COMPORTAMIENTOS DE ESTUDIANTES PARA MAESTRO AL ENUNCIAR RAZONAMIENTOS ABDUCTIVOS

Preservice teachers' behaviours when stating abductive reasonings

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

Los profesores de matemáticas han de tener un adecuado conocimiento sobre los procesos de razonamiento y prueba, lo que hace necesario diseñar e implementar tareas, durante su formación inicial, que les permitan revisarlo y desarrollarlo. Se presentan resultados vinculados a la implementación con estudiantes para maestro de un experimento de enseñanza sobre la conjetura y demostración del teorema del ángulo inscrito. Se usan como marcos analíticos el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y los esquemas de prueba. Varias parejas enunciaron hipótesis, en forma de razonamientos abductivos, de por qué se cumplía la relación angular, pero su comportamiento tras ello resultó muy diferente. Se analiza y caracteriza aquí el trabajo de dos parejas, donde el modo de comportarse de una de ellas nos lleva a sugerir la existencia de esquemas de prueba de tipo abductivo.

Palabras clave: *Estudiantes para maestro, experimento de enseñanza, conjeturar y demostrar, razonamientos abductivos, MTSK.*

Abstract

Mathematics teachers must have an adequate knowledge of the processes of reasoning and proof. That makes necessary to design and implement tasks during their initial training that allow them to review and develop it. Results of the implementation of a teaching experiment designed to promote reasoning and proving processes about the inscribed angle theorem with preservice teachers are presented. The MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) model and proof schemes are used as analytical frameworks. Several pairs of students stated hypothesis, in the form of abductive reasoning, to justify the validity of the angle relation, but they have different behaviours after that. The work of two pairs of preservice teachers is analysed and characterised, and the behaviour of one of them leads us to suggest the existence of abductive proof schemes.

Keywords: *Preservice teachers, teaching experiment, conjecturing and proving, abductive reasonings, MTSK.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La publicación e influencia de los principios y estándares para la educación matemática del NCTM estadounidense (NCTM, 2000) ha provocado una mayor concienciación sobre la importancia de los procesos clave en matemáticas, que va teniendo progresivamente su reflejo en los currículos. Un ejemplo es el currículo asociado a la LOMLOE, con las competencias específicas introducidas en matemáticas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Uno de esos procesos clave, tomado como un eje de las competencias específicas, son los procesos de razonamiento y prueba. La importancia de estos procesos en educación matemática está ampliamente reconocida, teniendo en cuenta que hay muchas acciones y subprocesos involucrados en ellos, tanto en la indagación para detectar y establecer conjeturas como en el desarrollo de una cadena lógica de razonamientos que permita validar (si es el caso) la conjetura (Arzarello, 2008; Jeannotte y Kieran, 2017). En estos procesos tienen importancia los razonamientos tanto abductivo, como inductivo y como deductivo.

Arce, M. y Conejo, L. (2023). Comportamientos de estudiantes para maestro al enunciar razonamientos abductivos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 139–146). SEIEM.

El papel del docente es clave en el diseño, implementación y gestión de actividades vinculadas con los procesos de razonamiento y prueba, para lo cual es imprescindible (aunque no suficiente) que el docente tenga un adecuado conocimiento de estos. Modelos como el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018) destacan la necesidad de un adecuado conocimiento de las prácticas propias del quehacer matemático. Así, surge la necesidad de diseñar e implementar tareas formativas que permitan revisar y desarrollar el conocimiento sobre estos procesos de profesores en formación. Se presentan resultados de la implementación de una tarea basada en conjeturar y demostrar el teorema del ángulo inscrito con estudiantes para maestro (en adelante, EPM). El objetivo de la comunicación es describir y caracterizar diferentes comportamientos de EPM en el desarrollo de la tarea formativa después de que detectaran y enunciaran, a modo de razonamiento abductivo, una posible relación entre el ángulo inscrito y su central correspondiente que pudiera justificar la relación angular existente.

