

CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN INFANTIL (0-3 AÑOS) PARA PROMOVER LOS INICIOS DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Knowledge of early childhood education teachers (0-3 years) to promote the beginnings of algebraic thinking

Olmos-Martínez G.^a y Alsina Á.^b

^aEscoles Bressol Municipals de Vic, ^bUniversitat de Girona

Resumen

Las orientaciones contemporáneas sobre educación matemática en la etapa de Educación Infantil señalan la importancia de promover el desarrollo de las habilidades matemáticas en la primera infancia (0-3 años). Estas matemáticas emergentes, denominadas también intuitivas e informales, integran diferentes bloques de contenido; entre ellos, las acciones de reconocer, relacionar y observar los cambios en los atributos, que dan lugar a los cimientos que sustentan el pensamiento algebraico. A través de un diseño cuasi-experimental (Pre-Post), se han analizado los conocimientos de 28 profesionales de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic (Cataluña, España) para promover el inicio de este tipo de pensamiento, antes y después de un programa de formación. Los resultados muestran carencias significativas en la formación de los profesionales y la necesidad de actualizar la caracterización de los inicios del pensamiento algebraico de los 0 a los 3 años.

Palabras clave: Matemáticas emergentes, pensamiento algebraico, conocimientos para enseñar matemáticas, formación continua, Escuela Infantil.

Abstract

Contemporary guidelines on children's mathematics education point to the importance of promoting the development of mathematical skills in early childhood education (0-3 years). This emergent mathematics, also called intuitive and informal, integrates different blocks of content, including the actions of recognising, relating and observing changes in attributes, which give rise to the foundations that support algebraic thinking. Through a quasi-experimental design (Pre-Post), we have analysed the knowledge of 28 professionals of the Municipal Nursery School Network of Vic (Catalonia, Spain) to promote the beginnings of this type of thinking, before and after a training program. Results show significant shortcomings in the training of professionals and the need to update the characterisation of the beginnings of algebraic thinking from 0 to 3 years of age.

Keywords: Emergent mathematics, early algebra, knowledge to teach mathematics, continuous training, prekindergarten.

INTRODUCCIÓN

Diversos organismos y autores destacan la necesidad y la importancia de promover el desarrollo de las matemáticas emergentes desde las primeras edades (Geist, 2014) durante las situaciones de exploración, manipulación y juego, por ser el eslabón imprescindible para el acceso a las matemáticas más formales (NCTM, 2003). Estas primeras matemáticas se refieren, por un lado, a los conocimientos intuitivos que desarrolla el niño de una manera autoevidente, basándose en su certeza intrínseca, de forma global, no analítica (Fischbein, 1987) y, por otro lado, a los conocimientos matemáticos informales que se desarrollan a partir de las interacciones con el medio físico y social, de una manera más natural y espontánea (Baroody, 1987).

Alsina (2015), a partir de un estudio longitudinal de cinco años con más de 700 niños menores de 3 años, señala que estas primeras matemáticas giran en torno a las cualidades sensoriales, las cantidades discretas y continuas, las posiciones y las formas y los atributos mensurables. Para cada uno de estos aspectos, este autor describe diferentes tipos de acciones que los niños y las niñas pueden desarrollar, considerando las capacidades de identificar, relacionar y observar los cambios, siguiendo la categorización de tipos de actividades matemáticas en la infancia de Canals (1989). De este modo, en relación a las cualidades sensoriales, señala estas acciones: (1) el reconocimiento de los atributos de los elementos; (2) las relaciones entre los diferentes atributos, estableciendo así las primeras comparaciones; y (3) la observación de cambios en los atributos. Estas acciones promueven el desarrollo de habilidades matemáticas (Clements y Sarama, 2015), proporcionando una base esencial para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico. Autores como Mason (2008), Geist (2014), Clements y Sarama (2015) o Acosta y Alsina (2018) explican que los niños, de manera innata y natural desde edades muy tempranas, son capaces de adquirir nociones algebraicas elementales, por ejemplo el reconocimiento de patrones de repetición, y avanzar progresivamente hacia el proceso de generalización (Alsina, 2019; Papic et al., 2011).

