CARACTERÍSTICAS DE MIRAR PROFESIONALMENTE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES EN EL DOMINIO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Characteristics of prospective secondary mathematics teachers' professional noticing of students' proportional reasoning

Espinoza-González, J.[a], Buforn, À.[b] y Llinares, S.[b]

[a] Universidad Nacional, Costa Rica, [b] Universidad de Alicante, España

Resumen

El objetivo del estudio es caracterizar la competencia docente "mirar profesionalmente" el razonamiento proporcional de estudiantes en profesores de matemáticas de educación secundaria en formación. Catorce estudiantes para profesor de matemáticas participaron en una propuesta formativa centrada en aprender a analizar cómo estudiantes de educación secundaria resuelven problemas de proporcionalidad. Los estudiantes para profesor resolvieron una práctica profesional en la que se evaluaron las tres destrezas vinculadas a la competencia docente "mirar profesionalmente": identificar, interpretar y decidir. Se caracterizaron tres niveles de desarrollo que definen perfiles de esta competencia e informan sobre su desarrollo.

Palabras clave: *mirar profesionalmente; razonamiento proporcional; formación de profesores*

Abstract

The objective of this study is to characterize prospective secondary mathematics teachers' professional noticing of students' proportional reasoning. Fourteen prospective mathematics teachers participated in a teaching experiment focused on learning to notice how secondary school students solve proportional problems. Prospective teachers solved a professional practice in which the three skills linked to professional noticing were evaluated: identify, interpret and decide. Three levels of development were characterized that define profiles of this competence and inform about its development.

Keywords: *professional noticing, proportional reasoning, teacher training*

INTRODUCCIÓN

Mirar profesionalmente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una competencia docente que permite reconocer aspectos que son de importancia en las situaciones de enseñanza y que otros profesionales no serían capaces de reconocer (Dindyal et al., 2021). Un foco particular de esta competencia es mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, entendido como la habilidad de identificar aspectos relevantes en los procedimientos de resolución de los problemas empleados por los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes que estos procedimientos evidencian y tomar decisiones de acción para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje (Jacobs et al., 2010).

Un objetivo relevante en educación secundaria es el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes. En el caso de Costa Rica su estudio es considerado un preámbulo al tema de funciones. Con especificidad, se pretende que los estudiantes utilicen modelos sencillos de fenómenos y situaciones del contexto que tienen que ver con razones y proporciones (MEP, 2012). Debido a lo anterior, es fundamental que docentes en formación aprendan a interpretar niveles de desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes cuando resuelven problemas de proporcionalidad. Sin embargo, investigaciones previas muestran las dificultades en el desarrollo de esta competencia tanto

Espinoza-González, J., Buforn, À. y Llinares, S. (2023). Competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de estudiantes de un grupo de profesores en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 227–234). SEIEM.

en profesores en ejercicio como en profesores en formación (Buforn et al., 2022; Burgos, y Godino, 2022a; 2022b; Fernández et al., 2011; Hines y McMahon, 2005). El estudio que se presenta se sitúa en este ámbito de investigación y pretende caracterizar aspectos de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de estudiantes de secundaria en relación con el razonamiento proporcional en profesores en formación.

MARCO CONCEPTUAL

Desarrollo del Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional consiste en la habilidad de establecer una relación multiplicativa entre dos cantidades, y extenderla a otro par de cantidades (Lamon, 1993) y la capacidad de reconocer situaciones proporcionales de las no proporcionales (van Dooren et al., 2005). Investigaciones previas han caracterizado el desarrollo del razonamiento proporcional a través de tres transiciones en la manera de razonar de los estudiantes (Lobato et al., 2010) (Tabla 1). Aprender a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio de las razones y proporciones implica que los profesores en formación deben aprender a identificar las características de estas transiciones.