MARCO TEÓRICO

El conocimiento que ha de tener un profesor de matemáticas para poder desarrollar su labor docente es una línea de investigación con alta presencia en la actualidad. Tras el trabajo seminal de Shulman (1986), se han desarrollado diferentes modelos de conocimiento. Un ejemplo es el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2018), que, como otros modelos, considera una distinción en dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático. Este trabajo está focalizado en el dominio del conocimiento matemático. El modelo MTSK considera tres subdominios dentro del mismo que se caracterizan en términos de las propias matemáticas, estando los procesos de razonamiento y prueba incluidos en uno de los subdominios, lo que nos hace elegir este modelo como marco analítico del conocimiento movilizado por los EPM al desarrollar la tarea. Se explican a continuación los dos subdominios del conocimiento matemático con presencia en los datos.

El conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT) comprende el conocimiento disciplinar de los contenidos matemáticos curriculares (Carrillo et al., 2018), y distingue cuatro categorías de conocimiento: definiciones, propiedades y fundamentos matemáticos; procedimientos asociados a los contenidos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones de los contenidos.

El conocimiento de la práctica matemática (*Knowledge of Practices in Mathematics*, KPM) está asociado al conocimiento de cualquier actividad matemática que, llevada a cabo de forma sistemática, supone un pilar para hacer y construir conocimiento matemático y que conforma una base lógica de la que se pueden extraer reglas (Carrillo et al., 2018). Delgado-Rebolledo et al. (2022) proponen cuatro categorías de conocimiento en este subdominio, basadas cada una en diferentes prácticas matemáticas: razonar y demostrar, definir, resolver problemas y el papel del lenguaje matemático. Dentro de la categoría de las prácticas de razonar y demostrar, se reconoce la importancia tanto del proceso de indagar y formular conjeturas como de construir cadenas de razonamientos que las validen (Arzarello, 2008), puesto que se incluye tanto el conocimiento sobre cómo desarrollar demostraciones (detección de regularidades y patrones, construcción de conjeturas, rol de ejemplos y contraejemplos), como el conocimiento de métodos y tipos de demostración (y su validez), y de funciones de la demostración (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

Es habitual distinguir tres grandes tipos de razonamiento en matemáticas como parte de estos procesos (Jeannotte y Kieran, 2017): abductivo, inductivo y deductivo. La caracterización del razonamiento inductivo (comprobación del cumplimiento de una conjetura en uno o varios casos particulares) y deductivo (construcción de una cadena lógica de razonamiento que vincule conocimiento validado con la conjetura que trato de justificar) está bastante consensuada. No sucede lo mismo con el razonamiento abductivo, por su propia evolución histórica y las diferentes aproximaciones al mismo (Pedemonte y Reid, 2011; Reid, 2018). Este razonamiento se vincula a los procesos de explicar y descubrir (Komatsu y Jones, 2022) y, aquí, lo entenderemos como el proceso de formulación de posibles hipótesis que pudieran explicar y justificar una conjetura. Cada tipo de razonamiento juega un rol distinto, pero esencial, en tareas de conjeturar y demostrar (Reid, 2018). El razonamiento abductivo ayuda a encontrar posibles hipótesis que puedan permitir iniciar un razonamiento deductivo (Pedemonte y Reid, 2011), aunque el paso de uno a otro pueda resultar especialmente complejo en entornos de geometría dinámica (Baccaglini-Frank, 2019), y poder generar conocimiento matemático (Komatsu y Jones, 2022). El razonamiento inductivo ayuda a aumentar el convencimiento de la certeza de una conjetura o refutarla (en caso de encontrar un contraejemplo). El razonamiento deductivo es el que permite validar conocimiento en matemáticas.

Otra idea para analizar los procesos de razonamiento y prueba es la de *esquemas de prueba* (en adelante, EP). El EP de una persona es aquello que constituye convencimiento y persuasión para esa persona sobre la validez de un enunciado matemático (Harel y Sowder, 2007). Se distinguen tres tipos: a) EP de convicción externa (donde el convencimiento y persuasión proviene de elementos ajenos al razonamiento), b) EP empíricos (donde proviene de percepciones o manipulaciones físicas —EP experimentales—, o de ejemplos o comprobaciones en casos concretos —EP inductivos—) y, finalmente, c) EP analíticos (en los que proviene de razonamientos de tipo deductivo).