Con base en estos antecedentes, Alsina (2015) señala que el reconocimiento de las cualidades y atributos sensoriales y las relaciones de naturaleza cualitativa que los niños y las niñas son capaces de establecer son, junto con el análisis de cambios cualitativos, el punto de partida para empezar el desarrollar el pensamiento algebraico a través del enfoque *early algebra*. De este modo, se refuerza la idea que, en las primeras edades, el conocimiento físico es un conocimiento preliminar imprescindible para promover el conocimiento matemático.

El concepto *early algebra* aparece para diferenciar el álgebra tradicional relativa a la Educación Secundaria como una actividad generadora del pensamiento algebraico que aparece en las primeras edades (Kaput 2008). Actualmente, son varios los currículos de Educación Infantil que han empezado a introducir de forma explícita conocimientos para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades (Pincheira y Alsina, 2021), en la línea señalada por autores y organismos como Carpenter et al. (2003) o el NCTM (2003). Cabe señalar que, en ningún caso, esta nueva corriente considera el álgebra como una asignatura más en los currículos de Educación Infantil, y se destaca únicamente como la manera de pensar y actuar sobre los objetos, las relaciones, las estructuras y situaciones matemáticas (Carpenter et al., 2003).

Diferentes autores como Geist (2014), Clements y Sarama (2015) o Björklund y Barendregt (2016) señalan la relación que existe entre los conocimientos, competencias y habilidades de los profesionales y las competencias y habilidades que desarrollan los infantes a los que acompañan. Además, existe una clara vinculación entre el conocimiento de los profesionales, el diseño de las propuestas y las ayudas que ofrecen al alumnado. Por consiguiente, el conocimiento del profesorado determina las acciones que van a poder desarrollar los niños y las niñas durante la educación infantil, las habilidades que van a ejercitar y las competencias que podrán adquirir.

Considerando estos antecedentes, el objetivo de este estudio, que forma parte de una investigación de mayor envergadura, es analizar cómo afecta una actividad de formación continua en el conocimiento que movilizan 28 profesionales de la Escuela Infantil (0-3 años) para promover los inicios del pensamiento algebraico.

CONOCIMIENTO DEL PROFESORADO DE LA ESCUELA INFANTIL PARA PROMOVER EL INICIO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Alsina y Delgado (2021), a partir de diversos modelos de conocimiento como el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball et al., (2008). el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017) o el Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) de Carrillo et al. (2018), junto con una revisión

exhaustiva de la literatura sobre educación matemática infantil (Alsina, 2020), han caracterizado un conjunto de conocimientos que necesita el profesorado de infantil para enseñar matemáticas, siguiendo la misma estructura de los modelos indicados, pero focalizándose en esta etapa educativa: los Conocimientos Matemáticos en Educación Infantil (CM-EI) y los Conocimientos Didácticos de las Matemáticas para la Educación Infantil (CDM-EI).

Dentro del CM-EI, en este estudio se considera el subtipo Conocimiento de las Matemáticas Emergentes (C-ME), en el que se encuentran descritos los conocimientos matemáticos emergentes vinculados al inicio del pensamiento algebraico. Los infantes, desde que nacen y a lo largo de los primeros tres años de vida, desarrollan las primeras acciones vinculadas a los inicios del pensamiento algebraico en situaciones informales de exploración, manipulación y juego (Tabla 1). De acuerdo con Alsina (2019), el profesorado de la Escuela Infantil debe tener un conocimiento amplio y profundo de estas matemáticas emergentes para poder diseñar los espacios de juego y exploración. A pesar de que estos conocimientos permean en los distintos estándares de contenido matemático, este estudio se focaliza exclusivamente en los vinculados a las cualidades sensoriales, al ser el eslabón para desarrollar conocimientos correspondientes a otros ejes, como ya se ha señalado.

Tabla 1. Acciones asociadas el inicio del pensamiento algebraico de 0 a 3 años.

Capacidades	Identificar (reconocer)	Relacionar (Comparar)	Operar (Transformar)
Contenidos	Reconocimiento de las características físicas de los objetos.	Clasificaciones por criterios cualitativos.	Cambios cualitativos en los objetos y el entorno inmediato.
		Correspondencias cualitativas.	
		Ordenaciones por criterios cualitativos.	
	Agrupaciones por criterios cualitativos.	Seriaciones.	