Tabla 1. Transiciones entre los niveles del razonamiento proporcional (adaptados de Lobato et al., 2010)

	Descripción
1	*Del pensamiento absoluto al pensamiento relativo*. El estudiante pasa de enfocarse en una sola cantidad a prestar atención a la relación entre dos cantidades. El estudiante inicia la construcción de la idea de razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades de igual o distinta magnitud. En esta transición, el estudiante puede relacionar erróneamente de manera aditiva las cantidades cuando la situación es proporcional o multiplicativamente cuando es no proporcional.
2	*De considerar una razón a formar múltiples razones*. El estudiante identifica relaciones multiplicativas entre cantidades de igual magnitud y las traslada a las cantidades homologas en otra magnitud. En esta transición el estudiante construye y usa razones escalares que evidencian la invarianza de las razones escalares e inicia la comprensión de la constancia de las razones funcionales. Sin embargo, el estudiante tiene dificultades en representar algebraicamente la idea de que la razón funcional es constante
3	*De usar razones funcionales a representarlas*. Implica usar la constancia de las razones funcionales (constante de proporcionalidad) y expresarla en diferentes representaciones (tabular, verbal o algebraicamente).

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010), se entiende como la interrelación de tres destrezas: (i) identificar elementos matemáticos en las estrategias usadas por los estudiantes; (ii) interpretar su comprensión; y (iii) decidir cómo ayudarles a seguir progresando en su aprendizaje. En el dominio del razonamiento proporcional, la destreza identificar implica ser capaz de reconocer las relaciones usadas entre las cantidades y considerar si la situación es proporcional o no. La destreza interpretar conlleva mirar globalmente las resoluciones del estudiante a una serie de problemas, para reconocer características del desarrollo del razonamiento proporcional. Finalmente, la destreza decidir incluye proponer nuevos problemas o acciones de enseñanza a partir de la interpretación realizada.

Teniendo en cuenta estas referencias previas, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué características de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional se pueden identificar en profesores en formación al participar en una propuesta formativa? En particular, ¿de qué manera el desarrollo de las diferentes destrezas está vinculado a los diferentes aspectos de las respuestas de los estudiantes?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 14 profesores en formación (PFs) de Matemática de Educación Secundaria que cursaban el tercer año de su formación en una universidad pública de Costa Rica. Los PFs participaron en una propuesta formativa de 17 semanas de duración (una sesión semanal de 2 horas y 30 minutos), dirigida al desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de la razón y proporción". En esta comunicación se presentan los resultados de la competencia específica mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción, la cual se promovió en las tres primeras sesiones de la propuesta formativa.

En la primera sesión, los PFs resolvieron cinco problemas sobre razones y proporciones y discutieron sobre las estrategias empleadas en su resolución. En la segunda sesión, los PFs analizaron estos problemas apoyándose en un documento con información sobre las características de los problemas proporcionales (valor perdido, comparación numérica y predicción cualitativa) y no proporcionales (aditivo, afín y constante) y los aspectos que dificultan su resolución (existencia de razones enteras y no enteras) (Fernández y Llinares, 2012). Además, se mostraron ejemplos de estrategias correctas (enfoque escalar, enfoque funcional, estrategia constructiva, regla de tres, unificación de antecedentes o consecuentes, reducir a la unidad la razón funcional y comparar cocientes) e incorrectas (estrategia aditiva y comparación de dos cantidades de igual magnitud). En la tercera sesión, los PFs discutieron información sobre las características de las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes de educación secundaria (Lamon, 1993; Lobato et al., 2010).

Para realizar estas actividades, los propios PFs se organizaron en grupos de trabajo según sus afinidades. La única indicación para su conformación fue que cada grupo debía tener a lo sumo tres integrantes. De esta manera, cinco de los grupos tenían dos integrantes (G1, G2, G3, G4 y G5), uno tres integrantes (G6) y un estudiante trabajó de forma individual (G7).

Instrumento y procedimiento

Al finalizar las tres sesiones, los FPs resolvieron una "práctica profesional" que presentaba las respuestas de tres estudiantes (E1, E2, E3) a cinco problemas idénticos o con algunas modificaciones a los que habían resuelto en la sesión 1 (que podemos considerar como un registro de la práctica). En este registro de la práctica se plantearon tres cuestiones como una forma de favorecer la atención selectiva de los FPs hacia las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Figura 1).