El EP de una persona se relaciona con el conocimiento que tiene sobre qué constituye una prueba válida en matemáticas y las funciones de esta, teniendo en cuenta que las formas de generar conocimiento en cada disciplina son diferentes (Reid, 2018). Varios estudios apuntan que tanto estudiantes como profesores en formación tienen diferentes esquemas de prueba, incluyéndose una presencia enraizada importante de EP inductivos (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009). Hechos como este son factores limitantes muy importantes para el diseño y la gestión de oportunidades de aprendizaje vinculadas a estos procesos de razonamiento y prueba en su futuro profesional. Así, es importante detectar cuáles son los EP de los EPM, y diseñar e implementar tareas formativas que puedan promover avances hacia los EP analíticos. Para esa detección, en esta tarea formativa usaremos preguntas similares a *pilares de conciencia conceptual* (*conceptual awareness pillars,* Stylianides y Stylianides (2009), para dirigir la atención de los estudiantes hacia el grado de convencimiento sobre sus conjeturas y el carácter probado, o no, de las mismas.

MÉTODO: TAREA FORMATIVA, CONTEXTO Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

La investigación en la que está inmersa esta comunicación ha seguido una metodología de investigación basada en el diseño (Molina, 2021), caracterizada por la interdependencia existente entre el diseño instruccional, que sirve de contexto para la investigación; y la investigación, que informa el diseño instruccional en cada ciclo iterativo. En concreto, ha adoptado la forma de experimento de enseñanza, al constar de una tarea formativa con una secuencia de episodios de enseñanza donde pueden participar un docente-investigador, estudiantes e investigadores-observadores. La tarea formativa se centra en conjeturar y demostrar la relación angular del ángulo inscrito en una circunferencia con su ángulo central correspondiente. Estas relaciones suelen ser desconocidas o no recordadas por los EPM, lo que favorece verdaderos procesos de indagación, conjetura y prueba. Para su diseño, se siguieron los principios de Lin et al. (2012) para actividades con foco en los procesos de conjeturar y demostrar, tanto para el proceso de conjeturar, como para la transición adecuada entre conjeturar y probar, y para el proceso de probar.

El proceso de conjeturar estaba dividido en dos fases. En la primera, los EPM trabajaron de forma individual con papel, lápiz y útiles de dibujo y medición dibujando ángulos inscritos y sus centrales correspondientes para, a través de la construcción indagatoria y observación (principio de Lin et al., 2012), poder establecer una conjetura sobre la relación de sus amplitudes. Tras ello, se plantearon preguntas para que reflexionen sobre su conjetura (principio de Lin et al., 2012), inspiradas en las hechas por Stylianides y Stylianides (2009), para obtener información sobre los EP de los EPM:

- ¿En qué grado estás convencido (estás seguro de que es así) de que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?

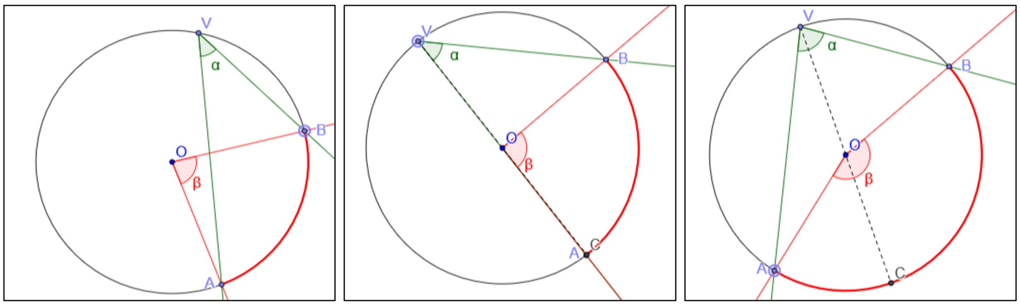
- ¿Crees que está suficientemente probado que la conjetura que has hecho es cierta? ¿Por qué?
- Si crees que podrías estar más convencido y/o que se podría probar mejor que la conjetura que has hecho es cierta, ¿qué habría que hacer para lograrlo?