Fuente: (Alsina, 2015 p. 34)

El reconocimiento de las características sensoriales, de acuerdo con Alsina (2015) incluye acciones como mirar, tocar, palpar, lamer, morder, etc., que en su conjunto permiten descubrir de qué están hechos los objetos y reconocer, poco a poco, sus características físicas. En cuanto a las agrupaciones según atributos cualitativos, este autor destaca que, al mismo tiempo que los niños y las niñas van descubriendo de qué están hechos los objetos, van reconociendo la existencia de diferentes objetos que comparten las mismas características (color, forma, textura, etc.).

Geist (2014) explica que aproximadamente al año, los niños y las niñas empiezan a crear estructuras de pensamiento en su cerebro en función de las cualidades que han ido descubriendo. Durante los primeros meses de vida, pues, empiezan a establecer estas primeras estructuras o categorías, como por ejemplo “cosas que son redondas”, “cosas que son suaves” o “cosas que no hacen ruidos fuertes cuando se golpean entre sí porque son suaves”. En este sentido, cada vez que tocan, ven o huelen, por ejemplo, lo recuerdan de cierta manera y construyen lo que Piaget y Inhelder (1967) definen como esquema de pensamiento. Para los infantes, estos esquemas son muy concretos y están directamente relacionados con sus sentidos y con la actividad motora, pero en ningún caso son simples. El desarrollo de este pensamiento está estrechamente vinculado con una manera de pensar y actuar con objetos, relaciones y estructuras matemáticas (Alsina, 2019).

Diferentes autores (e.g., Alsina, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014; Ginsburg et al., 1998) señalan que el niño, al tiempo que identifica las características de los elementos, también las relaciona y las compara. En esta línea, Piaget y Inhelder (1967) ya indicaron que, en primer lugar, los niños y las niñas perciben las cualidades de los objetos a partir de las relaciones de similitud y diferencia y, en segundo lugar, según van comprendiendo las relaciones que se dan entre los objetos, van desarrollando una estructura de pensamiento más elevada que les permite hacer

clasificaciones y seriaciones. Las clasificaciones de elementos según criterios cualitativos van un paso más allá de la identificación de las cualidades sensoriales, implicando un salto en el desarrollo del pensamiento matemático del niño (Clements y Sarama, 2015; Geist, 2014).

Geist (2014) ofrece rangos de edades sobre el momento en que aparecen estas primeras clasificaciones. Entre los 12-18 meses las clasificaciones suelen ser simples por un solo criterio cualitativo y, posteriormente, entre los 18-24 meses, la clasificación acostumbra a ser más compleja y aparecen clasificaciones múltiples con objetos de una misma colección, pero bajo criterios cualitativos diferentes.

En relación con las correspondencias cualitativas, Alsina (2015) explica que hacen referencia a la capacidad para hacer asociaciones o apareamientos según criterios cualitativos. Por ejemplo, cuando se relacionan dos elementos del mismo color. Y en cuanto a las ordenaciones, el criterio parte de la comparación entre los diferentes objetos sobre la cantidad del atributo que se está comparando. Por ejemplo, la gradación del color de un rosa pálido a un rosa intenso.

Respecto a las seriaciones, en las primeras edades se consideran como las acciones vinculadas a las repeticiones de un patrón (AB). Clements y Sarama (2015) explican que la amplitud de formas en que se utiliza el término “patrones” denota, por un lado, la importancia de estos para el aprendizaje de las matemáticas y, por otro lado, la complejidad que abarca el concepto. De hecho, los mismos autores explican que existen diferentes tipos de patrones y destacan la importancia de favorecer contextos educativos que los favorezcan. En este sentido, exponen que el concepto de “patrón” va mucho más allá de los patrones repetidos secuenciales y los definen como una búsqueda de regularidades y estructuras matemáticas, como un proceso y un hábito mental importantísimo. Por tanto, exponen que, aunque se considera que los patrones en las primeras edades hacen referencia a la práctica de hacer seriaciones con dos elementos (AB), estas cadenas repetitivas pueden ser útiles, pero en ningún caso se pueden considerar como los únicos procedimientos a desarrollar. Aunque en la Escuela Infantil las seriaciones a partir de patrones de repetición sean muy simples, Clements y Sarama (2015) proponen prácticas de patrones perceptuales (como patrones de dominó subitizados, patrones de dedos o patrones auditivos), patrones de conteo o patrones espaciales.