Figura 1. Cuestiones planteadas a los FPs en la práctica profesional

A continuación, se muestran respuestas de tres estudiantes a cinco problemas de las prácticas 1 y 2, con algunas modificaciones leves. Ahora realiza lo siguiente:

1. Analiza el pensamiento matemático de cada estudiante con base en los siguientes criterios.
   a) IDENTIFICAR. Describe la estrategia utilizada sin importar si es correcta o no. En caso de ser incorrecta explica qué es lo que el estudiante no comprende.
   b) INTERPRETAR el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional. A partir de las respuestas dadas por un mismo estudiante a todas las tareas, identifica las transiciones que ha logrado alcanzar y aquellas que aún debe superar en su pensamiento para desarrollar su razonamiento proporcional. Con base en lo anterior, indica el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional alcanzado por cada estudiante. Justifica tu respuesta.
2. DECISIONES DE ACCIÓN ¿Qué cuestiones o qué otras tareas propondrías para promover las transiciones en el pensamiento del estudiante que apoyan el desarrollo de su razonamiento proporcional.

Respecto a los problemas (Figura 2), cada uno fue diseñado con un propósito y presentaban distintas características. El problema 1 (P1) pide completar una tabla de proporcionalidad y expresar la relación funcional de forma algebraica. Se caracteriza por presentar una razón funcional no entera y dos razones escalares, una entera y otra no entera. El problema 2 (P2) es una situación no proporcional. El problema 3 (P3) es un problema de comparación numérica de razones en un contexto de mezcla. Muestra en una tabla dos razones funcionales no enteras y dos escalares no enteras. El problema 4

(P4) es un problema de comparación cualitativa inmersa en un contexto familiar. Por último, el problema 5 (P5) presenta diferentes representaciones (tabular, verbal y algebraica) de una relación funcional.Las respuestas hipotéticas a estos problemas se diseñaron para reflejar diferentes características del desarrollo del razonamiento proporcional. En particular, las respuestas de E1 a los cinco problemas (Figura 2) muestran que reconoce y usa relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud y las traslada a las cantidades correspondientes de la otra magnitud, y que, además, distingue situaciones no proporcionales. Sin embargo, no utiliza razones funcionales excepto en contextos familiares y tiene dificultades para representar la relación funcional de forma verbal o algebraica (Transición 2). Las producciones de E2 se centran en el uso incorrecto de las relaciones aditivas (cuando deben ser multiplicativas) y multiplicativas (cuando deben ser aditivas) (características de la transición 1). Las respuestas de E3 indican que distingue las situaciones aditivas de las proporcionales y usa y representa la razón funcional (características de la transición 3).

Figura 2. Los cinco problemas y las respuestas del estudiante 1

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Respuesta del estudiante 1</th><th>Problema</th><th>Respuesta del estudiante 1</th></tr>
<tr>
<td>P1. Yesenia y Nicole salen a correr por las mañanas en una pista circular. Empiezan al mismo tiempo, pero Yesenia es más rápida que Nicole. Cuando Nicole ha dado 4 vueltas, Yesenia ha dado 10. Con base en la información anterior completa la siguiente tabla. En las últimas dos columnas coloca dos pares de cantidades que estén relacionadas.
<table><tr><td>Nicole</td><td>4</td><td>12</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr><tr><td>Yesenia</td><td>10</td><td></td><td>15</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td>
<td>x5
x3 ÷2 ÷2
<table><tr><td>Nicole</td><td>4</td><td>12</td><td>6</td><td>20</td><td>10</td><td>x</td></tr><tr><td>Yesenia</td><td>10</td><td>30</td><td>15</td><td>50</td><td>25</td><td>x+6</td></tr></table>
+6
x3 ÷2 ÷2
x5</td>
<td rowspan="4">P5. Sara descubre que en su casa hay un grifo que gotea. Para conocer la cantidad de agua que derrama coloca un recipiente debajo del grifo y recoge 6 onzas cada 9 minutos.

a) ¿Cuáles de las siguientes tablas muestran cantidades que han sido derramadas por el grifo que gotea en casa de Sara?