En la segunda fase, los EPM trabajaron por parejas y debían contestar las mismas cuestiones de la fase anterior, pero ahora trabajando con un applet GeoGebra con un ángulo inscrito y su central correspondiente construidos (https://www.geogebra.org/m/ukrfyber, Figura 1, izda.). En él, los EPM pudieron dinamizar la construcción y ayudarse de la barra de herramientas para indagar la relación existente y ratificarse o cambiar la conjetura anterior, así como contestar las mismas preguntas anteriores asociadas a sus EP. En estas fases el proceso de conjetura está basado en la comprobación con casos particulares (razonamiento inductivo), pero aparecieron, al contestar las preguntas, posibles hipótesis de por qué era cierto el resultado (razonamiento abductivo).

La fase tercera, por parejas, se inició con una transición entre conjeturar y probar, buscando generar una necesidad en los estudiantes de realizar dicha transición (principio de Lin et al., 2012). En este caso, se trató de generar una necesidad intelectual, solicitándoles que explicaran por qué creían que esa conjetura de la relación de amplitudes era cierta y qué relaciones entre ambos ángulos podían propiciar que la conjetura se cumpliera siempre. A través de estas preguntas se pretendía generar una reflexión que propiciara avances desde EP inductivos, y la emergencia de posibles hipótesis (razonamiento abductivo) que pudieran servir para construir una prueba de este.

Posteriormente, en el proceso de probar, se buscaba que desarrollaran sus propias pruebas con el apoyo de diferentes representaciones para expresar sus argumentos (principios de Lin et al., 2012). Para ello se usó otro applet (https://www.geogebra.org/m/zc8xdx3z) con la construcción y donde se planteaban varias preguntas para movilizar los conocimientos necesarios y guiar la construcción de una prueba. Primero, se considera el caso más sencillo (Figura 1, centro), en el que uno de los lados del ángulo contiene al centro de la circunferencia, con estas preguntas: ¿Cómo es este triángulo atendiendo a sus lados y por qué (razona sin recurrir a medir los lados)? ¿Cuál es la amplitud de los tres ángulos de VOB (razona sin medirlos)? ¿Qué relación hay entre los ángulos del triángulo VOB y el ángulo central correspondiente? A continuación, se les preguntó cómo justificar los otros dos casos (Figura 1, dcha.) a partir del anterior, finalizando la tarea formativa con las mismas preguntas asociadas a obtener información sobre sus EP tras la tarea.

Figura 1. Imágenes de los applets GeoGebra usados en el experimento de enseñanza



Esta tarea formativa fue planteada a un grupo de 55 EPM, en una asignatura del Grado en Educación Primaria sobre geometría y su didáctica (2.º curso). Esta tarea se situó en la primera parte del curso y abarcó 90 minutos. Los EPM participantes conocían y habían usado GeoGebra y se había trabajado ya en la asignatura con las definiciones de los diferentes tipos de ángulos en la circunferencia, pero no sus relaciones angulares. En esta asignatura no hubo instrucción específica previa sobre los procesos de razonamiento y prueba.

En la tarea se recogieron los datos de las producciones de los EPM (en papel o en GeoGebra Classroom), así como notas de campo durante su desarrollo. Se aplicó una metodología de análisis de contenido para el análisis y la verificación de los contenidos de datos escritos. Las producciones de cada EPM fueron analizadas por ambos autores, para identificar elementos de conocimiento movilizados en cada etapa del experimento de enseñanza (usando los subdominios y categorías del MTSK, y la clasificación de EP). Tras ello, se compartieron los resultados hasta llegar a un consenso en la descripción, caracterización e interpretación de lo desarrollado por cada EPM.

RESULTADOS: COMPORTAMIENTOS DE EPM TRAS ENCONTRAR UNA HIPÓTESIS PARA LA CONJETURA

Varios EPM, tras enunciar la conjetura de la relación angular, escribieron posibles hipótesis o razones que podrían explicar o justificar por qué la conjetura es cierta (razonamientos de tipo abductivo). La más repetida, en cinco grupos de EPM, fue que la distancia entre el vértice del ángulo central correspondiente al arco de la circunferencia subtendido por el ángulo inscrito es la mitad que la distancia entre el vértice del ángulo inscrito y ese arco subtendido. Es decir, aludieron a una proporcionalidad inversa entre la distancia del vértice al arco subtendido y la amplitud del ángulo (que no es cierta). Se describe y caracteriza a continuación (usando el marco MTSK y los EP) el comportamiento diferente en el desarrollo de la tarea formativa de dos parejas de EPM que verbalizaron esta posible hipótesis, destacando la influencia de esta en el desarrollo de la tarea.

