquema robusto en el contexto inicial, además, debe saber cómo aplicar estos conceptos matemáticos en tareas de las demás ciencias. En este sentido, si bien las propuestas de los futuros maestros intentan incluir elementos de otras disciplinas, normalmente son forzados y pierden riqueza a la hora de consolidar las preguntas finales constituyéndose la mayoría en ejercicios debido seguramente a la falta de conocimientos tanto de las otras disciplinas como de la geometría, En tanto aquellos grupos que logran

construir tareas de exploración, evidencian una mirada más amplia de la geometría estable en toda la tarea profesional y detectable en el lenguaje que usan así como en las actividades que proponen.

Finalmente, cabe mencionar que hubo un mejor nivel en el diseño de tareas geométricas, en los grupos de futuros maestros que demostraban mayores conocimientos geométricos de base (uso de lenguaje especializado, apoyo de sus propuestas con imágenes geométricas, denominación correcta de figuras, etc.). Estos grupos conocían objetos en otras ciencias y proponían no solo ejercicios, sino también, tareas de exploración en la que conectaban sus conocimientos de base con la tarea propuesta. Esto coincide con el planteamiento de Susac et al. (2018), cuando señalan que aquellos estudiantes que muestran una mayor comprensión de los conceptos matemáticos y controlan el contexto de la física, son capaces de transferirlo a otros contextos, como el de las finanzas. En nuestro caso, se espera continuar desarrollando esta línea de investigación, mejorando las tareas profesionales y de esta manera apoyar el desarrollo de prácticas docentes cada vez más idóneas para la enseñanza de la geometría en la educación primaria.

Referencias

Arbeláez, M. y Onrubia, J. (2014). Análisis bibliométrico y de contenido. Dos metodologías complementarias para el análisis. *Revista de Investigaciones UCM, 14*(23), 14-31.

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Interacción entre la maestra y los estudiantes en la enseñanza aprendizaje de clases de polígonos. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 179-187). SEIEM.

Burgués, C., y Sarramona, J. (Eds.). (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic.* Generalitat de Catalunya.

Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (18), 59-69.

Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics.* National Association for the Education of Young Children.

Gamboa, G., Badillo, E., & Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: Geometría y medida en Educación Primaria. *PNA*, *10*(1), 1–24.

Galant, J. (2013). Selecting and sequencing mathematics tasks: Seeking mathematical knowledge for teaching. *Perspectives in Education, 31*(3), 34–48.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2003) *Matemáticas y su didáctica para maestros*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. (2013). *Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores*. [Comunicación]. I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Granada, España.

Guberman, R., y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 33–56.

Herbst, P. (2012b). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *AIEM. Avances de Investigación En Educación Matemática*, *1*, 5–22.

Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology* (3rd ed). Sage.

Lavy, I. y Hourigan, M. (2019). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 341-361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. https://bit.ly/39NrMgQ

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: Prácticas sociales y tecnología. *Evaluación e Investigación, 3*(1), 7-30.

López, E. y Contreras, L. (2014) Análisis de los problemas matemáticos de un libro de texto de 3o ESO en relación con los contenidos de geometría plana. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 425-434). Salamanca: SEIEM.

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018). Case study on mathematics pre-service teachers' difficulties in problem posing. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1465– 1481. https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Martínez, M. (2003). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. [Tesis doctoral no publicada], Barcelona, Universitat Autónoma de Barcelona.

Montes, M. (2021). Introducción al Seminario: Investigación cualitativa en educación matemática. En P. Diago, D. Yáñez, M. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 53 – 63). SEIEM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Paredes, Z., Iglesias, M. y Ortiz, J. (2007). Sistemas de cálculo simbólico y resolución de problemas en la formación inicial de docentes. *Revista Enseñanza de la Matemática, 12-16*, 89-107.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos, y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Graó.

Rebello, N. S., Cui, L., Bennett, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2017). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D., Jonassen,(Ed.) *Learning to Solve Complex Scientific Problems (1st edition*, pp. 223-246). https://doi.org/10.4324/9781315091938-10

Santa, Z., Jaramillo, C., & Gualdrón, É. (2018). Colectivo de profesores-con-doblado-de-papel en tareas de geometría escolar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1092–1112.

Shawer, S. (2017). Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy and teacher training. *Teaching and Teacher Education, 63*, 296-313. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.12.017

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142. https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163

Susac, A., Bubic, A., Kazotti, E., Planinic, M. y Palmovic, M. (2018). Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and non-physics students. *Physical Review Physics Education Research, 14*(2), 1-15. https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020109

Vieira, G., Monteiro, R., y Gomez, N. (2013). Simetria no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *27*(46), 613–630.

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2

Zolkower, B. & Bressan, A. (2012). Educación matemática realista en Pochulu M. & Rodríguez M. (Eds.), *Educación Matemática. Aportes a la Formación Docente desde Distintos Enfoques Teóricos* (1ª ed., pp. 175–200). UNGS–EDUVIM.

[i] Estudio desarrollado en el marco de los proyectos: 72220049 financiado por ANID/PFCHA Chile; PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIN/AEI/10.13039/501100011033; "FEDER Una manera de hacer Europa" y PID2019-104964GB-I00 MICINN.

TAREAS PROPUESTAS POR FUTUROS DOCENTES SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Tasks posed by future teachers on the topic of function

Vargas, M. F.[a], Fernández-Plaza, J. A.[b] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[b]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Dada la relevancia de las tareas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, en particular, el diseño y la selección adecuada de éstas, el presente trabajo se enfoca en caracterizar un conjunto de tareas propuestas por docentes de matemáticas en formación sobre el tema de funciones, pensadas para estudiantes de secundaria, específicamente noveno y décimo año, que es donde se concentra el estudio de este tema en el currículo costarricense. Para ello, recogemos las propuestas y las analizamos empleando el método de análisis de contenido, utilizando un sistema de categorías a priori que permite clasificar cada una de las tareas propuestas. Como síntesis, observamos una evidente dificultad por parte los futuros docentes para plantear tareas sobre el tema, además de un predominio de tareas no muy enfocadas en representaciones simbólicas y con baja demanda cognitiva.

Palabras clave: *demanda cognitiva, diseño de tareas escolares, formación de profesorado, función real de variable real, enseñanza de la matemática.*

Abstract

Due to the relevance of the tasks in mathematics the teaching and learning processes and, particularly, in the design and adequate selection of these, the present work focuses on characterizing a set of tasks proposed by secondary mathematics future on the concept of function, intended for ninth and tenth graders, levels in which the study of this topic is concentrated in the Costa Rican curriculum. We collect the proposals and analyse them using the content analysis method with a system of a priori categories that allows classifying each of the proposed tasks. As a synthesis, we perceive that future teachers show clear difficulties when posing tasks on the topic. In addition, we also detect a predominance of tasks focused not too much on symbolic representations and with low cognitive demand.

Keywords: *cognitive demand, mathematics teaching, real function of a real variable, school tasks design, teachers training.*

INTRODUCCIÓN

La relación entre el tipo de tarea a la que los estudiantes se enfrentan cuando se les enseña matemáticas y las matemáticas que aprenden ha sido objeto de investigación durante muchos años (Breen y O'Shea, 2010). Diversos estudios afirman que lo que los estudiantes aprenden está determinado en buena medida por las tareas que los docentes asignan (Godino et al., 2016; Sullivan et al., 2013), ya que las tareas transmiten mensajes sobre qué son las matemáticas y qué implica conocerlas, es decir, las tareas transmiten significados matemáticos a los que se refieren. Además, se considera que mediante las tareas se brindan realmente oportunidades de aprendizaje al alumnado (Anthony y Walshaw, 2009) al permitir desarrollar habilidades de razonamiento y pensamiento (Lee et al., 2016).

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2023). Tareas propuestas por futuros docentes sobre el concepto de función. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 539–546). SEIEM.

De hecho, algunos investigadores piensan que, por encima de cualquier otra acción en el aula, plantear tareas que inviten al estudiante a pensar por sí mismo es el principal estímulo para el aprendizaje (Sullivan et al., 2013). De ahí que el diseño y selección de tareas resulte fundamental para una enseñanza efectiva (Margolinas, 2014).

Por tanto, consideramos que los docentes deben ser capaces de plantear tareas que promuevan un aprendizaje oportuno en su alumnado (Lee et al., 2016). Ahora bien, se debe considerar que tanto el diseño como la selección de tareas está influenciada por las metas del docente, así como por su conocimiento y creencias sobre las matemáticas (Sullivan et al., 2013).

Como parte de una investigación más amplia en la que abordamos el significado de función real de variable real en futuros docentes de matemáticas, en este trabajo planteamos el objetivo de caracterizar las tareas sobre funciones que proponen los futuros docentes en formación cuando planifican la enseñanza de este tópico. Esperamos que, además de obtener indicios de su forma de concebir este concepto, los resultados permitan reflexionar sobre el tipo de tareas que se diseñan para este tópico.

MARCO TEÓRICO

Se entiende por tarea matemática escolar "una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje" (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244).

Para el estudio de tareas matemáticas, se han empleado distintos modelos y enfoques que permiten su caracterización y análisis. Una clasificación ampliamente empleada tiene que ver con el nivel de demanda cognitiva potencial de la tarea, propuesta por Stein et al. (1996) y empleado en muchas investigaciones (p. e. Tekkumru-Kisa et al., 2015). En este trabajo utilizaremos esos cuatro niveles de demanda cognitiva, pero, además, ampliaremos el análisis de las tareas con las categorías utilizadas en Vargas et al. (2018), construidas a partir de las propuestas por Moreno y Ramírez (2016) y Gómez y Romero (2015). Estas categorías están organizadas en dos bloques:

- Aspectos del contenido matemático y su significado: considerando el marco teórico basado en el significado de un concepto matemático escolar desarrollado por Rico (2012), analizamos algunos elementos que conforman el significado de la función: el contenido, los sistemas de representación, el manejo de sistemas de representación que se solicita, el contexto y la situación.
- Aspectos de aprendizaje o cognitivos: analizamos la demanda cognitiva potencial, dado que se considera como criterio para determinar una buena tarea (Stein et al., 1996) y la capacidad matemática que fomenta la tarea.

En el siguiente apartado describimos con detalle el sistema de categorías empleado.

METODOLOGÍA

Abordamos una investigación cualitativa de naturaleza descriptiva (Cohen et at., 2018), la cual se llevó a cabo con 24 docentes en formación de la Universidad de Costa Rica, específicamente estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Sede de Occidente. En el momento de la recogida de datos se encontraban matriculados en un curso de cuarto año, que se consideró dada la cantidad de estudiantes matriculados. Aunque era un curso en el que se estudian aspectos meramente matemáticos, lo cierto es que en este punto de la carrera los estudiantes ya han aprobado la mayoría de los cursos del área educativa, e incluso ya han llevado a cabo su semestre de práctica profesional.

Para la recolección de los datos se utilizó un cuestionario compuesto por cuatro preguntas, de las que la última era: "Redacte tres tareas que podría plantearle a un estudiante de secundaria para

estudiar el tema de funciones. En cada caso explique lo que pretende con la tarea propuesta". Las respuestas a dicho enunciado conforman el objeto de análisis de este trabajo. La aplicación del instrumento se desarrolló en el mes de noviembre del año 2022. Mediante el análisis de contenido (Cohen et at., 2018) procedimos a estudiar cada una de las tareas propuestas según cada una de las categorías planteadas.

Sistema de categorías

De forma similar a Vargas et al. (2018), del bloque de significado hemos analizado los siguientes aspectos:

1. Contenido: se refiere a qué tópico sobre funciones se aborda en cada tarea.

2. Sistemas de representación: en este caso prestaremos atención a los distintos sistemas de representación que aparecen en la formulación de la tarea. Estos pueden ser: verbales, gráficos, numéricos, simbólicos y/o tabulares.

3. Tipo de transformación: bajo la línea de los sistemas de representación; siguiendo a Duval (1999), analizaremos si la tarea propuesta engloba en su resolución un *tratamiento* dentro de un mismo sistema, o bien requiere de una *conversión* de un sistema a otro. Por ejemplo, una tarea de tratamiento sería el cálculo algebraico de imágenes y preimágenes; mientras que una tarea de conversión sería graficar una función dado su criterio.

4. Situación: identificamos la situación PISA (OECD, 2016) en que se presentan las tareas propuestas, considerando: personales, sociales, laborales o científicas.

5. Contexto: con base en nuestro marco teórico, tomamos en cuenta los distintos contextos matemáticos para el tema de funciones, para facilitar su clasificación, tomamos en cuenta el contexto algebraico, gráfico o aplicado que puede tener el tema.

Por su parte, del bloque la categoría cognitiva analizamos:

1. Demanda cognitiva: para analizar este aspecto utilizamos la taxonomía de Stein et al. (1996), en la cual se consideran cuatro tipos de tareas, según la demanda cognitiva. La caracterización de estas puede observarse en la tabla 1.

Tabla 1. Taxonomía sobre demanda cognitiva propuesta por Stein et al. (1996)

Demanda cognitiva	Descripción
Memorización	Son aquellas tareas que piden al estudiante recordar hechos, reglas o definiciones. La respuesta implica una reproducción exacta y memorizada. No se emplea ningún tipo de procedimiento.
Procedimiento sin conexión	El fin de la tarea es aplicar algún algoritmo para resolver un problema; sin embargo, se trata más de aplicar que de comprender. Estas tareas se caracterizan porque no requieren explicaciones y porque no hay ambigüedad sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo
Procedimiento con conexión	Estas tareas, aunque tienen un procedimiento para ser resueltas, su intención va más allá del proceso mismo, intentando desarrollar niveles más profundos de comprensión acerca de los conceptos e ideas matemáticas. Su principal característica es que no son tareas que pueden resolverse solo conociendo el algoritmo, requieren cierto esfuerzo por parte del estudiante.
Hacer matemática	Estas son las tareas de mayor demanda cognitiva, ya que requieren un pensamiento no algorítmico, pues el camino de resolución no está predeterminado. Requieren una verdadera comprensión de los conceptos, procesos, propiedades y así establecer relaciones entre estos.

2. Capacidad matemática fomentada: consideramos oportuno analizar las capacidades matemáticas que las distintas tareas estimulan. Para ello adoptamos las 7 capacidades empleadas en los marcos

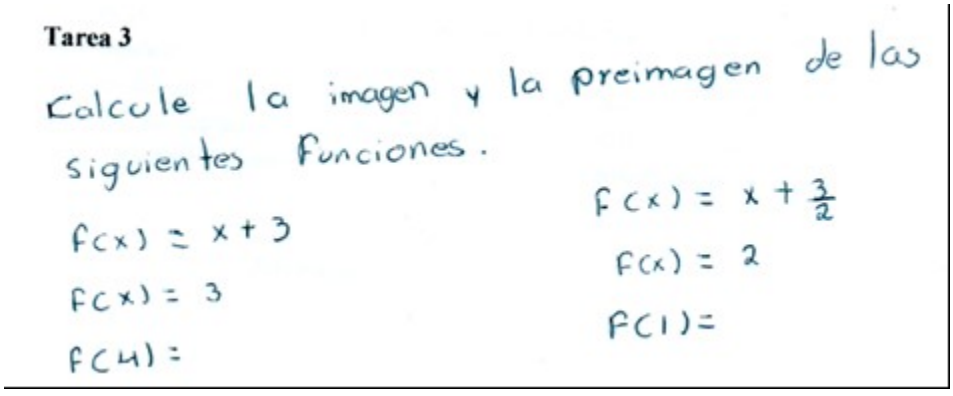
de PISA (OECD, 2016), las cuales son: comunicación; matematización; representación; razonamiento y argumentación; diseño de estrategias para resolver problemas; utilización de operaciones y lenguaje simbólico formal; y utilización de herramientas matemáticas.

Proceso de análisis

Detectamos, mientras se implementaba el cuestionario, que redactar una tarea sobre el tema de funciones no fue una acción fácil para los participantes. Algunos de ellos dejaron la pregunta sin contestar y otros confesaron no ser capaces de redactarla completamente, por lo que se les sugirió plantear al menos la idea, es decir, que describiera algún tipo de tarea que recordaran de su paso por la educación secundaria. Finalmente, se contó con 56 propuestas para analizar (entre ideas y tareas planteadas). Es importante destacar que un primer análisis nos permitió detectar que algunas de las ideas planteadas no presentan todos los datos que permitirían resolver la tarea. Pese a esto, esas tareas formaron parte del análisis, considerando la intención con la que fueron planteadas.

A modo de ejemplo, mostramos una de las tareas propuestas y presentamos el análisis que se desarrolló. En la Figura 1 se observa la tarea 3 propuesta por el estudiante E1. En relación con el contenido sobre funciones, en este caso aborda el cálculo de imágenes y preimágenes en un contexto algebraico (simbólicamente). El sistema de representación empleado es el verbal y simbólico, donde lo que se solicita o espera que haga el resolutor es un procesamiento o tratamiento del sistema (sin conexión con otro sistema de representación).

Figura 1. Tarea propuesta por un participante



En cuanto a la demanda cognitiva potencial de la tarea, se trata de un procedimiento sin conexión en el que la principal capacidad matemática que se fomenta es el manejo de operaciones y lenguaje simbólico. Finalmente, se puede notar que la tarea se plantea en una situación científica, específicamente matemática.

De forma análoga, procedimos a analizar las 56 propuestas de tareas. Mostramos ahora los resultados obtenidos para cada uno de los aspectos considerados.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos respecto a la categoría *contenido* (de funciones) que se aborda. Tal como se aprecia, las tareas más frecuentes tienen que ver con graficar funciones y resolver problemas, lo cual no resulta extraño al tratarse del tema de funciones. No obstante, debe enfatizarse en que precisamente las tareas de resolución de problemas son los casos que menos pudieron concretar los participantes, planteando algunas ideas, pero sin lograr redactar la tarea completamente.

Tabla 2. Contenido matemático de las tareas propuestas

Contenido	Frecuencia
Identificar relaciones en la cotidianidad	7

Tabla 2. Contenido matemático de las tareas propuestas

Contenido	Frecuencia
Concepto de función	2
Determinar imagen, preimagen, dominio y codominio	7
Calcular la pendiente de una función lineal	2
Determinar el criterio de una función lineal	2
Análisis de una función lineal	1
Determinar el criterio de una función inversa	1
Representar gráficamente funciones	15
Análisis de gráficas de funciones	1
Resolución de problemas	17
Determinar el valor de un logaritmo	1

Por otra parte, llama la atención una tarea relacionada con el logaritmo, pues si bien es cierto podemos definir la función logarítmica, la tarea propuesta se trata más bien del cálculo de un logaritmo utilizando sus propiedades sin realmente abordarse la noción de función logarítmica.

En cuanto a la categoría *sistema de representación* empleado, se halló una tarea en la que se emplearon diagramas de Venn, otra con representación tabular, 7 de ellas con una representación gráfica, 15 con representación simbólica, 12 que utilizan únicamente el verbal y las 21 tareas restantes combinaron el sistema verbal con el simbólico. Esto llama mucho la atención, pues, aunque la representación gráfica tiene alta presencia en el tema de funciones, lo cierto es que las tareas suelen proponer graficar una función y no tanto el analizar la situación o tarea a partir de una gráfica. Esto es importante, pues el dominio de los distintos sistemas de representación en ambos sentidos es fundamental para lograr una verdadera comprensión del tema.

De hecho, ese aspecto se complementa tras analizar el *manejo del sistema de representación* que se solicita; en este caso 30 de las tareas demandan un tratamiento del sistema dado (principalmente del algebraico) y otras 26 solicitan una conversión, es decir el paso a otro sistema de representación. Tal como se señaló, esa conexión entre sistemas de representación se reduce básicamente al paso del sistema algebraico al gráfico en tareas que solicitan realizar la gráfica de la función, a lo cual hay que agregar que en todos los casos se trata de funciones lineales y cuadráticas, pese a que la conversión es algo que debe fomentarse, sería importante poder hallar más diversidad en el tipo de conexiones que se establece.

Respecto al *contexto*, y como se puede intuir de los contenidos tratados, el que predomina es el contexto aplicado (24 tareas); sin embargo, pese a que los futuros docentes plantean ideas de tipos de problemas que se pueden abordar, pocos son capaces de completar la redacción del problema, lo cual sin duda pone de manifiesto poco dominio al respecto. Otras 22 tareas se encuentran en un contexto gráfico (análisis o representación) y 10 más en un contexto algebraico.

En cuanto a la *situación*, la Tabla 3 muestra los resultados obtenidos. Sin duda, lo que más llama la atención es la cantidad de tareas planteadas dentro de una situación meramente matemática. Pues esto significa que incluso hay tareas de aplicación cuya situación sigue siendo matemática.

Tabla 3. Situación en la que se plantean las tareas

Situación	Frecuencia
Científica- Matemática	32
Científica- Biológica	2
Social	15
Laboral	4

Tabla 3. Situación en la que se plantean las tareas

Situación	Frecuencia
Personal	3

Pese a esto, debe reconocerse la variedad de situaciones, ya que, aunque aparecen en menor medida, es positivo que un tema con tanta aplicación como son las funciones sea visualizado de esta manera por los futuros docentes.

Un aspecto que resulta fundamental al caracterizar una tarea en matemática es su *demanda cognitiva potencial*, en ese sentido los resultados fueron: (a) 1 tarea era de memorización; (b) 34 tareas categorizadas como un procedimiento sin conexión, es decir, consisten en la aplicación de algún algoritmo; (c) 18 se clasificación como procedimiento con conexión y (d) 3 de ellas se encontraron en el nivel más alto, hacer matemática. En este caso, aunque la mayoría de las tareas se encuentran en uno de los niveles más básicos (procedimiento sin conexión) es alentador encontrar una cantidad significativa de tareas que podrían potencialmente tener un alto nivel de demanda cognitiva, y decimos potencialmente, pues recordemos que algunos problemas tendrían que redactarse mejor para ser considerados como una tarea aplicable en secundaria.

Finalmente, se analizó la *competencia matemática* que se fomenta en cada una de las tareas, los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2. Es importante aclarar que una misma tarea puede fomentar más de una capacidad matemática. Uno de los aspectos más destacables, es que, pese a que muchas de las tareas estaban en un contexto aplicado, estas no siempre implicaban una matematización, pues una gran cantidad de ellas fueron planteadas para ser resueltas sin que necesariamente el contexto o la situación jugaran un papel relevante en la solución.

Figura 2. Capacidad matemática fomentada en las tareas propuestas



Por otra parte, destaca la capacidad de manipular la parte simbólica y la poca presencia del uso de herramientas tecnológicas, pues solo dos de las tareas mencionadas sugieren el uso de un software para facilitar la visualización.

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo era analizar y caracterizar tareas propuestas por futuros profesores de matemática para el tema de funciones, esto dadas las distintas dificultades manifestadas por parte de estudiantes, e incluso profesores, respecto a este tópico (Amaya De Armas et al., 2021; Yoon y Thompson, 2020).

Tal como se señaló, un primer resultado detectado fue la dificultad presentada por los participantes para plantear una tarea de manera completa y correcta, sobre todo al tratase de problemas

contextualizados, en donde fueron capaces de plantear ideas, pero no siempre pudieron concretarla. Con respecto al contenido abordado en las tareas, llama la atención la poca presencia que tiene en sí la conceptualización del objeto función, y es que a pesar de que no es objeto de estudio de este trabajo, este resultado se relaciona con la respuesta obtenida en otra de las preguntas del instrumento, donde se evidenció que los futuros docentes confunden el concepto de función con el de relación, por lo que no es de extrañar que el estudio de esta diferencia no destacara entre las tareas analizadas.

Otro aspecto interesante es que, a diferencia de las tareas planteadas en los libros de texto (Vargas et al., 2022), aquí el contexto algebraico tiene menos presencia, lo cual es positivo pues deja un poco de lado la idea de que la matemática se limita a la manipulación simbólica de elementos. La situación y los contextos que se presentaron dejan ver que, pese a que los futuros docentes tienen claro que el tema de funciones tiene gran variedad de aplicaciones, aún falta dominio del tema para poder materializar tareas de aplicación, incluso poder conectar la matemática con otras ciencias.

Uno de los resultados interesantes de Stein et al. (1996) tiene que ver con la tendencia del docente a reducir el nivel de demanda potencial de la tarea. Aunque en este estudio se pudieron detectar tareas de los cuatro niveles considerados, se detecta cierta tendencia a las tareas que demandan un procedimiento sin conexión. Esto llama bastante la atención ya que se ha constatado que las tareas deberían conducir a formas más rigurosas de pensamiento (Kessler et al., 2015). Charalambous (2008) argumenta que un factor influyente en esto es el conocimiento del docente. Particularmente, nosotros creemos además que se relaciona con la forma en la que se entiende el contenido; es decir, el significado que se da a las funciones y las dificultades manifestadas al respecto; pues si el tema se maneja de forma parcial, resulta muy difícil explotar toda la riqueza del contenido mediante una tarea. Esta idea debe ampliarse con nuevos estudios que verifiquen la relación entre el significado que se le da a un contenido matemático y la capacidad para plantear tareas escolares que lo desarrollen.

Y es que el diseño de tareas por parte de los docentes es un tema que ha sido poco abordado (Lee et al., 2016), por lo que los resultados aquí mostrados invitan a ampliar el estudio hacia las siguientes cuestiones: ¿cuáles son las principales dificultades que manifiestan los docentes al diseñar una tarea?, ¿cómo se puede enriquecer la práctica de plantear tareas? Consideramos que los resultados obtenidos pueden repercutir en la formación de profesores, aportándoles herramientas que permitan la toma de decisiones; resulta fundamental que los docentes sean capaces de seleccionar y diseñar tareas variadas que enriquezcan el significado de este concepto en su alumnado.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del marco del proyecto de generación del conocimiento "Proyectos de Educación STEAM y aprendizaje escolar", PID2021-128261NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER Una manera de hacer Europa, y del Proyecto N° 540-C1-343 inscrito ante la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

Referencias

Amaya De Armas, T., Castellanos, A. G. y Pino-Fan, L. R. (2021). Competencias de profesores en formación en matemáticas al transformar las representaciones de una función. *Uniciencia, 35*(2), 1-15. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.12

Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics.* International Academy of Education.

Breen, S. y O'Shea, A. (2010). Mathematical Thinking and Task Design. *Irish Mathematical Society Bulletin, 66*, 39-49. https://doi.org/10.33232/bims.0066.39.49

Charalambous, C. Y. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. En O. Figuras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). PME.

Cohen, L. Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8th ed.). Routledge.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110

Gómez, P. y Romero, L. (2015). Enseñar matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 61-88). Ediciones Pirámide.

Kessler, A. M., Stein, M. K. y Schunn, C. D. (2015). Cognitive Demand of Model Tracing Tutor Tasks: Conceptualizing and Predicting How Deeply Students Engage. *Technology, Knowledge and Learning*, online. https://doi.org/10.1007/s10758-015-9248-6

Lee, K. H, Lee E. J. y Park, M. S. (2016) Task Modification and Knowledge Utilization by Korean Prospective Mathematics Teachers. *Pedagogical Research, 1*(2), 54-66. https://doi.org/10.20897/lectito.201654

Margolinas, C. (Ed.). (2014). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. ICMI.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de* Secundaria (pp. 243-257). Ediciones Pirámide.

OECD. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*. OECD Publishing.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63.

Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 255-288.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (Eds.). (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning.* Springer.

Tekkumru-Kisa, M., Stein, M. K. y Schunn, C. (2015). A Framework for Analyzing Cognitive Demand and Content-Practices Integration: Task Analysis Guide in Science. *Journal of Research in Science Teaching, 52*(5), 659-685. https://doi.org/10.1002/tea.21208

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). SEIEM.

Vargas, M.F., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Fernández-Plaza, J.A. (2022). Análisis de las tareas propuestas por libros de texto costarricenses para el tema de funciones. *XXXV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Santo Domingo*, República Dominicana.