Tabla 1.
<table><tr><td>Onzas</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>Minutos</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr></table>
Tabla 2
<table><tr><td>Onzas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Minutos</td><td>1.5</td><td>3</td><td>4.5</td><td>6</td></tr></table>
b) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre la cantidad de onzas de agua que derrama el grifo que gotea en casa de Sara y la cantidad de minutos que tarda en derramarlas?

A.1. La cantidad de onzas derramadas es igual a la cantidad de minutos que tarda en derramarlas menos tres unidades.
A.2. La cantidad de minutos es igual a $\frac{2}{3}$ la cantidad de onzas derramadas.

c) ¿Cuáles de las siguientes expresiones relaciona la cantidad de onzas de agua (x) que derrama el grifo que gotea en casa de Sara y la cantidad de minutos (y) que tarda en derramarla?
E.1 $y = 1.5x$
E.2 $y = x + 3$</td>
<td rowspan="4">a) R/ La tabla 2
x3
x2 x2
Tabla 2
<table><tr><td>Onzas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Minutos</td><td>1.5</td><td>3</td><td>4.5</td><td>6</td></tr></table>
x2 x2
x3

b) R/ Ninguna. Lo correcto es que al sumar uno a las onzas se debe sumar 1.5 a los minutos
+1 +1 +1
Tabla 2
<table><tr><td>Onzas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Minutos</td><td>1.5</td><td>3</td><td>4.5</td><td>6</td></tr></table>
+1.5 +1.5 +1.5

c) R/ Ninguna de las dos. la correcta es x+1= y+1.5</td>
</tr>
<tr>
<td>P2. Dos máquinas A y B producen tornillos a la misma velocidad, pero la máquina A ha iniciado antes. Cuando la máquina A ha producido 160 tornillos, la máquina B ha producido 40. Cuando B haya producido 80 tornillos, ¿cuántos habrá producido la máquina A?</td>
<td>A B
160 40
¿? 80
80-40= 40
R/ Como producen a la misma velocidad A producirá 160+40 = 200</td>
</tr>
<tr>
<td>P3. Pedro y Miguel preparan una bebida de naranja a partir de un jugo concentrado. La siguiente tabla muestra la cantidad de vasos de jugo concentrado y de agua que utilizó cada uno. ¿Cuál de los dos preparó la bebida con más sabor a naranja?
<table><tr><td></td><td>Vasos de jugo</td><td>Vasos de agua</td></tr><tr><td>Pedro</td><td>12</td><td>27</td></tr><tr><td>Miguel</td><td>15</td><td>36</td></tr></table></td>
<td>Pedro
÷3 x4
<table><tr><td>Jugo</td><td>12</td><td>4</td><td>16</td></tr><tr><td>Agua</td><td>27</td><td>9</td><td>36</td></tr></table>
÷3 x4
R/ La bebida de Pedro sabe más a naranja</td>
</tr>
<tr>
<td>P4. Nicole sale a correr todos los días. Si hoy ha recorrido menos vueltas en el mismo tiempo que lo hizo ayer, indica si:
a) hoy ha corrido más rápido que ayer.
b) ayer corrió más rápido que hoy.
c) hoy ha corrido tan rápido como ayer.
d) no hay información suficiente para responder la pregunta.</td>
<td>R/ Ayer corrió más rápido que hoy. Por ejemplo; 5 Km/h es más veloz que 3 Km/h</td>
</tr>
</table>

Análisis

Los datos del estudio son las respuestas de los siete grupos de PFs a la práctica descrita. Se adaptó el proceso analítico de Jacobs et al. (2010; 2022), para valorar con una escala de 0 a 3 las respuestas de cada grupo de PFs con relación a cada estudiante y para cada una de las tres destrezas (Tabla 2). De esta manera, a cada grupo de PFs se le asignaron 9 puntuaciones (3 destrezas x 3 estudiantes). Posteriormente, se resumieron las puntuaciones para cada una de las destrezas.

Para la destreza identificar, las puntuaciones reflejaban en qué medida los PFs tenían en cuenta los detalles matemáticos en los problemas y en las estrategias de los estudiantes. Para la destreza interpretar, las puntuaciones intentaban reflejar la evidencia que los PFs demostraban al interpretar la comprensión de los estudiantes de la idea de razón y proporción, considerando globalmente las respuestas de los tres estudiantes. Finalmente, las puntuaciones para la destreza decidir intentaban reflejar en qué medida los PFs tenían en cuenta la interpretación del razonamiento proporcional realizada a cada estudiante para decidir qué hacer a continuación.