Caso de Jerónimo y Enrique (pseudónimos)

En la primera fase, cada estudiante dibujó un ángulo inscrito y su ángulo central correspondiente, añadiendo sus nombres (Figura 2, izda.), y midió sus amplitudes (KoT movilizado: definiciones, procedimientos), enunciando ambos la conjetura de que el ángulo central mide el doble que el inscrito (KPM movilizado: cómo construir demostraciones —detección de regularidad, formulación de conjetura—). Ambos se mostraron convencidos de la conjetura y la consideran suficientemente probada, pero no con el mismo grado de seguridad: Jerónimo sí estaba seguro; Enrique indicó que estaba “convencido prácticamente al 100%” y que “cree que sí” está suficientemente probada. Al justificar por qué cree que está suficientemente probado, añadió la hipótesis de las distancias (KoT movilizado: propiedad detectada en ejemplo entre distancia y amplitud del ángulo):

> Enrique: Yo creo que sí, debido a que el ángulo central correspondiente a un ángulo inscrito siempre está en el centro de la circunferencia, es decir, transportas el ángulo inscrito a una distancia que es la mitad de la inicial, por lo que su amplitud será el doble.

Es decir, Enrique pareció mostrar la necesidad de encontrar una razón general que justifique la conjetura, pero en la última pregunta, al igual que Jerónimo, aludió a la necesidad de comprobarlo en más ejemplos midiendo con el transportador, lo que es más cercano a un EP inductivo (debilidad del KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez).

En la segunda fase, la pareja hizo uso del applet GeoGebra, dinamizando la figura y añadiendo las medidas de ambos ángulos, para enunciar la misma conjetura. Añadieron que estaban cada vez más convencidos de la relación, porque “no varía aunque cambiemos la posición del ángulo inscrito”, y suficientemente seguros de su validez, evidenciando que en esta fase movilizaron los mismos elementos de KPM que en la fase anterior y mostrando unas respuestas propias de un EP inductivo.

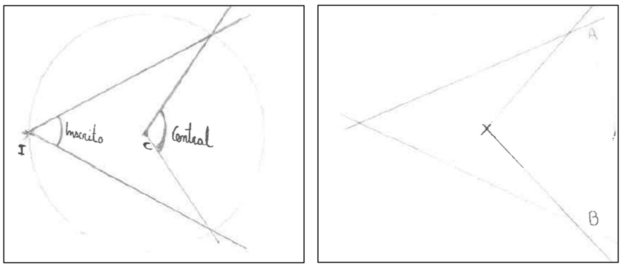
En la tercera fase, en las preguntas de transición de conjeturar a probar, la pareja escribió que creía que la conjetura se cumplía “debido a que el vértice del ángulo central se encuentra situado a la mitad de distancia que el vértice del ángulo inscrito, por lo que al ser el central correspondiente al inscrito, su amplitud será el doble”, volviendo a enunciar la hipótesis antes detectada por Enrique. Posteriormente, y a partir de las preguntas guía, la pareja movilizó los conocimientos necesarios (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración) para construir una demostración de la relación angular en el caso más sencillo:

> Jerónimo y Enrique: Según sus lados este triángulo es isósceles, ya que dos de sus lados (VO, OB) son iguales, ya que corresponden al radio de la circunferencia. α y el ángulo con vértice en B tienen que ser el mismo ángulo, y entonces el ángulo con vértice en O tiene que ser el

doble de α. Respecto a la relación del ángulo central con los del triángulo VOB, el ángulo central tiene que ser 180 menos el ángulo del triángulo VOB con vértice en O y como hemos visto antes, también será el doble del ángulo α.

