

INVESTIGACIONES SOBRE EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN EL AULA DE SECUNDARIA

Research on the development of number sense in the secondary school

Bruno, A., Almeida, R.

Universidad de La Laguna

Resumen

El sentido numérico se ha utilizado en la educación matemática desde diferentes perspectivas y actualmente tiene especial importancia en el currículo español por ser un elemento de la organización curricular de la Educación Primaria y Secundaria. En este trabajo se presentan, en primer lugar, las componentes que organizan el sentido numérico. A partir de ellas, se detallan dos investigaciones realizadas en la Universidad de La Laguna con alumnado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). En la primera, se analizan y comparan respuestas de estudiantes de 2.º (13-14 años) y 4.º de ESO (14-16 años) a tareas numéricas en las que ponen en uso componentes del sentido numérico relacionadas con la estimación y los puntos de referencia. Los resultados indican mejores resultados en 4.º de ESO frente a 2.º de ESO, si bien no se consideran lo suficientemente adecuados en ninguno de los niveles, dadas las características de las tareas. En la segunda parte, se presenta una investigación realizada en 2.º de ESO en la que se establecen perfiles de estudiantes en cuanto al uso de las componentes del sentido numérico, y cómo estos perfiles se modificaron, después de una intervención de aula centrada en fomentarlas. Se reflexiona sobre la importancia de desarrollar un pensamiento numérico creativo y flexible en la educación secundaria.

Palabras clave: sentido numérico, estimación gráfica, puntos de referencia, perfiles de estudiantes, educación secundaria.

Abstract

Number sense has been used in mathematics education from different perspectives and is currently of special importance in the Spanish curriculum as it is an element of the curricular organisation of Primary and Secondary Education. In this paper we first present the components that structure number sense. Based on these, two research studies carried out at the Univesidad de La Laguna with secondary school students are detailed. In the first one, we analyse and compare the responses of second (13-14 years old) and forth (14-16 years old) year of secondary school students to numerical tasks in which they use components of number sense related to estimation and reference points. The results indicate better results in forth than in second, although they are not considered adequate enough at either of the two levels given the characteristics of the tasks. In the second part, an investigation is presented in which student profiles were established in terms of the use of number sense components and how these profiles were modified after a classroom intervention focused on fostering number sense. Finally, we discuss the importance of developing creative and flexible number thinking in secondary education.

Keywords: number sense, graphical estimation, benchmarks, student profiles, middle school.

INTRODUCCIÓN

El término *sentido numérico* (en inglés *number sense*) aparece en la década de los 80 del siglo XX en documentos curriculares de diferentes países, así como en publicaciones de innovación y de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de los números (Greeno, 1991; Howden, 1989; NCTM, 1989; Sowder, 1992). Entre las primeras aproximaciones a esta expresión destaca la aportada por Howden (1989, p.11) quien indicó que: “*El sentido numérico puede describirse como una buena intuición sobre los números y sus relaciones. Se desarrolla gradualmente como resultado de explorar los números, visualizarlos en diversos contextos y relacionarlos de formas que no están limitadas por los algoritmos tradicionales*”. Veamos un ejemplo de una conversación, narrada por Carragher et al. (1985), entre un niño-vendedor de 12 años (llamado *M*), que vendía productos en mercados callejeros en Brasil y un cliente.

Cliente: ¿Cuánto cuesta un coco?

M.: 5.

Cliente: Quiero diez. ¿Cuánto cuesta?

M.: Tres serán 105: con tres más, serán 210. (Pausa) Necesito cuatro más. Son...(pausa) 315...creo que son 350.

El niño-vendedor podría haberse limitado a añadir un 0 al 35, un método muy sencillo si has recibido instrucción tradicional escolar, lo que no era este caso. A lo mejor para *M* el precio de tres cocos era un cálculo frecuente en su día a día, por lo que se había convertido en una “cantidad de referencia”; o *M* pudo haber reconocido que el precio de tres cocos estaba cerca de 100, separando las sumas de 100 y las sumas de 5 para conjuntos de tres cocos. El ejemplo recuerda que el sentido numérico se manifiesta de formas muy diversas, dependiendo de las personas y de las circunstancias en las que se aplica. Este aspecto se refleja perfectamente en la definición de Sowder (1992) al señalar que *el sentido numérico es una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas numéricos de una forma creativa y flexible* (p.381). Sin duda, son los rasgos de creatividad y flexibilidad los que ha llevado a otorgar importancia a esta forma de entender el aprendizaje numérico. Lo cierto es que somos capaces de reconocer el sentido numérico, aunque no tengamos su definición precisa. Greeno (1991) señala que una persona posee sentido numérico cuando manifiesta un cálculo mental flexible, realiza buenas estimaciones numéricas y hace juicios e inferencias basándose en cantidades numéricas. Simultáneamente, McIntosh et al. (1992) desarrollaron el marco que más influencia ha tenido en el desarrollo curricular y en la investigación sobre sentido numérico, al describirlo a través de diferentes componentes. Estas componentes tuvieron una primera aproximación en la publicación curricular del NCTM (1989), y que se desglosan de la siguiente forma:

- *Conocer y tener facilidad con los números*: comprender el sentido del orden de los números; reconocer el tamaño relativo y absoluto de la magnitud de los números; usar puntos de referencia; usar múltiples representaciones de los números.
- *Conocer y tener facilidad con las operaciones*: comprender el efecto de las operaciones; comprender las propiedades matemáticas; comprender las relaciones entre las operaciones.
- *Aplicar el conocimiento y mostrar facilidad con los números y las operaciones en la resolución de problemas numéricos*: comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; ser consciente de que existen múltiples estrategias (cálculo mental, escrito, estimación...); a utilizar una representación y/o un método eficiente; revisar los datos y los resultados.