Tabla 2. Descripción de la escala utilizada para puntuar las respuestas de los PFs según la destreza (adaptado de Jacobs et al., 2010)

Destreza	Escala	Descripción
Identificar	0	No identifican los elementos matemáticos en las resoluciones de los estudiantes
	1	Describen la estrategia de resolución y/o indican si es correcta o incorrecta
	2	Identifican alguna característica de los problemas, pero no en la resolución del estudiante
	3	Identifican al menos una característica de la estrategia del estudiante
Interpretar	0	No interpreta el nivel de desarrollo del estudiante
	1	Asigna y justifica de forma incorrecta el nivel de desarrollo.
	2	Indica el nivel de razonamiento (o transición) apoyándose en la estrategia y/o la resolución correcta o incorrecta de los problemas, pero no lo justifica considerando las características del razonamiento proporcional
	3	Justifica el nivel de razonamiento a partir de características del razonamiento proporcional
Decidir	0	No proponen nada o sugiere decisiones de acción no vinculadas al razonamiento proporcional
	1	Proponen acciones no vinculadas a la comprensión del estudiante
	2	Propone al menos una decisión de acción considerando la comprensión del estudiante, aunque puede no indicarla de manera específica
	3	Propone al menos una decisión de acción considerando la comprensión del estudiante y la indica de manera específica

RESULTADOS

Los resultados de este estudio se organizan según las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Para cada destreza se identificaron tres niveles de evidencia: alto, medio y bajo (Tabla 3).

Tabla 3. Niveles de los grupos según la destreza

Destreza	Nivel alto	Nivel medio	Nivel bajo
Identificar	G4, G6	G2, G5, G7	G1, G3
Interpretar	G5, G6	G2, G4	G1, G3, G7
Decidir	G2, G6	G4	G1, G3, G5, G7

Identificar

Dos de los grupos de PFs tienen un nivel alto en la destreza identificar; tres grupos tienen un nivel medio, y dos grupos tienen un nivel bajo. Los grupos de PFs que evidenciaban un nivel alto en la destreza identificar (G4 y G6), mencionaban los elementos matemáticos característicos de los problemas y de las estrategias usadas por los tres estudiantes (puntuación de la escala: 2 y 3). Por ejemplo, G4 en relación con la respuesta de E1 al P1 reconoció que este estudiante utiliza las razones escalares enteras para determinar valores perdidos en el problema proporcional. Al respecto comentó:

> En la tabla se observa que Nicole pasa de dar 4 vueltas a 12, lo cual eso sería el triple; ahora si Nicole dio el triple de vueltas, Yesenia daría el triple de vueltas también, cuando Nicole completa 12 vueltas entonces Yesenia da 30 vueltas.

Por otro lado, 3 de los grupos evidenciaron un nivel medio en la destreza identificar (G2, G5 y G7), reconociendo la estrategia usada y/o la corrección de la respuesta en los tres estudiantes. Además, en alguna ocasión detallaron la estrategia de alguno de los estudiantes indicando algún elemento matemático (puntuación de la escala: 1 y 2). Por ejemplo, G5 respecto a la resolución de E1 a P3 indicó que “aplica la estrategia de manera adecuada para encontrar la respuesta”, pero no mencionó explícitamente el uso de la razón funcional y las razones escalares enteras cuando se comparaban dos razones funcionales.

Finalmente, dos grupos evidenciaron un nivel bajo de la destreza identificar (G1 y G3). En este caso, los PFs solo indicaban la corrección de la estrategia (puntuación de la escala: 0 y 1). Por ejemplo, ante la respuesta de E1 a P3, G1 mencionó que “usa una estrategia de unificación de antecedentes o consecuentes, sin embargo, solamente compara los valores de Pedro, por lo que no puede afirmar la respuesta que ha dado”. Es decir, G1 parece que no comprendió la respuesta de E1 a P3, ya que E1 compara la cantidad de vasos de jugo y de agua que utilizan las dos personas para preparar la bebida y refiere a la persona que utiliza más vasos de jugo cuando los dos tienen la misma cantidad de vasos de agua.