Yoon, H. y Thompson, P. (2020). Secondary teachers' meanings for function notation in the United States and South Korea. *Journal of Mathematical Behavior, 60*, 100804. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100804

CAMBIOS EN LOS PROCEDIMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE SEXTO CURSO EN PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Sixth graders' procedure changes in multiplicative structure problems

Zorrilla, C., Fernández, C. e Ivars, P.

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio examina cómo cambian los procedimientos de estudiantes de sexto curso cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa con fracciones tras haber participado en una instrucción basada en el principio de variación considerando dos conexiones: la conexión entre los diferentes problemas de estructura multiplicativa y la conexión de los problemas de estructura multiplicativa con números naturales y con fracciones. Para analizar estos cambios, utilizamos un pre-test y un post-test que consistían en 9 problemas de estructura multiplicativa. Los resultados muestran tres grupos de cambios en los procedimientos: progresión, adaptación y dificultades.

Palabras clave: *problemas de estructura multiplicativa, principio de variación, educación primaria, estrategias, representaciones.*

Abstract

This study examines how sixth graders' procedures change when they solve multiplicative structure problems with fractions after participating in an instruction based on the variation principle that considers two connections: connecting multiplicative structure problems and connecting multiplicative structure problems with natural numbers and fractions. To analyse these changes, we used a pre-test and post-test that consist of 9 multiplicative structure problems. The results show three groups of changes in procedures: progression, adaptation, and difficulties.

Keywords: *multiplicative structure problems, variation principle, primary school, strategies, representations*.

INTRODUCCIÓN

En la década de los 80, se inició una línea de investigación que identificó que la resolución de problemas de estructura multiplicativa con números racionales suponía un reto para los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria (e.g., Fischbein et al., 1985; Levain, 1992). Fischbein et al. (1985) mostraron que una de las causas de estas dificultades eran las generalizaciones procedentes de los números naturales: el producto de una multiplicación siempre será un número mayor que ambos factores, y el cociente de una división siempre será un número menor que el dividendo. Es decir, los estudiantes mostraban no prestar atención a la invariancia de la estructura multiplicativa de los problemas cuando se trabaja con números naturales o con números racionales (Levain, 1992; Zorrilla et al., 2022). A pesar de que estas investigaciones se realizaron varias décadas atrás, estudios de los últimos años han documentado que las dificultades con los números racionales persisten (González-Forte et al., 2022; Zorrilla et al., 2022, 2023), por lo que es necesario seguir explorando cómo los estudiantes aprenden en la transición de los números naturales a los racionales cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. Para superar las dificultades, estudios previos han propuesto promover dos conexiones: la conexión entre los diferentes problemas de estructura multiplicativa (operaciones inversas, Downton, 2009), y la conexión de los problemas de estructura multiplicativa con números naturales y con fracciones (Levain, 1992). La enseñanza

Zorrilla, C., Fernández, C. e Ivars, P. (2023). Cambios en los procedimientos de los estudiantes de sexto curso en problemas de estructura multiplicativa. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 547–554). SEIEM.

centrada en el principio de variación ha permitido implicar a los estudiantes en estos dos tipos de conexiones (Sun, 2019). Sin embargo, no conocemos estudios que se hayan centrado en explorar empíricamente cómo los estudiantes aprenden en la transición de los números naturales a los racionales cuando participan en una instrucción centrada en la enseñanza con variación que promueve ambas conexiones en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.

MARCO TEÓRICO

Nos centramos en (i) los problemas de estructura multiplicativa, y en las representaciones y estrategias usadas por los estudiantes en estos problemas, y (ii) la enseñanza con variación.

Problemas de estructura multiplicativa: Representaciones y estrategias

En este estudio nos centramos en los problemas de isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983). En estos problemas, al reducirse una de las cuatro cantidades a una unidad, los estudiantes deben identificar las relaciones que se establecen entre tres cantidades, dando lugar a tres clases de problemas si atendemos a la cantidad desconocida (Greer, 1992): multiplicación, cuya incógnita es la cantidad total; división-partitiva, cuya incógnita es el número de elementos por grupo y; división-medida, cuya incógnita es el número de grupos. Empson y Levi (2011) identificaron las siguientes estrategias en estudiantes cuando resolvían estos problemas con fracciones:

- *Representación de cada grupo*. Se representan todas las cantidades, que se utilizan para contar, sumar o restar hasta obtener la respuesta al problema. La representación puede darse de dos modos: dibujando las cantidades; o empleando símbolos matemáticos para mostrar las relaciones matemáticas, i.e., adición repetida.
- *Estrategias de agrupamiento y combinación*. A diferencia de la estrategia previa, solo se representan las cantidades que se consideran necesarias. Las cantidades se agrupan aditivamente hasta alcanzar lo que Empson y Levi (2011) denominan "cantidades amigables" (p. 57) con las que trabajar de una manera más sencilla. Normalmente, estas cantidades se tratan de números naturales.
- *Estrategias multiplicativas*. Los estudiantes usan relaciones multiplicativas a través de la formación de grupos.

Por otro lado, la comunicación de la resolución del problema requiere representaciones (Dahl, 2019). Mainali (2021) categorizó los modos de representación como: gráfico, que incluye recursos figurativos (dibujos, diagramas…); verbal, que incluye el lenguaje natural (escrito u oral); numérico, que incluye la presentación de datos/conceptos de forma ordenada y; algebraico, que incluye el uso de fórmulas, símbolos, etc. Asimismo, Duval (2017) también destacó la importancia de los cambios producidos entre/dentro de los distintos modos (i.e., *transformaciones*), los cuales dividió en dos tipos: *tratamiento* y *conversión*. Por un lado, el tratamiento consiste en la transformación dentro del mismo modo de representación (e.g., cambiar de fracción a expresión con coma dentro del modo de representación numérico). Por otro lado, la conversión consiste en la transformación entre modos de representación (e.g., de modo de representación gráfico a modo de representación verbal).

La variación como herramienta para el aprendizaje

Hay dos tradiciones para la enseñanza con variación: la tradición sueca, con la teoría de variación del aprendizaje (Marton, 2015); y la tradición china, con la enseñanza *Bianshi* (Cai y Nie, 2007; Sun, 2019).

En cuanto a la tradición sueca, Marton (2015) indicó que para dominar un objeto es necesario discernir y tomar en consideración sus características necesarias. Estas características necesarias, denominadas *características críticas*, se tratan de las características *claves específicas* necesarias en

el aprendizaje del objeto. Marton (2015) identificó tres patrones de (in)variación: contraste, generalización y fusión. En este estudio nos centramos en la generalización. Si discernir el color verde fuera el objeto de aprendizaje, la generalización consistiría en mantener el color "verde" invariante mientras variarían otras características (e.g., forma del objeto).

En lo que respecta a la tradición china, la enseñanza *Bianshi* considera condiciones en el objeto de aprendizaje que, a través de su variación, promueven el discernimiento. Cai y Nie (2007) y Sun (2019) distinguen tres tipos de actividades comunes en esta enseñanza: un problema con múltiples cambios (OPMC, por sus siglas en inglés), que consiste en proponer nuevos problemas en base a un problema original ya resuelto; un problema con múltiples soluciones (OPMS), que consiste en brindar la oportunidad de resolver un problema de diferentes maneras; y múltiples problemas con una solución (MPOS), que consiste en el uso de una única estrategia que resuelva un grupo de problemas cuya estructura lo permite.

En nuestro estudio, diseñamos la instrucción teniendo en cuenta las actividades de variación identificadas en Cai y Nie (2007) y el patrón de generalización de Marton (2015). Antes y después de la instrucción se realizó un pre-test y un post-test con el objetivo de explorar cómo la instrucción diseñada apoya/obstaculiza el aprendizaje de los estudiantes. En esta investigación contestamos a la pregunta de investigación: ¿Cómo cambian los procedimientos (estrategias y representaciones) usados por estudiantes de 11-12 años cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa tras participar en una instrucción basada en la enseñanza con variación?

MÉTODO

Se diseñó un módulo de enseñanza de ocho sesiones, siendo la primera y la última sesión un pre-test y un post-test. Las sesiones 2-7 se centraban en una instrucción basada en la enseñanza con variación (Cai y Nie, 2007; Marton, 2015). Se diseñaron 5 conjuntos de problemas que se trabajaron durante las 6 sesiones de la instrucción. Cada conjunto de problemas está formado por 3 problemas en los que se mantiene la misma situación y números, pero se varía el tipo de problema (Greer, 1992), i.e., multiplicación, división-partitiva y división-medida (variación OPMC). Para ilustrar esta variación, en la Tabla 1 se observa cómo en el conjunto de problemas 1 se varió el problema original de acuerdo a la incógnita, mientras la situación y los números se mantenían invariantes (3 paquetes de 4 kg son 12 kg). En cada conjunto de problemas, los 3 problemas se presentaron en diferente orden. Se esperaba que los estudiantes conectaran los tres tipos de problemas de estructura multiplicativa al discernir que la situación y los números eran los mismos y que solo variaba la incógnita.

Tabla 1. Conjunto de problemas 1 (variación OPMC)

Problema de multiplicación	Problema de división-partitiva	Problema de división-medida
Tenemos 3 paquetes.	Tenemos 3 paquetes.	Tenemos algunos paquetes.
Cada paquete pesa 4 kilos.	Todos los paquetes pesan lo mismo.	Cada paquete pesa 4 kilos.
¿Cuántos kilos tenemos en total?	Tenemos 12 kilos en total.	Tenemos 12 kilos en total.
	¿Cuántos kilos pesa cada paquete?	¿Cuántos paquetes tenemos?

Por otra parte, entre los conjuntos de problemas se mantuvieron la situación y los tipos de problemas (incógnita) y se variaron los números: números naturales en el *conjunto 1*, una fracción propia y dos números naturales en el *conjunto 2*, una fracción impropia y dos números naturales en el *conjunto 3*, dos fracciones propias y un número natural en el *conjunto 4* y dos fracciones impropias y un número natural en el *conjunto 5*. Al mantener invariantes la situación e incógnita del problema (mismo tipo de problema) y variar los números (variación OPMC), se pretendía apoyar a los estudiantes en la transición de los números naturales a las fracciones en la resolución de problemas de estructura multiplicativa mediante la conexión de estos problemas con ambos conjuntos numéricos. Asimismo, se pretendía que los estudiantes observaran que podían resolver el mismo tipo de problema (ya fuera con fracciones o naturales) usando una misma estrategia

(variación MPOS). Entre los conjuntos de problemas 1-2, 2-3 y tras el conjunto 5, se incluyeron problemas adicionales que no conservaban la misma situación ni los mismos números en los 3 problemas. Al mantener invariante el tipo de problema se pretendía que los estudiantes generalizaran la estructura de los problemas de estructura multiplicativa (Marton, 2015). Los estudiantes trabajaron todos los problemas en pequeños grupos, y posteriormente se discutieron las distintas estrategias en gran grupo (variación OPMS).

Por otro lado, las sesiones 1 y 8 se centraban en la resolución de un cuestionario individual. El pre-test y el post-test estaban formados por 9 problemas de estructura multiplicativa: 3 problemas de multiplicación (M), 3 problemas de división-partitiva (P) y 3 problemas de división-medida (Q). Entre estos problemas, se usaron problemas con números naturales (N); una fracción (Q1); dos fracciones propias (Q2) y dos fracciones, siendo una fracción impropia presentada como número mixto (Q2-m). La Tabla 2 muestra la estructura subyacente a cada problema, subrayando su incógnita (para pre-test véase Zorrilla et al., 2022). Se diseñaron 4 versiones de los cuestionarios, que presentaban los problemas de manera aleatoria. A los estudiantes se les indicó que debían justificar sus respuestas y que no podían utilizar dispositivos electrónicos en su resolución.

Tabla 2. Características de los problemas de pre-test y post-test

	Pre-test			Post-test		
	M	P	Q	M	P	Q
N	$8 \times 2 = \underline{16}$	$5 \times \underline{4} = 20$	$\underline{6} \times 4 = 24$			
Q1	$3 \times 2/3 = \underline{2}$	$3/4 \times \underline{16} = 12$	$\underline{8} \times 1/4 = 2$	$8 \times 3/8 = \underline{3}$	$2\ 1/2 \times \underline{2} = 5$	$\underline{16} \times 1/2 = 8$
Q2	$1/4 \times 3 = \underline{3/4}$	$6 \times \underline{1/8} = 3/4$	$\underline{5} \times 1/10 = 1/2$	$1/5 \times 2 = \underline{2/5}$	$6 \times \underline{1/9} = 2/3$	$\underline{3} \times 1/9 = 1/3$
Q2-m				$5\ 1/3 \times 3/4 = = \underline{4}$	$10 \times \underline{1/3} = = 3\ 1/3$	$\underline{6} \times 4/5 = = 4\ 4/5$

En este estudio participaron 17 estudiantes de 6º curso de Educación Primaria (11-12 años) de un centro público de la provincia de Alicante, cuyos nombres fueron modificados en el estudio para garantizar su anonimato. Los estudiantes se agruparon en 6 pequeños grupos de 2-4 personas para las sesiones. Estos estudiantes ya habían trabajado previamente con el concepto de fracción y con los algoritmos de la adición, sustracción y multiplicación de fracciones. Además, habían recibido instrucción sobre los cuatro algoritmos con números decimales. Las sesiones duraron aproximadamente 45 minutos.

Los datos analizados son las respuestas de los 17 estudiantes al pre-test y post-test. Este análisis constó de cuatro fases:

- Fase 1. Se analizaron las estrategias de los estudiantes en cada problema de acuerdo a las categorías de Empson y Levi (2011). Además, a partir de un análisis inductivo se refinaron las categorías iniciales y se generaron dos nuevas categorías *algoritmo* y *algoritmo inverso* (primera fila, Tabla 3). Llamamos estrategias informales a las estrategias que no implican el uso del algoritmo formal: representación de cada grupo, y a las estrategias aditivas y multiplicativas de agrupamiento y combinación.
- Fase 2. Se analizaron los modos de representación utilizados según la categorización de Mainali (2021) y las transformaciones -tanto tratamientos como conversiones- (primera columna, Tabla 3).
- Fase 3. Las fases previas permitieron identificar 15 procedimientos correctos (Tabla 3) y 8 procedimientos incorrectos (Tabla 4), obteniendo estos cruzando las estrategias identificadas en la fase 1 y las representaciones y sus transformaciones identificadas en la fase 2. A estos procedimientos se añadieron *respuestas en blanco* y *procedimientos no identificados*.
- Fase 4. Se analizaron los cambios en los procedimientos de los estudiantes entre el pre-test y el post-test.

Tabla 3. Procedimientos correctos identificados en pre-test y post-test

	Representación de cada grupo	Estrategia aditiva de agrupamiento y combinación	Estrategias multiplicativas		
			Estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación	Algoritmo	Algoritmo inverso
Sin conversiones/ tratamientos	X	X	X	X	X
Tratamiento a expresión con coma	X	X	X	X	X
Tratamiento a expresión con coma del resultado				X	
Tratamiento a número natural				X	
Tratamiento a expresión con coma y conversión a modo gráfico	X				
Tratamiento a expresión con coma y a número natural				X	
Tratamiento a número natural y conversión a modo gráfico	X				

Tabla 4. Procedimientos incorrectos identificados en pre-test y post-test

	Representación de cada grupo	Estrategias multiplicativas		
		Estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación	Algoritmo	Algoritmo inverso
Error en número de grupos representados	X			
Tratamiento erróneo a expresión con coma	X		X	X
Conversión a modo gráfico e interpretación errónea	X			
Tratamiento erróneo de operación/ agrupamientos		X	X	
Identificación de algoritmo erróneo			X	

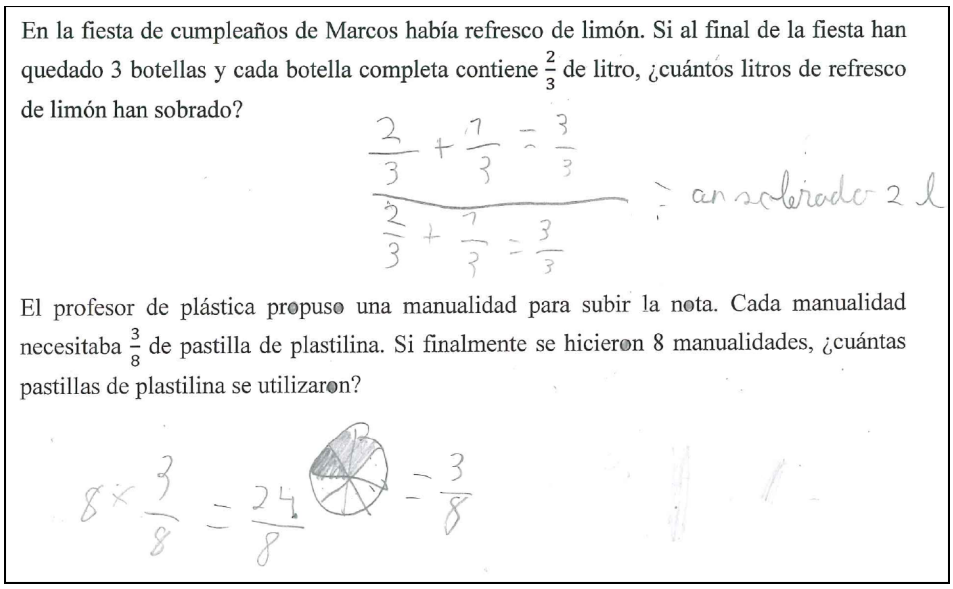
RESULTADOS

Agrupamos los cambios identificados en tres grupos: (i) cambios que mostraron progresión en los procedimientos, (ii) cambios que mostraron adaptación en los procedimientos y (iii) cambios que mostraron dificultades. Con relación a los cambios de progresión, identificamos tres:

- *De procedimientos incorrectos a usar procedimientos de estrategias informales*. En el pre-test se usaron *identificación de algoritmo erróneo*, *respuestas en blanco* o *procedimientos no identificados*; mientras que en el post-test se usaron procedimientos de estrategias informales que reflejaron su conocimiento sobre las relaciones entre las cantidades correctamente (e.g., procedimientos de representación de cada grupo), en ocasiones con algunas dificultades (e.g., error en número de grupos representados).
- *De procedimientos incorrectos o uso de procedimientos de estrategias informales a identificar la operación formal*. En el pre-test se usaron *identificación de algoritmo erróneo*, *respuestas en blanco*, *procedimientos no identificados* o procedimientos de estrategia informal (e.g., procedimientos de las estrategias aditiva o multiplicativa de agrupamiento y combinación); mientras que en el post-test se identificó la operación formal (i.e., procedimientos de algoritmo o algoritmo inverso), aunque en ocasiones se presentaron

dificultades en el tratamiento de la fracción y/o de la operación. La Figura 1 muestra las respuestas de Melania en los problemas M-Q1. En pre-test Melania recurrió a un procedimiento de estrategia informal aditiva de agrupamiento y combinación sin conversiones/tratamientos. En cambio, en post-test optó por un procedimiento de algoritmo con la multiplicación sin conversiones/tratamientos.

Figura 1. Respuestas de Melania a M-Q1 de pre-test y post-test



- *De identificar la operación formal, pero con dificultades en el tratamiento a expresión con coma, a usar procedimientos de estrategias informales*. En el pre-test, aunque identificaron el algoritmo correcto, realizaron un tratamiento erróneo a expresión con coma; mientras que en el post-test usaron procedimientos de estrategias informales como representación de cada grupo que les permitieron resolver los problemas correctamente.

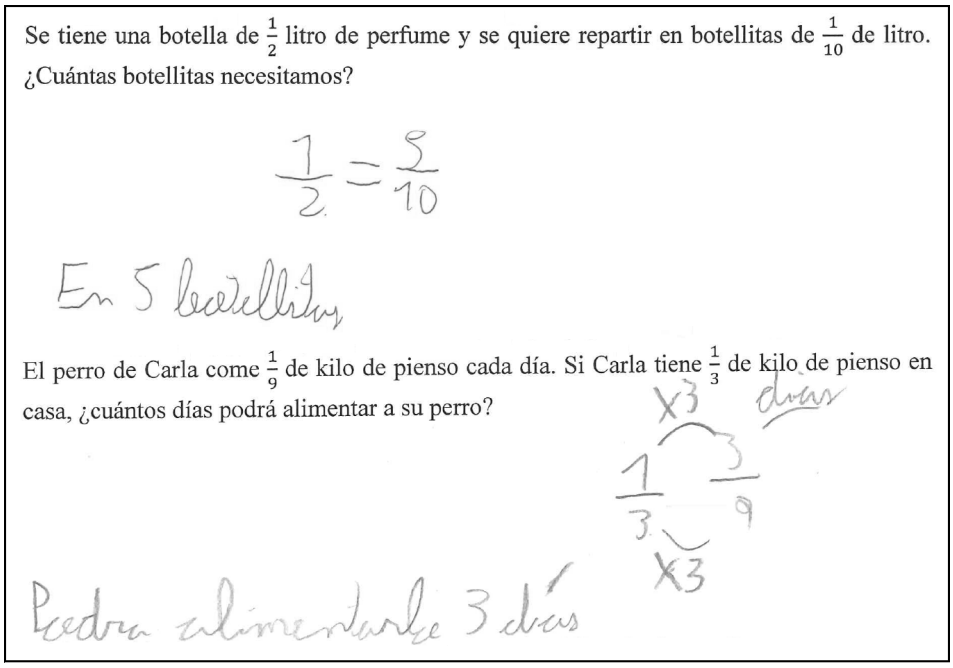
Identificamos dos cambios que mostraban adaptación de los procedimientos:

- *Uso de procedimientos de estrategias informales*. En el pre-test y el post-test se usaron procedimientos de estrategias informales correctamente (e.g., de representación de cada grupo o de estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación). La Figura 2 muestra las respuestas de Jose en los problemas Q-Q2. Jose usó un procedimiento de estrategia informal multiplicativa de agrupamiento y combinación sin conversiones/tratamientos tanto en pre-test como en post-test.
- *Uso de procedimientos de operación formal*. En el pre-test y el post-test usaron procedimientos de algoritmo o de algoritmo inverso correctamente.

Por último, hallamos tres cambios en los que se observaron dificultades en los estudiantes:

- *De identificar la operación formal o usar procedimientos de estrategias informales a procedimientos incorrectos*. En el pre-test identificaron la operación formal (algunos con dificultades en el tratamiento) o usaron procedimientos de estrategia informal como la aditiva de agrupamiento y combinación, mientras que en el post-test usaron *identificación de algoritmo erróneo* o *procedimientos no identificados*.
- *Uso de procedimientos de estrategias informales, con dificultades*. En el pre-test y post-test usaron procedimientos de estrategias informales como la estrategia multiplicativa de agrupamiento y combinación, pero en el post-test se evidenciaron dificultades en la determinación del número de grupos a representar.

Figura 2. Respuestas de Jose a Q-Q2 de pre-test y post-test



- *Identificación de la operación formal, con dificultades en su tratamiento*. En el pre-test y post-test usaron el algoritmo, pero en el post-test se evidenciaron dificultades en los tratamientos a expresión con coma y/o de la operación.

Por último, cabe comentar que hubo estudiantes que usaron procedimientos incorrectos en ambos test. Estos estudiantes usaron en el pre-test y el post-test procedimientos incorrectos, *procedimientos no identificados* o *respuestas en blanco*.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se han analizado los cambios en los procedimientos de los estudiantes cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa tras haber participado en una instrucción basada en el principio de variación. El diseño pareció ayudar a algunos estudiantes a superar sus dificultades. Esto se observa en los cambios identificados de progresión como *de procedimientos incorrectos a usar procedimientos de estrategias informales* o *de procedimientos incorrectos o uso de procedimientos de estrategias informales a identificar la operación formal*. Por un lado, de acuerdo con los resultados de Empson y Levi (2011), el primer cambio muestra que los estudiantes disponen de otras estrategias diferentes de la operación formal que les permiten resolver el problema. Este cambio podría deberse al formato OPMS seguido en las discusiones grupales de la instrucción, que potenciaba la discusión de distintas estrategias de resolución (informales y el algoritmo) para un mismo problema. Por otro lado, el segundo cambio muestra que los estudiantes fueron capaces de identificar la operación formal que resolvía el problema de estructura multiplicativa en el post-test. Este cambio podría deberse al diseño mediante OPMC, el cual permitía observar las conexiones entre las estructuras de los diferentes tipos de problemas y la transición desde el uso de números naturales a fracciones en un mismo tipo de problema. Por otro lado, otros estudiantes fueron capaces de adaptar sus procedimientos (de algoritmo o de estrategias informales) cuando trabajaban con distintos tipos de fracciones.

Sin embargo, también se identificaron cambios que muestran dificultades en algunos estudiantes. Estos cambios señalan que la transición de los naturales a las fracciones en la resolución de problemas multiplicativos no es sencilla, ya que algunos estudiantes mostraron dificultades en la adaptación de sus procedimientos; por ejemplo, cuando trabajaban con fracciones impropias dadas como números mixtos o con fracciones no decimales (*Identificación de la operación formal, con*

dificultades en su tratamiento). Cabe mencionar que otras variables que no fueron objeto de estudio (socioculturales, lingüísticas, cognitivas, etc.) podrían haber influido sobre los resultados.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Ministerio de Universidades (FPU19/02965).

Referencias

Cai, J. y Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM*, *39*(5-6), 459-473. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0042-3

Dahl, H. (2019). "He's so fast at drawing" – Children's use of drawings as a tool to solve word problems in multiplication and division. En U. T. Jankyist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4475-4482). ERME.

Downton, A. (2009). It seems to matters not whether it is partitive or quotitive division when solving one step division problems. En R. Hunter, B. Bicknell y T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 161-168). MERGA.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals*. Heinemann.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

González-Forte, J.M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 22,* 47-70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situation. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). McMillan.

Levain, J. P. (1992). La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(2), 139-156. https://doi.org/10.1007/BF00588053

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *9*(1), 1-21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315816876

Sun, X. H. (2019). Bridging whole numbers and fractions: problem variations in Chinese mathematics textbook examples. *ZDM*, *51*(1), 109-123. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01013-9

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Zorrilla, C., Fernández, C., Cañadas, M. C. e Ivars, P. (2022). How primary school students perform multiplicative structure problems with natural and rational numbers. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 155-164). PME.

Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. (2023). Estrategias para resolver problemas de estructura multiplicativa con naturales y fracciones. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 25*, e15, 1-19. https://doi.org/10.24320/redie.2023.25.e15.4407

Pósteres

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO PARA LA PREVENCIÓN DEL FRACASO ESCOLAR EN MATEMÁTICAS

Significant learning for preventing school failure in mathematics

Aguayo Cornejo, A. R. y Sáez-Maestro, E.

ESCUNI Centro Universitario de Educación

El presente trabajo analiza el papel que juega el aprendizaje significativo de las matemáticas y el papel de las creencias en la reducción del fracaso escolar en la etapa de Educación Primaria. En su momento predominaban las teorías de que el fracaso escolar asociado con las matemáticas se debía únicamente al desarrollo de los alumnos a nivel académico. Sin embargo, múltiples estudios (Gómez-Chacón, 2004; González-Pienda et al., 2003) han identificado varios factores involucrados en el fracaso escolar, como son, entre otros, la metodología de enseñanza y el aspecto afectivo-emocional. Respecto de la metodología de enseñanza, se ha considerado relevante para el estudio por el papel fundamental que juega dentro del proceso educativo. Más concretamente, este trabajo se va a concentrar en la metodología del aprendizaje significativo, entendida como "la metodología cuya naturaleza fundamental es la estructura cognitiva, lo que facilitará el aprendizaje subsecuente" (Salazar, 2018). Esta metodología fomenta que el alumno sea matemáticamente competente, evitando la mecanización y la memorización en favor de una comprensión y entendimiento real de la materia.