Aunque estas componentes se presenten separadas, están fuertemente relacionadas, siendo habitual que en una misma tarea matemática se vean involucradas varias de ellas. Además, sería complejo delinear las componentes del sentido numérico de manera estricta, pues sus ramificaciones son muy amplias. El sentido numérico que construye una estudiante crece y se expande a lo largo de la enseñanza primaria, secundaria e incluso, más allá del ámbito académico. Es probable que el conjunto del sentido numérico sea mayor que sus partes. Diferentes investigaciones han modificado estas componentes del sentido numérico, en ocasiones desglosándolas o agrupándolas, en función de sus objetivos (NCTM, 1989; McIntosh, et al., 1992; Reys y Yang, 1998; Yang y Sianturi, 2021).

El currículo actual en España, presenta el aprendizaje matemático en la ESO organizado en diferentes “sentidos” (Real Decreto 217/ 2022) (al igual en la Educación Primaria). Así, el *Sentido numérico* aglutina el conocimiento numérico a desarrollar en esta etapa educativa caracterizándose por: “...la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones”. Se sitúa en una visión del sentido numérico próximo al indicado por Sowder (1992). A su vez, entre las competencias específicas en secundaria se hace referencia a que el alumnado debe ser capaz de “analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global”, que coincide con la última componente referenciadas anteriormente (McIntosh et al., 1992).

El reflejo de que el sentido numérico ha sido considerado un constructo importante en la educación matemática son las numerosas publicaciones e investigaciones realizadas bajo esta expresión, las cuales se agrupan en diferentes intereses: una perspectiva psicológica asociado al inicio del concepto de número por parte de los niños en la etapa infantil o con alumnado con dificultades de aprendizaje (Berch, 2005; Gersten et al. 2005; Greeno, 1991); el desarrollo de sus componentes de forma que sea aplicable curricularmente (NCTM, 1989; McIntosh et al., 1992; 1997; Sowder, 1992; Reys, 1994); el diseño de actividades orientadas a fomentar el desarrollo del sentido numérico en el aula (Anghileri, 2006; Markovits y Sowder, 1994; Reys y Barger, 1991); y la indagación sobre cómo los estudiantes emplean y comprenden las diferentes componentes (Almeida y Bruno, 2019; Cheung y Yang, 2020; Yang, 2019a; 2019b; Yang y Sianturi, 2021; Yang, et al., 2008). En esta última línea nos situamos en nuestras investigaciones de los últimos años en la Universidad de La Laguna. Así, hemos realizado diversas investigaciones sobre al sentido numérico focalizadas en futuro profesorado de secundaria (Almeida, et al., 2014; 2016; 2017), en alumnado de Educación Primaria (Sanfiel et al., 2022) y en alumnado de Educación Secundaria (Almeida y Bruno, 2014; 2017; 2019; Fariña y Bruno, 2021). En el presente trabajo mostramos algunos de los resultados obtenidos con alumnado de secundaria.

¿SE DESARROLLA EL SENTIDO NUMÉRICO A LO LARGO DE LA SECUNDARIA?







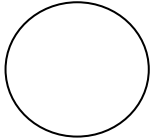
Las investigaciones sobre sentido numérico se han realizado principalmente con alumnado de educación primaria (Alsawaie, 2011; Mohamed y Johnny, 2010; Sengul y Gulbagci, 2012; Yang, 2019a; 2019b; Yang, et al., 2008), y menos de educación secundaria (Akkaya, 2016; Markovits y Sowder, 1994; Purnomo, et al. 2014; Reys y Yang, 1998; Veloo, 2010). En ambos grupos, los resultados coinciden en que los estudiantes se inclinan por seguir procedimientos rutinarios, aplicar reglas y resolver con algoritmos, en tareas en las que podrían aplicar más fácilmente otras estrategias numéricas. Por otra parte, los estudios no muestran consenso sobre si los estudiantes incrementan su sentido numérico a medida que avanzan en los niveles educativos. Akkaya (2016), en un estudio realizado en Turquía con 576 estudiantes de 5.º (10-12 años) a 8.º grado (13-14 años), muestra que el rendimiento de los estudiantes en diferentes componentes del sentido numérico es

muy bajo para lo que se esperaba en estos niveles educativos. Observó que la componente relacionada con saber *usar múltiples representaciones de los números*.

En esta línea nos planteamos evaluar, en el contexto español, dos componentes del sentido numérico: *usar puntos de referencia* y *usar múltiples representaciones de los números*, por parte de estudiantes de secundaria en actividades de estimación, principalmente. Nos planteamos observar si alumnado de los niveles de 2.º (13-14 años) y 4.º de ESO (15-16 años) muestra un uso efectivo de estas componentes, y si cambian las estrategias numéricas en ambos cursos.

Para realizar el análisis planteamos a los estudiantes tareas en las que no era necesario seguir reglas y algoritmos, pudiendo realizarse con estimación numérica, estimación gráfica o uso de propiedades numéricas. Se diseñó una prueba con 12 tareas cuyo contenido numérico correspondía, como máximo, a 1.º de ESO (12-13 años), referidas a distintos tipos de números (naturales, fracciones y decimales), en las que se pedía: ordenar números, estimar el número dado con diferentes representaciones (elementos discretos, recta numérica, barra y diagrama de sectores), estimar el resultado de una operación, todo ello en contextos abstracto o cotidiano. Las tareas se presentaron en hojas separadas y se les indicó que para resolverlas no era necesario realizar cálculos exactos, sino que podían recurrir a otras estrategias que conocieran. Además, se les pidió escribir todo lo que pensaran, aunque no formara parte de su respuesta final. La prueba la contestaron 447 estudiantes: 248 de 2.º de ESO y 199 de 4.º de ESO, de 7 centros públicos de Tenerife (España) en un hora.