Sin embargo, no se apoyaron en este resultado ya probado para probar los otros dos casos, al indicar tan solo que pasaba lo mismo (debilidad del KPM movilizado: funciones de la demostración). Al final, indicaron que esta fase "no ha mejorado nuestro convencimiento, pero sí ha reforzado nuestra conjetura" y mencionaron pruebas empíricas variando la apertura y la posición del centro con respecto al ángulo para indicar que la conjetura ya estaba probada, lo que evidencia el EP inductivo de esta pareja. Este EP inductivo se muestra enraizado (Arce y Conejo, 2019; Stylianides y Stylianides, 2009), puesto que, aunque Enrique detectó una posible hipótesis a modo de razonamiento abductivo (al ver la Figura 2, izda.) que podría justificar la conjetura, no la testaron ni hicieron uso real de ella en todo el desarrollo de la tarea, y tampoco llegaron a dar sentido a las implicaciones de construir una prueba deductiva (del caso más sencillo) de la relación angular.

Figura 2. Dibujos de Enrique (izda.) y Alicia (dcha.) que les permitieron enunciar la hipótesis



Caso de Alicia y Diana (pseudónimos)

Cada alumna dibujó un ángulo inscrito y su central correspondiente en papel (Figura 2, dcha.), midió sus amplitudes (KoT movilizado: definiciones, procedimientos) y enunció la conjetura de forma correcta (KPM movilizado: cómo construir demostraciones —detección de regularidad, formulación de conjetura—). En los dos casos expresaron su convencimiento de que la conjetura era cierta y que ya estaba suficientemente probada, aunque por motivos diferentes. Diana esgrimió que se debía a la medición con el transportador en el ejemplo, mostrando un EP empírico inductivo. Sin embargo, Alicia indicó que estaba "muy convencida porque a parte [sic] de medirlo con el transportador, para alcanzar el punto A y el punto B del vértice central se encuentra a la mitad de distancia del que tiene el inscrito", razón que también esgrime como forma suficiente de probar la conjetura. Parece que Alicia ya obtiene convencimiento solo enunciando una posible hipótesis que justifique la relación, es decir, con un razonamiento de tipo abductivo (debilidad del KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración y su validez).

En la segunda fase, por parejas y con GeoGebra, siguen manteniendo la conjetura inicial, aunque, al preguntarles acerca de su grado de convencimiento sobre ella, manifiestan que no es mucho, y vuelven a indicar la relación con las distancias de los vértices al ángulo: "El vértice del ángulo central al estar a la mitad de la distancia que el vértice del ángulo inscrito, la amplitud es el doble". Sin embargo, a la pregunta de si creen que está suficientemente probado el resultado, indican que "Sí, porque es el doble" (inferimos que pudiendo referirse a la relación de distancias). En esta parte no usaron GeoGebra para comprobar la conjetura con más ejemplos, sin considerar un razonamiento inductivo para convencerse de la veracidad de la relación angular o la dinamización de la posición del vértice del ángulo inscrito para detectar que la relación de distancias es variable.

En la tercera fase, las alumnas mantienen como explicación de la relación angular que "porque el vértice del ángulo central al estar a la mitad de la distancia que el vértice del ángulo inscrito, la amplitud es el doble". En la construcción de la demostración, las alumnas justifican adecuadamente que el triángulo es isósceles y las amplitudes de los tres ángulos de este (KoT movilizado: definiciones, propiedades; KPM movilizado: conocimiento de métodos y tipos de demostración), pero no lo usan para deducir la relación angular. Sin embargo, y como continuación de la propia demostración, incluyen la relación entre distancias y amplitudes como hipótesis de la que se deriva el cumplimiento de dicha relación angular. Más aún, cuando se les solicita demostrar el caso del centro de la circunferencia fuera del ángulo inscrito, afirman que “la relación vista anteriormente aquí no se da, porque el ángulo central no se encuentra dentro del inscrito”, inferimos que, fijándose en la relación de distancias como una hipótesis necesaria para el cumplimiento de la relación angular, y aquí aprecian que no se cumple dicha relación de distancias. Con este reenunciado del teorema incluyendo esta hipótesis necesaria, esta pareja es consciente de las implicaciones de disponer de un teorema, al aplicarlo solo cuando se cumple dicha hipótesis (KPM movilizado).