Otro de los factores que se asocian al fracaso escolar son las emociones y las creencias, consideradas como determinantes en la consecución de objetivos (Gómez-Chacón, 2004). El marco emocional y afectivo es fundamental para mejorar el aprendizaje, especialmente en lo que respecta a la motivación y al desarrollo de emociones positivas. Respecto a esta cuestión, el tratamiento del error cometido por el alumno en su proceso de aprendizaje es fundamental. Los errores se han conceptualizado tradicionalmente como un mal a extinguir, pero diversos autores los consideran actualmente como oportunidades de aprendizaje ya que pueden contribuir positivamente al proceso de enseñanza (Rico, 1998).

Basándose en este marco conceptual se presenta una propuesta didáctica consistente en una serie de actividades de creación propia del área de matemáticas dirigidas a los distintos cursos de Educación Primaria. Estructurada a partir de aprendizaje significativo y con un enfoque constructivista, busca que los alumnos sean los protagonistas y adquieran un aprendizaje matemático real. Esta propuesta se estructura en diferentes fases, desde una evaluación previa a una proyección posterior. Su aplicación supondría un cambio en la realidad del aprendizaje de los alumnos. En su creación se ha tenido en consideración el aspecto afectivo-emocional, y el desarrollo de sentimientos positivos hacia las matemáticas mediante un aprendizaje más activo.

Referencias

González-Pienda, J. A., Núñez, J. C. Álvarez, L., González, P., González-Pumariega, S. y Roces, C. (2003). ¿Cómo explicar tanto fracaso en el aprendizaje de las Matemáticas? *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 8*(10), 349-358.

Gómez-Chacón I. M. (2004). *Proceso de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. González (Eds.). *Educación Matemática*, 69-109. Grupo Editorial Iberoamericana.

Salazar, J. (2018). Evaluación de aprendizaje significativo y estilos de aprendizaje: alcances, propuesta y desafíos en el aula. *Tendencias Pedagógicas,* 31, 31-46. https://doi.org/10.15366/tp2018.31.001

Aguayo Cornejo, A. R. y Sáez-Maestro, E. (2023). El aprendizaje significativo para la prevención del fracaso escolar en matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 557). SEIEM.

CREENCIAS SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS ESENCIALES DE UN BUEN PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Essential characteristics of a competent mathematics teacher

Aguilar-González, Á.[a] y Muñiz-Rodríguez, L.[a]

[a]Universidad de Oviedo

La pregunta de qué define a un buen profesor de matemáticas es crucial en la formación y evaluación de los docentes. A partir de las respuestas de seis grupos de trabajo (con un total de 24 alumnos matriculados) en la asignatura del Investigación e Innovación en Didáctica de la Matemática en el Máster en Investigación e Innovación en Educación Infantil y Primaria de la Universidad de Oviedo, podemos observar que existen ciertas características que se repiten, lo que indica que hay un conjunto de habilidades y competencias que se consideran esenciales que nos permiten profundizar en las creencias de los profesores de matemáticas en formación a través del modelo de identidad ampliado de Löfström et al. (2010).

En general, se puede ver que hay un fuerte énfasis en la importancia de la capacidad de adaptación, la innovación y la creatividad. Esto refleja la necesidad de los profesores de matemáticas de estar siempre al tanto de los avances en la disciplina y de adaptarse a las necesidades de los estudiantes. Otra característica comúnmente mencionada es el dinamismo, que se refiere a la capacidad del profesor para mantener la atención de los estudiantes y mantener un ritmo adecuado para el aprendizaje. La importancia de la motivación también se destaca en varias respuestas, lo que indica que los profesores de matemáticas deben ser capaces de inspirar a sus estudiantes y hacer que se sientan interesados y comprometidos. Otras habilidades y competencias mencionadas incluyen la cercanía, la capacidad de comunicación, la versatilidad en las explicaciones, la capacidad de resolución de problemas, el uso de manipulativos y materiales de enseñanza novedosos, y la capacidad de trabajar en equipo y coordinar con otros docentes. Es interesante observar que algunos grupos enfatizan la importancia de la formación y la educación continua para los profesores de matemáticas, mientras que otros destacan la importancia de la neuroeducación. Estos temas sugieren que los profesores de matemáticas deben estar siempre dispuestos a aprender y mejorar su práctica, y estar abiertos a nuevas ideas y enfoques pedagógicos.

En general, podemos concluir que un buen profesor de matemáticas debe tener una amplia variedad de habilidades y competencias para asegurar que los estudiantes aprendan de manera efectiva y significativa en la línea en la que Rojas, Carrillo y Flores (2012) mencionan. Además, los profesores de matemáticas deben estar dispuestos a aprender y mejorar continuamente, y estar abiertos a nuevas ideas y enfoques pedagógicos. En última instancia, un buen profesor de matemáticas es aquel que puede inspirar y motivar a los estudiantes a aprender y apreciar la disciplina, y ayudarlos a desarrollar habilidades y conocimientos que les permitan tener éxito.

Referencias

Löfström, E., Anspal, T., Hannula, M. S., y Poom-Valickis, K. (2010). Metaphors about "the teacher": Gendered, discipline-specific and persistent? In J. Mikk, M. Veisson, y P. Luik (Eds.), *Teacher's personality and professionalism: Estonian studies in education* (pp. 105–122). Peter Lang.

Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 479 - 485). SEIEM

Aguilar-González, Á. y Muñiz-Rodríguez, L. (2023). Creencias sobre las características esenciales de un buen profesor de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 558). SEIEM.

PROCESOS EN LA CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Processes in mathematical problem posing

Burgos, M.[a], Tizón-Escamilla, N.[b] y Chaverri, J.[c]

[a,b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Costa Rica

Durante las últimas décadas, numerosas investigaciones han centrado su interés en la creación de problemas (Cai et al., 2022). Estos estudios analizan la invención de problemas desde diversas perspectivas, señalando su relevancia como: (i) herramienta para enseñar matemáticas; (ii) objetivo propio de la enseñanza de las matemáticas; (iii) herramienta para realizar investigaciones sobre las capacidades de estudiantes y docentes en formación, o (iv) objeto propio de investigación (Cai y Leikin, 2020). En este sentido, y aunque la mayoría de las investigaciones sobre creación de problemas se centran en los productos de esta actividad, esto es, los problemas elaborados (Baumanns y Rott, 2022), existe un reciente interés por analizar el propio mega-proceso de invención de problemas, poniendo el foco en los procesos cognitivos asociados a la realización de esta actividad (Cai et al., 2022).

En el presente trabajo estudiamos las respuestas proporcionadas por dos maestros en formación a dos tareas distintas de creación de problemas: una en la que se debe elaborar un nuevo problema partiendo de una serie de restricciones sobre los elementos del mismo y otra en la que se debe crear un nuevo problema como variación de uno previo. En particular, analizamos, bajo el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino et al., 2007) y apoyándonos en la caracterización de los elementos de un problema matemático propuesta por Malaspina (2013), los distintos procesos cognitivos implicados en la secuencia de acciones que se llevan a cabo durante el planteamiento de los nuevos problemas. Finalmente, identificamos y valoramos las diferencias en los procesos implicados en la realización de los dos tipos de tareas de creación de problemas propuestos.

Referencias

Baumanns, L. y Rott, B. (2022) The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 110*, 251–269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Cai, J., Koichu, B, Root, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: task variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119-145). PME

Cai, J. y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 129–140). SEMUR.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023). Procesos en la creación de problemas matemáticos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 559). SEIEM.

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO EN TAREAS PROBABILÍSTICAS

Proportional and algebraic reasoning in probabilistic tasks

Burgos, M.[a], Tizón-Escamilla, N.[b] y López-Martín, M. M.[c]

[a,b]Universidad de Granada, [c]Universidad de Almería

La importancia del sentido estocástico se ha visto reforzada en las últimas modificaciones de las normativas curriculares en todos los niveles educativos. Esto incluye el estudio de la incertidumbre, los modelos de probabilidad e inferencia. Además, se reconoce la necesidad de incorporar el sentido algebraico desde Educación Primaria ya que algunos estudiantes encuentran dificultades con el álgebra al abordarlo tarde en la Educación Secundaria (MEFP, 2022). En este sentido, adquiere especial relevancia el razonamiento proporcional, pues, por un lado, es un componente básico del razonamiento probabilístico, que forma parte del análisis del espacio muestral, la cuantificación de las probabilidades y del uso de las correlaciones (Bryant y Nunes, 2012), y por otro lado, desempeña un papel decisivo en la construcción del pensamiento algebraico en los estudiantes (Butto y Rojano, 2010). Esto nos lleva a centrar la atención en las conexiones entre estos tipos de razonamiento, mostrando tanto la complejidad de su interacción como el potencial del contexto de la probabilidad para desarrollar el razonamiento proporcional y el algebraico.

Para ello, en este trabajo analizamos la actividad matemática implicada en una tarea que conecta dos componentes esenciales del razonamiento probabilístico: la identificación de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades y la comprensión del espacio muestral. Para identificar los conocimientos implicados, recurrimos a la noción de función semiótica desarrollada en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino et al., 2022). Además, dado que la resolución de tareas matemáticas se puede hacer con diversos grados de formalización, valoramos el potencial para desarrollar diferentes niveles de razonamiento algebraico, identificando los tipos de representaciones usadas, procesos de generalización y cálculo analítico implicados (Godino et al., 2014).

Referencias

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(31), 55-86.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review* (full report). Londres: The Nuffield Foundation

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2022). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*, 2609-2636. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* Madrid: MEFP.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., y López-Martín, M. M. (2023). Razonamiento proporcional y algebraico en tareas probabilísticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 560). SEIEM.

DIFICULTADES EN TAREAS DE IDENTIFICACIÓN DE ECUACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

Dificulties in identifying equations in word problem solving tasks

Campos-González, C.[a], González-Calero, J. A.[b], Arnau, D.[a] y García-Moreno, M.A.[a]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla – La Mancha

La resolución algebraica de problemas verbales genera importantes dificultades en el alumnado de secundaria. Básicamente, estas dificultades son consecuencia de dos etapas del proceso de resolución que es posible describir separadas de manera teórica. Por un lado, la necesidad de generar un modelo de problema, un entramado de relaciones entre cantidades, a partir de la información proporcionada en el enunciado. Por otro, el proceso de representación, mediante el lenguaje del álgebra, de la información presente en el modelo de problema. Si durante el proceso de creación del modelo del problema es necesario poner en juego una importante habilidad lectora, durante la expresión del modelo del problema mediante ecuaciones es necesaria una importante habilidad en el uso del lenguaje del álgebra. El hecho de que, además, la primera etapa no se finalice de manera completa en las situaciones reales conduce a que durante la expresión de información mediante el lenguaje del álgebra sea necesario ocuparse, de manera simultánea, de la construcción de algunos elementos no finalizados del modelo de problema.

Desde el punto de vista de la práctica educativa la superposición de ambas etapas puede identificarse como una fuente de errores (Soneira, 2022). Desde el punto de vista de la investigación, nos encontramos con una superposición de variables explicativas y con la dificultad para identificar las causas reales de las dificultades del alumnado. Hemos desarrollado una investigación en la que se pretendía reducir la superposición de factores que generan dificultad. El objetivo de la investigación era analizar la influencia de distintas variables en la dificultad del paso del modelo de problema a la representación de las ecuaciones eliminando el efecto de la simultaneidad de procesos. De este modo, hemos planteado tareas en las que se proporcionaba un problema verbal típicamente algebraico y se solicitaba a alumnado de cuarto curso de secundaria que identificara la ecuación que permitiría resolver el problema de manera correcta. En concreto se ofrecían cinco posibles respuestas (cuatro ecuaciones y la opción ninguna es correcta). El cuestionario, formado por 12 tareas, se diseñó atendiendo a tres variables: la *complejidad de la estructura matemática* de los problemas, *la asignación o no de la incógnita* a la cantidad por la que se preguntaba en el enunciado, y la *distancia de la ecuación* respecto a la ecuación considerada estándar.

A manera de pilotaje, el cuestionario se administró a un grupo natural de 23 estudiantes de cuarto de secundaria. Los resultados muestran un importante efecto de las variables *complejidad de la estructura matemática* y *distancia de la ecuación* en la dificultad de la tarea.

Referencias

Soneira, C. (2022). The Use of Representations when Solving Algebra Word Problems and the Sources of Solution Errors. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(5), 1037-1056.

Campos-González, C., González-Calero, J. A., Arnau, D. y García-Moreno, M. A. (2023). Dificultades en tareas de identificación de ecuaciones en la resolución de problemas verbales. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 561). SEIEM.

SENTIDO DE LA ESTRUCTURA REQUERIDO EN LAS TAREAS DE CÁLCULO

Sense of structure required in calculation tasks

Cancec-Murillo, G.[a], Rojano, T.[b], Montoro, A.B.[a] y Flores, P.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]CINVESTAV

Diversas Investigaciones llevadas a cabo con estudiantes de Educación Superior han mostrado que estos enfrentan dificultades en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral, producto de carencias en sus destrezas algebraicas, pues los currículums de Cálculo enfatizan la repetición de fórmulas y reglas y no necesariamente tratan el álgebra como una herramienta para representar estructuras o relacionar procesos o fenómenos físicos y/o geométricos para que luego sea generalizado y aplicado en otros contextos (Artigue, 1998). Por otro lado, el Algebra Transformativa (Kieran, 2004) permite al estudiante convertir una expresión en otras identidades equivalentes aplicando un conjunto de propiedades, de donde surge la necesidad de potenciar en los estudiantes el Sentido Estructural, entendiendo este como la capacidad de apercibimiento del orden interno de los objetos algebraicos (Rojano, 2022). Esta capacidad se requiere respecto a objetos de cálculo, específicamente para los tópicos de límite, derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, que luego son aplicados en asignaturas de Especialidad. A este respecto, Moreno-Armella (2021) señala la importancia de los algorítmicos algebraicos en la evolución del cálculo, por lo que cobra relevancia el desarrollo del sentido de la estructura. Entonces nace la pregunta ¿qué nivel de sentido estructural se requiere para abordar estas temáticas?

El objetivo del poster es mostrar el nivel de sentido estructural requerido para resolver pruebas de cálculo sobre límites, de una institución chilena. Para ello, se hizo un análisis descriptivo de las preguntas relativas al cálculo de límites de las evaluaciones de cálculo para ingenieros, tomando como base los niveles de sentido estructural propuestos por Hoch y Dreyfus (2006) y completados por Vega-Castro et al. (2012). Se aprecian diferencias en los niveles de sentido estructural requerido en función de las tipologías de problemas.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Relime*, 1 (1), 40-55.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H., Moraová, M., Krátkáy N. y Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305-312). PME.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chic, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer AP.

Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM, Mathematics Education*, 53, 621-633. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9.

Rojano, T. (2022). Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003197867.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime* 15(2), 232-258.

Cancec-Murillo, G., Rojano, T., Montoro, A. B. y Flores, P. (2023). Sentido de la estructura requerido en las tareas de cálculo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 562). SEIEM.

EVALUACIÓN DEL TEARFM PARA EL ANÁLISIS DE LA ALFABETIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESTADÍSTICOS

Evaluation of TEARFM for statistical literacy and reasoning analysis

Casas-Rosal, J.C.[a], León-Mantero, C.[a], Madrid, M. J.[b] y Maz-Machado, A.[a]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

La estadística está presente en multitud de facetas de la vida de las personas. En la conocida como sociedad de la información, los datos y la capacidad de interpretarlos para obtener conclusiones de forma adecuada tienen una importancia central para el desarrollo de las personas. Esta habilidad se jerarquiza en dos niveles cognitivos diferentes, que son la alfabetización estadística, de nivel inferior; y el razonamiento estadístico, de nivel superior (Garfield, 2002). Entre las competencias necesarias para alcanzar un correcto razonamiento estadístico están: comprender e interpretar, tener una actitud crítica y ser capaz de cuestionar la información, detectar errores y sesgos, identificar el contexto en el que se presenta la información y tener suficientes habilidades matemáticas. (Contreras y Molina-Portillo, 2019). Por todo ello, la correcta evaluación de la alfabetización y el razonamiento estadístico de los futuros maestros es de gran importancia en el campo de la didáctica de la estadística por ser una herramienta de información fundamental para el docente que trata de desarrollar estas habilidades entre su alumnado.

En este trabajo se propone un nuevo instrumento para la evaluación de la alfabetización y el razonamiento estadístico, el TEARFM, que es una adaptación al contexto y a la formación previa recibida por los futuros docentes, del instrumento desarrollado por Allen (2006). Consta de 20 ítems con cuatro opciones de respuesta de las que sólo 1 es verdadera, dividida en tres secciones: estadística descriptiva, probabilidad e inferencia. Además, los ítems son clasificados según evalúen alfabetización o razonamiento, según el criterio establecido por Sabbag et al (2018). La validación del mismo se lleva a cabo mediante la aplicación de la teoría de respuesta al ítem (TRI) para una muestra de 381 futuros docentes.

Una vez validado el instrumento, los primeros resultados muestran que los estudiantes presentan las mayores dificultades en los ítems en los que tienen que interpretar correctamente gráficos estadísticos.

Referencias

Allen, K. (2006). *The Statistics Concept Inventory: Development and analysis of a cognitive assessment instrument in statistics*. PhD dissertation, University of Oklahoma

Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education, 10* (3). http://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676

Sabbag, A., Garfield, J., y Zieffler, A. (2018). Assessing statistical literacy and statistical reasoning: The REALI instrument. *Statistics Education Research Journal, 17*(2), 141-160. https://doi.org/10.52041/serj.v17i2.163

Casas-Rosal, J. C., León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. (2023). Evaluación del TEARFM para el análisis de la alfabetización y el razonamiento estadísticos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 563). SEIEM.

LA INCORPORACIÓN DE LA METODOLOGÍA ACTIVA GAMIFICACIÓN EN LAS UNIDADES DIDÁCTICAS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

The incorporation of the gamification active methodology in the didactic units of preservice secondary mathematics teachers

Cortés, A., Breda, A., Sánchez, A

Universitat de Barcelona

El objetivo de este estudio es analizar cómo futuros profesores de secundaria, participantes de un máster de formación de profesores de matemáticas, incorporan la metodología activa gamificación en el diseño, implementación y rediseño de unidades didácticas (UD) y la justificación de su empleo, también se diferencia del uso del aprendizaje basado en juegos (ABJ) y se analiza este. Para ello se realiza una revisión del contenido de 98 trabajos de fin de máster (TFM), donde los futuros profesores valoran su implementación de una UD y plantean posibles mejoras.

Para el análisis se toma la definición del ABJ que ofrecen Pho y Dinscore (2015), donde se refiere al uso de principios de juegos y su aplicación a escenarios de reales para involucrar a los usuarios. Deterding et al. (2011) se refieren a la gamificación como el uso de elementos del diseño de juegos en contextos ajenos al juego; contrastando que no se trata de jugar juegos completos, ni de utilizar tecnología basada en juegos o similares, y que los contextos son independientes de las intenciones de uso y de los medios de implementación específicos. Por lo tanto, la gamificación es la aplicación de técnicas del diseño de juegos en contextos no lúdicos y el ABJ es el uso de juegos para fomentar el aprendizaje.

En el análisis de los TFM se observa que en 48 TFM se empleaba ABJ, de los cuales en 9 UD se emplean también ejercicios gamificados. En 2 TFM solo aparece la gamificación de manera puntual, sin referirse al ABJ, y en 1 TFM la UD está completamente gamificada. También hay 3 casos en los que, durante la intervención práctica, no se utilizan ni la gamificación ni el ABJ, pero sí se plantean mejoras aplicándolas. Finalmente, en 44 TFM ni se utiliza ninguna de las metodologías activas descritas ni se plantean posibles mejoras relacionadas con ellas. Cabe destacar que en solo 3 TFM se habla de la gamificación propiamente, uno de ellos es el de la UD completamente gamificada, otro de ellos lo plantea como posible mejora y el último solo lo menciona en las conclusiones del trabajo sin plantear actividades al respecto.

Se puede concluir que hay una gran presencia de juegos en las UD analizadas. No obstante, se intuye un desconocimiento de la gamificación y cómo aplicarla al aula, porque la mayoría no ha planteado utilizarla ni la mencionan en sus TFM. Por otro lado, entre los que adoptaron la gamificación se observa que la justificación más común para emplearla es motivar al alumnado.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Referencias

Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., y Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness: defining" gamification". *Proceedings of the 15th international academic MindTrek conference: Envisioning future media environments* (pp. 9–15). Association for Computing Machinery. https://doi.org/10.1145/2181037.2181040

Pho, A., y Dinscore, A. (2015). Game-Based Learning. *Tips and Trends*. https://acrl.ala.org/IS/wp-content/uploads/2014/05/spring2015.pdf

Cortés, A., Breda, A. y Sánchez, A. (2023). La incorporación de la metodología activa gamificación en las unidades didácticas de futuros profesores de matemáticas de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 564). SEIEM.

ALFABETIZACIÓN COMPUTACIONAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA. UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS MAESTROS

Computational Literacy and Mathematics Education. An Experience with Students for Teacher

Dolz, A.[a] y Gómez-Chacón I. M.[b]

[a] ESCUNI Centro Universitario de Magisterio, [b] Universidad Complutense de Madrid

El Pensamiento Computacional (PC) ha adquirido gran relevancia en el currículum educativo, buscando mejorar la comprensión de situaciones de aprendizaje y, en especial, las referidas a las interacciones entre la programación informática y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Como resultado, surge el denominado movimiento de *Alfabetización Computacional* (AC). La AC promueve la reorganización del aprendizaje conceptual de un área de conocimiento (diSessa, 2018).

La finalidad del estudio que se presenta es explorar qué principios de AC tienen lugar al desarrollar la tarea de diseño de un videojuego con Scratch y cómo la programación contribuye al desarrollo del conocimiento matemático de futuros maestros. Se usa como marco teórico el modelo de los principios de AC propuesto por diSessa (2018) y estos principios se contextualizan en matemáticas utilizando la teoría didáctica de los *Espacios de Trabajo Matemático* en computación (Bacelo y Gómez-Chacón, 2023). Se pone de manifiesto el papel que esta herramienta tiene para favorecer un aprendizaje significativo en matemáticas (Galindo, 2014, Gonçalves et. al, 2019).

La investigación se realiza con 19 estudiantes de 5º curso del Doble Grado de Magisterio de Primaria e Infantil, utilizando una metodología de tipo cualitativo basada en el análisis de la tarea y de la producción de los alumnos y un cuestionario diseñado para este estudio que permite indagar sobre la AC y la interacción entre programación y matemáticas desde categorías de los *Espacios de Trabajo Matemático*. Los resultados ponen de manifiesto que la comprensión conceptual y las experiencias actitudinales de los futuros maestros en matemáticas mejoran mediante la integración de la codificación y el cálculo que conlleva la programación. Esta integración revitaliza sus experiencias de aprendizaje, cambia su percepción de las matemáticas y mejora la construcción y afianzamiento de conocimiento matemático nuevo y preexistente, ofreciendo nuevas oportunidades para interactuar dinámicamente con las ideas teóricas. Los principios de AC se confirman. Las dimensiones de los espacios de trabajo matemático permiten cualificar la interacción entre la Matemática y la programación.

Referencias

Bacelo, A. y Gómez-Chacón, I. M. (2023). Characterising algorithmic thinking: A university study of unplugged activities. *Thinking Skills and Creativity, 48,* 101284.https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101284

diSessa, A. (2018). Computational Literacy and "The Big Picture" Concerning Computers in Mathematics Education. *Mathematical thinking and Learning, 20*(1), 3-31. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1403544

Galindo, M. (2014). Efectos del proceso de aprender a programar con "Scratch" en el aprendizaje significativo de las matemáticas en los estudiantes de educación básica primaria. *Escenarios, 12(2)*, 87-102. http://dx.doi.org/10.15665/esc.v13i2.601

Gonçalves, J., Lima, J., Brito, T., Brancalião, L., Camargo, C., Oliveira, V., y Conde, M. (2019). Educational Robotics Summer Camp at IPB: A Challenge based learning case study. Proceedings of the Seventh International *Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality*, 36-43. ACM.

Dolz, A. y Gómez-Chacón I. M. (2023). Alfabetización computacional y educación matemática. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 565). SEIEM.

LA LATITUD DE LAS FORMAS COMO PRELUDIO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

The latitude of forms as a prelude to the definite integral concept

Esteve-Blasco, M.[a] González-Astudillo, M. T.[a] y Fuertes-Prieto, M. A.[a]

[a]Universidad de Salamanca

Aunque el profesor de matemáticas debe tener un conocimiento profundo de éstas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), uno de los elementos más olvidados de este conocimiento es el de la historia de las matemáticas. La historia permite conocer los problemas y dificultades que dieron lugar a los diferentes conceptos (Esteve-Blasco y González-Astudillo, 2022) y así, ser más consciente de ellos.

En este sentido, se está realizando una investigación sobre la formación de profesores de Educación Secundaria en relación con el concepto de integral desde un punto de vista histórico. La pregunta de investigación que trataremos de responder en este póster es: ¿El concepto de área barrida por infinitas rectas permite que surja en los futuros docentes el concepto de límite y la necesidad de continuidad de una función como preludio del concepto de integral?

Se ha utilizado la ingeniería didáctica para diseñar tareas, realizado un análisis a priori de ellas, así como experimentado y realizado un análisis a posteriori de las mismas. La experimentación se ha realizado en cuatro sesiones correspondientes a cuatro periodos históricos seleccionados a partir de un estudio en profundidad del desarrollo histórico-epistemológico del concepto. La segunda de estas sesiones se centró en "la latitud de las formas y los indivisibles" que surgieron en Europa entre los siglos XI a XIV y que fue definida por Thomas Bradwardine y Nicole Oresme. De entre las tareas que se han diseñado para esta sesión, se ha seleccionado la primera de ellas para presentar en este póster. En ella se plantea (al igual que hizo Oresme) la idea de que el área barrida por todas líneas perpendiculares trazadas, en un intervalo finito, sobre cada instante de una cualidad (intensidad de la cualidad) nos dará el valor total de la cualidad en el intervalo.

La tarea fue resuelta por cuatro grupos de estudiantes del máster de formación de profesores de secundaria en la especialidad de matemáticas. El análisis se realizó a partir de las producciones escritas de cada uno de los grupos y de las grabaciones de audio de sus discusiones. En los resultados obtenidos se observa que los estudiantes comprenden que el concepto de "barrer un área" precisa de la continuidad de cualidad, es decir, precisa de una variable continua, se razona en términos de ambos infinitos (potencial y actual) en cuanto a la infinitud de perpendiculares, se considera que la dimensión del segmento no afectará su número y, por lo tanto, se crean las primera imágenes y asociaciones con el concepto de límite y la necesidad de continuidad de una función.

Durante las discusiones en cada grupo surgieron dudas ligadas a la continuidad de la función y al infinito actual de las que los estudiantes no habrían sido conscientes si no se enfrentan a tareas ligadas a la historia. Así, los estudiantes adquieren un conocimiento más profundo de los conceptos matemáticos y nos reafirma en la necesidad de incluir estas tareas en la formación docente.

Referencias

Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T. (2022). Los corpúsculos pitagóricos para medir longitudes finitas. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 259-267). SEIEM.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.

Esteve-Blasco, M., González-Astudillo, M. T. y Fuertes-Prieto, M. A. (2023). La latitud de las formas como preludio del concepto de integral definida. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 566). SEIEM.

ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS EN ALUMNADO CON AUTISMO MÍNIMAMENTE VERBAL

Preliminary study on additive problems solving in minimally verbal autistic students

Fernández-Cobos, R.[a], Polo-Blanco, I.[a], Lebeña Cagigas, A. L.[a] y Rodríguez-Candelero, P.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]CC. EE. El Molino

El trastorno del espectro autista (TEA) afecta a la manera en que los individuos se comunican e interaccionan socialmente. La intensidad de estos síntomas, que típicamente se manifiestan como alteraciones en las funciones ejecutivas y dificultades lingüísticas, varía de modo significativo entre los afectados. La investigación educativa muestra que, en general, el alumnado con TEA presenta rendimientos matemáticos bajos en comparación con sus pares de desarrollo típico. La resolución de problemas constituye un reto mayor para estos estudiantes, en la medida en que moviliza habilidades relacionadas con la planificación de acciones y la comprensión de situaciones. Investigaciones previas han identificado asociaciones entre la capacidad verbal y las dificultades en resolución de problemas (Alderson-Day, 2014; Polo-Blanco et al., 2022).

En este estudio, se evalúa una intervención adaptada a alumnado con TEA mínimamente verbal (aquel que tiene un repertorio muy pequeño de palabras habladas o frases fijas), dirigida al aprendizaje de resolución de problemas de combinación de suma. Han participado tres estudiantes —de 11, 13 y 15 años— con TEA y discapacidad intelectual, con edad verbal de 4 años, escolarizados en un centro de educación especial de Cantabria. El diseño toma como referencia la propuesta conceptual desarrollada por Spooner et al. (2017), que articula los elementos desplegados en una instrucción basada en esquemas modificada (MSBI), haciendo énfasis en la componente verbal. Se destacan las siguientes adaptaciones: (1) presentación simple de enunciados con estructura predeterminada; (2) incorporación de Sistemas Aumentativos y Alternativos de Comunicación (SAACs) en los enunciados, la hoja de pautas y los materiales manipulativos usados para representar la situación mediante el esquema, con especial énfasis en la locución clave "en total"; y (3) uso de preguntas guía para facilitar la comprensión (p. ej., "¿sabemos cuánto es el total?", o "¿sabemos cuántas manzanas tiene Nuria?").

Los resultados muestran que los tres estudiantes mejoraron con respecto a la línea de base tras la instrucción. Se detalla el desempeño de cada participante, así como la manera en que se ha flexibilizado la metodología MSBI para adaptarse al ritmo y necesidades de cada uno de ellos. Se concluye reflexionando sobre la necesidad de seguir implementando prácticas basadas en evidencias.

Agradecimientos: Trabajo financiado por PID2019-105677RB-I00 y SUBVTC-2022-0004.

Referencias

Alderson-Day, B. (2014). Verbal problem-solving difficulties in autism spectrum disorders and atypical language development. *Autism Research, 7*(6), 720–730. https://doi.org/10.1002/aur.1424

Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M., y Payá, B. (2022). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: the influence of cognitive profile. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w

Spooner, F., Saunders, A., Root, J., y Brosh, C. (2017). Promoting access to common core mathematics for students with severe disabilities through mathematical problem solving. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities*, *42*(3), 171–186. https://doi.org/10.1177/1540796917697119

Fernández-Cobos, R., Polo-Blanco, I., Lebeña Cagigas, A. L. y Rodríguez-Candelero, P. (2023). Estudio preliminar sobre resolución de problemas aditivos en alumnado con autismo mínimamente verbal. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 567). SEIEM.

INTRODUCCIÓN DEL DISEÑO E IMPRESIÓN 3D EN LA FORMACIÓN MATEMÁTICA DE LOS FUTUROS MAESTROS

Introducting 3D Desing and Printing in the Mathematical training of Pre-service teachers

Fuertes-Prieto, M.A., Alonso-Ruano, B.M., Rodríguez-Sánchez, M.M. y Rodríguez-Muelas, D.

Universidad de Salamanca

El conocimiento de la potencialidad de los diversos recursos y materiales, así como de las características del aprendizaje de las matemáticas, forman parte de modelos como el MTSK de profesor de matemáticas. Desde el punto de vista de los recursos y materiales, las impresoras 3D son un nuevo recurso cada vez más accesible en los centros educativos. Investigaciones recientes centradas en el campo de la didáctica de las matemáticas señalan que podría mejorar la adquisición de conocimientos y habilidades digitales para facilitar una retención adecuada del aprendizaje matemático, permitiendo a los alumnos alcanzar un nivel cognitivo superior en el que pueden resolver problemas, reflejar su aprendizaje y colaborar con otros para construir conocimiento (Kit et al., 2022). A pesar de estas ventajas, estudios en educación matemática muestran que el diseño e impresión 3D es la tecnología emergente que mayores sentimientos negativos despierta entre los futuros maestros (Blanco et al., 2022). Por ello, es necesario investigar cuál es la mejor manera de introducir el diseño e impresión 3D en su formación.

En el presente trabajo se muestra el diseño y los resultados preliminares de una investigación llevada a cabo con el fin de responder a la pregunta de si la inclusión de una práctica dedicada al diseño e impresión 3D en una de las asignaturas de didáctica de la matemática que cursan como parte de su formación los futuros maestros de Educación Primaria puede mejorar su visión espacial y si sería suficiente para que se planteen su uso como recurso didáctico cuando ejerzan como maestros.

Para ello, se ha diseñado un cuestionario para determinar los conocimientos previos que tienen los alumnos de 3º del grado de maestro en Educación Primaria sobre el diseño e impresión 3D y su potencialidad en la enseñanza de las matemáticas. Además, se ha utilizado un test de visualización espacial similar al test de rotaciones de Purdue (Guay, 1977), antes y después de la práctica, con el fin de que los propios alumnos pudieran comprobar cómo podría mejorar su visión espacial y, por último, se ha realizado un cuestionario post-test y varias entrevistas semiestructuradas. Con una muestra de 101 alumnos, los resultados preliminares muestran que una práctica de este tipo no es suficiente para mejorar la visión espacial de los futuros maestros, si bien puede servir para aumentar su seguridad y disposición para utilizar el diseño e impresión 3D como recurso didáctico para enseñar matemáticas cuando ejerzan como maestros.

Referencias

Blanco, T. F., Fernández-López, A., Martínez-Albella, J., y Rodríguez-Raposo, A. (2022). Explorando las emociones de futuros docentes frente al uso de tecnologías emergentes en el aprendizaje de la geometría. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 595). SEIEM.

Kit, N. D. T., Tsui, M. F., y Yuen, M. (2022). Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. *Asian Journal for Mathematics Education, 1*(3), 338–358. https://doi.org/10.1177/27527263221129357

Guay, R. (1977). Purdue Spatial Visualization Tests. Purdue Research Foundation.

Fuertes-Prieto, M. A., Alonso-Ruano, B. M. y Rodríguez-Sánchez, M. M., Rodríguez-Muelas, D. (2023). Introducción del diseño e impresión 3D en la formación matemática de los futuros maestros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 568). SEIEM.

¿UN AULA INTELIGENTE? CÓMO LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS OPTIMIZAN EL ESTUDIO DE FUNCIONES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN SECUNDARIA

A smart classroom? How technological resources optimize the study of functions in mathematics in secondary school

García-Martínez, X.[a,b] , Gutiérrez-Rodríguez, I.[a,b] y Martiñán-Otero, D.[b]

[a]Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia, [b]Universidade de Vigo

En las ultimas décadas, el desarrollo de las herramientas tecnológicas ha revolucionado la sociedad, incluyendo el ámbito educativo. Con ello, distintos estudios han analizado el uso de recursos tecnológicos sobre los procesos de enseñanza en diferentes contextos (Bennison y Goos (2010); Hillmayr et al. (2020); Li y Ma (2010)). El objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis sobre el impacto de los recursos tecnológicos empleados en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de las funciones en matemáticas en Educación Secundaria. En este trabajo se consideran las últimas leyes educativas españolas, la implantación de las TIC, su uso y los fundamentos teóricos que lo sustentan. Además, se realiza un análisis cuantitativo mediante un cuestionario en la Comunidad Autónoma de Galicia para: conocer la percepción de los docentes respecto a los recursos tecnológicos, establecer el grado de implantación, evidenciar las posibles necesidades formativas de los mismos en relación al esperado según el currículo vigente. Para el análisis, se consideran diferentes aspectos como: el efecto sobre el aprendizaje, el grado de interés del alumnado, la carga de trabajo para el profesorado, entre otros. Tras conocer la evolución de la presencia de la tecnología en las leyes educativas y los currículos asociados, se evidencia que el peso para el profesorado es cada vez mayor. En general, existe un impacto positivo tanto en el aprovechamiento como en el interés por parte de los alumnos, sin embargo, se ha apreciado que sigue habiendo un déficit de implantación de dichas herramientas debido a la falta de formación, de tiempo o de recursos, junto con ciertas reticencias a la hora de implantarlas por tener el profesorado otros enfoques pedagógicos (ver Díaz-Barriga, 2013; Raúl y Becerra, 2013). Finalmente, es importante destacar que la actitud positiva del docente hace que el aprendizaje en el alumnado sea mejor, siendo la formación del profesorado clave para el aprovechamiento de los recursos tecnológicos en el aula.

Referencias

Bennison, A., y Goos, M. (2010). Learning to Teach Mathematics with Technology: A Survey of Professional Development Needs, Experiences and Impacts. *Mathematics Education Research Journal*, 22(4).

Díaz-Barriga, F. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, 4(10), 3-21.

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., y Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers and Education*, 153. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897

Li, Q., y Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *In Educational Psychology Review* (Vol. 22, Issue 3, pp. 215–243). https://doi.org/10.1007/s10648-010-9125-8

Raúl, N., y Becerra, R. (2013). Uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas. *Inventum*, 14, 35–43.

García-Martínez X., Gutiérrez-Rodríguez I. y Martiñán Otero D. (2023). ¿Un aula inteligente? Cómo los Recursos Tecnológicos Optimizan el Estudio de Funciones en el área de matemáticas en Secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 569). SEIEM.

GRAFOS: CONECTANDO MATEMÁTICAS REALISTAS

Graphs: connecting realistic mathematics

García-Alonso, I.[a] y Hernández-Córdoba, E.[b]

[a]Universidad de La Laguna, [b]Fundación General de la Universidad de La Laguna

Las investigaciones señalan que la enseñanza de las matemáticas a través de problemas no rutinarios cercanos a la vida cotidiana en los que se utilice la modelización como estrategia de indagación supone una oportunidad para aumentar el interés por su estudio por parte de estudiantes y docentes (Goldin, 2004). Los grafos son una herramienta matemática de fácil comprensión, con capacidad para modelizar situaciones reales (Gaio et al., 2020), por lo que, son una buena herramienta para identificar regularidades, conceptualizar situaciones y transferir resultados a nuevos escenarios (Braicovich, 2020). Pero, llama la atención la escasa presencia en el entorno escolar y que, los nuevos currículos releguen su estudio al bachillerato general (Real Decreto 243/2022). En el caso de Educación Primaria, la investigación señala que los grafos son una oportunidad para realizar búsquedas de regularidades, avanzar en la argumentación y construir y analizar la viabilidad de hipótesis (Braicovich, 2020).

Para llevar a cabo la conexión entre los grafos, la modelización y la resolución de problemas reales, utilizamos el enfoque que proporciona la Educación Matemática Realista (Gravemeijer, 1994) teniendo en cuenta: (i) utilizar problemas de la vida real como punto de partida, (ii) utilizar modelos o símbolos en el problema para pasar de lo concreto a lo más formal, (iii) promover que los estudiantes resuelvan por sí mismos los problemas, (iv) facilitar la interacción, compartir y construir la solución de los problemas entre iguales, (v) interconectar los conceptos matemáticos de forma que refuerce que las matemáticas están interrelacionadas.

Presentamos una propuesta didáctica de grafos junto con los resultados de su implementación realizada con 190 estudiantes de 4º y 5º de Educación Primaria de Tenerife que, mediante los grafos, resuelven un problema de ciclo hamiltoniano contextualizado. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron correctamente los grafos para resolver el problema planteado. Además, ofrecieron argumentos y desarrollaron un razonamiento matemático con el que fueron capaces de ofrecer soluciones a la situación y observar la no unicidad de dicha solución.

Agradecimiento: Al Excmo. Cabildo Insular de Tenerife y la Fundación General de la Universidad de La Laguna a través del proyecto de innovación educativa *ProyectaMates*.

Referencias

Braicovich, T. C. (2020). Grafos y su enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. 103*(1), 7-11.

Gaio, A., Branchetti, L. & Capone, R. (2020). Learning Math Outdoors: Graph Theory using Maps. In M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira, y A. Moura (Eds.), *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020* (pp. 95-102). Münster: WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.12

Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM, 36* (2), 56-60. https://doi.org/10.1007/BF02655759

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Doctoral tesis. Utrecht. The Netherlands.

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 82,* de 6 de abril, pp. 46047-46408.

García-Alonso, I. y Hernández-Córdoba, E. (2023). Grafos: conectando matemáticas realistas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 570). SEIEM.

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS POR ESTUDIANTES CON AUTISMO

García-Alonso, I.[a], Bruno, A.[a], Polo-Blanco, I.[b] y González-Sánchez, J.[c]

[a]Universidad de La Laguna, [b]Universidad de Cantabria, [c]Universidad del País Vasco

Debido al aumento de la prevalencia de personas con trastorno del espectro autista (TEA), cada vez más niños y niñas con TEA se escolarizan en los centros ordinarios, y en particular, cada vez más acceden a niveles de educación secundaria (Barnet y Cleary, 2019). Sin embargo, escasean las investigaciones que profundicen en la manera en que estos estudiantes afrontan el aprendizaje de contenidos matemáticos de estos niveles. Los estudios sobre aprendizaje probabilístico y estadístico en este colectivo son particularmente escasos (Sabariego et al., 2021). Este trabajo tiene como objetivo analizar el pensamiento de alumnado con TEA respecto a la interpretación y construcción de tablas y gráficos estadísticos.

Se analizan las respuestas de estudiantes con TEA graduando la complejidad y los niveles de lectura de los datos que se ofrecen a tareas estadísticas analizando los principales errores de interpretación, con objeto de caracterizar su pensamiento estadístico (Friel et al., 2001; Money, 2002).

En el estudio se realizaron entrevistas individuales a seis estudiantes con TEA sin discapacidad intelectual (CIT>80) escolarizados en 1.º y 2.º de la ESO, que resolvieron dos tareas estadísticas en un mismo contexto de videojuegos. La Tarea 1 muestra la información en una tabla, y solicita interpretar la información y la construcción de un histograma. En la Tarea 2, a partir de un diagrama de barras, los estudiantes deben leer e interpretar la información, y construir una tabla. Se pone el foco en cómo se interpretan los datos en relación al contexto y su capacidad para realizar predicciones a partir de la información.

Los resultados muestran variabilidad en las respuestas de los estudiantes en la manera de expresar la información, en ocasiones con vocabulario escueto, que se relacionan con las características del autismo. Mayores dificultades mostraron para predecir a partir de la información dada con apego a la información proporcionada. Los estudiantes construyeron gráficos con errores semejantes a los de alumnado del mismo nivel de desarrollo típico. Se concluye destacando la importancia de llevar a cabo investigaciones con alumnado de estas características sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos de niveles educativos superiores.

Agradecimientos: Trabajo financiado por PID2019-105677RB-I00 y SUBVTC-2022-0004.

Referencias

Barnett, J., y Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, *50*(2), 172-185.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158. https://doi.org/10.2307/749671

Mooney, E. S. (2002). A framework for characterizing middle school students' statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(1), 23–63. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0401_2

Sabariego, P., Polo-Blanco, I., García-Moya, M., Goñi-Cervera, J. (2021). Diseño, construcción y validación de un cuestionario para evaluar el pensamiento probabilístico en alumnado con trastorno del espectro autista. En A. Vico, L. Vega y O. Buzón (Eds) *Entornos Virtuales para la Educación en Tiempos de Pandemia: Perspectivas Metodológicas* (pp. 438-468). Dykinson. ISBN 978-84-1377-640-8.

García-Alonso, I., Bruno, A., Polo-Blanco, I. y González-Sánchez, J. (2023). Interpretación de gráficos estadísticos por estudiantes con autismo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 571). SEIEM.

UN ESTUDIO SOBRE EL USO DE ESQUEMAS Y AYUDAS VISUALES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS MONITORIZADO CON SEGUIMIENTO OCULAR

A study on the use of schemes and visual aids in mathematical problem solving monitored with eye-tracking

García-Bayona, I.[a], Pérez-Suay, A.[a], Van Vaerenbergh, S.[b] y Pascual-Venteo, A. B.[a]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Cantabria

El papel de los esquemas y las representaciones visuales es uno de los temas de interés en la investigación sobre la resolución de problemas matemáticos. A menudo se destacan las ventajas de su uso cuando dichas imágenes son relevantes para su resolución (Elia y Philippou, 2004; Vale y Barbosa, 2018), aunque existen excepciones como el caso de imágenes representativas en problemas verbales no estándar (Dewolf et al., 2017). Por otro lado, la tecnología de seguimiento ocular está ganando popularidad en la investigación, siendo beneficiosa para el estudio de procesos, representaciones mentales y la evaluación de aspectos subconscientes del pensamiento matemático (Strohmaier et al., 2020).

Este estudio compara el desempeño en la resolución de problemas matemáticos que incluyen un esquema o representación visual con el desempeño al resolver otros similares que carecen de dichas ayudas. Los sujetos del estudio fueron 40 estudiantes del Grado en Maestro/a en Educación Infantil. Se planteó un cuestionario con 18 problemas para resolver en pantalla y se monitorizó su resolución con un dispositivo de seguimiento ocular, almacenando los puntos observados por los estudiantes para asegurar que las ayudas visuales habían sido inspeccionadas. Los problemas se agruparon en diferentes categorías (porcentajes, áreas, fracciones, problemas aritméticos de cambio, de combinación, multietapa y sobre razones) y cada una constaba de un problema con ayuda visual y otro análogo sin ella. Se incluyeron cuatro problemas de refresco de tipo acertijo con esquemas o dibujos. La mitad de los estudiantes recibió primero los problemas con la mencionada ayuda y la otra mitad recibió primero los problemas que carecían de ella. Los datos sugieren que, en general, hay diferencias significativas en el éxito al resolver problemas según tengan la ayuda visual o no, siendo mayor el éxito cuando sí la hay. No hubo diferencias en el desempeño según el orden de recepción de los problemas. En futuras investigaciones se trabajará con métricas asociadas al eye-tracking para obtener resultados cuantitativos.

Referencias

Dewolf, T., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical word problems more realistically? *European Journal of Psychology of Education*, *32*(3), 335–351. https://doi.org/10.1007/s10212-016-0308-7

Elia, I. y Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 327–334. PME.

Strohmaier, A. R., MacKay, K. J., Obersteiner, A. y Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics, 104*(2), 147–200. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09948-1

Vale, I. y Barbosa, A. (2018). Mathematical problems: The advantages of visual strategies. *Journal of the European Teacher Education Network*, *32*, 23–33.

García-Bayona, I., Pérez-Suay, A., Van Vaerenbergh, S. y Pascual-Venteo, A. B. (2023). Un estudio sobre el uso de esquemas y ayudas visuales en resolución de problemas matemáticos monitorizado con seguimiento ocular. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 572). SEIEM.

VALIDACIÓN DE UN DECÁLOGO PARA LA ADAPTACIÓN DE APPLETS MATEMÁTICOS PARA ALUMNADO CON AUTISMO

Validation of a Set of Guidelines for Adapting Mathematical Applets for Students with Autism

García-Gómez, A., Van Vaerenbergh, S. y Polo-Blanco, I.

Universidad de Cantabria

El uso de herramientas tecnológicas ha demostrado tener numerosos beneficios para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, especialmente en el caso del alumnado con Trastorno del Espectro Autista (TEA) (Grynszpan et al., 2014). Dichas herramientas facilitan la creación de un entorno de aprendizaje organizado y estructurado, con actividades específicas y enfocadas en los contenidos a trabajar, eliminando elementos irrelevantes que puedan actuar como distractores y potenciando la concentración en las tareas a realizar. Asimismo, las tecnologías educativas promueven la inclusión y personalización del aprendizaje, permitiendo ajustar los materiales a las necesidades individuales de cada estudiante con TEA (Romero Martínez et al., 2018).

En el presente estudio se lleva a cabo la validación de un decálogo de pautas diseñado para la creación de applets de GeoGebra enfocados en la enseñanza de matemáticas a estudiantes con TEA (Polo-Blanco et al., 2022). El decálogo consta de 10 pautas que incorporan adaptaciones teniendo en cuenta características específicas del alumnado con TEA, tales como: apoyo mediante pictogramas (considerando su habilidad para el procesamiento visual), estructuración de tareas (teniendo en cuenta posibles déficits de planificación) y eliminación de distractores (dado las posibles dificultades de atención).

Para validar el decálogo, se empleó el método de juicio de expertos con experiencia y conocimiento en el campo del autismo, contando con la participación de seis expertos. Las aportaciones de los expertos se centraron principalmente en las pautas relacionadas con el uso de pictogramas, la selección de colores y contrastes, así como el lenguaje y el formato de las instrucciones. Como resultado, se presenta una versión refinada del decálogo que incorpora dichas contribuciones y refleja las consideraciones sugeridas por los expertos.

El decálogo validado en este estudio puede resultar de gran utilidad para el profesorado que trabaja con estudiantes con TEA, facilitando la adaptación y personalización de contenidos matemáticos y mejorando la competencia docente. Además, estas actividades interactivas promueven la inclusión educativa y social del alumnado con TEA, favoreciendo su participación y avance en matemáticas.

Agradecimientos

Trabajo realizado bajo el proyecto PID2019-105677RB-I00 financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033.

Referencias

Grynszpan, O., Weiss, P. L., Perez-Diaz, F., & Gal, E. (2014). Innovative technology-based interventions for autism spectrum disorders: a meta-analysis. *Autism, 18*(4), 346-361. https://doi.org/10.1177/136236131347676

Romero Martínez, S. J., González, I., García, A., & Lozano, A. (2018). Herramientas tecnológicas para la educación inclusiva. *Tecnología, ciencia y educación, 9*, 83-111.

Polo-Blanco, I., Goñi-Cervera, J., Van Vaerenbergh, S. (2022). *Decálogo de Pautas para la Creación de Applets Adaptados a Estudiantes con Trastorno del Espectro Autista (TEA) en un Entorno de GeoGebra* (documento inédito). Universidad de Cantabria.

García-Gómez, A., Van Vaerenbergh, S. y Polo-Blanco, I. (2023). Validación de un decálogo para la adaptación de applets matemáticos para alumnado con autismo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 573). SEIEM.

FORMANDO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA AL FUTURO PROFESORADO EN EDUCACIÓN INFANTIL

Teaching mathematical modeling to future teachers in early education

Garcia-Marques, M. E., Melchor-Borja, C. y Pla-Castells, M.

Universitat de València - Estudi General

La modelización matemática ha ido adquiriendo más y más importancia en los últimos años, no solo a nivel científico sino también por su introducción en las aulas de todos los niveles educativos. Su aplicación en educación infantil es todavía incipiente y también lo es su incorporación dentro de los currículums de formación de futuros maestros/as. Sin embargo, el planteamiento de problemas es una de las competencias que todo docente debe desarrollar. El objetivo de la investigación que se presenta es profundizar en las herramientas y métodos para el desarrollo de la competencia docente en el planteamiento de problemas de modelización y su posterior puesta en práctica en el aula.

En este trabajo se presenta una intervención en la que futuros maestros/as de educación infantil hacen un estudio de casos de éxito en la resolución de problemas de modelización matemática en alumnado segundo ciclo de educación infantil (Alsina y Salgado, 2021; 2022a; 2022b) y posteriormente plantean sus propios problemas de modelización. Los futuros docentes pasaron por tres fases: (1) Análisis de los enunciados de problemas de modelización explorando sus propias creencias y expectativas. (2) Análisis comparativo de las experiencias reales descritas en los artículos al aplicar en las aulas dichos problemas y su análisis previo. (3) Planteamiento y diseño de aplicación en el aula de problemas de modelización para alumnado de educación infantil.

Los resultados muestran que tras esta experiencia el alumnado fue capaz de diseñar problemas de modelización adaptados a la etapa de educación infantil y de detectar algunos de los factores más relevantes a la hora de poner en práctica este tipo de problemas en el aula.

Referencias

Alsina, Á., y Salgado, M. (2022a). Iniciando la modelización matemática temprana en Educación Infantil: ¿Cómo piensan y qué hacen los niños de 3 años? *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *11*(1), 1–38. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2022.1-38

Alsina, A., y Salgado, M. (2022b). Orientaciones didácticas para introducir la modelización matemática temprana en Educación Infantil. *Modelling in Science Education and Learning*, *15*(2), 83–110. https://doi.org/10.4995/msel.2022.17226

Alsina, A., Toalongo-Guamba, X., Trelles-Zambrano, C., y Salgado, M. (2021). Desarrollando habilidades de modelización matemática temprana en Educación Infantil: Un análisis comparativo en 3 y 5 años. *Quadrante*, 74-93 Páginas. https://doi.org/10.48489/QUADRANTE.23654

Garcia-Marques, M. E., Melchor-Borja, C. y Pla-Castells, M. (2023). Formando en modelización matemática al futuro profesorado en Educación Infantil. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 574). SEIEM.

AJUSTE O REELABORACIÓN DEL PLAN EN SITUACIONES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN PRIMERAS EDADES

Adjusting or reworking the plan in problem-solving situations in early age students

Garcia-Marques, M. E., Diago, P. D. y Arnau, D.

Universitat de València - Estudi General

La resolución de problemas matemáticos implica no únicamente la competencia en un determinado dominio matemático, sino que también exige un conjunto de capacidades que se pueden englobar bajo el paraguas de la metacognición. Dentro de este término general, Schoenfeld (2016) incluye, como un elemento central, la toma de decisiones y la supervisión del proceso de resolución. Por otro lado, tomando como punto de partida la clásica división en pasos ideales del proceso de resolución de problemas de Pólya (1945), podemos identificar dos momentos principales en los que se llevan a cabo estos procesos de autorregulación: la elaboración del plan y la visión retrospectiva. El objetivo de la investigación de la que presentamos resultados es identificar elementos de autorregulación en episodios de planificación y revisión cuando alumnado de educación infantil resuelve problemas.

Una de las dificultades de la investigación en resolución de problemas en las primeras edades escolares es la necesidad de generar tareas con características de problemas que únicamente incluyan el incipiente contenido matemático propio de estas edades. En este sentido, las tareas de programación de robots de suelo ofrecen la posibilidad de plantear situaciones típicas de resolución de problemas con un contenido matemático accesible. En nuestro estudio, se propuso que estudiantes del último curso de infantil (5-6 años) idearan un plan y programaran un robot de suelo para completar una trayectoria dada. Como variables de estudio, se propusieron tres niveles de complejidad: trayectorias sin giros, trayectorias con un giro y trayectorias con dos giros. El alumnado, agrupado en parejas, previamente a la programación del robot, debía elaborar la secuencia de pasos mediante un conjunto de tarjetas (avance, giro a derecha, giro a izquierda y ejecutar plan). A continuación, a partir de la ejecución del plan ideado por parte del robot de suelo, y de la observación de la trayectoria seguida, se les solicitaba que reelaboraran o ajustaran el plan para corregirlo en caso de error.

El análisis de los casos nos ha permitido identificar que el alumnado en su mayoría era capaz de determinar el punto del plan donde se producía el error, pero no eran capaces de modificarlo optando por generar un nuevo plan completo.

Referencias

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1–38.

Garcia-Marques, M. E., Diago, P. D. y Arnau, D. (2023). Ajuste o reelaboración del plan en situaciones de resolución de problemas en primeras edades. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 575). SEIEM.

DE SEXTO A PRIMERO: INVENCIÓN DE PROBLEMAS

From Sixth to First Grade: Problem Posing

Garrido-Martos, R., De La Fuente, A., Rodríguez-Miravalles, J., Benito, A. y Nolla, A.