Figura 1. Tareas 1, 2 y 3 de la prueba escrita

<p>Tarea 1. Señala en cada caso qué número representa mejor la cantidad sombreada.</p> <p>a. ¿Qué porcentaje representa mejor la porción sombreada?</p>  <p>A. 20% B. 33% C. 50% D. 80%</p> <p>b. Si consideramos que el rectángulo es la unidad</p>  <p>A. 0,018 B. 0,4 C. 0,15 D. 0,81</p> <p>c. Si consideramos que el rectángulo es un millón</p>  <p>A. 20 000 B. 40 000 C. 200 000 D. 400 000</p> <p>d. Si consideramos que el rectángulo es la unidad</p>  <p>A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{7}$</p>	<p>Tarea 2. Estimar los números decimales que indica la flecha en la recta numérica:</p> <p>a.</p>  <p>b.</p> 
<p>Tarea 3. <i>Aproximadamente</i> ¿qué porcentaje dedicas a las siguientes actividades durante un día completo? Representalo gráficamente.</p> <p>Dormir ____%</p> <p>Estar en clase ____%</p> <p>Comer ____%</p> <p>Resto de actividades ____%</p> 	

Los resultados están publicados parcialmente en Almeida et al. (2017) y Fariña et al. (2017) y, a continuación, los complementamos con las respuestas a tres tareas que tienen un objetivo común: el uso de la estimación gráfica (barras, recta numérica y diagrama de sectores) con diferentes tipos de números (naturales, fracciones, decimales y expresión en porcentajes). En ellas los estudiantes

podían poner de manifiesto dos componentes de sentido numérico objeto de estudio. Las tareas se muestran en la Figura 1 y las denominamos de la siguiente forma:

Tarea 1. Estimación a partir de una representación gráfica de barras.

Tarea 2 Estimación de decimales en la recta real.

Tarea 3. Uso de los porcentajes y representación en sectores en una situación contextual.

Se presenta el análisis de las tres tareas observando las diferencias en el éxito entre 2.º y 4.º de ESO, destacando las principales dificultades de los estudiantes.

Resultados de la Tarea 1. Estimación a partir de una representación gráfica de barras

La Tabla 1 muestra los resultados de las cuatro preguntas de la Tarea 1 en la que, a partir de una representación de barras, debían estimar numéricamente la zona sombreada, expresando: a) porcentajes, b) decimales, c) números naturales y d) fracciones.

Tabla 1. Porcentajes de éxito en la Tarea 1 (a, b, c y d)

		Tarea 1-a		Tarea 1-b		Tarea 1-c		Tarea 1-d	
Curso		2.º	4.º	2.º	4.º	2.º	4.º	2.º	4.º
Opción elegida	A	14,1	12,7	18,5	11,5	7,3	2,5	16,5	3,5
	B	82,7	85,5	12,5	12,5	26,3	17,6	30,3	32,2
	C	2,8	1,6	61	71,3	9,4	5,0	24,6	16,6
	D	0,40	0,2	8,0	4,52	56,9	74,9	25,8	45,2
Blanco								2,8	2,5

Nota: En negrita se ha señalado la respuesta correcta.

Se observa que el éxito cambia considerablemente entre los cuatro apartados y en ambos cursos la tendencia es similar. La estimación numérica de la representación con porcentajes es la más sencilla de interpretar (82,7% y 85,5%), siendo la siguiente opción más elegida la A (20% de la barra), con el porcentaje más próximo al correcto. Es un resultado razonable dado que los números son manejables (enteros menores que 100) y es una representación con la que están habituados por la tecnología (descargas, grabaciones, etc.). Las tareas 1-b y 1-c tienen una dificultad media (entre 61% y 56,9% en 2.º de ESO y 71,3% y 74,9% en 4.º de ESO). No por ello responde al éxito que se espera para estos niveles educativos. Parece que para muchos estudiantes no es fácil estimar números “grandes” o “pequeños” en la barra. Sin lugar a duda, los resultados que llaman la atención, por su bajo nivel de éxito (incluso con respuestas en blanco), son los referidos a la estimación gráfica asociada a la fracción $2/7$. En ambos niveles, muchos estudiantes optaron por la fracción más cercana a la correcta ($2/5$), pero sorprende que otros optaran por las dos fracciones que claramente no podían ser el resultado ($1/2$ y $3/4$). Se podría pensar que interpretaron la zona blanca y no la sombreada, pero no parece ser esto así, puesto que se comprobó que en los otros apartados daban muestras de haber respondido teniendo en cuenta la zona sombreada en gris.

Los resultados en 4.º de ESO son superiores en los cuatro apartados a los de 2.º de ESO, siendo esta diferencia casi el doble en la Tarea 1-d. Parece que el tamaño de los números y su expresión tienen una influencia importante en la realización de buenas estimaciones a partir de un gráfico tan habitual como el de barra y que no se logran altos niveles de dominio al finalizar la secundaria.

Resultados de la Tarea 2. Estimación de decimales en la recta real

En la Tabla 2 se muestran los resultados de la tarea 2 en la que los estudiantes debían estimar un número decimal indicado en la recta numérica, dadas referencias diferentes (1 y 0,1). Al tratarse de

una estimación, establecimos como intervalos de respuesta correcta [0,05, 0,08] para la tarea 2-a y [0,005, 0,008] para tarea 2-b.

Tabla 2. Porcentajes de éxito en la Tarea 2 (a y b)

Resultado	Tarea 2-a		Tarea 2-b	
	2.º	4.º	2.º	4.º
Éxito	60,9	73,9	53,6	72,4
Fracaso	32,3	21,1	38,7	22,6
Blanco	6,9	5,0	7,7	5,0

En 2.º de ESO, el porcentaje de éxito en la tarea 2-a fue superior a la tarea 2-b (60,9% y 53,6%), mientras que en 4.º de ESO la dificultad fue similar (73,9% y 72,4%). Aunque más de la mitad de los estudiantes de 2.º de ESO y casi tres cuartas parte de 4.º de ESO respondieron correctamente, cabría esperar mejores resultados, teniendo en cuenta que la representación de números decimales en la recta numérica es tratada en el currículo español desde final de la Educación Primaria y durante la Educación Secundaria.