Interpretar

Dos grupos de PFs evidenciaron un nivel alto en la destreza interpretar (G5, G6). Estos grupos asignaron un nivel de razonamiento a cada estudiante justificándolo a partir de las resoluciones de todos los problemas (puntuación de la escala: 3). Por ejemplo, G6 mencionó que E1 se encuentra en el “nivel 2 ya que puede utilizar estrategias constructivas; sin embargo, le falta establecer la comparación de dos cantidades multiplicativamente por lo cual no alcanza aún el nivel 3”. Es decir, G6 logró mirar globalmente a E1 como razonador proporcional al enlazar las características de los problemas y las respuestas dadas por el estudiante, con la definición del nivel de razonamiento proporcional dado en el documento teórico.

Dos grupos evidenciaron un nivel medio al reconocer de forma global la comprensión de los estudiantes a partir de la corrección de las respuestas (puntuación de la escala: 2) pero no proporcionaron justificaciones (G2 y G4). Por ejemplo, G2 comentó para E1 que “el nivel alcanzado por el estudiante es 3. A pesar de que en algunos ejercicios no logra resolverlos adecuadamente siempre utiliza técnicas correctas”. G2 no indicó las características específicas que posee el estudiante y que le permitieron justificar el nivel asignado.

Por último, tres grupos presentaron un nivel bajo de la destreza interpretar (G1, G3 y G7). Estos grupos no consideraron globalmente las respuestas de cada estudiante a los cinco problemas para asignarle un nivel de razonamiento proporcional (puntuación de la escala: 0, 1). Por ejemplo, G3 indicó con relación a E1 que en dos de los problemas, P1 y P3 “tiene nivel 1 porque relaciona utilizando estrategias aditivas” y que “tiene nivel 2 porque utiliza otras estrategias para formar razones equivalentes”. G3 tuvo dificultades en reconocer el perfil de cada estudiante considerando globalmente sus respuestas a los cinco problemas, por lo que asignó niveles de razonamiento diferentes al estudiante en función del problema.

Decidir

Dos grupos evidenciaron un nivel alto de la destreza decidir (G2 y G6). Estos grupos propusieron decisiones de acción considerando el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional asignado a cada estudiante (puntuación de la escala: 3). Por ejemplo, G6 identificó que E1 reconoce y usa relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud y las traslada a las relaciones entre cantidades de la otra magnitud, pero tiene dificultades en expresar algebraicamente la relación funcional. Para dar respuesta a esta dificultad propuso “pedirle que calcule valores muy grandes o decimales para que deba dejar atrás la adición seguido de una serie de ejercicios dónde deba hallar la razón de la proporcionalidad”.

Un grupo (G4) evidenció un nivel medio en la destreza decidir. Este grupo propuso al menos una decisión de acción considerando la comprensión del estudiante, aunque no la nombró de manera específica (puntuación de la escala: 2). Por ejemplo, G4 interpretó que E3 construye y usa la razón funcional de manera adecuada, reconoce situaciones aditivas y proporcionales, y que representa y reconoce la forma tabular, verbal y algebraica de la relación funcional en las situaciones de proporcionalidad, y como consecuencia propuso “buscar alternativas distintas para que pueda expandir distintas maneras de resolver situaciones”. Es decir, sugirió el uso de estrategias de resolución que no explicita. Esto imposibilitó determinar si la sugerencia es acorde a la comprensión del estudiante.