Universidad Autónoma de Madrid

La invención de problemas es una metodología que permite valorar la adquisición de la competencia a través de retos en la tarea matemática (Cai y Hawan, 2023). El trabajo que se presenta se enmarca en una investigación más amplia que tiene como objetivo la relación de tres acciones complementarias para desarrollar la resolución de problemas. Por un lado, trabajar con niños y niñas de sexto de primaria la invención de problemas aritmético-verbales, por otro lado, trabajar con niños y niñas de primero de primaria la resolución de problemas aritmético-verbales a partir de la lectura de un cuento. Por último, la tercera acción es la relación entre ambas, siendo los de sexto los creadores de esos problemas que luego realizarán los de primero, además de acompañarlos en dicha resolución. La intervención se llevó a cabo en dos sesiones diferentes con un grupo de sexto y un grupo de primero del mismo centro, un CRA de la Comunidad de Madrid. Se presenta, a continuación, la parte del análisis de la creación de problemas del alumnado de sexto, para la que contaban con la única indicación de que tenían que crear problemas para el nivel de primero y estar contextualizados en el cuento de Elmer, que era conocido para el grupo.

Para llevar a cabo el análisis de las creaciones hemos tomado como referencia el esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas realizado por Espinoza-González et al. (2015). Primero, se comprobó si eran matemáticos/aritméticos y resolubles, después se analizaron por categorías. Dichas categorías de análisis son: estructura sintáctica (longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado), estructura matemática (tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y cantidad de pasos distintos para resolver el problema), estructura semántica (aditivos como combinación, cambio, comparación o igualación, multiplicativos, isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida), añadiendo a estas iniciales una categoría sobre adecuación al nivel de primero de primaria. Los resultados obtenidos muestran que todas las producciones excepto dos fueron matemáticas/aritméticas y tan solo una no resoluble. Además, dos de ellas usaron contenidos de combinatoria. Con respecto a la estructura semántica, destaca la mayoría con proposición interrogativa, todas con número natural (adecuado a la propuesta) y una o dos proposiciones. En estructura matemática y semántica la mayoría fueron de estructura operatoria de problemas aditivos (aunque sesgados a cambio) y multiplicativos (de comparación). Por último, en cuanto a la adecuación, una vez se llevaron al aula de primero se vio que todos ellos pudieron ser resueltos por el grupo. Además, también fueron enunciados en mayúsculas y con dibujos que ayudaban a su entendimiento. Por último, cabe destacar que el alumnado de sexto enfatizó la dificultad de crear problemas para una etapa inferior y el orgullo que sentían porque estuvieran haciendo sus problemas.

Referencias

Cai, J. y Hwang, S. (2023). Making Mathematics Challenging Through Problem Posing in the Classroom. In: Leikin, R. (Eds) Mathematical Challenges For All (pp. 115-145). Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7

Espinoza-González, J., Lupiáñez-Gómez, J.-L., y Segovia-Alex, I. (2015). A scheme to analyses the statements of the student in context of problem posing. *Uniciencia, 29*(1), 58-81. https://doi.org/10.15359/ru.29-1.4

Garrido-Martos, R., De la Fuente, A., Rodríguez-Miravalles, J., Benito, A. y Nolla, A. (2023). De sexto a primero: invención de problemas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 576). SEIEM.

CÓMO INTEGRAN TECNOLOGÍA LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE EDUCACIÓN INFANTIL PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

How preservice early childhood education teachers integrate technology to teach mathematics

Gavilán-Izquierdo, J. M.[a] y Gallego-Sánchez, I.[a]

[a]Universidad de Sevilla

El uso de tecnología juega un papel relevante en nuestras vidas y la educación no puede permanecer al margen de ese uso. La pandemia COVID-19 ha puesto de manifiesto la necesidad de integrar tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje en general, y en matemáticas en particular. García-Zabaleta et al. (2021) investigaron sobre conocimiento de tecnología de profesores de educación infantil y encontraron que su nivel tecnológico es básico y que "han sido conscientes de sus mayores carencias tras la época de confinamiento y docencia virtual forzada" (p. 90). Añaden que se necesita una formación inicial y permanente que les permita integrar tecnología en el aula.

La investigación surge de una propuesta de formación inicial de estudiantes para maestro de educación infantil (EMEI, en adelante) que les permitiera integrar tecnología para la enseñanza de las matemáticas. La tecnología usada ha sido *JClic*, un diseñador de tareas. El modelo de conocimiento del profesor utilizado ha sido el modelo TPACK (Koehler et al., 2013). Participaron en la investigación 28 EMEI a los que se les pidió que diseñaran trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA, en adelante) (Simon, 1995) cuyas tareas incorporaran tecnología. Se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué TPACK desarrollan los EMEI en esta propuesta de formación inicial?

Este trabajo se centra, entre los distintos indicadores que caracterizan el TPACK, en identificar qué modos de representación y conexiones entre los mismos utilizan los EMEI en el diseño de una THA sobre geometría cuando integran tecnología. Los resultados que estamos obteniendo muestran que los EMEI utilizan en todas las tareas diseñadas con tecnología varios modos de representación y establecen diferentes tipos de conexiones entre ellos, tanto traslaciones como transformaciones. Continuaremos estudiando qué procesos matemáticos emergen con el uso de los modos de representación y si estos resultados son dependientes del contenido matemático específico involucrado.

Agradecimientos

Al Programa al Estímulo de Áreas con Necesidades Investigadoras y de la Actividad Investigadora Emergente, Proyectos de investigación precompetitivos de la Universidad de Sevilla, 2023.

Referencias

Koehler, M., Mishra, P. y Cain, W. (2013). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)? *Journal of Education*, *193*(3), 13–19. https://doi.org/10.1177/002205741319300303

García-Zabaleta, E., Sánchez-Cruzado, C., Santiago Campión, R. y Sánchez-Compaña, M. T. (2021). Competencia digital y necesidades formativas del profesorado de Educación Infantil. Un estudio antes y después de la Covid-19. *Edutec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, *76*, 90-108. https://doi.org/10.21556/edutec.2021.76.2027

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Gavilán-Izquierdo, J. M. y Gallego-Sánchez, I. (2023). Cómo integran tecnología los estudiantes para maestro de educación infantil para enseñar matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 577). SEIEM.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LENGUAJE INCONSISTENTE POR UN ALUMNO CON AUTISMO

Inconsistent language problem solving by a student with autism

Goñi-Cervera, J.[a], Jacinto, H.[b] y Polo-Blanco, I.[a]

[a]Universidad de Cantabria, [b] Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Los problemas verbales describen situaciones donde se presentan una o más preguntas que pueden resolverse empleando operaciones matemáticas a partir de los datos presentados en el enunciado. Pueden clasificarse como de lenguaje consistente o inconsistente, según si la operación aritmética requerida para su resolución es coherente con el término relacional del enunciado o no (Lewis y Mayer, 1987). Los problemas de lenguaje inconsistentes son más difíciles de resolver, pues pueden ser resueltos incorrectamente poniendo el foco en palabras clave, en lugar de construir un modelo de la situación descrita (Daroczy et al., 2015). En el caso de los estudiantes con autismo, algunas características propias del trastorno pueden dificultar la ejecución de acciones necesarias para resolver un problema matemático (Polo-Blanco et al., en prensa). Poniendo el foco en el tipo de lenguaje, Goñi-Cervera et al. (2022) analizaron el desempeño de tres estudiantes con autismo al resolver problemas aritméticos de suma y resta. Los tres estudiantes mostraron dificultades en los problemas de lenguaje inconsistente. Polo-Blanco et al. (en prensa) examinaron la efectividad de una instrucción modificada basada en esquemas (MSBI) con tres estudiantes con dificultades en matemáticas (dos con autismo). Esta metodología fue eficaz en la resolución de problemas aditivos de cambio, en particular los de lenguaje inconsistente. Continuando en esta línea, nos proponemos profundizar en las dificultades que muestra un estudiante de 7 años con autismo al resolver problemas aditivos de comparación de lenguaje inconsistente (PCLI), así como conocer qué aspectos de una metodología MSBI han sido favorecedores para mejorar la comprensión de los problemas de lenguaje inconsistente. La instrucción siguió la secuencia: modelo, práctica guiada y evaluación, y el estudiante contaba con los siguientes apoyos: organizador gráfico, bloques manipulativos, hoja de trabajo y hoja de pautas. Durante la línea de base, Sam mostró dificultades en la resolución de los PCLI y su desempeño mejoró durante la implementación de la metodología MSBI. Se describirán los aspectos que le hicieron mejorar e implicaciones para la práctica docente.

Referencias

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. y Nuerk, H. C. (2015). Word problems: a review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology, 6*(348), 1-13. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348

Goñi-Cervera, J., Polo-Blanco, I. y Bruno, A. (2022). El papel del lenguaje y del contexto en la resolución de problemas en alumnado con trastorno del espectro autista. *Formación del Profesorado en Educación Matemática*, 14, 71-85.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology 79*, 363-371. https://doi.org/10.1037/0022-0663.79.4.363

Polo-Blanco, I., González, M.J., Bruno, A. y González, J., (en prensa). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly*. Advance online publication. https://doi.org/10.1177/07319487211061421

Goñi-Cervera, J., Jacinto, H. y Polo-Blanco, I. (2023). Resolución de problemas de lenguaje inconsistente por un alumno con autismo. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 578). SEIEM.

DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN. UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE MATEMÁTICAS

Mathematical induction proof. A study with undergraduate Mathematics students

Herrera-Dévora, K. y Camacho-Machín, M.

Universidad de La Laguna

El aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes universitarios ha resultado ser un tema de investigación relevante en los últimos años. Jerez-Santana y Camacho-Machín (2021) concluyen, en un estudio realizado con estudiantes universitarios que existe "predilección por un argumento de tipo deductivo-simbólico, y señalan también que "existe una tendencia mayoritaria a construir de argumentaciones de tipo deductivo", así como una resistencia a seleccionar la argumentación visual para justificar cualquier tipo de relación, ya sea geométrica o numérica. En relación con la prueba por inducción matemática, diferentes estudios han evidenciado que los estudiantes son capaces de emular los procedimientos necesarios para realizar las demostraciones pese a que carecen, en muchos casos, de la comprensión conceptual del significado de dicha demostración. Relaford-Doyle y Núñez (2021) indagan sobre la naturaleza de las dificultades que poseen los estudiantes, que han trabajado el método de inducción en sus clases, para comprender el significado de la inducción haciendo uso de pruebas visuales. Concluyen que los conocimientos de los estudiantes sobre este método de demostración son principalmente de naturaleza procedimental y está íntimamente relacionado al método algebraico. El uso de un nuevo sistema de representación gráfico no facilita su comprensión conceptual.

En esta investigación se presentan los resultados obtenidos en un estudio realizado con 115 estudiantes del Grado de Matemáticas (96 de primer curso y 19 de cuarto). Se trata de realizar una adaptación de la investigación desarrollada por Relaford-Doyle y Núñez (2021) con los objetivos de analizar si esa comprensión procedimental asociada al método de demostración existe en nuestros estudiantes, si perdura a largo de sus estudios y cuál es el valor que dan a los argumentos visuales que se le presentan para ayudar a entender la prueba por inducción. Para ello, se diseñó un cuestionario, en el que se trataba de que conjeturasen y probasen una igualdad algebraica a partir de la presentación gráfica (mediante un diagrama) de casos particulares. A continuación, se pedía que hiciesen la demostración de su conjetura por inducción. Posteriormente se les preguntaba por la validez y utilidad de los diagramas presentados.

Del análisis de los resultados obtenidos en el cuestionario, se concluye que la mayoría de los estudiantes han sido capaces de conjeturar el resultado a probar haciendo uso de lo que Relaford-Doyle y Núñez (2021) denominan "inducción informal" y más de un 60% de los estudiantes de los dos niveles, fueron capaces de llevar a cabo el procedimiento formal de la demostración (62,5 % de primero y 73,76% de cuarto). Sin embargo, se puede concluir que los estudiantes cuarto curso son más capaces de interpretar la relación visual que existe en el paso visual del caso n al $n+1$, pese a que en ningún caso superaron la mitad de los encuestados (47,4% y 35,4% respectivamente). Finalmente, la mayoría de los estudiantes consideran que los diagramas pueden servir de apoyo para explicar la demostración, pero no válidas por sí mismas.

Referencias

Jerez-Santana, K. O. y Camacho-Machín, M. (2021). Preferencias de los esquemas para la prueba de estudiantes de los grados de Matemáticas y Física. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 660). SEIEM.

Relaford-Doyle, J. y Núñez, R. (2021). Characterizing students' conceptual difficulties with mathematical induction using visual proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *7*, 1–20 https://doi.org/10.1007/s40753-020-00119-4

Herrera-Dévora, K. y Camacho-Machín, M. (2023). Demostración por inducción. Un estudio con estudiantes del grado de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 579). SEIEM.

DOCENTES EN FORMACIÓN: ESTUDIO EXPLORATORIO DEL CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO EN FRACCIONES

Teachers in training: an exploratory study of pedagogical knowledge in fractions

Herreros-Torres, D.[a], Sanz, M. T.[a] y Gómez-Ferragud, C. B.[b]

[a]Dpto. de Didáctica de la Matemática, UVEG; [b]Dpto. de Didáctica de las Ciencias, UVEG

La formación docente se ha convertido en un tema significativo alrededor del mundo debido a la atribución de su calidad como deficiente por parte de muchas naciones, registrándose, además, un menor énfasis en el desarrollo de la competencia pedagógica durante su formación, frente a la disciplinar (Trippestad et al., 2017). En este sentido, unido a ello la existencia evidente de carencias a nivel disciplinar y didáctico en la formación de futuros docentes sobre el dominio de los números racionales (Getenet y Callingham, 2021) y la escasa consideración del significado de operador frente a otros significados (Kieren, 2020), en la presente investigación se indaga acerca del conocimiento pedagógico que presenta sobre el concepto de fracción y su significado concreto de operador. Estos pertenecen a 3.º y 4.º curso del Grado en Maestro en Educación Primaria de una universidad española y para ello se les suministra el instrumento *Content Representation* (*CoRe*) tratándose de un cuestionario que atiende a tres focos: estudiantes, metodología y currículo.

Los objetivos marcados son: (1) evaluar el conocimiento pedagógico del contenido de fracciones del alumnado del Grado en Maestro de Educación Primaria, a través del instrumento adaptado y definido en un estudio previo y (2) valorar los efectos de la formación específica en Didáctica de la aritmética, en comparación con la formación en didáctica general durante el Grado.

Los resultados globales del cuestionario manifiestan un nivel bajo de conocimiento pedagógico respecto al contenido de fracciones; el punto medio de las puntuaciones no es superior en ningún caso a 2 puntos sobre 10, apuntando el RIC a valores comprendidos entre 0.00 y 1.5. Asimismo, atendiendo a cada curso, 4.º curso presenta una mediana 0.10 puntos superior a 3.º (1.60;1.70), siendo la diferencia significativa (KW = 0.033; p-valor = 0.003). Efectivamente, las diferencias van a favor de 4.º, por sus puntuaciones más altas, sin embargo, no se puede apuntar a un gran efecto en los resultados por parte de la asignatura de Didáctica de la Aritmética que únicamente cursa 4.º, puesto que solo mejoran significativamente dos de las seis cuestiones que conforman el instrumento y el resultado global. Como futuro, a la luz de lo obtenido parece oportuno evaluar hasta qué punto los maestros de primaria en formación están adquiriendo suficiente conocimiento pedagógico en matemáticas y, en concreto, en relación con el contenido de fracción y su significado de operador, para detectar los aspectos que podrían ser mejorados y así ofrecer una formación más competente.

Referencias

Getenet, S. y Callingham, R. (2021). Enseñanza de conceptos interrelacionados de fracción para la comprensión y el conocimiento del contenido pedagógico del docente. *Revista de investigación en educación matemática, 33*, 201–221. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00275-0

Kieren, T. E. (2020). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En Leinhardt, G., Putnam, R y Hattrup, R. A. (Eds.). (1992). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323–371). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044606

Trippestad, T., Swennen, A. y Werler, T. (Eds.). (2017). The Struggle for Teacher Education: International Perspectives on Governance and Reforms. *Center for Educational Policy Studies Journal*, *8*(2), 139–42. https://doi.org/10.26529/cepsj.548

Herreros-Torres, D., Sanz, M. T., y Gómez-Ferragud, C. B. (2023). El docente como clave en el desempeño del estudiantado en resolución de problemas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 580). SEIEM.

IDENTIDAD MATEMÁTICA DE DOCENTES REFLEJADA A TRAVÉS DE UNA EXPERIENCIA DE PROBABILIDAD

Teachers' mathematics identity reflected through a probability task

Irigoyen-Carrillo, M. E.[a], González-Astudillo, M. T.[a] y Alvarado-Monroy, A.[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universidad Juárez del Estado de Durango

Diversos estudios, como Alston et al. (2007) y Schoor et al. (2010), han tratado temas relacionados con las creencias, actitudes, emociones, motivación e interés que posee un individuo respecto a la matemática. En ellos se sostiene que tanto los estudiantes como los docentes desarrollan identidades con respecto a las prácticas matemáticas en las que están involucrados y que estas identidades forman parte de una red más amplia de identidades basadas en interacciones entre pares, en aspectos socioculturales, preferencias e intereses. Específicamente, la identidad matemática (IM) (Goldin, 2007) se concibe como una estructura afectiva que codifica el sentido personal de uno mismo –quién soy– con respecto a las matemáticas.

La IM del docente se ve como una estructura dinámica que se modifica a lo largo del tiempo y con un consenso general sobre su contexto. Así, las historias personales desde la enseñanza, como las de aprendizaje, se moldean y se convierten en parte de su identidad.

En esta investigación se informa sobre la IM de tres docentes de educación básica en México al experimentar una situación de aprendizaje en la que se estudian ideas matemáticas de azar y probabilidad, desde un espacio de colaboración y exploración en el aula. Para ello, se ha recurrido a la metodología de estudio de caso (Yin, 2018) a fin de reconocer rasgos en la IM, desde un enfoque cognitivo y afectivo, relacionados con la actuación y participación de los docentes durante la experiencia. Este análisis ha permitido establecer la IM de cada docente mediante los rasgos distintivos de cada uno de ellos.

Dicha investigación invita a reflexionar cómo las condiciones del diseño de tareas matemáticas y las interacciones transforman positivamente la IM del docente de una manera que pueda ser proyectada hacia sus estudiantes.

Referencias

Alston, A., Goldin, G., Jones, J., McCulloch, A., Rossman, C., y Schmeelk, S. (s. f.). The complexity of affect in an urban mathematics classroom. En L. Lamberg, y L. Wiest, *Exploring mathematics education in context: Proceedings of the 29th annual meeting of PME-NA* (pp. 326-333). University of Nevada.

Goldin, G. (2007). Aspects of Affect and Mathematical Modeling Processes. En Lesh, R. A., Hamilton, E. y Kaput, J. J. (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education*. (pp. 281-296). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781003064527-17

Schoor, R., Epstein, Y., Warner, M., y Arias, C. (2010). Don't disrespect me: Affect in an urban math class. En P. Lesh, C. Galbraith, R. Haines y A. Hurford Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13 (pp. 313-325). NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_27

Yin, R. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. SAGE Publications Ltd.

Irigoyen-Carrillo, M. E., González-Astudillo, M. T. y Alvarado-Monroy, A. (2023). Identidad matemática de docentes reflejada a través de una experiencia de probabilidad. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 581). SEIEM.

ORGANIZACIÓN DE DATOS EN EDUCACIÓN INFANTIL EN EL CONTEXTO DEL CUENTO "EL MONSTRUO DE COLORES"

Organisation of data in early childhood education in the context of the story "The Color Monster"

Izagirre, A. y López, A.

Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

La literatura infantil es un recurso muy utilizado para trabajar el lenguaje oral y escrito, la imaginación, la dimensión cultural, la transmisión de valores, etc. pero, además, es un medio ideal para trabajar aspectos matemáticos (Flecha, 2012). Concretamente, Alsina (2017) propone la utilización de cuentos para trabajar aspectos estadísticos de forma contextualiza y es que el aprendizaje de la estadística ayuda a desarrollar el pensamiento crítico y es importante introducirla desde Educación Infantil (Alsina, 2017).

En este estudio se han llevado a cabo una serie de actividades basándonos en el cuento "El monstruo de colores" en un aula de 4º de Educación Infantil con 8 niños y 12 niñas. Tras leer el cuento, entender y unir el nombre de cada emoción con el sentimiento, identificar cada sentimiento con un color, etc. se desarrolló la parte de la actividad con relación al tratamiento de datos. Se lanzó una pregunta y cada alumna/o eligió el monstruo con el color que mejor describía sus sentimientos y estos se clasificaron en categorías. El siguiente paso fue trasladar esa información a una tabla de frecuencias donde las frecuencias absolutas se describían de forma pictórica utilizando gomets, mediante recuento utilizando rayas verticales y, finalmente, mediante números naturales. Se mencionaron también los conceptos de mínimo, máximo, moda y se representaron los datos mediante un diagrama de barras donde las niñas y los niños representaban la unidad.

Analizando las tablas de frecuencias creadas por los 20 niños y niñas, los resultados muestran que la corrección de la representación de las frecuencias absolutas mediante:

1) Representación pictórica: Correcta (40%), parcialmente correcta (15%), sin terminar (15%) incorrecta (30%), vacía (0%).

2) Representación mediante recuento: Correcta (20%), parcialmente correcta (5%), sin terminar (15%), incorrecta (0%), vacía (60%).

3) Representación mediante números naturales: Correcta (10%), parcialmente correcta (0%), sin terminar (10%), incorrecta (0%), vacía (80%).

Como conclusión destacamos que, aunque la mayoría de niñas y niños han participado de forma activa y a pesar de que la primera representación la hayan realizado todos, solamente el 40% ha intentado realizar la segunda representación mediante recuento y un 20% la representación mediante números naturales lo cual consideramos insuficiente. Por todo ello, creemos que esta primera actividad ha valido como introducción a la organización de datos, pero debemos seguir profundizando en el tema planteando más actividades similares al alumnado de Educación Infantil.

Referencias

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon- Revista de Educación Matemática*, *34*(95), 25-48. https://thales.cica.es/epsilon_d9/sites/default/files/2023-04/epsilon95_2.pdf

Flecha, G. (2012). Matemáticas y literatura de 0 a 3: Ricitos de Oro y los tres osos. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 72-77. https://revistas.uva.es/index.php/edmain/article/view/5814/4327

Izagirre, A. y López, A. (2023). Organización de datos en educación infantil en el contexto del cuento "El monstruo de colores". En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 582). SEIEM.

AUTORREGULACIÓN Y APRENDIZAJE COOPERATIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL ALUMNADO DEL GRADO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Self-Regulation and Cooperative Learning for Mathematical Problem Solving of Primary Pre-service Teachers

Landa, J[a]., Berciano, A.[a] y Marbán, J. M.[b]

[a]Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, [b]Universidad de Valladolid

Diversas investigaciones señalan como elemento clave para el éxito académico del alumnado la capacidad de autorregulación que tiene de su propio aprendizaje, especialmente en el área de matemáticas (Harding et al., 2019). En particular, en contextos de resolución de problemas matemáticos, y de acuerdo con la Teoría del Aprendizaje Autorregulado de Zimmerman (2002), marco teórico y conceptual de este trabajo, entendemos que una autorregulación adecuada puede contribuir a una mejor comprensión del problema, a seleccionar estrategias válidas y a la gestión de las eventuales dificultades durante la tarea, así como al control de las emociones durante el proceso de resolución de problemas matemáticos. A través de este póster, se presentan, de forma muy sintética, resultados procedentes de un diseño de investigación orientado a analizar, a través de una propuesta didáctica basada en los principios del aprendizaje cooperativo, la evolución del nivel de autorregulación del alumnado del Grado de Educación Primaria en contextos de resolución de problemas matemáticos. El estudio queda contextualizado en el marco de la asignatura Matemática y su Didáctica I de primer año del grado en su curso académico 2022/23. El instrumento empleado para la medición de los niveles de autorregulación del alumnado antes y después de la implementación de la propuesta didáctica mencionada es una escala validada de tipo Likert con 7 puntos (Landa, Berciano y Marbán, 2021). Los valores de la media (M) y desviación típica (DT) obtenidos en el pre-test son M = 4.8 y DT = .6 siendo en el post-test M = 5.1, DT = .5. Estando próximas las medias, de cara a analizar si su diferencia es estadísticamente significativa se realiza el correspondiente contraste estadístico. Al satisfacerse las hipótesis tanto de normalidad (Kolmogorov-Smirnov > .05) como de homocedasticidad, se aplica la prueba T de Student cuyo p-valor = .01 < .05 indica que las diferencias entre el pre-test y el post-test sí son significativas, lo que en principio apunta a un impacto positivo del aprendizaje cooperativo sobre el nivel de autorregulación del alumnado, si bien es preciso llevar a cabo más experimentos similares con nuevas muestras, considerando también interesante analizar la evolución de los niveles de autorregulación atendiendo a perfiles de autorregulación que puedan identificarse previamente.

Referencias

Harding, S.-M., English, N., Nibali, N., Griffin, P., Graham, L., Alom, B. y Zhang, Z. (2019). Self-regulated learning as a predictor of mathematics and reading performance: A picture of students in grades 5 to 8. *Australian Journal of Education*, *63*(1), 74-97. https://doi.org/10.1177/0004944119830153

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. (2021). Autorregulación y resolución de problemas matemáticos en el alumnado del grado en Educación Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (p. 662). Valencia: SEIEM.

Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into practice*, *41*(2), 64-70. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4102_2

Landa, J., Berciano, A. y Marbán, J. M. (2023). Autorregulación y aprendizaje cooperativo para la Resolución de Problemas Matemáticos en el alumnado del Grado en Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 583). SEIEM.

APORTACIONES DE LAS PRIMERAS MUJERES DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN ESPAÑA

Contributions of the pioneering women in Didactics of Mathematics in Spain

León-Mantero, C.[a], Madrid, M. J[b], Maz-Machado, A.[a] y Casas-Rosal, J. C.[a]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

A mediados de los años ochenta del siglo pasado, en España se inició el reconocimiento de la Didáctica de la matemática como área de conocimiento propia en respuesta a la necesidad de establecer criterios de calidad en las investigaciones sobre Educación Matemática. A raíz de la creación de los Institutos de Ciencias de la Educación, comienza a fomentarse la investigación en este campo y la incorporación de asignaturas de Didáctica de las Matemáticas a los planes de estudio de formación de maestros. Así, la Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria [LRU] (1983), incluye por primera vez a la Didáctica de la Matemática como una de las áreas de conocimiento en las que se organiza la Universidad. En el seno de estas unidades organizativas, se comenzó a fomentar la formación de personal, la provisión de recursos materiales y, en general, el desarrollo de esta disciplina en nuestro país, tanto a nivel de docencia como de investigación (Rico Romero et al., 2002). Docentes e investigadores en matemáticas de todo el país, tuvieron entonces que tomar la importante decisión de elegir si el área de conocimiento a la que querían estar adscritos y en la cual desarrollar su labor docente e investigadora iba a ser Didáctica de la Matemática. Entre los miembros de esta comunidad, podemos encontrar a un grupo de mujeres que en los últimos años han comenzado a jubilarse, cuya labor y constancia a lo largo de sus carreras científicas y académicas han colmado de prestigio a las Universidades españolas a las que pertenecían pero que, a pesar de ello, en algunos casos, no alcanzaron las categorías profesionales más altas tan rápido como sus compañeros hombres.

En concreto, en este trabajo se presenta el proyecto titulado "Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: trayectorias académicas, contribuciones y obstáculos superados" solicitado en el marco de la Convocatoria de la Submodalidad 2.6. UC♀IMPULSA del Plan Propio de Investigación 2022 de la Universidad de Córdoba, cuyo objetivo consiste en poner en valor las aportaciones docentes e investigadoras de estas mujeres, que ayudaron a consolidar esta área de conocimiento, trabajando en la mejora de la calidad de los planes de formación de maestros y profesores desde la investigación en Educación Matemática.