Las representaciones dadas en ambos apartados contienen varias informaciones: los extremos de un intervalo concreto, las divisiones de dicho intervalo en partes iguales y el número que ocupa la primera de esas divisiones. A priori podría pensarse que, cuanto más información se incluya en una representación, más fácil resultará utilizarlas, lo cual no siempre es cierto (Siegler y Thompson, 2014). Hemos observado dos tipos de errores cuyas frecuencias se muestran en la Tabla 3:

- 1) Escribir un número decimal fuera del rango considerado correcto, pero perteneciente al primer intervalo señalado (es decir, 0-0,1 en la Tarea 2-a y 0-0,01 en la Tarea 2-b). Por ejemplo, en la Tarea 2-a algunos estudiantes escribieron 0,01 ó 0,02.
- 2) Escribir un número decimal no perteneciente al primer intervalo señalado, por una interpretación incorrecta de los puntos de referencia indicados o por haber obviado dichas referencias. Por ejemplo, en ambas tareas escribir 0.15, 0.16, 0.5, 0.6.

En ambos niveles el segundo tipo de error fue ligeramente superior.

Tabla 3. Porcentajes de errores en la Tarea 2 (a y b) respecto al total de alumnos

Tipo de error	Tarea 1-a		Tarea 1-b	
	2.º	4.º	2.º	4.º
Decimal en el intervalo, con estimación fuera del rango correcto	14,1	8,0	12,1	8,0
Decimal fuera del intervalo	18,1	13,1	25,8	14,6

Resultados de la Tarea 3. Uso de los porcentajes y representación en sectores de una situación real

En las tablas 4 y 5 mostramos los resultados a la Tarea 3 para 2.º y 4.º de ESO, respectivamente. En este caso, se ha distinguido en los éxitos y fracasos en la estimación del tiempo empleado en sus actividades diarias, lo cual se solicitaba en porcentajes, y el éxito para representarlo en un diagrama de sectores. Dado que era una estimación personal, se estableció un rango amplio de porcentajes para dar por correcto cada una de las tareas (dormir: 25-50, estar en clase 20-35, comer 5-20, resto hasta completar 100).

Se observa que en las dos partes de la tarea los resultados son superiores en 4.º de ESO (45,2% y 42,7%), siendo casi el doble que en 2.º de ESO (27,8% y 29,8%). También es así el porcentaje de

alumnado que responde correctamente a las dos partes de la tarea, siendo este muy bajo en ambos cursos (12,5% en 2.º de ESO y 27,1% en 4.º de ESO).

Tabla 4. Porcentajes de éxito en la Tarea 3 de 2.º de ESO

	Resultado	Estimación de porcentajes en las actividades diarias			
		Éxito	Fracaso	Blanco	Total
Estimación en el gráfico de sectores	Éxito	12,5	14,9	0,4	27,8
	Fracaso	16,5	48	1,6	66,2
	Blanco	0,8	2,5	2,4	6,0
	Total	29,8	65,7	4,4	100

Tabla 5. Porcentajes de éxito en la Tarea 3 de 4.º de ESO

	Resultado	Estimación de porcentajes en las actividades diarias			
		Éxito	Fracaso	Blanco	Total
Estimación en el gráfico de sectores	Éxito	27,1	15,6	0	42,7
	Fracaso	17,1	33,7	0	50,8
	Blanco	1,0	3,5	2,0	6,5
	Total	45,2	52,8	2	100

Las mayores dificultades para estimar las actividades diarias las encontramos en situarlas con porcentajes adecuados (Tabla 6). Por ejemplo, algunos estudiantes otorgaron alto porcentaje para comer, escaso porcentaje para dormir y, muchos de ellos, establecieron el porcentaje de estar en clase justamente como 50% del día, entendemos que el tiempo en el instituto lo sienten largo e intenso, o simplemente piensan que “están la mitad del día en clase” (Figura 2). Los otros tipos de errores se refieren a que la suma de los porcentajes se queda por encima o por debajo de 100%.

Tabla 6. Errores en la distribución de porcentajes de las actividades diarias en la Tarea 3

Tipo de error	2.º	4.º
Los porcentajes de las tareas diarias suman 100 y fuera de los rangos	33,1	29,6
Los porcentajes de las tareas diarias suman más de 100	19	7,5
Los porcentajes de las tareas diarias suman menos de 100	9,3	5
Otros	6,4	5

La representación gráfica en el diagrama de sectores resultó especialmente compleja para el alumnado de 2.º de ESO, realizando representaciones que no cumplieran los requisitos. Por ejemplo, se marcaban porciones de círculo que no eran sectores circulares (Figura 3) o no partían del centro. Quizás en algunos grupos de los encuestados no habían trabajado lo suficiente la construcción de estos diagramas. En ambos niveles los errores se basaban en estimaciones incorrectas de los sectores que les llevó a representar más de cuatro sectores, pues sobraba una parte del círculo (Figura 2). En algunos casos, los porcentajes los estimaron como si fuera grados.

Siegler y Booth (2005) indican que la estimación de cantidades es un importante proceso en la educación matemática, ya que muchas veces requiere ir más allá de los razonamientos rutinarios y aplicar conocimiento matemático de forma flexible. Es por eso que forma parte de las componentes del sentido numérico. El estudio presentado, parte de uno más amplio, pone el énfasis en el uso de estimaciones a partir de representaciones, apoyándose en puntos de referencia (numéricos o contextuales). Tal y como se esperaba, los porcentajes de éxito en 4.º de ESO son superiores a los de 2.º de ESO en las tres tareas presentadas, lo cual es positivo porque indica que la formación matemática que se recibe durante esta etapa contribuye a mejorar las estrategias propias del sentido numérico. Sin embargo, difícilmente pueden considerarse resultados adecuados para alumnado de

secundaria, dado el nivel curricular de las tareas planteadas, lo que es consecuente con investigaciones realizadas en otros contextos educativos (por ejemplo, Akkaya, 2016).