Finalmente, en relación con los cambios cualitativos que se producen en los objetos y en el entorno inmediato, se produce una transformación de una situación inicial dando lugar a una situación final diferente, a través de un operador. Son cambios que pueden presentar los mismos objetos o cambios en el entorno, y que de alguna manera modifican las características del mismo objeto (por ejemplo, “ser más alto”).

Fruto del análisis exhaustivo que hacen los niños y las niñas de las cualidades de los objetos y de las relaciones que se establecen entre ellos, descubren principios matemáticos fundamentales como por ejemplo el principio de causalidad, entre los 6-9 meses aproximadamente (Geist, 2014). Otro aspecto clave para el desarrollo del pensamiento matemático aparece entre los 24 a 36 meses, aproximadamente, cuando, según Geist (2014), los niños y las niñas desarrollan un pensamiento representativo a través del lenguaje, dibujos y objetos.

METODOLOGIA

Se ha diseñado un estudio cuasi-experimental (Creswell, 2009) en el que, antes y después de una actividad de formación, se ha analizado el conocimiento de 28 profesionales de la Red de Escuelas Infantiles Municipales de Vic-EBMV para promover los inicios del pensamiento algebraico de niñas y niños menores de 3 años. La muestra ha sido seleccionada de manera intencionada, de forma no aleatoria, participando en el estudio 16 maestras, 1 maestro y 11 técnicas de Educación Infantil, de entre 23 y 60 años.

Para analizar el conocimiento de los participantes en el estudio, se diseñó y validó el Cuestionario “Conocimientos Didáctico-Matemáticos en la Escuela Infantil” (CDM 0-3). En concreto, se propuso a 10 expertos de diferentes universidades y de distintas escuelas infantiles que validasen el cuestionario y se incorporaron sus aportaciones en el instrumento. Este cuestionario es personal, con presencia del encuestador y semiestructurado. Su diseño contiene dos tipos de ítems: por un lado, incluye preguntas cerradas para controlar las variables a las que se ha dado un trato propio de la investigación cuantitativa y, por otro lado, preguntas abiertas para determinar los conocimientos matemáticos a partir de un análisis categórico mixto. En este estudio en concreto se analizan los datos correspondientes a dos de las preguntas abiertas: una consiste en detectar en las imágenes de los espacios y materiales de las distintas aulas de las escuelas, los conocimientos matemáticos relativos al pensamiento algebraico (a partir de imágenes de cada espacio debían anotar qué conocimientos identificaban), y la otra pregunta recoge información relativa al diseño de las programaciones de los profesionales, para analizar los contenidos matemáticos. Además, se analizaron también las planificaciones de los diseños de espacios y materiales con contenido matemático que prepara el profesorado.

Los cuestionarios han mantenido un carácter anónimo, pero a los participantes se les asignó un código para poder identificar y emparejar los cuestionarios de la fase pre con la fase post. A partir del marco de referencia (Tabla 1), previamente, se establecieron las categorías sobre los conocimientos vinculados al pensamiento algebraico. Las respuestas se han transformado en datos numéricos (por frecuencias de aparición) y, dándoles un tratamiento estadístico mediante el programa SPSS, se ha desarrollado el análisis. Las categorías se han descrito según el número y el porcentaje de casos de cada categoría. Las variables continuas han sido descritas mediante estadísticos de tendencia central como la mediana y la desviación estándar.

RESULTADOS

Los datos recogidos mediante el cuestionario muestran diferencias entre el pre y el post. Después de la formación que, en uno de los bloques, se centró en la observación, documentación e interpretación de acciones matemáticas en la Escuela Infantil en torno al pensamiento algebraico, la frecuencia de aparición de las acciones detectadas en las imágenes del cuestionario aumenta el 154.05% (de 37 acciones detectadas antes de la formación se pasa a 94 después). Las acciones que mayor crecimiento han tenido son las asociadas a las agrupaciones de elementos según las cualidades sensoriales, que han pasado de solo un participante (3.6%) a veinte (72%), seguido de las clasificaciones cualitativas, que ha pasado de seis (21.6%) a veinte (72%). Aun así, los datos presentan también diferencias en función del contenido o la capacidad a qué se refiere. Por un lado, aparecen otras acciones con una fuerte recurrencia y otros poco frecuentes. Ejemplo de ello son las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos, que ni antes ni después de la formación aparecen de manera recurrente. Por lo contrario, la identificación de cualidades sensoriales aparece tanto en el primer cuestionario como en el segundo, con una extensa mayoría, 24 (86.4%) y 26 (93.6%) profesionales que respectivamente identificaban este contenido.