El tipo de diseño de este estudio es descriptivo-explicativo, y está basado en una metodología mixta, que analiza en profundidad la información recogida de los relatos personales de las docentes e investigadoras, así como los datos relativos a su producción científica, para determinar la influencia que su contribución ha tenido en el área. Las primeras actividades realizadas en el marco del proyecto han consistido en el diseño de la entrevista y en la realización de las cinco primeras reuniones con las siguientes docentes e investigadoras: Dolores Carrillo Gallego, Pilar Orús Báguena, Eva Cid Castro, Maite González Astudillo y María del Carmen Chamorro.

Referencias

Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria (1983, 1 de septiembre). *Boletín Oficial del Estado, 1983*(209), 24034-24042. Recuperado de https://www.boe.es/diario_boe/

Rico Romero, L., Sierra Vázquez, M., y Castro Martínez, E. (2002). El área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. *Revista de Educación, 328*(2002), 35-58.

León-Mantero, C., Madrid, M. J., Maz-Machado, A. y Casas-Rosal, J. C. (2023). Aportaciones de las primeras mujeres del área de Didáctica de la Matemática en España. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 584). SEIEM.

EL USO DE LA REGLA A TRAVÉS DE ACTIVIDADES EN CONTEXTOS DE MEDIDAS NO ENTERAS EN UN PROGRAMA DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

The use of the rule through activities in contexts of non-whole measurements in a diversity attention program

López-Iñesta, E. [a], Gómezescobar, A. [b], Sanz, M.T. [a]

[a] Universitat de València, [b] Universidad Autónoma de Madrid

Varios estudios apuntan a la dificultad que tiene el estudiantado para identificar el papel que juega cada elemento en la regla: números, marcas y unidades (Congdon et al. 2018; Sisman y Aksu, 2016). Estas dificultades se observan a través de las estrategias adoptadas por el alumnado en sus mediciones. Este trabajo presenta los resultados de una batería de problemas realizada por 30 estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) del Programa de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento (PMAR) en el curso 2021/2022 para valorar su conocimiento acerca de la correcta interpretación de los elementos que componen la regla en un contexto de medidas no enteras. Los problemas se debían resolver empleando distintos formatos de reglas graduadas no convencionales diseñadas ad-hoc con marcas que muestran fracciones propias, impropias y números mixtos. El alumnado debe ser capaz de reflexionar que los números naturales son insuficientes para expresar el resultado de una medida si la cantidad a medir no contiene un número entero de veces igual a la unidad de medida utilizada. En estos casos, el estudiantado debería reconocer que hay que emplear una parte de la unidad para realizar el proceso de medida y que para obtener esta parte hay que proceder a un fraccionamiento de la unidad. Sin embargo, los resultados muestran que, en este contexto de medidas no enteras, el estudiantado, aunque está cursando ESO, incurre en errores propios de educación infantil o primaria cuando mide con una regla un objeto de n unidades enteras desde un punto distinto del cero (Gómezescobar et al., 2023). En particular, el análisis de la resolución de los problemas muestra que la mayoría del alumnado no realiza una correcta interpretación de los números (no tiene en cuenta el concepto de acumulación de distancia, se fija en el extremo derecho, ignorando que el objeto está desplazado y no parte de la marca del cero), ni de las marcas (pues las interpretan como unidades en lugar de como delimitadores de las mismas). Estos resultados sugieren la necesidad de una buena enseñanza de instrumentos de medición como las reglas, así como una mayor formación en cuanto al análisis gráfico de sus elementos.

Agradecimientos

Proyectos UV-SFPIE_PIEE-2736877, UV-SFPIE_PIEC-2737017 y FCT-22-17979

Referencias

Congdon, E. L., Kwon, M. K. y Levine, S. C. (2018). Learning to measure through action and gesture: Children's prior knowledge matters. *Cognition, 180*, 182-190. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2018.07.002

Gómezescobar, A., Rodrigues, M. y Fernández-Cézar, R. (2023) Children's understanding of length measurement using a ruler in preschool and primary education: A cross-national longitudinal study. *The Journal of Mathematical Behavior, 69*(101048), 1-11. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101048

Sisman, G. T. y Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1293-1319. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.400

López-Iñesta, E., Gómezescobar, A. y Sanz, M. T. (2023). El uso de la regla a través de actividades en contextos de medidas no enteras en un programa de atención a la diversidad. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 585). SEIEM.

ANÁLISIS DE LOS REGISTROS DE LA PLATAFORMA MOODLE EN UNA ASIGNATURA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Analysis of the moodle platform records in a subject of didactics of mathematics

López-Iñesta, E., Sanz, M.T., Garcia-Costa, D. y Grimaldo, F.

Universitat de València

El uso de Entornos Virtuales de Aprendizaje ha jugado un papel fundamental al permitir el diseño de diferentes actividades para el seguimiento y evaluación del alumnado, así como la obtención de registros cuyo análisis contribuye al estudio de los patrones de aprendizaje del estudiantado y de la práctica docente (López-Iñesta et al., 2018; Sanz et al., 2020). Entre las plataformas más empleadas en el ámbito de la Educación Superior destaca Moodle.

Este trabajo presenta un estudio piloto enmarcado en el área de la analítica de datos en educación o *Learning Analytics* (Romero y Ventura, 2020) que trata de aprovechar los datos que se generan a diario de la interacción de estudiantes y docentes en los sistemas de aprendizaje humano-computador. El análisis de los registros de Moodle de 120 estudiantes de la asignatura Didáctica de las Matemáticas del Grado de Maestro en Educación Infantil y Primaria de una universidad española ayuda a establecer un perfil del alumnado en relación a su participación en las actividades de la plataforma. En concreto, el estudio de la interacción en los foros nos permite distinguir distintos patrones en función de si el foro está moderado por el profesorado o no. Así, se pueden distinguir comunidades de estudiantes que colaboran con sus pares y están interesados en sus aportaciones al foro y responden a los comentarios y se observa que hay estudiantes que escriben sus comentarios y no vuelven a interaccionar ni colaborar. Los registros de Moodle también suponen una ventaja para analizar la planificación docente y evaluar qué recursos funcionan mejor y cuáles se deben mejorar. En este sentido, los foros de tutoría, las tareas voluntarias y las páginas web con material complementario y los artículos de investigación son los que menos visitas tienen en la plataforma. Esta información sirve como resultado de investigación para valorar la propia actuación docente, replanificar contenidos y organizar actividades.

Agradecimientos

Proyecto CIAICO/2022/154

Referencias

López-Iñesta, E., Garcia-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E. (2018). Read&Learn: una herramienta de investigación para el aprendizaje asistido por ordenador. *Magister: Revista miscelánea de investigación, 30*(1), 21-28. https://doi.org/10.17811/msg.30.1.2018.21-28

Sanz, M. T., López-Iñesta, E., Garcia-Costa, D. y Grimaldo, F. (2020). Measuring arithmetic word problem complexity through reading comprehension and learning analytics. *Mathematics, 8*(9), 1556. https://doi.org/10.3390/math8091556

Romero, C. y Ventura, S. (2020). Educational data mining and learning analytics: An updated survey. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery, 10*(3), e1355. https://doi.org/10.1002/widm.1355

López-Iñesta, E., Sanz, M. T., Garcia-Costa, D. y Grimaldo, F. (2023). Análisis de los registros de la plataforma Moodle en una asignatura de didáctica de las matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 586). SEIEM.

EL CONCEPTO DE PERÍMETRO Y ÁREA SEGÚN FUTUROS DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

The concept of perimeter and area according to pre-service elementary school teachers

López-Serentill, P.[a] y De la Fuente, A.[b]

[a]Universidad de Girona, [b]Universidad Autónoma de Barcelona, Ins Angeleta Ferrer

Los estudiantes de los grados de Educación Infantil y Primaria vienen con unos conocimientos previos adquiridos que no siempre son correctos o del todo precisos. Es importante tener un buen conocimiento de estos conceptos preadquiridos para poder construir encima de ellos, modificar o incluso deconstruir y así formar unas bases matemáticas sólidas, básicas para su futura tarea docente.

La asignatura de *Matemáticas II* de tercero de Educación Primaria está dedicada a los saberes matemático-didácticos referentes a los sentidos de medida y espacial. Al inicio de la asignatura se pidió a los 62 alumnos que definieran los conceptos de perímetro y área. La práctica de definir supone, en muchos casos, un reto para profesores y estudiantes de cualquier nivel educativo. Generar, conocer y dominar una definición requiere de un conocimiento profundo del contenido y de la forma en que la matemática se construye (Pascual et al., 2019). A demás de ayudar en la tarea de formación docente para identificar los conocimientos previos de los alumnos, la práctica de definir tiene otros objetivos pedagógicos como fomentar la comprensión del elemento matemático involucrado, de la naturaleza de una definición y de su papel en la práctica matemática (Edwards y Ward, 2008). En este trabajo pretendemos describir qué características presentan las definiciones dadas por los estudiantes a los conceptos de perímetro y área. A partir de las definiciones dadas y de los resultados obtenidos, se diseñaron actividades matemático-didácticas durante el curso para poder vivenciar y corregir los errores conceptuales sobre estos conceptos matemáticos, ligados a saberes del currículum de matemáticas de primaria y que, por tanto, deberán dominar en su futura práctica docente.

Según la Real Academia de la Lengua Española, entendemos el *perímetro* como la media del contorno de una figura y *área* como la extensión de una superficie expresada en una determinada unidad de medida. Para analizar las definiciones se utilizó el análisis de contenido descrito por Krippendorff (1990). Los resultados muestran que en general los alumnos que ingresan en el grado de Educación Primaria no disponen de definiciones suficientemente buenas sobre los conceptos de perímetro y área y que por tanto será de vital importancia redefinirlos a partir de actividades vivenciales que les ayuden a entender estos conceptos correctamente durante su formación docente.

Referencias

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463-471). SEIEM.

Edwards, B. y Ward, M. B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223-232). Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.018

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.

López-Serentill, P. y De la Fuente, A. (2023). El concepto de perímetro y área según futuros docentes de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 587). SEIEM.

ELEMENTOS DE EUCLIDES EN EL SIGLO DE ORO ESPAÑOL

Euclid's elements in the Spanish golden century

Maz-Machado, A.[a], León-Mantero, C.[a] , Madrid, M. J.[b] y Rodríguez-Baiget, M. J.[a]

[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

Se considera que el siglo de oro español abarca desde el descubrimiento de América (1492) hasta la publicación de la *Gramática* de Antonio Lebrija en 1659, en este periodo se produce un auge en la publicación de libros impresos facilitado por la popularización de la imprenta. Los libros impresos permitieron a los autores discutir sus teorías y experimentos (Henry, 2002). Además, permitieron el intercambio de información y la preservación del conocimiento científico a lo largo del tiempo (Rico y Maz, 2005). Esto permitió la difusión del conocimiento científico en el siglo XVI y XVII, y facilitó el surgimiento de la ciencia moderna (Sánchez-Ron, 2003). Las matemáticas no fueron ajenas a este fenómeno. Este avance permitió a los matemáticos producir diagramas y gráficos con mayor facilidad y precisión, ayudándoles a explicar sus ideas de manera más clara y concisa. Hizo que las matemáticas fueran más accesibles para un público más amplio. Un aspecto importante y especifico es que también facilitó la estandarización de la notación y la terminología matemáticas. En el ámbito español, un hecho destacado es que se publican libros en castellano abandonando paulatinamente el latín.

Una constante a lo largo del tiempo es la reproducción de los *Elementos* de Euclides a través de manuscritos y luego mediante libros impresos. Debemos destacar que en España se publican diversas versiones de los *Elementos* de Euclides. El objetivo de este estudio es identificar y caracterizar las versiones de los *Elementos* que se publicaron en España en castellano en el siglo de oro. Para ello se han realizado búsquedas en los repositorios virtuales de bibliotecas y universidades, así como en Google books. Para el análisis se ha seguido la metodología propuesta por León-Mantero y otros (2023). Se han identificado cuatro obras. La primera traducción impresa de los elementos son *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides. Traduzidos en le[n]gua española...* realizada por Rodrigo Zamorano en Sevilla en 1576. Pedro Ambrosio de Ondériz publica en Madrid en 1585 la traducción de la óptica y la catóptrica de Euclides bajo el titulo *La perspectiva y especulativa de Euclides*. En ella, señala que la realiza para dar cumplimiento al mandato de Felipe II respecto a que en la Academia de Matemáticas de la Corte se leyesen las matemáticas en lengua castellana. En 1637 Luis Carduchi publica *Elementos geometricos de Euclides philosopho megarense: sus seys primeros libros* en Alcalá de Henares. En ninguna de estas obras se traduce la totalidad de los libros que componen los elementos, pese a que se conocen varios manuscritos previos y posteriores a la imprenta que si lo hacen como por ejemplo, el de Rodrigo de Porras: *Textos de los 15 libros de elementos de Euclides*.

Referencias

Henry, J. (2002). *The Scientific Revolution and the Origins of Modern Science*. Palgrave Macmillan.

León-Mantero, C., Madrid, M. J., y Maz-Machado, A. (2022). La evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto sobre trigonometría publicados en España. En Fernández-Plaza, J. A., Lupiáñez, J. L., Moreno, A., y Ramírez, R. (Eds.), I*nvestigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia* (pp. 213-230). Octaedro.

Rico, L., & Maz, A. (2005). Matemáticas, libros y matemáticos: un recorrido por su historia y su relación con la enseñanza en España. *El libro español de Matemáticas*, 11-35

Sánchez Ron, J.M. (2003). El impacto de la imprenta en la ciencia y la tecnología. *Arbor, 178*(702), 329-338.

Maz-Machado, A., León-Mantero, C., Madrid, M. J. y Rodríguez-Baiget, M. J. (2023). Elementos de Euclides en el Siglo de Oro español. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 588). SEIEM.

CARACTERÍSTICAS DEL DISCURSO MATEMÁTICO DE UN PROFESOR DURANTE LA ENSEÑANZA

Characteristics of the mathematical discourse of a teacher during teaching

Múnera, N.

Universitat Autònoma de Barcelona

El discurso matemático se puede entender como un tipo de comunicación en contexto (Sfard, 2012), el cual se compone de formas y funciones (Halliday, 2014). Este discurso involucra componentes propuestos por Sfard (2012) y por Adler y Ronda (2015), los cuales permiten considerar que el discurso matemático del profesor durante la enseñanza puede ser estudiado a partir de sus partes. En el caso particular de esta investigación, el discurso del profesor puede ser analizado y caracterizado a partir de funciones del discurso.

Las funciones identificadas e interpretadas en el discurso matemático del profesor son de tipo ideacional y textual (Halliday, 2014). Las funciones ideacionales posibilitan producir significado entorno a contenidos matemáticos y se interpretan en la introducción de cálculos aritméticos, nombres, representaciones y ejemplos. Las funciones textuales combinan significados producidos con el uso de funciones ideacionales y se interpretan en narraciones, explicaciones y conexiones entorno a contenidos matemáticos. También se han identificado funciones con peticiones tanto ideacionales como textuales. Durante la enseñanza de la función cuadrática, algunas funciones del discurso matemático del profesor son: nombra vocabulario como raíces; representa gráfica y algebraicamente la función cuadrática; ejemplifica la función cuadrática con diferentes coeficientes; narra características del discriminante de las funciones cuadráticas ejemplificadas; explica razones matemáticas para desarrollar procedimientos en la graficación de los ejemplos; y conectan representaciones, características y/o procedimientos para producir significado matemático.

A partir del análisis de las funciones en el discurso matemático del profesor se identifican dos características. La primera, este discurso usa predominantemente funciones de tipo ideacional, petición-ideacional y petición-textual; las funciones textuales aparecen con poca frecuencia cuando: 1) el profesor responde preguntas que le hacen los estudiantes y responde preguntas realizadas por él mismo que los estudiantes no responden o responden con errores; 2) el profesor anticipa la respuesta a una posible pregunta o situación, sin una pregunta previa. La segunda, este discurso tiene como hilo conductor las funciones con peticiones ideacionales y textuales; el profesor constantemente realiza preguntas a los estudiantes relacionadas con los significados producidos en clase y las relaciones entre estos significados, lo que genera que las peticiones tengan un papel protagónico en este discurso matemático.

Referencias

Adler, J. y Ronda, E. (2015). A Framework for Describing Mathematics Discourse in Instruction and Interpreting Differences in Teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3), 237-254. https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1089677

Halliday, M. A. K. (2014). *Halliday's introduction to functional grammar*. Routledge.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse — Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013

Múnera, N. (2023). Características del discurso matemático de un profesor durante la enseñanza. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 589). SEIEM.

CONEXIONES MATEMÁTICAS INTERDISCIPLINARES EN EDUCACIÓN INFANTIL

Interdisciplinary mathematical connections in early childhood education

Novo, M. L.[a], Sanz, P.[b] y Cuida, A.[a]

[a]Universidad de Valladolid, [b]CEO ATENEA (Valladolid)

A partir de la pregunta de investigación ¿cómo contribuyen las conexiones interdisciplinares desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil? se ha llevado a cabo una exploración de las conexiones de aprendizaje temprano entre la expresión musical, plástica y corporal y las matemáticas en un aula de 5 años. Cuyos objetivos han sido por una parte diseñar prácticas docentes para fomentar dichas conexiones y, por otra, analizar de forma sistemática las tareas recopiladas.

El diseño e implementación de las actividades se ha fundamentado en los principios de la EMR (Freudenthal, 1991), cuyas recomendaciones sugieren que los niños y niñas vayan construyendo su propio conocimiento matemático teniendo en cuenta las buenas prácticas de la maestra: utilizando de forma continua conversaciones, sugerencias al estilo de Malaguzzi (2007), planteando una propuesta docente basada principalmente en retos y cuestiones que brinden oportunidades de aprendizaje significativo para trabajar simultáneamente distintos sentidos matemáticos.

Las matemáticas nos permiten percibir el mundo desde sus distintas configuraciones. La mayoría de las facetas de nuestra vida, en cierto sentido, están vinculadas con ellas, ya que sus múltiples niveles de abstracción son "la materia prima" del pensamiento, de la comunicación, de la sociedad y de la vida (Devlin, 2002). Varios autores señalan que una forma de abordar estas configuraciones a nivel de educación infantil es a partir de distintos tipos de conexiones y diversos contextos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para avanzar hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades, en concreto se proponen situaciones de aprendizaje interdisciplinares. En particular, modelos de tareas para impulsar conexiones docentes (Alsina, 2012; Novo et. al., 2017). De acuerdo con estas ideas, se vinculan las experiencias matemáticas con otras materias y prácticas, que conectan las matemáticas con la vida cotidiana. Los niños y las niñas han sido, en todas las actividades los protagonistas. Desarrollando conceptos matemáticos a través de la música, de la expresión corporal y de la expresión plástica: lateralidad, patrones, secuencias temporales, relaciones entre objetos, secuenciaciones, colecciones, trayectos, simetrías, números con el cuerpo, formas planas, grafías y formas geométricas en el espacio y esculturas.

Se ha comprobado que a partir de las conexiones interdisciplinares se facilita la comprensión de los conceptos matemáticos trabajados a la vez que se consigue el progreso de la orientación competencial de la legislación educativa actual de Educación Infantil.

Referencias

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, 80*, 7-24.

Devlin, K. (2002). *El lenguaje de las matemáticas*. Ediciones Robinbook.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Malaguzzi, L. (2007). *El zapato y el metro*. Octaedro.

Novo, M. L., Alsina, À., Marbán, J. M. y Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Revista Comunicar*, *52*, 29-39. https://doi.org/10.3916/C52-2017-03

Novo, M. L., Sanz, P. y Cuida, A. (2023). Conexiones matemáticas interdisciplinares en educación infantil. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 590). SEIEM.

ACTITUDES AFECTIVAS DE ESTUDIANTES DE PRIMARIA ANTE UNA INSTRUCCIÓN BASADA EN EJEMPLOS USANDO UN SISTEMA TUTORIAL INTELIGENTE

Elementary students' attitudes towards example-based instruction using an intelligent tutoring system

Osorio-Utiel, L.[a], del Olmo-Muñoz, J.[a], González-Calero, J. A.[a], Arnau, D.[b], Arevalillo-Herráez, M.[b] y Arnau-González, P.[b]

[a]Universidad de Castilla-La Mancha, [b]Universitat de València

La resolución de problemas verbales ha tenido una importante presencia en los currículos escolares alrededor del mundo e, históricamente, es un dominio que ha resultado de interés para los investigadores en educación matemática (Verschaffel et al., 2020). Estos autores también señalan que los problemas verbales se encuentran entre las tareas que suelen resultar más complejas para los estudiantes de matemáticas. En este contexto, los sistemas tutoriales inteligentes pueden constituir herramientas de utilidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este trabajo evalúa el impacto del sistema tutorial inteligente HINTS en las actitudes afectivas de estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas con tecnología. El estudio, en el que participaron 78 estudiantes de 4º de Educación Primaria, tuvo un diseño experimental con el tipo de instrucción (aprendizaje basado en ejemplos correctos y basado en ejemplos erróneos) como factor inter-sujeto. La fase experimental constó en total de seis sesiones. De ellas, la primera y la última se destinaron a la recogida de información relacionada, entre otros aspectos, con las variables afectivas. En las sesiones intermedias, los participantes trabajaron individualmente con HINTS resolviendo aritméticamente problemas verbales. Aunque todos los estudiantes se enfrentaron a los mismos problemas verbales en cada sesión, la secuencia instruccional en la condición de control (CC) conllevaba el visionado previo de vídeos de ejemplos correctos de resoluciones de problemas en HINTS, mientras que los estudiantes en la condición experimental (CE) visionaban vídeos con ejemplos erróneos. Como instrumento para medir las actitudes afectivas se empleó la *Escala de actitudes matemáticas y tecnológicas* (Pierce et al., 2007), la cual evalúa cinco dimensiones: la confianza matemática, la confianza tecnológica, la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas utilizando la tecnología y el compromiso afectivo y conductual. Los resultados revelan que, en general, los estudiantes partían de un nivel elevado en todas las dimensiones evaluadas. A pesar de ello, tras trabajar con HINTS se observaron mejoras en las subescalas de confianza matemática y tecnológica, y de compromiso conductual. En cambio, no se observaron variaciones en las dimensiones restantes. Del mismo modo, no se observaron diferencias relevantes en las actitudes afectivas al realizar una comparativa entre CE y CC.

Agradecimientos

Proyectos SBPLY/19/180501/000278 (Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha) y 2022-GRIN-34039 (UCLM-FEDER), PGC2018-096463-B-I00 y AICO/2021/019.

Referencias

Pierce, R., Stacey, K. y Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. *Computers & Education*, *48*(2), 285-300.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J. y Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, *52*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

Osorio-Utiel, L., del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M. y Arnau-González, P. (2023). Actitudes afectivas de estudiantes de primaria ante una instrucción basada en ejemplos usando un sistema tutorial inteligente. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 591). SEIEM.

BRECHA DE GÉNERO EN LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS: UN ESTUDIO SOBRE LA GESTIÓN DEL ERROR

Gender gap in arithmetic problem solving: A study on error management

Pérez-Suay, A.[a], Arevalillo-Herráez, M.[a], Arnau, D.[a], García-Bayona, I.[a] y González-Calero, J. A.[b]

[a]Universitat de València, [b]Universidad de Castilla – La Mancha

La persistencia de la conocida como brecha de género en las titulaciones científico-técnicas ha producido la necesidad de investigar las causas que generan estas diferencias. Como una posible explicación a este fenómeno, Lubienski y cols. (2021) introdujeron el constructo *bold problem solving*. Básicamente, este constructo podría definirse como "una preferencia socializada por, y el uso de, enfoques inventivos para resolver problemas matemáticos" (p. 13) y podría explicar las diferencias de género a la hora de abordar tareas matemáticas no rutinarias. Aspectos cómo cuándo se inicia la materialización de este efecto social, y sobre si esto se refleja en otros aspectos de la actividad matemática necesitarían también de atención.

Dentro de un proyecto de investigación más amplio, presentamos resultados de un estudio que tenía como objetivo analizar la posible existencia de diferencias de género cuando alumnado de cuarto de primaria se enfrenta a la necesidad de afrontar situaciones de error mientras resuelve problemas verbales de manera aritmética. En concreto, el alumnado se enfrentaba a una colección de problema multietapa típicamente aritméticos que debían resolver bajo la supervisión de un sistema tutorial inteligente. El sistema era capaz de supervisar cada paso del resolutor/a indicando si este era correcto o no. En el caso que el sistema considerara incorrecta la acción, el sujeto debía producir nuevos intentos hasta conseguir generar una acción correcta. Cuando el problema era resuelto de manera correcta, el sistema proporcionaba automáticamente otro problema. El alumnado podía abandonar un problema en cualquier momento pulsando un botón implementado a tal efecto. Toda la información de la interacción entre sujeto y computadora se almacenaba en una base de datos. El objetivo concreto para el que presentamos resultados era determinar si se observaban diferencias, en función del género del participante, en la gestión de las situaciones donde éste recibía mensajes de error por parte del sistema.

Los resultados muestran que los chicos producían un mayor porcentaje de intentos correctos sobre el número de intentos por paso (53.1%) frente a las chicas (50.3%), pero, en cambio, producían un menor porcentaje de éxitos en la resolución completa del problema (83.3% para las chicas, 77.9% para los chicos). Como la no resolución completa de un problema implicaba su abandono, podemos concluir un menor esfuerzo por parte de los chicos que participaron en el estudio al afrontar situaciones que les presentaron dificultad.

Agradecimientos

Proyectos TED2021-129485B-C42, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea "NextGenerationEU/PRTR"; AICO/021/019, financiado por la Generalitat Valenciana; y 2022-GRIN-34039 (UCLM-FEDER).

Referencias

Lubienski, S. T., Ganley, C. M., Makowski, M. B., Miller, E. K. y Timmer, J. D. (2021). "Bold problem solving": A new construct for understanding gender differences in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *52*(1), 12–61. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0136

Pérez-Suay, A., Arevalillo-Herráez, M., Arnau, D., García-Bayona, I. y González-Calero, J. A. (2023). Brecha de género en la resolución aritmética de problemas: un estudio sobre la gestión del error. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 592). SEIEM.

ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA: PRIMEROS PASOS PARA COMPRENDER EL TEOREMA DE PITÁGORAS

Analysis of a teaching proposal: first steps to understand the Pythagorean Theorem

Pizarro, N.[a], Guede-Cid, R.[b], Belmonte, J.M.[c] y Mendez-Coca, M.[c]

[a] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, [b] Universidad Rey Juan Carlos, [c] Universidad Complutense de Madrid

El trabajo es parte de un proyecto de cuatro años de colaboración entre investigadores-formadores y profesores de centros escolares que buscan promover un aprendizaje bidireccional sobre las prácticas de aula en geometría y medida en Chile. Los objetivos son: 1) diseñar una propuesta docente para la enseñanza-aprendizaje del Teorema de Pitágoras para estudiantes de 13 años utilizando material manipulativo y 2) analizar cualitativamente los resultados alcanzados por los alumnos.

La propuesta consta de cuatro clases de 90 minutos que fueron grabadas. Evitando la simplificación conceptual y la práctica mecánica de los algoritmos, se propone a los estudiantes la construcción de triángulos rectángulos con material manipulativo y la reflexión-análisis sobre las medidas de sus lados. Como resultado, vivenciaron la importancia del ángulo recto como referencia en la construcción de los triángulos rectángulos y descubrieron relaciones de proporcionalidad entre las ternas pitagóricas, anticipando un criterio de semejanza de los triángulos.

Referencias

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas 70*, 35-51.