Figura 2. Representación de diagrama de sectores incorrecto (alumno de 4.º de la ESO)

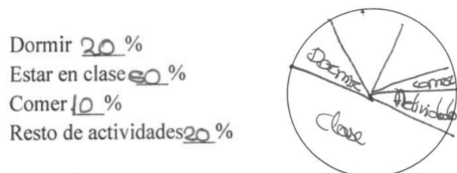
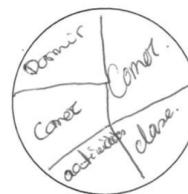


Figura 3. Representación de diagrama de sectores incorrecto (alumno de 2.º de la ESO)



PERFILES DE SENTIDO NUMÉRICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

La investigación descrita en el apartado anterior basa sus resultados en las respuestas a pruebas escritas de los estudiantes de secundaria, al igual que se había realizado en otros países (Akkaya, 2016; Veloo, 2010, Yang y Sianturi, 2021). Aunque las pruebas escritas son útiles para diferenciar el grado de adquisición de ciertas habilidades asociadas al sentido numérico, no nos permiten tener certeza de si los estudiantes tienen otros modos de razonar. Muchos estudiantes se sienten cómodos o seguros con procedimientos basados en reglas (Sengul y Gulbagci, 2012) o piensan que eso es lo que el profesor espera de ellos y de ahí que sean sus respuestas más frecuentes. Por otra parte, es notorio que se ha realizado menos investigación respecto a intervenciones de aula efectivas que promuevan un aprendizaje numérico con estrategias flexibles y creativas (Markovits y Sowder, 1994; Swoder, 1992). Por ello, nos planteamos focalizar nuestra investigación en estos dos aspectos. Por un lado, profundizar a través de entrevistas, si los estudiantes conocen estrategias diferentes, aunque solo muestren una inicial, y por otro lado, si hay cambios en sus modos de razonar numéricamente cuando siguen intervenciones de aula que fomentan componentes del sentido numérico. Ello se plasmó a través de los siguientes objetivos de investigación, recogidos en Almeida y Bruno (2016, 2017 y 2019):

1. Establecer perfiles de alumnado de secundaria ante tareas que pueden abordarse con componentes de sentido numérico.
2. Analizar cambios en los perfiles de los estudiantes después de una secuencia de enseñanza en la que se trabajan componentes del sentido numérico, a través de la búsqueda de diferentes estrategias.

Para ello se realizó una investigación con 47 estudiantes de dos grupos de 2.º de ESO (de 25 y 22 estudiantes, respectivamente), de un centro público de Tenerife (España), situado en un entorno semiurbano. Nos centramos principalmente en tres componentes concretas del sentido numérico: usar puntos de referencias; usar múltiples representaciones de los números y las operaciones; y revisar los datos y resultados. Todo ello en actividades sobre números decimales y fracciones que correspondían con los contenidos y el momento del curso escolar del alumnado objeto de estudio. El estudio tuvo diferentes fases:

- *Prueba inicial escrita.* Se realizó una prueba escrita a los 47 estudiantes, al inicio del estudio con tareas numéricas que podían ser resueltas haciendo uso del sentido numérico (tareas semejantes a las del estudio expuesto en el apartado anterior).
- *Entrevista inicial.* La prueba escrita permitió seleccionar a 11 estudiantes (E1, E2,...E11) en función del tipo de estrategias utilizadas y/o uso de sentido numérico mostrado. Se establecieron perfiles de estudiantes según sus respuestas.

- *Desarrollo de una secuencia de aprendizaje.* Se diseñó e implementó una secuencia de aprendizaje con los 47 estudiantes, con actividades numéricas que fomentaban las componentes numéricas implicadas en el estudio.
- *Entrevistas finales.* Al finalizar la secuencia de aprendizaje se entrevistó de nuevo a los 11 alumnos de la entrevista inicial, con el objetivo de determinar si observaban los mismos perfiles y si la intervención había producido cambios en cada estudiante, en particular.

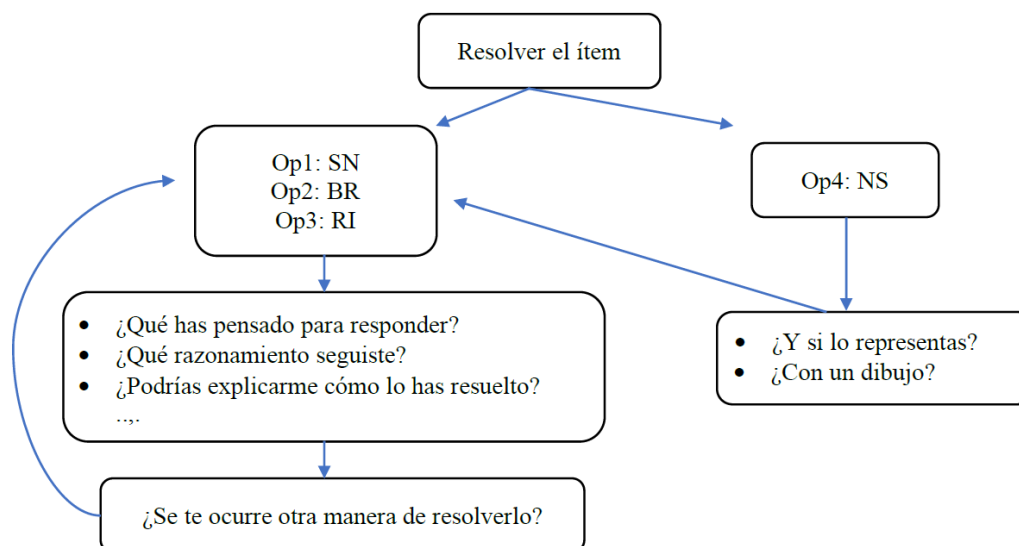
Desarrollo de una secuencia de aprendizaje

Se diseñó e implementó una secuencia de aprendizaje sobre números decimales y fracciones que promovía el uso del sentido numérico. Las tareas numéricas presentaban diferentes objetivos: valorar la razonabilidad de los datos y las respuestas, usar puntos de referencia (para comparar racionales, para estimar magnitudes y para estimar operaciones), usar diferentes representaciones gráficas (recta numérica, barras, áreas de rectángulos...) para comparar números, estimar operaciones, todo ello en problemas abstractos o contextualizados en situaciones reales. La intervención tuvo lugar durante once sesiones de 50 minutos, en la hora habitual de Matemáticas. La metodología de aula, siguiendo las propuestas de Reys y Barger (1991), se basaba en un aprendizaje colaborativo en el que predominaba el debate y la discusión de las diferentes estrategias que podían seguirse para una misma tarea numérica. Los alumnos resolvieron tareas en pequeños grupos de modo que podían compartir su conocimiento, posteriormente, con la toda la clase.