El comportamiento de esta pareja, que muestra convencimiento de la conjetura a partir de un razonamiento abductivo (sin llegar a conectar lógicamente la hipótesis con la relación angular), e incluso llega a aplicar la hipótesis como condición para que se cumpla la relación angular, nos lleva a sugerir que esta pareja muestra un EP diferente de los propuestos por Harel y Sowder (2007). Así, planteamos la existencia, ya sugerida en Arce y Conejo (2019), de un EP abductivo, caracterizado por la obtención de convencimiento y persuasión solo a partir de encontrar y enunciar una posible hipótesis de por qué es cierta la conjetura, pero sin llegar a conectarla lógicamente con esta.

CONCLUSIONES

La inclusión en la tarea formativa de preguntas similares a los *pilares de conciencia conceptual* de Stylianides y Stylianides (2009) y preguntas para transitar del proceso de conjeturar al de demostrar ha favorecido que emergieran razonamientos abductivos con posibles hipótesis que justifiquen la relación angular, lo cual es relevante dada la dificultad para generar este tipo de razonamientos (Pedemonte y Reid, 2011) y su rol para generar conocimiento matemático (Komatsu y Jones, 2022).

En el caso de Alicia y Diana, sus respuestas nos llevan a sugerir la existencia de un EP de tipo abductivo, que se añadiera a la clasificación de Harel y Sowder (2007), donde el convencimiento y la persuasión sobre la validez de un enunciado la obtienen a partir de un razonamiento abductivo. Este EP movilizaría un conocimiento de los temas (KoT) necesario para formular una conjetura, así como un conocimiento de cómo comenzar a construir una demostración matemática (KPM), que no existe en los EP de convicción externa, pero sin desarrollar razonamientos deductivos propios de EP analíticos. En Arce y Conejo (2019) hipotetizábamos la existencia de este EP abductivo, mostrando ahora en esta comunicación evidencias más concretas. Como sugiere Baccaglini-Frank (2019), construir y dinamizar configuraciones usando geometría dinámica puede generar aparentes relaciones de causalidad entre hipótesis y conjetura, que hagan emerger EP abductivos. Con todo, se hace necesario seguir desarrollando investigaciones para confirmar su existencia y caracterizarlo.

En el estado actual de la tarea, puede no estar aprovechándose el potencial de estos razonamientos abductivos generados, como muestran también Enrique y Jerónimo. Estos casos nos llevan a valorar la necesidad de revisar la tarea para gestionar las posibles hipótesis movilizadas (su comprobación, su relación lógica con la conjetura…) y generar mejores oportunidades del desarrollo del KPM en los EPM. Todo ello siendo conscientes de la necesidad de intervenciones continuadas para poder evolucionar los EP de los profesores en formación (Harel y Sowder, 2007), superando dificultades comunes como la amplia presencia de EP inductivos enraizados (Stylianides y Stylianides, 2009), que limita que los EPM reconozcan los procesos llevados a cabo en la tercera fase de la tarea (a pesar de movilizar el conocimiento necesario para construir bien parte de la demostración, como es el caso de Jerónimo y Enrique) y su rol necesario para validar el conocimiento construido.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo está vinculado a la red MTSK, red de investigación de la AUIP, y ha sido apoyado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España (Referencia PID2021-122180OB-I00).

Referencias

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163–172). SEIEM.

Arzarello, F. (2008). The proof in the 20th century. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history to epistemology and cognition to classroom practices* (pp. 43–64). Sense. https://doi.org/10.1163/9789087901691_005

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM, 51*, 779-791. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01046-8

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P. Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57–69). Dykinson. http://doi.org/10.14679/1454

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Information Age.

Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96,* 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Komatsu, K. y Jones, K. (2022). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 109*, 567-591. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Lin, F-L., Yang, K-L., Lee, K-H., Tabach, M. y Stylianides, G. (2012). Principles and task design for conjecturing and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Autor.

Molina, M. (2021). Investigación de diseño educative: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83–97). SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Autor.

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281–303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Reid, D. A. (2018). Abductive Reasoning in Mathematics Education: Approaches to and Theorisations of a Complex Idea. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9), em1584. https://doi.org/10.29333/ejmste/92552

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14. https://doi.org/10.2307/1175860

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 314–352. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.40.3.0314