Beltrán-Pellicer, P. (2022). El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas. La *Gaceta de la RSME, 25*(1), 149-169.

Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., Castillo-Céspedes, M. J., Vallejos-Meléndez, D. y Picado-Alfaro, M. (2020). ¿Qué modos de uso propone el profesorado de matemáticas en formación inicial para la enseñanza del teorema de Pitágoras en educación secundaria? *Uniciencia, 34*(1), 88-110. http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-1.6

González, P. (2008). Un teorema llamado de Pitágoras. S*igma Revista de Matemáticas, 32*(8), 103-130.

Maschietto, M. (2018). Graphic calculators and micro-straightness: analysis of didactical engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 207-230. https://doi.org/10.1007/s10758-008-9141-7

Moutsios-Rentzos, A., Spyrou, P. y Peteinara, A. (2014). The objectification of the right triangle in the teaching of the Pythagorean theorem: An empirical investigation. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 29–51. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9498-y

Perry, P. (2000). Una propuesta para abordar el Teorema de Pitágoras en clase. *Revista EMA, 2*(5), 152-169.

Reyes-Rodríguez, A. V., Rondero-Guerrero, C., Acosta-Hernández, J. A., Campos-Nava, M. y Torres-Rodríguez, A. A. (2017). Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del Teorema de Pitágoras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31,* 968-983. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a06

Sinclair, N., Pimm, D., Skelin, M. y Zbiek, R. M. (2012). *Developing essential understanding of geometry for teaching mathematics in grades 6-8.* NCTM.

Pizarro, N., Guede-Cid, R., Belmonte, J. M. y Mendez-Coca, M. (2023). Análisis de una propuesta de enseñanza: Primeros pasos para comprender el Teorema de Pitágoras. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 593). SEIEM.

MODELACIÓN PROBABILÍSTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Probabilistic modelling in Mathematics teachers' training

Rifo, L.

Universidade Estadual de Campinas, Brasil

En la literatura de investigación se han discutido diversos abordajes sobre la mejor manera de enseñar el cálculo de probabilidades, de modo que potencien la construcción del pensamiento probabilístico y del pensamiento inferencial o estadístico (Aridor y Ben-Zvi, 2018; Castilla-Mora et al., 2021; Guerrero Treviño, 2017; Martignon, 2019). Este trabajo es parte de un estudio empírico observacional sobre la enseñanza de probabilidad mediante problemas de modelación matemática (Borovcnik y Kapadia, 2011) en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas de educación secundaria.

Presentamos la aplicación de un problema de determinación de un criterio óptimo de parada de muestreo como ejemplo de un proceso de toma de decisiones en situación de incertidumbre (Rifo et al., 2022), que fue extraído y adaptado de un libro clásico sobre modelos de urna y bolas (Johnson y Kotz, 1977, p. 305-10). Los conocimientos movilizados en la actividad son: cálculo de probabilidades con modelos de urna y bolas, muestreo sin reemplazo y valor esperado de una función de utilidad. Nuestro objetivo principal es identificar y analizar los argumentos que surgen en sala durante el proceso de resolución, destacando el grado de adhesión a la actividad y de maduración alcanzado en el razonamiento probabilístico desarrollado para establecer la estrategia óptima de decisión. Como objetivo secundario, pretendemos estructurar posibilidades de mediación que pueden hacerse en el aula, como respuesta a las dificultades que surgen en la comprehensión del experimento.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado al amparo de 2013/07375-0 CEPID CeMEAI - Center for Mathematical Sciences Applied to Industry.

Referencias

Aridor, K. y Ben-Zvi, D. (2018). Statistical modeling to promote students' aggregate reasoning with sample and sampling. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 1165-81. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0994-5

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2011). Modelling in probability and statistics, key ideas and innovative examples. En J. Maasz y J. O'Donoghue (Eds.), *Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students: Case Studies* (pp. 1-43).

Castilla-Mora, L., Rifo, L., y Climent, N. (2021). Conocimiento de futuros profesores sobre incertidumbre. En P. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 189-96). Valencia: SEIEM.

Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro, J. J., y Contreras García, J. M. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (11), 107–125. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.170

Johnson, N. y Kotz, S. (1977). *Urn models and their applications*. Wiley.

Martignon, L. (2019). How to foster risk literacy in children and youngsters. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* https://www.ugr.es/~fqm126/pagesCIVEEST/ponencias.html.

Rifo, L. (2023). Modelación probabilística en la formación de profesores de matemáticas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 594). SEIEM.

ANÁLISIS DE SOLUCIONES A PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE UNA HERRAMIENTA DE PROGRAMACIÓN POR BLOQUES EN ALUMNADO CON TALENTO MATEMÁTICO

Analysis of solutions to proposed problems on a Block-based Programming Tool in Mathematically Talented Students

Rotger, L. y Ribera, J. M.

Universitat de les Illes Balears

El alumnado con altas capacidades matemáticas suele presentar rasgos comunes como la habilidad para razonar analítica y espacialmente, resolver problemas con rapidez y precisión, identificar la clave de los problemas, acortar procesos de resolución u obtener resultados creativos (Gutiérrez y Jaime, 2015). Además, los problemas contextualizados de modelización matemática favorecen la creación de modelos de diferente tipo que permiten abordar la resolución de estos problemas (Montejo-Gámez et al., 2018). Con el interés de facilitar la aparición de soluciones alternativas entre este tipo de alumnado, las herramientas tecnológicas de modelado tridimensional y programación por bloques pueden generar un contexto propicio para el uso de bloques de código de diferente tipo (Beltrán-Pellicer y Muñoz-Escolano, 2021). Por tanto, el objetivo de esta propuesta es el de analizar las diferentes soluciones que aporta el alumnado con talento matemático ante los problemas de geometría tridimensional en un contexto de programación por bloques sobre la herramienta BlocksCAD.

La experiencia se ha llevado a cabo a partir de las producciones realizadas por el alumnado del programa Estalmat. El objetivo de los problemas propuestos es el de crear modelos de figuras tridimensionales sobre la herramienta BlocksCAD que cumplan características determinadas fijadas en relación a la forma, tamaño o el número de vértices/aristas/caras. Estas tareas incluyen la necesidad del uso de bloques de código para realizar operaciones lógicas de conjuntos, transformaciones geométricas o el uso de formas geométricas de diferente tipo. En concreto, se ha realizado un análisis de las secuencias alternativas de bloques de código y de las figuras geométricas tridimensionales que dan respuesta a los problemas propuestos. Se presenta el estudio realizado sobre las 30 producciones de los 15 participantes de 1º de Estalmat (12 y 13 años) realizada en los cursos 21/22 y 22/23.

Como principal resultado, se encuentran soluciones alternativas en todos los problemas propuestos en línea con Beltrán-Pellicer y Muñoz-Escolano (2021) y Montejo-Gámez et al. (2018). Así mismo, también se plantean soluciones que aprovechan la potencia de la programación por bloques, minimizando el número de instrucciones acortando procesos de resolución. También se destaca la creatividad mostrada por el alumnado con talento matemático en la selección de las formas geométricas que dan respuesta los problemas.

Agradecimientos: Proyecto PID2020-117395RB-I00 del MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Beltrán-Pellicer, P. y Muñoz-Escolano, J. M. (2021). Una experiencia formativa con BlocksCAD con futuros docentes de matemáticas en secundaria. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas*, *10*, 71-90. https://doi.org/10.1344/did.2021.10.71-90

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53-83. https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6106

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 368-377). SEIEM

Rotger, L. y Ribera, J. M. (2023). Análisis de soluciones a problemas propuestos sobre una herramienta de programación por bloques en alumnado con talento matemático. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 595). SEIEM.

PROPUESTA INTERDISCIPLINAR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Interdisciplinary proposal for teaching mathematics in preschool

Sáez-Maestro, E. y Rubio-Sánchez, A.

Centro Universitario de Educación ESCUNI

Trabajar de manera interdisciplinar consiste en abordar varias disciplinas de manera conectada y con un aprendizaje auténtico y aplicado (Nguyen, 2021). Los conocimientos adquiridos durante la formación docente han sido tradicionalmente de carácter teórico y descontextualizado, llevando a que los docentes no logren enfrentar con éxito los problemas que presenta la realidad educacional (Cárdenas et al., 2001). Especialmente en el ámbito educativo, esto ha llevado a que la enseñanza interdisciplinar haya recibido una atención considerable en los últimos años (Nguyen, 2021). Pese a las dificultades de la implementación de proyectos interdisciplinares, se requiere presentar a las matemáticas en contextos más amplios y sintetizadas con otras materias curriculares (Nguyen, 2021). Por tanto, es importante que cuenten con instrumentos que promuevan esta metodología desde las edades más tempranas, surgiendo por tanto la necesidad de llevar esta práctica a la formación del profesorado en Educación Infantil (Alsina et al., 2021).

Siguiendo esta línea se presenta una propuesta de proyecto interdisciplinar consistente en la autoedición de un material didáctico que trabaja los contenidos de las asignaturas de "Desarrollo del pensamiento lógico-matemático y su didáctica I", "Adquisición y desarrollo del lenguaje" y "Creatividad" correspondientes al segundo curso del grado en Educación Infantil. Se ha implementado en el curso 22/23 y en él han participado, a lo largo de 11 semanas, 136 alumnos del Centro Universitario de Educación ESCUNI. En grupos de trabajo, han recorrido las etapas de descubrimiento, ideación, preparación, testeo en centro educativo real y presentación de su trabajo.

La evaluación de este proyecto se ha realizado usando tres instrumentos. En primer lugar, un cuestionario final en escala Likert sobre su percepción de la mejora en su formación docente en este ámbito. También se les plantearon dos preguntas abiertas relacionadas con sus aprendizajes adquiridos y, por último, un contraste pre y post intervención. Los resultados son interesantes, y reflejan una mejora porcentual de la percepción general de la interdisciplinariedad como metodología educativa de un 11.57%. En el caso concreto de matemáticas, su percepción para trabajarlas de manera interdisciplinar ha aumentado significativamente en un 13.57% ($t=5.54$, $p<.001$). Con los resultados obtenidos se concluye que el proyecto enriquece la formación docente, en línea con las necesidades actuales que expresa Cárdenas et al. (2001) de formar a unos docentes con capacidad analítica y estrategias para mejorar su práctica profesional.

Referencias

Alsina, Á., Cornejo-Morales, C., y Salgado, M. (2021). Argumentación en la matemática escolar infantil: Análisis de una actividad STEM usando la Situación Argumentativa en Conexión Interdisciplinar. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 141–159. https://doi.org/10.35763/aiem20.3999

Cárdenas Pérez, A., Castro Orellana, R., y Soto Bustamante, A.M. (2001). El desafío de la interdisciplinariedad en la formación de docentes. *Revista electrónica diálogos educativos 1*(1), 17-30.

Nguyen Phuong, C. (2021). Teaching Mathematics through interdisciplinary projects: a case study of Vietnam. *International Journal of Education and Practice 9*(4), pp 656-669. 10.18488/journal.61.2021.94.656.669

Sáez-Maestro, E. y Rubio-Sánchez, A. (2023). Propuesta interdisciplinar para la enseñanza de las Matemáticas en Educación Infantil. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 596). SEIEM.

ANÁLISIS DE LA INTERACCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS REALISTAS CON ALUMNOS DEL PROGRAMA DE DIVERSIDAD CURRICULAR

Analysis of the interaction in the resolution of realistic problems with students of the Curricular Diversity Program

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M.

Dpto. Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca

La interacción que tiene lugar en las aulas durante la resolución conjunta de problemas ha suscitado interés en la Educación Matemática puesto que facilita la autoconstrucción del aprendizaje de los alumnos. La investigación ha mostrado que existe un escaso razonamiento y participación de los alumnos cuando se enfrentan a problemas rutinarios y aumenta cuando se tratan de problemas no rutinarios (Sánchez-Barbero et al., 2020). Pero hay escaso conocimiento de qué ocurre cuando los alumnos pertenecen al Programa de Diversidad Curricular (PDC).

Este estudio analiza la interacción profesor-alumnos cuando resuelven conjuntamente problemas verbales realistas (PVR) con alumnos PDC de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Entendemos por PVR aquellos problemas que reproducen situaciones reales y cuya resolución demanda, además de un razonamiento matemático, un razonamiento situacional (Verschaffel et al., 1994). Para ello, se seleccionaron dos grupos (uno ordinario, Ord y otro de PDC) de 3º de ESO en la asignatura de Matemáticas, con el mismo profesor, que aceptó ser grabado en audio mientras resolvían 10 PVR extraídos de Verschaffel et al. (1994) en sus aulas habituales. Transcritas las interacciones, se organizaron en ciclos (Wells, 1999) y se categorizaron atendiendo a los *Procesos Cognitivos* (*Selección* e *Integración*) y *Metacognitivos* (*Generalización* y *Regulación*) promovidos en la interacción (Sánchez-Barbero et al., 2020).

Los resultados muestran que, en los *Procesos Cognitivos*, tanto los alumnos de Ord como los de PCD dirigieron sus ciclos a procesos de *Integración* (84.30% y 75.72%, respectivamente) y, en los *Procesos Metacognitivos* los dirigieron a la *Regulación* (81.33% y 62.50%, respectivamente). Llama la atención cómo en la promoción de ciclos dirigidos a la *Generalización* los alumnos de PCD superan a los alumnos de Ord ampliamente (Ord: 18.67%; PCD: 37.50%). De modo que el razonamiento promovido en ambas aulas es similar, aunque la capacidad de *Generalización* de los alumnos de PCD es superior a la de los alumnos de Ord. Estos resultados tienen implicaciones educativas y abren paso a futuras investigaciones donde se profundice, por ejemplo, en analizar la influencia de la utilización de PVR con alumnos de PCD si lo que se desea es que los alumnos promuevan un mayor razonamiento.

Agradecimientos: Trabajo derivado del proyecto PIC2-2022-05 financiado por la Universidad de Salamanca

Referencias

Sánchez-Barbero, B., Chamoso, J.M., Vicente, S. y Rosales, J. (2020). Analysis of teacher-student interaction in the joint solving of non-routine problems in Primary Education Classrooms. *Sustainability, 12*(24), 10428. https://doi.org/10.3390/su122410428

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lassure, S. (1994). Realistic consideration in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction, 4*(4), 273-294. https://doi.org/10.1016/0959-4752(94)90002-7.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education.* Cambridge University Press.

Sánchez-Barbero, B., Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2023). Análisis de la interacción en la resolución de problemas realistas con alumnos del Programa de Diversidad Curricular. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 597). SEIEM.

RELACIÓN ENTRE LA ANSIEDAD SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LA REALIZACIÓN DEL PRÁCTICUM EN DOCENTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN

Relationship between the practices and the anxiety about the teaching of mathematics in Pre-Service Primary School Teachers

Santágueda-Villanueva, M.[a], Lluch-Peris, A.[b], Lorenzo-Valentín, G.[a] y Roig-Albiol, A.[a]

[a]Departament d'Educació i Didàctiques Específiques, UJI. [b] Departament Matemàtiques, UJI.

Los futuros maestros y maestras ingresan en el Grado en Maestro/a de Educación Primaria con unos niveles de conocimiento matemático muy variados (Nortes-Martínez-Artero y Nortes-Checa, 2018). Todos los que concluyan sus estudios de grado, sin distinción, cursarán las diversas asignaturas de Didáctica de la Matemática, así como los diferentes Prácticums, de manera que antes de ejercer como maestros en activo, ya habrán tenido la oportunidad de trabajar las matemáticas con su alumnado en los centros de prácticas. Se constata que muchos de ellos y ellas presentan ansiedad hacia las matemáticas (Caballero, 2013) y también ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas (a partir de ahora AEM) (Gómez y Caballero, 2017). La AEM se define como los sentimientos de tensión de los docentes cuando se enseñan conceptos matemáticos, teorías y fórmulas o durante la resolución de problemas. Esta AEM puede disminuir (Gómez y Caballero, 2017) por las técnicas de enseñanza aprendidas y los estilos de aprendizaje, materiales manipulativos, estrategias creativas, etc.

El presente trabajo es un estudio exploratorio realizado durante los cursos 2019-2020 y 2020-2021 en el Grado de Maestro/a de Educación Primaria de la Universitat Jaume I de Castelló en el que participaron dos grupos, uno en cada uno de los cursos. El primer grupo formado por 161 alumnos y alumnas, habían realizado sus prácticas curriculares antes de cursar la asignatura Didáctica de la Matemática I mientras que el segundo grupo, compuesto por 99 alumnos y alumnas, realizó sus prácticas después de cursar la mencionada asignatura. Ambos grupos al inicio de la asignatura cumplimentaron el cuestionario *Mathematics Teaching Anxiety Scale* de Peker (2006) traducido en Gómez y Caballero (2017). El equipo investigador realizó un análisis descriptivo e inferencial similar al realizado por las autoras y observamos diferencias significativas.

Agradecimientos Esta investigación se ha realizado en el marco del proyecto de investigación UJI-A2022-01.

Referencias

Caballero, A. (2013). *Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial* [Tesis doctoral, Universidad de Extremadura]. Repositorio institucional de la Universidad de Extremadura http://dehesa.unex.es:8080/handle/10662/590

Gómez, R. y Caballero, A. (2015). La ansiedad de los estudiantes para maestro ante la enseñanza de las matemáticas. En L. Blanco, J. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 59-80). Universidad de Extremadura. https://dehesa.unex.es/handle/10662/5241

Nortes-Martínez-Artero, R. y Nortes-Checa, A. (2018). ¿Tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 397-406). SEIEM.

Peker, M. (2006) Matematik Öğretmeye Yönelik Kaygi Ölçeğinin Geliştirilmesi. *Journal of Educational Sciences & Practices*, *5*(9), 73-92.

Santágueda-Villanueva, M., Lluch-Peris, A., Lorenzo-Valentín, G. y Roig-Albiol, A. (2023). Relación entre la ansiedad sobre la enseñanza de las matemáticas y la realización del prácticum en docentes de Educación Primaria en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 598). SEIEM.

ENSEÑANZA DE LA ENCRIPTACIÓN Y EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN UN ENTORNO VIRTUAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Teaching encryption and computational thinking in a virtual environment: an exploratory study

Sanz-Herranz, H. y Cuida, A.

Universidad de Valladolid

La encriptación es una técnica crucial para proteger información confidencial y se puede analizar desde diferentes marcos teóricos del pensamiento computacional (Moreno et al., 2019). Desde la perspectiva del pensamiento algorítmico, se entiende como un proceso de transformación de información clara en ilegible, y viceversa. Además, desde el enfoque del pensamiento creativo, la encriptación es una oportunidad para desarrollar habilidades de resolución de problemas y creatividad. Asimismo, es importante destacar que el pensamiento computacional se ha incorporado recientemente en el currículo escolar, gracias a la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE). Por lo tanto, es más pertinente que nunca investigar sobre la didáctica del pensamiento computacional, cómo enseñarlo de forma eficaz y cómo fomentar las habilidades inherentes a este tipo de pensamiento (Rodríguez García et al., 2020).

La enseñanza de la encriptación, puede servir como una oportunidad para que el alumnado desarrolle habilidades y competencias fundamentales del pensamiento computacional, así como para concienciarlo sobre la importancia de proteger su información personal y privada en el mundo digital.

Para ello, se ha desarrollado una secuencia de actividades en un entorno virtual, inspirada en la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje en el sentido de Clemens y Sarama (2012), con el objetivo de explorar la enseñanza de la encriptación a través del pensamiento computacional. Esta secuencia de actividades se presentó de manera exploratoria a 1477 alumnos de entre 6 y 13 años, y se recopiló información de carácter mixto sobre tasas de efectividad, tiempos de respuesta y valoraciones de los estudiantes sobre la percepción de las actividades.

Entre las conclusiones principales, se encontró que no existe diferencia significativa en cuanto a la efectividad entre géneros y que la edad no resulta relevante. Sin embargo, se destaca que las niñas valoraron más positivamente las actividades que los niños. En definitiva, la enseñanza de la encriptación a través del pensamiento computacional puede ser una herramienta valiosa para desarrollar habilidades y competencias esenciales en el mundo digital, y su didáctica debería ser objeto de investigación y desarrollo en el ámbito educativo.

Referencias

Clements, D. H., y Sarama, J. (2012). Learning trajectories in mathematics education. En Douglas H. Clements and J. Sarama (Eds.), *Hypothetical Learning Trajectories* (pp. 81-90). Routledge.

Moreno, J., Robles, G., Román, M., y Rodríguez, J. D. (2019). No es lo mismo: un análisis de red de texto sobre definiciones de pensamiento computacional para estudiar su relación con la programación informática. *RiiTE Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, (7). https://doi.org/10.6018/riite.397151

Rodríguez García, J. D., Moreno-León, J., Román-González, M., y Robles, G. (2020). LearningML: una herramienta para fomentar las habilidades de Pensamiento Computacional mediante proyectos prácticos de Inteligencia Artificial. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, *20*(63). https://doi.org/10.6018/red.410121

Sanz-Herranz, H. y Cuida, A. (2023). Enseñanza de la encriptación y el pensamiento computacional en un entorno virtual: un estudio exploratorio. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 599). SEIEM.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE UNA HERRAMIENTA DE RETROALIMENTACIÓN

Solving linear equations using a feedback tool

Sanz-Ruiz, M.[a], Diego-Mantecón, J.M.[a], Ortiz-Laso, Z.[a] y Blanco, T.F.[b]

[a]Universidad de Cantabria, [b]Universidad de Santiago de Compostela

En la transición de la aritmética al álgebra es común que se empiecen a trabajar conceptos propios de esta última a través de ecuaciones lineales (Gascón et al, 2017). La comprensión y resolución de estas ecuaciones conlleva dificultades y errores característicos en los alumnos de secundaria, como revelan los estudios de Pérez-Istúriz et al. (2019). El uso de herramientas tecnológicas de tutorización puede ayudar a los alumnos a solventar estos errores a través de un entrenamiento mediante retroalimentación formativa (Pinkernell et al., 2023).

En este estudio analizamos en qué medida la herramienta de tutorización STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel) puede ayudar a superar y comprender las dificultades con las que se encuentran los estudiantes de secundaria ante la resolución de ecuaciones lineales. STACK permite implementar gran variedad de ejercicios matemáticos en Moodle y ofrecer retroalimentación específica a los errores cometidos por cada alumno. En este caso se implementaron seis ecuaciones tomadas del estudio de Pérez-Istúriz et al. (2019). Para cada error identificado en estas ecuaciones se diseñaron diferentes retroalimentaciones con varios niveles de especificidad. Por ejemplo, un error común en la ecuación 3(-2x+1) = -x es el siguiente: -6x+1 = -x. A este error se proporcionó retroalimentación general (un símbolo '?' próximo al error), un comentario formativo (Comprueba si has aplicado correctamente la propiedad distributiva), y otro más específico (¿Has multiplicado el factor fuera del paréntesis por cada uno de los sumandos que están dentro?). Nuestro objetivo es conocer qué tipo de retroalimentación se adapta mejor a las edades y características de los estudiantes para poder proporcionar una formación específica que ayude a solventar las dificultades en estas tareas. La muestra está formada por 42 estudiantes de 3º y 4º de Secundaria Obligatoria. Los resultados obtenidos revelan que algunas retroalimentaciones son demasiado generales, evidenciando la necesidad de proporcionar una segunda, e incluso una tercera, pista para un mismo error.

Agradecimientos

Este trabajo recibe apoyo del proyecto AuthOMath, cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea (2021-1-DE01-KA220-HED-000032031; https://www.authomath.org/).

Referencias

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). SEIEM.

Pérez-Istúriz, M., Diego-Mantecón, J. M., Polo-Blanco, I. y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA, 13*(2), 84-103. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7613

Pinkernell, G., Diego-Mantecón, J. M., Lavicza, Z. y Sangwin, C. (2023). AuthOMath: Combining the Strengths of STACK and GeoGebra for School and Academic Mathematics. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, *18*(3), 201-204. https://doi.org/10.3991/ijet.v18i03.36535

Sanz-Ruiz, M., Diego-Mantecón, J. M., Ortiz-Laso, Z. y Blanco, T. F. (2023). Resolución de ecuaciones lineales mediante una herramienta de retroalimentación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 600). SEIEM.

FINES, OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LAS MATEMÁTICAS PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA (1970-2020)

Purposes, objectives and contents of mathematics for secondary education in Spain (1970-2020)

Soto-Uruñuela, M.P.

Programa de doctorado en Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja

En este póster comparamos los fines, objetivos y contenidos establecidos por tres leyes con vigencia sucesiva a partir de los respectivos años de entrada en vigor: 1970 (LGE), 1990 (LOGSE) y 2013 (LOMCE), esta última vigente hasta 2020, para la educación matemática en España en la etapa de secundaria.

Hemos elaborado tablas en las que se muestran los fines a los que aspiran y los objetivos generales que pretenden conseguir las leyes estudiadas. Para poder comparar los fines, los hemos clasificado en tres apartados: 1º Conceptuales, cognitivos y de desarrollo, 2º Éticos y políticos, 3º Sociales. La comparativa de los fines muestra una gran diferencia en los éticos, políticos y sociales entre la LGE y las dos siguientes; no en vano, se refleja el paso de la dictadura a la democracia. Una gran ruptura educativa se produjo con la LOGSE al aumentar la edad obligatoria de escolarización hasta los 16 años, lo que conllevó un cambio en la estructuración de los periodos educativos.

Todas las leyes buscan la adquisición de hábitos de estudio y trabajo en los estudiantes. No obstante, se perciben formulaciones distintas, ampliación de objetivos y adaptaciones a las corrientes socioculturales de cada época. Encontramos también una importante evolución en los objetivos generales desde un punto de vista conductista hacia las competencias matemáticas.

Para poder analizar los cambios producidos en los contenidos, hemos elaborado tablas con las asignaturas que componen cada uno de los cursos académicos con su carga horaria, en correspondencia con los 5 bloques determinados por la LOMCE: 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; 2. Números y Álgebra; 3. Geometría; 4. Funciones; 5. Estadística y probabilidad.

Observamos el paso de una mera orientación sobre el desarrollo de los contenidos matemáticos a una disposición mucho más detallada y guiada, llegando a fijar los estándares de aprendizaje que se deben evaluar en cada bloque.

La comparación de los contenidos muestra la evolución en la manera más adecuada de enseñar las matemáticas, desde el estructuralismo formal de la "matemática moderna", pasando por el constructivismo, hasta la resolución de problemas, proceso en que se observa una continuidad en los contenidos matemáticos a lo largo de los años.

Referencias

Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J.L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945 – 2010. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 139-172.

Stenhouse, L. (1983). Curriculum research and the art of the teacher. En L. Stenhouse (Ed.), *Authority, education and emancipation* (pp. 155-162). Heinemann.

Soto-Uruñuela, M.P. (en preparación). Aspectos de la evolución curricular de las matemáticas para educación secundaria en España entre 1970 y 2020.

Soto-Uruñuela, M. P. (2023). Fines, objetivos y contenidos de las matemáticas para educación secundaria en España (1970-2020). En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 601). SEIEM.