Entrevistas inicial y final

El objetivo de la realización de las entrevistas inicial y final era detectar las estrategias de resolución de las tareas numéricas que pudieran manifestar los estudiantes, más allá de su primera respuesta, con el fin de establecer tendencias en función del uso (o no) de componentes de sentido numérico. Durante las entrevistas se siguió el mismo esquema con cada alumno (Figura 4).

Figura 4. Esquema seguido en las entrevistas inicial y final para cada tarea numérica



Se les presentaron cinco tareas numéricas en hojas independientes. Una vez que acabaron las cinco tareas, se realizó un recorrido por cada una de ellas, observando su opción de respuesta (Op):

Op1: SN, razonamiento basado en sentido numérico; Op2: BR, razonamiento basado en reglas; Op3: RI, razonamiento incorrecto; Op4: NS, no sabe responder o explicar.

A continuación, se les pidió una explicación de su respuesta y se les solicitó que buscasen otra justificación o resolución para llegar al resultado. En el caso de que no supiesen responder (Op4), se

les animó a hacer uso de representaciones gráficas, por ser una de las componentes objeto de estudio. De forma esquemática, se repetía el esquema de la Figura 4 en cada tarea, hasta que no hubiese más respuestas por parte del entrevistado.

Perfiles de alumnado de secundaria en tareas numéricas

En las entrevistas iniciales se establecieron cuatro perfiles de estudiantes en función de sus estrategias en la resolución de cuestiones numéricas. El perfil lo hemos entendido como una “inclinación” o “tendencia”, es decir, no significa que el estudiante responda con una única estrategia en todas las tareas propuestas, pero sí en la mayoría ellas. En lo que sigue describimos los perfiles encontrados, ejemplificándolos con la respuesta a una tarea de la entrevista inicial. En ella se les pedía ordenar de menor a mayor los siguientes números: $2/5$, $4/3$ y $7/8$.

Perfil 1 (P1): Tendencia al uso de estrategias de sentido numérico

Los estudiantes de este perfil tienden a hacer uso de estrategias de sentido numérico en su primera opción de respuesta y cuando se les solicita estrategias alternativas a la inicial. Demuestran flexibilidad para buscar distintas estrategias. Aunque en alguna ocasión intentan hacer uso de reglas, se muestran capaces de evitarlas cuando conoce una estrategia de sentido numérico. En el ejemplo que sigue el estudiante E2 muestra conocer dos estrategias adecuadas sentido numérico comparando los numeradores y los denominadores, y a través de una representación gráfica.

A: [Escribe la respuesta de la Figura 5]

Figura 5. Primera respuesta del estudiante E2

$$\frac{2}{5} < \frac{7}{8} < \frac{4}{3}$$

Miré todo, y como que el 4 se pasa, la fracción da más de 1 (haciendo referencia a la fracción $4/3$), el 7 se aproxima casi al 8 (haciendo referencia a la fracción $7/8$) y el 2 está separado del 5 (haciendo referencia a la fracción $2/5$).

I: O sea, ¿tú miraste si eran mayores que 1?

A: Sí.

I: ¿Y en la fracción $7/8$?

A: Estaba casi en uno.

I: ¿Y en esta (señalando la fracción $2/5$)?

A: Era más pequeño.

I: ¿Conoces otra forma de hacerlo?

A: ¿Con una tarta?

I: Como a ti se te ocurra...

A: Yo haría un círculo y lo partiría.

I: A ver, enséñame.

A: [Dibuja la Figura 6]

Figura 6. Segunda respuesta del estudiante E2



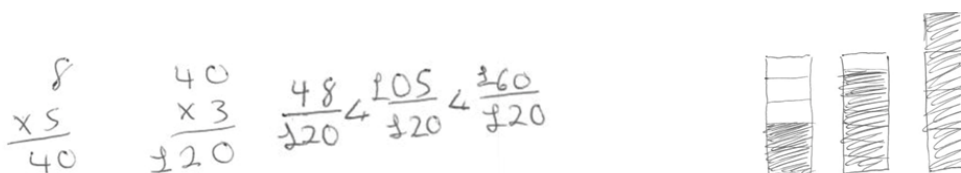
I: Entonces con el dibujo, ¿sabrías también ordenarlo?

A: ¡Claro! Aquí ya son 2 (señalando los dos últimos círculos para $4/3$), aquí ocupa todo, casi todo (refiriéndose al segundo círculo para la fracción $7/8$) y aquí no ocupa casi nada (señalando el primer círculo para la representación de la fracción $2/5$).

Perfil 2 (P2): Tendencia a uso de reglas y algoritmos. Conoce estrategias de sentido numérico.

Se caracterizan por tomar como primera opción de respuesta, una regla y/o algoritmo, en general correctos, y cuando se les solicita otras respuestas, demuestran conocer y ser capaz de utilizar estrategias de sentido numérico, también correctas. Muestran apego a las reglas o los algoritmos, argumentando que para justificar sus razonamientos necesita “escribir algún tipo de cálculo”. En el ejemplo que se muestra en la Figura 7, el estudiante E3 ordena las fracciones después de calcular un denominador común, a pesar de ser muy costoso en este caso. Al solicitarle otro método dibuja correctamente las barras para cada una de las tres fracciones y ratifica su respuesta.

Figura 7. Primera respuesta (izda.) y segunda respuesta (dcha.) del estudiante E3



Perfil 3 (P3): Tendencia a uso de reglas y algoritmos. No conoce estrategias de sentido numérico

Se caracterizan porque contestan principalmente haciendo uso de reglas y/o algoritmos, pero al solicitarle un método alternativo demuestra no conocer otras estrategias. En ocasiones, las respuestas basadas en reglas pueden ser incorrectas. En su intento de hacer uso de otras estrategias, muestran dificultades conceptuales que les lleva a la elección de respuestas incorrectas y razonamientos erróneos. El apego a utilizar reglas puede deberse a sus escasa seguridad en aspectos conceptuales, pues estas no les requieren una justificación más allá del propio proceso. En el ejemplo de la Figura 8 el estudiante E8, en su primera respuesta, ordena de forma incorrecta porque se equivoca en las divisiones y al realizar una representación gráfica poco precisa para $7/8$, esta no le ayuda a corregir su error.