En relación con las programaciones respecto el diseño de los espacios y materiales, existe un aumento significativo de la presencia de objetivos programados vinculados a las acciones de identificar, relacionar u observar cambios en las cualidades sensoriales pasando de 6 objetivos diseñados antes de la formación a 43 post formación.

Mediante el análisis de la documentación, los resultados muestran que antes de la formación los profesionales no planificaban las propuestas considerando como podían desarrollar los niños y las niñas el pensamiento algebraico, y no habían desarrollado ninguna planificación, ni programación, donde recogiesen los contenidos matemáticos que favorecerían con el diseño de sus propuestas. Después de la formación, los profesionales incorporaron en el diseño de los espacios y materiales contenido matemático. Tal y como muestra la Figura 1, en función del nivel educativo los contenidos

y capacidades identificados fueron diferentes. En el nivel de Infantil 0 los profesionales han planificado 10 actividades vinculadas al reconocimiento de las cualidades sensoriales y 2 a las correspondencias. Los profesionales de Infantil 1 han planteado un mayor número de actividades que Infantil 0 con un mayor número y diversidad de contenidos matemáticos. Concretamente, los únicos contenidos que no destacan en este nivel son la observación de cambios cualitativos. Finalmente, en el nivel de Infantil 3 siguen aumentando significativamente el número de contenidos respecto a Infantil 0 (I0) e Infantil 1 (I1) apareciendo contenidos de todas las capacidades descritas, con la presencia de acciones como clasificar, seriar, ordenar y observar los cambios. Claramente, aumentan las propuestas diseñadas a medida que avanzan los cursos de la Escuela Infantil.

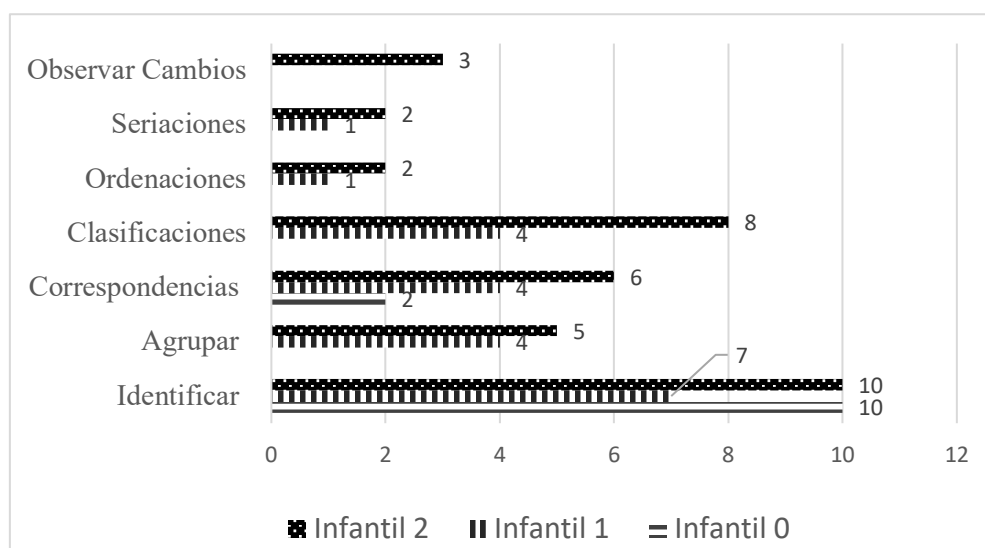


Figura 1. Planificación de propuestas con contenido vinculado a acciones en torno las cualidades sensoriales diseñados por los profesionales post formación.