PENSAMIENTO COMPUTACIONAL Y SU RELACIÓN CON VARIABLES COGNITIVAS EN EL ÁMBITO UNIVERSITARIO

Computational thinking and its relationship with cognitive variables at the university level

Ventura-Campos, N.[a], Pérez-Suay, A.[b] y Melchor-Borja, C. [b]

[a]Universitat Jaume I, [b]Universitat de València

La reciente incorporación del Pensamiento Computacional (PC) en los currículums de educación en todos niveles preuniversitarios abre una nueva línea de investigación en torno a diferentes agentes para su mejora desde las primeras edades (Kakavas y Ugolini, 2019). El objetivo de este estudio es evaluar qué nivel de PC tiene adquirido el estudiantado universitario y qué variables cognitivas y afectivas pueden estar relacionadas con el resultado obtenido ¿Qué tipo de estudiantado universitario tiene una mejor competencia en PC? ¿esta depende de las habilidades cognitivas y afectivas adquiridas durante la etapa preuniversitaria? Partiendo de este punto, se podrían realizar acciones concretas en la etapa escolar para poder incrementar el nivel de PC adquirido al finalizarla. En este trabajo se estudia el nivel de PC adquirido por una muestra de 97 estudiantes de universidad, teniendo en cuenta el tipo de titulación. Como instrumento de medición se utiliza la prueba de Román-González et al. (2017), reduciéndola a una subprueba con los ítems más complejos. Además, se analizan las respuestas a cuestionarios para medir la comprensión lectora, la actitud hacía las matemáticas, la inteligencia fluida y funciones ejecutivas como la flexibilidad cognitiva y la memoria de trabajo. Los resultados muestran diferencias significativas de nivel de PC entre el estudiantado de las titulaciones de Humanas y Sociales y el de Ciencias y entre el de las titulaciones de Ciencias de la Salud y de Ciencias. No se obtienen diferencias en PC entre el de Humanas y Sociales y el de Salud, siendo el alumnado de Ciencias el que tiene una mejor competencia en PC. Se repite el mismo patrón de diferencias entre tipo de titulaciones en la autopercepción que tiene el estudiantado sobre la ejecución de la prueba de PC y sobre su habilidad para el uso de las TIC. Comparando entre hombres y mujeres, son ellos quienes obtienen unos mejores niveles tanto en PC como en las dos variables de autopercepción. Esta tendencia se conserva cuando se reduce el análisis a la distinción por sexos y por tipo de titulación. Por otro lado, se observan correlaciones significativas positivas de nivel de PC con actitud hacia las matemáticas, comprensión lectora e inteligencia fluida. También se obtiene una correlación significativa entre el PC y la variable que evalúa la capacidad de razonamiento abstracto, la resolución de problemas y la flexibilidad cognitiva para encontrar una solución. Se observa que a mejor PC menor número de intentos en la resolución del problema planteado. No se encuentra relación de PC con memoria de trabajo. Concluimos que, las diferencias entre el estudiantado de Ciencias y el de las demás titulaciones manifiesta la importancia de diseñar programas de formación multinivel en PC para adaptarse a la diversidad de la escuela. Además, las programaciones en todos los ámbitos deberían considerar el trabajo en la mejora de comprensión lectora y del razonamiento abstracto para ayudar a mejorar el nivel de PC. Finalmente, los resultados sugieren que, si se logra mejorar la actitud hacia las matemáticas, es posible fomentar, desarrollar y mejorar las habilidades en PC en el estudiantado.

Referencias

Kakavas, P., y Ugolini, F. C. (2019). Computational thinking in primary education: A systematic literature review. *Research on Education and Media, 11*(2), 64-94. https://doi.org/10.2478/rem-2019-0023

Román-González, M., Pérez-González, J. C., y Jiménez-Fernández, C. (2017). Which cognitive abilities underlie computational thinking? Criterion validity of the Computational Thinking Test. *Computers in Human Behavior, 72,* 678-691. https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.08.047

Ventura-Campos, N., Pérez-Suay, A. y Melchor-Borja, C. (2023). Pensamiento computacional y su relación con variables cognitivas en el ámbito universitario. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 602). SEIEM.

EL PAPEL DEL ÁLGEBRA TEMPRANA COMO POSIBLE INDICADOR DEL ERROR DE INVERSIÓN

The role of early algebra as a possible indicator of the reversal error

Ventura-Campos, N.[a], Moreno-Rus, A.[a] y Pérez-Suay, A.[b]

[a]Universitat Jaume I (Castellón, España), [b]Universitat de València (Valencia, España)

El fenómeno del error de inversión (EI) se da cuando el estudiantado puede reconocer la información en el enunciado de los problemas verbales de comparación, pero invierten la relación entre dos variables al construir las ecuaciones algebraicas (Clement, 1982). En la resolución de problemas verbales toman un rol importante variables como la comprensión lectora, para el aprendizaje significativo del enunciado y variables cognitivo-conductuales, que son componentes cerebrales esenciales para el aprendizaje. Por tanto, conocer su relación con el EI parece esencial para encontrar métodos efectivos de enseñanza. Una de las variables a estudio se basa en la teoría de inteligencia fluida de Raymond Cattell, quien indica que la habilidad de resolver problemas nuevos y complejos está determinada por la capacidad innata de razonamiento abstracto en la identificación de patrones. Chimoni y Pitta-Pantazi (2015) sugieren que existe una relación significativa entre la inteligencia fluida y el pensamiento algebraico. El álgebra temprana introduce conceptos algebraicos y simbólicos en la educación matemática desde edades tempranas, enseñando al estudiantado a identificar patrones y regularidades en relaciones matemáticas. Kaput (2008) sostiene la importancia de la enseñanza del algebra temprana para ayudar al estudiantado a desarrollar habilidades en resolución de problemas matemáticos más complejos. El objetivo principal de nuestro estudio es descubrir la influencia que tienen variables cognitivo-conductuales en la comisión del EI. ¿Podría el algebra temprana ser un predictor de la eliminación de este error?

En este estudio han participado 102 estudiantes universitarios que completaron cuestionarios neuropsicológicos evaluando: comprensión lectora, inteligencia fluida, flexibilidad cognitiva y memoria de trabajo. Estos realizaron dos tareas para evaluar el EI, una con tiempo limitado de validación y otra con tiempo ilimitado de traducción a ecuación. Estas dieron lugar a tres grupos: Grupo-EI, cometen EI; Grupo No-EI, no cometen EI y Grupo-EI-CO, con EI condicionado por el factor tiempo en tarea, comenten EI con tiempo limitado, pero no con tiempo ilimitado. Se realizó un análisis no paramétrico de Kruskal-Wallis con SPSS. Los resultados obtenidos mostraron diferencias significativas entre grupos en inteligencia fluida y comprensión lectora, no encontrando en flexibilidad cognitiva ni memoria de trabajo. Los resultados parecen indicar que la inteligencia fluida, la cual asociamos al algebra temprana, es un indicador de la competencia algebraica en este tipo de problemas. Además, se observó una peor comprensión lectora en el Grupo-EI-CO, por lo que se podría inferir que este grupo tiene dificultades en la comprensión del enunciado, precisando de estrategias de validación para construir correctamente la ecuación.

Referencias

Chimoni, M., y Pitta-Pantazi, D. (2015). Connections between algebraic thinking and reasoning processes. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* CERME 9. Prague, Czech Republic (pp. 398-404).

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13(1),* 16–30.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Ventura-Campos, N., Moreno-Rus, A. y Pérez-Suay, A. (2023). El papel del álgebra temprana como posible indicador del error de inversión. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 603). SEIEM.

Índice de autores

Acosta, Y., 115, 451
Adamuz-Povedano, N., 11, 387, 411
Aguayo Cornejo, A. R., 557
Aguilar-González, Á., 558
Almeida, R., 27
Alonso-Ruano, B. M., 568
Alsina, Á., 115, 419, 451
Alvarado-Monroy, A. , 581
Anasagasti, J., 123
Anglada, L., 131, 243
Arce, M., 139
Arevalillo-Herráez, M., 591, 592
Arnau, D., 561, 575, 591, 592
Arnau-González, P., 591
Arriagada, V., 147
Ayala-Altamirano, C., 155, 427

Baccaglini-Frank, A., 79
Badillo, E., 187, 203
Belmonte, J. M., 593
Beltrán-Pellicer, P., 97
Benito, A., 576
Berciano, A., 123, 583
Bernabeu, M., 163
Blanco, T. F., 600
Branco, N., 89
Breda, A., 291, 515, 564
Brizuela, B. M., 43, 131
Bruno, A., 27, 219, 571
Buforn, À., 163, 227
Burgos, M., 171, 371, 559, 560

Cáceres, M. J., 597
Cañadas, M. C., 3, 131, 155, 243, 411, 435
Camacho-Machín, M., 579
Camargo, L., 179, 379
Campos-González, C., 561
Cancec-Murillo, G., 562
Cardeñoso, J. M., 443
Carrillo-Gallego, D., 483
Casas-Rosal, J. C., 331, 563, 584
Caviedes, S., 187
Chamoso, J. M., 597
Chaverri, J., 171, 559
Chico, A., 195
Chico, J., 203
Cid-Cid, A., 307
Climent, N., 195, 347
Codes, M., 347
Coles, A., 69
Conejo, L., 139
Contreras, D. A., 211
Contreras, L. C., 347
Cortés, A., 564
Cuida, A., 590, 599

Díez-Palomar, J., 259
Dólera-Almaida, J., 483
De Gamboa, G., 187
De la Fuente, A., 576, 587
del Olmo-Muñoz, J., 591
Di Martino, P., 79
Diago, P. D., 575
Diego-Mantecón, J. M., 600
Dolz, A., 565

Embid, S., 219
Escudero, A., 339
Escudero-Ávila, D., 307
Espinoza-González, J., 227
Esteve-Blasco, M., 566

Falcó Solsona, P. J., 235
Fernández, C., 147, 547
Fernández-Ahumada, E., 387
Fernández-Cézar, R., 299
Fernández-Cobos, R., 567
Fernández-Plaza, J. A., 539
Flores, P., 562
Flores-Medrano, E., 307
Font, V., 235, 315, 515
Frápolli, M. J., 499
Fuentes, S., 131, 243
Fuertes-Prieto, M. A., 566, 568

Gómez-Chacón, I. M., 475, 565
Gómez-Ferragud, C. B., 580
Gómez-Hurtado I., 195
Gómez-Veiga, I., 475
Gómezescobar, A., 585
Gallego-Sánchez, I., 577
García, F. J., 251
García-Alonso, I., 219, 570, 571
García-Bayona, I., 572, 592
García-Gómez, A., 573
García-Martínez, X., 569

García-Monge, A., 339
García-Moreno, M. A., 561
Garcia-Costa, D., 586
Garcia-Marques, M. E., 574, 575
Garcia-Mora, E., 259
Garrido-Martos, R., 576
Gascón, J., 251
Gavilán-Izquierdo, J. M., 577
Giacomone, B., 267
Giadas, P., 275
Giménez, J., 531
Goñi-Cervera, J., 578
González-Astudillo, M. T., 566, 581
González-Calero, J. A., 561, 591, 592
González-Sánchez, J., 571
Gonzales, C., 283
Grimaldo, F., 586
Guede-Cid, R., 593
Gutiérrez, Á., 211, 395, 523
Gutiérrez-Rodríguez I., 569

Helliwell, T., 69
Hernández-Córdoba, E., 570
Herrera-Dévora, K., 579
Herreros-Torres, D., 580
Hidalgo-Mocada, D., 315

Ibáñez-López, F. J., 483
Inglada, N., 291
Irigoyen-Carrillo, M. E., 581
Ivars, P., 547
Izagirre, A., 123, 582

Jacinto, H., 578
Jaime, A., 211, 395, 523
Jiménez-Alcázar, A., 299
Joglar-Prieto, N., 307, 403

López, A., 582
López-Iñesta, E., 585, 586
López-Martín, M. M., 560
López-Serentill, P., 587
Landa, J., 583
León-Mantero, C., 331, 563, 584, 588
Lebeña Cagigas, A. L., 567
Ledezma, C., 235, 315
Liñán-García, M. M., 403
Lijó Sánchez, R., 459
Lillo, E., 323
Llinares, S., 227, 323
Lluch-Peris, A., 598
Lorenzo-Valentín, G., 598

Múnera, N., 589
Madrid, M. J., 331, 563, 584, 588
Malkin, E., 69
Marbán, J. M., 339, 499, 583
Markiewicz, M. E., 363, 371
Martín-Díaz, J. P., 203, 347
Martín-Nieto, M., 355
Martínez-Jiménez, E., 387
Martínez-Juste, S., 97
Martiñán Otero D., 569
Maurandi-López, A., 483
Maz-Machado, A., 331, 563, 584, 588
Melchor-Borja, C., 574, 602
Mellone, M., 79
Mendez-Coca, M., 593
Milanesio, B., 363, 371
Molina, M., 155, 427
Molina, O., 179, 379
Montejo-Gámez, J., 387
Montes, M. A., 203, 443
Montoro, A. B., 562
Mora, M., 395
Moreno, A., 435, 467
Moreno, M., 323
Moreno-Rus, A., 603
Muñiz-Rodríguez, L., 275, 558
Muñoz-Catalán, M. C, 403
Muñoz-Escolano. J. M., 97

Narváez, R., 411
Nicolás, P., 251
Nolla, A., 576
Novo, M. L., 590

Olmos-Martínez G., 419
Ortiz-Laso, Z., 600
Orts, A., 323
Osorio-Utiel, L., 591

Pérez-Martos, M. C., 435
Pérez-Montilla, A., 443
Pérez-Suay, A., 572, 592, 602, 603
Pacheco, E., 427
Palop, B., 491
Pascual, M. I., 347
Pascual-Venteo, A. B., 572
Perdomo-Díaz, J., 219
Perry, P., 179, 379
Pincheira, N., 115, 451
Pinto, E., 155
Pizarro, N., 593
Pla-Castells, M., 574
Polo-Blanco, I., 195, 567, 571, 573, 578

Quevedo Gutiérrez, E., 459

Ramírez-García, M., 403
Reyes-Escobar, M., 467
Ribera, J. M., 595
Rifo, L., 594
Rodríguez-Baiget, M. J., 588
Rodríguez-Candelero, P., 567
Rodríguez-Miravalles, J., 576
Rodríguez-Muñiz, L. J., 61, 275, 491
Rodríguez-Muelas, D., 568
Rodríguez-Navarro, H., 339

Rodríguez-Sánchez, M. M., 568
Roig-Albiol, A., 598
Rojano, T., 562
Rotger, L., 595
Rubio-Sánchez, A., 475, 596
Ruiz-Hidalgo, J. F., 539
Ruiz-López, N., 355

Sáez-Maestro, E., 557, 596
Sánchez, A., 515, 564
Sánchez, E., 507
Sánchez-Barbero, B., 597
Sánchez-Jiménez, E., 483
Saá-Rojo, M. D., 483
Sala-Sebastià, G., 235, 291, 515
Samper, C., 179, 379
Santágueda-Villanueva, M., 598
Santaengracia, J. J., 491
Sanz, M. T., 580, 585, 586
Sanz, P., 590
Sanz-Herranz, H., 499, 599
Sanz-Ruiz, M., 600
Sepúlveda, F., 507
Sierra, T. A., 251
Sol, T., 515
Solano-Pinto, N., 299
Solar, H., 147
Sosa-Martín, D., 219
Soto-Uruñuela, M. P. , 601
Sua, C., 523
Tizón-Escamilla, N., 171, 559, 560
Torres, M. D., 435

Van Vaerenbergh, S., 572, 573
Vanegas, Y., 531
Vargas, J. P., 315, 531
Vargas, M. F., 539
Ventura-Campos, N., 602, 603
Verón, M. A., 267

Wilhelmi, M. R., 283

Zapatera Llinares, A., 459
Zorrilla, C, 547

Palabras Clave

Álgebra temprana, 427, 451
Área de figuras planas, 187

Actitudes, 123
Actividad cerebral, 339
Alta capacidad matemática, 211
Análisis bibliométrico, 411
Analogía, 523
Aprehensión cognitiva, 475
Aprendizaje, 89
Aprendizaje de la modelización matemática, 387
Argumentación, 147, 179
Argumentación práctica, 515
Argumento, 179
Argumentos del formador, 379

Cambio, 243
Cambio curricular, 69
Cantidades desconocidas, 155
Cantidades extensiva e intensiva, 283
Caracterización de tareas, 427
Clases de garantías y datos, 379
Competencias didácticas, 267
Componentes comunicativos , 147
Comunitaria, 69
Concepto de derivada, 323
Concepto de polígono, 163
Conexiones matemáticas, 187
Configuración epistémica, 259
Conflictos semióticos, 363
Conjeturar y demostrar, 139
Conocimiento del profesor, 347
Conocimiento especializado, 275
Conocimiento meta didáctico-matemático, 291
Conocimiento profesional del formador de docentes, 443
Conocimientos para enseñar matemáticas, 419
Constructivismo, 483
Contextos, 531
Creación de problemas, 171
Creatividad, 395
Creencias, 475
Criterios de Idoneidad Didáctica, 515
Criterios de idoneidad didáctica, 235, 291
Cultura de aula, 97
Currículo, 89, 97, 491
de matemáticas, 61

Definir, 347
Demanda cognitiva, 211, 539
Demostración, 363
Demostración matemática, 371
Desarrollo profesional, 147, 443
Descomposición aditiva, 403
Diagrama de Euler, 499
Diagrama de Venn, 499
Didáctica, 483
Diferencial, 267
Discusión en gran grupo, 355
Diseño de problemas, 211
Diseño de tareas escolares, 539
Diseño didáctico, 267
Diseño e implementación de tareas, 235
Distribución muestral empírica, 507
Distribución muestral simulada, 507

Early algebra, 243
Educación infantil, 115, 131, 163, 243, 451, 483
Educación matemática, 97
Educación primaria, 3, 11, 43, 275, 299, 427, 435, 499, 531, 547

Educación secundaria, 3, 27, 123, 211
Electroencefalografía, 339
Enactivismo, 69
Enfoque Ontosemiótico, 259, 371
Enseñanza a través de la resolución de problemas, 251
Enseñanza de la matemática., 539
Enseñanza de las funciones, 291
Equidistancia, 523
Escuela Infantil, 419
Escuela rural, 299
Estimación, 387
Estimación gráfica, 27
Estrategias, 467, 547
Estrategias de aprendizaje, 299
Estructuras, 131
Estudiantes para maestro, 139
Estudiantes universitarios, 371
Estudio de clases, 251
Experimento de enseñanza APOS, 323
Experimentos de enseñanza, 139

Flexibilidad, 395
Flexibilidad procedimental, 307
Flexibilidad representacional, 307, 403
Formación continua, 419
Formación de maestros, 203
Formación de profesorado, 539
Formación de profesores, 171, 179, 227, 267
Formación del concepto, 163
Formación del profesorado, 61, 97, 251, 355
de matemáticas, 69, 79
Formación del profesorado de matemáticas, 291
Formación docente, 89
Formación inicial, 307, 347
Formador de docentes, 443
Formador de profesorado de matemáticas, 275
Formulación de problemas, 203
Fracciones, 219, 307
Función real de variable real, 539
Funciones, 515
Funciones semióticas, 363
Futuros docentes, 219
Futuros maestros, 483
Futuros profesores, 315, 531

Generalización, 43, 195, 435
GeoGebra, 323
Geometría, 475, 531
Geometría dinámica tridimensional, 523
Geometría euclidiana, 179
Gráfica de la función derivada, 323

Historia de las matemáticas y educación matemática, 331

Inclusión, 195
Indagación matemática, 235
Inecuaciones, 427
Innovaciones curriculares, 79
Instrucción guiada, 163
Inteligencia fluida, 475
Intención didáctica, 203
Invención, 155
Invención de problemas, 219, 459
Investigación en educación matemática, 61
Isometrías, 355

Lesson Study, 515

Máquina de funciones, 131, 243
Métodos mixtos, 187
Maestros en formación inicial, 387
Matemáticas, 89, 483
Matemáticas emergentes, 419
Material TEACCH, 195
Materiales y recursos, 331
Mirar profesionalmente, 147, 227
Modelización matemática, 235, 315
Modelos concretos, 459
MTSK, 139
MTSK en Educación Infantil, 403

Números enteros, 459
Niveles de algebrización, 171
Niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, 163
Niveles de razonamiento algebraico, 371
Numeración temprana, 339

Oportunidad de aprendizaje, 355

Paradigmas didácticos, 251
Pensamiento algebraico, 3, 115, 411, 419
Pensamiento analítico, 155

Pensamiento computacional, 115, 491
Pensamiento estructural, 155
Pensamiento funcional, 131, 243, 435
Pensamiento numérico, 3
Perfiles de estudiantes, 27
Perpendicularidad, 523
Perspectivas locales, 79
Planificaciones, 467
Práctica educativa, 315
Práctica matemática, 347
Prácticas algebraicas, 43
Prácticas matemáticas en Educación Infantil, 403
Prensa para mujeres, 331
Primaria, 395
Principio de inducción, 363
Principio de variación, 547
Probabilidad, 123, 171
Problemas de construcción y demostración, 523
Problemas de estructura multiplicativa, 547
Problemas de Fermi, 387
Producción científica, 411
Profesorado en activo, 123, 275, 491
Profesorado en formación, 451
Profesores de primaria, 467
Proporcionalidad, 283
Pruebas de significación., 507
Puntos de referencia, 27

Rúbrica, 147
Racionalidad del formador de profesores de matemáticas, 379
Razonamiento, 499
Razonamiento proporcional, 171, 227
Razonamientos abductivos, 139
Reconocimiento de patrones, 115
Reflexión del profesor, 259
Registros de representación, 403
Regla de tres, 283
Relaciones con instituciones, 79
Relaciones escalar y funcional, 283
Rendimiento en matemáticas, 299
Representación, 43
Representación gráfica, 435
Representación no dinámica, 355
Representaciones, 547
Resolución de problemas, 195, 211, 395
Revisión de literatura, 411
Revisión sistemática, 11
Robots programables, 115
Ruta analítica, 179

Síndrome de Asperger, 195
Sentido algebraico, 155
Sentido numérico, 11, 27
Siglo XIX, 331
Silogismo, 499
Situación aditiva, 459

Técnicas tareas y ejemplos, 467
Talento matemático, 395
Tarea matemática, 451
Tareas aritméticas, 339
Tareas de formación profesional, 379
Tareas escolares, 531
Tareas para la formación de profesorado, 203
Tareas profesionales, 347
Tecnología, 89
Trabajo final de máster, 315
Transferencias entre dimensiones, 459

Variables, 219
Visualización, 475

Keywords

19th century, 331
3-dimensional dynamic geometry, 523

Abductive reasonings, 139
Additive decomposition, 403
Additive situation, 459
Algebraic practices, 43
Algebraic reasoning levels, 371
Algebraic sense, 155
Algebraic thinking, 3, 115, 411
Algebraization levels, 171
Analogy, 523
Analytic route, 179
Analytical thinking, 155
APOS teaching experiment, 323
Area of flat figures, 187
Argument, 179
Argumentation, 147, 179
Arithmetic tasks, 339
Asperger Syndrome, 195
Attitudes, 123

Beliefs, 475
Benchmarks, 27
Bibliometric analysis, 411
Brain activity, 339

Change, 243
Childhood education, 243
Classroom culture, 97
Cognitive apprehension, 475
Cognitive demand, 211, 539
Communal, 69
Communicative components, 147
Computational thinking, 115, 491
Concept formation, 163
Concrete models, 459
Conjecturing and proving, 139
Construction-and-proof problems, 523
Constructivism, 483
Contexts, 531
Continuous training, 419
Creativity, 395
Curricular innovations, 79
Curriculum, 89, 97, 491
  change, 69

Defining, 347
Demonstration, 363
Derivative concept, 323
Derivative function graph, 323
Design of problems, 211
Developmental levels of geometric thinking, 163
Didactic design, 267
Didactic paradigms, 251
Didactic Suitability Criteria, 515
Didactic suitability criteria, 235, 291
Didactics, 483
Didactics intention, 203
differential, 267

Early algebra, 243, 419, 427, 451
Early Childhood Education, 163
Early childhood education, 115, 131, 451
Early Childhood Education MTSK, 403
Early numeracy, 339
Early Years Education, 483
Educational internship experience, 315
Educator arguments, 379
Electroencephalography, 339
Elementary education, 3, 43
Emergent mathematics, 419
Empirical sampling distribution, 507
Enactivism, 69
Epistemic configuration, 259
Equidistance, 523
Estimation, 387
Euclidean geometry, 179
Euler diagram, 499
Extensive and intensive quantities, 283

Fermi problems, 387

Flexibility, 395
Fluid intelligence, 475
Fractions, 219, 307
Function machine, 131, 243
Functional thinking, 131, 243, 435
Functions, 515
Future teachers, 483

Generalisation, 195
Generalization, 43, 435
GeoGebra, 323
Geometry, 475, 531
Graphic representation, 435
Graphical estimation, 27
Guided instruction, 163

History of mathematics and mathematics education, 331

In-service teachers, 123, 275, 491
Inclusion, 195
Inequalities, 427
Inquiry, 235
Integers, 459
Invention, 155
Invention of problems, 459
Isometries, 355

Knowledge to teach mathematics, 419

Learning, 89
Learning of mathematical modelling, 387
Learning strategies, 299
Lesson Study, 515
Lesson study, 251
Literature review, 411
Local perspectives, 79

Master's degree final project, 315
Materials and resources, 331
Mathematical connections, 187
Mathematical giftedness, 211, 395
Mathematical modelling, 235, 315
Mathematical practice, 347
Mathematical practices in Early Childhood Education, 403
Mathematical proof, 371
Mathematical tasks, 451
Mathematics, 89, 483
Mathematics achievement, 299
Mathematics curriculum, 61
Mathematics education, 97
Mathematics teacher education, 69, 79
Mathematics teacher educator, 275
Mathematics teacher educator rationality, 379
Mathematics teacher training, 291
Mathematics teaching, 539
Meta didactic-mathematical knowledge, 291
Middle school, 27
Mixed methods, 187
MTE's professional knowledge, 443
MTSK, 139
Multiplicative structure problems, 547

Non-dynamic environment., 355
Number sense, 11, 27
Numerical thinking, 3

Ontosemiotic Approach, 259, 371
Opportunities to learn, 355

Pattern recognition, 115
Perpendicularity, 523
Planning, 467
Polygon concept, 163
Practical argumentation, 515
Pre-service teacher training, 307
Pre-service teachers, 219
Prekindergarten , 419
Preservice teacher, 451
Preservice teacher education, 347
Preservice teachers, 139
Primary, 531
Primary education, 11, 275, 299, 427, 499
Primary school, 395, 435, 547
Primary teachers, 355, 467
Principle of induction, 363
Probability, 123, 171
Problem posing, 171, 203, 219
Problem solving, 211, 395
Problem-solving, 195
Procedural flexibility, 307
Professional development, 147, 443
Professional noticing, 147, 227
Professional tasks, 347
Professional training tasks, 379
Programable robots, 115
Proportional reasoning, 171, 227
Proportionality, 283
Prospective primary teachers , 387
Prospective teachers, 315, 531

Real function of a real variable, 539

Reasoning, 499
Registers of representation, 403
Relationships with institutions, 79
Representation, 43
Representational flexibility, 307, 403
Representations, 547
Research in mathematics education, 61
Rubric, 147
Rule of three, 283
Rural school, 299

Scalar and functional relationships, 283
School tasks, 531
School tasks design, 539
Scientific production, 411
Secondary education, 3, 123
Secondary school, 211
Semiotic conflicts, 363
Semiotic functions, 363
Significance tests, 507
Simulated sampling distribution, 507
Specialized knowledge, 275
Specific didactic competencies, 267
Strategies, 467, 547
Structural thinking, 155
Structures, 131
student profiles, 27
Syllogism, 499
Systematic review, 11

Task characterization, 427
Task variables, 219
Task-design and implementation, 235
Tasks and examples, 467
Tasks in teacher education., 203
TEACCH material, 195
Teacher education, 89, 203, 251, 267
Teacher educator, 443
Teacher knowledge, 347
Teacher training, 61, 97, 171, 179, 227
Teacher's reflection, 259
Teachers trainin, 539
Teaching experiment, 139
Teaching functions, 291
Teaching through problem solving, 251
Techniques, 467
Tecnology, 89
Transfers between dimensions, 459
Type of warrant and data, 379

Undergraduate students, 371
Unknown quantities, 155

Variation principle, 547
Venn diagram, 499
Visualization, 475

Whole group discussion, 355
Women's press, 331