Figura 8. Primera respuesta (izda.) y segunda respuesta (dcha.) del estudiante E8



Perfil 4 (P4): Dificultades con el contenido matemático. No conoce estrategias de sentido numérico

Como primera estrategia, no tienen una tendencia determinada al uso de reglas y/o algoritmos, pero tampoco al uso otras estrategias. Sus respuestas se caracterizan por una falta de dominio de los conceptos matemáticos, que les lleva a hacer uso de razonamientos incorrectos, cuando se les pide otros métodos. En muchas ocasiones, sus razonamientos son difícilmente clasificables y en ellos se observan dificultades numéricas conceptuales. En el ejemplo de la Figura 9, el estudiante E10 llega a su primera repuesta con razonamientos incorrectos (como se puede leer en el extracto de entrevista) y en la segunda respuesta ordena correctamente a pesar de una representación incorrecta de $4/3$, sin conectar ambas respuesta.

A: [Escribe $4/4$, $2/5$ $7/8$]

I: ¿Por qué las ordenaste así?

A: Porque yo de cuando dimos esto,... me parece que me acuerdo, que no tenía nada que ver que el número de debajo fuese más pequeño que el de arriba, o sea, que el de arriba no tenía que ser más pequeño que el de abajo. Entonces te fijabas más en el de abajo.

Figura 9. Primera respuesta (izda.) y segunda respuesta (dcha.) del estudiante E10



I: ¿En el denominador?

A: Como 3 es más pequeño que 4, entonces es $4/3$ es el más pequeño. 5 es mayor que 2, pero como aquí (señalando la fracción $4/3$) son más pequeños entre sí, pues yo los coloqué así, por el número de abajo y no por el de arriba.

I: O sea, tú tienes claro que $4/3$ es el más pequeño porque el 3 es más pequeño que el numerador...mmm ¿Y los otros 2 por qué?

A: Porque el de abajo...5 es más pequeño que 8.

I: ¿Sabrías hacerlo de otra forma?, ¿con un dibujo?

[La alumna representa las fracciones de la Figura 10, dcha.]

I: Entonces ahora según los dibujos, ¿cuál es el más pequeño?

A: Este (señala el primer círculo).

I: Vale, ¿que ese se corresponde con...?

A: Con este (señalando la fracción $2/5$)

I: Y el siguiente ¿cuál sería?

A: Este (señala la representación de $4/3$), no,...este (señala la representación de $7/8$).Y después este (señala $4/3$).

Cambios en los perfiles de los estudiantes

En la Tabla 7 se muestran los perfiles de los estudiantes en las entrevistas inicial y final. En las entrevistas finales se ratificaron los perfiles y se observó cómo algunos estudiantes se movieron hacia otros después de la intervención de aula. Estos cambios fueron, en su mayoría, positivos, es decir, pasaron de un perfil menor a uno mayor, en cuanto a uso de sentido numérico.

Tabla 7. Perfiles de los estudiantes en las entrevistas inicial y final

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11
Entrevista inicial	P1	P1	P2	P2	P2	P3	P3	P3	P3	P4	P4
Entrevista final	P1	P1	P1	P1	P2	P1	P2	P2	P4	P4	P4

Se observa que los estudiantes que se encontraban clasificados en el perfil P1 en la entrevista inicial (E1 y E2), continuaron haciendo uso de estrategias de sentido numérico en la entrevista final, demostrando mucha flexibilidad en la búsqueda de estrategias de este tipo. Los estudiantes E3 y E4, de perfil inicial P2, y el E6, de perfil inicial P3, cambiaron hacia el P1, pues en ningún momento de la entrevista final recurrieron a reglas memorizadas o cálculos escritos. Por otra parte, el estudiante E5, que en la entrevista inicial se encontraba en el perfil P2 permanece en este perfil. Los estudiantes E7 y E8 que en la entrevista inicial se situaron en un perfil P3, demostraron hacer uso,

en ocasiones, de estrategias de sentido numérico, sin abandonar como primera opción, aquellas en las que predominan los algoritmos (perfil P2). Los alumnos E10 y E11 de perfil P4 en el inicio, caracterizado por una carencia de conocimientos numéricos, intentan en las entrevistas finales hacer uso de las representaciones gráficas para responder a las cuestiones, pero sus errores conceptuales seguían presentes. Las mismas dificultades encontramos para el caso de E9, cuya evolución fue negativa en los términos de esta investigación. Los tres estudiantes del perfil final P4 necesitan mejorar en sus ideas conceptuales, en este caso sobre los números racionales, y el tiempo dedicado a la instrucción no fue suficiente para desarrollar estrategias de sentido numérico.

Los resultados de esta investigación son congruentes con las investigaciones previas. Así, Reys y Yang (1998) concluyeron que los estudiantes de secundaria tendían a usar principalmente técnicas computacionales, pero los que tenían capacidades matemáticas más altas eran más propensos a separarse de los métodos basados en reglas. También observaron que esas rupturas se producían solo cuando se les daba la oportunidad a través de preguntas como: "¿Puedes hacerlo de otra manera? Por otra parte, Markovits y Sowder (1992) afirman que el sentido numérico es una habilidad que se desarrolla a largo plazo y que está íntimamente vinculada al aspecto conceptual de los números y el significado de las operaciones. Establecer perfiles de estudiantes tiene una repercusión en el aprendizaje, ya que ayuda a desarrollar secuencias de aprendizaje que tenga en cuenta estas características. La enseñanza debe permitir que los alumnos que prefieren las reglas puedan valorar las estrategias alternativas que ya conocen y las pongan en juego, no limitando las respuestas a las puramente algorítmicas, y en general, debe ayudar a todos a ampliar sus razonamientos numéricos, apoyándose en los aspectos conceptuales.