CONSIDERACIONES FINALES

Los datos obtenidos en este estudio muestran que hay un cambio significativo en el conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento algebraico después de la formación continua, que se refleja en la práctica docente de los profesionales, tanto en el diseño de los espacios y materiales como en sus programaciones. En este sentido, los profesionales son capaces de detectar mayor número de contenidos. Además, incorporan con mayor frecuencia en sus planificaciones propuestas para favorecer la aparición de acciones vinculadas al pensamiento algebraico, a partir de las acciones de identificar, reconocer, ordenar, comparar, seriar, etc. (Alsina, 2015; Baroody, 1987; Clements y Sarama, 2015; Ginsburg, et al., 1998) que, de forma natural e innata (Mason, 2008; Acosta y Alsina, 2020), dan lugar al inicio del proceso de generalización (Papic et al., 2011).

Aun así, aparecen contenidos poco frecuentes como, por ejemplo, las ordenaciones, seriaciones y observaciones de cambios cualitativos. Ello puede explicarse por la desvinculación del pensamiento algebraico en las primeras edades con las acciones de clasificar, ordenar, que son distintos tipos de relaciones.

En este sentido, Alsina (2015) sugiere que las acciones de identificar las características de los objetos y establecer relaciones entre ellas son la base necesaria para empezar a desarrollar el pensamiento algebraico, que incluye un conjunto de capacidades que implican representar, generalizar, formalizar patrones y regularidades (Godino y Font, 2003). Estos aspectos están estrechamente vinculados a los procedimientos de seriar, clasificar y relacionar, siendo claves en el corazón de las matemáticas y palpables en cualquier nivel educativo (Clements y Sarama, 2015). De hecho, en la formación se

introdujeron contenidos directamente vinculados con el álgebra temprana y estos fueron fácilmente incorporados por los profesionales. Los datos recogidos reflejan cómo, antes de la formación, los profesionales describían de forma recurrente solo algunos de los contenidos vinculados con el álgebra temprana; mientras que, una vez desarrollada la formación, podían hablar con seguridad y aportar una definición clara y completa sobre los contenidos propios de este bloque de contenido. Aun así, no todos los contenidos fueron incorporados de la misma manera, ni por todos los participantes.

De modo general, se concluye que los conocimientos matemáticos en torno a las acciones que permiten desarrollar el pensamiento algebraico de los profesionales antes de la formación eran insuficientes y que después de la formación continua se han enriquecido y ampliado, pero algunas creencias equívocas sobre qué matemáticas desarrollan los niños en las primeras edades y como se pueden favorecer están tan arraigadas, que los profesionales requieren de una formación más extensa que les permita implementar y consolidar los conocimientos introducidos. Por ello, para futuras investigaciones, sería necesario indagar en los diseños y contenidos de los programas de formación inicial analizando qué conocimientos disciplinares y didácticos se están introduciendo en los diferentes planes de estudio valorando si facilitan los conocimientos y estrategias necesarias para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en estas primeras edades (0-3).

Referencias

- Acosta, Y., y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, 45(1), 14-29. <https://doi.org/10.1177/1836939119885310>
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8, 1-19. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19>
- Alsina, Á., y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional. Una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 218-235. <https://rb.gy/gymq6m>
- Alsina, Á., y Delgado, R. (2021). Identificando los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil: un primer paso para el desarrollo profesional. *ReviSeM: Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6, 1-23. <https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16003>
- Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baroody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- Björklund, C., y Barendregt, W. (2016). Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 359-377. <https://doi.org/10.1080/00313831.2015.1066426>
- Canals, M^a. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola: I. Parvulari*. Eumo Editorial.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M^a.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

- Clements, H.D., y Sarama J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. El enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Creswell, J.W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed approaches*. Sage.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Reidel.
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.
- Ginsburg, H. P., Klein, A., y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research and practice. En I.E. Siegel y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology: Child psychology in practice* (Vol. 4, pp. 401-476). John Wiley y Sons.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J., y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. <https://rb.gy/9qxvst>
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah.
- National for Council Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Papic, M.M., Mulligan, J.T., y Mitchelmore, M.C. (2011). Assessing the development of preschoolers Mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.42.3.0237>
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. W. W. Norton & Company, Inc.
- Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>