Por último, cuatro grupos mostraron un nivel bajo en la destreza decidir (G1, G3, G5 y G7). Estos grupos no propusieron acciones o en algunos casos sugirieron acciones desvinculadas del razonamiento proporcional y de la comprensión del estudiante (puntuación de la escala: 0 y 1). Por ejemplo, G1 sugirió para E1 "ayudar al estudiante mediante la implementación de una tabla de valor perdido… que lo impulse a transicionar al pensamiento de estrategias constructivas". No obstante, la actuación de E1 al resolver los problemas se caracteriza por el uso de este tipo de estrategias. Por su parte, G3 propuso para E1 que "le haríamos saber sus errores y le ayudaríamos a corregirlos, con tareas y con trabajos grupales donde puedan dialogar juntos y llegar a dar una respuesta más clara y correcta". Estas sugerencias son genéricas y válidas para cualquier dominio de conocimiento.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Este estudio tiene como objetivo identificar características de la mirada profesional de 14 PFs con relación al pensamiento matemático de estudiantes en el dominio de la razón y proporción. Los PFs analizaron las resoluciones de tres estudiantes a cinco problemas sobre razones y proporciones reflejando distintos perfiles de razonadores proporcionales. Los PFs mostraron tres niveles de desarrollo en las destrezas identificar, interpretar y decidir. El desarrollo de estas destrezas no fue uniforme sino que depende de las características que mostraban las respuestas de los estudiantes y de la destreza considerada (Tabla 3). Este resultado es relevante ya que incide en que el desarrollo de la destreza depende de lo que se mira (diferentes características de los razonadores proporcionales) y cómo se mira (si hay que identificar elementos matemáticos en las estrategias de los estudiantes, o hay que interpretar la comprensión de los estudiantes, o hay que tomar decisiones para proponer nuevas acciones de enseñanza). Esta dependencia de la competencia mirar profesionalmente de estos dos aspectos, identificada en estudiantes para profesores de educación secundaria, también fue reconocida en estudiantes para profesores de educación primaria (Pérez-Tyteca et al., 2017; Tyminski et al., 2021), lo que parece indicar una característica general de esta competencia. Además, estos resultados apoyan la idea de que, si los FPs centran la atención en solo la corrección de las respuestas para mirar de forma global la comprensión de los estudiantes, evidencia luego un nivel bajo en el desarrollo de la competencia (Hines et al., 2005). Por otra parte, la investigación realizada, centrada en la línea del razonamiento proporcional, permite observar qué tipos de problemas pueden influir más que otros en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente.

Los resultados obtenidos aportan información específica que contribuyen a nuestro conocimiento como formadores de profesores para poder reconocer perfiles de la competencia docente "mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes". Además, los resultados muestran que desarrollar la competencia mirar profesionalmente no es una tarea fácil para los futuros docentes (Buforn et al., 2022; Fernández et al., 2011; Hines y McMahon, 2005), por lo que es importante promover esta competencia a partir de propuestas formativas vinculadas a la práctica docente. Estas propuestas formativas deben incorporar registros de la práctica que incluyan situaciones con distintos tipos de problemas y respuestas de estudiantes a estos problemas que presenten diferentes grados de comprensión cuando se analizan todos los problemas en conjunto, no de forma individual.

Reconocimiento. La participación de À. Buforn y S. Llinares en este estudio forma parte del proyecto Referencia: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Buforn, À., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2022): Preservice teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(2), 425-443. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M. y Godino, J. (2022a). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal, 34*, 269-291. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9

Burgos , M. y Godino, J. (2022b). Propective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *Journal of Mathematik-Didactik, 43*, 347-376. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011). Development of prospective mathematics teaches' professional noticing in a specific domain: Proportional reasoning. En B. Ubuz (ed.) *Proceeedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol2* (pp. 329-336). PME.

Hines, E. y McMahon, M. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations for preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18041.x

Jacobs, V.R, Lamb. L.C. y Philip, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. En T. Carpenter et al (eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research,* pp.131-156. LAE, Publishers.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I. y Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programa de Estudios de Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Recuperado de https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica .pdf

Pérez-Tyteca, P, Callejo, M.L., Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2017). Cómo progresan estudiantes para maestro en la identificación de los elementos matemáticos necesarios para interpretar la comprensión de la longitud y su medida en alumnos de educación infantil. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 397-406). SEIEM.

Tymisky, A.M., Simpson, A.J., Land, T.J. et al. (2021). Prospective elementary mathematics teachers' noticing of children's mathematics: a focus on extending moves. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24, 533-56*1. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09472-2

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2301_3