REFLEXIONES FINALES

Es necesario continuar con investigaciones que profundicen en cómo usan los estudiantes componentes del sentido numérico, más aún, en cómo desarrollarlas en el aula. Por nuestra parte, seguimos investigando en procesos de enseñanza que fomentan la evaluación de los datos o de las repuestas en tareas numéricas, lo que se ha denominado *razonabilidad numérica* de la solución (Fariña y Bruno 2021). A pesar de los esfuerzos curriculares por incluir el sentido numérico en el aprendizaje de los números, se sigue dedicando un porcentaje muy alto de la instrucción a la práctica de algoritmos y reglas. Se valoran menos las respuestas basadas en representaciones gráficas, en estimaciones o en el uso de relaciones numéricas. Ello implica que los estudiantes sientan que no pueden desviarse de procedimientos estándares que por otro lado, les resultan más cómodos, pues no requieren razonamientos costosos. En la actualidad, tenemos una oportunidad importante de cambio del aprendizaje numérico, a través del currículo de Matemáticas que ha entrado en vigor en España (Real Decreto, 217/2022), el cual recoge características del sentido numérico expuestas en la investigación educativa. Sin embargo, todavía hay un amplio camino que recorrer para alcanzar los objetivos que se plantean desde los documentos oficiales en términos de habilidades y competencias relacionadas con el sentido numérico. No debemos olvidar que esto debe ir acompañado de cambios metodológicos en el aula. Se trata de crear ambientes colaborativos que propicien el compartir con los iguales las estrategias de pensamiento. La formación del profesorado de los niveles obligatorios puede contribuir a ello, así como los materiales curriculares y libros de texto que se diseñen. Creemos que hay un amplio trabajo por realizar en términos de investigación, pero también de innovación.

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Referencias

Akkaya, R. (2016). An Investigation into the Number Sense Performance of Secondary School Students in Turkey. *Journal of Education and Training Studies*, 4(2), 113-123.

- Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). Salamanca: SEIEM.
- Almeida, R. y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *REDIMAT*, 6(1), 56-84. doi: 10.17583/redimat.2017.1910
- Almeida, R. y Bruno, A. (2019). Perfiles de sentido numérico en estudiantes de secundaria. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemáticas Española*, 22(3), 563-579.
- Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico de estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 9-34. doi: 10.5565/rev/ensciencias.997
- Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2016). Strategies of number sense in pre-service mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(5), 959-978.
- Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo-Díaz, J. (2017). Evaluación de sentido numérico en tareas de fracciones. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática XII*, 9-30.
- Alsawaie, O. N. (2011). Number sense- based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 26, 1-27.
- Anghileri J. (2006). *Teaching Number Sense*. London: Continuum.
- Berch, D. (2005). Making sense of number sense. *Journal of learning disabilities*, 36(4), 333-339. doi:10.1177/00222194050380040901
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE núm. 76, de 30 de marzo de 2022. España.
- Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, 3, 21-29. doi: 10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x
- Cheung, K.L., y Yang, D.C. (2020). Performance of sixth graders in Hong Kong on a number sense three tier test. *Educational Studies*, 46(1), 39-55. doi: 10.1080/03055698.2018.1516631
- Fariña, M. y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261 – 268). Valencia: SEIEM.
- Fariña, M., Almeida, R., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2017). Evaluación de resultados en tareas de estimación numérica-gráfica. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Libro de Actas* (pp. 66-76). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP).
- Gersten, R.; Jordan, N.C. y Flojo, J. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difculties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293-304.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 170-218. doi: 10.2307/749074
- Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 6-11.
- Markovits, Z. y Sowder J. (1994). Developing number sense: an intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29. doi: 10.2307/749290
- McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.
- Mohamed, M. y Johnny, J. (2010). Investigating number sense among students. *Procedia Social and Behavioral Science*, 8, 317-324. doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.044
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Purnomo, Y. W., Kowiyah, K., Alyani, F. y Assiti, S. S. (2014). Assessing number sense performance of Indonesian elementary school students. *International Education Studies*, 7(8), 74-84.

- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217>
- Reys B. y Barger R. (1991). *Developing number sense in the middle grades*. Reston Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Reys, B. J. y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237. doi: 10.2307/749900
- Sanfiel, L., Perdomo-Díaz, J. y Bruno, A. (2021). Relaciones numéricas establecidas por alumnado de Primaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 563 – 570). Valencia: SEIEM.
- Sengul, S. y Gulbagci, H. (2012). An investigation of 5th grade Turkish students' performance in number sense on the topic of decimal numbers. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 46, 2289-2293. doi:10.1016/j.sbspro.2012.05.472
- Siegler, R.S. y Booth, J.L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp 197-212). Boca Ratan, FL: CRC Press.
- Siegler, R.S. y Thompson, T.A. (2014). Numerical landmarks are useful—except when they're not. *Journal of Experimental Child Psychology*, 120, 39-58.
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouw (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). New York: MacMillan Publishing Company.
- Veloo, P.K. (2010). *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam*. Unpublished master's thesis, University of Otago, Dunedin, New Zealand.
- Yang, D.C. (2019a). Performance of fourth graders when judging the reasonableness of a computational result. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 197-215.
- Yang, D.C. (2019b). Development of a three-tier number sense test for fifth-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 101(3), 405-424. doi: 10.1007/s10649-018-9874-8
- Yang, D.C., Li, M.N. y Lin, C.I. (2008). A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6, 789-807. doi: 10.1007/s10763-007-9100-0
- Yang, D.C. y Sianturi, I.A.J. (2021). Sixth Grade Students' Performance, Misconception, and Confidence on a Three-Tier Number Sense Test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 355-375. doi: 10.1007/s10763-020-10051-3
- Yang D.C. y Wu W.R. (2010). The Study of Number Sense: Realistic Activities Integrated into Third-Grade Math Classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, 103(6), 379-392. doi: 10.1080/00220670903383010